Kompaktnost u normiranim prostorima

Puljiz, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Puljiz

KOMPAKTNOST U NORMIRANIM PROSTORIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tomislav Berić

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Osnovni pojmovi **5**
1.1 Topološki prostori . . . 5
1.2 Metrički prostori . . . 13
1.3 Normirani prostori . . . 16
1.4 Topološki vektorski prostori . . . 26

2 Kompaktnost u normiranim prostorima **31**
2.1 Kompaktnost u prostorima neprekidnih funkcija . . . 31
2.2 Kompaktnost u L^p prostorima . . . 36
2.3 Kompaktnost konveksnih skupova . . . 41

3 Slabe topologije **49**
3.1 Slaba topologija inducirana familijom preslikavanja . . . 49
3.2 Slaba topologija normiranog prostora . . . 55
3.3 Slaba* topologija normiranog prostora . . . 62

4 Kompaktnost u slabim topologijama **69**
4.1 Banach-Alaogluov teorem . . . 69
4.2 Kakutanijev teorem . . . 75
4.3 Eberlein-Šmulianov teorem . . . 78
4.4 Krein-Šmulianov teorem . . . 85
4.5 Jamesov teorem . . . 90

A L^p prostori **97**

B Dualni prostor C(K)' **99**

C Zornova lema **101**

Bibliografija **103**

Uvod

Kompaktnost je svojstvo topoloških prostora od neprocjenjivog značaja u gotovo svim granama matematike. Ona u svojoj srži donosi koncept konačnosti u topološke prostore. U brojnim matematičkim razmatranjima često imamo slučaj gdje neko svojstvo vrijedi lokalno oko svake točke prostora. Kompaktnost takvog prostora daje nam samo konačno mnogo opcija za to svojstvo što otvara vrata brojnim argumentima koji su nam intuitivniji i jednostavniji, a koji ne bi funkcionirali bez te konačnosti. Tako kompaktnost neke lokalne informacije o strukturi prostora čini globalnima. Cilj ovog rada je izučiti svojstva kompaktnih skupova iz nekoliko različitih aspekata i u nekoliko različih okruženja.

U prvom poglavlju krećemo od općenitih topoloških prostora i postepeno dolazimo do normiranih prostora, usput navodeći značajke kompaktnosti u takvim prostorima. Povijesno su se javljale različite definicije kompaktnosti za koje se na kraju ispostavilo da su ekvivalentne u većini prostora koji su nam od interesa. No, općenito to neće biti slučaj u bilo kojem topološkom prostoru, stoga uvodimo četiri različita tipa kompaktnosti – običnu, prebrojivu, gomilišnu i nizovnu kompaktnost. Nizovna kompaktnost je ona koja se, uz običnu, najčešće koristi, a omogućava nam ekstrakciju konvergentnih podnizova proizvoljnih nizova. Pokazat ćemo neke implikacije između tih tipova, no bez nekih dodatnih pretpostavki nećemo moći reći puno toga o njihovom odnosu. Naime, mogu se konstruirati relativno "nepatološki" topološki prostori koji su kompaktni, a nisu nizovno kompaktni, ali i obratno.

Dalje nastavljamo s metričkim prostorima. Oni među svim topološkim prostorima čine klasu lijepih prostora čija su nam svojstva intuitivna i s kojima je lagano baratati. Zato nam je u interesu prepoznati koji su topološki prostori u pozadini zapravo metrički, što ćemo i učiniti za svaku novu topologiju koju uvedemo u ovom radu. Znamo da je podskup od $\mathbb{R}$ kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen. Za takve prostore kažemo da imaju Heine-Borelovo svojstvo. U proizvoljnom metričkom prostoru zatvorenost i ograničenost više nisu dovoljni za karakterizaciju kompaktnosti. No, vidjet ćemo da će uz nešto jači koncept ograničenosti, tzv. totalne ograničenosti, vrijediti analogna tvrdnja u potpunim metričkim prostorima. Također, vidjet ćemo da su u metričkim prostorima sva četiri tipa kompaktnosti ekvivalentna.

Time dolazimo do normiranih prostora koji su glavni predmet ovog rada. Svaki normiran prostor je i metrički prostor, no oni uz to imaju strukturu vektorskog prostora koja uvelike olakšava razmatranja takvog prostora. Prirodno će se javiti važnost zatvorene jedinične kugle kao prototipa zatvorenog i ograničenog skupa. Razumijevanje njezinih svojstava se lagano proširuje na ostale, njoj slične skupove. Na primjer, kada bi zatvorena jedinična kugla bila kompaktna, ona bi bila i nizovno kompaktna pa bi svaki ograničen niz imao konvergentan podniz. To je nešto što znamo da vrijedi u $\mathbb{R}$ po Bolzano-Weierstrassovom teoremu, a uz malo truda se pokazuje da vrijedi i u bilo kojem konačnodimenzionalnom normiranom prostoru. No, tu priča nažalost staje jer čim je prostor beskonačne dimenzije zatvorena jedinična kugla neće biti kompaktna. Ovo je glavna motivacija ovog rada. Naime, beskonačnodimenzionalni prostori sadrže jako puno otvorenih skupova, što dozvoljava jako fine otvorene pokrivače tako da će jako malo skupova biti kompaktno. Ideja je stoga promatrati neke druge, manje topologije na tom prostoru koje će na neki način obuhvatiti dovoljno informacija o njemu, ali tako da imamo više kompaktnih skupova. Jasno da takva topologija više neće biti inducirana normom tako da više nećemo imati strukturu normiranog prostora. Tu se prirodno javlja jedna šira klasa tzv. topoloških vektorskih prostora čije se topologije dobro ponašaju s obzirom na operacije u vektorskom prostoru. Vidjet ćemo da ovakvi prostori zadržavaju brojna svojstva normiranih prostora na koja smo navikli, iako ne moraju biti normirani.

Cilj drugog poglavlja je okarakterizirati kompaktne skupove u nekim često korištenim normiranim prostorima beskonačne dimenzije. Želimo dati neke kriterije u terminima matematičke analize kojima bismo osigurali kompaktnost skupova koje promatramo. Prvo dokazujemo poznati Arzelà-Ascolijev teorem kojim je dana vrlo elegantna karakterizacija kompaktnosti u prostorima neprekidnih funkcija. On se često primijenjuje da bi se utvrdilo ima li svaki niz neke familije neprekidnih funkcija definiranih na kompaktnom skupu uniformno konvergentan podniz. Zatim ćemo koristeći ovaj teorem dokazati Fréchet-Kolmogorovljev teorem kojim je dana karakterizacija kompaktnosti u $L^p(\mathbb{R}^d)$. Ovi teoremi imaju široku primjenu u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Ostatak poglavlja posvećujemo kompaktnosti važne klase konveksnih skupova. Promatrat ćemo tzv. ekstremne točke na koje možemo gledati kao na generalizaciju vrhova mnogokuta za proizvoljne podskupove vektorskog prostora. Svaki mnogokut je jednak zatvorenoj konveksnoj ljusci svojih vrhova, a poznati Krein-Milmanov teorem daje generalizacije ove tvrdnje za kompaktne i konveksne skupove. Ovaj teorem nam omogućuje da, nakon što identificiramo ekstremne točke skupa, zaključimo da se svaka točka tog skupa može proizvoljno dobro aproksimirati konveksnom kombinacijom njegovih ekstremnih točaka.

U trećem poglavlju se vraćamo na nekompaktnost zatvorene jedinične kugle i počinjemo razmatrati načine na koje možemo uvesti topologiju na neki skup. Topologije koje imaju puno otvorenih skupova osiguravaju neprekidnost velikog broja preslikavanja na tom prostoru, no, u drugu ruku, kao posljedicu imaju mali broj kompaktnih skupova. Želimo pronaći kompromis između neprekidnosti i kompaktnosti pa se prirodno nameću topologije koje su na neki način inducirane familijama preslikavanja. Krećemo od generalne situacije gdje imamo skup i neku familiju preslikavanja na njemu. Slabu topologiju takvog skupa ćemo definirati kao najmanju topologiju za koju je ta familija preslikavanja neprekidna. U središtu naših razmatranja je situacija kada na normiran prostor uvodimo slabu topologiju pri čemu je familija preslikavanja neki potprostor njegovog duala. Tako dobivamo slabu topologiju normiranog prostora i slabu* topologiju njegovog duala. Vidjet ćemo da se ove topologije podudaraju s uobičajenim topologijama norme kad god je prostor konačne dimenzije, no u beskonačnodimenzionalnim prostorima pokazuju vrlo zanimljiva ponašanja. Na primjer, u tom slučaju svaki otvoren skup u tim topologijama će biti neograničen, iz čega je jasno da više nećemo moći razmišljati u terminima otvorenih kugala kao što smo navikli. Pokazat ćemo da ove topologije nisu metrizabilne, ali da su po nekim svojstvima nevjerojatno slične metričkim prostorima. Zato su svi dokazi ovog poglavlja negdje na prekretnici opće topologije i funkcionalne analize.

Nakon što razvijemo dovoljno alata za rad u ovim topologijama, u posljednjem poglavlju bavimo se najvažnijim rezultatima o slaboj i slaboj* kompaktnosti. Prvo pitanje koje nas zanima je kompaktnost zatvorene jedinične kugle. Na to pitanje ćemo odmah odgovoriti poznatim Banach-Alaogluovim teoremom koji tvrdi da je zatvorena jedinična kugla duala uvijek slabo* kompaktna. Kao posljedicu ovog teorema ćemo vidjeti da slaba* topologija duala Banachovog prostora ima Heine-Borelovo svojstvo, odnosno da je skup slabo* kompaktan ako i samo ako je ograničen i slabo* zatvoren, što je zanimljiv rezultat jer niti svi metrički prostori nemaju to svojstvo. Zatvorena jedinična kugla ne mora biti slabo kompaktna, čak ni uz neke dodatne pretpostavke poput potpunosti ili separabilnosti prostora. No, uz pretpostavku refleksivnosti prostora ona će biti slabo kompaktna. Štoviše, slaba kompaktnost zatvorene jedinične kugle u potpunosti karakterizira refleksivne prostore, što je sadržaj Kakutanijevog teorema. Za svaki topološki prostor nam je važno znati u kojem su odnosu različite vrste kompaktnosti. U metričkim prostorima su sve ekvivalentne, ali mi radimo s topologijama koje nisu metrizabilne. Iznenađujuć rezultat je da su u slabim topologijama svakog normiranog prostora ekvivalentne, što dokazujemo u sklopu Eberlein-Šmulianovog teorema. Vidjet ćemo da slaba topologija pokazuje nevjerojatno bliska svojstva metričkim prostorima. Na primjer, svaki slabo kompaktan skup će biti potpun, što vrijedi i za svaki kompaktan skup u metričkom prostoru.

Sljedeće pitanje koje promatramo je što možemo reći o konveksnoj ljusci kompaktnih skupova u ovim topologijama. Općenito, konveksna ljuska zatvorenog skupa u $\mathbb{R}^n$ ne mora nužno biti zatvoren skup, ali konveksna ljuska kompaktnog skupa će biti kompaktan skup, pa i zatvoren. Ovo svojstvo imaju i svi konačnodimenzionalni prostori, no prelaskom na beskonačnu dimenziju ono se gubi. Naime, vidjet ćemo da konveksna ljuska kompaktnog skupa u Banachovom prostoru ne mora nužno biti kompaktan skup, ali da je jako blizu tome da bude kompaktan. No, Mazurovim i Krein-Šmulianovim teoremom ćemo pokazati da će *zatvorena* konveksna ljuska biti kompaktna, odnosno slabo kompaktna.

Rad završavamo poznatim Jamesovim teoremom kojim dajemo karakterizaciju refleksivnosti prostora pomoću svojstva dostizanja norme. U bilo kojem topološkom prostoru neprekidna realna funkcija na kompaktu će poprimiti svoj supremum. No, nas zanima obratno pitanje – ako određena klasa realnih funkcija na nekom skupu uvijek poprima svoj supremum, što možemo reći o tom skupu? James je pokazao da su u Banachovom prostoru slabo zatvoreni skupovi na kojima svi ograničeni linearni funkcionali poprimaju svoj supremum nužno slabo kompaktni.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Cilj ovog poglavlja je uvesti neke osnovne defincije i motivirati razmatranja u ostatku rada. Većinu standardnih rezultata ovog poglavlja navodimo bez dokaza koji se mogu pronaći u [8] ili [5]. Kroz ovaj rad isprepliću se dobro poznata, intuitivna struktura normiranih prostora i često apstraktna struktura općenitih topoloških prostora. Zato postepeno dolazimo do pojma normiranog prostora, krećući prvo s topološkim i metričkim prostorima navodeći svojstva koja ih karakteriziraju s posebnim naglaskom na kompaktnost u takvim prostorima. Na kraju uvodimo pojam topološkog vektorskog prostora koji će nam predstavljati generaliziran normiran prostor.

1.1 Topološki prostori

Krećemo s nekoliko osnovnih definicija vezanih uz topološke prostore, a zatim uvodimo pojmove baze okoline i hipernizova koji će nam biti važan alat u ostatku rada.

Definicija 1.1.1. ***Topološki prostor*** *je uređen par* (X, τ)*, gdje je* X *skup, a* τ ***topologija*** *na* X*, tj. familija podskupova od* X *sa sljedećim svojstvima:*

(i) $\emptyset \in \tau$ *i* $X \in \tau$*;*

(ii) τ *je zatvorena na proizvoljne unije;*

(iii) τ *je zatvorena na konačne presjeke.*

Za $S \subseteq X$ kažemo da je **otvoren** ako je $S \in \tau$, a da je **zatvoren** ako je $X \setminus S$ otvoren. **Interior** od S je unija svih otvorenih podskupova od X koji su sadržani u S i označavat ćemo ga s $\operatorname{Int} S$. **Zatvarač** od S je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže S, a njega označavamo sa $\overline{S}$. **Rub** skupa S definiramo kao skup $\partial S = \overline{S} \cap \overline{X \setminus S}$. Za S kažemo da je **gust** u X ako je $\overline{S} = X$. Za X kažemo da je

separabilan ako sadrži gust prebrojiv podskup, a da je **Hausdorffov** ako za svake dvije različite točke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $U, V \in \tau$ takvi da $x \in U$ i $y \in V$.

Definicija 1.1.2. *Neka je (X, τ) topološki prostor i neka je $S \subseteq X$. Tada je familija skupova $\tau_S = \{ S \cap U : U \in \tau \}$ topologija na S za koju kažemo da je* ***relativna topologija*** *na S. Topološki prostor (S, τ_S) zovemo* ***potprostorom*** *prostora (X, τ).*

Ovako se prirodno prenose topološki koncepti definirani za cijeli prostor na podskupove tog prostora. Na primjer, skup $A \subseteq S$ će biti gust podskup potprostora (S, τ_S) ako vrijedi $\overline{A} = S$, pri čemu ovdje gledamo zatvarač u odnosu na relativnu topologiju na S što se pokazuje da je ekvivalentno $S \subseteq \overline{A}$ pri čemu je sada zatvarač promatran u odnosu na topologiju τ.

Baza topologije i okoline

Da bismo opisali strukturu topologije nekog prostora potrebno je znati samo neku podfamiliju koja dovoljno dobro opisuje tu topologiju.

Definicija 1.1.3. *Neka je (X, τ) topološki prostor.* ***Baza okolina*** *u točki $x \in X$ je familija skupova $\mathcal{O}(x) \subseteq \tau$ takva da vrijedi:*

(i) $x \in V$ za sve $V \in \mathcal{O}(x)$;

(ii) za svaki $U \in \tau$ takav da je $x \in U$ postoji $V \in \mathcal{O}(x)$ takav da je $V \subseteq U$.

Elemente od $\mathcal{O}(x)$ nazivamo ***okolinama*** *točke x.* ***Baza topologije*** *τ na X je bilo koja familija $\mathcal{B} \subseteq \tau$ koja za svaku točku $x \in X$ sadrži kao podfamiliju $\mathcal{O}(x)$.*

Za X kažemo da zadovoljava **prvi aksiom prebrojivosti** ako svaka točka iz X ima prebrojivu bazu okolina. Sljedeća propozicija povezuje pojmove zatvarača skupa i okolina u nekoj točki.

Propozicija 1.1.4. *Neka je X topološki prostor i neka je $S \subseteq X$. Tada je $x \in \overline{S}$ ako i samo ako za svaku otvorenu okolinu U od x vrijedi $U \cap S \neq \emptyset$.*

Ako je $\mathcal{C}$ proizvoljna familija podskupova od X, tada **topologiju generiranu s** $\mathcal{C}$ definiramo kao presjek svih topologija na X koje sadrže $\mathcal{C}$ i označavamo ju s $\tau(\mathcal{C})$. Struktura tako dobivene topologije dana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.1.5. *Neka je $X \neq \emptyset$ i $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Tada se $\tau(\mathcal{C})$ sastoji od skupa X, te svih unija svih konačnih presjeka elemenata familije $\mathcal{C}$.*

Za nepraznu familiju $\mathcal{C}$ otvorenih podskupova topološkog prostora X kažemo da je **podbaza** ako familija svih konačnih presjeka skupova iz $\mathcal{C}$ tvori bazu topologije. Ako je $\mathcal{B}$ familija sa svojstvima iz Definicije 1.1.3, onda će se $\tau(\mathcal{B})$ sastojati od svih unija elemenata familije $\mathcal{B}$.

Neka je $S \subseteq X$. Za $x \in X$ kažemo da je **gomilište skupa** S ako svaka otvorena okolina točke x sadrži točku iz S različitu od x. U suprotnom kažemo da je x **izolirana točka** od S. Za $x \in X$ kažemo da je ω**-gomilište** ako svaka okolina od x sadrži beskonačno mnogo točaka iz S. Očito je pojam ω-gomilišta jači od pojma gomilišta. U većini prostora koji će nas zanimati ovi pojmovi će biti ekvivalentni, ali u općenitim topološkim prostorima točka može biti gomilište, a da nije ω-gomilište. Pokazuje se da ako je prostor Hausdorffov, tada su ti pojmovi ekvivalentni.

Definicija 1.1.6. *Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u topološkom prostoru (X,τ) kažemo da* ***konvergira*** *prema $x \in X$ ako za svaku okolinu U točke x postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$. Pišemo $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i kažemo da je x* ***limes*** *niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Za $x \in X$ kažemo da je* ***gomilište niza*** *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako za svaku okolinu U točke x i svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ postoji barem jedan $n \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_0$ i $x_n \in U$.*

Uzmimo u obzir da općenito limes konvergentnog niza ne mora biti jedinstven, ali bit će ako je prostor Hausdorffov. Za podskup $S \subseteq X$ kažemo da je **nizovno zatvoren** ako S sadrži limes svakog konvergentnog niza u S. Ako je S zatvoren, onda je i nizovno zatvoren. Obrat ne mora vrijediti. U skladu s time, **nizovni zatvarač** skupa S definiramo kao najmanji nizovno zatvoren skup koji sadrži S. Također, u gornjim definicijama nije potrebno inzistirati na svim otvorenim okolinama neke točke, nego samo na okolinama neke baze okolina te točke.

Hipernizovi

U općenitim topološkim prostorima nizovi nisu dovoljni da bismo mogli karakterizirati neke topološke pojmove. U tu svrhu uvodimo pojam hiperniza koji će nam imati važnu ulogu u brojnim topološkim argumentima koji slijede. Velik broj rezultata koji su nam poznati o ponašanju nizova imaju svoje analogone za hipernizove, ali ipak treba biti oprezan jer neke tvrdnje više neće vrijediti, npr. konvergentni hipernizovi u metričkom prostoru ne moraju biti ograničeni. Prvo navodimo definiciju usmjerenih skupova koji će nam poslužiti kao indeksni skupovi za hipernizove.

Definicija 1.1.7. ***Usmjeren skup*** *je skup $I \neq \emptyset$ s relacijom $\preceq$ na I koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) $\alpha \preceq \alpha$, za sve $\alpha \in I$;

(ii) Ako je $\alpha \preceq \beta$ i $\beta \preceq \gamma$, onda je $\alpha \preceq \gamma$ za sve $\alpha, \beta, \gamma \in I$;

(iii) Za sve $\alpha, \beta \in I$ postoji $\gamma \in I$ takav da $\alpha \preceq \gamma$ i $\beta \preceq \gamma$.

Hiperniz *u skupu X je bilo koje preslikavanje s usmjerenog skupa I u X. Ako je $x : I \to X$ hiperniz, tada ćemo α-ti član hiperniza $x(\alpha)$ označavati samo s x_α, a cijeli hiperniz s $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$.*

Svaki niz je primjer hiperniza ako za I uzmemo $\mathbb{N}$ sa standardnim uređajem. Pogledajmo još jedan primjer korišten u brojnim topološkim argumentima.

Primjer 1.1.8. *Neka je X topološki prostor i $x \in X$. Neka je I familija svih otvorenih okolina od x. Definirajmo relaciju $\preceq$ na I s $U \preceq V$ ako i samo ako $V \subseteq U$. Tada je I usmjeren skup, a ako uzmemo proizvoljan $x_U \in U$ za svaki $U \in I$, onda je $(x_U)_{U \in I}$ hiperniz u X.*

Definicija konvergentnog hiperniza je u potpunosti analogna definiciji konvergentnih nizova.

Definicija 1.1.9. *Neka je $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ hiperniz u topološkom prostoru X i neka je $x \in X$. Kažemo da $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$* ***konvergira*** *prema* ***limesu*** *x ako za svaku otvorenu okolinu U od x, postoji $\alpha_U \in I$ takav da $x_\alpha \in U$ čim je $\alpha_U \preceq \alpha$.*

Primijetimo da po ovoj definiciji hiperniz iz Primjera 1.1.8 konvergira prema x. Sljedeća vrlo važna propozicija u potpunosti karakterizira zatvarač nekog podskupa pomoću konvergentnih hipernizova tog podskupa.

Propozicija 1.1.10. *Neka je S podskup topološkog prostora X i neka je $x \in X$. Tada je $x \in \overline{S}$ ako i samo ako postoji hiperniz u S koji konvergira prema x. Ako X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti tada za svaki $x \in \overline{S}$ postoji niz u X koji konvergira prema x.*

Iz prethodne propozicije odmah slijedi da je podskup $S \subseteq X$ zatvoren ako i samo ako S sadrži limes svakog konvergentnog hiperniza iz S. Dakle, hipernizovi u potpunosti karakteriziraju zatvorene skupove, pa onda i cijelu topologiju prostora. Pomoću njih možemo karakterizirati i gomilište skupa. Točka $x \in X$ će biti gomilište skupa S ako i samo ako postoji hiperniz u $S \setminus \{x\}$ koji konvergira prema x.

Sada još želimo generalizirati pojam podniza. Nažalost, to više neće biti tako jednostavno jer ono što bismo zvali podhipernizom mora imati svoj indeksni skup koji također mora zadovoljavati svojstva usmjerenog skupa. Zato prvo uvodimo pojam kofinalnosti podskupa usmjerenog skupa koji će nam predstavljati dobre izbore za indeksni skup tog podhiperniza. Za podskup $J \subseteq I$ kažemo da je **kofinalan** u I ako za svaki $\alpha \in I$ postoji $\beta_\alpha \in J$ takav da $\alpha \preceq \beta_\alpha$.

Definicija 1.1.11. *Neka je X skup, I usmjeren skup s relacijom $\preceq$ i $f : I \to X$ hiperniz. Pretpostavimo da je $g : J \to I$ funkcija takva da*

(i) $g(\beta_1) \preceq g(\beta_2)$ za sve $\beta_1, \beta_2 \in J$ takve da je $\beta_1 \preceq \beta_2$;

(ii) $g(J)$ je kofinalan u I.

Tada za hiperniz $f \circ g : J \to X$ kažemo da je ***podhiperniz*** *od f.*

Brojni dodatni primjeri i svojstva hipernizova mogu se pronaći u [5, str. 143-152].

Neprekidnost

Neprekidnost preslikavanja je jedno od ključnih pojmova ovog rada. Kako ćemo promatrati nekoliko topologija na istom skupu X, za preslikavanje definirano na tom skupu nam je važno znati u odnosu na koje od tih topologija je neprekidno. Uvodimo dva koncepta neprekidnosti u topološkim prostorima.

Definicija 1.1.12. *Neka su X i Y topološki prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je:*

(i) ***neprekidno*** *u točki $x \in X$ ako za svaku otvorenu okolinu V od $f(x)$ u Y postoji otvorena okolina U od x u X takva da je $f(U) \subseteq V$;*

(ii) ***nizovno neprekidno*** *u točki $x \in X$ ako za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X koji konvergira prema x, niz $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema $f(x)$;*

Ako je f (nizovno) neprekidno u svakoj točki $x \in X$ kažemo samo da je (nizovno) neprekidno. Za f kažemo da je **homeomorfizam** ako je bijekcija te ako su f i f^{-1} neprekidna preslikavanja. Sljedećom propozicijom dano je nekoliko karakterizacija neprekidnosti.

Propozicija 1.1.13. *Neka su X i Y topološki prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ ekvivalentno je*

(i) f je neprekidno;

(ii) $f^{-1}(V)$ je otvoren u X za svaki otvoren podskup V od Y;

(iii) $f^{-1}(F)$ je zatvoren u X za svaki zatvoren podskup F od Y;

(iv) $f^{-1}(V)$ je otvoren u X za svaki $V \in \mathcal{B}$, gdje je $\mathcal{B}$ neka baza topologije na Y.

Također je moguće u potpunosti opisati neprekidnost funkcije preko konvergentnih hipernizova, što je sadržaj sljedeće propozicije.

Propozicija 1.1.14. *Neka su X i Y topološki prostori. Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno u točki $x \in X$ ako i samo ako hiperniz $(f(x_\alpha))_{\alpha\in I}$ konvergira prema $f(x)$ za svaki hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ u X koji konvergira prema x.*

Iz ovoga odmah slijedi da neprekidnost preslikavanja u točki povlači nizovnu neprekidnost u toj točki.

Kompaktnost u topološkim prostorima

Neka je (X, τ) topološki prostor i $S \subseteq X$. Za familiju $\mathcal{U}$ otvorenih podskupova od X kažemo da je **otvoreni pokrivač** od S ako je $S \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. **Potpokrivač** od $\mathcal{U}$ je bilo koji podskup $\mathcal{U}'$ od $\mathcal{U}$ takav da $S \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}'} U$. Sada smo spremni definirati četiri koncepta kompaktnosti koje ćemo promatrati u ovom radu.

Definicija 1.1.15. *Za podskup S topološkog prostora X kažemo da je:*

(i) ***kompaktan*** *ako svaki otvoreni pokrivač od S ima konačan potpokrivač;*

(ii) ***prebrojivo kompaktan*** *ako svaki prebrojivi otvoreni pokrivač od S ima konačan potpokrivač;*

(iii) ***gomilišno kompaktan*** *ako svaki beskonačan podskup od S ima gomilište u S;*

(iv) ***nizovno kompaktan*** *ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji je limes u S;*

U općenitim topološkim prostorima ove vrste kompaktnosti ne moraju biti ekvivalentne. Kompaktni skupovi su očito prebrojivo kompaktni. Prebrojiva kompaktnost implicira gomilišnu, a ako je X Hausdorffov onda su ta dva svojstva ekvivalentna. Svaki nizovno kompaktan skup je i gomilišno kompaktan. Svi prostori koje ćemo promatrati u ovom radu bit će Hausdorffovi pa karakterizacije prebrojive kompaktnosti u takvim prostorima nećemo navoditi jer će ona biti ekvivalentna gomilišnoj kompaktnosti.

Napomena 1.1.16. *Napomenimo da je kompaktnost na neki način intrinzično svojstvo skupa, dok npr. zatvorenost ovisi o ambijentnom prostoru. Točnije, ako je S podskup topološkog prostora Y koji je potprostor od X, onda S može biti zatvoren u Y, a da nije zatvoren u X. S druge strane, lako se vidi da će S biti kompaktan u Y ako i samo ako je kompaktan u X.*

Uvest ćemo još nekoliko vrsta kompaktnosti koje će imati nešto slabije zahtjeve od onih iz prošle definicije.

Definicija 1.1.17. *Za podskup S topološkog prostora X kažemo da je:*

(i) ***relativno kompaktan*** *ako je $\overline{S}$ kompaktan;*

(ii) ***relativno prebrojivo kompaktan*** *ako je $\overline{S}$ prebrojivo kompaktan;*

(iii) ***relativno gomilišno kompaktan*** *ako svaki beskonačan podskup od S ima gomilište u X;*

(iv) ***relativno nizovno kompaktan*** *ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji je limes u X.*

Napomenimo da niti u Hausdorffovim prostorima ne mora vrijediti da je skup relativno gomilišno/nizovno kompaktan ako i samo ako mu je zatvarač gomilišno/nizovno kompaktan. To će vrijediti u metričkim prostorima. Zanimljivo je da se kompaktnost u potpunosti može karakterizirati pomoću hipernizova, što je sadržaj sljedeće propozicije čiji se dokaz može pronaći u [5, Propozicija 2.1.37].

Propozicija 1.1.18. *Neka je X topološki prostor i neka je $S \subseteq X$. Tada je S kompaktan ako i samo ako svaki hiperniz u S ima podhiperniz s limesom u S.*

Kompaktne podskupove moguće je i karakterizirati tzv. svojstvom konačnih presjeka. Dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [8, Teorem 26.9].

Propozicija 1.1.19. *Neka je X topološki prostor i neka je $S \subseteq X$ neprazan zatvoren podskup. Tada je S kompaktan ako i samo ako za svaku familiju $(F_j)_{j\in J}$ zatvorenih podskupova od S koja ima svojstvo da svaka njena konačna potfamilija ima neprazan presjek vrijedi da je $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$.*

Često će nas zanimati pod kojim uvjetima će podskup nekog kompaktnog skupa biti kompaktan. Dokaz sljedećih tvrdnji se može pronaći u [8, Teoremi 26.2 i 26.3].

Propozicija 1.1.20. *Neka je X topološki prostor.*

(i) Svaki zatvoren podskup kompaktnog podskupa od X je kompaktan.

(ii) Ako je X Hausdorffov, onda je svaki kompaktan podskup od X zatvoren.

Sljedećom propozicijom dano je nekoliko karakterizacija prebrojive kompaktnosti iz koje se vidi da prebrojiva kompaktnost ima svojstva negdje između kompaktnosti i gomilišne kompaktnosti. Dokaz se može pronaći u [17].

Propozicija 1.1.21. *Neka je X topološki prostor i $S \subseteq X$. Tada je ekvivalentno:*

(i) S je prebrojivo kompaktan;

(ii) *Svaki beskonačan podskup od S ima ω-gomilište u S;*

(iii) *Svaki niz u S ima gomilište u S;*

(iv) *Svaka prebrojiva familija zatvorenih podskupova od S s praznim presjekom ima konačnu potfamiliju čiji je presjek prazan.*

Kompaktni skupovi se lijepo ponašaju s obzirom na neprekidne funkcije. Navodimo dva rezultata s dokazima u [8, Teoremi 26.6 i 26.7].

Propozicija 1.1.22. *Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje između topoloških prostora X i Y.*

(i) *Ako je $S \subseteq X$ kompaktan, tada je $f(S)$ kompaktan u Y.*

(ii) *Pretpostavimo da je X kompaktan prostor, a Y Hausdorffov. Ako je f bijekcija, tada je f homeomorfizam.*

Produktna topologija

Prirodno je pitati se kako definirati topologiju na produktu dva topološka prostora. No, može se promatrati i Kartezijev produkt proizvoljne familije prostora što je sadržaj sljedeće.

Definicija 1.1.23. *Neka je I neprazan skup i neka je za svaki $i \in I$ dan topološki prostor (X_i, τ_i).* ***Kartezijev produkt familije*** *$(X_i)_{i\in I}$ je skup $X = \prod_{i\in I} X_i$ čiji su elementi preslikavanja*

$$x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \quad \textit{takva da} \quad x(i) \in X_i, \quad \forall i \in I.$$

Produktna topologija *$\tau = \prod_{i\in I} \tau_i$ je najmanja topologija na X za koju su neprekidne sve projekcije*

$$\pi_i : X \to X_i, \quad \pi_i(x) = x(i).$$

Napomenimo da je i sama činjenica da je Kartezijev produkt familije nepraznih skupova neprazan netrivijalna i za nju nam je potreban aksiom izbora. Kasnije ćemo u Primjeru 3.1.7 odrediti bazu ove topologije. Hipernizovi će nam biti ključni alat u razmatranju topoloških svojstava prostora pa pogledajmo kako izgleda konvergencija u produktnim topologijama.

Propozicija 1.1.24. *Hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ u (X, τ) konvergira prema $x \in X$ s obzirom na produktnu topologiju τ ako i samo ako hiperniz $(\pi_i(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ konvergira prema $\pi_i(x)$ u (X_i, τ_i), za svaki $i \in I$.*

Sljedeća propozicija daje odnos između produktne topologije potprostora i relativne topologije produkta tih potprostora naslijeđene od produktne topologije cijelih prostora. Dokaz se može pronaći u [8, Teorem 19.3].

Propozicija 1.1.25. *Neka je Y_i potprostor od X_i, za svaki $i \in I$. Tada je $\prod_{i\in I} Y_i$ potprostor od $\prod_{i\in I} X_i$.*

Navodimo još jedan važan teorem koji govori o kompaktnosti produkta kompaktnih topoloških prostora. Dokaz se može pronaći u [8, Teorem 37.3].

Teorem 1.1.26. *(Tihonovljev teorem) Kartezijev produkt bilo koje familije kompaktnih topoloških prostora je kompaktan prostor. Ako je svaki prostor familije Hausdorffov, onda je i produktni prostor Hausdorffov.*

Iz Propozicije 1.1.25 i Tihonovljevog teorema se lagano dobije i sljedeća verzija: ako je K_i kompaktan podskup topološkog prostora X_i za svaki $i \in I$, tada je $\prod_{i\in I} K_i$ kompaktan u produktnoj topologiji prostora $\prod_{i\in I} X_i$.

1.2 Metrički prostori

Jedan on najvažnijih i najčešćih načina uvođenja topologije na neki skup je definiranjem metrike na tom skupu.

Definicija 1.2.1. ***Metrički prostor*** *je uređeni par (X, d), gdje je X skup, a d* ***metrika*** *na X, tj. funkcija $d : X \times X \to [0, +\infty\rangle$ takva da za sve $x, y, z \in X$ vrijedi:*

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Neka su $x \in X$ i $r > 0$. Skup $K(x, r) = \{ y \in X : d(x, y) < r \}$ zovemo **otvorenom kuglom**, a skup $\overline{K}(x, r) = \{ y \in X : d(x, y) \leq r \}$ **zatvorenom kuglom sa središtem** x **i radijusom** r. Za podskup S metričkog prostora X kažemo da je **otvoren** ako za svaki $x \in S$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq S$. Pokazuje se da ovako definirana familija otvorenih skupova čini Hausdorffovu topologiju. Uskoro ćemo vidjeti da metrički prostori imaju jako puno korisnih svojstava u odnosu na općenite topološke prostore. Zato nam je u interesu identificirati one topološke prostore čije topologije možemo inducirati metrikom na gore opisan način. U tu svrhu uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 1.2.2. *Za topološki prostor (X, τ) kažemo da je* ***metrizabilan*** *ako na X možemo uvesti metriku tako da se otvoreni skupovi s obzirom na tu metriku podudaraju s topologijom τ.*

Primijetimo da je za točku x metričkog prostora X familija $\{ K(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \}$ jedna prebrojiva baza okolina za x. Dakle, svaki metrički prostor zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti pa su u vidu Propozicije 1.1.10 nizovi dovoljni da bismo opisali topologiju od X. Iz te propozicije lagano slijedi da je podskup $S \subseteq X$ zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih konvergentnih nizova u S, odnosno koncepti zatvorenosti i nizovne zatvorenosti su ekvivalentni. Definicija konvergencije 1.1.6 se u metričkim prostorima značajno pojednostavljuje.

Propozicija 1.2.3. *Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u metričkom prostoru X konvergira prema $x \in X$ ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\,(d(x_n, x) < \varepsilon).$$

Važan koncept u teoriji metričkih prostora je potpunost. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u metričkom prostoru X kažemo da je **Cauchyjev** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Za podskup $S \subseteq X$ kažemo da je **potpun** ako je svaki Cauchyjev niz u S konvergentan s limesom u S.

Kako na X imamo definiranu metriku koja na neki način mjeri udaljenost točaka iz X, ima smisla govoriti o ograničenosti podskupova od X. U nastavku uvodimo dva važna koncepta ograničenosti. Za podskup $S \subseteq X$ definiramo njegov **dijametar** kao $d(S) = \sup\{ d(x, y) : x, y \in S \}$.

Definicija 1.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za $S \subseteq X$ kažemo da je*

(i) ***ograničen*** *ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da $d(S) \leq M$.*

(ii) ***totalno ograničen*** *ako za svaki $r > 0$ postoji konačan pokrivač od S koji se sastoji od kugala radijusa r sa središtima iz S.*

Svaki totalno ograničen podskup metričkog prostora je i ograničen. Obrat ne mora vrijediti. Zaista, neka je $X = \mathbb{R}$ s diskretnom metrikom $d(x, y) = \delta_{xy}$. Svaki podskup ovog prostora je u isto vrijeme zatvoren, otvoren i ograničen, uključujući cijeli prostor $\mathbb{R}$. No, $\mathbb{R}$ nije totalno ograničen jer ne možemo pokriti cijeli prostor s konačno mnogo kugala radijusa $r < 1$. Sljedećom propozicijom dana je jedna karakterizacija totalne ograničenosti u metričkom prostoru.

Propozicija 1.2.5. *Podskup S metričkog prostora X je totalno ograničen ako i samo ako svaki niz u S ima konvergentan podniz.*

Primijetimo da je uvjet iz prethodne propozicije točno definicija relativne nizovne kompaktnosti iz Definicije 1.1.17. Zato možemo očekivati da će svojstva ograničenosti i totalne ograničenosti biti u vrlo bliskoj vezi s kompaktnošću. Pogledajmo prvo jedan primjer.

Primjer 1.2.6. *Promatramo prostor $X = \mathbb{R}$ s euklidskom metrikom i skup $A = \langle 0, 1\rangle$. Uočimo da je familija $\{\, \langle \frac{1}{n}, 1\rangle : n \in \mathbb{N} \,\}$ otvoren pokrivač od A koja nema konačan potpokrivač pa A nije kompaktan. Neka je sada $B = \mathbb{N}$. Njegov otvoren pokrivač $\{\, \langle n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\rangle : n \in \mathbb{N} \,\}$ također nema konačan potpokrivač pa ni B nije kompaktan. Primijetimo da A nije zatvoren, a B nije ograničen. Pokazuje se da su to nužni uvjeti da bi neki skup bio kompaktan u metričkom prostoru.*

Sljedeći ključan teorem tvrdi da su u metričkom prostoru svi tipovi kompaktnosti ekvivalentni, a uz pretpostavku potpunosti prostora imamo i dodatnu karakterizaciju preko zatvorenosti i totalne ograničenosti. Dokaz se može pronaći u [15, Teorem D.10] i u [8, Teorem 28.2]. uz uvažene implikacije koje vrijede u općenitim topološkim prostorima.

Teorem 1.2.7. *Za podskup S potpunog metričkog prostora X ekvivalentno je:*

(i) S je kompaktan;

(ii) S je prebrojivo kompaktan;

(iii) S je gomilišno kompaktan;

(iv) S je nizovno kompaktan;

(v) S je zatvoren i totalno ograničen.

Također, ekvivalentne su i analogne tvrdnje vezane uz relativnu kompaktnost pri čemu zatvorenost u (v) više nije potrebna. U oba slučaja pretpostavka potpunosti prostora potrebna je samo za implikaciju $(v) \implies (i)$.

Primjer 1.2.8. *Promotrimo metrički prostor $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ uz restrikciju euklidske metrike. Skup X je zatvoren u tom prostoru i totalno ograničen, ali nije kompaktan jer bilo koji niz racionalnih brojeva u X koji konvergira prema nekom iracionalnom broju neće imati konvergentan podniz u X. Naravno, ovo nije u kontradikciji s prethodnim teoremom jer prostor X nije potpun.*

Iz prethodna dva rezultata zaključujemo da je svaki kompaktan metrički prostor potpun. Iz totalne ograničenosti kompaktnog skupa odmah slijedi sljedeća propozicija koja nam daje još jedno korisno svojstvo takvih prostora.

Propozicija 1.2.9. *Svaki kompaktan metrički prostor je separabilan.*

Dokaz. Neka je X kompaktan metrički prostor. Tada je X totalno ograničen pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji konačan podskup $S_n \subseteq X$ takav da je $X = \bigcup_{x \in S_n} K(x, 1/n)$. Sada se lagano vidi da je $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ prebrojiv gust podskup od X. □

Vidjeli smo da u metričkom prostoru svaki kompaktan skup mora biti ograničen i zatvoren. Za prostore koji imaju svojstvo da im je svaki zatvoren i ograničen podskup kompaktan kažemo da imaju **Heine-Borelovo** svojstvo. Svi metrički prostori nemaju to svojstvo, no sljedećim teoremom pokazano je da $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ imaju to svojstvo. Dokaz se može pronaći u [15, Teorem D.11].

Teorem 1.2.10. *(Heine-Borel) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ili $S \subseteq \mathbb{C}^n$. Tada je S kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.*

Iz Propozicije 1.1.22 slijedi da će svaka neprekidna realna funkcija dostizati svoj supremum na kompaktnog skupu. Zanimljivo je da u metričkim prostorima ovo u potpunosti karakterizira kompaktne skupove. Dokaz sljedeće propozicije se može pronaći u [14, Teorem 2.3].

Propozicija 1.2.11. *Neka je S podskup metričkog prostora X. Tada je S kompaktan ako i samo ako svaka realna neprekidna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ poprima svoj supremum na S, tj. ako postoji $x_0 \in S$ takav da je $f(x_0) = \sup_{x \in S} f(x)$.*

1.3 Normirani prostori

Sada smo spremni pozabaviti se normiranim prostorima koji će biti glavni predmet naših razmatranja.

Definicija 1.3.1. ***Normiran vektorski prostor*** *je uređen par $(X, \|\cdot\|)$, gdje je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, a $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty\rangle$ norma, tj. preslikavanje sa sljedećim svojstvima:*

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *za sve* $\lambda \in \mathbb{F}$ *i* $x \in X$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za sve* $x, y \in X$.

Svaki normirani prostor je i metrički prostor uz metriku $d(x, y) = \|x - y\|$. Tako se prirodno prenose topološki koncepti iz teorije metričkih prostora u teoriju normiranih prostora. Topologiju induciranu tom metrikom ćemo zvati topologijom norme ili jakom topologijom. Standardno je potpun normiran prostor zvati **Banachov**, a potpun unitaran prostor **Hilbertov**. Ono što razlikuje normirane prostore od metričkih je struktura vektorskog prostora. Sljedeći rezultati govori o neprekidnosti operacija vektorskog prostora čiji se dokazi mogu pronaći u [5, Propozicija 1.3.2 i Korolar 1.3.3].

Propozicija 1.3.2. *Neka je X normiran prostor.*

(i) Zbrajanje vektora $+ : X \times X \to X$ je neprekidna operacija.

(i) Množenje vektora skalarom $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ je neprekidna operacija.

Korolar 1.3.3. *Neka je X normiran prostor i neka su $x_0 \in X$ i $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Tada su preslikavanja $x \mapsto x + x_0$ i $x \mapsto \alpha x$ homeomorfizmi s X u X. Posljedično, ako je S podskup od X koji je otvoren, zatvoren ili kompaktan, tada $x_0 + S$ i αS također imaju ta svojsta.*

Zbog prethodnog korolara, vidimo da nam je u interesu dobro razumijeti topološka svojstva jedinične kugle i sfere. Naime, ako imamo skup za kojeg znamo da je ograničen onda ga skaliranjem možemo smjestiti unutar jedinične kugle, a ta skalirana verzija će imati ista topološka svojstva kao i originalni skup. Zato da bismo olakšali notaciju **zatvorenu jediničnu kuglu** normiranog prostora X označavat ćemo s

$$B_X = \{\, x \in X : \|x\| \leq 1 \,\},$$

a **jediničnu sferu** s

$$S_X = \{\, x \in X : \|x\| = 1 \,\}.$$

Linearna i konveksna ljuska

Ako je S podskup vektorskog prostora X, **linearnu ljusku** od S definiramo kao najmanji linearni potprostor od X koji sadrži S i označavat ćemo ga sa $\mathrm{span}(S)$. Ako na X imamo i neku topologiju, često će biti slučaj u prostorima beskonačne dimenzije da linearna ljuska nije zatvoren skup. Zato definiramo **zatvorenu linearnu ljusku** kao najmanji zatvoren potprostor od X koji sadrži S, u oznaci $\overline{\mathrm{span}}(S)$.

Neka je V vektorski prostor. Za podskup $K \subseteq V$ kažemo da je **konveksan** ako za svaki izbor $x, y \in K$ i $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi $\alpha x + (1 - \alpha)y \in K$. **Konveksna ljuska** skupa S je najmanji konveksan podskup od V koji sadrži S i označavamo ga s $\mathrm{co}(S)$. Najmanji zatvoren konveksan skup koji sadrži S ćemo zvati **zatvorenom konveksnom ljuskom** i označavati s $\overline{\mathrm{co}}(S)$. Za $S \subseteq V$ pokazuje se da vrijedi

$$\mathrm{co}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N},\ x_i \in K,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}. \tag{1.1}$$

Ako su $K_1, \dots, K_n \subseteq V$ neprazni i konveksni, tada vrijedi (vidi [5, Lema 2.10.13])

$$\operatorname{co}(K_1 \cup \ldots \cup K_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N},\, x_i \in K_i,\, \lambda_i \geq 0,\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}. \tag{1.2}$$

U općenitim vektorskim prostorima koji imaju neku topologiju ne mora vrijediti $\overline{\operatorname{span}}(S) = \overline{\operatorname{span}(S)}$ niti $\overline{\operatorname{co}}(S) = \overline{\operatorname{co}(S)}$. Pokazuje se da jednakost vrijedi u topološkim vektorskim prostorima s kakvim ćemo samo i raditi pa će $\overline{\operatorname{span}}(S)$ upravo biti jednak zatvaraču linearne ljuske od S, a $\overline{\operatorname{co}}(S)$ zatvaraču konveksne ljuske od S, kao što i sama oznaka nalaže. Ako je X normiran prostor i $K \subseteq X$ konveksan podskup, pokazuje se da su $\operatorname{Int} K$ i $\overline{K}$ također konveksni. Ako je $S \subseteq X$ separabilan, tada je svaki od skupova $\overline{S}$, $\operatorname{co}(S)$, $\overline{\operatorname{co}}(S)$, $\operatorname{span}(S)$, $\overline{\operatorname{span}}(S)$ također separabilan.

Kompaktnost zatvorene jedinične kugle

Vrijeme je dokazati glavnu motivaciju ovog rada – B_X će biti kompaktan samo u prostorima konačne dimenzije. Za dokaz te tvrdnje potrebna nam je jedna tehnička lema.

Lema 1.3.4. *(Riesz) Neka je X normiran prostor i neka je $Y \leq X$ pravi zatvoren potprostor. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji jedinični vektor $x \in S_X$ takav da je*

$$\|x - y\| > 1 - \varepsilon \quad \text{za sve } y \in Y.$$

Dokaz. Za $\varepsilon \geq 1$ je tvrdnja očita pa pretpostavimo $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$. Neka su

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad \text{i} \quad x_0 \in X \setminus Y.$$

Kako je skup $X \setminus Y$ otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq X \setminus Y$ iz čega slijedi $\|x_0 - y\| \geq r$ za svaki $y \in Y$. Neka je

$$d = \inf\{\, \|x_0 - y\| : y \in Y \,\} \geq r > 0.$$

Tada je $d \leq d + d\delta$, pa po definiciji infimuma postoji $y_0 \in Y$ takav da je

$$d \leq \|x_0 - y_0\| \leq d + d\delta.$$

Stavimo $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Tada je $\|x\| = 1$ i za svaki $y \in Y$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \|x_0 - y_0 - \|x_0 - y_0\| y\| \\
&= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \|x_0 - \underbrace{(y_0 + \|x_0 - y_0\| y)}_{\in Y}\| \geq \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \\
&\geq \frac{d}{d + d\delta} = \frac{1}{1 + \delta} > \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}} = 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Ako je $\dim X = \infty$, onda zatvorena jedinična kugla B_X nije totalno ograničena. Zaista, pomoću Rieszove leme možemo induktivno konstruirati niz jediničnih vektora $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da $\|e_n - e_m\| > \frac{1}{2}$ za $m \neq n$. Tada nijedna konačna familija otvorenih kugala radijusa $r = \frac{1}{4}$ ne može pokriti B_X jer ne može pokriti niti konstruirani niz. Zaključujemo da B_X nije totalno ograničen pa nije niti kompaktan skup. Štoviše, pokazuje se da kompaktnost zatvorene jedinične kugle karakterizira točno prostore konačne dimenzije. Uzevši u obzir diskusiju nakon Korolara 1.3.3, to ekvivalentno možemo iskazati tako da kažemo da normiran prostor ima Heine-Borelovo svojstvo ako i samo ako je $\dim X < \infty$.

Teorem 1.3.5. *Normiran prostor X je konačnodimenzionalan ako i samo ako je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan.*

Dokaz. Ako je $\dim X = \infty$, tada je po prethodnoj diskusiji B_X ograničen i zatvoren skup koji nije kompaktan. Obratno, ako je $\dim X = n < \infty$, tada je X izomorfan prostoru $\mathbb{F}^n$ za kojeg po Teoremu 1.2.10 vrijedi tvrdnja pa tvrdnja vrijedi i za njemu izomorfan X. □

Iz prethodnog teorema slijedi da se familija ograničenih podskupova od X i relativno kompaktnih podskupova od X podudaraju ako i samo ako je $\dim X < \infty$. Dakle, u normiranim prostorima beskonačne dimenzije, relativna kompaktnost je jače svojstvo od ograničenosti. Iz Teorema 1.2.7 znamo da je svaki relativno kompaktan skup u normiranom prostoru totalno ograničen, a obrat vrijedi u Banachovim prostorima. U sljedećoj propoziciji dajemo jednu korisnu karakterizaciju relativne kompaktnosti u potpunim prostorima.

Propozicija 1.3.6. *Podskup S Banachovog prostora X je relativno kompaktan ako i samo ako za sve $\varepsilon > 0$ postoji relativno kompaktan skup $T_\varepsilon \subseteq X$ takav da*

$$S \subseteq T_\varepsilon + K(0, \varepsilon).$$

Dokaz. Ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji takav relativno kompaktan skup T_ε, onda je S totalno ograničen pa i relativno kompaktan. Obratno, ako je S relativno kompaktan možemo za svaki $\varepsilon > 0$ uzeti $T_\varepsilon = S$. □

Linearni operatori

Neka su X i Y normirani prostori. Kažemo da je linearan operator $A : X \to Y$ **ograničen** ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|Ax\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. Skup svih linearnih operatora između X i Y označavat ćemo s $L(X, Y)$, a ograničenih linearnih operatora s $\mathbb{B}(X, Y)$. Lako se vidi da je $\mathbb{B}(X, Y)$ potprostor od $L(X, Y)$. Skup svih ograničenih linearnih funkcionala na X, $\mathbb{B}(X, \mathbb{F})$, nazivamo **dualnim prostorom** od X i označavamo ga s X'. Skup svih linearnih funkcionala na X ćemo zvati **algebarskim dualom** od X i označavati s X^*. Može se pokazati da ako je $\dim X = \infty$ onda vrijedi stroga inkluzija $X' \subsetneq X^*$.

Pokazuje se da je $A \in L(X, Y)$ ograničen ako i samo ako je neprekidan. Za $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ definiramo $\|A\|$ kao infimum svih $M > 0$ za koje vrijedi $\|Ax\| \leq M\|x\|$ za sve $x \in X$. Može se pokazati da vrijedi

$$\|A\| = \sup\{\, \|Ax\| : x \in B_X \,\} = \sup\{\, \|Ax\| : x \in S_X \,\}. \tag{1.3}$$

Preslikavanje $A \mapsto \|A\|$ je norma na $\mathbb{B}(X, Y)$ koju nazivamo **operatorskom normom** i u nastavku ju podrazumijevamo čim se promatra norma elemenata dualnih prostora (osim ako nije drugačije navedeno). Ako je Y Banachov prostor, onda je to i $\mathbb{B}(X, Y)$. Dakle, dual bilo kojeg normiranog prostora je uvijek Banachov prostor.

Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, često će nas zanimati restrikcija množenja skalarom $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ na $\mathbb{R} \times X \to X$. Time dobivamo vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ kojeg označavamo s $X_{\mathbb{R}}$. Pretpostavimo da je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da $f(x+y) = f(x)+f(y)$ za sve $x, y \in X$ i $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ za sve $\lambda \in \mathbb{R}$ i $x \in X$. Tada je f linearan funkcional na $X_{\mathbb{R}}$ u uobičajenom smislu. Kažemo da je f **realno linearan funkcional** na X. Slično ćemo ponekad kazati da su elementi X^* **kompleksno linearni funkcionali**. Ako je X normiran ili Banachov prostor, onda je to i $X_{\mathbb{R}}$ uz istu normu. Dualni prostor realnog Banachovog prostora $X_{\mathbb{R}}$ označavat ćemo s $X'_{\mathbb{R}}$. Sljedećim teoremom dana je veza između dualnih prostora X' i $X'_{\mathbb{R}}$ (za dokaz vidi [3, Propozicija 5.4]).

Teorem 1.3.7. *Neka je X vektorski prostor. Ako je f linearan funkcional na X, tada je $u = \mathrm{Re}(f)$ realno linearan funkcional na X i vrijedi $f(x) = u(x) - iu(ix)$ za sve $x \in X$. Obratno, ako je u realno linearan funkcional na X, tada je s $f(x) = u(x) - iu(ix)$ jedinstveno određen kompleksno linearan funkcional f na X takav da je $u = \mathrm{Re}(f)$. Ako je X normiran prostor, f je neprekidan ako i samo ako je u neprekidan i u tom slučaju vrijedi $\|f\| = \|u\|$.*

Fundamentalni rezultati

U nastavku navodimo nekoliko fundamentalnih rezultata funkcionalne analize koji će nam biti potrebni. Prvi teorem govori o proširenju funkcionala definiranog na potprostoru i to tako da mu ne povećamo normu.

Teorem 1.3.8. *(Hahn-Banachov teorem za normirane prostore)*
Neka je X normiran prostor i $Y \leq X$ pravi potprostor od X. Za svaki $f_0 \in Y'$ postoji $f \in X'$ takav da je $f|_Y = f_0$ i $\|f\| = \|f_0\|$.

Korolar 1.3.9. *Neka je X normiran prostor i $x_0 \in X, x_0 \neq 0$. Tada postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Dokaz. Stavimo $Y = \operatorname{span}(\{x_0\})$ i definiramo f_0 na Y s $f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$. Tada je $\|f_0\| = \|x_0\|$ pa tvrnja slijedi iz Hahn-Banachovog teorema. □

Iz prethodnog korolara slijedi da za različite $x, y \in X$ postoji $f \in X'$ takav da vrijedi $f(x) \neq f(y)$.

Korolar 1.3.10. *Neka je X normiran prostor. Za svaki $x \in X$ vrijedi*

$$\|x\| = \max\{\, |f(x)| : f \in S_{X'} \,\}.$$

Dokaz. Za $x = 0$ je tvrdnja očita pa pretpostavimo $x \neq 0$. Ako je $f \in S_{X'}$, tada je $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|$. Po Korolaru 1.3.9 postoji $f \in S_{X'}$ takav da $|f(x)| = \|x\|$ što dokazuje tvrdnju. □

Teorem 1.3.11. *Neka je $Y \leq X$ potprostor normiranog prostora X i neka je $x_0 \in X$ takav da je*

$$d = d(x_0, Y) = \inf\{\, \|x_0 - y\| : y \in Y \,\} > 0.$$

Tada postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i da vrijedi $f(x_0) = d$ i $f(x) = 0$ za sve $x \in Y$.

Prethodni teorem spada u široku klasu teorema separacije od kojih ćemo navesti još nekoliko u sljedećoj sekciji. Dokaz se može pronaći u [1, Teorem 4.2.3]. Sljedećim teoremom dobivamo uniformnu ograničenost familije operatora iz njegove ograničenosti po točkama.

Teorem 1.3.12. *(Princip uniformne ograničenosti) Neka je X Banachov, a Y normiran prostor. Neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija operatora iz $\mathbb{B}(X, Y)$. Ako za svaki $x \in X$ vrijedi $\sup\{\, \|Ax\| : A \in \mathcal{F} \,\} < \infty$, tada je $\sup\{\, \|A\| : A \in \mathcal{F} \,\} < \infty$.*

Primjer 1.3.13. *Potpunost prostora X je važna pretpostavka prethodnog teorema. Uzmimo $X = \operatorname{span}(\{ e_n : n \in \mathbb{N} \})$ i $Y = \mathbb{F}$, pri čemu su e_n kanonski vektori u l^2. Tada za projekciju $P_n : X \to \mathbb{F}$ na n-tu koordinatu vrijedi $(nP_n)x \to 0$ pa je niz $(|(nP_n)x|)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen za svaki $x \in X$. No, $\|nP_n\| = n$ pa familija $(nP_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije uniformno ograničena. Tu je problem što je X potprostor potpunog prostora l^2 koji nije zatvoren pa nije niti potpun.*

Refleksivni prostori

Neka je X normiran prostor. Često će nas zanimati dualni prostor od X' kojeg ćemo zvati **bidualom** od X i označavati s X''. Preslikavanje definirano s

$$\varphi : X \to X'', \quad \varphi(x) = \hat{x}$$

nazivamo **kanonskim ulaganjem u bidual**. Pri tome je funkcional $\hat{x} : X' \to \mathbb{F}$ definiran formulom

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad f \in X'.$$

Da bismo vidjeli da je φ dobro definiran, primijetimo da je za svaki $x \in X$ preslikavanje $\hat{x}$ linearno i ograničeno zbog sljedeće nejednakosti:

$$\|\hat{x}\| = \sup\{ |f(x)| : f \in B_{X'} \} \leq \sup\{ \|f\|\|x\| : f \in B_{X'} \} \leq \|x\|. \tag{1.4}$$

Sliku od X po tom ulaganju, $\varphi(X)$, ćemo još označavati s $\hat{X}$. Sljedeći teorem pokazuje da je φ izometričko ulaganje iz X u X''.

Teorem 1.3.14. *Neka je X normiran prostor. Tada kanonsko ulaganje $\varphi : X \to X''$ ima sljedeća svojstva:*

(i) $\varphi : X \to X''$ je linearno i injektivno preslikavanje;

(ii) X je izometrički izomorfan potprostoru $\varphi(X) \leq X''$;

(iii) $\varphi(X)$ je zatvoren u X'' ako i samo ako je X Banachov prostor.

Dokaz. (*i*) i (*ii*) Neka su $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Za svaki $f \in X'$ vrijedi

$$\varphi(\alpha x + \beta y)(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = (\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y))(f)$$

što pokazuje linearnost od φ. Sada će (*i*) i (*ii*) slijediti ako pokažemo $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ što automatski implicira injektivnost. Primjenom (1.3) i Korolara 1.3.10 dobivamo

$$\|\varphi(x)\| = \sup\{ |\varphi(x)(f)| : f \in B_{X'} \} = \sup\{ |f(x)| : f \in B_{X'} \} = \|x\|.$$

(iii) Potprostor potpunog metričkog prostora je zatvoren ako i samo ako je potpun. Dakle, $\varphi(X)$ je zatvoren u Banachovom prostoru X'' ako i samo ako je potpun. Iz (*ii*) slijedi da je X potpun ako i samo ako je $\varphi(X)$ potpun. □

Kažemo da je prostor X **refleksivan** ako je preslikavanje φ surjekcija. Refleksivni prostori su nam korisni jer je za njih inače apstraktna i komplicirana struktura biduala puno jednostavnija. Naime, po prošlom teoremu bidual refleksivnog prostora je samo kopija tog prostora ostvarena preko preslikavanja φ. Ostaje pitanje kako identificirati refleksivne prostore na što ćemo odgovoriti kasnije s nekoliko karakterizacija takvih prostora. Kako je dualni prostor bilo kojeg normiranog prostora uvijek Banachov prostor, X'' je potpun. Dakle, da bi prostor X bio refleksivan nužno mora biti potpun jer za dva prostora koja su izometrički izomorfna vrijedi da je jedan potpun ako i samo ako je to i drugi.

Teorem 1.3.15. *Svaki konačnodimenzionalan normiran prostor je refleksivan.*

Dokaz. Kako je $\dim X = \dim X' = \dim X''$, a zbog injektivnosti od φ imamo $\dim X \leq \dim \varphi(X) \leq \dim X''$ slijedi surjektivnost od φ. $\square$

Još neki primjeri refleksivnih prostora su l^p i $L^p(\Omega)$ prostori za $p \in \langle 1, \infty \rangle$ te svi Hilbertovi prostori. U Korolaru 1.3.10 smo vidjeli zanimljivu formulu za normu vektora u kojoj se supremum postiže unutar B_X. Sada se prirodno nameće pitanje kada će se postizati supremum u (1.3). Sljedećom propozicijom pokazujemo da će se to dogoditi za ograničene funkcionale na bilo kojem refleksivnom prostoru. Kasnije ćemo pokazati da ovo svojstvo upravo karakterizira refleksivne prostore.

Propozicija 1.3.16. *Neka je X refleksivan normiran prostor. Tada za svaki $f \in X'$ postoji $x_0 \in B_X$ takav da je $\|f\| = |f(x_0)|$.*

Dokaz. Neka je $f \in X'$. Po Korolaru 1.3.10 postoji $\Phi \in B_{X''}$ takav da $|\Phi(f)| = \|f\|$. Kako je prostor refleksivan, postoji $x_0 \in B_X$ takav da $\varphi(x_0) = \Phi$ pa imamo

$$\|f\| = |\Phi(f)| = |f(x_0)|.$$

$\square$

Primjer 1.3.17. *Neka je $f \in c_0'$ reprezentiran s $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. Tada je $\|f\| = 1$. Ako je $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{c_0}$, onda vrijedi*

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Dakle, f ne dostiže svoju normu na B_{c_0} pa zaključujemo da prostor c_0 nije refleksivan. Odredimo koji funkcionali dostižu svoju normu. Neka je $f \in c_0'$ reprezentiran s $a =$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ i pretpostavimo da postoji $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{c_0}$ takav da je $f(x) = \|f\| = \|a\|_1$, odnosno takav da vrijedi

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_1.$$

Kako je $\|x\|_\infty \leq 1$, slijedi $|x_n| \leq 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Zaključujemo da svugdje moraju vrijediti jednakosti pa slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|x_n| = 1$ ili $a_n = 0$. No, kako je $x \in c_0$ nije moguće da za beskonačno mnogo indeksa vrijedi $|x_n| = 1$ pa je nužno $a \in c_{00}$. Ako s Φ označimo izometrički izomorfizam između l^1 i c_0', lako se vidi da za svaki $a = (a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \in c_{00}$ funkcional $\Phi(a)$ dostiže svoju normu u $x = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) \in c_0$. Dakle, funkcionali iz c_0' koji dostižu svoju normu su točno oni iz $\Phi(c_{00})$. Primijetimo da je c_{00} gust u c_0, a kako je Φ izometrija odmah dobivamo da je $\Phi(c_{00})$ gust u c_0'. Kasnije ćemo vidjeti da ovo nije slučajnost i da će skup funkcionala na Banachovom prostoru koji dostižu svoju normu činiti gust podskup duala (vidi Teorem 4.5.3).

Slaba konvergencija u normiranim prostorima

Sada uvodimo neke druge koncepte konvergencije u normiranom prostoru za koje ćemo kasnije uvesti topologije koje im odgovaraju u smislu Definicije 1.1.6.

Definicija 1.3.18. *Neka je X normiran prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X kažemo da:*

(1) ***konvergira jako*** *k vektoru $x \in X$ ako $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$, označavamo s $x_n \xrightarrow{s} x$;*

(2) ***konvergira slabo*** *k vektoru $x \in X$ ako $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ za sve $f \in X'$, označavamo s $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Ako $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira jako prema x također kažemo da konvergira u normi ili samo da konvergira. Očito jaka konvergencija odgovara konvergenciji nizova u metričkom prostoru uvedenoj u Sekciji 1.2. Lako se vidi da je slabi limes niza vektora u normiranom prostoru jedistven i da se ponaša u skladu s operacijama zbrajanja i množenja skalarom.

Očito na dualnom prostoru X' također možemo promatrati jaku konvergenciju s obzirom na operatorsku normu te slabu konvergenciju gledajući funkcionale iz X'', no pokazuje se korisnim i jedan drugi koncept konvergencije koji odgovara konvergenciji niza funkcija po točkama.

Definicija 1.3.19. *Neka je X normiran prostor. Za niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X' kažemo da* ***konvergira slabo***** *k funkcionalu $f \in X'$ ako za svaki $x \in X$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, označavamo s $f_n \xrightarrow{w^*} f$.*

Već smo najavili da ćemo kasnije odrediti topologiju koja odgovara slaboj konvergenciji u normiranom prostoru. Naravno, ta topologija ne mora biti inducirana nekom metrikom (što i neće biti slučaj) tako da ne možemo govoriti o pojmovima rezerviranim isključivo za metričke prostore poput ograničenosti i Cauchyjevih nizova. Za podskup $S \subseteq X$ kažemo da je **slabo ograničen** ako je za sve $f \in X'$ skup $f(S)$ ograničen u $\mathbb{F}$. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X kažemo da je **slabo Cauchyjev** ako je $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathbb{F}$ za sve $f \in X'$. Za prostor X kažemo da je **slabo potpun** ako svaki slabo Cauchyjev niz u X konvergira slabo u X. **Slabi nizovni zatvarač** od S je skup koji sadrži sve slabe limese svih slabo konvergentnih nizova u S. Analogno definiramo navedene pojmove za slabu* konvergenciju.

Teorem 1.3.20. *Podskup normiranog prostora X je ograničen ako i samo ako je slabo ograničen.*

Dokaz. Neka je S ograničen podskup od X i neka je $f \in X'$. Tada je

$$\sup_{x\in S} |f(x)| \leq \|f\| \cdot \sup_{x\in S} \|x\| < \infty,$$

pa je $f(S)$ ograničen, tj. S je slabo ograničen. Obratno, pretpostavimo da je S slabo ograničen neprazan podskup od X. Tada je $\varphi(S)$ neprazan podskup ograničenih linearnih funkcionala definiranih na Banachovom prostoru X'. Kako je preslikavanje φ izometrija, za sve $f \in X'$ imamo

$$\sup_{x\in S} |\varphi(x)(f)| = \sup_{x\in S} |f(x)| < \infty.$$

Kako je X' potpun, ograničenost od S slijedi iz principa uniformne ograničenosti

$$\sup_{x\in S} \|x\| = \sup_{x\in S} \|\varphi(x)\| < \infty.$$

$\square$

Korolar 1.3.21. *Svaki slabo Cauchyjev niz u normiranom prostoru je ograničen.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slabo Cauchyjev niz u X. Tada je $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $\mathbb{F}$ za svaki $f \in X'$ pa je i ograničen. Slijedi da je skup $\{ f(x_n) : n \in \mathbb{N} \}$ ograničen za svaki $f \in X'$ pa je skup $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ slabo ograničen što po Teoremu 1.3.20 povlači da je i ograničen. □

Korolar 1.3.22. *Neka su X i Y normirani prostori i neka je $T \in L(X, Y)$. Tada je T ograničen ako i samo ako je $f \circ T \in X'$ za sve $f \in Y'$.*

Dokaz. Znamo da je T ograničen ako i samo ako je $T(B_X)$ ograničen podskup od Y, što je po Teoremu 1.3.20 ekvivalentno ograničenosti $(f \circ T)(B_X)$ u $\mathbb{F}$ za svaki $f \in Y'$, iz čega slijedi tvrdnja. □

Propozicija 1.3.23. *Neka je X Banachov prostor. Svaki slabo* Cauchyjev niz u X' je ograničen.*

Dokaz. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slabo* Cauchyjev niz u X'. Tada je za svaki $x \in X$ niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev u $\mathbb{F}$ pa je $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$ za sve $x \in X$. Po principu uniformne ograničenosti slijedi $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$. □

Slično se pokaže da je podskup od X' ograničen ako i samo ako je slabo* ograničen, ali uz pretpostavku da je X Banachov.

Primjer 1.3.24. *Ovim primjerom ćemo pokazati da je pretpostavka potpunosti u Propoziciji 1.3.23 nužna. Neka je $X = c_{00}$, prostor nizova s konačno mnogo nenul elemenata promatran uz normu $\|\cdot\|_\infty$. Njegov dual X' je izometrički izomorfan l^1. Promotrimo niz $f_n = ne_n$ u $X' \cong l^1$. On je slabo* konvergentan jer za $x \in c_{00}$ vrijedi $f_n(x) = nx_n$ što je jednako 0 za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$. Dakle taj niz je slabo* Cauchyjev, a očito je neograničen.*

1.4 Topološki vektorski prostori

Često na prostorima kojima radimo nećemo imati luksuz norme, a i kada imamo topologija koju ta norma inducira možda neće biti najkorisnija. Pokazuje se da u srži mnogih ključnih rezultata u normiranim prostorima nisu nikakva posebna svojstva norme već neprekidnost operacija u vektorskom prostoru iskazana u Propoziciji 1.3.2. U skladu s time sljedeća definicija generalizira pojam normiranog prostora u vektorski prostor snabdjeven topologijom.

Definicija 1.4.1. *Neka je X vektorski prostor s topologijom τ takav da je zbrajanje vektora $(x, y) \mapsto x+y$ neprekidna operacija s $X \times X$ u X, a množenje vektora skalarom $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ neprekidna operacija s $\mathbb{F} \times X$ u X u odnosu na odgovarajuće produktne* *topologije. Tada τ nazivamo* ***vektorskom topologijom*** *za X, a uređen par (X, τ)* ***topološkim vektorskim prostorom*** *(kraće: TVP). Ako τ posjeduje bazu koja se sastoji od konveksnih skupova, kažemo da je (X, τ)* ***lokalno konveksan*** *topološki prostor.*

Iz Propozicije 1.3.2 i činjenice da je svaka otvorena kugla normiranog prostora konveksan skup, slijedi da je svaki normiran prostor lokalno konveksan TVP.

Primjer 1.4.2. *Neka je X netrivijalan vektorski prostor. Tada se lagano vidi da je X TVP uz topologiju $\{\emptyset, X\}$. S druge strane, X nije TVP uz diskretnu topologiju $\mathcal{P}(X)$. Na primjer, za proizvoljan $x \in X \setminus \{0\}$ promotrimo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X dan s $x_n = x$ i niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathbb{F}$ dan s $\lambda_n = 1/n$. Tada $x_n \to x$ i $\lambda_n \to 0$, no $\lambda_n x_n \not\to 0$. Naime, skup $U = \{0\}$ je otvorena okolina od 0 u diskretnoj topologiji $\mathcal{P}(X)$ koja ne sadrži niti jedan član niza $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zaključujemo da množenje vektora skalarom nije neprekidna operacija pa takav prostor nije TVP.*

Definicija 1.4.3. *Neka je X vektorski prostor. Za $S \subseteq X$ kažemo da je* ***balansiran*** *ako za sve $|\alpha| < 1$ vrijedi $\alpha S \subseteq S$.*

Iz definicije otvorene i zatvorene kugle sa središtem u 0 balansirani skupovi u normiranom prostoru. Zaključak sljedećeg teorema je da balansirani skupovi upravo imaju ulogu otvorenih kugala u TVP.

Teorem 1.4.4. *Neka je (X, τ) topološki vektorski prostor. Tada svaka otvorena okolina od 0 sadrži balansiranu otvorenu okolinu od 0.*

Za podskup metričkog prostora smo rekli da je ograničen ako je sadržan u nekoj otvorenoj kugli. Tako u normiranom prostoru vrijedi da je podskup S ograničen ako i samo ako postoji $M > 0$ takav da $S \subseteq K(0, r) = rK(0, 1)$ za svaki $r > M$. Sljedeća definicija generalizira ovo svojstvo u TVP.

Definicija 1.4.5. *Za podskup S topološkog vektorskog prostora (X, τ) kažemo da je* ***ograničen*** *ako za svaku otvorenu okolinu U od 0 postoji $s_U > 0$ takav da $S \subseteq tU$ za svaki $t > s_U$.*

Pokazuje se da je podskup normiranog prostora ograničen s obzirom na metriku ako i samo ako je ograničen u smislu gornje definicije. Za TVP s kojima ćemo mi raditi ograničenost će biti ekvivalentna slaboj, odnosno slaboj* ograničenosti koju smo ranije definirali tako da gornju definiciju nećemo koristiti, no dobro je imati na umu kako glasi općenita definicija. Mnoga korisna svojstva normiranih prostora imaju svoje analogone u topološkim vektorskim prostorima, a neke od njih navodimo u sklopu sljedećeg teorema. Dokaz, uz brojna druga zanimljiva svojstva, može se pronaći u [5, Teorem 2.2.9].

Teorem 1.4.6. *Neka je X topološki vektorski prostor.*

(i) *Neka je $(\beta_\lambda)_{\lambda\in I}$ hiperniz u $\mathbb{F}$, a $(x_\lambda)_{\lambda\in I}$ i $(y_\lambda)_{\lambda\in I}$ hipernizovi u X koji redom konvergiraju prema β, x i y. Neka su $\gamma \in \mathbb{F}$ i $z \in X$. Tada $x_\lambda + y_\lambda \to x + y$, $\beta_\lambda x_\lambda \to \beta x$, $x_\lambda + z \to x + z$, $\gamma x_\lambda \to \gamma x$ te $\beta_\lambda z \to \beta z$.*

(ii) *Ako su f i g neprekidne funkcije s topološkog prostora u X i ako je $\alpha \in \mathbb{F}$, onda su $f + g$ i αf neprekidne funkcije.*

(iii) *Neka je $x_0 \in X$ i neka je $\alpha_0 \in \mathbb{F}$, $\alpha_0 \neq 0$. Tada su preslikavanja $x \mapsto x + x_0$ i $x \mapsto \alpha_0 x$ homeomorfizmi s X u X. Stoga, ako je A podskup od X koji je otvoren, zatvoren ili kompaktan onda su to redom i $x_0 + A$ te $\alpha_0 A$. Ako su A i U podskupovi od X pri čemu je U otvoren, onda je i $A + U$ otvoren.*

(iv) *Neka su A i B podskupovi od X, $x_0 \in X$, $\alpha_0 \in \mathbb{F}$, $\alpha_0 \neq 0$. Tada vrijedi $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$, $x_0 + \overline{A} = \overline{x_0 + A}$, $\alpha_0 \overline{A} = \overline{\alpha_0 A}$, $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subseteq \operatorname{Int}(A + B)$, $x_0 + \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(x_0 + A)$ i $\alpha_0 \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\alpha_0 A)$.*

(v) *Za svaki $x_0 \in X$ sve otvorene okoline od x_0 su oblika $x_0 + U$, gdje je U otvorena okolina od 0.*

(vi) *Za svaku otvorenu okolinu od 0 postoji balansirana otvorena okolina V od 0 takva da $V \subseteq \overline{V} \subseteq \overline{V + V} \subseteq U$. Ako je U konveksan, tada se V može izabrati tako da bude konveksan.*

(vii) *Pretpostavimo da je S ograničen podskup od X. Neka su $x_0 \in X$ i $\alpha_0 \in \mathbb{F}$. Tada su $x_0 + S$ i $\alpha_0 S$ ograničeni.*

(viii) *Neka je S podskup od X. Tada vrijedi $\overline{\operatorname{span}}(S) = \overline{\operatorname{span}(S)}$ i $\overline{\operatorname{co}}(S) = \overline{\operatorname{co}(\mathrm{S})}$. Ako je S potprostor od X, onda je to i $\overline{S}$.*

(ix) *Neka je Y potprostor od X. Tada je relativna topologija na Y također vektorska topologija. Ako je topologija na X lokalno konveksna, onda je to i relativna topologija na Y.*

Primjer 1.4.7. *Neka je X vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ s topologijom čiji je jedini element osim X i $\emptyset$ skup $\{ (x, y) : y > x^2 \}$. Neka je*

$$S = \operatorname{span}(\{(1, 0)\}) = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Najmanji zatvoren skup koji sadrži S je $\{ (x, y) : y \leq x^2 \}$ koji nije konveksan. Dakle,

$$\overline{\operatorname{span}}(S) \neq \overline{\operatorname{span}(S)} = \overline{S} \quad i \quad \overline{\operatorname{co}}(S) \neq \overline{\operatorname{co}(\mathrm{S})} = \overline{S}$$

jer su oba skupa $\overline{\operatorname{span}}(S)$ i $\overline{\operatorname{co}}(S)$ konveksna. Po prethodnom teoremu zaključujemo da X s ovako definiranom topologijom nije TVP.

Propozicija 1.4.8. *Neka su A i B podskupovi Hausdorffovog TVP X takvi da je A zatvoren, a B kompaktan. Tada je $A+B$ zatvoren.*

Dokaz. Neka je $(a_\alpha + b_\alpha)_{\alpha\in I}$ hiperniz u $A+B$ koji konvergira prema $x \in X$. Kako je B kompaktan, postoji podhiperniz $(b_\alpha)_{\alpha\in J}$ koji konvergira prema nekom $b \in B$. Tada $(a_\alpha)_{\alpha\in J}$ konvergira prema $x-b$, a zbog zatvorenosti od A slijedi $x-b \in A$. Dakle, $x \in A+B$ pa zaključujemo da je $A+B$ zatvoren. □

Primjer 1.4.9. *Ne mora vrijediti da je zbroj dva zatvorena skupa u nekom TVP zatvoren skup. Zaista u $X=\mathbb{R}$ promotrimo zatvorene skupove*

$$A = \mathbb{N} \quad i \quad B = \{\, -n + 1/n : n \in \mathbb{N}\,\}.$$

Tada je niz $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ sadržan u $A+B$ i konvergira prema $0 \notin A+B$.

Pokazuje se da u TVP vrijede teoremi separacije. Pitanje je ako imamo dva disjunktna konveksna skupa koja su na neki način dobro odvojena, možemo li pronaći realno linearan funkcional $f \in X'_{\mathbb{R}}$ takav da su i slike tih skupova po f također dobro odvojene. Ovdje s X' označavamo prostor svih linearnih funkcionala koji su neprekidni s obzirom na vektorsku topologiju na X. Dokaz se može pronaći u [5, Teoremi 2.2.26 i 2.2.28].

Teorem 1.4.10. *(Teorem separacije konveksnih skupova) Neka je X lokalno konveksan Hausdorffov TVP. Neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni neprazni konveksni podskupovi.*

(i) Ako je A otvoren, tada postoje $f \in X'$ i $c \in \mathbb{R}$ takvi da

$$\operatorname{Re} f(x) < c \leq \operatorname{Re} f(y) \qquad \text{za sve } x \in A,\ y \in B.$$

(ii) Ako je A kompaktan, a B zatvoren tada postoje $f \in X'$ i $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takvi da

$$\operatorname{Re} f(x) < c_1 < c_2 < \operatorname{Re} f(y) \qquad \text{za sve } x \in A,\ y \in B.$$

Kao lagana posljedica prethodnog teorema slijedi da ako su $x, y \in X$ različiti, tada postoji $f \in X'$ takav da je $f(x) \neq f(y)$. Naravno, teorem separacije vrijedi i za normirane prostore.

Korolar 1.4.11. *Neka je X normiran prostor. Ako je $K \subseteq X$ neprazan konveksan podskup i $x_0 \in X$ takav da $d(x_0, K) > 0$, tada postoji $f \in X'$ takav da*

$$\operatorname{Re} f(x_0) > \sup_{x\in K} \operatorname{Re} f(x).$$

Dokaz. Po pretpostavci je $x_0 \notin \overline{K}$ pa tvrdnja slijedi iz Teorema 1.4.10 (ii) primijenjenog na disjunktne skupove $A = \{x_0\}$ i $B = \overline{K}$. □

Poglavlje 2

Kompaktnost u normiranim prostorima

U interesu nam je razumjeti koji su podskupovi normiranog prostora kompaktni. Za standardni euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, po Heine-Borelovom teoremu znamo da je podskup od $\mathbb{R}^n$ kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen. Ovo vrijedi i za sve konačnodimenzionalne normirane prostore i posljedično, svaki normiran prostor u kojem je zatvorena jedinična kugla kompaktna je nužno konačnodimenzionalan. Za beskonačnodimenzionalne normirane prostore ovo otvara pitanje karakterizacije kompaktnih skupova. Nužni uvjeti još uvijek jesu da je skup zatvoren i ograničen, no ovi uvjeti više ne mogu biti i dovoljni. U ovom poglavlju cilj nam je dokazati neke karakterizacije kompaktnosti u klasičnim Banachovim prostorima $C(K)$ i $L^p(\mathbb{R}^d)$ te dokazati neka svojstva kompaktnih skupova koji su ujedno i konveksni.

2.1 Kompaktnost u prostorima neprekidnih funkcija

Standardan rezultat analize tvrdi da je limes uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija opet neprekidna funkcija, što je u sljedećem teoremu implicitno navedeno kao rezultat vezan uz potpunost prostora. Primijetimo da konvergencija u normi $\|\cdot\|_\infty$ točno odgovara uniformnoj konvergenciji, a norma je dobro definirana upravo zato što je K kompaktan prostor.

Teorem 2.1.1. *Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Vektorski prostor $C(K) = \{ f : K \to \mathbb{F} : f$ je neprekidna na $K \}$ je Banachov u odnosu na normu*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Pokazuje se da ako je K kompaktan metrički prostor, tada je $C(K)$ separabilan. Dokaz ovih rezultata se može pronaći u [15, Teorem 2.2 i Propozicija 2.8]. Definicija relativne kompaktnosti dana u Definiciji 1.1.17 je u pravilu teško provjerljiva pa nam je prvo u planu okarakterizirati relativnu kompaktnost u $C(K)$ u terminima matematičke analize. Za to će nam biti potrebni sljedeći pojmovi.

Definicija 2.1.2. *Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Za podskup $S \subseteq C(K)$ kažemo da je*

(i) ***ekvikontinuiran u točki*** *$x_0 \in K$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvorena okolina U od x_0 takva da za sve $f \in S$ i sve $x \in U$ vrijedi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;*

(ii) ***ekvikontinuiran*** *ako je ekvikontinuiran u svakoj točki $x_0 \in K$;*

(iii) ***ograničen po točkama*** *ako za sve $x \in K$ vrijedi $\sup_{f\in S} |f(x)| < \infty$.*

Sljedeći teorem je jedan od najvažnijih rezultata matematičke analize i najčešće se koristi kako bi odredili ima li neki niz realnih funkcija definiranih na segmentu uniformno konvergentan podniz. Ovaj teorem je ključan alat u dokazima brojnih poznatih teorema poput Peanovog teorema egzistencije rješenja obične diferencijalne jednadžbe (vidi [15, Teorem 2.10]), a prvi su ga dokazali talijanski matematičari Arzelà i Ascoli krajem 19. stoljeća. Postoje brojne generalizacije, a mi ćemo dokazati verziju gdje je domena proizvoljan kompaktan Hausdorffov topološki prostor te nakon toga prikazati primjenu ovog teorema u teoriji operatora.

Teorem 2.1.3. *(Arzelà-Ascoli) Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Za podskup $S \subseteq C(K)$ ekvivalentno je:*

(i) S je relativno kompaktan;

(ii) S je ekvikontinuiran i ograničen po točkama.

Dokaz. (**ii**) $\implies$ (**i**) Neka je $S \subseteq C(K)$ ekvikontinuiran i ograničen po točkama i neka je $\varepsilon > 0$ fiksiran. Tada za svaki $x \in K$ postoji otvorena okolina $V_x \subseteq K$ od x takva da vrijedi

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{za sve} \quad y \in V_x \quad \text{i} \quad f \in S.$$

Kako je $(V_x)_{x\in K}$ otvoren pokrivač od K, zbog kompaktnosti prostora slijedi da već konačno mnogo takvih skupova pokriva K, označimo ih s $V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}$. Zbog pretpostavke o ograničenosti po točkama, skup $\{ f(x_j) : f \in S \}$ je ograničen za svaki $j = 1, \ldots, k$. Slijedi da možemo pronaći $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{F}$ takve da vrijedi

$$\min_{n=1,\ldots,N} |f(x_j) - \lambda_n| < \varepsilon \quad \text{za sve} \quad f \in S \quad \text{i} \quad j = 1, \ldots, k. \tag{2.1}$$

Neka je
$$I = \{ n = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq n_j \leq N, \forall j = 1, \ldots, k \}.$$
Za $n \in I$ neka je
$$B_n = \{ f \in S : |f(x_j) - \lambda_{n_j}| < \varepsilon, \forall j = 1, \ldots, k \}.$$

Iz (2.1) slijedi da je $S = \bigcup_{n \in I} B_n$. Pretpostavimo da su $f, g \in B_n$ i neka je $x \in K$ proizvoljan. Tada je $x \in V_{x_j}$ za neki $j \in \{ 1, \ldots, k \}$. Za taj j imamo:

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| \\ &\leq \varepsilon + |f(x_j) - \lambda_{n_j}| + |\lambda_{n_j} - g(x_j)| + \varepsilon < 4\varepsilon, \end{aligned}$$

gdje posljednja nejednakost vrijedi uniformno s obzirom na $x \in K$. Slijedi da je $\|f - g\|_\infty < 4\varepsilon$. Ako za svaki $n \in I$ za koji je B_n neprazan odaberemo funkciju $f_n \in B_n$ i pogledamo otvorene kugle $K(f_n, 4\varepsilon)$, dobivamo konačan pokrivač od S koji se sastoji od kugala radijusa 4ε. Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, to upravo znači da je S totalno ograničen podskup potpunog prostora $C(K)$ i stoga relativno kompaktan po Teoremu 1.2.7.

(**i**) $\Longrightarrow$ (**ii**) Obratno, pretpostavimo da je $S \subseteq C(K)$ relativno kompaktan. Tada je po Teoremu 1.2.7 S totalno ograničen, pa i ograničen u normi. Slijedi da je S ograničen po točkama. Pokažimo da je i ekvikontinuiran. U tu svrhu, neka su $x_0 \in K$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Kompaktan skup $\overline{S}$ je totalno ograničen pa ga možemo pokriti s konačno mnogo otvorenih kugala radijusa ε sa središtima $f_1, \ldots, f_n \in S$. Kako su te funkcije neprekidne, možemo pronaći otvorenu okolinu V od x_0 takvu da

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon \quad \text{za sve} \quad x \in V \quad \text{i} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Neka je sada $f \in S$ proizvoljan. Nađimo $j \in \{ 1, \ldots, n \}$ takav da je $\|f - f_j\|_\infty < \varepsilon$. Tada za sve $x \in V$ imamo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(x_0)| + |f_j(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

čime je dokazana ekvikontinuiranost od S. □

Primijetimo da je kompaktnost prostora ključna pretpostavka u dokazu prethodnog teorema koja nam je omogućila lokalno svojstvo ekvikontinuiranosti proširiti globalno na K izvlačenjem konačnog potpokrivača u prvom dijelu dokaza. Direktno iz prethodnog teorema dobivamo karakterizaciju kompaktnosti u $C(K)$.

Korolar 2.1.4. *Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Za podskup $S \subseteq C(K)$ ekvivalentno je:*

(i) S je kompaktan;

(ii) S je zatvoren, ekvikontinuiran i ograničen po točkama.

Pokažimo da su sve pretpostavke Teorema 2.1.3 nužne kroz nekoliko primjera.

Primjer 2.1.5. *Neka je $K = [0,1]$ i $f_n(x) = x^n$ niz funkcija iz $C(K)$. Neka je $S = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$. Kako za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $x \in K$ vrijedi $|f_n(x)| \leq 1$, S je ograničen po točkama. Primijetimo da S nije relativno kompaktan jer niti sam niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nema uniformno konvergentan podniz. Zaista, kada bi postojala $f \in C(K)$ takva da $\|f_{n_k} - f\|_\infty \to 0$, tada bi podniz f_{n_k} konvergirao po točkama prema f. No, bilo koji podniz konvergira po točkama funkciji koja je jednaka 0 na $[0,1\rangle$, a 1 u 1 pa nije neprekidna. Pokažimo da S nije ekvikontinuiran skup. Pretpostavimo suprotno, tada iz ekvikontinuiranosti u 1 dobivamo neki $\delta \in \langle 0,1\rangle$ za koji vrijedi*

$$|x^n - y^n| < \frac{1}{2}, \quad \forall x, y \in \langle 1-\delta, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

No, ako odaberemo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $(1-\delta/2)^n < 1/2$, $x = 1$ i $y = 1 - \delta/2$ imamo

$$|x^n - y^n| = 1 - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^n > 1 - \frac{1}{2} > \frac{1}{2},$$

što je kontradikcija. Dakle, S nije ekvikontinuiran.

Primjer 2.1.6. *Neka je $K = [0,1]$ i $f_n(x) = n$ niz u $C(K)$. Skup $S = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$ je ekvikontinuiran jer za bilo koji $\varepsilon > 0$ možemo uzeti proizvoljnu otvorenu okolinu točke $x_0 \in K$. Očito S nije ograničen po točkama, a nije niti relativno kompaktan jer za $n \neq m$ vrijedi $\|f_n - f_m\|_\infty \geq 1$.*

Primjer 2.1.7. *Neka je $K = \mathbb{R}$. U ovom primjeru K nije kompaktan topološki prostor. Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ zadana s*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \in [0,1]; \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Neka je $f_n(x) = f(x-n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $S = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$. Primijetimo da je nosač od f_n skup $[n, n+1]$. Iz toga odmah slijedi da je $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ za $n \neq m$ pa S nije relativno kompaktan. Jasno $|f_n(x)| \leq 1$ za svaki $x \in K$ i $n \in \mathbb{N}$ pa je S ograničen po točkama. Pokažimo da je i ekvikontinuiran. Neka je $x_0 \in K$ i $\varepsilon > 0$. Promotrimo segment $I = [x_0 - 1/4, x_0 + 1/4]$. Tada je I sadržan u nosaču najviše dvije funkcije iz S. Restrikcije tih funkcija na I su uniformno neprekidne pa je moguće odabrati otvorenu okolinu U od x_0 sadržanu u I tako da je za njih zadovoljen uvjet iz definicije ekvikontinuiranosti, dok je za ostale funkcije iz S on trivijalno zadovoljen jer su te funkcije identički 0 na toj okolini. Dakle, ne vrijedi zaključak teorema.

Važnu ulogu u teoriji operatora imaju tzv. kompaktni operatori. U nastavku ćemo pokazati kako iskoristiti Teorem 2.1.3 da bismo dokazali kompaktnost važne klase integralnih operatora.

Definicija 2.1.8. *Neka su X i Y normirani prostori. Kažemo da je linearan operator $A \in L(X,Y)$* ***kompaktan*** *ako je skup $A(B_X)$ relativno kompaktan podskup od Y. Skup takvih operatora označavamo s $K(X,Y)$.*

Lagano se vidi sljedeća karakterizacija kompaktnosti operatora: operator $A \in L(X,Y)$ je kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X postoji podniz niza $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji je konvergentan u Y. Neka je sada Δ zatvoreni pravokutnik u $\mathbb{R}^n$, dakle skup oblika $[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$. Promatramo Banachov prostor $C(\Delta)$ s normom $\|\cdot\|_\infty$. Uz skalarni produkt $(f|g) = \int_\Delta f(t)\overline{g(t)}dt$ on postaje unitaran (ali više ne potpun). Može se pokazati da je njegovo upotpunjenje Hilbertov prostor $L_2(\Delta)$. Za $k \in C(\Delta\times\Delta)$ definiramo **integralni operator s jezgrom** k dan s $J : C(\Delta) \to \mathbb{F}$,

$$(Jf)(t) = \int_\Delta k(t,s)f(s)ds, \quad t\in\Delta, \quad f\in C(\Delta). \tag{2.2}$$

Teorem 2.1.9. *Neka je $k \in C(\Delta\times\Delta)$ i J definiran s* (2.2)*. Vrijedi:*

(i) J je kompaktan operator s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$;

(ii) J je kompaktan operator s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u unitaran prostor $C(\Delta)$.

Dokaz. **(i)** Za $t\in\Delta$ neka je $k_t \in C(\Delta)$ definiran s $k_t(s) = k(t,s), \forall s\in\Delta$. Imamo

$$|J(f)(t)| = |(k_t|\overline{f})| \leq \sqrt{(k_t|k_t)}\sqrt{(f|f)} = \left[\int_\Delta |k(t,s)|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \|f\|_2. \tag{2.3}$$

Dakle, J je ograničen operator između unitarnog prostora $C(\Delta)$ i Banachovog prostora $C(\Delta)$ te vrijedi

$$\|J\| \leq \sup_{t\in\Delta}\left[\int_\Delta |k(t,s)|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\lambda(\Delta)}\|k\|_\infty,$$

pri čemu je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^n$. Nadalje, za $t_1,t_2\in\Delta$ je

$$|J(f)(t_1) - J(f)(t_2)| = |(k_{t_1} - k_{t_2}|\overline{f})| \leq \left[\int_\Delta |k(t_1,s)-k(t_2,s)|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

Skup $\Delta\times\Delta$ je kompaktan (jer je zatvoren i ograničen), pa je $k \in C(\Delta\times\Delta)$ uniformno neprekidna na $\Delta \times \Delta$. Dakle, za dani $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $|t_1 - t_2| < \delta$ i $|s_1 - s_2| < \delta$ povlače $|k(t_1, s_1) - k(t_2, s_2)| < \varepsilon$. Za $f \in B_{C(\Delta)}$ vrijedi:

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies |J(f)(t_1) - J(f)(t_2)| \leq \varepsilon\sqrt{\lambda(\Delta)}.$$

Dakle, $J(B_{C(\Delta)})$ je ekvikontinuiran skup u $(C(\Delta), \|\cdot\|_\infty)$. Za $M > 0$ takav da je $\int_\Delta |k(t,s)|^2 ds \leq M^2$, $\forall t \in \Delta$, iz (2.3) slijedi $\|J(f)\|_\infty \leq M$, $\forall f \in B_{C(\Delta)}$. Dakle, skup $J(B_{C(\Delta)})$ je i ograničen po točkama. Sada iz Teorema 2.1.3 slijedi da je $J(B_{C(\Delta)})$ relativno kompaktan, odnosno da je J kompaktan operator.

(ii) Slijedi iz prve tvrdnje jer konvergencija u $(C(\Delta), \|\cdot\|_\infty)$ povlači konvergenciju u $(C(\Delta), \|\cdot\|_2)$, a relativna kompaktnost je ekvivalentna relativnoj nizovnoj kompaktnosti u metričkim prostorima. □

2.2 Kompaktnost u L^p prostorima

Sadržaj ove sekcije oslanja se na notaciju i rezultate uvedene u Dodatku A. Cilj ove sekcije je dokazati nužan i dovoljan uvjet za kompaktnost u $L^p(\mathbb{R}^d)$ prostorima. Ovaj rezultat možemo smatrati analogonom Arzelà-Ascolijevog teorema za L^p prostore, a taj teorem će nam biti vrlo važan u dokazu. Kako su L^p prostori inherentno kompliciranije strukture ne možemo očekivati elegantne uvjete kao u $C(K)$, ali interpretacija će biti slična. Prvo uvodimo jedan novi operator preko kojeg ćemo na neki način moći opisati ekvikontinuiranost u L^p prostoru čiji elementi ne moraju sami po sebi biti neprekidni.

Za $h \in \mathbb{R}^d$ i $p \in [1, \infty\rangle$ definiramo **operator translacije** $T_h \in L(L^p(\mathbb{R}^d))$ s

$$T_h f(x) = f(x + h) \quad \text{za} \quad f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Važno svojstvo ovog operatora je neprekidnost po parametru h. Dokaz se oslanja na aproksimaciju funkcija iz L^p prostora neprekidnim funkcijama s kompaktnim nosačem.

Propozicija 2.2.1. *Neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ za $1 \leq p < \infty$. Tada je*

$$\lim_{|h|\to 0} \|T_h f - f\|_p = 0.$$

Dokaz. Neka je prvo $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Tada je f uniformno neprekidna pa za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ za sve $|h| < \delta$ i $x \in \mathbb{R}^d$ vrijedi $|T_h f(x) - f(x)| < \varepsilon$. Odaberimo $r > 0$ dovoljno velik tako da je topološki nosač od f sadržan u otvorenom pravokutniku $\langle -r, r\rangle^d$.

Ako je $|h| < \delta$ dovoljno mali tako da je i topološki nosač od $T_h f$ sadržan u $\langle -r, r\rangle^d$, tada vrijedi

$$\|T_h f - f\|_p^p = \int_{\langle -r,r\rangle^d} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \le \varepsilon^p (2r)^d.$$

Ovime je dokazana tvrdnja propozicije za $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Neka je sada $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Kako je $C_c(\mathbb{R}^d)$ gust u $L_p(\mathbb{R}^d)$ (Propozicija A.0.5), za zadani $\varepsilon > 0$ možemo pronaći $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ takav da je $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Po pokazanom možemo odabrati $\eta > 0$ tako da $|h| < \eta$ povlači $\|T_h g - g\|_p < \varepsilon$. Za $|h| < \eta$ imamo

$$\|T_h f - f\|_p \le \|T_h f - T_h g\|_p + \|T_h g - g\|_p + \|g - f\|_p < 3\varepsilon.$$

□

Sada smo spremni dokazati glavni teorem ove sekcije koji nosi ime po francuskom matematičaru Fréchetu i sovjetskom matematičaru Kolmogorovu. Primijetimo da prvi uvjet teorema ekvivalentno možemo izreći tako da kažemo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\|T_h f - f\|_p < \varepsilon$ za sve $f \in S$ i $|h| \le \delta$ iz čega je uočljiva sličnost s ekvikontinuiranosti. Drugo svojstvo bismo mogli zvati ekvinapetost jer zahtijevamo da funkcije iz S uniformno trnu što se više udaljimo od ishodišta, odnosno da je "većina" njihovih nosača sadržana u nekoj kugli oko ishodišta.

Teorem 2.2.2. *(Fréchet-Kolmogorov) Neka je $p \in [1, \infty\rangle$. Podskup $S \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ je relativno kompaktan ako i samo ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

(i) $\lim\limits_{|h|\to 0} \sup\limits_{f\in S} \|T_h f - f\|_p = 0$;

(ii) $\lim\limits_{\rho\to\infty} \sup\limits_{f\in S} \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,\rho)} |f(x)|^p \, dx = 0.$

Dokaz. Pretpostavimo da za $S \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ vrijede (i) i (ii). Pokažimo prvo da je S nužno ograničen. Neka je $r > 0$ takav da je

$$\sup_{f\in S} \|T_h f - f\|_p \le 1 \quad \text{za sve} \quad h \in \mathbb{R}^d,\ |h| \le r$$

pri čemu na $\mathbb{R}^d$ uzimamo normu $|(x_1, \dots, x_d)| = \max\{\, |x_1|, \dots, |x_n|\,\}$ te neka je $R > 0$ takav da je

$$\sup_{f\in S} \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,R)} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \le 1.$$

Fiksirajmo netrivijalan $h \in \mathbb{R}^d$ s $|h| = r$. Za sve $f \in S$ i $x \in \mathbb{R}^d$ imamo

$$\begin{aligned}\|\mathbb{1}_{K(x,R)} f\|_p &\leq \|\mathbb{1}_{K(x,R)}(f - T_h f)\|_p + \|\mathbb{1}_{K(x,R)} T_h f\|_p \\ &= \|\mathbb{1}_{K(x,R)}(f - T_h f)\|_p + \|\mathbb{1}_{K(x-h,R)} f\|_p \\ &\leq 1 + \|\mathbb{1}_{K(x-h,R)} f\|_p.\end{aligned}$$

Induktivno dobivamo da za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|\mathbb{1}_{K(0,R)} f\|_p \leq N + \|\mathbb{1}_{K(-Nh,R)} f\|_p.$$

Sada odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $Nr = N|h| > 2R$. Tada je $K(-Nh, R) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus K(0, R)$ i vrijedi

$$\|f\|_p = \|\mathbb{1}_{K(0,R)} f\|_p + \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,R)} f\|_p \leq N + \|\mathbb{1}_{K(-Nh,R)} f\|_p + 1 \leq N + 2. \tag{2.4}$$

Dakle, S je ograničen. Pokažimo da je S relativno kompaktan. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i odaberimo $R_\varepsilon > 0$ takav da vrijedi

$$\sup_{f \in S} \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,R_\varepsilon)} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \varepsilon^p.$$

Stavimo $B_\varepsilon = K(0, R_\varepsilon)$ i $S_\varepsilon = \{ \mathbb{1}_{B_\varepsilon} f : f \in S \}$. Ako je $f \in S$, tada je

$$\|f - \mathbb{1}_{B_\varepsilon} f\|_p = \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon} f\|_p < \varepsilon. \tag{2.5}$$

i posljedično, $S \subseteq S_\varepsilon + K_p(0, \varepsilon)$, gdje je $K_p(0, \varepsilon)$ otvorena kugla u $L^p(\mathbb{R}^d)$. Odaberimo $r_\varepsilon > 0$ takav da je

$$\sup_{f \in S} \|T_h f - f\|_p \leq \varepsilon \quad \text{za sve} \quad h \in \mathbb{R}^d, \, |h| \leq r_\epsilon.$$

Za takav h, iz (2.5) slijedi da za sve $f \in S$ imamo

$$\|T_h(\mathbb{1}_{B_\varepsilon} f) - \mathbb{1}_{B_\varepsilon} f\|_p \leq \|T_h(\mathbb{1}_{B_\varepsilon} f - f)\|_p + \|T_h f - f\|_p + \|f - \mathbb{1}_{B_\varepsilon} f\|_p \leq 3\varepsilon. \tag{2.6}$$

Neka je $0 \leq \Phi \in C_c(K(0, r_\varepsilon))$ takav da je $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x) \, dx = 1$. Definirajmo skup

$$S^\varepsilon = \{ \Phi * g : g \in S_\varepsilon \}.$$

Za $g \in S_\varepsilon$, iz (2.6) dobivamo

$$\begin{aligned}\|\Phi * g - g\|_p &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y)[g(\cdot - y) - g(\cdot)] \, dy \right\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y) \|g(\cdot - y) - g(\cdot)\|_p \, dy \\ &= \int_{K(0,r_\varepsilon)} \Phi(y) \|g(\cdot - y) - g(\cdot)\|_p \, dy \leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je $S_\varepsilon \subseteq S^\varepsilon + K_p(0, 3\varepsilon)$ te stoga

$$S \subseteq S_\varepsilon + K_p(0, \varepsilon) \subseteq S^\varepsilon + K_p(0, 4\varepsilon).$$

Ako pokažemo da je S^ε relativno kompaktan, iz Propozicije 1.3.6 slijedit će da je i S relativno kompaktan. Svaki $h \in S^\varepsilon$ ima nosač sadržan u $K(0, R_\varepsilon + r_\varepsilon)$. Pokažimo da je svaki $h \in S^\varepsilon$ neprekidan i da je skup S^ε, shvaćen kao podskup od $C(\overline{K}(0, R_\varepsilon + r_\varepsilon))$, ekvikontinuiran i ograničen.

Neka je $h \in S^\varepsilon$ proizvoljan oblika $h = \Phi * g$ za $g = \mathbb{1}_{B_\varepsilon} f \in S_\varepsilon$, pri čemu je $f \in S$. Po uniformnoj neprekidnosti, za dani $\eta > 0$ postoji $0 < \delta < 1$ takav da za sve $x, y \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x - y| < \delta$ vrijedi $|\Phi(x) - \Phi(y)| < \eta$. Stoga, za sve $x, y \in \mathbb{R}^d$ za koje je $|x - y| < \delta$ imamo

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(x - t) - \Phi(y - t)||g(t)|\, dt \\
&= \int_{B_\varepsilon} |\Phi(x - t) - \Phi(y - t)||g(t)|\, dt \\
&\leq \eta \int_{B_\varepsilon} |g(t)|\, dt = \eta \int_{B_\varepsilon} |f(t)|\, dt \leq \eta |B_\varepsilon|^{1/q}(N + 2),
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili Hölderovu nejednakost (A.0.2) i (2.4). Ovime je dokazana neprekidnost od h. Kako je ograda uniformna po $h \in S^\varepsilon$, ovime je dokazana ekvikontinuiranost od S^ε.

Ograničenost od S^ε slijedi iz ograničenosti S. Zaista, ako je $h = \Phi * g \in S^\varepsilon$ za $g \in S_\varepsilon$, onda po Hölderovoj nejednakosti s $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ imamo

$$|h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y)|g(x - y)|\, dy \leq \|\Phi\|_q \|g\|_p$$

Po Teoremu 2.1.3, S^ε je relativno kompaktan u $C(\overline{K}(0, R_\varepsilon + r_\varepsilon))$. Ulaganje $i : C(\overline{K}(0, R_\varepsilon + r_\varepsilon)) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ je ograničeno jer za $f \in C(\overline{K}(0, R_\varepsilon + r_\varepsilon))$ imamo:

$$\|i(f)\|_p = \left(\int_{\overline{K}(0, R_\varepsilon + r_\varepsilon))} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq \|f\|_\infty \cdot \lambda(\overline{K}(0, R_\varepsilon + r_\varepsilon))^{1/p}.$$

Sada se lagano vidi da je S^ε relativno kompaktan podskup od $L^p(\mathbb{R}^d)$. Naime, po Teoremu 1.2.7 dovoljno je dokazati relativnu nizovnu kompaktnost. Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $S^\varepsilon \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ onda je on i niz u S^ε promatranom kao podskup prostora $\overline{K}(0, R_\varepsilon + r_\varepsilon)$. Iz relativne kompaktnosti tada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz u $\overline{K}(0, R_\varepsilon + r_\varepsilon)$ koji je onda konvergentan i u $L^p(\mathbb{R}^d)$ po neprekidnosti ulaganja.

Obratno, pretpostavimo da je S relativno kompaktan podskup od $L^p(\mathbb{R}^d)$. Tada je (i) jednostavna posljedica Propozicije 2.2.1. Zaista, za fiksan $\varepsilon > 0$, zbog relativne kompaktnosti S možemo pokriti s konačno kugala radijusa ε, označimo im središta s $f_1, \ldots, f_k$. Tada se svaki $f \in S$ nalazi u barem jednoj od ovih kugala, recimo $K(f_{j_0}, \varepsilon)$ za $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$. Tada,

$$\begin{aligned} \|T_h f - f\|_p &\le \|T_h f - T_h f_{j_0}\|_p + \|T_h f_{j_0} - f_{j_0}\|_p + \|f_{j_0} - f\|_p \\ &\le \varepsilon + \sup_{1\le j\le k} \|T_h f_j - f_j\|_p + \varepsilon. \end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, iz Propozicije 2.2.1 slijedi

$$\limsup_{|h|\to 0} \sup_{f\in S} \|T_h f - f\|_p \le \lim_{|h|\to 0} \sup_{1\le j\le k} \|T_h f_j - f_j\|_p = 0.$$

Pretpostavimo da svojstvo (ii) ne vrijedi. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da

$$\forall r > 0 \quad \exists f \in S \quad \text{takav da je} \quad \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r)} f\|_p \ge \varepsilon.$$

Stavimo $r_1 = 1$ i odaberimo $f_1 \in S$ takav da je $\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r_1)} f_1\|_p \ge \varepsilon$. Odaberimo $r_2 \ge r_1$ dovoljno velik tako da je

$$\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r_2)} f_1\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za taj r_2 odaberimo $f_2 \in S$ takav da je $\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r_2)} f_2\|_p \ge \varepsilon$. Sada odaberimo $r_3 \ge r_2$ dovoljno velik tako da $\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r_3)} f_2\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Nastavljajući induktivno, dobivamo niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S koji ima svojstvo da za sve $n > m \ge 1$,

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_p &\ge \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r_n)} (f_n - f_m)\|_p \ge \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r_n)} f_n\|_p - \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r_n)} f_m\|_p \\ &\ge \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r_n)} f_n\|_p - \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus K(0,r_{m+1})} f_m\|_p \ge \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Slijedi da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nema konvergentan podniz pa stoga S ne može biti relativno kompaktan po Teoremu 1.2.7.

□

Imamo direktan korolar za ograničene domene.

Korolar 2.2.3. *Neka je $p \in [1, \infty\rangle$ i neka je D otvoren ograničen podskup od $\mathbb{R}^d$. Podskup S od $L^p(D)$ je relativno kompaktan ako i samo je*

$$\lim_{|h|\to 0} \sup_{f\in S} \|T_h f - f\|_p = 0.$$

Ovdje identificiramo funkcije iz $L^p(D)$ s njihovim proširenjima nulom u $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Dokaz. Dovoljno je primijetiti da će za dovoljno velike $\rho > 0$ vrijediti da je presjek D i $\mathbb{R}^d \setminus K(0,\rho))$ prazan skup pa će uvjet (ii) iz Fréchet-Kolmogorovljeva teorema biti trivijalno zadovoljen. $\square$

Ovaj teorem ima brojne primjene u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi kod dokazivanja egzistencije rješenja nekih jednadžbi te se koristi u dokazu važnog Rellich-Kondrachovljevog teorema o kompaktnosti ulaganja Soboljevljevog prostora (vidi [15, Teorem 11.40]). Navodimo još dva rezultata o relativnoj kompaktnosti za prostore c_0 i l^p koji se pokažu sličnim idejama kao u dokazu Fréchet-Kolmogorovljeva teorema. Primijetimo da su oba uvjeta svojevrsne verzije ekvinapetosti.

Propozicija 2.2.4. *Podskup $S \subseteq c_0$ je relativno kompaktan ako i samo ako postoji $y \in c_0$ takav da za sve $x \in K$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|x_n| \leq |y_n|$.*

Propozicija 2.2.5. *Neka je $p \in [1,\infty\rangle$. Podskup S od l^p je relativno kompaktan ako i samo za sve $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da*

$$\sup_{x\in S} \sum_{n=N}^{+\infty} |x_n|^p \leq \varepsilon^p.$$

2.3 Kompaktnost konveksnih skupova

U ovoj sekciji pokazujemo brojna svojstva kompaktnih skupova koji imaju svojstvo konveksnosti te svojstva konveksne ljuske kompaktnog skupa. U $\mathbb{R}^n$ konveksna ljuska zatvorenog skupa ne mora biti zatvoren skup, na primjer konveksna ljuska skupa

$$(\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,\infty\rangle \times \{0\})$$

u $\mathbb{R}^2$ neće biti zatvoren skup. No, konveksna ljuska svakog kompaktnog skupa u $\mathbb{R}^n$ će biti kompaktan skup, pa i zatvoren (vidi [10, Teorem 3.20]). Ovo svojstvo će vrijediti i za konačnodimenzionalne normirane prostore, no uskoro ćemo pokazati da konveksna ljuska kompaktnog skupa općenito ne mora biti kompaktan skup, ali da će zatvorena konveksna ljuska biti kompaktna uz pretpostavku da je prostor Banachov (vidi Teorem 4.4.4 i Primjer 4.4.5). Ostatak ove sekcije provodimo u općenitijem okruženju topološkog vektorskog prostora.

Prvi rezultat govori o kompaktnosti konveksne ljuske konačne unije kompaktnih i konveksnih skupova. Naravno, rezultat neće vrijediti za beskonačne unije, na primjer cijeli prostor $\mathbb{C}$ možemo zapisati kao prebrojivu uniju zatvorenih kugala koje jesu kompaktne, a konveksna ljuska njihove unije je $\mathbb{C}$ što nije kompaktan skup.

Teorem 2.3.1. *(Bourbaki) Neka su $K_1, \ldots, K_n$ kompaktni i konveksni podskupovi topološkog vektorskog prostora X. Tada je $\mathrm{co}(K_1 \cup \ldots \cup K_n)$ kompaktan skup.*

Dokaz. Neka je $(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)})_{\alpha \in I}$ hiperniz u $\mathrm{co}(K_1 \cup \ldots \cup K_n)$ zapisan u skladu s (1.2). Kako je svaki od skupova K_j kompaktan, što je i segment $[0,1]$, postoji podhiperniz $(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\beta)} x_j^{(\beta)})_{\beta \in J}$ takav da za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ postoje

$$\lambda_j \in [0,1] \quad \text{i} \quad x_j \in K \quad \text{takvi da vrijedi} \quad \lambda_j^{(\beta)} \to \lambda_j \quad \text{i} \quad x_j^{(\beta)} \to x_j.$$

Iz neprekidnosti operacija u X slijedi $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(\beta)} x_j^{(\beta)} \to \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$. Također, neprekidnost preslikavanja $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{F}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j$ osigurava $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ pa je $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \in \mathrm{co}(K_1 \cup \ldots \cup K_n)$. Dakle, svaki hiperniz u $\mathrm{co}(K_1 \cup \ldots \cup K_n)$ ima konvergentan podhiperniz s limesom u $\mathrm{co}(K_1 \cup \ldots \cup K_n)$, pa je taj skup kompaktan po Propoziciji 1.1.18. $\square$

Ekstremne točke

Neka je K zatvoren konveksan mnogokut u ravnini čiji su vrhovi $v_1, \ldots, v_n$. Očito je K konveksna ljuska skupa $\{x_1, \ldots, x_n\}$. U nastavku pokazujemo da će ovo svojstvo imati neprazni kompaktni konveksni podskupovi Hausdorffovog lokalno konveksnog TVP-a. No, prvo moramo smisleno generalizirati pojam vrha za proizvoljan konveksan skup što je sadržaj sljedećih definicija.

Neka je X vektorski prostor i neka je $K \subseteq X$ neprazan konveksan podskup. Za $x \in K$ kažemo da je **ekstremna točka** od K ako

$$x = (1-\lambda)y + \lambda z \quad \text{za} \quad \lambda \in \langle 0,1 \rangle \quad \text{i} \quad y, z \in K$$

povlači $x = y = z$. Dakle, ekstremne točke su one koje se ne mogu zapisati kao netrivijalna konveksna kombinacija ostalih elemenata iz K. Skup svih ekstremnih točaka skupa K označavat ćemo s $\mathcal{E}(K)$.

Za neprazan konveksan skup $F \subseteq K$ kažemo da je **ekstremna strana** od K ako

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in F \quad \text{za neke} \quad \lambda \in \langle 0,1 \rangle \quad \text{i} \quad x, y \in K$$

povlači $x, y \in F$. Ukoliko na X imamo neku topologiju, dogovorno ćemo dodatno zahtijevati da ekstremna strana F bude i zatvoren skup u toj topologiji.

Lema 2.3.2. *Neka je X Hausdorffov topološki vektorski prostor i neka je $K \subseteq X$ neprazan zatvoren konveksan podskup. Neka je $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \in \mathcal{E}(K)$, pri čemu su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ i $x_1, \ldots, x_n \in K$. Tada je $x_j = x$ za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$ takve da je $\lambda_j \neq 0$.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da su svi $\lambda_j \neq 0$ i da je $n \geq 2$. Fiksirajmo $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Tada je

$$\sum_{j \neq j_0} (1 - \lambda_{j_0})^{-1} \lambda_j x_j \in K$$

jer je K konveksan. Kako je x ekstremna točka od K i

$$x = \lambda_{j_0} x_{j_0} + (1 - \lambda_{j_0}) \sum_{j \neq j_0} (1 - \lambda_{j_0})^{-1} \lambda_j x_j,$$

po definiciji slijedi $x_{j_0} = x$. □

Pogledajmo na nekoliko primjera kako odrediti ekstremne točke nekog skupa.

Primjer 2.3.3. *Neka je $X = \mathbb{R}^2$. Ako na njemu promatramo normu $\|\cdot\|_\infty$, tada je B_X konveksan skup koji ima četiri ekstremne točke $(\pm 1, \pm 1)$. Uz euklidsku normu $\|\cdot\|_2$ skup ekstremnih točaka od B_X je jedinična sfera S_X.*

Primjer 2.3.4. *Promotrimo $M(\Omega)$, prostor svih realnih mjera na $(\Omega, \mathcal{F})$ (vidi Dodatak B). Neka je C skup svih vjerojatnosnih mjera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Pokazuje se da je C zatvoren i konveksan podskup od $M(\Omega)$. Pokažimo da je $\mu \in C$ ekstremna točka od C ako i samo ako je μ* ***atomska****, tj. ima svojstvo da kada god je $S = A \cup B$ za neke disjunktne $A, B \in \mathcal{F}$, tada je $\mu(A) = 0$ ili $\mu(B) = 0$. Pretpostavimo prvo da je $\mu \in C$ i da vrijedi*

$$\mu = (1 - \lambda)\mu_1 + \lambda \mu_2 \quad za \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \mu_1, \mu_2 \in C.$$

Ako je $\mu_1 \neq \mu_2$, tada postoji $S \in \mathcal{F}$ takav da $\mu_1(S) \neq \mu_2(S)$, pri čemu možemo pretpostaviti

$$0 \leq \mu_1(S) < \mu_2(S) \leq 1.$$

Tada zbog $\mu_2(S) > 0$ slijedi $\mu(S) > 0$, a zbog $\mu_1(S^c) > 0$ slijedi $\mu(S^c) > 0$. Dakle, μ nije atomska, što je kontradikcija. Zaključujemo da vrijedi $\mu_1 = \mu_2$, odnosno da je μ ekstremna točka od C.

Obratno, ako $\mu \in C$ nije atomska, onda postoji skup $S \in \mathcal{F}$ takav da $\mu(S) > 0$ i $\mu(S^c) > 0$. Promotrimo vjerojatnosne mjere $\mu_1, \mu_2 \in C$ definirane s

$$\mu_1(A) = \frac{1}{\mu(S)} \mu(A \cap S), \quad \mu_1(A) = \frac{1}{\mu(S^c)} \mu(A \cap S^c), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Tada uz $\lambda = \mu(S^c) \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi $\mu = (1 - \lambda)\mu_0 + \lambda \mu_1$, pa μ nije ekstremna točka.

Kao poseban slučaj, ako je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor, onda su ekstremne točke skupa svih Borelovih vjerojatnosnih mjera na K Diracove mjere s nosačem u K. Zaista, pretpostavimo da je μ atomska i neka je S njezin nosač, *tj. S je komplement unije svih otvorenih skupova mjere 0. Ako S nije jednočlan, onda on sadrži dvije različite točke x i y. Kako je K Hausdorffov, one su sadržane u disjunktnim otvorenim skupovima U i V. Po definiciji nosača je $\mu(U) > 0$ i $\mu(V) > 0$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je μ atomska. Dakle, $S = \{x\}$ i $\mu = \delta_x$.*

Primjer 2.3.5. *Zatvoreni konveksni skupovi ne moraju imati ekstremne točke. Zaista, promotrimo zatvoren i konveksan podskup C od $L^1([0,1])$ dan s*

$$C = \{\, f \in L^1([0,1]) : f \geq 0,\ \|f\|_1 = 1 \,\}.$$

Neka je $f \in C$ proizvoljan. Preslikavanje

$$\Phi : [0,1] \to [0,1], \quad \Phi(\delta) = \|\mathbb{1}_{\langle 0,\delta\rangle} f\|_1$$

je neprekidno i zadovoljava $\Phi(0) = 0$ i $\Phi(1) = \|f\|_1 = 1$. Stoga postoji $\delta \in \langle 0,1\rangle$ takav da $\Phi(\delta) = \frac{1}{2}$. Sada vrijedi $f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h$, gdje su $g, h \in C$ dani s

$$g = 2\mathbb{1}_{\langle 0,\delta\rangle} f \quad i \quad h = 2\mathbb{1}_{\langle \delta,1\rangle} f,$$

pa f nije ekstremna točka od C. Dakle, $\mathcal{E}(C) = \emptyset$.

No, vrijedi da kompaktni konveksni skupovi uvijek imaju barem jednu ekstremnu točku, što je sadržaj sljedećeg teorema kojeg su prvi dokazali sovjetski matematičari M. Krein i D. Milman 1940. godine. Primijetimo da više nije dovoljno gledati samo konveksnu ljusku kao u primjeru mnogokuta jer je K zatvoren, a $\mathrm{co}(\mathcal{E}(K))$ općenito ne mora biti zatvoren skup. Ključna tvrdnja teorema je egzistencija ekstremnih točaka, a za njen dokaz potrebna će nam biti Zornova lema (vidi Dodatak C).

Teorem 2.3.6. *(Krein-Milman) Neka je X lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor i neka je $K \subseteq X$ kompaktan i konveksan podskup. Tada je K zatvorena konveksna ljuska svojih ekstremnih točaka, tj. vrijedi*

$$K = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{E}(K)).$$

Posebno, K sadrži ekstremnu točku.

Dokaz. Prvo pokazujemo da je $\mathcal{E}(K) \neq \emptyset$. Uočimo dva korisna svojstva:

(i) $x \in K$ je ekstremna točka od K ako i samo ako je $\{x\}$ ekstremna strana od K;

(ii) ako je F ekstremna strana od K i ako je F' ekstremna strana od F, onda je F' ekstremna strana od K.

Prva tvrdnja je očita. Da bismo pokazali (ii), neka je $x \in F'$ dan kao

$$x = (1-\lambda)y + \lambda z \quad \text{za} \quad \lambda \in \langle 0, 1\rangle \quad \text{i} \quad y, z \in K.$$

Slijedi da je $y, z \in F$ jer je F ekstremna strana od K, a zatim $y, z \in F'$ jer je F' ekstremna strana od F.

1.korak: Neka je $\mathcal{K}$ familija svih ekstremnih strana od K. Ova familija je neprazna jer sadrži K. Uvedimo parcijalni uređaj $\leq$ na $\mathcal{K}$ s

$$K_1 \leq K_2 \iff K_2 \subseteq K_1.$$

Po svojstvu konačnih presjeka (Propozicija 1.1.19) svaki neprazan lanac $\mathcal{L}$ u $\mathcal{K}$ ima gornju među, naime $\bigcap_{S \in \mathcal{L}} S \neq \emptyset$, a lagano se vidi da je nužno i ekstremna strana od K. Stoga možemo primijeniti Zornovu lemu i zaključiti da $\mathcal{K}$ ima maksimalan element, nazovimo ga F. Pokažimo da je F nužno jednočlan iz čega će zbog (i) slijediti da je jedini element od F upravo ekstremna točka. Prepostavimo suprotno, neka su $y, z \in F$ dvije različite točke. Kao posljedica teorema separacije, postoji $f \in X'$ takav da $f(y) \neq f(z)$, pa eventualnim množenjem s i možemo pretpostaviti $\operatorname{Re} f(y) \neq \operatorname{Re} f(z)$. Neka je

$$F_0 = \{\, x \in F : \operatorname{Re} f(x) = \sup_{w \in F} \operatorname{Re} f(w) \,\}.$$

Tada je F_0 pravi zatvoren podskup od F, koji je također neprazan jer kompaktnost od F implicira da je gornji supremum zapravo maksimum. Ako se element $x \in F_0$ može zapisati kao $x = (1-\lambda)x' + \lambda x''$ s $x', x'' \in F$ i $0 < \lambda < 1$, onda

$$(1-\lambda) \operatorname{Re} f(x') + \lambda \operatorname{Re} f(x'') = \sup_{w \in F} f(w).$$

Ako $x' \notin F_0$, onda je $\operatorname{Re} f(x') < \sup_{w \in F} \operatorname{Re} f(w)$. Kako je $\operatorname{Re} f(x'') \leq \sup_{w \in F} \operatorname{Re} f(w)$, gornja jednakost ne može vrijediti. Dolazimo u istu kontradikciju ako pretpostavimo $x'' \notin F_0$. Zaključujemo da je $x', x'' \in F_0$, pa je F_0 ekstremna strana od F. Sada iz (ii) zaključujemo da je F_0 i ekstremna strana od K. Kako je $F_0 \gneqq F$, dobivamo kontradikciju s maksimalnošću od F. Dakle, F je jednočlan čime smo dokazali da K ima ekstremnu točku.

2.korak: Pokazujemo $K \subseteq \overline{\operatorname{co}}(\mathcal{E}(K))$. Obratna inkluzija je trivijalna jer je $\mathcal{E}(K) \subseteq K$, a K je već zatvoren i konveksan. Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $\overline{\operatorname{co}}(\mathcal{E}(K))$ pravi podskup od K i fiksirajmo element $x_0 \in K \setminus \overline{\operatorname{co}}(\mathcal{E}(K))$. Po Teoremu separacije 1.4.10 primijenjenom na kompaktan skup $\overline{\operatorname{co}}(\mathcal{E}(K))$ i zatvoren skup $\{x_0\}$, postoji $f_0 \in X'$ takav da je

$$\max\{\, \operatorname{Re} f_0(x) : x \in \overline{\operatorname{co}}(\mathcal{E}(K)) \,\} < \operatorname{Re} f_0(x_0) \leq m_0 = \max\{\, \operatorname{Re} f_0(x) : x \in K \,\}.$$

Sada kao u prvom koraku provjerimo da je skup

$$F = \{ x \in K : \operatorname{Re} f_0(x) = m_0 \}$$

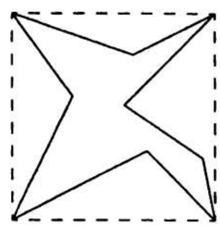
ekstremna strana od K. Štoviše, prvi korak proveden na F pokazuje da F ima ekstremnu točku, nazovimo ju x_1, koja je onda i ekstremna točka od K. No, iz

$$\operatorname{Re} f_0(x_1) = m_0 > \sup\{ \operatorname{Re} f_0(x) : x \in \mathcal{E}(K) \}$$

zaključujemo da $x_1 \notin \mathcal{E}(K)$, što je kontradikcija, čime je teorem dokazan. □

Primijetimo sada da iz ovog teorema i Primjera 2.3.4 slijedi da bilo koju vjerojatnosnu mjeru možemo proizvoljno dobro aproksimirati konačnom konveksnom kombinacijom atomskih mjera. Slično, bilo koju točku jedinične kugle u $\mathbb{R}^2$ možemo proizvoljno dobro aproksimirati konveksnom kombinacijom točaka jedinične sfere. Naravno, svaka točka jedinične kugle je već konveksna kombinacija dvije točke sfere.

Pretpostavimo da je sada M mnogokut u $\mathbb{R}^2$, ne nužno konveksan, čije se stranice sijeku samo u vrhovima i kojemu je svaki vrh incidentan s točno dvije stranice kao na slici 2.1. Neka je K kompaktno područje u $\mathbb{R}^2$ koje se sastoji od M i područja koje omeđuje. Lako se vidi da je $\overline{\text{co}}(K)$ (koji se podudara s $\text{co}(K)$ u ovom slučaju) zatvoren konveksan mnogokut čiji su vrhovi podskup vrhova od K. Štoviše, sve ekstremne točke od $\overline{\text{co}}(K)$ leže u K.



Slika 2.1: Mnogokut u $\mathbb{R}^2$ i njegova zatvorena konveksna ljuska.

Pokazuje se da ovo vrijedi kad god je K neprazan kompaktan podskup, ali uz pretpostavku da je $\overline{\text{co}}(K)$ kompaktan. Ovo je prvi dokazao Milman 1947. godine.

Teorem 2.3.7. *(Milman) Neka je X lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor i neka je $K \subseteq X$ kompaktan podskup takav da je $\overline{\text{co}}(K)$ također kompaktan. Tada svaka ekstremna točka od $\overline{\text{co}}(K)$ leži u K, tj. vrijedi*

$$\mathcal{E}(\overline{\text{co}}(K)) \subseteq K.$$

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{E}(\overline{\text{co}}(K))$ i neka je U otvorena okolina od 0. Da bismo pokazali $x \in K$ dovoljno je pokazati $(x+U) \cap K \neq \emptyset$ jer je tada $x \in \overline{K} = K$. Po Teoremu 1.4.6 (vi) i lokalnoj konveksnosti od X, postoji konveksna balansirana okolina V od 0 takva da je $\overline{V} \subseteq U$. Kako je K kompaktan, postoje $x_1, \dots, x_n \in K$ takvi da je $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n}(x_j + V)$. Za $j = 1, \dots, n$ neka je

$$K_j = \overline{\text{co}}(K \cap (x_j + V)).$$

Skupovi $K_1, \dots, K_n$ su kompaktni kao zatvoreni podskupovi kompaktnog skupa $\overline{\text{co}}(K)$ pa je $\text{co}(\bigcup_{j=1}^{n} K_j)$ kompaktan po Teoremu 2.3.1. Kako je $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K_j \subseteq \overline{\text{co}}(K)$, slijedi

$$\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} K_j\right) = \text{co}\left(\bigcup_{j=1}^{n} K_j\right).$$

Po (1.2) vrijedi $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$ pri čemu su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ i $y_1, \dots, y_n \in X$ takvi da $y_j \in K_j$ za svaki $j = 1, \dots, n$. Primjenom Leme 2.3.2 dobivamo $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ takav da $x = y_{j_0}$ iz čega slijedi

$$x \in K_{j_0} = \overline{\text{co}}(K \cap (x_{j_0} + \overline{V})) \subseteq x_{j_0} + \overline{V} = x_{j_0} - \overline{V}.$$

Sada imamo $x_{j_0} \in (x + \overline{V}) \cap K \subseteq (x + U) \cap K$, pa je $K \cap (x + U) \neq \emptyset$. □

Korolar 2.3.8. *Neka je X lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor i neka je $S \subseteq X$ neprazan podskup takav da je $\overline{\text{co}}(S)$ kompaktan. Tada svaka ekstremna točka od $\overline{\text{co}}(S)$ leži u $\overline{S}$, tj. vrijedi*

$$\mathcal{E}(\overline{\text{co}}(S)) \subseteq \overline{S}.$$

Dokaz. Pokažimo da vrijedi $\overline{\text{co}}(S) = \overline{\text{co}}(\overline{S})$. Iz $S \subseteq \overline{S}$ odmah slijedi $\overline{\text{co}}(S) \subseteq \overline{\text{co}}(\overline{S})$, a obratna inkluzija slijedi iz $\overline{S} \subseteq \overline{\text{co}}(S)$. Iz te jednakosti i činjenice da je $\overline{S}$ kompaktan kao zatvoren podskup kompaktnog skupa $\overline{\text{co}}(S)$ tvrdnja odmah slijedi iz Milmanovog teorema. □

Poglavlje 3

Slabe topologije

Vidjeli smo da normirani prostori beskonačne dimenzije imaju jako puno otvorenih skupova tako da niti zatvorena jedinična kugla nije kompaktna. Naravno, to nije idealno jer nam je svojstvo kompaktnosti često potrebno. Sada je ideja promatrati na istom prostoru neke druge topologije koje možda imaju manje otvorenih skupova, ali svejedno imaju neka poželjna svojstva, npr. želimo da funkcionali koji su bili neprekidni s obzirom na originalnu topologiju norme još uvijek ostanu neprekidni. Kako ćemo sada promatrati više topologija na istom skupu, uvodimo sljedeću terminologiju: za topologije τ_1 i τ_2 na istom skupu X kažemo da je τ_1 **slabija** od τ_2, odnosno da je τ_2 **jača** od τ_1, ako je $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

3.1 Slaba topologija inducirana familijom preslikavanja

Prvo uvodimo pojam slabe topologije na proizvoljnom skupu X.

Definicija 3.1.1. *Neka je X neprazan skup i neka je $(f_j)_{j\in J}$ familija preslikavanja $f_j : X \to Y_j$, pri čemu su $(Y_j, \tau_j)_{j\in J}$ topološki prostori.* ***Slaba topologija*** *na X* ***inducirana familijom*** *$\mathcal{F} = (f_j)_{j\in J}$ je najmanja topologija na X u odnosu na koju su sva preslikavanja $(f_j)_{j\in J}$ neprekidna. Tu topologiju ćemo označavati sa $\sigma(X, \mathcal{F})$.*

Napomena 3.1.2. *U nastavku sve topološke pojmove na koje gledamo u sklopu slabe topologije oslovljavat ćemo sa 'slaba'. Dakle, govorit ćemo o slabo otvorenim skupovima, slabom zatvaraču, slaboj neprekidnosti, itd.*

Mi naravno možemo uzeti $\mathcal{P}(X)$ kao topologiju na X uz koju će sva ta preslikavanja biti neprekidna. No, ovaj prostor nam nije od koristi jer u njemu konvergiraju samo konstantni nizovi, dakle ta topologija je prejaka. Želimo što manju topologiju za koju će to vrijediti. Očito, ako želimo da je svako od preslikavanja $(f_j)_{j\in J}$ neprekidno na X, svaki skup oblika $f_j^{-1}(V)$, gdje je V otvoren u Y_j i $j \in J$, mora biti element slabe topologije. Dakle, $\sigma(X,(f_j)_{j\in J})$ je najmanja topologija na X koja sadrži familiju

$$\mathcal{C} = \{\, f_j^{-1}(V) : V \in \tau_j,\ j \in J \,\}, \tag{3.1}$$

a po Propoziciji 1.1.5 znamo da je to familija svih unija konačnih presjeka iz $\mathcal{C}$. Sada vidimo da $\sigma(X,(f_j)_{j\in J})$ možemo dobiti i ako umjesto familije $\mathcal{C}$ uzmemo familiju

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \{\, f_j^{-1}(V) : V \in \mathcal{B}_j,\ j \in J \,\}, \tag{3.2}$$

gdje je $\mathcal{B}_j$ neka baza topologije τ_j na Y_j. Dakle, $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}_B$ su podbaze za $\sigma(X,(f_j)_{j\in J})$.

Znamo da konvergentni hipernizovi jedinstveno određuju topologiju pa pokažimo kako izgleda konvergencija s obzirom na slabu topologiju.

Propozicija 3.1.3. *Hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda\in I}$ u X konvergira s obzirom na slabu topologiju $\sigma(X,(f_j)_{j\in J})$ prema $x \in X$ ako i samo ako vrijedi $f_j(x) = \lim_{\lambda\in I} f_j(x_\lambda)$, $\forall j \in J$.*

Dokaz. Neka je $x = \lim_{\lambda\in I} x_\lambda$. Kako su sva preslikavanja f_j neprekidna obzirom na $\sigma(X,(f_j)_{j\in J})$, po Propoziciji 1.1.14 slijedi da je $f_j(x) = \lim_{\lambda\in I} f_j(x_\lambda), \forall j \in J$.

Obratno, pretpostavimo da za hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda\in I}$ vrijedi $f_j(x) = \lim_{\lambda\in I} f_j(x_\lambda)$ za sve $j \in J$. Neka je U proizvoljna otvorena okolina od x u topologiji $\sigma(X,(f_j)_{j\in J})$. Iz činjenice da je familija (3.1) podbaza slabe topologije slijedi da postoje $n \in \mathbb{N}$, $j_1,\dots,j_n \in J$ i skupovi $V_{j_1} \in \tau_{j_1},\dots,V_{j_n} \in \tau_{j_n}$ takvi da je

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{j_i}^{-1}(V_{j_i}) \subseteq U.$$

Slijedi $f_{j_i}(x) \in V_{j_i}$ za sve $i = 1,\dots,n$. Po pretpostavci za svaki i možemo pronaći $\lambda_i \in I$ takav da $\lambda_i \le \lambda$ implicira $f_{j_i}(x_\lambda) \in V_{j_i}$. Neka je $\lambda_0 \in I$ takav da $\lambda_i \le \lambda_0$ za sve $i = 1,\dots,n$. Sada za sve $\lambda_0 \le \lambda$ imamo $x_\lambda \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{j_i}^{-1}(V_{j_i}) \subseteq U$. □

Korolar 3.1.4. *Neka je W topološki prostor i neka je X skup na kojem imamo slabu topologiju $\sigma(X,(f_j)_{j\in J})$. Neka je $g : W \to X$ preslikavanje. Tada je g neprekidno ako i samo ako je preslikavanje $f_j \circ g : W \to Y_j$ neprekidno za svaki $j \in J$.*

Dokaz. Ako je g neprekidno, onda neprekidnost od f_j pokazuje neprekidnost kompozicije $f_j \circ g$, za svaki $j \in J$. Obratno, pretpostavimo da je $f_j \circ g$ neprekidno za svaki $j \in J$. Ako je $(w_\lambda)_{\lambda\in I}$ hiperniz u W koji konvergira prema nekom $w \in W$, tada $f(g(w_\lambda)) \to f(g(w))$ za svaki $j \in J$, pa iz Propozicije 3.1.3 slijedi da $g(w_\lambda) \to g(w)$ u slaboj topologiji. Sada iz Propozicije 1.1.14 slijedi neprekidnost od g. □

Smisleno je zahtijevati da tako konstruirana slaba topologija bude barem Hausdorffova, kako bismo npr. osigurali jedinstvenost limesa konvergentnih hipernizova. Pokazuje se da je za to svojstvo potrebno da familija funkcija $(f_j)_{j\in J}$ bude dovoljno velika tako da može identificirati točke iz X.

Definicija 3.1.5. *Neka je $(f_j)_{j\in J}$ familija preslikavanja definiranih na skupu X. Kažemo da familija $(f_j)_{j\in J}$* ***razlikuje*** *točke od X ako za svake dvije različite točke $x_1, x_2 \in X$ postoji $j \in J$ takav da vrijedi $f_j(x_1) \neq f_j(x_2)$.*

U našim daljnjim razmatranjima, ulogu prostora Y_j imat će polja $\mathbb{F}$, koja jesu Hausdorffova. Sljedećom propozicijom dan je nužan i dovoljan uvjet za Hausdorffovost slabe topologije u takvoj situaciji.

Propozicija 3.1.6. *Pretpostavimo da su svi prostori $(Y_j)_{j\in J}$ Hausdorffovi. Tada je slaba topologija $\sigma(X,(f_j)_{j\in J})$ na X Hausdorffova ako i samo ako familija $(f_j)_{j\in J}$ razlikuje točke od X.*

Dokaz. Neka je X Hausdorffov. Neka su $x_1, x_2 \in X$ različiti. Tada postoji $U \in \sigma(X,(f_j)_{j\in J})$ takav da je $x_1 \in U$ i $x_2 \notin U$. Odaberimo skup $V = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(V_i)$ takav da je $x_1 \in V \subseteq U$. Kako $x_2 \notin V$, postoji $i \in \{1,\dots,n\}$ takav da $f_i(x_2) \notin V_i$. Kako je $f_i(x_1) \in V_i$ slijedi $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$ pa familija $(f_j)_{j\in J}$ razlikuje točke od X.

Pretpostavimo sada da familija $(f_j)_{j\in J}$ razlikuje točke od X. Neka su $x_1, x_2 \in X$ različiti. Tada postoji $j \in J$ takav da $f_j(x_1) \neq f_j(x_2)$. Kako je Y_j Hausdorffov postoje otvoreni i disjunktni $U_1, U_2 \subseteq Y_j$ takvi da je $f_j(x_1) \in U_1$ i $f_j(x_2) \in U_2$. Sada su $f_j^{-1}(U_1)$ i $f_j^{-1}(U_2)$ disjunktne otvorene okoline od x_1 i x_2 u $\sigma(X,(f_j)_{j\in J})$. □

Primjer 3.1.7. *Prvi primjer slabe topologije je produktna topologija familije topoloških prostora uvedena u Definiciji 1.1.23. Zaista, to je najmanja topologija na X za koju su sve projekcija $\pi_i : X \to X_i$ neprekidne. Pogledajmo kako izgleda baza produktne topologije. Za $V_i \in \tau_i$ vrijedi*

$$\pi_i^{-1}(V_i) = \prod_{j\in I} U_j, \quad \text{gdje je } U_j = \begin{cases} V_i, & j = i, \\ X_j, & j \neq i \end{cases}. \tag{3.3}$$

Dakle, bazu produktne topologije čine skupovi koji su konačni presjeci skupova oblika (3.3)*, a to su točno skupovi oblika $\prod_{j\in I} V_j$, gdje su svi $V_j = X_j$, osim za konačno mnogo indeksa j kada su V_j proizvoljni elementi iz τ_j.*

Slabe topologije vektorskih prostora

Za nas će prostor X uvijek imati strukturu vektorskog prostora, a familija $\mathcal{F}$ će se sastojati od nekog podskupa linearnih funkcionala na X. Sljedeći bitan teorem pokazuje da će tako uvedena topologija na vektorski prostor X biti lokalno konveksna vektorska topologija te će stoga za nju vrijediti sva svojstva iz Teorema 1.4.6.

Teorem 3.1.8. *Neka je X vektorski prostor i $\mathcal{F} \subseteq X^*$. Tada je $(X, \sigma(X, \mathcal{F}))$ lokalno konveksan topološki vektorski prostor.*

Dokaz. Neka su $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ i $(y_\lambda)_{\lambda \in I}$ hipernizovi u X koji konvergiraju redom prema x i y te neka je $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in I}$ hiperniz u $\mathbb{F}$ koji konvergira prema α. Po neprekidnosti operacija zbrajanja i množenja u $\mathbb{F}$ za svaki $f \in \mathcal{F}$ imamo

$$f(\alpha_\lambda x_\lambda + y_\lambda) = \alpha_\lambda f(x_\lambda) + f(y_\lambda) \to \alpha f(x) + f(y) = f(\alpha x + y),$$

pa $\alpha_\lambda x_\lambda + y_\lambda$ konvegira prema $\alpha x + y$ u $\sigma(X, \mathcal{F})$. Slijedi da su vektorske operacije prostora X neprekidne s obzirom na slabu topologiju, pa je $(X, \sigma(X, \mathcal{F}))$ topološki vektorski prostor. Primijetimo da po (3.2) bazu ove slabe topologije čine skupovi oblika

$$\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(K(\alpha_i, r_i)), \tag{3.4}$$

gdje su $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ i $r_1, \ldots, r_n > 0$. Činjenica da je on lokalno konveksan slijedi iz konveksnosti tih baznih skupova. $\square$

Slijede dvije standardne tehničke leme potrebne za dokaz Teorema 3.1.11 u kojem iznosimo bitna svojstva slabih topologija induciranih *potprostorom* linearnih funkcionala na vektorskom prostoru X.

Lema 3.1.9. *Neka je X vektorski prostor i neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada za svaku n-torku $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{F}$ linearno nezavisnih linearnih funkcionala na X vrijedi:*

(i) Postoje vektori $x_1, \ldots, x_n \in X$ takvi da

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako } i = j, \\ 0, & \text{ako } i \neq j \end{cases} \qquad \text{za sve } i,\ j = 1, \ldots, n.$$

(ii) Ako je $f : X \to \mathbb{F}$ linearan funkcional takav da $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$, tada je $f \in \operatorname{span}(\{ f_1, \ldots, f_n \})$.

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po n. Tvrdnja (i) vrijedi za $n = 1$ jer je tada $f_1 \neq 0$. U nastavku pokazujemo da $(i)_n \implies (ii)_n$ i $(ii)_n \implies (i)_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

$\mathbf{(i)_n} \implies \mathbf{(ii)_n}$ Neka je $n \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da vrijedi tvrdnja $(i)_n$. Neka je $f : X \to \mathbb{F}$ linearan funkcional takav da vrijedi $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$. Po $(i)_n$ postoje

$x_1, \ldots, x_n \in X$ takvi da je $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Tada imamo

$$x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f,$$

što implicira $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f(x_i)$, odnosno $f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i$.

$\mathbf{(ii)_n} \implies \mathbf{(i)_{n+1}}$ Pretpostavimo sada da vrijedi $(ii)_n$. Neka su $f_1, \ldots, f_{n+1} : X \to \mathbb{F}$ linearno nezavisni linearni funkcionali na X i definirajmo

$$Z_i = \bigcap_{j \neq i} \operatorname{Ker} f_j, \quad \forall i = 1, \ldots, n+1.$$

Iz linearne nezavisnosti dobivamo $f_i \notin \operatorname{span}(\{ f_j : j \neq i \})$. Kako vrijedi $(ii)_n$ slijedi $Z_i \not\subseteq \operatorname{Ker} f_i$ pa za svaki $i = 1, \ldots, n+1$ postoji vektor $x_i \in Z_i$ takav da je $f_i(x_i) = 1$. Ti vektori zadovoljavaju uvjet iz $(i)_{n+1}$. □

Lema 3.1.10. *Neka je X vektorski prostor i neka su $f_1, \ldots, f_n, f : X \to \mathbb{F}$ linearni funkcionali. Tada je ekvivalentno:*

(i) $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$.

(ii) $f \in \operatorname{span}(\{ f_1, \ldots, f_n \})$.

(iii) Postoji konstanta $c > 0$ takva da

$$|f(x)| \leq c \max_{i=1,\ldots,n} |f_i(x)| \quad \text{za sve } x \in X.$$

Dokaz. **(i)** $\implies$ **(ii)** Pretpostavimo da vrijedi (i) i odaberimo maksimalan podskup $J \subseteq \{ 1, \ldots, n \}$ takav da su $(f_j)_{j \in J}$ linearno nezavisni. Tada je po (i)

$$\bigcap_{j \in J} \operatorname{Ker} f_j = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$$

Sada iz Leme 3.1.9 slijedi da je $f \in \operatorname{span}(\{ f_j : j \in J \})$.

(ii) $\implies$ **(iii)** Pretpostavimo da vrijedi (ii) i odaberimo $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ takve da je $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$. Neka je $c = \sum_{i=1}^{n} |c_i|$. Tada imamo

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| |f_i(x)| \leq c \cdot \max_{i=1,\ldots,n} |f_i(x)|$$

za sve $x \in X$ pa vrijedi (iii). Implikacija $(iii) \implies (i)$ očito vrijedi. □

Teorem 3.1.11. *Neka je X vektorski prostor i neka je $\mathcal{F} \leq X^*$. Slaba topologija $\sigma(X, \mathcal{F})$ ima sljedeća svojstva:*

(i) Funkcional $f \in L(X)$ je slabo neprekidan ako i samo ako ima slabo zatvorenu jezgru, odnosno ako i samo ako $f \in \mathcal{F}$.

(ii) Slabi zatvarač potprostora $S \leq X$ je $\overline{S} = \displaystyle\bigcap_{f\in\mathcal{F}, S\leq \operatorname{Ker} f} \operatorname{Ker} f.$

Dokaz. (i) Ako je $f \in \mathcal{F}$, onda je f neprekidan po definiciji topologije $\sigma(X, \mathcal{F})$. Ako je f slabo neprekidan, onda je po Propoziciji 1.1.13 $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ slabo zatvoren skup kao praslika zatvorenog skupa $\{0\}$.

Pretpostavimo sada da je $\operatorname{Ker} f$ slabo zatvoren skup i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $f \neq 0$. Neka je $x \in X$ takav da je $f(x) = 1$. Tada je x element slabo otvorenog skupa $X \setminus \operatorname{Ker} f$ pa postoje $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ i $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ takvi da je

$$x \in V = \bigcap_{i=1}^{n} \{\, y \in X : |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon \,\} \subseteq X \setminus \operatorname{Ker} f.$$

Naime, bazu topologije na $\mathbb{F}$ čine otvorene kugle pa egzistencija takve okoline slijedi iz (3.2). Pokažimo $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \subseteq \operatorname{Ker} f$. Neka je $z \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$. Za $\lambda \in \mathbb{F}$ je

$$x + \lambda z \in V \quad \text{i} \quad 1 + \lambda f(z) = f(x + \lambda z) \neq 0,$$

što implicira $f(z) = 0$, odnosno $z \in \operatorname{Ker} f$. Sada iz Leme 3.1.10 slijedi

$$f \in \operatorname{span}(\{\, f_1, \dots, f_n \,\}) \subseteq \mathcal{F}.$$

(ii) Neka je $S \leq X$. Ako $f \in \mathcal{F}$ iščezava na S, tada je $\overline{S} \subseteq \operatorname{Ker} f$ jer je $\operatorname{Ker} f$ slabo zatvoren podskup od X koji sadrži S. Obratno, neka je $x \in X \setminus \overline{S}$. Po karakterizaciji zatvarača iz Propozicije 1.1.4 postoji slabo otvoren $U \in \sigma(X, \mathcal{F})$ takav da je $x \in U$ i $U \cap S = \emptyset$, a iz Teorema 3.1.8 slijedi da ga možemo odabrati tako da bude i konveksan. Sada su oba skupa U i S konveksna pa Teorem separacije 1.4.10 daje neprekidan linearan funkcional $g : X \to \mathbb{F}$ takav da su $g(U)$ i $g(S)$ disjunktni. Kako je S potprostor, nužno je $S \subseteq \operatorname{Ker} g$. Po prvoj tvrdnji zaključujemo $g \in \mathcal{F}$ pa dobivamo $x \notin \bigcap_{f\in\mathcal{F}, S\leq \operatorname{Ker} f} \operatorname{Ker} f$ jer vrijedi $x \notin \operatorname{Ker} g$. $\square$

Primijetimo da prva tvrdnja prethodnog teorema tvrdi da će dualni prostor od X s obzirom na slabu topologiju $\sigma(X, \mathcal{F})$ biti upravo $\mathcal{F}$. Naime, to su točno svi linearni funkcionali na X koji su neprekidni s obzirom na tu slabu topologiju.

3.2 Slaba topologija normiranog prostora

Definicija 3.2.1. ***Slaba topologija normiranog prostora*** *X je slaba topologija na X inducirana svim ograničenim funkcionalima $f \in X'$. Ovu topologiju označavamo sa $\sigma(X, X')$.*

Dakle, $\sigma(X, X')$ je najmanja topologija na X s obzirom na koju su svi linearni funkcionali $f \in X'$ neprekidni. Kako je ograničenost linearnog operatora ekvivalentna neprekidnosti s obzirom na normu, znamo da su svi $f \in X'$ neprekidni u topologiji norme, koju ćemo ponekad nazivati i **jakom topologijom**. Zato je slaba topologija $\sigma(X, X')$ slabija od topologije norme. Posebno, svaki hiperniz koji konvergira u normi, konvergira i slabo i to k istom limesu.

Napomena 3.2.2. *U nastavku topološko pojmove koji se odnose na ovu slabu topologiju označavat ćemo s "w". Tako ćemo, na primjer, zatvarač skupa $S \subseteq X$ s obzirom na ovu topologiju označavati s $\overline{S}^w$.*

Pogledajmo kako izgleda konvergencija u slaboj topologiji normiranog prostora. Po Propoziciji 3.1.3, hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ u X konvergira prema $x \in X$ u slaboj topologiji $\sigma(X, X')$ ako i samo ako vrijedi $f(x) = \lim_\lambda f(x_\lambda)$ za sve $f \in X'$. Dakle slaba konvergencija niza u X uvedena u Definiciji 1.3.18 odgovara konvergenciji s obzirom na slabu topologiju, kao što smo i najavili.

Primjer 3.2.3. *Neka je $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz kanonskih vektora u l^2. Kako je $(l^2)' \cong l^2$, za $f \in (l^2)'$ postoji $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ takav da je*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \quad \text{za sve} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2.$$

Sada slijedi $f(e_n) = a_n \to 0$, pa niz $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira prema 0 u slaboj topologiji, ali ne u jakoj jer je $\|e_n\| = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, slaba i jaka topologija prostora l^2 se ne podudaraju. Ubrzo ćemo pokazati da je to uvijek slučaj u beskonačnodimenzionalnim prostorima. Ovim primjerom smo također pokazali da norma $x \mapsto \|x\|$ nije neprekidna ako na X promatramo slabu topologiju.

Nadalje, slaba topologija $\sigma(X, X')$ je Hausdorffova. Zaista, polje $\mathbb{F}$ je Hausdorffov prostor, a Korolar 1.3.9 pokazuje da dualni prostor X' razlikuje točke od X pa tvrdnja slijedi iz Propozicije 3.1.6. Posljedično, slabi limes svakog konvergentnog hiperniza je jedinstven. Štoviše, prostor X uz ovu slabu topologiju čini lokalno konveksan Hausdorffov topološki prostor. U tu svrhu pokušajmo odrediti kako izgleda baza ove topologije. Pogledajmo skupove oblika

$$B_{x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon} = \{\, x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n \,\} \tag{3.5}$$

za sve $x_0 \in X$, $f_1, \ldots, f_n \in X'$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Kako su sva preslikavanja $f_1, \ldots, f_n$ slabo neprekidna, jednakost

$$B_{x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(K(f_i(x_0), \varepsilon))$$

pokazuje da je skup $B_{x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon}$ slabo otvoren kao konačan presjek slabo otvorenih skupova. Po (3.2) ovi skupovi čine bazu slabe topologije.

Sljedeći teorem daje odnos između relativne slabe topologije potprostora i njegove slabe topologije.

Teorem 3.2.4. *Neka je X normiran prostor i neka je $Y \leq X$ potprostor. Tada se slaba topologija $\sigma(Y, Y')$ podudara s relativnom topologijom koju Y nasljeđuje kao podskup od $(X, \sigma(X, X'))$. Posebno, ako je S podskup od Y, tada se relativna topologija na S inducirana sa $\sigma(X, X')$ podudara s relativnom topologijom na S induciranom sa $\sigma(Y, Y')$.*

Dokaz. Neka je $U = \{ x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$ proizvoljan element baze slabe topologije $\sigma(X, X')$. Bazu relativne topologije na Y čine skupovi oblika $U \cap Y$, pri čemu je dovoljno uzeti točke $x_0 \in Y$. Označimo tako dobivenu bazu s $\mathcal{B}_X^Y$, a standardnu bazu za $\sigma(Y, Y')$ s $\mathcal{B}_Y$. Promotrimo inkluziju $\kappa : Y \to X$ i definirajmo $f_i^Y = f_i \circ \kappa : Y \to \mathbb{F}$ za $i = 1, \ldots, n$. Očito je $f_i^Y \in Y'$ za sve i. Imamo

$$\begin{aligned} U \cap Y &= \{ y \in Y : |f_i(y - x_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{ y \in Y : |(f_i \circ \kappa)(y - x_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{ y \in Y : \left|f_i^Y(y - x_0)\right| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Slijedi $\mathcal{B}_X^Y \subseteq \mathcal{B}_Y$. Neka je sada zadan proizvoljan element od $\mathcal{B}_X^Y$

$$U^Y = \{ y \in Y : \left|f_i^Y(y - x_0)\right| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\},$$

pri čemu su $f_i^Y \in Y'$ za sve $i = 1, \ldots, n$ i $x_0 \in Y$. Tada se svaki f_i^Y po Hahn-Banachovom teoremu 1.3.8 može proširiti do $f_i \in X'$ za kojeg vrijedi $f_i \circ \kappa = f_i^Y$. Sličnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} U^Y &= \{ y \in Y : \left|f_i^Y(y - x_0)\right| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{ y \in Y : |(f_i \circ \kappa)(y - x_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\} \\ &= \{ y \in Y : |f_i(y - x_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\} \\ &= Y \cap \{ x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Zaključujemo $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{B}_X^Y$. Dakle ove dvije topologije imaju zajedničku bazu pa se podudaraju. Dokažimo još drugu tvrdnju. Podskup $U \subseteq Y$ je otvoren u relativnoj topologiji induciranoj sa $\sigma(Y, Y')$ ako i samo ako je oblika $U = S \cap U_Y$ za neki $U_Y \in \sigma(Y, Y')$. Po prvom dijelu teorema slijedi $U_Y \in \sigma(Y, Y')$ ako i samo ako je $U_Y = U_X \cap Y$ za neki $U_X \in \sigma(X, X')$. Dakle, $U = S \cap U_Y$ ako i samo ako je $U = S \cap U_X \cap Y = S \cap U_X$ za neki $U_X \in \sigma(X, X')$. No, $U = S \cap U_X$ za neki $U_X \in \sigma(X, X')$ ako i samo ako je U otvoren u relativnoj topologiji induciranoj sa $\sigma(X, X')$. □

Iz Teorema 3.1.11 zaključujemo da će funkcional $f \in X^*$ biti ograničen ako i samo ako je slabo neprekidan. Ovo svojstvo se generalizira na linearan operator između dva proizvoljna normirana prostora.

Propozicija 3.2.5. *Neka su X i Y normirani prostor i neka je $T \in L(X, Y)$. Tada je T ograničen ako i samo ako je neprekidan u odnosu na slabe topologije na X i Y.*

Dokaz. Kako je linearan funkcional na normiranom prostoru neprekidan ako i samo ako je slabo neprekidan, po Korolaru 1.3.22 T je ograničen (odnosno neprekidan) ako i samo ako je $f \circ T$ slabo neprekidan linearan funkcional na X za sve $f \in Y'$, što je po Korolaru 3.1.4 ekvivalentno tvrdnji propozicije. □

Primijetimo da za sada nismo pokazali egzistenciju otvorenih skupova koji nisu slabo otvoreni. Naravno, ne bi imalo smisla uvesti novu topologiju koja je jednaka originalnoj. U nastavku pokazujemo da se slaba topologija podudara s jakom samo u prostorima konačne dimenzije. Podsjetimo se, slabi nizovni zatvarač nekog skupa S će se sastojati točno od onih elemenata prostora koje možemo dobiti kao limes nekog slabo konvergentnog niza. S druge strane, znamo da nizovi u općenitosti nisu dovoljni da bismo opisali strukturu topološkog prostora pa se slabi nizovni zatvarač i slabi zatvarač ne moraju nužno podudarati.

Propozicija 3.2.6. *Neka je X normiran prostor i neka je $S \subseteq X$.*

(i) Slabi nizovni zatvarač od S je sadržan u slabom zatvaraču od S.

(ii) Ako je $\dim X = \infty$, tada postoji skup koji je slabo nizovno zatvoren, ali nije slabo zatvoren.

Dokaz. (*i*) Neka je x element slabog nizovnog zatvarača od S. Tada postoji niz u S koji slabo konvergira prema x. Kako je svaki niz ujedno i hiperniz, iz Propozicije 1.1.10 slijedi da je x element slabog zatvarača od S.

(ii) Za svaki $k \geq 2$, konstruirajmo konačan skup S_k na sljedeći način: prvo odaberimo niz $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ potprostora od X, pri čemu je $\dim X_k = k$. Za svaki k, skup

$$Z_k = \{\, x \in X_k : \|x\| = k \,\}$$

je kompaktan podskup od X_k jer je $\dim X_k < \infty$, pa je totalno ograničen. Skup S_k se sastoji od konačno mnogo točaka $\{\, x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k} \,\}$ iz Z_k odabranih tako da je Z_k sadržan u uniji kugala radijusa $1/k$ sa središtima u tim točkama. Tada za svaki $x \in X_k$ takav da je $\|x\| = k$ postoji $x_{k,j} \in S_k$ takav da vrijedi

$$\|x - x_{k,j}\| < \frac{1}{k} \quad \text{i} \quad \|x_{k,j}\| = k. \tag{3.6}$$

Neka je $S = \bigcup_{k\geq 2} S_k$. Tvrdimo da S zadovoljava tvrdnju propozicije. Pokažimo da 0 pripada slabom zatvaraču od S. Svaki slabo otvoren skup koji sadrži 0 po (3.5) sadrži i podskup oblika

$$\{\, x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon,\, 1 \leq i \leq n \,\}, \tag{3.7}$$

gdje su $f_i \in X'$ odabrani takvi da vrijedi $\|f_i\| = 1$. Kako je svaki X_k k-dimenzionalan, za $k > n$ postoji netrivijalan $x_k \in X_k$ takav da je

$$f_i(x_k) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \text{i} \quad \|x_k\| = k.$$

Po konstrukciji, postoji $x_{k,j}$ u S_k koji zadovoljava (3.6) za $x = x_k$. Slijedi da za sve $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$|f_i(x_{k,j})| = |f_i(x_{k,j} - x_k)| \leq \|x_{k,j} - x_k\| \leq \frac{1}{k}.$$

Dakle, za $k > \max\{\, 1/\varepsilon, n \,\}$, $x_{k,j}$ pripada okolini (3.7). Ovime smo po Propoziciji 1.1.4 dokazali da je 0 element slabog zatvarača od S. S druge strane, S sadrži samo konačan broj točaka u bilo kojoj kugli radijusa R. Po Teoremu 1.3.20 slijedi da S ne sadrži slabo konvergentne nizove osim trivijalnih pa ne može postojati niz u S koji bi konvergirao k 0 jer $0 \notin S$. $\square$

Sljedeća propozicija pokazuje donekle patološko ponašanje slabe topologije normiranog prostora beskonačne dimenzije. Naime, u njemu je svaka slabo otvorena okolina neograničena. Štoviše, ona će uvijek sadržavati cijeli netrivijalan potprostor.

Propozicija 3.2.7. *Neka je X normiran prostor i neka je $\dim X = \infty$. Tada je svaki neprazan slabo otvoren podskup od X neograničen.*

Dokaz. Pokazat ćemo da je svaki neprazan slabo otvoren podskup od X slabo neograničen iz čega će po Teoremu 1.3.20 slijediti da je i neograničen. Kako su translati ograničenih skupova u normiranom prostoru opet ograničeni, dovoljno je pokazati tvrdnju za slabo otvorene okoline 0. Neka je stoga U slabo otvorena okolina od 0 u X. Tada postoje $f_1, \ldots, f_n \in X', n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ takvi da je

$$B_{0,f_1,\ldots,f_n,\varepsilon} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(K(0,\varepsilon)) \subseteq U.$$

Neka je $S = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i$. Slijedi da je $S \subseteq U$, pa je dovoljno pokazati da je S slabo neograničen. Kako je $\dim X = \infty$, to je i $\dim X' = \infty$ pa postoji $f \in X'$ koji nije linearna kombinacija $f_1, \ldots, f_n$. Iz Leme 3.1.10 slijedi da postoji $x \in S \setminus \operatorname{Ker} f$. Kako je $nx \in S$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $|f(nx)| = n|f(x)| \to \infty$ kad $n \to \infty$, skup $f(S)$ je neograničen. Dakle, S nije slabo ograničen pa nije niti ograničen. $\square$

Teorem 3.2.8. *Neka je X normiran prostor. Slaba topologija na X se podudara s jakom ako i samo ako je* $\dim X < \infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\dim X = n < \infty$. Pretpostavimo da za hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ vrijedi $x_\lambda \xrightarrow{w} x$. Neka je $\{ b_1, \ldots, b_n \}$ baza za X i promotrimo njoj pridruženu normu definiranu s

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_i b_i \right\| = \max\{ |\alpha_i| : 1 \leq i \leq n \}.$$

Primjenom definicije slabe konvergencije na dualnu bazu pridruženu $\{ b_1, \ldots, b_n \}$ dobijemo da $\|x_\lambda - x\| \to 0$. Dakle, hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ konvergira jako k x s obzirom na svaku normu na X (jer su sve ekvivalentne zbog $\dim X < \infty$). Da bismo dokazali jednakost dvaju topologija, dovoljno je pokazati da je svaki zatvoren skup i slabo zatvoren. Neka je S zatvoren skup u X i pretpostavimo suprotno, neka S nije slabo zatvoren. Tada postoji $x \in \overline{S}^w \setminus S$ i hiperniz $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ koji slabo konvergira k x po Propoziciji 1.1.10. No, prema prvom dijelu dokaza tada i $x_\lambda \xrightarrow{s} x$, pa se x nalazi i u jakom zatvaraču $\overline{S}$. Kako je po pretpostavci S zatvoren, slijedi $x \in S$ što je kontradikcija.

Ako je $\dim X = \infty$, po Propoziciji 3.2.7 vidimo da je svaki neprazan slabo otvoren skup neograničen, dok naravno postoje otvoreni skupovi koji jesu ograničeni, na primjer otvorena jedinična kugla. Dakle, te topologije se ne mogu poklapati. $\square$

Dakle, u prostorima konačne dimenzije uvođenje slabe topologije nam ne donosi ništa novoga pa u nastavku pretpostavljamo da je $\dim X = \infty$, osim ako ne naglasimo drugačije. Iako u normiranim prostorima beskonačne dimenzije postoji puno više zatvorenih nego slabo zatvorenih skupova, pokazuje se da su ta dva svojstva ekvivalentna za konveksne skupove.

Propozicija 3.2.9. *Neka je X normiran prostor i neka je $K \subseteq X$ konveksan. Tada je K zatvoren ako i samo je slabo zatvoren. Štoviše, vrijedi $\overline{K}^w = \overline{K}$.*

Dokaz. Neka je $K \subseteq X$ konveksan. Skup $\overline{K}^w$ je slabo zatvoren, pa i zatvoren iz čega slijedi $\overline{K} \subseteq \overline{K}^w$. Obratno, neka je $x_0 \in X \setminus \overline{K}$. Po Teoremu separacije 1.4.10, primijenjenom na kompaktan skup $\{x_0\}$ i zatvoren konveksan skup $\overline{K}$, postoje $f \in X'$ i $c \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\operatorname{Re} f(x_0) < c < \operatorname{Re} f(x), \quad \forall x \in \overline{K}.$$

Dakle, skup

$$\{ x \in X : \operatorname{Re} f(x) < c \} = f^{-1}(\{ \lambda \in \mathbb{F} : \operatorname{Re} \lambda < c \})$$

je slabo otvorena okolina od x_0 koja ne siječe K i posljedično, $x_0 \notin \overline{K}^w$ po Propoziciji 1.1.4. Sada imamo $\overline{K}^w \subseteq \overline{K}$, čime je dokazana druga tvrdnja. Svaki slabo zatvoren skup je zatvoren, a obratno ako je K zatvoren onda iz dobivenog slijedi $\overline{K}^w = \overline{K} = K$ pa je on i slabo zatvoren. □

Napomena 3.2.10. *Ako je $S \subseteq X$, tada će po prethodnoj propoziciji njegova zatvorena konveksna ljuska $\overline{\text{co}}(S)$ biti jednaka njegovoj slabo zatvorenoj konveksnoj ljusci $\overline{\text{co}}^w(S)$, odnosno najmanje slabo zatvorenom konveksnom podskupu koji sadrži S. Zato u nastavku nećemo koristiti oznaku $\overline{\text{co}}^w(S)$, iako je ona prirodnija kada promatramo skupove u kontekstu slabe topologije, nego ćemo umjesto nje samo pisati $\overline{\text{co}}(S)$.*

Sljedeći korolar daje zanimljivu vezu između slabe konvergencije niza i jake konvergencije konveksnih kombinacija tog niza.

Korolar 3.2.11. *(Mazur) Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u normiranom prostoru X i pretpostavimo da $x_n \xrightarrow{w} x$ za neki $x \in X$. Tada postoji niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\text{co}(\{ x_n : n \in \mathbb{N} \})$ takav da $y_n \xrightarrow{s} x$.*

Dokaz. Neka je K=co$(\{ x_n : n \in \mathbb{N} \})$. Skup K je konveksan pa je to i $\overline{K}$. Po Propoziciji 3.2.9, konveksan skup je zatvoren ako i samo ako je slabo zatvoren. Kako po pretpostavci $x_n \xrightarrow{w} x$, slijedi da je $x \in \overline{K}^w = \overline{K}$ pa možemo pronaći niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u K koji konvergira jako prema x. □

Primjer 3.2.12. *Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor i neka su $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i f neprekidne kompleksne funkcije na K takve da $f_n(x) \to f(x)$ za sve $x \in K$. Tada postoji niz konveksnih kombinacija funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira uniformno prema f. Zaista, jaka konvergencija u $C(K)$ odgovara uniformnoj konvergenciji niza funkcija. Ako je μ bilo koja kompleksna Borelova mjera na K, po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji dobivamo da vrijedi*

$$\int_K f_n \, d\mu \to \int_K f \, d\mu.$$

Stoga vrijedi $f_n \xrightarrow{w} f$ *po Teoremu B.0.5 koji identificira dualni prostor od* $C(K)$ *s prostorom svih regularnih kompleksnih Borelovih mjera na* K. *Sada primjenom Korolara 3.2.11 slijedi tvrdnja.*

U daljnjim razmatranjima svojstva od B_X će imati ključnu ulogu jer nam je taj skup prototip zatvorenog i ograničenog skupa. Naredna propozicija daje važan odnos između B_X i S_X u slaboj topologiji.

Propozicija 3.2.13. *Neka je* X *normiran prostor i neka je* $\dim X = \infty$. *Tada je slabi zatvarač jedinične sfere zatvorena jedinična kugla, tj.* $\overline{S}_X^w = B_X$.

Dokaz. Skup B_X je konveksan i zatvoren pa i slabo zatvoren iz čega slijedi da sadrži slabi zatvarač od S_X. Pokažimo obratnu inkluziju. Neka je $x_0 \in B_X$ i neka je $U \subseteq X$ slabo otvorena okolina od x_0. Tada postoje $\varepsilon > 0$ i $f_1, \dots, f_n \in X'$ takvi da je

$$x_0 \in V = B_{x_0, f_1, \dots, f_n, \varepsilon} \subseteq U.$$

Promotrimo preslikavanje $\Phi : X \to \mathbb{F}^n$ definirano s

$$\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Očito je Φ linearan operator i vrijedi $\operatorname{Ker} \Phi = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i$. Kako je $\dim X = \infty$, Φ ne može biti injekcija pa postoji netrivijalan $x \in X$ takav da $\Phi(x) = 0$, odnosno $f_i(x) = 0$ za sve $i = 1, \dots, n$. Kako je $\|x_0\| \leq 1$, postoji $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da $\|x_0 + \lambda x\| = 1$. Naime, funkcija $\lambda \mapsto \|x_0 + \lambda x\|$ je neprekidna, u 0 poprima vrijednost ≤ 1, a

$$\|x_0 + \lambda x\| \geq |\lambda| \|x\| - \|x_0\|,$$

što teži k $+\infty$ kada $|\lambda| \to \infty$. Za takav λ imamo $x_0 + \lambda x \in V \cap S_X$ pa je $U \cap S_X \neq \emptyset$, iz čega po Propoziciji 1.1.4 slijedi da se x_0 nalazi u slabom zatvaraču od S_X. $\square$

U vidu prošle leme, mogli bismo se pitati je li svaki element jedinične kugle normiranog prostora X limes nekog slabo konvergentnog niza iz S_X. Odgovor je negativan u općenitosti. Na primjer, po Schurovom teoremu, niz u l^1 konvergira slabo ako i samo ako konvergira jako (vidi [5, Primjer 2.5.24]). Dakle, limes svakog slabo konvergentnog niza jediničnih vektora iz X će opet biti jediničan vektor. Tu je problem što je slabi zatvarač nekog podskupa u normiranom prostoru u pravilu puno veći od slabog nizovnog zatvarača. No, znamo da će postojati hiperniz u jediničnoj sferi koji će slabo konvergirati tom elementu jedinične kugle.

Vidjeli smo da topološki prostori čija je topologija inducirana nekom metrikom imaju brojan niz lijepih svojstava, npr. ekvivalencija različitih tipova kompaktnosti. Nažalost, slaba topologija neće biti metrizabilna čim je $\dim X = \infty$.

Propozicija 3.2.14. *Neka je X normiran prostor. Tada je slaba topologija $\sigma(X, X')$ metrizabilna ako i samo ako je $\dim X < \infty$.*

Dokaz. Ako je $\dim X < \infty$, tada se po Teoremu 3.2.8 slaba topologija podudara s jakom pa je inducirana metrikom. Obratno, pretpostavimo suprotno, tj. da je $\dim X = \infty$ i da je slaba topologija inducirana metrikom d. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$K_d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left\{ x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\},$$

otvorena kugla u metrici d koja je po pretpostavci slabo otvoren skup. Po Korolaru 3.2.7, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K_d(0, \frac{1}{n})$ takav da je $\|x_n\| \geq n$. Kako je x_n element kugle radijusa $\frac{1}{n}$ slijedi $x_n \xrightarrow{w} 0$ jer u ovom slučaju slaba konvergencija niza odgovara konvergenciji u metričkom prostoru kao u Propoziciji 1.2.3. Dakle, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je slabo konvergentan neograničen niz, što je u kontradikciji s Korolarom 1.3.21. $\square$

Iako je prethodna propozicija donekle demotivirajuća, u Sekciji 4.3 ćemo pokazati da su svi tipovi kompaktnosti koje smo uveli ekvivalentni u slaboj topologiji usprkos tome što da topologija nije metrizabilna.

3.3 Slaba* topologija normiranog prostora

Definicija 3.3.1. *Neka je X normiran prostor.* ***Slaba-zvjezdica*** *(w^*)* ***topologija*** *na X' je slaba topologija na X' inducirana svim funkcionalima $\hat{x} \in X''$, $x \in X$. Ovu topologiju označavamo sa $\sigma(X', \hat{X})$, a oznaka $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ će značiti pripadajuću konvergenciju hiperniza $(f_\lambda)_{\lambda \in I}$ prema funkcionalu f.*

Na X' ima smisla promatrati nekoliko topologija pa odredimo njihov odnos. Neka je $\tau^s \subseteq \mathcal{P}(X')$ jaka topologija inducirana operatorskom normom na X', $\sigma(X', X'')$ slaba topologija na X' inducirana svim neprekidnim linearnim funkcionalima na X' te neka je $\sigma(X', \hat{X})$ slaba topologija na X' inducirana s $\hat{X}$, odnosno slaba* topologija. Kako je svaki funkcional iz $\hat{X}$ neprekidan vrijedi:

$$\sigma(X', \hat{X}) \subseteq \sigma(X', X'') \subseteq \tau^s.$$

Slaba i slaba* topologija na X' se podudaraju ako i samo ako je X refleksivan. Naime, te topologije se podudaraju ako i samo ako je svaki linearan funkcional iz X'' neprekidan s obzirom na $\sigma(X', \hat{X})$, a to je po Teoremu 3.1.11 moguće ako i samo ako $X'' = \hat{X} = \varphi(X)$. Ako je $\dim X < \infty$, onda se po Teoremu 1.3.15 podudaraju slaba i slaba* topologija, a po Teoremu 3.2.8 primijenjenom na prostor X' koji je također konačne dimenzije dobivamo da se slaba topologija podudara s jakom.

Propozicija 3.3.2. *Neka je X normiran prostor. Tada je X refleksivan ako i samo ako se $\sigma(X', X'')$ podudara sa $\sigma(X', \hat{X})$. Slaba* topologija $\sigma(X', \hat{X})$ se podudara s jakom topologijom na X' ako i samo ako je* $\dim X < \infty$.

Po Propoziciji 3.1.3 vrijedi da $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$ ako i samo ako $\hat{x}(f_\lambda) \to \hat{x}(f)$ za sve $x \in X$, tj. ako i samo ako je $f_\lambda(x) \to f(x)$ za sve $x \in X$. Dakle, slaba* konvergencija točno odgovara konvergenciji po točkama iz Definicije 1.3.19. Primijetimo također da ako hiperniz $(f_\lambda)_{\lambda \in I}$ u X' konvergira prema $f \in X'$ u normi prostora X', onda vrijedi i $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ jer su svi funkcionali $(\hat{x})_{x \in X}$ neprekidni s obzirom na jaku topologiju na X'.

Familija funkcionala $\{\, \hat{x} : x \in X \,\}$ razlikuje točke od X' pa je slaba* topologija Hausdorffova po Propoziciji 3.1.6. Naime, ako su $f_1, f_2 \in X'$ različiti, tada postoji $x \in X$ takav da je $f_1(x) \neq f_2(x)$, odnosno $\hat{x}(f_1) \neq \hat{x}(f_2)$.

Bazu slabe* topologije na prostoru X' čine skupovi oblika

$$\begin{aligned} B_{f_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon} &= \{\, f \in X' : |\hat{x}_i(f - f_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n \,\} = \\ &= \{\, f \in X' : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n \,\}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

gdje su $f_0 \in X'$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ i $\varepsilon > 0$. Kao i kod slabe topologije, ako je $\dim X = \infty$, tada je svaki neprazan slabo* otvoren podskup od X' neograničen. Zaista, slabo* otvoreni skupovi su također elementi slabe topologije $\sigma(X', X'')$. Koristeći ovo i Propoziciju 1.3.23, potpuno analogno Propoziciji 3.2.14 se dokaže sljedeći rezultat.

Propozicija 3.3.3. *Neka je X Banachov prostor. Slaba* topologija na X' je metrizabilna ako i samo ako je* $\dim X < \infty$.

Cilj nam je sada pokazati neka svojstva slabih* topologija. Kao i kod slabih topologija, teoremi separacije će imati važnu ulogu, no ovdje nam je ipak potrebna separacija elementima iz $\hat{X}$, a ne samo X''. Jednu takvu separaciju možemo dobiti iz Teorema 1.4.10 primijenjenog na lokalno konveksan Hausdorffov TVP $(X', \sigma(X', \hat{X}))$ jer je dual tog prostora upravo $\hat{X}$. Nama će biti potrebna nešto jača verzija koja govori o separaciji slabo* zatvorenog *potprostora* elementom $\hat{x}_0 \in \hat{X}$.

Propozicija 3.3.4. *Neka je X normiran prostor i neka je $Y \leq X'$ slabo* zatvoren potprostor od X'. Ako $f_0 \notin Y$, tada postoji $x_0 \in X$ takav da je*

$$f(x_0) = 0 \quad \textit{za sve} \quad f \in Y \quad \textit{i} \quad f_0(x_0) \neq 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Kako je f_0 element slabo* otvorenog skupa $X' \setminus Y$, po (3.8) postoji slabo* otvoren skup oblika

$$V = \{\, f \in X' : |\hat{x}_i(f - f_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n \,\},$$

za neke $x_1, \ldots, x_n \in X$ i $\varepsilon > 0$ takav da je $Y \cap V = \emptyset$. Po Teoremu separacije 1.4.10 primijenjenom na disjunktne konveksne skupove V i Y postoji $\hat{x_0} \in \hat{X}$ takav da su $\hat{x_0}(V)$ i $\hat{x_0}(Y)$ disjunktni. Kako je Y potprostor, ovo je moguće jedino ako je $\hat{x_0}(f) = 0$ za sve $f \in Y$. Također je $\hat{x_0}(f_0) \neq 0$ jer je $f_0 \in V$, što dokazuje tvrdnju u slučaju realnog prostora.

Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, primijenimo prvi dio dokaza na realan normiran prostor $X_\mathbb{R}$ i $u_0 = \operatorname{Re} f_0 \notin Y_\mathbb{R}$ kako bismo dobili $x_0 \in X_\mathbb{R}$ koji tada zadovoljava uvjete teorema i za prostor X. Naime, ako je $f \in Y$ proizvoljan tada su po Teoremu 1.3.7 $u = \operatorname{Re} f$ i $\tilde{u}$ dan s $\tilde{u}(x) = u(ix)$ elementi od $Y_\mathbb{R}$ pa je

$$f(x_0) = u(x_0) - i\tilde{u}(x_0) = 0.$$

Vrijedi i $f_0(x_0) = u_0(x_0) - iu_0(ix_0) \neq 0$ jer je po pretpostavci $u_0(x_0) \neq 0$, a u_0 je realna funkcija. $\square$

Kako bismo olakšali daljnju notaciju, uvodimo koristan pojam anihilatora podskupa.

Definicija 3.3.5. *Neka je X normiran prostor.*

(i) ***Anihilator*** *podskupa $A \subseteq X$ je skup*

$$A^\perp = \{\, f \in X' : f(x) = 0, \forall x \in A \,\}$$

(ii) ***Pre-anihilator*** *podskupa $B \subseteq X'$ je skup*

$$^\perp B = \{\, x \in X : f(x) = 0, \forall f \in B \,\}$$

Propozicija 3.3.6. *Neka je X normiran prostor.*

(i) Za bilo koji potprostor Y od X vrijedi $^\perp(Y^\perp) = \overline{Y}^w = \overline{Y}$.

(ii) Za bilo koji potprostor Y od X' vrijedi $(^\perp Y)^\perp = \overline{Y}^{w^*}$.

Dokaz. (**i**) Inkluzija $^\perp(Y^\perp) \supseteq \overline{Y}^w$ slijedi iz činjenice da je pre-anihilator bilo kojeg skupa uvijek slabo zatvoren kao proizvoljan presjek slabo zatvorenih skupova oblika $f^{-1}(\{0\})$ te jer vrijedi $Y \subseteq {}^\perp(Y^\perp)$. Kako je Y konveksan, vrijedi $\overline{Y}^w = \overline{Y}$. Pokažimo još $^\perp(Y^\perp) \subseteq \overline{Y}$. U tu svrhu neka je $x \notin \overline{Y}$. Po Hahn-Banachovom teoremu možemo pronaći $f \in Y^\perp$ takav da $f(x) \neq 0$. No, to upravo znači da x nije element pre-anihilatora od $Y^\perp$.

(**ii**) Anihilator bilo kojeg skupa $A \subseteq X$ je slabo* zatvoren. Zaista, vrijedi

$$A^\perp = \{\, f \in X' : \hat{x}(f) = 0, \forall x \in A \,\} = \bigcap_{x \in A} \hat{x}^{-1}(\{0\}).$$

Vrijedi $Y \subseteq ({}^\perp Y)^\perp$ pa je $({}^\perp Y)^\perp \supseteq \overline{Y}^{w^*}$. Obratno, za $f \notin \overline{Y}^{w^*}$ po Propoziciji 3.3.4 postoji $x \in {}^\perp Y$ takav da $f(x) \neq 0$ pa f nije element anihilatora od ${}^\perp Y$. $\square$

Slijedi analogon Propozicije 3.2.13 za slabu* topologiju.

Propozicija 3.3.7. *Neka je X normiran prostor i neka je* $\dim X = \infty$. *Tada je slabi* zatvarač jedinične sfere zatvorena jedinična kugla, tj.* $\overline{S}^{w^*}_{X'} = B_{X'}$.

Dokaz. Za $x \in S_X$ definirajmo

$$F_x = \{\, f \in X' : |f(x)| \leq 1 \,\} = \hat{x}^{-1}(\overline{K}(0, 1)).$$

Tada je F_x slabo* zatvoren za sve $x \in S_X$, pa je to i

$$B_{X'} = \bigcap_{x \in S} F_x,$$

pri čemu je posljednja jednakost dobivena iz (1.3). Vrijedi da je $\overline{S}^{w^*}_{X'} \subseteq B_{X'}$ jer je $B_{X'}$ slabo* zatvoren skup koji sadrži $S_{X'}$. No, vrijedi i $B_{X'} \subseteq \overline{S}^{w^*}_{X'}$ jer je $\overline{S}^{w^*}_{X'}$ slabo zatvoren skup koji sadrži $S_{X'}$, a $B_{X'}$ je slabi zatvarač od $S_{X'}$. $\square$

Svojstva kanonskog ulaganja

Bidual X'' normiranog prostora X je ujedno i dual od X' pa možemo promatrati njegovu slabu* topologiju. Do kraja ovog poglavlja na X'' podrazumijevamo tu topologiju. Pokazujemo neka jako korisna svojstva kanonskog ulaganja $\varphi : X \to X''$.

Propozicija 3.3.8. *Kanonsko ulaganje $\varphi : X \to X''$ je neprekidno ako na X promatramo slabu, a na X'' slabu* topologiju $\sigma(X'', \varphi(X'))$. Štoviše, φ je homeomorfizam s X u $\hat{X}$, ako na $\hat{X}$ promatramo relativnu slabu* topologiju.*

Dokaz. Dovoljno je primijetiti da ako je $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ hiperniz u X i ako je $x \in X$ tada $x_\lambda \xrightarrow{w} x$ ako i samo ako $f(x_\lambda) \to f(x)$ za sve $f \in X'$, što je ekvivalentno $\varphi(x_\lambda) \xrightarrow{w^*} \varphi(x)$. Sada neprekidnost slijedi iz Propozicije 1.1.14. Otprije znamo da je $\varphi : X \to \hat{X}$ bijekcija, a ova ekvivalencija pokazuje i neprekidnost inverza. $\square$

Primjer 3.3.9. *Pokažimo da analogon Propozicije 3.2.5 ne vrijedi za slabu* * *topologiju. Definirajmo* $T : (c_0)' \to (c_0)'$ *s*

$$T(a) = T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_2, a_3, \ldots),$$

pri čemu smo $f \in (c_0)'$ *identificirali s* $a \in l^1$ *na standardan način. Tada je* T *linearan, injekcija jer je* $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ *i surjekcija jer je*

$$T(\alpha_1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n, a_2, a_3, \ldots) = a \quad \text{za sve} \quad a \in (c_0)' \cong l^1.$$

Kako vrijedi $\|T(a)\|_1 \leq 2\|a\|_1$ *i* $\|T^{-1}(a)\|_1 \leq 2\|a\|_1$ *za sve* $a \in l^1$*, operator* T *je izomorfizam. Neka je sada* $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz kanonskih vektora u* l^1*, promatranih kao elemente od* $(c_0)'$*. Tada* $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ *slabo* * *konvergira prema 0, ali niz* $(Te_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne jer je* $(Te_n^*)(1, 0, 0, \ldots) = 1$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Dakle,* T *nije neprekidan u paru slabih* * *topologija.*

U Teoremu 1.3.14 smo pokazali da je $\varphi(X) = \hat{X}$ zatvoren podskup od X'' ako je X Banachov. No, nismo ništa rekli o tome koliko dobro funkcionali iz $\varphi(X)$ aproksimiraju X''. Ako je X nerefleksivan Banachov prostor, $\varphi(X)$ je pravi zatvoren potprostor od X'', pa je i slabo zatvoren. Dakle, $\varphi(X)$ nije niti gust niti slabo gust u X''. No, pokazuje se da će uvijek biti gust ako na X'' promatramo slabu* topologiju $\sigma(X'', \varphi(X'))$, što je sadržaj sljedećeg važnog teorema koji nosi ime po američkom matematičaru H. Goldstineu.

Teorem 3.3.10. *(Goldstine) Neka je* X *normiran prostor.*

(i) $\varphi(X)$ *je slabo* * *gust u* X''.

(ii) $\varphi(B_X)$ *je slabo* * *gust u* $B_{X''}$ *i vrijedi* $\overline{\varphi(B_X)}^{w^*} = B_{X''}$,

Dokaz. (**i**) Po definiciji vrijedi ${}^{\perp}\hat{X} = \{0\}$, pa je po Propoziciji 3.3.6 slabi* zatvarač od $\hat{X}$ jednak $({}^{\perp}\hat{X})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = X''$, odnosno $\hat{X}$ je slabo* gust u X''.

(**ii**) Dovoljno je dokazati $B_{X''} \subseteq \overline{\varphi(B_X)}^{w^*}$. Naime, φ je izometrija pa vrijedi $\varphi(B_X) \subseteq B_{X''}$, a po Korolaru 3.3.7 primijenjenom na prostor X' znamo da je $B_{X''}$ slabo* zatvoren skup. Neka je $\Phi_0 \in X'' \setminus \overline{\varphi(B_X)}^{w^*}$. Trebamo pokazati da je $\|\Phi_0\| > 1$. Kako je $\overline{\varphi(B_X)}^{w^*}$ konveksan i slabo* zatvoren, primjenom Teorema separacije 1.4.10 dobivamo $f_0 \in X'$ (točnije $\hat{f}_0 \in \varphi(X')$) takav da je

$$\begin{aligned} |\Phi_0(f_0)| &\geq \operatorname{Re}(\Phi_0(f_0)) > \sup\{\operatorname{Re}(\Phi(f_0)) : \Phi \in \overline{\varphi(B_X)}^{w^*}\} \\ &\geq \{\operatorname{Re}(f_0(x)) : x \in B_X\} = \|\operatorname{Re} f_0\| = \|f_0\|. \end{aligned}$$

Slijedi $\|\Phi_0\| > 1$, čime je teorem dokazan.

$\square$

Primjer 3.3.11. *U slaboj* topologiji ne vrijedi analogon Propozicije 3.2.9. Zaista, ako je X nerefleksivan Banachov prostor, tada je $\varphi(X)$ zatvoren i konveksan podskup od X'' koji nije slabo* zatvoren jer je po Goldstineovom teoremu*

$$\varphi(X) \subsetneq X'' = \overline{\varphi(X)}^{w^*}.$$

No, tvrdnja vrijedi u refleksivnim prostorima po Propoziciji 3.3.2. Krein i Šmulian su pokazali da će konveksan podskup K duala Banachovog prostora X biti slabo zatvoren ako i samo ako je $K \cap \lambda B_{X'}$ slabo* zatvoren za sve $\lambda > 0$ (vidi [5, Teorem 2.7.11]).*

Pomoću Goldstineovog teorema dokazujemo još jedan rezultat o strukturi slabe* topologije biduala separabilnog prostora.

Propozicija 3.3.12. *Neka je X separabilan Banachov prostor i neka je $\Phi \in X''$. Tada je Φ slabo* neprekidan ako i samo ako je nizovno slabo* neprekidan.*

Dokaz. Neprekidnost uvijek povlači nizovnu neprekidnost pa pretpostavimo da je Φ nizovno slabo* neprekidan. Neka je $D = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ gust podskup od X. Primijetimo da moramo dokazati da je $\Phi \in \hat{X}$, pa pretpostavimo suprotno. Kako je $\hat{X}$ zatvoren podskup od X'', slijedi da je $d(\Phi, \hat{X}) = d > 0$. Po Teoremu 1.3.11 postoji $F \in X'''$ takav da vrijedi $\|F\| = 1$, $F(\Phi) = d$ i $F(\hat{x}) = 0$ za svaki $x \in X$. Neka je

$$U_n = \{ f \in X' : |f(x_i)| < 1,\ 1 \le i \le n \}$$

za $n \in \mathbb{N}$. Po Goldstineovom teoremu skup $\varphi(B_{X'})$ je slabo* gust u $B_{X'''}$, odnosno gust u topologiji $\sigma(X''', \varphi(X''))$. Tada za svaku slabo* otvorenu okolinu V od F vrijedi $V \cap \varphi(B_{X'}) \neq \emptyset$. Tvrdimo da postoji $g \in B_{X'}$ takav da su vrijednosti $\Phi(g), g(x_1), \ldots, g(x_n)$ po volji bliske vrijednostima $F(\Phi), F(\hat{x_1}), \ldots, F(\hat{x_n})$. Naime, promotrimo slabo* otvorenu okolinu

$$V = \{ G \in X''' : |(G - F)(\Phi)| < \varepsilon,\ |(G - F)(\hat{x}_i)| < \varepsilon,\ 1 \le i \le n \}.$$

Tada V sadrži element oblika $G = \varphi(g) \in \varphi(B_{X'})$ pa tvrdnja slijedi iz jednakosti

$$G(\Phi) = \hat{g}(\Phi) = \Phi(g) \quad \text{i} \quad G(\hat{x}_i) = \hat{g}(\hat{x}_i) = \hat{x}_i(g) = g(x_i).$$

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $g_n \in X'$ koji je element skupa

$$B_{X'} \cap \{ f \in X' : |\Phi(f)| \ge d/2 \} \cap U_n.$$

Niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slabo* konvergira prema 0. Zaista, za $\varepsilon > 0$ i $x \in X$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x/\varepsilon - x_j\| < 1$. Za $n \geq j$ vrijedi $|g_n(x_j)| < 1$ pa imamo

$$|g_n(x)| \leq |g_n(x - \varepsilon x_j)| + |g_n(\varepsilon x_j)| \leq \|g_n\|\|x - \varepsilon x_j\| + \varepsilon|g_n(x_j)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

No, s druge strane vrijedi $|\Phi(g_n)| \geq d/2$ za sve $n \in \mathbb{N}$, što je kontradikcija s nizovnom slabom* neprekidnošću od Φ.

$\square$

Poglavlje 4

Kompaktnost u slabim topologijama

4.1 Banach-Alaogluov teorem

U ovoj sekciji dokazujemo jedan od najvažnijih rezultata o slabim topologijama normiranih prostora – za bilo koji normiran prostor X, zatvorena jedinična kugla u X' je slabo* kompaktna. Poljski matematičar S. Banach je prvi 1932. godine dokazao da je $B_{X'}$ slabo* nizovno kompaktan skup uz pretpostavku separabilnosti prostora X. Punu verziju teorema je dokazao grčki matematičar L. Alaoglu 1940. Tako ćemo i mi prvo dokazati separabilnu verziju, iako se ona može dobiti kao jednostavna posljedica Banach-Alaogluovog teorema. Nju možemo shvatiti i kao analogon Bolzano-Weierstrassovog teorema za dual separabilnog prostora s obzirom na slabu* topologiju.

Propozicija 4.1.1. *Neka je X separabilan normiran prostor. Tada svaki ograničen niz u X' ima slabo* konvergentan podniz. Ekvivalentno, $B_{X'}$ je slabo* nizovno kompaktan skup.*

Dokaz. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen niz u X' i neka je $D = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ gust podskup od X. Niz $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen u $\mathbb{F}$ pa po Bolzano-Weierstrassovom teoremu postoji konvergentan podniz $(f_{n_{i,1}}(x_1))_{i\in\mathbb{N}}$. Uz isti argument za niz $(f_{n_{i,1}}(x_2))_{i\in\mathbb{N}}$ dobivamo konvergentan podniz $(f_{n_{i,2}}(x_2))_{i\in\mathbb{N}}$. Nastavljajući induktivno, dobivamo niz podnizova $(f_{n_{i,k}})_{i\in\mathbb{N}}$ takav da je za svaki $k \in \mathbb{N}$ $(f_{n_{i,k+1}})_{i\in\mathbb{N}}$ podniz od $(f_{n_{i,k}})_{i\in\mathbb{N}}$ te niz $(f_{n_{i,k}}(x_k))_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira. Uzmimo sada dijagonalan podniz $f_{n_i} = f_{n_{i,i}}$. Tada niz $(f_{n_i}(x_k))_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira za sve $k \in \mathbb{N}$. Stavimo

$$f(x_k) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x_k).$$

Po linearnosti vidimo da tada postoji i $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$ za sve $x \in \operatorname{span}(D)$. Očito je preslikavanje $x \mapsto f(x)$ linearno, a iz

$$|f(x)| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \|f_{n_i}\| \cdot \|x\|$$

slijedi da je i ograničeno kao preslikavanje s $\operatorname{span}(D)$ u $\mathbb{F}$. Kako je $\operatorname{span}(D)$ gust u X, f se na jedinstven način može proširiti do linearnog funkcionala definiranog na X iste norme za koji vrijedi tvrdnja propozicije. □

Primjer 4.1.2. *Pretpostavka separabilnosti ne može biti izostavljena. Zaista, pogledajmo niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koordinatnih funkcionala na l^∞*

$$f_n : l^\infty \to \mathbb{F}, \quad f_n(x) = x_n.$$

Za podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, neka je $x \in l^\infty$ bilo koji element takav da je $x_{n_k} = (-1)^k$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Tada je $f_{n_k}(x) = (-1)^k$ koji ne konvergira kada $k \to \infty$.

Teorem 4.1.3. *(Banach-Alaoglu) Neka je X normiran prostor. Zatvorena jedinična kugla $B_{X'}$ u X' je slabo* kompaktan skup.*

Dokaz. Dokaz se temelji na Tihonovljevom teoremu 1.1.26. Za $x \in X$ neka je

$$K_x = [-\|x\|, \|x\|] \subseteq \mathbb{F}.$$

Kako je svaki K_x kompaktan skup u $\mathbb{F}$, slijedi da je kompaktan i produktni prostor

$$K = \prod_{x\in X} K_x = \{\, f : X \to \mathbb{F} \,:\, |f(x)| \leq \|x\|, \, \forall x \in X \,\} \subseteq \mathbb{F}^X$$

te da je K kompaktan podskup od $\mathbb{F}^X$. Vrijedi $K \cap X^* = B_{X'}$. Pokažimo da je $B_{X'}$ zatvoren podskup od $\mathbb{F}^X$ s obzirom na produktnu topologiju. Da bismo to pokazali, fiksirajmo $x, y \in X$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ te definirajmo preslikavanja $\Phi_{x,y} : \mathbb{F}^X \to \mathbb{F}$ i $\Psi_{x,\lambda} : \mathbb{F}^X \to \mathbb{F}$ s

$$\Phi_{x,y}(f) = f(x+y) - f(x) - f(y), \quad \Psi_{x,\lambda}(f) = f(\lambda x) - \lambda f(x).$$

Po definiciji produktne topologije, ova preslikavanja su neprekidna kao linearne kombinacije projekcija (Teorem 1.4.6 (ii)) što implicira da je skup

$$X^* = \bigcap_{x,y\in X} \Phi_{x,y}^{-1}(\{0\}) \cap \bigcap_{x\in X, \lambda\in\mathbb{F}} \Psi_{x,\lambda}^{-1}(\{0\})$$

zatvoren s obzirom na produktnu topologiju. Kako je K kompaktan podskup od $\mathbb{F}^X$, a $\mathbb{F}^X$ je Hausdorffov prostor slijedi da je $B_{X'} = X^* \cap K$ zatvoren podskup kompaktnog skupa K pa je po Propoziciji 1.1.20 i sam kompaktan podskup od $\mathbb{F}^X$. Sada slijedi da je $B_{X'}$ kompaktan u relativnoj topologiji na $B_{X'}$ naslijeđenoj od produktne topologije na $\mathbb{F}^X$. Označimo tu topologiju s τ. Nama ipak treba kompaktnost u slaboj* topologiji, no pokazat ćemo da se τ podudara s relativnom slabom* topologijom na $B_{X'}$, nju označimo sa σ.

Pretpostavimo da je $(f_\lambda)_{\lambda\in I}$ hiperniz u $B_{X'}$ takav da $f_\lambda \to f$ s obzirom na produktnu topologiju. Kako su kanonske projekcije

$$\pi_x : \mathbb{F}^X \to F, \quad \pi_x(f) = f(x)$$

neprekidne s obzirom na produktnu topologiju, za svaki $x \in X$ imamo

$$f_\lambda(x) = \pi_x(f_\lambda) \to \pi_x(f) = f(x). \tag{4.1}$$

Pokazali smo da je $B_{X'}$ zatvoren u produktnoj topologiji pa je $f \in B_{X'}$, a iz (4.1) slijedi $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$. Slijedi da je svaki zatvoren podskup od $B_{X'}$ u σ zatvoren i u τ, pa je $\sigma \subseteq \tau$. Obratno, neka je $x \in X$ i hiperniz $(f_\lambda)_{\lambda\in I}$ u $B_{X'}$ takav da $f_\lambda \xrightarrow{w^*} f$. Tada,

$$\pi_x(f_\lambda) = f_\lambda(x) \to f(x) = \pi_x(f),$$

pa su sve kanonske projekcije $(\pi_x)_{x\in X}$ neprekidne s obzirom na restrikciju slabe* topologije na $B_{X'}$. No, τ je najmanja topologija s obzirom na koju su kanonske projekcije neprekidne pa je $\tau \subseteq \sigma$. Dakle, $\tau = \sigma$. Znamo da je $B_{X'}$ kompaktan s obzirom na τ, odnosno σ. Zaključujemo da je $B_{X'}$ kompaktan s obzirom na relativnu slabu* topologiju na $B_{X'}$ iz čega slijedi da je i slabo* kompaktan kao podskup od X'. □

S druge strane, zatvorena jedinična kugla B_X ne mora biti slabo kompaktna, čak ni kada je X Banachov (vidi Primjer 4.2.2). Ubrzo ćemo pokazati da je nužan i dovoljan uvjet za kompaktnost B_X refleksivnost prostora X. Ovo ne treba biti začuđujuće jer po Propoziciji 3.3.2 znamo da će slaba* topologija u nerefleksivnim prostorima imati manje otvorenih skupova, pa stoga i više kompaktnih od slabe topologije. Prije toga, pokažimo još neka neočekivana svojstva slabo* kompaktnih skupova. Glavna tvrdnja sljedećeg teorema je da slaba* topologija duala Banachovog prostora ima Heine-Borelovo svojstvo – podskup takvog prostora je slabo* kompaktan ako i samo ako je ograničen i slabo* zatvoren. Ovaj rezultat je donekle iznenađujuć jer smo vidjeli da niti svi metrički prostori nemaju to svojstvo.

Teorem 4.1.4. *Neka je X separabilan Banachov prostor i neka je $S \subseteq X'$. Tada je ekvivalentno:*

(i) S je slabo* kompaktan.

(ii) S je ograničen i slabo* zatvoren.

(iii) S je nizovno slabo* kompaktan.

(iv) S je ograničen i nizovno slabo* zatvoren.

Implikacije (i) $\iff$ (ii), (ii) $\implies$ (iv) i (iii) $\implies$ (iv) vrijede i bez pretpostavke separabilnosti. Pretpostavka potpunosti je potrebna za (i) $\implies$ (ii) i (iii) $\implies$ (iv).

Dokaz. (**i**) $\implies$ (**ii**) Pretpostavimo da je S slabo* kompaktan. Tada je S slabo* zatvoren jer je slaba* topologija na X Hausdorffova. Da bismo pokazali da je S ograničen, fiksirajmo $x \in X$ i promotrimo slabo* neprekidno preslikavanje $\hat{x} : X' \to \mathbb{F}$. Kako je S slabo* kompaktan, po Propoziciji 1.1.22 $\hat{x}(S)$ je kompaktan podskup od $\mathbb{F}$ za svaki $x \in X$, pa je onda i ograničen. Dakle, za svaki $x \in X$ postoji $c_x > 0$ takav da je

$$|\hat{x}(f)| \le c_x, \quad \forall f \in S.$$

Drugim riječima, $\sup_{f\in S} |f(x)| < \infty$ za svaki $x \in X$. Kako je X Banachov prostor, iz principa uniformne ograničenosti slijedi $\sup_{f\in S}\|f\| < \infty$, odnosno S je ograničen.

(**ii**) $\implies$ (**i**) Pretpostavimo da je S ograničen i slabo* zatvoren. Neka je $M > 0$ takav da $\|f\| \le M$ za sve $f \in S$. Tada je skup

$$MB_{X'} = \{\, f \in X' : \|f\| \le M \,\}$$

slabo* kompaktan po Banach-Alaogluovom teoremu 4.1.3 i Teoremu 1.4.6 (*iii*), a kako je $S \subseteq MB_{X'}$ slabo* zatvoren slijedi da je S slabo* kompaktan.

(**ii**) $\implies$ (**iii**) Neka je S ograničen i slabo* zatvoren i neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S. Ovaj niz je ograničen pa uz pretpostavku da je X separabilan iz Teorema 4.1.1 slijedi da postoji slabo* konvergentan podniz s limesom $f \in X'$. Kako je S slabo* zatvoren slijedi da je $f \in S$. Dakle, S je nizovno slabo* kompaktan.

(**iii**) $\implies$ (**iv**) Neka je S nizovno slabo* kompaktan. Tada je S ograničen jer je svaki slabo* konvergentan niz ograničen po Teoremu 1.3.23. Neka je sada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S koji slabo* konvergira prema $f \in X'$. Po pretpostavci taj niz ima podniz koji slabo* konvergira prema nekom $g \in S$, pa zbog jedinstvenosti limesa slijedi $f = g \in S$. Dakle, S je nizovno slabo* zatvoren.

(**iv**) $\implies$ (**ii**) Neka je S ograničen i nizovno slabo* zatvoren. Trebamo pokazati da je S slabo* zatvoren. Neka je $f_0 \in \overline{S}^{w^*}$ i neka je $D = \{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ gust podskup od X. Tada je skup

$$U_n = \left\{\, f \in X' : |(f - f_0)(x_k)| < \frac{1}{n}, \forall k = 1, \dots, n \,\right\}$$

slaba* okolina od f_0, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, $U_n \cap S \neq \emptyset$ za sve $n \in \mathbb{N}$ pa postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X' takav da, za sve $n \in \mathbb{N}$, imamo $f_n \in U_n \cap S$. Ovaj niz zadovoljava $|(f_n - f_0)(x_k)| \leq \frac{1}{n}$ za sve $k, n \in \mathbb{N}$ takve da je $n \geq k$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = f_0(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Kako je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen u X', a niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gust u X, slijedi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x), \quad \forall x \in X.$$

Dakle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz u S koji slabo* konvergira prema f_0 pa je zbog nizovne slabe* zatvorenosti $f_0 \in S$, čime je tvrdnja dokazana. □

Primjer 4.1.5. *Pretpostavka potpunosti se ne može izostaviti u Teoremu 4.1.4. Promotrimo niz iz Primjera 1.3.24. Taj niz slabo* konvergira k 0 i stoga je*

$$S = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$$

neograničen slabo* kompaktan podskup od $c_{00}' \cong l^1$. Naime, ako je $\mathcal{U}$ neki otvoreni pokrivač od S, tada postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $0 \in U$. Kako $f_n \xrightarrow{w^*} 0$, slijedi $f_n \in U$ za sve osim konačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ iz čega lagano dobijemo konačan potpokrivač.

Primjer 4.1.6. *Banachov prostor $X = l^\infty$ nije separabilan. Pokažimo da (i) ne povlači (iii) i da (iv) ne implicira nijednu od preostalih tvrdnji u Teoremu 4.1.4. Zatvorena jedinična kugla u $(l^\infty)'$ je slabo* kompaktan, no nije nizovno slabo* kompaktan skup. Naime, promotrimo niz iz Primjera 4.1.2. Za njega vrijedi da je $\|f_n\| = 1$ i da nema slabo* konvergentan podniz. Štoviše, ograničen skup*

$$S = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \} \subseteq (l^\infty)'$$

je nizovno slabo* zatvoren, ali nije niti nizovno slabo* kompaktan niti slabo* kompaktan. Zaista, S je nizovno slabo* zatvoren jer su svi slabo* konvergentni nizovi u S konstantni od nekog člana nadalje pa je limes trivijalno u S. Sami niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ nema slabo* konvergentan podniz pa nije nizovno slabo* kompaktan, a za familiju $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slabo* otvorenih skupova definiranih s

$$U_n = \{ f \in X' : |f(e_n)| > 1/2 \}$$

vrijedi $f_n \in U_n$ i $f_n \notin U_m$ za svaki $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Dakle, ta familija je otvoreni pokrivač za S koji nema konačan potpokrivač pa S nije slabo* kompaktan.

Ako je $\dim X = \infty$, tada slaba* topologija na X' neće biti metrizabilna, čak niti ako je prostor separabilan. No, pokazuje se da uz separabilnost vrijedi metrizabilnost od B_X što je sadržaj sljedeće propozicije.

Propozicija 4.1.7. *Neka je X separabilan normiran prostor. Tada je relativna slaba* topologija zatvorene jedinične kugle $B_{X'}$ metrizabilna.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gust niz u B_X. Lagano se provjeri da je s

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{1 + |f(x_n) - g(x_n)|}$$

definirana metrika d na zatvorenoj jediničnoj kugli $B_{X'}$ i da je identiteta

$$\kappa : (B_{X'}, w^*) \mapsto (B_{X'}, d)$$

neprekidno preslikavanje. Naime, neka je $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ hiperniz u $B_{X'}$ koji slabo* konvergira prema nekom $f \in B_{X'}$. Želimo pokazati da $\kappa(f_\alpha) \to \kappa(f)$, odnosno da taj isti hiperniz konvegira u metrici d prema f, odnosno $d(f, f_\alpha) \to 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Imamo

$$\frac{1}{2^n} \frac{|f(x_n) - f_\alpha(x_n)|}{1 + |f(x_n) - f_\alpha(x_n)|} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Kako red $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}$ konvergira, postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Po pretpostavci, za svaki $n \in \{1, \dots, N\}$ postoji $\alpha_n \in I$ takav da je

$$|f_\alpha(x_n) - f(x_n)| \leq \frac{2^n\varepsilon}{2N} \quad \text{za sve} \quad \alpha_n \preceq \alpha.$$

Neka je $\alpha_0 \in I$ takav da je $\alpha_1, \dots, \alpha_n \preceq \alpha_0$. Za sve $\alpha_0 \preceq \alpha$ imamo

$$d(f_\alpha, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_\alpha(x_n) - f(x_n)|}{1 + |f_\alpha(x_n) - f(x_n)|} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{2^n\varepsilon}{2N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Dakle, κ je neprekidna bijekcija s kompaktnog prostora u Hausdorffov prostor pa iz Propozicije 1.1.22 slijedi da je $B_{X'}$ uz relativnu slabu* topologiju homeomorfan metrizabilnom prostoru, pa je i sam metrizabilan. □

Napomena 4.1.8. *Zanimljivo je da vrijedi i obrat prethodne propozicije čime dobivamo zanimljivu karakterizaciju separabilnosti. Dakle, normiran prostor X je separabilan ako i samo je relativna slaba* topologija na $B_{X'}$ metrizabilna. Dokaz se može pronaći u [5, Teorem 2.6.23]. Također, prethodna propozicija vrijedi za sve ograničene podskupove od X' (vidi [5, Korolar 2.6.20]).*

Primijetimo da smo rezultat Propozicije 4.1.1 mogli dobiti primjenom Banach-Alaogluovog teorema i prethodne propozicije jer su u metričkom prostoru kompaktnost i nizovna kompaktnost ekvivalentni pojmovi.

4.2 Kakutanijev teorem

Nakon što smo u prošloj sekciji dokazali brojne rezultate o slaboj* kompaktnosti, došla je na red i slaba kompaktnost. Glavni rezultat je Kakutanijev teorem – B_X će biti slabo kompaktan skup ako i samo ako je X refleksivan. Ovaj rezultat omogućava vrlo elegentan pristup dokazivanju tvrdnji o refleksivnosti prostora, kao što ćemo vidjeti kroz nekoliko korolara. No, prvo dokazujemo dva načina za testiranje slabe kompaktnosti skupa preko slabe* topologije biduala X''.

Propozicija 4.2.1. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$. Tada je ekvivalentno:*

(i) S je slabo kompaktan.

(ii) $\varphi(S)$ je slabo* kompaktan.

(iii) S je ograničen i $\varphi(S)$ je slabo* zatvoren.

Dokaz. (**i**) $\iff$ (**ii**) Po Propoziciji 3.3.8 φ je homeomorfizam s X u $\varphi(X)$ u odnosu na slabu topologiju na X i relativnu slabu* topologiju na $\varphi(X)$. Iz ovoga slijedi da je S slabo kompaktan ako i samo ako je $\varphi(S)$ kompaktan s obzirom na relativnu slabu* topologiju prostora $\varphi(X)$, što je ekvivalentno slaboj* kompaktnosti u X''.

(**ii**) $\iff$ (**iii**) Ako je $\varphi(S)$ slabo* kompaktan, onda je po Teoremu 4.1.4 ograničen i slabo* zatvoren. Primijetimo da smo taj teorem ovdje primijenili na prostor X', koji je potpun. Kako je φ izometrija, slijedi da je i S ograničen. Obratno, ako je S ograničen i $\varphi(S)$ slabo* zatvoren, onda nam ponova primjena tog teorema daje željeni rezultat.

□

Iz prethodne propozicije možemo iščitati da je svaki slabo kompaktan skup u normiranom prostoru nužno ograničen i slabo zatvoren. Analogan zaključak smo imali u Teoremu 4.1.4 za slabu* topologiju, no tamo nam je bila potrebna pretpostavka potpunosti postora. No, obratna implikacija neće vrijediti u slaboj topologiji. Postoje Banachovi prostori u kojima ograničeni i slabo zatvoreni podskupovi nisu nužno slabo kompaktni.

Primjer 4.2.2. *Iz Banach-Alaogluovog teorema odmah slijedi da je u refleksivnom prostoru B_X slabo kompaktan skup. S druge strane, c_0 nije refleksivan, a B_{c_0} nije slabo kompaktan skup. Naime promotrimo niz $x_n = \sum_{k=1}^n e_k$ u B_{c_0}. On je slabo Cauchyjev niz jer za svaki $f \in (c_0)' \cong l^1$ identificiran s $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ vrijedi*

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k = f(x),$$

gdje je $x = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \notin c_0$. *Zaključujemo da* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nema slabo konvergentan podniz pa* B_{c_0} *nije slabo nizovno kompaktan, a u sljedećoj sekciji ćemo pokazati da je to ekvivalentno tvrdnji da nije slabo kompaktan. Primijetimo da je prostor* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *Banachov, a da je* B_{c_0} *ograničen i slabo zatvoren skup koji nije slabo kompaktan.*

Teorem 4.2.3. *(Kakutani) Normiran prostor* X *je refleksivan ako i samo ako je* B_X *slabo kompaktan skup.*

Dokaz. Dokazat ćemo ekvivalenciju sljedećih tvrdnji

(i) X je refleksivan.

(ii) $\varphi(B_X) = B_{X''}$.

(iii) Skup $\varphi(B_X)$ je slabo* zatvoren.

(iv) Skup B_X je slabo kompaktan.

(i) $\iff$ **(ii)** Kako je φ izometrija, uvijek vrijedi $\varphi(B_X) \subseteq B_{X''}$. Ako je X refleksivan, tada je $\varphi : X \to X''$ izometrički izomorfizam pa vrijedi i $\varphi^{-1}(B_{X''}) \subseteq B_X$. Obratno, ako vrijedi $\varphi(B_X) = B_{X''}$, onda za $\Phi \in X'' \setminus \{0\}$ imamo $\frac{1}{\|\Phi\|}\Phi \in B''_X$ pa postoji $x \in X$ takav da je $\Phi = \|\Phi\|\varphi(x) \in \hat{X}$.

(ii) $\iff$ **(iii)** Ako vrijedi $\varphi(B_X) = B_{X''}$, onda tvrdnja slijedi iz činjenice da je po Banach-Alaogluovom teoremu $B_{X''}$ slabo* zatvoren. Obratno, ako je $\varphi(B_X)$ slabo* zatvoren, onda je po Goldstineovom teoremu

$$\varphi(B_X) = \overline{\varphi(B_X)}^{w^*} = B_{X''}.$$

(iii) $\iff$ **(iv)** Ovo je dokazano u Propoziciji 4.2.1 jer je B_X naravno ograničen. □

Prethodni teorem daje korisnu karakterizaciju refleksivnosti prostora koja omogućuje vrlo elegantan pristup dokazivanju tvrdnji vezanih uz refleksivnost. Pogledajmo nekoliko jednostavnih korolara.

Korolar 4.2.4. *Neka je* X *Banachov prostor.*

(i) Ako je X *refleksivan, tada je svaki zatvoren potprostor od* X *refleksivan.*

(ii) X *je refleksivan ako i samo ako je* X' *refleksivan.*

Dokaz. (i) Ako je Y zatvoren potprostor od X, tada je B_Y presjek slabo kompaktnog skupa B_X i skupa Y koji je po Propoziciji 3.2.9 slabo zatvoren pa je B_Y kompaktan u relativnoj slaboj topologiji koja se po Teoremu 3.2.4 podudara sa slabom topologijom prostora Y. Dakle, Y je refleksivan.

(ii) Ako je X refleksivan, tada se po Propoziciji 3.3.2 slaba i slaba* topologija prostora X' podudaraju. Posljedično, $B_{X'}$ je slabo kompaktan pa je X' refleksivan. Ako je X' refleksivan, tada analogno dobijemo da je X'' refleksivan, no tada je i $\varphi(X)$ refleksivan kao zatvoren potprostor od X''. Slijedi da je X refleksivan. □

Primjer 4.2.5. *Vrijedi $(c_0)' \cong l^1$ i $(l^1)' \cong l^\infty$, pa kako c_0 nije refleksivan po prethodnom korolaru to nisu niti l^1 i l^∞. Još jedan način na koji smo mogli zaključiti da je l^∞ nerefleksivan je taj što sadrži zatvoren nerefleksivan potprostor c_0.*

Primjer 4.2.6. *Neka je K beskonačan kompaktan Hausdorffov topološki prostor i neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz različitih točaka iz K. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je δ_n Diracova mjera koncentrirana u a_n. Neka je $M_R(K)$ prostor regularnih konačnih mjera na K (vidi Dodatak B). Definirajmo preslikavanje $T : l^1 \to M_R(K)$ s*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \delta_n \quad za \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1.$$

Pokazuje se da je T izometričko ulaganje l^1 u $M_R(K)$. Naime, T je očito linearno i dobro definirano jer je

$$\|T(x)\| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \delta_n\right|(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot \underbrace{|\delta_n|(K)}_{=1} \leq \|x\|_1.$$

S druge strane, za konačnu familiju $\mathcal{A}_n = \{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\}$ disjunktnih podskupova od K vrijedi $\mathcal{A}_n \in K_K$ pa zato za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\|T(x)\| = \sup_{\mathcal{A}\in K_K} \sum_{A\in\mathcal{A}} |T(x)(A)| \geq \sum_{k=1}^{n} |T(x)(\{a_n\})| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Zaključujemo $\|T(x)\| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$ pa je $\|T(x)\| = \|x\|_1$, odnosno T je izometrija. Dakle, $M_R(K)$ sadrži nerefleksivan zatvoren potprostor pa ni sam nije refleksivan. Kako je $C(K)'$ izometrički izomorfan $M_R(K)$, ni $C(K)$ nije refleksivan.

Sljedeći korolar je analogon Bolzano-Weierstrassovog teorema za slabu topologiju refleksivnog prostora. Sličnu situaciju smo imali u Teoremu 4.1.1, no tamo smo zahtijevali separabilnost prostora, a sada nam je potrebna refleksivnost.

Korolar 4.2.7. *Svaki ograničen niz u refleksivnom prostoru ima slabo konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen niz. Stavimo $Y = \overline{\mathrm{span}}(\{\, x_n : n \in \mathbb{N}\,\})$. Tada je Y separabilan, ali i potpun kao zatvoren podskup potpunog prostora. Sada kao u dokazu Propozicije 4.1.7 možemo pokazati da je slabo kompaktan skup B_Y metrizabilan pa je on i nizovno slabo kompaktan po Teoremu 1.2.7. Dakle, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz u toj metrici, a taj podniz onda konvergira i slabo. □

Sljedećim teoremom pokazujemo da i slaba topologija ima Heine-Borelovo svojstvo, ali uz pretpostavku da je prostor X refleksivan. Štoviše, to svojstvo karakterizira refleksivnost prostora.

Teorem 4.2.8. *Normiran prostor X je refleksivan ako i samo ako njegova slaba topologija ima Heine-Borelovo svojstvo (svaki $S \subseteq X$ je slabo kompaktan ako i samo ako je ograničen i slabo zatvoren).*

Dokaz. Neka je X refleksivan. Pokazali smo da je tada B_X slabo kompaktan skup. Ako je S ograničen i slabo zatvoren, možemo provesti dokaz analogan dokazu implikacije $(ii) \implies (i)$ Teorema 4.1.4 te zaključiti da je S slabo kompaktan. Ako je S slabo kompaktan, tada je i slabo zatvoren jer je slaba topologija Hausdorffova. Za svaki $f \in X'$ skup $f(S)$ je kompaktan u $\mathbb{F}$ pa je i ograničen. Dakle, skup S je slabo ograničen pa i ograničen po Teoremu 1.3.20. Obratno, kako je B_X ograničen i slabo zatvoren skup, onda je po pretpostavci i slabo kompaktan pa je prostor X refleksivan. □

4.3 Eberlein-Šmulianov teorem

Već smo vidjeli da slaba topologija normiranog prostora ima brojne sličnosti metričkim prostorima, iako nije metrizabilna. U ovom poglavlju dokazujemo da su u slaboj topologiji normiranog prostora svi uvedeni tipovi kompaktnosti ekvivalentni. U svakom topološkom prostoru vrijedi da kompaktnost povlači prebrojivu kompaktnost koja povlači gomilišnu kompaktnost, a nizovna kompaktnost povlači gomilišnu. Teži dio dokaza će biti pokazati da slaba gomilišna kompaktnost povlači i slabu nizovnu i slabu kompaktnost. Prije toga, bit će nam potrebno nekoliko tehničkih lema.

Lema 4.3.1. *Neka je X normiran prostor i neka je $Y \leq X'$ konačnodimenzionalan. Ako je $M > 1$ zadan, tada postoji konačan podskup F_M od B_X takav da je*

$$\|f\| \leq M \max\{\, |f(x)| : x \in F_M \,\} \quad \textit{za svaki} \quad f \in Y.$$

Dokaz. Možemo pretpostaviti $Y \neq \{0\}$. Kompaktnost od S_Y po Teoremu 1.3.5 implicira da postoji konačan podskup $\{ f_1, \dots, f_n \}$ od S_Y takav da otvorene kugle radijusa $\frac{M-1}{2M}$ s centrima u $f_1, \dots, f_n$ pokrivaju S_Y. Kako je $\frac{M+1}{2M} < 1$, postoji skup $F_M = \{ x_1, \dots, x_n \} \subseteq B_X$ takav da

$$|f_j(x_j)| > \frac{M+1}{2M} \quad \text{za} \quad j = 1, \dots, n.$$

Pretpostavimo da je $f \in S_Y$ i neka je j takav da je $\|f - f_j\| < \frac{M-1}{2M}$. Tada vrijedi

$$|f(x_j)| \geq |f_j(x_j)| - |f(x_j) - f_j(x_j)| \geq |f_j(x_j)| - \|f - f_j\| \|x_j\| > \frac{1}{M}.$$

Dakle, $\max\{ |f(x)| : x \in F_M \} \geq \frac{1}{M}$. Slijedi da

$$M \max\{ \|f\|^{-1} |f(x)| : x \in F_M \} \geq 1$$

za sve $f \in Y \setminus \{0\}$ i stoga za svaki $f \in Y$ vrijedi

$$M \max\{ |f(x)| : x \in F_M \} \geq \|f\|.$$

□

Lema 4.3.2. *Neka je X normiran prostor i neka je $S \subseteq X$ relativno slabo gomilišno kompaktan podskup. Tada je S ograničen.*

Dokaz. Neka je $f \in X'$. Po Teoremu 1.3.20 dovoljno je pokazati da je $f(S)$ ograničen pa u tu svrhu pretpostavimo da nije. Neka je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u S takav da je

$$|f(x_{n+1})| \geq |f(x_n)| + 1 \quad \text{za sve} \quad n \in \mathbb{N}$$

i neka je $x_0 \in X$ slabo gomilište beskonačnog podskupa $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ od S. Tada slaba okolina $\{ x \in X : |f(x - x_0)| < \frac{1}{2} \}$ od x_0 mora sadržavati dva različita elementa niza x_{n_1} i x_{n_2}. Tada je $|f(x_{n_1}) - f(x_{n_2})| < 1$, što je kontradikcija s konstrukcijom niza. □

Naredna lema će nam biti ključna za dokaz Eberlein-Šmulianovog teorema. Napomenimo da u (*ii*) promatramo slabu topologiju $\sigma(X', X'')$ na X'.

Lema 4.3.3. *(Day) Neka je X normiran prostor.*

(i) Neka je A relativno slabo gomilišno kompaktan podskup od X. Ako je $x_0 \in \overline{A}^w$, tada postoji niz u A koji slabo konvergira prema x_0.

(*ii*) *Neka je B relativno slabo gomilišno kompaktan podskup od X'. Ako je $f_0 \in \overline{B}^{w^*}$, tada postoji niz u B koji slabo konvergira prema f_0.*

Dokaz. (*ii*) Možemo pretpostaviti da $f_0 \notin B$. Kako je $-f_0 + B$ relativno slabo gomilišno kompaktan te prema Teoremu 1.4.6 (*iv*) vrijedi $\overline{-f_0 + B}^{w^*} = -f_0 + \overline{B}^{w^*}$, tvrdnju je dovoljno dokazati u slučaju $f_0 = 0$.

Prvo konstruiramo rastući niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nepraznih konačnih podskupova od B_X i niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u B takav da je $f_{n_1} \neq f_{n_2}$ za $n_1 \neq n_2$ i takav da je za sve $n \in \mathbb{N}$

(a) $\|f\| \leq 2\max\{\, |f(x)| : x \in F_n \,\}$ za sve $f \in \operatorname{span}(\{\, f_1, \dots, f_n \,\})$,

(b) $\max\{\, |f_{n+1}(x)| : x \in F_n \,\} < \frac{1}{n+1}$.

Za početak, neka je $f_1 \in B$ proizvoljan i neka je $x_1 \in B_X$ takav da je $2|f_1(x_1)| \geq \|f_1\|$. Stavimo $F_1 = \{x_1\}$. Sada pretpostavimo da imamo neprazan konačan podskup F_n od B_X i elemente $f_1, \dots, f_n$ iz B koji zadovoljavaju (a). Kako je

$$U = \left\{\, f \in X' \,:\, |f(x)| < \frac{1}{n+1}\,, \forall x \in F_n \right\}$$

slaba* okolina od 0 u X' i kako je $0 \in \overline{B}^{w^*} \setminus B$, slijedi da postoji $f_{n+1} \in B \setminus \{\, f_1, \dots f_n \,\}$ koji zadovoljava (b) jer je $B \cap U$ beskonačan. Naime, kada bi taj presjek bio konačan, onda bi U bez tih konačno elemenata u presjeku također bila slabo* otvorena okolina od 0 jer je svaki konačan podskup Hausdorffovog prostora zatvoren. No, tada je presjek B i te nove okoline prazan skup što je po Propoziciji 1.1.4 kontradikcija s $0 \in \overline{B}^{w^*}$. Po Lemi 4.3.1, postoji konačan podskup F'_n od B_X takav da vrijedi

$$\|f\| \leq 2\max\{\, |f(x)| : x \in F'_n \,\} \quad \text{za sve} \quad f \in \operatorname{span}(\{\, f_1, \dots, f_{n+1} \,\}).$$

Sada uzimajući $F_{n+1} = F_n \cup F'_n$ dovršavamo korak indukcije.

Neka je $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, podskup od B_X. Tada iz (a) slijedi da je

$$\|f\| \leq 2\sup\{\, |f(x)| : x \in D \,\} \quad \text{za sve} \quad f \in \operatorname{span}(\{\, f_n : n \in \mathbb{N} \,\}),$$

iz čega zbog činjenice da je svaka zatvorena kugla slabo zatvoren skup slijedi

$$\|f\| \leq 2\sup\{\, |f(x)| : x \in D \,\} \quad \text{za sve} \quad f \in \overline{\operatorname{span}}^{w}(\{\, f_n : n \in \mathbb{N} \,\}).$$

Beskonačan podskup $\{\, f_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ od B ima slabo gomilište $g \in X'$. Kako se g mora nalaziti u slabo zatvorenom skupu $\overline{\operatorname{span}}^{w}(\{\, f_n : n \in \mathbb{N} \,\})$, slijedi da je

$$\|g\| \leq 2\sup\{\, |g(x)| : x \in D \,\}. \tag{4.2}$$

Za svaki $x \in D$ i svaki $\varepsilon > 0$, slaba okolina $\{ f \in X' : |\hat{x}(f - g)| < \varepsilon/2 \}$ od g sadrži beskonačno mnogo elemenata iz $\{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$, pa iz (b) slijedi da možemo pronaći neki takav f_{n_0} koji zadovoljava $|f_{n_0}(x)| < \varepsilon/2$. Slijedi $|g(x)| < \varepsilon$ pa iz proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ zaključujemo da je $g(x) = 0$, za sve $x \in D$. Iz (4.2) dobivamo $g = 0$.

Dakle, skup $\{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$ ima 0 kao svoje jedino slabo gomilište. Kada niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne bi slabo konvergirao k 0, postojala bi slaba okolina U od 0 i podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ koji je u potpunosti sadržan u $X' \setminus U$. Tada bi $\{ f_{n_k} : k \in \mathbb{N} \}$, kao beskonačan podskup od B, imao neko svoje slabo gomilište, nužno različito od 0, ali ono bi ujedno bilo i slabo gomilište od $\{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$, što je naravno kontradikcija. Dakle, $f_n \overset{w}{\to} 0$.

(i) Kako je kanonsko ulaganje $\varphi : X \to X''$ neprekidno ako na X i X'' promatramo slabe topologije (Korolar 3.2.5), slijedi da je $\varphi(A)$ relativno slabo gomilišno kompaktan podskup od X''. Kako je x_0 slabi limes nekog hiperniza iz A, slijedi da je $\varphi(x_0)$ slabi* limes hiperniza iz $\varphi(A)$ (Propozicija 3.3.8), pa po (ii) postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A takav da $\varphi(x_n) \overset{w}{\to} \varphi(x_0)$. Slijedi da $x_n \overset{w}{\to} x_0$. □

Teorem 4.3.4. *(Eberlein-Šmulian) Neka je X normiran prostor i neka je $S \subseteq X$. Tada je ekvivalentno:*

(a) S je slabo kompaktan;

(b) S je slabo prebrojivo kompaktan;

(c) S je slabo gomilišno kompaktan;

(d) S je slabo nizovno kompaktan.

Također, ekvivalentne su i analogne tvrdnje vezane uz slabu relativnu kompaktnost.

Dokaz. Pripadne tvrdnje za slabu relativnu kompaktnost označavat ćemo u dokazu s $(a_r), (b_r), \ldots$ Iz Definicije 1.1.15 je $(\mathbf{a}) \implies (\mathbf{b})$ i $(\mathbf{a_r}) \implies (\mathbf{b_r})$ očito.

$(\mathbf{b}) \implies (\mathbf{c})$ Pretpostavimo da ne vrijedi (c). Tada postoji prebrojiv beskonačan podskup $D = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ od S koji nema slabo gomilište u S, pri čemu pretpostavljamo da su svi elementi iz D različiti. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$U_n = X \setminus \overline{\{ x_j : j \geq n \}}^w.$$

Primijetimo da je $S \setminus U_n = \{ x_j : j \geq n \}$. Naime, ako je

$$x \in S \setminus U_n = S \cap \overline{\{ x_j : j \geq n \}}^w,$$

tada je x limes nekog slabo konvergentnog hiperniza iz $\{ x_j : j \geq n \}$. Kada bi vrijedilo $x \notin \{ x_j : j \geq n \}$, onda bi x bio element iz S koji je limes hiperniza iz $\{ x_j : j \geq n \} \setminus \{x\}$, dakle x bi bio slabo gomilište od D, što je kontradikcija. Zaključujemo da je $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ prebrojiv slabo otvoren pokrivač od S koji se ne može profiniti do konačnog potpokrivača. Dakle, S nije slabo prebrojivo kompaktan.

($\mathbf{b_r}$) $\implies$ ($\mathbf{c_r}$) Pretpostavimo da smo proveli prethodni argument s jačom pretpostavkom da S sadrži beskonačan podskup koji nema slabo gomilište u X, odnosno da S nije relativno slabo gomilišno kompaktan. Tada skup $D = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ također nema slabo gomilište u X pa je $\{ x_j : j \geq n \}$ slabo zatvoren za svaki $n \in \mathbb{N}$. Slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = X \setminus \{ x_j : j \geq n \} \quad \text{i} \quad \overline{S}^w \setminus U_n = \{ x_j : j \geq n \}.$$

Dakle, $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ je prebrojiv slabo otvoren pokrivač od $\overline{S}^w$ koji se ne može svesti na konačan potpokrivač, pa S nije relativno slabo prebrojivo kompaktan.

Iz definicija se lagano se vidi da vrijedi ($\mathbf{d}$) $\implies$ ($\mathbf{c}$) i ($\mathbf{d_r}$) $\implies$ ($\mathbf{c_r}$). Naravno, ako imamo beskonačan podskup iz njega možemo uzeti neki niz kojem onda, iz pretpostavke nizovne kompaktnosti, pronalazimo konvergentan podniz čiji limes ujedno igra ulogu gomilšta tog beskonačnog podskupa.

($\mathbf{c_r}$) $\implies$ ($\mathbf{d_r}$) Pretpostavimo do kraja dokaza da je S relativno slabo gomilišno kompaktan. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S. Kako želimo pokazati da taj niz ima slabo konvergentan podniz možemo pretpostaviti da su svi članovi tog niza različiti. Neka je x_0 slabo gomilište beskonačnog podskupa $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ od S. Eventualnim izbacivanjem nekog x_n, možemo pretpostaviti da vrijedi $x_0 \notin \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$. Kako je $x_0 \in \overline{\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}}^w$, iz tvrdnje ($i$) Leme 4.3.3 slijedi da postoji niz u $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ koji slabo konvergira k x_0, odnosno postoji neki podniz od $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji slabo konvergira k x_0.

($\mathbf{c}$) $\implies$ ($\mathbf{d}$) Kada bi S još bio i slabo gomilišno kompaktan, tada bismo mogli izabrati slabo gomilište x_0 iz S, što bi impliciralo da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima podniz koji slabo konvergira elementu iz S.

($\mathbf{c_r}$) $\implies$ ($\mathbf{a_r}$) Kako je kanonsko ulaganje $\varphi : X \to X''$ neprekidno s obzirom na slabe topologije (Propozicija 3.2.5) i kako je S relativno slabo gomilišno kompaktan, to je i skup $\varphi(S)$. Sada iz Leme 4.3.2, slijedi da je $\varphi(S)$ ograničen i stoga je po Teoremu 4.1.4 $\overline{\varphi(S)}^{w^*}$ slabo* kompaktan. Pretpostavimo da je $\Phi \in \overline{\varphi(S)}^{w^*}$. Po dijelu ($ii$) Leme 4.3.3, postoji niz $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S takav da $\varphi(z_n) \xrightarrow{w} \Phi$. No, relativna slaba nizovna kompaktnost od S osigurava da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima podniz koji konvergira slabo nekom $z_0 \in X$. Sada slijedi $\Phi = \varphi(z_0) \in \varphi(X)$, pa je i $\overline{\varphi(S)}^{w^*} \subseteq \varphi(X)$. Primjenom Propozicije 3.3.8 zaključujemo da je $\varphi^{-1}(\overline{\varphi(S)}^{w^*})$ slabo kompaktan podskup od X i $S \subseteq \varphi^{-1}(\overline{\varphi(S)}^{w^*})$. Tada je i $\overline{S}^w \subseteq \varphi^{-1}(\overline{\varphi(S)}^{w^*})$, pa je $\overline{S}^w$ slabo kompaktan, odnosno S je relativno slabo kompaktan.

(**c**) $\Longrightarrow$ (**a**) Konačno, pretpostavimo da je S slabo gomilišno kompaktan. Po pokazanom on je onda i slabo nizovno kompaktan. Ako je $x_0 \in \overline{S}^w$, tada tvrdnja (i) Leme 4.3.3 daje niz u S koji slabo konvergira k x_0. Kako taj niz mora imati podniz koji konvergira slabo nekom elementu iz S, slijedi $x_0 \in S$. Dakle, S je slabo zatvoren i relativno slabo kompaktan pa onda i slabo kompaktan.

□

U slaboj topologiji normiranog prostora slabi zatvarač se podudara sa slabim nizovnim zatvaračem na klasi relativno kompaktnih skupova.

Korolar 4.3.5. *Ako je S relativno slabo kompaktan podskup normiranog prostora X i ako je $x_0 \in \overline{S}^w$, tada postoji niz u S koji slabo konvergira prema x_0.*

Dokaz. Dovoljno je primijetiti da je onda S i relativno slabo gomilišno kompaktan po Eberlein-Šmulianovom teoremu 4.3.4 i primijeniti tvrdnju (i) Leme 4.3.3. □

Znamo da je svaki kompaktan metrički prostor potpun. Sljedeći teorem pokazuje i da slaba topologija ima to svojstvo.

Teorem 4.3.6. *Neka je X normiran prostor i neka je $S \subseteq X$ slabo kompaktan podskup. Tada je S potpun.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u S. Želimo pokazati da je taj niz konvergentan pa pretpostavimo da su svi elementi različiti. Skup S je slabo gomilišno kompaktan po Eberlein-Šmulianovom teoremu pa $\{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ ima slabo gomilište $x_0 \in S$. Neka su $f \in X' \setminus \{0\}$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Kako je niz Cauchyjev, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x_n - x_m\| \le \frac{\varepsilon}{2\|f\|}$ za sve $n, m \ge n_0$. Dakle,

$$|f(x_n) - f(x_m)| \le \|f\|\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za sve} \quad n, m \ge n_0.$$

Kako je $U = \{\, x \in X : |f(x - x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \,\}$ slaba okolina od x_0, postoji $k \ge n_0$ takav da je $x_k \in U$. Sada imamo

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le |f(x_n) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zaključujemo da $f(x_n) \to f(x)$ za svaki $f \in X'$, pa $x_n \overset{w}{\to} x$. No, nama treba konvergencija u normi. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x_n - x_m\| \le \frac{\varepsilon}{2}$ za $n, m \ge n_0$. Tada po pokazanom vrijedi $|f(x_n) - f(x_0)| \le \varepsilon$ za sve $f \in B_{X'}$ i $n > n_0$. Slijedi

$$\|x_n - x_0\| = \|\,\varphi(x_n - x_0)\| = \sup\{\, |f(x_n - x_0)| : f \in B_{X'} \,\} < \varepsilon,$$

za sve $n > n_0$. Dakle, $\|x_n - x\| \to 0$. □

Sljedeći važan korolar opisuje vezu između slabe kompaktnosti i separabilnosti. Točnije, pokazuje da je slaba kompaktnost u potpunosti određena separabilnim zatvorenim potprostorima danog normiranog prostora.

Korolar 4.3.7. *Neka je S podskup normiranog prostora X. Tada je S slabo kompaktan ako i samo ako je $S \cap Y$ slabo kompaktan u Y kad god je Y separabilan zatvoren potprostor od X. Analogna tvrdnja vrijedi za relativno slabo kompaktne podskupove.*

Dokaz. Neka je S (relativno) slabo kompaktan i Y neki zatvoren potprostor od X. Po tvrdnji (i) Propozicije 3.3.6 Y je slabo zatvoren podskup od X. Presjek S sa slabo zatvorenim skupom Y je (relativno) slabo kompaktan u X, pa onda i u odnosu na relativnu slabu topologiju na Y koja se po Teoremu 3.2.4 podudara sa slabom topologijom $\sigma(Y, Y')$.

Obratno, pretpostavimo da je za svaki separabilan zatvoren potprostor Y od X skup $S \cap Y$ (relativno) slabo kompaktan u Y, pa onda i (relativno) slabo nizovno kompaktan u Y. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S i $Y = \overline{\operatorname{span}}(\{ x_n : n \in \mathbb{N} \})$ separabilan zatvoren potprostor od X. Slijedi da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sadrži podniz koji konvergira s obzirom na obje slabe topologije na X i Y. Uočimo da S mora sadržavati taj slabi limes ukoliko je $S \cap Y$ zaista slabo kompaktan u Y. Iz ovoga slijedi da je S (relativno) slabo nizovno kompaktan i stoga (relativno) slabo kompaktan. $\square$

Sadržaj sljedećeg korolara pokazuje da vrijedi i obrat u Korolaru 4.2.7.

Korolar 4.3.8. *Normiran prostor X je refleksivan ako i samo ako svaki ograničen niz u X ima slabo konvergentan podniz.*

Dokaz. Po Kakutanijevom teoremu X je refleksivan ako i samo ako je njegova zatvorena jedinična kugla B_X slabo kompaktna, što je po Eberlein-Šmulianovom teoremu i činjenici da je B_X slabo zatvoren skup ekvivalentno uvjetu da svaki niz u B_X ima slabo konvergentan podniz. Sada tvrdnja korolara slijedi iz činjenice da svaki ograničen niz skaliranjem možemo smjestiti u jediničnu kuglu. $\square$

Korolar 4.3.9. *Svaki refleksivan normiran prostor X je slabo potpun.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slabo Cauchyjev niz u X. Tada je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen po Korolaru 1.3.21 pa ima slabo konvergentan podniz po Korolaru 4.3.8. Slijedi da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira slabo limesu tog podniza. $\square$

Vrijedi i svojevrsni obrat Korolara 4.2.4.

Korolar 4.3.10. *Normiran prostor X je refleksivan ako i samo ako je svaki njegov separabilan zatvoren potprostor refleksivan.*

Dokaz. Normiran prostor X je refleksivan ako i samo je B_X slabo kompaktan skup, što je po Korolaru 4.3.7 ekvivalentno tome da je svaka zatvorena jedinična kugla $B_X \cap Y$ separabilnog zatvorenog potprostora Y od X slabo kompaktna u Y, što vrijedi ako i samo ako je svaki separabilan zatvoren potprostor od X refleksivan. □

4.4 Krein-Šmulianov teorem

Pretpostavimo da je K slabo kompaktan podskup Banachovog prostora X. Tada konveksna ljuska od K ne mora nužno biti slabo kompaktan skup.

Primjer 4.4.1. *Neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kanonskih vektora u Banachovom prostoru l^2 i neka je $K = \{0\} \cup \{\ n^{-1}e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Kao u Primjeru 4.1.5 se pokaže da je K kompaktan, pa onda i slabo kompaktan. Kako je $0 \in K$, iz (1.1) lagano slijedi*

$$\operatorname{co}(K) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot k^{-1} e_k : n \in \mathbb{N},\ \lambda_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leq 1 \right\}.$$

Po ovome je $\left(\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \cdot k^{-1} e_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\operatorname{co}(K)$ koji konvergira prema

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot k^{-1} e_k \in l^2 \setminus \operatorname{co}(K).$$

Zaključujemo da $\operatorname{co}(K)$ nije zatvoren, odnosno da nije slabo zatvoren. Dakle, $\operatorname{co}(K)$ ne može biti kompaktan, odnosno slabo kompaktan.

Ispostavlja se da jedino što sprječava $\operatorname{co}(K)$ da bude slabo kompaktan je to što nije nužno slabo zatvoren. U ovom poglavlju dokazat ćemo rezultat vezan uz kompaktnost zatvorene konveksne ljuske kompaktnog skupa koji je dokazao Mazur 1930. godine i analognu verziju za slabu topologiju koju su dokazali Krein i Šmulian 1940. godine. Prvo krećemo od separabilnog slučaja koji je prvo dokazao Krein 1937. godine, što je sadržaj sljedeće leme.

Lema 4.4.2. *Neka je τ jaka ili slaba topologija separabilnog Banachovog prostora X i neka je K kompaktan podskup od X u topologiji τ. Tada je $\overline{\operatorname{co}}(K)$ τ-kompaktan.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti $K \neq \emptyset$. Uočimo da je K slabo kompaktan, neovisno o tome je li τ jaka ili slaba topologija jer je, naime, svaki slabo otvoren pokrivač ujedno i otvoren pokrivač. Do kraja dokaza, za topologiju na K uzimamo relativnu τ topologiju na K u smislu Definicije 1.1.2.

Ovaj dokaz se oslanja na standarnu identifikaciju duala $C(K)'$ s $M_R(K)$ kao u Dodatku B. Neka je κ identiteta na K, shvaćena kao preslikavanje s topološkog prostora K u topološki prostor X s topologijom τ. Za svaki $f \in X'$, preslikavanje $f \circ \kappa$ je u $C(K)$ pa $\int_K f \circ \kappa \, d\mu$ postoji za svaki $\mu \in M_R(K)$.

Neka je $\mu_0 \in M_R(K)$. Pokazat ćemo da postoji jedinstveni $x_{\mu_0} \in X$ takav da je

$$f(x_{\mu_0}) = \int_K f \circ \kappa \, d\mu_0 \quad \text{za svaki} \quad f \in X'.$$

U tu svrhu, pretpostavimo da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u X' koji slabo* konvergira prema nekom $f_0 \in X'$. Za svaki $x \in K$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|(f_n \circ \kappa)x| \leq \|f_n\| \, \|x\| \leq \sup\{ \|f_m\| : m \in \mathbb{N}\} \sup\{\|y\| : y \in K \}, \tag{4.3}$$

pri čemu Propozicije 1.3.23 i 4.2.1 impliciraju da su zadnja dva supremuma konačna. Kako za svaki $x \in K$ $(f_n \circ \kappa)(x)$ konvergira prema $(f_0 \circ \kappa)(x)$, iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi da

$$\int_K f_n \circ \kappa \, d\mu_0 \to \int_K f_0 \circ \kappa \, d\mu_0.$$

Naime, po (4.3) funkcije $|f_n \circ \kappa|$ su dominirane konstantom koja je integrabilna s obzirom na konačnu mjeru $d\mu_0$. Zato je linearan funkcional $f \mapsto \int_K f \circ \kappa \, d\mu_0$ slabo* nizovno neprekidan, pa onda i slabo* neprekidan po Propoziciji 3.3.12. Dakle, postoji jedinstven $x_{\mu_0} \in X$ takav da je $f(x_{\mu_0}) = \hat{x}_{\mu_0}(f) = \int_K f \circ \kappa \, d\mu_0$ za svaki $f \in X'$.

Definirajmo $T : C(K)' \to X$ na sljedeći način. Za $y \in C(K)'$ neka je μ_y mjera iz $M_R(K)$ identificirana s y i neka je $Ty = x_{\mu_y}$, jedinstveni element iz X za koji vrijedi

$$g(x_{\mu_y}) = \int_K g \circ \kappa \, d\mu_y \quad \text{za sve} \quad g \in X'.$$

Lagano se provjeri da je T linearan. Ako je $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$ hiperniz u $C(K)'$ koji slabo* konvergira prema nekom $y \in C(K)'$, tada za svaki $g \in X'$ vrijedi

$$g(Ty_\alpha) = \int_K g \circ \kappa \, d\mu_{y_\alpha} = y_\alpha(g \circ \kappa) \to y(g \circ \kappa) = \int_K g \circ \kappa \, d\mu_y = g(Ty)$$

i stoga $Ty_\alpha \xrightarrow{w} Ty$. Dakle, preslikavanje T je neprekidno s obzirom na slabu* topologiju na $C(K)'$ i slabu topologiju na X. Iz ovoga, slabe* kompaktnosti od $B_{C(K)'}$ i linearnosti od T slijedi da je $T(B_{C(K)'})$ slabo kompaktan i konveksan podskup od X.

Pretpostavimo da je τ topologija norme. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je u ovoj topologiji K kompaktan metrički prostor, on je totalno ograničen pa postoje $x_1, \ldots, x_m \in K$ takvi da je $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m K(x_j, \varepsilon)$. Slijedi da možemo odabrati particiju $\{ A_1, \ldots, A_m \}$ od K u Borelove skupove takvu da za funkciju $\kappa_\varepsilon : K \to X$ danu s

$$\kappa_\varepsilon = \sum_{j=1}^m x_j \mathbb{1}_{A_j},$$

vrijedi $\|\kappa(x) - \kappa_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$, za svaki $x \in K$. Definirajmo preslikavanje $T_\varepsilon : C(K)' \to X$ na sljedeći način. Za $y \in C(K)'$ neka je μ_y mjera iz $M_R(K)$ identificirana s y. Stavimo

$$T_\varepsilon(y) = \sum_{j=1}^m \mu_y(A_j) x_j.$$

Tada je T_ε linearan operator i za sve $y \in C(K)'$ vrijedi

$$\|T_\varepsilon(y)\| \le \sum_{j=1}^m |\mu_y(A_j)| \|x_j\| \le \left(\sum_{j=1}^m \|x_j\| \right) \|\mu_y\| = \left(\sum_{j=1}^m \|x_j\| \right) \|y\|,$$

pa je i ograničen. Ako su $g \in B_{X'}$ i $y \in B_{C(K)'}$, tada je

$$\begin{aligned} |g(Ty - T_\varepsilon y)| &= \left| \int_K g \circ \kappa \, d\mu_y - \sum_{j=1}^m \mu_y(A_j) g(x_j) \right| = \left| \int_K g \circ \kappa \, d\mu_y - \int_K g \circ \kappa_\varepsilon \, d\mu_y \right| \\ &= \left| \int_K g(\kappa - \kappa_\varepsilon) \, d\mu_y \right| \le \|g\| \cdot \sup_{x \in K} \|\kappa(x) - \kappa_\varepsilon(x)\| \cdot |\mu_y|(K) \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, za $y \in B_{C(K)'}$ po (1.3.10) vrijedi

$$\|Ty - T_\varepsilon y\| = \max\{ |g(Ty - T_\varepsilon y)| : g \in B_{X'} \} \le \varepsilon. \tag{4.4}$$

Kako je T_ε ograničen linearan operator konačnog ranga, skup $T_\varepsilon(B_{C(K)'})$ se može pokriti s konačno mnogo otvorenih kugala radijusa ε, a (4.4) osigurava da ako udvostručimo radijuse svih ovih kugala, tako dobivene kugle pokrivaju $T(B_{C(K)'})$. Dakle, skup $T(B_{C(K)'})$ je totalno ograničen i zatvoren pa je po Teoremu 1.2.7 kompaktan.

Dobili smo da je $T(B_{C(K)'})$ τ-kompaktan konveksan podskup od X, neovisno o tome je li τ jaka ili slaba topologija. Neka je $x_0 \in K$ i neka je δ_{x_0} Diracova mjera iz $M_R(K)$ koncentrirana u x_0, odnosno takva da je

$$\delta_{x_0}(\{x_0\}) = 1 \quad \text{i} \quad |\delta_{x_0}|(K \setminus \{x_0\}) = 0.$$

Neka je y_0 element iz $C(K)'$ koji je pridružen mjeri δ_{x_0}. Tada za svaki $g \in X'$,

$$g(Ty_0) = \int_K g \circ \kappa \, d\delta_{x_0} = g(\kappa(x_0)) = g(x_0),$$

pa je $Ty_0 = x_0$. Kako je $\|y_0\| = \|\delta_{x_0}\| = 1$, slijedi da je $K \subseteq T(B_{C(K)'})$, pa onda i $\overline{\text{co}}(K) \subseteq T(B_{C(K)'})$. Sada je $\overline{\text{co}}(K)$ τ-kompaktan kao zatvoren podskup kompaktnog skupa u toj topologiji.

□

Teorem 4.4.3. *(Krein-Šmulian) Neka je X Banachov prostor i neka je $K \subseteq X$ slabo kompaktan podskup. Tada je zatvorena konveksna ljuska od K slabo kompaktan skup.*

Dokaz. Pokazat ćemo da je $\overline{\text{co}}(K)$ slabo nizovno kompaktan pa će tvrdnja slijediti iz Eberlein-Šmulianovog teorema. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\overline{\text{co}}(K)$. Kako je $\overline{\text{co}}(K)$ slabo zatvoren, dovoljno je pokazati da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima slabo konvergentan podniz.

Primijetimo da je svaki x_n jaki limes niza konveksnih kombinacija elemenata iz K, odakle slijedi egzistencija prebrojivog podskupa S od K za koji vrijedi

$$\{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\} \subseteq \overline{\text{co}}(S) \subseteq \overline{\text{co}}(K \cap \overline{\text{span}}(S)) \subseteq \overline{\text{span}}(S),$$

pri čemu posljednja inkluzija vrijedi jer je $\overline{\text{span}}(S)$ već zatvoren i konveksan. Kako je $K \cap \overline{\text{span}}(S)$ slabo kompaktan podskup separabilnog Banachovog prostora $\overline{\text{span}}(S)$, iz Leme 4.4.2 slijedi da je $\overline{\text{co}}(K \cap \overline{\text{span}}(S))$ slabo kompaktan i stoga slabo nizovno kompaktan promatran kao podskup prostora $\overline{\text{span}}(S)$. Dakle, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ima podniz koji je slabo konvergentan u $\overline{\text{span}}(S)$, pa onda i u X. □

Teorem 4.4.4. *(Mazur) Neka je X Banachov prostor i neka je K kompaktan podskup od X. Tada je zatvorena konveksna ljuska od K kompaktan skup.*

Dokaz. Neka je K kompaktan podskup od X. Tada je K separabilan po Propoziciji 1.2.9 pa je separabilan i $\overline{\text{span}}(K)$. Primjenom Leme 4.4.2 zaključujemo da je $\overline{\text{co}}(K)$ kompaktan promatran kao podskup separabilnog prostora $\overline{\text{span}}(K)$, pa je onda i kompaktan u X. □

Primjer 4.4.5. *Ovim primjerom pokazujemo da je za Lemu 4.4.2, Krein-Šmulianov teorem i Mazurov teorem pretpostavka potpunosti prostora X nužna. Neka je $X = c_{00}$, promatran kao potprostor od l^∞, i neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kanonskih vektora u X. X je separabilan i nije potpun. Za kompaktan skup uzmimo*

$$K = \{0\} \cup \{\, n^{-1} e_n : n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Pokažimo da $\overline{\text{co}}(K) \subseteq c_{00}$ *nije slabo kompaktan skup. Promotrimo niz*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \cdot k^{-1} e_k$$

koji u l^∞ *konvergira prema* $x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot k^{-1} e_k \notin c_{00}$. *Dakle,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je Cauchyjev niz koji nije konvergentan u* c_{00}. *Promotrimo slabo otvorene skupove*

$$U_n = \overline{K}\left(x, \frac{1}{n}\right)^c \cap c_{00} = \left\{ y \in c_{00} : \|y - x\| > \frac{1}{n} \right\} \quad \text{za} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ *slabo otvoren pokrivač od* $\overline{\text{co}}(K)$ *koji nema konačan potpokrivač jer proizvoljna okolina od* x *sadrži barem jedan element niza* $x_n \in \overline{\text{co}}(K)$.

Sada smo spremni pokazati još neke rezultate o ekstremnim točkama slabo kompaktnih skupova.

Korolar 4.4.6. *Neka je* X *Banachov prostor i neka je* $K \subseteq X$ *neprazan slabo kompaktan podskup. Tada svaka ekstremna točka od* $\overline{\text{co}}(K)$ *leži u* K, *tj. vrijedi*

$$\mathcal{E}(\overline{\text{co}}(K)) \subseteq K.$$

Dokaz. Po Krein-Šmulianovom teoremu $\overline{\text{co}}(K)$ je slabo kompaktan skup pa tvrdnja slijedi primjenom Milmanovog teorema 4.1.1. □

Korolar 4.4.7. *Neka je* X *normiran prostor i neka je* $K \subseteq X'$ *neprazan ograničen slabo** *zatvoren podskup. Tada svaka ekstremna točka od* $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ *leži u* K, *tj. vrijedi*

$$\mathcal{E}(\overline{\text{co}}^{w^*}(K)) \subseteq K.$$

Dokaz. Iz Teorema 4.1.4 slijedi da su K i $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ slabo* kompaktni skupovi. Naime, kako je K ograničen on je sadržan u nekoj zatvorenoj kugli koja je slabo* zatvoren konveksan skup pa je i $\overline{\text{co}}^{w^*}(K)$ sadržan u toj kugli, odnosno i on je ograničen. Sada tvrdnja slijedi iz Milmanovog teorema. □

Primijetimo da smo u sklopu prethodnog dokaza pokazali da vrijedi i analogna verzija Krein-Šmulianovog teorema za slabu* topologiju.

Primjer 4.4.8. *Pokažimo kako iskoristiti tehniku ekstremnih točaka da bismo pokazali da prostor* $L^1([0,1])$ *nije dualni prostor nijednog normiranog prostora. Pretpostavimo suprotno, neka je* $X' \cong L^1([0,1])$ *za neki normiran prostor* X. *Tada je po Banach-Alaogluovom teoremu skup* $B_{L^1(0,1)}$ *slabo** *kompaktan. Potpuno analogno Primjeru 2.3.5 se pokaže da je* $\mathcal{E}(B_{L^1(0,1)}) = \emptyset$, *a iz Krein-Milmanovog teorema slijedi*

$$B_{L^1(0,1)} = \overline{\text{co}}^{w^*}(\mathcal{E}(B_{L^1(0,1)})) = \emptyset,$$

što je kontradikcija.

4.5 Jamesov teorem

U Propoziciji 1.3.16 smo pokazali da u refleksivnom prostoru X svaki ograničen linearan funkcional $f \in X'$ dostiže svoju normu na B_X u smislu da postoji neki $x_0 \in B_X$ takav da je

$$|f(x_0)| = \|f\| = \sup\{\,|f(x)| : x \in B_X\,\}.$$

U Primjeru 1.3.17 smo vidjeli da postoje prostori gdje to nije slučaj, no pokazali smo da je skup funkcionala koji dostižu svoju normu gust u X'. Općenito, za takve prostore kažemo da su **subrefleksivni**. Teorijom takvih prostora prvi su se bavili američki matematičari R. Phelps i E. Bishop sredinom 20. stoljeća te je po njima i nazvan glavni rezultat – svaki Banachov prostor je subrefleksivan. Nisu svi prostori subrefleksivni, na primjer potprostor svih polinoma realnog prostora $C([0,1])$ nije (vidi [5, Primjer 2.11.2]). S druge strane, moguće je da nepotpun normiran prostor bude subrefleksivan. Štoviše, američki matematičar R. C. James je konstruirao primjer nepotpunog prostora na kojem svi ograničeni linearni funkcionali dostižu svoju normu (vidi [5, Sekcija 4.5]). Taj prostor ima svojstvo da je izometrički izomorfan svome bidualu, ali nije refleksivan. Naime, taj izomorfizam se ne ostvaruje preko kanonskog ulaganja φ. Ovdje ćemo dati nešto općenitiju verziju Bishop-Phelpsovog teorema koju onda koristimo da bismo dokazali analogon Propozicije 1.2.11 za slabu topologiju Banachovog prostora. Uvedimo prvo nekoliko novih pojmova.

Potporne točke i funkcionali

Definicija 4.5.1. *Neka je X TVP i neka je $S \subseteq X$. Za $f \in X' \setminus \{0\}$ kažemo da je* ***potporni funkcional*** *za S ako postoji $x_0 \in S$ takav da je*

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in S\}.$$

U tom slučaju kažemo da je x_0 ***potporna točka*** *za S i da f* ***podupire*** *S u x_0.*

Primijetimo da iz Korolara 1.3.9 slijedi da je u normiranom prostoru svaka točka iz S_X potporna točka za B_X. Naime za $x_0 \in S_X$ i $f \in X'$ iz tog korolara vrijedi

$$\|x_0\| = f(x_0) \leq \sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\} \leq \sup\{\,|f(x)| : x \in B_X\,\} = \|f\| = \|x_0\|.$$

Definicija potpornog funkcionala je generalizacija pojma funkcionala koji dostiže svoju normu. Zaista, ako je $f \in X' \setminus \{0\}$, tada po Teoremu 1.3.7 vrijedi

$$\sup\{\operatorname{Re} f(x) : x \in B_X\} = \sup\{\,|f(x)| : x \in B_X\,\}$$

pa slijedi da f dostiže svoju normu ako i samo ako f podupire B_X u točki u kojoj se dostiže norma. Slijede dva ključna teorema o potpornim točkama i funkcionalima čiji se dokazi redom mogu pronaći u [5, Teoremi 2.11.9 i 2.11.13] uz brojne druge zanimljive rezultate.

Teorem 4.5.2. *(Bishop-Phelpsov teorem o potpornim točkama) Neka je X Banachov prostor i neka je $S \subseteq X$ zatvoren konveksan podskup. Tada je skup svih potpornih točaka za S gust u ∂S.*

Teorem 4.5.3. *(Bishop-Phelpsov teorem o potpornim funkcionalima) Neka je X netrivijalan Banachov prostor i neka je $S \subseteq X$ neprazan zatvoren ograničen konveksan podskup. Tada je skup svih potpornih funkcionala za S gust u X'.*

Ako u prethodnom teoremu uzmemo $S = B_X$, iz diskusije prije teorema slijedi da je u Banachovom prostoru skup funkcionala koji dostižu svoju normu gust u X', odnosno takav prostor je subrefleksivan. Mi ćemo primijeniti Bishop-Phelpsov teorem na podskup dualnog prostora, ali će nam trebati nešto jača verzija Teorema 4.5.2 koja ne promatra sve potporne točke nego skup **slabo* potpornih točaka** za S

$$\Sigma_S = \{\, g \in S : \hat{x}(g) = \max_{h \in S} \hat{x}(h) \text{ za neki } x \in X \setminus \{0\} \,\}.$$

Očito je Σ_S podskup potpornih točaka za S u čijoj definiciji umjesto $\hat{x} \in \hat{X} \setminus \{0\}$ promatramo sve elemente $\Phi \in X'' \setminus \{0\}$. Tvrdnja sljedećeg teorema je da je ovaj manji skup već gust u ∂S.

Teorem 4.5.4. *(Dualni Bishop-Phelpsov teorem) Neka je X Banachov prostor i neka je $S \subseteq X'$ slabo* zatvoren konveksan podskup. Tada je skup slabo* potpornih točaka za S gust u ∂S.*

Dokaz ovog teorema se može pronaći u [9, Teorem 1], a uz dodatnu pretpostavku da je $\operatorname{Int} S \neq \emptyset$ se može prilično jednostavno dobiti iz Teorema 4.5.2.

Jamesov kriterij slabe kompaktnosti

Sada smo spremni iskazati glavni teorem ove sekcije koji je dokazao James 1964. godine kojim je dana karakterizacija slabe kompaktnosti pomoću svojstva dostizanja supremuma ograničenih linearnih funkcionala.

Teorem 4.5.5. *(Jamesov kriterij slabe kompaktnosti) Neka je X Banachov prostor i neka je $S \subseteq X$ neprazan slabo zatvoren podskup. Tada je ekvivalentno:*

(i) S je slabo kompaktan.

(ii) Za svaki $f \in X'$ postoji $x_0 \in S$ takav da je $|f(x_0)| = \sup_{x \in S} |f(x)|$.

(iii) Za svaki $u \in X'_{\mathbb{R}}$ *postoji* $x_0 \in S$ *takav da je* $|u(x_0)| = \sup_{x \in S} |u(x)|$.

(iv) Za svaki $u \in X'_{\mathbb{R}}$ *postoji* $x_0 \in S$ *takav da je* $u(x_0) = \sup_{x \in S} u(x)$.

Primijetimo da neprekidna realna funkcija na kompaktnom skupu uvijek poprima svoj supremum tako da (i) neupitno povlači ostale tvrdnje. Također, ekvivalencija ostale tri tvrdnje je lako provjerljiva tako da je glavnina teorema pokazati da u realnom Banachovom prostoru (iv) implicira (i). Dokaz ovog teorema je izrazito tehnički zahtjevan tako da ćemo ga dokazati uz dodatnu pretpostavku da je S konveksan i separabilan koristeći tehnike ekstremnih točaka po uzoru na [6]. Ostatak ovog dokaza se može pronaći u [7], a nešto drukčiji dokaz se može pronaći u [5, Sekcija 2.9]. Oba pristupa kreću od separabilnog slučaja pa nizom generalizacija dolaze do punog teorema. Krećemo s nekoliko novih pojmova.

Definicija 4.5.6. *Neka je* X *realan normiran prostor i neka je* $K \subseteq X'$ *ograničen podskup. Za podskup* $B \subseteq K$ *kažemo da je* ***Jamesov rub*** *od* K *ako svaki* $\hat{x} \in \hat{X}$ *dostiže svoj supremum na* K *u nekoj točki iz* B*, odnosno ako za svaki* $x \in X$ *postoji* $f \in B$ *takav da je*

$$\hat{x}(f) = f(x) = \sup\{\, g(x) : g \in K \,\} = \sup\{\, \hat{x}(g) : g \in K \,\}.$$

Za nas će K uvijek biti slabo* kompaktan pa će funkcional $\hat{x} : K \to \mathbb{F}$ postizati maksimum na K odakle slijedi da neki takav Jamesov rub B sigurno postoji, na primjer možemo uzeti cijeli skup K. Kažemo da B **(I)-generira** K ako za svaki prebrojivi pokrivač $\{\, C_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ od B koji se sastoji od slabo* kompaktnih konveksnih podskupova od K vrijedi da je $\operatorname{co}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)$ gust podskup od K.

Lema 4.5.7. *Neka je* X *realan Banachov prostor. Neka je* K *konveksan slabo** *kompaktan podskup od* X' *i neka je* $B \subseteq K$ *Jamesov rub od* K*. Tada je* $\overline{\operatorname{co}}^{w^*}(B) = K$.

Dokaz. Očito je $\overline{\operatorname{co}}^{w^*}(B) \subseteq K$. Pretpostavimo da postoji $g \in K$ takav da $g \notin \overline{\operatorname{co}}^{w^*}(B)$. Po Teoremu separacije 1.4.10 primijenjenom na slabo* kompaktan skup $\{g\}$ i slabo* zatvoren skup $\overline{\operatorname{co}}^{w^*}(B)$ zaključujemo da postoji $\hat{x} \in \hat{X}$ takav da je $\sup_{f\in B} \hat{x}(f) < \hat{x}(g)$. Dakle, ne postoji točka u B u kojoj $\hat{x}$ dostiže svoj supremum na K što je kontradikcija s definicijom Jamesovog ruba. □

Lema 4.5.8. *Neka je* X *Banachov prostor. Neka su* K, S *i* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *slabo** *kompaktni podskupovi od* X'*. Pretpostavimo da vrijedi* $S \cap K = \emptyset$ *i* $S \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{w^*}$*. Ako za svaku slabo** *otvorenu okolinu* W *od* 0 *postoji* $N \in \mathbb{N}$ *takav da je* $K_n \subseteq K + W$ *za sve* $n > N$*, tada postoji* $M \in \mathbb{N}$ *takav da je* $S \subseteq \bigcup_{1\le n\le M} K_n$.

Dokaz. Kako je K podskup slabo* otvorenog skupa $X' \setminus S$, postoji slabo* otvorena okolina W od 0 takva da je $K + W \subseteq X' \setminus S$. Eventualnim smanjivanjem W možemo postići $K + \overline{W}^{w^*} \subseteq X' \setminus S$ (vidi Teorem 1.4.6 (vi)). Po pretpostavci postoji $M \in \mathbb{N}$ takav da je $\bigcup_{n>M} K_n \subseteq K + W$ te stoga vrijedi

$$\overline{\bigcup_{n>M} K_n}^{w^*} \subseteq K + \overline{W}^{w^*} \subseteq X' \setminus S,$$

jer je $K + \overline{W}^{w^*}$ slabo* zatvoren po Propoziciji 1.4.8. S druge strane,

$$S \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{w^*} = \overline{\bigcup_{n>M} K_n}^{w^*} \cup \bigcup_{1\le n\le M} K_n.$$

Dakle, $S \subseteq \bigcup_{1\le n\le M} K_n$. □

Teorem 4.5.9. *Neka je X realan Banachov prostor. Neka je K neprazan slabo* kompaktan konveksan podskup od X' i neka $B \subseteq K$ Jamesov rub od K. Tada B (I)-generira K.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti $X \neq \{0\}$, a eventualnom translacijom K možemo pretpostaviti $0 \in B$. Pretpostavimo da je $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, gdje su $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slabo* kompaktni konveksni podskupovi od K i fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Pokazujemo da vrijedi

$$K \subseteq \operatorname{co}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) + 2\varepsilon B_{X'}.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ stavimo $K_n = C_n + (\varepsilon/n)B_{X'}$. Neka je $V = \overline{\operatorname{co}}^{w^*}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n)$. Očito je $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ pa iz Leme 4.5.7 slijedi $K = \overline{\operatorname{co}}^{w^*}(B) \subseteq V$. Skupovi $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i V su slabo* kompaktni podskupovi od X' jer su slabo* zatvoreni i ograničeni te su sadržani u $K + \varepsilon B_{X'}$. Nadalje, vrijedi $0 \in \operatorname{Int} V$ jer je $0 \in C_n \subseteq \operatorname{Int} K_n \subseteq \operatorname{Int} V$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka je f proizvoljna slabo* potporna točka za V, odnosno element skupa

$$\Sigma_V = \{\, g \in V : \hat{x}(g) = \max_{h\in V} \hat{x}(h) \text{ za neki } x \in X \setminus \{0\} \,\}.$$

Skup Σ_V je neprazan jer je bilo koji $\hat{x} \in \hat{X}$ neprekidan u slaboj* topologija pa postiže maksimum na slabo* kompaktnom skupu V. Neka je $x \in X$ odabran tako da je

$$\hat{x}(f) = \max_{h\in V} \hat{x}(h) = 1.$$

Skup $F = \{\, g \in V : g(x) = 1 \,\}$ je konveksan, slabo* kompaktan te vrijedi $F \cap K = \emptyset$. Zaista, u suprotnom bismo imali $\max\{\, g(x) : g \in K \,\} = 1$, a iz toga što je B Jamesov rub od K slijedilo bi da za neki $j \in \mathbb{N}$ postoji $b \in C_j \cap B$ takav da je $b(x) = 1$. No, kako je $b \in b + (\varepsilon/j)B_{X'} \subseteq K_j \subseteq V$ dobivamo kontradikciju. Naime, po Hahn-Banachovom teoremu možemo pronaći $h \in B_{X'}$ takav da je $h(x) = \|x\|$. Tada je $b + \frac{\varepsilon}{j}h \in V$ i $(b + \frac{\varepsilon}{j}h)(x) = 1 + \frac{\varepsilon}{j}\|x\| > 1$. Sada imamo

$$\mathcal{E}(F) \subseteq \mathcal{E}(V) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{w^*},$$

pri čemu prva inkluzija vrijedi jer je F ekstremna strana od V (vidi dokaz Teorema 2.3.6), a druga po Korolaru 2.3.8. Dakle,

$$\mathcal{E}(F) \subseteq F \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{w^*} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{w^*},$$

iz čega po Lemi 4.5.8 primijenjenoj na slabo* kompaktan skup $S = F \cap \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}^{w^*}$ postoji $M \in \mathbb{N}$ takav da $\mathcal{E}(F) \subseteq S \subseteq \bigcup_{1\le n\le M} K_n$. Stoga,

$$\begin{aligned} f \in F = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}\,\mathcal{E}(F) &\subseteq \mathrm{co}\left(\bigcup_{1\le n\le M} K_n\right) \subseteq \mathrm{co}\left(\bigcup_{1\le n\le M} C_n\right) + \varepsilon B_{X'} \\ &\subseteq \mathrm{co}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) + \varepsilon B_{X'}. \end{aligned}$$

Tu smo primijenili Milmanov teorem u prvoj jednakosti, Teorem 2.3.1 i činjenicu da za bilo koje $A, B \subseteq X$ vrijedi $\mathrm{co}(A + B) \subseteq \mathrm{co}(A) + \mathrm{co}(B)$ koja se lagano pokaže koristeći (1.1). Po Teoremu 4.5.4 dobivamo da je Σ_V gust u ∂V pa iz proizvoljnosti $f \in \Sigma_V$ slijedi

$$\partial V \subseteq \Sigma_V + \varepsilon B_{X'} \subseteq \mathrm{co}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) + 2\varepsilon B_{X'}.$$

No, kako je 0 element od B, pa i nekog C_j, slijedi $K \subseteq V \subseteq \mathrm{co}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\big) + 2\varepsilon B_{X'}$. Zaista, neka je $f \in V$. Moramo pokazati da je f element konveksnog skupa $\mathrm{co}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\big) + 2\varepsilon B_{X'}$. Slučaj $f \in \partial V$ smo već dokazali, pa pretpostavimo da je $f \in V \setminus \partial V$. Kako je V zatvoren, iz činjenice da je $V = \overline{V} = \mathrm{Int}\, V \cup \partial V$ slijedi $f \in \mathrm{Int}\, V$. Skup V je ograničen pa možemo pronaći $g \notin V$ tako da je f element segmenta $[0, g]$ u X'. Neka je $\lambda_0 = \sup\{\, \lambda \ge 0 : \lambda g \in V \,\}$. Kako je $0 \in \mathrm{Int}\, V$ nužno je $\lambda_0 > 0$, a kako $g \notin V$ imamo i $\lambda_0 \le 1$. Skup V je konveksan pa slijedi da je $[0, \lambda_0 g\rangle \subseteq V$ i $\langle \lambda_0 g, g] \subseteq X' \setminus V$. Zaključujemo da $\lambda_0 g$ možemo proizvoljno dobro aproksimirati točkama iz V i točkama iz $X' \setminus V$ pa je $\lambda_0 g \in \partial V$. Iz definicije λ_0 slijedi da je $f \in [0, \lambda_0 g]$, a taj segment ima krajnje točke sadržane u konveksnom skupu

$\mathrm{co}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) + 2\varepsilon B_{X'}$. Dakle, $f \in \mathrm{co}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) + 2\varepsilon B_{X'}$. Sada tvrdnja teorema slijedi iz proizvoljnosti $\varepsilon > 0$. □

Sada smo napokon spremni dokazati da (*iv*) implicira (*i*) u Teoremu 4.5.5 uz dodatnu pretpostavku da je S konveksan i separabilan.

Teorem 4.5.10. *Neka je X realan Banachov prostor i neka je $S \subseteq X$ zatvoren, ograničen i konveksan podskup. Ako je S separabilan i ako svaki $f \in X'$ dostiže svoj supremum na S, tada je S slabo kompaktan skup.*

Dokaz. Neka je $K = \overline{\varphi(S)}^{w^*}$. Da bismo pokazali da je S slabo kompaktan, dovoljno je pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $K \subseteq \varphi(S) + 2\varepsilon B_{X''}$. Naime, to povlači da je $\varphi(S)$ slabo* kompaktan pa će slaba kompaktnost od S slijediti iz Propozicije 3.3.8. U tu svrhu, fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i neka je $D = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ gust podskup od S. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $S_n = K \cap (\hat{x}_n + \varepsilon B_{X''})$. Tada je $\{ S_n : n \in \mathbb{N} \}$ pokrivač od $\varphi(S)$ koji se sastoji od slabo* kompaktnih konveksnih podskupova od K. Također vrijedi da je $\varphi(S)$ Jamesov rub od K. To slijedi direktno iz činjenice da za bilo koji topološki prostor Y, podskup $A \subseteq Y$ i neprekidnu funkciju $f : Y \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sup\{ f(x) : x \in A \} = \sup\{ f(x) : x \in \overline{A} \}.$$

Dokaz ove tvrdnje se može pronaći u [14, Teorem 1.7]. Sada iz Teorema 4.5.9 slijedi da je $K \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n) \subseteq \varphi(S) + 2\varepsilon B_{X''}$. □

Tu ćemo stati s dokazom Jamesovog kriterija slabe kompaktnosti. Pokažimo prvo primjerom da je pretpostavka slabe zatvorenosti nužna.

Primjer 4.5.11. *Promotrimo Banachov prostor $X = c_0$ uz supremum normu $\|\cdot\|_\infty$. Neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz kanonskih vektora i neka je $S = \{ n^{-1}e_n : n \in \mathbb{N} \}$. Pokazat ćemo da svaki ograničen linearan funkcional dostiže svoj supremum, iako S nije slabo kompaktan. Niz $(n^{-1}e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira jako prema 0, pa tada i slabo. Dakle, S nije slabo zatvoren. Neka je $f \in c_0'$ reprezentiran s $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. Tada je*

$$f(n^{-1}e_n) = \frac{a_n}{n}.$$

Trebamo pokazati da će se $s = \sup\{ |\alpha_n|/n : n \in \mathbb{N} \}$ dostići. Ako je $a \in c_{00}$, onda je tvrdnja očita. Pretpostavimo stoga da je $a_n \neq 0$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da se supremum ne dostiže. Po definiciji supremuma postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_k|/k > s/2$. Ako bi ovu nejednakost zadovoljavalo samo konačno mnogo $k \in \mathbb{N}$, onda bi se supremum dostizao u maksimumu njih. Dakle, postoji beskonačno $k \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi $|a_k| > ks/2$, što je kontradikcija s $a \in l^1$.

Već najavljena karakterizacija refleksivnosti sada lagano slijedi.

Teorem 4.5.12. *(James) Banachov prostor X je refleksivan ako i samo ako svaki $f \in X'$ dostiže svoj supremum na B_X.*

Dokaz. Jednu implikaciju smo već dokazali u Propoziciji 1.3.16. Ako svaki $f \in X'$ dostiže svoj supremum na slabo zatvorenom skupu B_X, tada je B_X slabo kompaktan po Teoremu 4.5.5 pa je prostor X refleksivan. □

Sljedećim teoremom dajemo verziju Jamesovog kriterija za slabu* topologiju čiji je dokaz značajno jednostavniji.

Teorem 4.5.13. *(Jamesov kriterij slabe* kompaktnosti) Neka je X Banachov prostor i neka je $S \subseteq X'$ neprazan slabo* zatvoren podskup. Tada je ekvivalentno:*

(i) S je slabo* kompaktan.

(ii) Za svaki $\hat{x} \in \hat{X} \subseteq X''$ postoji $f_0 \in S$ takav da je $|\hat{x}(f_0)| = \sup_{f \in S} |\hat{x}(f)|$.

Dokaz. Ako je S slabo* kompaktan, tada će slabo* neprekidno preslikavanje $|\hat{x}| : X' \to \mathbb{R}$ poprimiti supremum na S. Obratno, pretpostavimo da se $\sup\{\, |f(x)| : f \in S\,\}$ dostiže za svaki $x \in X$. Iz principa uniformne ograničenosti slijedi da je $\sup\{\, \|f\| : f \in S\,\} < \infty$. Dakle, S je slabo* zatvoren i ograničen pa je slabo* kompaktan po Teoremu 4.1.4. □

Dodatak A

L^p prostori

Dokazi tvrdnji ovog dodatka mogu se pronaći u [15, str. 50-60]. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere i neka je $p \in [1, \infty\rangle$ fiksan. Definiramo prostor $L^p(\Omega)$ kao prostor svih izmjerivih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{F}$ takvih da je

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Za takve funkcije definiramo

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Za $p = \infty$, definiramo $L^\infty(\Omega)$ kao prostor svih izmjerivih ograničenih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{F}$. Za takve funkcije definiramo μ-esencijalni supremum $\|f\|_\infty$ kao

$$\|f\|_\infty = \inf\{\, M > 0 : |f| \leq M \ \mu\text{-gotovo svuda} \,\}.$$

Pokazuje se da je u oba slučaja $L^p(\Omega)$ vektorski prostor, a kvocijentni prostor s obzirom na relaciju ekvivalencije "biti jednak gotovo svuda" će biti normiran prostor uz normu $\|\cdot\|_p$. U nastavku funkcije identificiramo s njihovim klasama ekvivalencije, što nećemo posebno naglašavati.

Teorem A.0.1. *Za $p \in [1, \infty]$ normiran prostor $L^p(\Omega)$ je potpun.*

Propozicija A.0.2. *(Hölder) Neka su $p, q, r \in [1, \infty]$ takvi da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Ako su $f \in L^p(\Omega)$ i $g \in L^q(\Omega)$, tada je $fg \in L^r(\Omega)$ i vrijedi*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

U mnogim situacijama je teško direktno raditi s L^p funkcijama pa je korisno znati ih aproksimirati funkcijama ljepšeg ponašanja.

Definicija A.0.3. *Za* ***jednostavnu*** *funkciju*

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{1}_{A_k},\ \lambda_k \in \mathbb{F},\ A_k \in \mathcal{F} \quad \text{za sve} \quad k = 1, \ldots, n,$$

kažemo da je μ-***jednostavna*** *ako za sve* $k = 1, \ldots, n$ *vrijedi* $\mu(A_k) < \infty$.

Propozicija A.0.4. *Neka je* $p \in [1, \infty\rangle$. *Tada* μ*-jednostavne funkcije u* $L^p(\Omega)$ *čine gust podskup. Isti rezultat vrijedi za* $L^\infty(\Omega)$ *ukoliko je* $\mu(\Omega) < \infty$.

Neka je sada $D \subseteq \mathbb{R}^d$ neprazan i otvoren. Za neprekidnu funkciju $f : D \to \mathbb{F}$ kažemo da ima **kompaktan nosač** ukoliko je njezin **topološki nosač**

$$\overline{\{\, x \in D : f(x) \neq 0 \,\}}$$

kompaktan podskup od D. Definiramo vektorski prostor $C_c^\infty(D)$ kao prostor svih glatkih funkcija $f : D \to \mathbb{F}$ s kompaktnim nosačem. Vektorski prostor neprekidnih funkcija s kompaktnim nosačem označavat ćemo s $C_c(D)$.

Propozicija A.0.5. *Neka je* $p \in [1, \infty\rangle$ *i neka je* $D \subseteq \mathbb{R}^d$ *otvoren. Tada je* $C_c^\infty(D)$ *gust podskup od* $L^p(D)$.

Propozicija A.0.6. *(Young) Neka su* $p, q, r \in [1, \infty]$ *takvi da* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. *Neka su* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *i* $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. *Tada:*

(i) Funkcija $y \mapsto f(x - y)g(y)$ *je integrabilna za gotovo svaki* $x \in \mathbb{R}^d$.

(ii) Funkcija $f * g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{F}$, *definirana za gotovo svaki* $x \in \mathbb{R}^d$ *s*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)\, dy,$$

nalazi se u $L^r(\mathbb{R}^d)$ *i vrijedi*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Funkciju $f * g$ nazivamo **konvolucijom** funkcija f i g.

Ako je μ **brojeća mjera** na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, odnosno mjera takva da je $\mu(S)$ jednak broju elemenata od S. Tada su izmjerive funkcije s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{F}$ upravo nizovi skalara. Pripadne $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ prostore označavat ćemo s l^p. Iz definicije L^p-norme slijedi da za $p \in [1, \infty]$ i $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ vrijedi

$$\|(x_n)_n\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} & \text{za } p \in [1, \infty\rangle; \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| & \text{za } p = \infty. \end{cases}$$

Dodatak B

Dualni prostor C(K)'

Sadržaj ovog dodatka preuzet je iz [15, str. 67-76].

Definicija B.0.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor.* $\mathbb{F}$-***mjera*** *na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *je preslikavanje* $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{F}$ *sa svojstvima*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(ii) za svaku familiju $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *disjunktnih podskupova od* $\mathcal{F}$ *vrijedi*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n).$$

Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ onda kažemo da je μ realna, a ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ da je kompleksna mjera. Uočimo da ako je μ realna, u sklopu definicije je pretpostavljeno da je $\mu(\Omega) < \infty$. Takve mjere se nazivaju **konačnima** i ima ih smisla promatrati kada se za definiciju mjere uzme preslikavanje koje vrijednosti poprima u proširenim realnim brojevima. No, nama će biti potrebne samo mjere kao u gornjoj definiciji, a za $\mathbb{F}$-mjeru kažemo da je konačna ako μ poprima vrijednosti u $[0, \infty\rangle$.

Definicija B.0.2. *Neka je* μ $\mathbb{F}$*-mjera na* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Definiramo* ***varijaciju*** *od* μ *na* $F \in \mathcal{F}$ *kao*

$$|\mu|(F) = \sup_{\mathcal{A}\in K_F} \sum_{A\in\mathcal{A}} |\mu(A)|,$$

pri čemu je K_F *skup svih konačnih familija disjunktnih izmjerivih podskupova od* F*.*

Iz definicije se lagano pokaže da vrijedi $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$ za sve $\lambda \in \mathbb{F}$ i $|\mu + \nu|(F) \leq |\mu|(F) + |\nu|(F)$ za sve $F \in \mathcal{F}$. Ako je μ konačna, tada je $|\mu| = \mu$.

Propozicija B.0.3. *Ako je* μ $\mathbb{F}$*-mjera, tada je* $|\mu|$ *konačna mjera.*

Definiramo skup $M(\Omega)$ kao prostor svih $\mathbb{F}$-mjera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Štoviše, on ima strukturu vektorskog prostora uz operacije definirane s

$$(\lambda\mu)(F) = \lambda\mu(F) \quad \text{i} \quad (\mu + \nu)(F) = \mu(F) + \nu(F).$$

No, na $M(\Omega)$ možemo uvesti i normu što je sadržaj sljedećeg teorema.

Teorem B.0.4. *Prostor $M(\Omega)$ je Banachov uz* ***varijacijsku normu***

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega).$$

Neka je K kompaktan Hausdorffov prostor. Neka je $(K, \mathcal{B}_K)$ izmjeriv prostor, pri čemu je $\mathcal{B}_K$ Borelova σ-algebra na K, tj. najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene podskupove od K. Za mjeru na takvom prostoru kažemo da je **Borelova**. Za $\mu \in M(K)$ kažemo da je **regularna** ako za svaki $S \in \mathcal{B}_K$ i $\varepsilon > 0$ postoje otvoren skup $A \in \mathcal{B}_K$ i kompaktan skup $B \in \mathcal{B}_K$ za koje vrijedi

$$B \subseteq S \subseteq A \quad \text{i} \quad |\mu|(A \setminus B) < \varepsilon.$$

Označimo s $M_R(K)$ prostor svih regularnih Borelovih mjera na $M(K)$. Pokazuje se da je $M_R(K)$ zatvoren potprostor od $M(K)$ pa je također Banachov uz varijacijsku normu. Sljedeći teorem će nam biti od velikog značaja, a opisuje strukturu dualnog prostora $C(K)'$. Više o njemu se može pronaći u [18].

Teorem B.0.5. *(Riesz-Markov teorem reprezentacije) Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Za svaki $\Phi \in C(K)'$ postoji jedinstvena mjera $\mu \in M_R(K)$ takva da za svaki $f \in C(K)$ vrijedi*

$$\Phi(f) = \int_K f d\mu.$$

Za tu mjeru vrijedi $\|\mu\| = \|\Phi\|$. Dakle, ovo pridruživanje je izometrički izomorfizam prostora $C(K)'$ i $M_R(K)$, tj. vrijedi

$$C(K)' \cong M_R(K).$$

Dodatak C

Zornova lema

Definicija C.0.1. ***Parcijalno uređen skup*** *je uređen par* $(S, \preceq)$ *gdje je* S *skup, a* $\preceq$ *relacija na* S *takva da za sve* $x, y, z \in S$ *vrijedi*

*(i) (**refleksivnost**)* $x \preceq x$ *;*

*(ii) (**antisimetričnost**)* $x \preceq y$ *i* $y \preceq x$ *povlači* $x = y$ *;*

*(iii) (**tranzitivnost**)* $x \preceq y$ *i* $y \preceq z$ *povlači* $x \preceq z$*.*

Totalno uređen skup *je parcijalno uređen skup* $(S, \preceq)$ *sa svojstvom da za sve* $x, y \in S$ *vrijedi* $x \preceq y$ *ili* $y \preceq x$*. Za totalno uređen podskup od* S *kažemo da je* ***lanac****.*

Definicija C.0.2. *Neka je* $(S, \preceq)$ *parcijalno uređen skup. Za element* $x \in S$ *kažemo da je* ***maksimalan*** *ako* $x \preceq y$ *implicira* $x = y$ *za sve* $y \in S$*. Za element* $x \in S$ *kažemo da je* ***gornja međa*** *podskupa* $T \subseteq S$ *ako za sve* $y \in T$ *vrijedi* $y \preceq x$*.*

Teorem C.0.3. *(Zornova lema) Neka je* $(S, \preceq)$ *neprazan parcijalno uređen skup sa svojstvom da svaki lanac u* S *ima gornju među u* S*. Tada* S *ima barem jedan maksimalan element.*

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, PMF-Matematički odjel, Zagreb (2017.), `https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/np/NP_17_18.pdf`, posjećena 1.9.2022.

[2] M. Fabian, P. Habala, P. Hàjek, V. Montesinos i V. Zizler, *Banach Space Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer Science+Business Media, 2011.

[3] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, 1984.

[4] B. Guljaš, *Normirani prostori i operatori*, PMF-Matematički odjel, Zagreb (2010.), `https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/normirani_prostori.pdf`, posjećena 1.9.2022.

[5] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] W. B. Moors, *An Elementary Proof of James' Characterisation of weak Compactness*, Bulletin of the Australian Mathematical Society **84** (2011.), br. 1, 98–102.

[7] ———, *A gentle introduction to James' weak compactness theorem and beyond*, Methods of Functional Analysis and Topology **25** (2019.), br. 1, 35–83.

[8] J. Munkres, *Topology Second Edition*, Pearson Education, 2014.

[9] R. R. Phelps, *Weak* support points of convex sets in E^**, Israel Journal of Mathematics **2** (1964.), br. 3, 177–182.

[10] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[11] D. A. Salamon i T. Bühler, *Functional analyis*, (2017.), `https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/funcana.pdf`, posjećena 1.9.2022.

[12] StackExchange, *Counterexamples of Arzèla Ascoli theorem for non-obeyed criteria*, `https://math.stackexchange.com/questions/327820/counterexamples-of-arzela-ascoli-theorem-for-non-obeyed-criteria`, posjećena 1.9.2022.

[13] ———, *If X is separable, then the closed unit ball of X' is weak-star metrizable*, `https://math.stackexchange.com/questions/2424021/if-x-is-separable-then-the-closed-unit-ball-of-x-is-weak-star-metrizable`, posjećena 1.9.2022.

[14] A. Søjmark, *James' weak compactness theorem*, (2014.), `http://people.maths.ox.ac.uk/sojmark/jwct.pdf`, posjećena 1.9.2022.

[15] J. van Neerven, *Functional Analysis*, Cambridge University Press, 2022.

[16] R. Whitley, *The Krein-Šmulian theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society **97** (1986.), br. 2, 376–377.

[17] Wikipedia, *Countably compact space*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Countably_compact_space`, posjećena 1.9.2022.

[18] ———, *Riesz–Markov–Kakutani representation theorem*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Riesz-Markov-Kakutani_representation_theorem`, posjećena 1.9.2022.

Sažetak

U uvodnom poglavlju dan je pregled nekih općenitih rezultata iz područja topologije i funkcionalne analize potrebnih u ostatku rada. Poseban naglasak je na kompaktnosti u različitim prostorima od koje su navedene četiri vrste za koje se ispostavlja da su ekvivalentne u metričkim prostorima. U širokoj klasi beskonačnodimenzionalnih normiranih prostora zatvorena jedinična kugla nije kompaktna, što nas motivira na promatranje nekih drugih topologija na tom prostoru.

U drugom poglavlju dokazani su Arzelà-Ascolijev i Fréchet-Kolmogorovljev teorem kojima su dane karakterizacije relativne kompaktnosti u prostorima $C(K)$, odnosno $L^p(\mathbb{R}^n)$. Zatim je promatran suodnos konveksnosti i kompaktnosti, posebno u vidu ekstremnih točaka takvih skupova. Tu smo dokazali poznati Krein-Milmanov teorem o egzistenciji ekstremnih točaka.

U trećem poglavlju su promatrane slabe topologije inducirane familijom preslikavanja i dokazana su brojna svojstva tako dobivenih topologija. Zatim smo proučili posebne slučajeve kada je ta familija jednaka dualu normiranog prostora, odnosno kada je jednaka slici kanonskog ulaganja prostora u njegov bidual, čime redom dobivamo slabu, odnosno slabu* topologiju.

Posljednje poglavlje posvećeno je najvažnijim rezultatima o kompaktnosti u slabim i slabim* topologijama. Prvo smo dokazali Banach-Alaogluov teorem o slaboj* kompaktnosti zatvorene jedinične kugle duala bilo kojeg normiranog prostora. Pokazane su brojne posljedice tog teorema poput činjenice da slaba* topologija duala Banachovog prostora ima Heine-Borelovo svojstvo, kao i Kakutanijev teorem koji daje karakterizaciju refleksivnosti preko slabe kompaktnosti zatvorene jedinične kugle. Nakon toga smo se dotaknuli Eberlein-Šmulianovog teorema kojim smo pokazali ekvivalenciju četiri tipa kompaktnosti u slabim topologijama (koje općenito nisu metrizabilne) te Krein-Šmulianovog teorema kojim smo pokazali da se u Banachovim prostorima svojstvo slabe kompaktnosti ne gubi uzimanjem zatvorene konveksne ljuske. Rad smo završili Jamesovim teoremom kojim je dana zanimljiva karakterizacija refleksivnosti i slabe kompaktnosti pomoću svojstva dostizanja supremuma funkcionala dualnog prostora.

Summary

In the opening chapter we gave an overview of some general results in topology and functional analysis required in the rest of the thesis. The emphasis was on compactness in different settings: we considered four types which turn out to be equivalent in metric spaces. We showed that in the wide class of infinite-dimensional normed spaces closed unit ball is not compact, which motivated us to consider some other topologies on these spaces.

The second chapter is devoted to compactness criteria in some commonly used normed spaces. We began by proving the Arzelà-Ascoli and Fréchet-Kolmogorov theorems that give characterizations of relative compactness in $C(K)$ and $L^p(\mathbb{R}^n)$ spaces, respectively. Then we took a look at the relationship between convexity and compactness, especially with respect to extreme points of such sets. Here we proved the famous Krein-Milman theorem on the existence of extreme points.

In the third chapter we started by defining weak topologies induced by a family of mappings and proved many properties of these topologies. Then we considered special cases when this family is either the dual of a normed space or the image of the space under the canonical embedding into its bidual which gave us the weak and weak* topology.

In the final chapter we covered the main results regarding compactness in weak and weak* topologies. First we proved the Banach-Alaoglu theorem on weak* compactness of the closed unit ball in the dual of any normed space. We showed many consequences of this theorem, such as the fact that the weak* topology has the Heine-Borel property, as well as Kakutani's theorem which gives us a characterization of reflexivity in terms of weak compactness of the closed unit ball. We continued by proving the Eberlein-Šmulian theorem which states that the four types of compactness are equivalent in the weak topology (which isn't generally metrizable) and the Krein-Šmulian theorem which shows that taking closed convex hulls preserves weak compactness in Banach spaces. We concluded the thesis with James' theorem which gives us an interesting criterion for reflexivity and weak compactness by considering the supremum attaining functionals of the dual space.

Životopis

Rođen sam 1. rujna 1998. godine u Požegi. Pohađao sam Osnovnu školu Ivana Benkovića u Dugom Selu nakon koje upisujem XV. gimnaziju u Zagrebu tijekom koje sudjelujem na državnim natjecanjima iz matematike i biologije. Preddiplomski sveučilišni studij *Matematika* na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisujem 2017. godine, a potom 2020. godine upisujem diplomski sveučilišni studij *Matematička statistika* na istom fakultetu. Po završetku oba studija nagrađen sam za izniman uspjeh u studiju. Za vrijeme studiranja obavljao sam ulogu demonstratora iz šest kolegija: Linearna algebra 1, Diferencijalni račun funkcija više varijabli, Teorija skupova, Euklidski prostori, Statistika i Kompleksna analiza, a izvan fakulteta sam redovito držao instrukcije iz matematike za srednju škole i fakultete.