Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Lucija Relić

Asocijacijske sheme

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Asocijacijske sheme predstavljaju objekte od iznimne važnosti u algebarskoj kombinatorici jer povezuju područja kao što su teorija kodiranja, teorija dizajna, algebarska teorija grafova i teorija grupa, a počele su se proučavati u statistici. Kao pojam ih uvode Bose i Shimamoto 1952. godine u [4] pri proučavanju parcijalno balansiranih nepotpunih blokovnih dizajna i njihove primjene u analizi varijance, a više pažnje dobivaju uvođenjem Bose-Mesnerove algebre. Vrlo važan doprinos proučavanju asocijacijskih shema i njihove primjene u teoriji kodiranja dao je Delsarte (vidi [11]) koristeći svojstva asocijacijskih shema pri konstruiranju ograda u linearnom programiranju. U kontekstu teorije dizajna i teorije kodiranja najviše se proučavaju Johnsonova i Hammingova asocijacijska shema s kojima ćemo se i upoznati.

U drugom poglavlju uvest ćemo pojam asocijacijskih shema s d klasa i ilustrirati ih pomoću raznih primjera. Asocijacijska shema je particija potpunog grafa K_n na razapinjuće podgrafove s određenim svojstvima te ćemo ih promatrati ravnopravno kao grafove $G_0, G_1, \ldots, G_d$ i njihove matrice susjedstva $A_0, A_1, \ldots, A_d$. Proučit ćemo Johnsonovu i Hammingovu shemu, izračunati njihove presječne brojeve te dati konkretne primjere dobivene pomoću GAP paketa [1]. Johnsonova i Hammingova shema poseban su primjer asocijacijskih shema konstruiranih pomoću distancijsko regularnih grafova. Osim toga, objasnit ćemo i kako asocijacijske sheme možemo dobiti koristeći konačne grupe, pomoću orbitala obilno tranzitivne grupe permutacija ili klasa konjugacije proizvoljne konačne grupe. Odavde ćemo doći i do generalizacije asocijacijskih shema.

Treće poglavlje bit će posvećeno Bose-Mesnerovoj algebri i svojstvima dualnosti. Pokazat ćemo da matrice asocijacijske sheme s d klasa razapinju vektorski prostor dimenzije $d+1$ koji je ujedno i komutativna matrična algebra, odnosno Bose-Mesnerovu algebru asocijacijske sheme. Pokazat ćemo i da osim matrica asocijacijske sheme, bazu pripadne Bose-Mesnerove algebre čine i idempotentne matrice određene svojstvenim potprostorima matrica sheme. Definirat ćemo parove međusobno dualnih pojmova: svojstvene i dualne svojstvene vrijednosti, matrica svojstvenih vrijednosti i matrica dualnih svojstvenih vrijednosti te presječni brojevi i Kreinovi parametri. Dokazat ćemo njihova osnovna svojstva te u kakvom su međusobnom odnosu.

U posljednjem poglavlju definirat ćemo P- i Q-polinomijalne sheme i proučiti njihova najbitnija svojstva te ćemo ponovno susresti dualnost svojstava. Dokazat ćemo da su P-polinomijalne sheme upravo one koje možemo konstruirati pomoću distancijsko regularnog grafa.

2 Definicija i primjeri asocijacijskih shema

Definicija 2.1. Asocijacijska shema *s d klasa na n-članom skupu X, $n \in \mathbb{N}$, skup je neusmjerenih nepraznih grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa skupom vrhova X takav da vrijedi:*

(a) graf G_0 kao skup bridova ima samo petlje na svim vrhovima iz X,

(b) za različite elemente $x, y \in X$ postoji točno jedan graf G_i koji sadrži brid $\{x, y\}$,

(c) za sve $x, y \in X$ te za sve $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ broj elemenata $z \in X$ takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{y, z\}$ brid u G_j ovisi samo o grafu G_k koji sadrži brid $\{x, y\}$. Taj broj zovemo presječnim brojem sheme *i označavamo $p^k_{i,j}$.*

Za graf G_i kažemo da je i-ta klasa sheme, a za elemente $x, y \in X$ kažemo da su i-asocirani ako je $\{x, y\}$ brid u grafu G_i.

Primijetimo da direktno iz definicije slijedi da su grafovi asocijacijske sheme regularni. Zaista, za $i = j$ te $x = y$ svojstvo (c) daje nam da broj susjeda vrha x u grafu G_i ovisi samo o grafu G_k koji sadrži brid $\{x, x\}$, a to je uvijek graf G_0.

Označimo sa I_n jediničnu matricu reda n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

a sa J_n kvadratnu matricu reda n popunjenu jedinicama

$$J_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Često će iz konteksta biti jasno s kojim dimenzijama računamo pa ćemo ispustiti indeks n i pisati samo I i J.

Definicija 2.2. *Neka je G graf sa skupom vrhova $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i skupom bridova E.* Matrica susjedstva *grafa G je matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ definirana sa*

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{za } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primijetimo da svaki graf možemo poistovjetiti s njegovom matricom susjedstva budući da svaka kvadratna matrica s elementima 0 i 1 jedinstveno određuje graf čija je matrica susjedstva. Obratno, uz zadan poredak vrhova svaki graf jedinstveno određuje svoju matricu susjedstva. Zbog toga definiciju asocijacijske sheme možemo formulirati i jezikom matrica.

Definicija 2.3. Asocijacijska shema *s d klasa je skup matrica* $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ *različitih od nulmatrice dimenzija* $n \times n$ *s elementima* 0 *ili* 1 *koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:*

(a) $A_0 = I$,

(b) $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,

(c) $A_i^t = A_i$, $i = 0, 1, \ldots, d$,

(d) produkt matrica $A_i A_j$ *je linearna kombinacija matrica* $A_0, A_1, \ldots, A_d$ *za sve* i, j.

Propozicija 2.4. *Matrice asocijacijske sheme komutiraju s obzirom na matrično množenje.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz uvjeta (c) i (d) definicije 2.3. Naime,

$$A_i A_j \overset{(d)}{=} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k A_k \qquad \Big/ \ ^t$$

$$A_j A_i \overset{(c)}{=} A_j^t A_i^t = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k A_k^t \overset{(c)}{=} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k A_k = A_i A_j. \qquad \square$$

Uočimo da je matrica susjedstva simetrična ako i samo ako je graf neusmjeren. Također, matrica A_0 očito je matrica susjedstva grafa G_0. Naime, G_0 kao skup bridova ima samo petlje na svim vrhovima, što točno odgovara jedinicama na dijagonali matrice susjedstva i nulama na preostalim mjestima.

Bez smanjenja općenitosti preostale matrice A_k možemo poredati tako da je matrica A_i matrica susjedstva grafa G_i za $i = 0, \ldots, d$. Drugi uvjet u definiciji 2.1 ekvivalentan je zahtjevu da skupovi bridova grafova $G_1, \ldots, G_d$ čine particiju skupa bridova potpunog jednostavnog neusmjerenog grafa s n vrhova. Budući da su elementi matrica A_i jednaki 0 ili 1 jasno je da je particioniranje potpunog grafa ekvivalentno uvjetu $\sum_{i=1}^{d} A_i = J - I$.

Promotrimo još umnožak dviju matrica asocijacijske sheme. Neka su $i, j \in \{0, 1, \ldots, d\}$ te $x, y \in X$. Tada zbog

$$[A_i \cdot A_j]_{x,y} = \sum_{z \in X} [A_i]_{x,z} \cdot [A_j]_{z,y} \tag{1}$$

vidimo da element matrice $A_i \cdot A_j$ na mjestu (x, y) možemo interpretirati kao broj vrhova $z \in X$ koji su sa x susjedni u grafu G_i (na odgovarajućem mjestu u matrici A_i je jedinica), a sa y u grafu G_j. Pretpostavimo li da taj broj ovisi samo o grafu G_k koji sadrži brid $\{x, y\}$, izraz (1) postaje

$$[A_i \cdot A_j]_{x,y} = \sum_{z \in X} [A_i]_{x,z} \cdot [A_j]_{z,y} = p_{i,j}^k.$$

Tako dobivamo relaciju

$$A_i \cdot A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{i,j}^k A_k, \tag{2}$$

za sve i, j, tj. produkt matrica A_i je linearna kombinacija matrica $A_0, \ldots, A_d$ za sve i, j. Obratno, pretpostavimo da umnožak $A_i A_j$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju matrica $A_0, \ldots, A_d$. Elementi umnoška dviju matrica susjedstva očito su cijeli brojevi, pa budući da sve matrice $A_0, \ldots, A_d$ imaju jedinice na međusobno različitim mjestima možemo zaključiti da su i koeficijenti linearne kombinacije cjelobrojni. Sličnim raspisom kao i prije, vidimo da su ti koeficijenti upravo presječni brojevi sheme. Time smo se uvjerili da su navedene definicije asocijacijske sheme ekvivalentne i možemo odabrati koju ćemo koristiti ovisno o prirodi problema koji promatramo.

Asocijacijsku shemu možemo umjesto skupom grafova ili matrica zadati kraće samo jednim obojanim grafom ili pripadnom matricom. Takav graf G je neusmjeren, ima n vrhova, svi vrhovi su povezani bridovima (uključujući i sve petlje) i svaki brid ima jedinstvenu oznaku iz skupa $\{0, 1, \ldots, d\}$ (boju), pri čemu brid ima oznaku 0 ako i samo ako je petlja. Broj trokuta s fiksnom bazom označenom s k i preostalim stranicama označenima i i j ne ovisi o vrhovima baze trokuta, već samo o indeksima i, j, k. U njegovu matricu susjedstva A umjesto elemenata 0 i 1 koji nam govore jesu li vrhovi susjedni ili ne, zapisujemo oznake bridova koje nam govore kojem grafu (ili matrici) asocijacijske sheme određeni brid pripada.[1] Tako će primjerice dijagonala matrice A biti popunjena nulama, a element na mjestu (x, y) bit će jednak oznaci pripadnog brida $\{x, y\}$. Na taj se način asocijacijske sheme reprezentiraju i u GAP paketu *AssociationSchemes* [1].

Primjer 2.5 (Johnsonova shema)**.** *Označimo s* $X = \binom{V}{k}$ *familiju svih* k*-članih podskupova* v*-članog skupa* V*.* Johnsonov graf $J(v, k)$ *je graf kojemu je skup vrhova* X*, a dva su skupa (vrha) susjedna ako se sijeku u* $k-1$ *elemenata. Općenito,* generalizirani Johnsonov graf $J(v, k, i)$ *ima skup vrhova* X*, a skupovi (vrhovi) su susjedni ako se sijeku u* $k-i$ *elemenata. Graf* $J(v, k, k)$

[1] Budući da su svaka dva brida susjedna, "obična" matrica susjedstva je samo $n \times n$ matrica popunjena jedinicama.

poznat je i pod imenom Kneserov graf. *Vidimo da su u njemu skupovi susjedni ako se sijeku u $k - k = 0$ elemenata, odnosno ako su disjunktni.*

Promotrimo matrice susjedstva A_i grafova $J(v, k, i)$ za $i = 0, 1, \ldots, k$ i uvjerimo se da zadovoljavaju svojstva iz definicije 2.3. Budući da je Johnsonov graf neusmjeren, vrijedi $A_i^t = A_i$. Nadalje, u grafu $J(v, k, 0)$ vrhovi su susjedni ako se sijeku u $k - 0 = k$ elemenata. Budući da se za proizvoljan k-člani podskup od V jedino on sam siječe sa sobom u točno k elemenata, zaključujemo da su jedini bridovi u $J(v, k, 0)$ petlje, odnosno vrijedi $A_0 = I$. Lako vidimo i da je $\sum_{i=0}^{k} A_i = J$. Naime, matrice A_i očito imaju jedinice na različitim mjestima jer dva skupa mogu imati točno $k - i$ elemenata u presjeku samo za jedan i. Također, grafovi $J(v, k, i)$ za $i = 1, \ldots, k$ particioniraju potpun graf K_n za $n = \binom{v}{k}$, pa pribrojimo li još zbroju njihovih matrica susjedstva matricu $A_0 = I$, dobivamo matricu popunjenu samo jedinicama.

Kako bismo provjerili i zadnji definicijski uvjet asocijacijske sheme uzmimo proizvoljne $x, y \in X$ te $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Neka je $|x \cap y| = k - l$, odnosno neka je $\{x, y\}$ brid u grafu $J(v, k, l)$. Tada znamo da je u svakom od tih skupova ostalo još l elemenata koji nisu u presjeku. Zanima nas broj skupova (vrhova) $z \in X$ za koje vrijedi

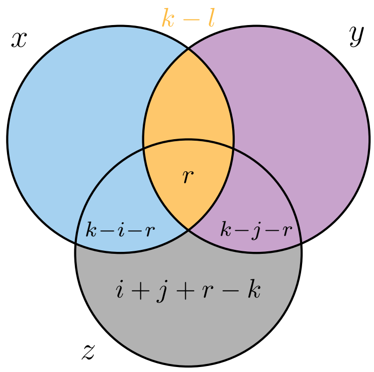
$$|x \cap z| = k - i, \tag{3}$$

$$|y \cap z| = k - j. \tag{4}$$

Budući da nam je od interesa samo broj elemenata u z, gledamo disjunktne slučajeve ovisno o tome koliko elemenata se nalazi u presjeku sva tri promatrana skupa. Neka je $|x \cap y \cap z| =: r \in \{0, 1, \ldots k - l\}$. Tih r elemenata možemo odabrati na $\binom{k-l}{r}$ načina. Kako bismo ispunili uvjete (3) i (4) trebamo odabrati $k - i - r$ elemenata od l elemenata skupa x koji se ne nalaze u presjeku $x \cap y$, odnosno $k - j - r$ elemenata od l preostalih elemenata iz y. Uzmemo li još u obzir da z mora biti k-člani podskup od V, potrebno ga je dopuniti s još $i + j + r - k$ elemenata od $v - (k + l)$ koje imamo na raspolaganju u $V \backslash (x \cup y)$. Sada je jasno i da broj traženih vrhova z ne ovisi o odabiru vrhova x i y, već samo o broju elemenata njihovog presjeka.

Skup generaliziranih Johnsonovih grafova $J(v, k, i)$ za $i = 0, 1, \ldots, k$, odnosno njihovih matrica susjedstva, čini asocijacijsku shemu s k klasa poznatu kao Johnsonova shema. *Prethodnim razmatranjem izveli smo i formulu za presječne brojeve Johnsonove sheme:*

$$p_{i,j}^{l} = \sum_{r=0}^{k-l} \binom{k-l}{r} \binom{l}{k-i-r} \binom{l}{k-j-r} \binom{v-k-l}{i+j+r-k}.$$

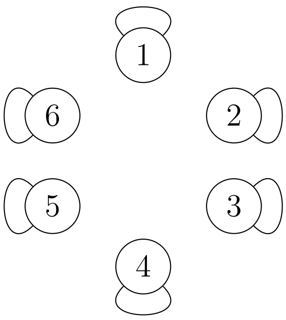


Slika 1: računanje presječnih brojeva Johnsonove sheme

Pogledajmo i Johnsonovu shemu za neke konkretne parametre, primjerice neka je $V = \{a, b, c, d\}$ *i* $k = 2$. *Tada je*

$$X = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

skup vrhova Johnsonovog grafa $J(4, 2)$. *Označimo skupove familije* X *redom brojevima* 1-6 *i prikažimo grafove* $J(4, 2, i)$ *za* $i = 0, 1, 2$ *uz pripadne matrice susjedstva.*

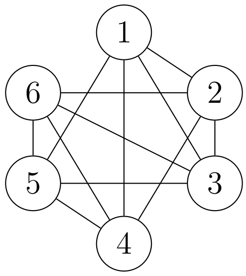


$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika 2: Johnsonov graf $J(4, 2, 0)$ i pripadna matrica susjedstva A_0

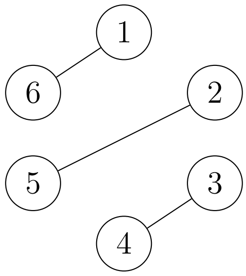
Graf $J(4, 2, 0)$ *sadrži samo petlje budući da se svaki dvočlani podskup skupa* V *jedino sa sobom siječe u točno* 2 *elementa. Zbog toga je i njegova matrica susjedstva jednaka* I_6.

Sa slika 3 i 4 vidimo da su Johnsonovi grafovi $J(4, 2, 1)$ *i* $J(4, 2, 2)$ *komplementarni što odgovara uvjetu (b) iz definicije 2.1. Također, vidimo da su sve matrice susjedstva simetrične te da u sumi daju* J_6. *Direktnim množe-*



$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Slika 3: Johnsonov graf $J(4,2,1)$ i pripadna matrica susjedstva A_1



$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Slika 4: Johnsonov graf $J(4,2,2)$ i pripadna matrica susjedstva A_2

njem možemo provjeriti i da vrijedi

$$\begin{aligned} A_0 \cdot A_0 &= 1 \cdot A_0 \\ A_0 \cdot A_1 &= 1 \cdot A_1 \\ A_0 \cdot A_2 &= 1 \cdot A_2 \\ A_1 \cdot A_1 &= 4 \cdot A_0 + 2 \cdot A_1 + 4 \cdot A_2 \\ A_1 \cdot A_2 &= 1 \cdot A_1 \\ A_2 \cdot A_2 &= 1 \cdot A_0. \end{aligned}$$

Reprezentacija promatrane Johnsonove sheme jednom 6×6 *matricom kao u GAP paketu [1] je*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.6 (Hammingova shema)**.** *Neka je X skup svih riječi duljine k nad alfabetom veličine q za zadane k, q.* Hammingova udaljenost $d(x, y)$ *riječi x i y definirana je kao broj indeksa r takvih da je $x_r \neq y_r$. Lako se provjeri da je Hammingova udaljenost metrika (vidi [18, Propozicija 9.3]).*

Neka je graf G_i sa skupom vrhova X, $|X| = q^k$, takav da su dva vrha susjedna ako i samo ako je njihova Hammingova udaljenost jednaka i, za $i = 0, 1, \ldots, k$. Budući da je Hammingova udaljenost metrika, ovako definirani grafovi bit će neusmjereni (riječi x i y su na udaljenosti r ako i samo ako su y i x na udaljenosti r). Također, jasno je da su bridovi grafa G_0 petlje na svim vrhovima jer je svaka riječ jedino sama sa sobom na udaljenosti 0, kao i da za svake dvije različite riječi x i y postoji jedinstveni prirodan broj r takav da je $d(x, y) = r$, odnosno da graf G_r sadrži brid $\{x, y\}$. Uzmimo još proizvoljne vrhove (riječi) x i y te $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Neka je Hammingova udaljenost riječi x i y jednaka l, odnosno neka se razlikuju na točno l indeksa (bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to zadnjih l mjesta). Prebrojimo riječi z koje su na udaljenosti i od x te na udaljenosti j od y. Neka je r broj indeksa u prvih $k - l$ takvih da se z razlikuje od x i od y. Budući da se na tim mjestima x i y podudaraju, tih r mjesta možemo odabrati na $\binom{k-l}{r}$ načina, a elemente za ta mjesta u riječi z na $(q-1)^r$ načina. Još trebamo izgraditi z tako da u zadnjih l mjesta točno $i - r$ bude različito od x te $j - r$ različito od y. Na zadnjih l mjesta x i y se razlikuju pa imamo 3 mogućnosti:

1. *elementi riječi z razlikuju se od elemenata na odgovarajućim mjestima riječi x i jednaki su elementima na odgovarajućim mjestima riječi y,*

2. *elementi riječi z jednaki su elementima na odgovarajućim mjestima riječi x i razlikuju se od elemenata na odgovarajućim mjestima riječi y,*

3. *elementi riječi z razlikuju i od odgovarajućih elemenata riječi x i riječi y (elementi na tim mjestima u sve tri riječi su međusobno različiti).*

Parametar r može poprimiti vrijednosti između 0 i $k - l$ uljučivo, a uz fiksan r broj indeksa za svaku od navedene 3 mogućnosti jedinstveno je određen. Uzmemo li u obzir željene udaljenosti riječi z od x i y dobivamo tablicu 1 sa potrebnim brojevima mjesta za sve spomenute mogućnosti.

	$x_s = y_s$ $z_s = x_s$ $z_s = y_s$	$x_s = y_s$ $z_s \neq x_s$ $z_s \neq y_s$	$x_s \neq y_s$ $z_s = x_s$ $z_s \neq y_s$	$x_s \neq y_s$ $z_s \neq x_s$ $z_s = y_s$	$x_s \neq y_s$ $z_s \neq x_s$ $z_s \neq y_s$
br. indeksa	$k - l - r$	r	$l + r - i$	$l + r - j$	$i + j - l - 2r$

Tablica 1: broj indeksa s za sve mogućnosti

Od l mjesta na kojima se x i y razlikuju možemo odabrati $i - r$ takvih da se na njima razlikuju z i x te od tih $i - r$ trebamo odabrati $l + r - j$ na kojima će se elementi u riječi z podudarati s elementima riječi y. Još nam preostaje $i + j - l - 2r$ mjesta na kojima se sve tri riječi razlikuju pa imamo

$(q-2)^{i+j-l-2r}$ opcija za odabir pripadnih elemenata riječi z. Tako dolazimo do izraza za presječne brojeve Hammingove sheme koji ovisi o promatranim udaljenostima između riječi, ali ne i o samim riječima x i y:

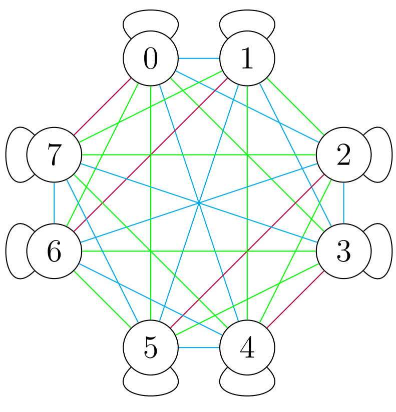
$$p_{i,j}^{l} = \sum_{r=0}^{k-l} \binom{k-l}{r} \cdot (q-1)^r \cdot \binom{l}{i-r} \cdot \binom{i-r}{l+r-j} \cdot (q-2)^{i+j-l-2r}.$$

Sada je jasno da skup grafova $G_0, G_1, \ldots, G_k$ čini asocijacijsku shemu s k klasa koju zovemo Hammingovom shemom i označavamo $H(k,q)$.

Uzmimo na primjer $q=2$ i $k=3$ te promotrimo odgovarajuću Hammingovu shemu $H(3,2)$, uz skup $\{0,1\}$ kao alfabet. Shemu ćemo reprezentirati obojanim grafom i pripadnom matricom. Vrhovi sheme $H(3,2)$ su riječi duljine 3 nad odabranim alfabetom, odnosno

$$X = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

Uočimo da svaki vrh možemo shvatiti kao binarni zapis brojeva $0, \ldots, 7$. Da bismo u potpunosti odredili asocijacijsku shemu potrebno je još grafu sa skupom vrhova X dodijeliti oznake bridova. Primijetimo da je najveća moguća Hammingova udaljenost vrhova jednaka 3 (vrhovi 000 i 111, 001 i 110, 010 i 101 te 100 i 011) jer je to najveći broj indeksa u kojima se dvije riječi mogu razlikovati. Stoga će Hammingova shema $H(3,2)$ imati 3 klase, odnosno elementi matrice bit će iz skupa $\{0,1,2,3\}$. Zbog jednostavnosti, različite oznake bridova vizualizirat ćemo na slici 5 različitim bojama na grafu (crno za 0, plavo 1, zeleno 2 i crveno za 3).



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Slika 5: Hammingova shema $H(3,2)$ reprezentirana pomoću obojanog grafa i pripadne matrice

Prisjetimo se, udaljenost između dva vrha grafa G definiramo kao duljinu najkraćeg puta između tih vrhova, a promjer grafa, u oznaci $\mathrm{diam}(G)$, kao najveću udaljenost vrhova u grafu. Za regularan graf u kojemu za svaka dva vrha x, y broj vrhova z na udaljenosti i od x i na udaljenosti j od y ovisi samo o i, j te udaljenosti k između vrhova x i y kažemo da je *distancijsko regularan graf*. Najjednostavniji primjeri distancijsko regularnih grafova su potpun graf K_n, potpun bipartitan graf $K_{n,n}$ i n-ciklus C_n (poligon s n vrhova), za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$. Grafovi koji odgovaraju Platonovim tijelima također su distancijsko regularni.

Vidimo da je definicijski uvjet distancijsko regularnog grafa vrlo sličan uvjetu (c) definicije 2.1. Zaista, pomoću povezanog distancijsko regularnog grafa možemo generirati asocijacijsku shemu tako da su dva vrha i-asocirana ako je njihova udaljenost u početnom grafu jednaka i. Johnsonova i Hammingova shema zapravo su poseban primjer takvih asocijacijskih shema. Naime, Johnsonov graf $J(n, k)$ i Hammingov graf $H(k, q)$ su distancijsko regularni pa iz njih možemo generirati preostale grafove pripadajuće Johnsonove, odnosno Hammingove sheme. Uzmimo primjerice Johnsonov graf $J(n, k, 1)$ za neke $k, n \in \mathbb{N}$ i njegove proizvoljne vrhove (k-člane skupove) x, y koji su udaljeni za i. To znači da je najkraći put od x do y duljine i, tj. postoji $i-1$ različitih vrhova v_j (različitih i od x i y) takvih da je niz vrhova $x, v_1, \ldots, v_{i-1}, y$ jedan takav put duljine i. Uzmimo proizvoljan vrh v_j u nizu. Sa svojim prethodnikom u nizu ima u presjeku $k-1$ elemenata, kao i sa svojim sljedbenikom. Možemo zaključiti da tada njegov prethodnik i sljedbenik u presjeku imaju $k-2$ elemenata budući da su svi vrhovi u nizu zapravo različiti k-člani podskupovi n-članog skupa. Induktivno vidimo da tada x i y u presjeku imaju $k-i$ elemenata, odnosno stavimo li brid između njih u i-ti razapinjući podgraf potpunog grafa s $\binom{n}{k}$ vrhova zaista ćemo dobiti dobro definiranu asocijacijsku shemu — Johnsonovu shemu.

Posebna klasa distancijsko regularnih grafova su jako regularni grafovi. Kažemo da je graf s n vrhova *jako regularan* s parametrima (n, k, λ, μ) ako postoje $k, \lambda, \mu \in \mathbb{N}_0$ takvi da je svaki vrh stupnja k, svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a μ zajedničkih susjeda ako nisu susjedni. Poznati primjer jako regularnog grafa (pa ujedno i distancijsko regularnog grafa) je Petersenov graf. Primijetimo da je dijametar jako regularnog grafa G (za $\mu \neq 0$) jednak 2.

Propozicija 2.7. *Neka je $A_0 = I$ jedinična matrica reda n te A_1 i A_2 simetrične matrice reda n s elementima 0 i 1 takve da vrijedi $I + A_1 + A_2 = J$. Tada skup $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2\}$ tvori asocijacijsku shemu s 2 klase ako i samo ako su A_1 i A_2 matrice susjedstva međusobno komplementarnih jako regularnih grafova.*

Dokaz. Pretpostavimo da su A_1 i A_2 matrice susjedstva međusobno komplementarnih jako regularnih grafova G_1 i G_2 redom, pri čemu je graf G_1 jako regularan s parametrima (n, k, λ, μ). Prva tri svojstva iz definicije 2.3 očito su zadovoljena pa preostaje provjeriti da je produkt A_iA_j linearna kombinacija matrica iz $\mathcal{A}$ za sve i, j. Budući da je $A_0 = I$ dovoljno je uvjet provjeriti za produkte A_1^2, A_2^2, A_1A_2 i A_2A_1.

Promotrimo za početak elemente na dijagonali matrice A_1^2. Svaki takav element jednak je broju susjeda odgovarajućeg vrha, a budući da je G_1 regularan, svi elementi dijagonale jednaki su k. Nadalje, neka su x i y proizvoljni vrhovi koji su susjedni u grafu G_1. Element $[A_1^2]_{x,y}$ odgovara broju zajedničkih susjeda vrhova x i y u G_1, pa zbog svojstva jake regularnosti znamo da ne ovisi o odabranim vrhovima i jednak je λ. Konačno, neka su x i y vrhovi koji nisu susjedni u G_1, odnosno susjedni su u G_2. Element $[A_1^2]_{x,y}$ tada je jednak broju zajedničkih susjeda vrhova x i y u grafu G_1 i opet zbog svojstva jake regularnosti ne ovisi o odabranim vrhovima, te je jednak μ. Iz navedenog sada zaključujemo da vrijedi

$$A_1^2 = kI + \lambda A_1 + \mu A_2.$$

Analogno možemo provjeriti da vrijedi

$$A_2^2 = (n - k - 1)I + (n - 2k + \lambda)A_1 + (n - 2 - 2k + \mu)A_2$$

jer je graf G_2 jako regularan s parametrima $(n, n - k - 1, n - 2 - 2k + \mu, n - 2k + \lambda)$.

Primijetimo da je $A_2 = J - I - A_1$ te da vrijedi $A_1J = JA_1 = kJ$ pa iz toga dobivamo

$$A_1A_2 = A_1J - A_1 - A_1^2 = JA_1 - A_1 - A_1^2 = A_2A_1,$$

što je očito linearna kombinacija matrica iz $\mathcal{A}$ po prethodno pokazanom.

Obratno, neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, A_2\}$ asocijacijska shema s 2 klase te G_1 i G_2 grafovi koji odgovaraju matricama A_1 i A_2 redom. Tada vrijedi

$$A_1^2 = p_{1,1}^0 I + p_{1,1}^1 A_1 + p_{1,1}^2 A_2,$$

pa slično kao i prije promatranjem elemenata matrice A_1^2 odvojeno na dijagonali, na mjestima koja odgovaraju vrhovima susjednima u G_1 i onima koja odgovaraju vrhovima koji nisu susjedni u G_1 možemo zaključiti da je graf G_1 jako regularan s parametrima $(n, p_{1,1}^0, p_{1,1}^1, p_{1,1}^2)$. Posljedično, i graf G_2 je jako regularan te su G_1 i G_2 komplementarni zbog svojstva $A_1 + A_2 = J - I$. □

Asocijacijske sheme možemo konstruirati i pomoću konačnih grupa. Neka je X neki n-člani skup i Γ grupa permutacija na X. Za grupu permutacija Γ kažemo da je *tranzitivna* ako za proizvoljne elemente $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da vrijedi $\gamma x = y$. Grupa Γ je *obilno tranzitivna* ako za proizvoljne $x, y \in X$ postoji permutacija $\gamma \in \Gamma$ takva da je $\gamma x = y$ i $\gamma y = x$. Očito je svaka obilno tranzitivna grupa ujedno i tranzitivna. Za proizvoljan element $x \in X$ definiramo njegovu *orbitu* kao skup $\{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}$. Budući da su za relaciju ekvivalencije

$$x \sim y \iff (\exists \gamma \in \Gamma)\ y = \gamma x$$

na skupu X klase ekvivalencije orbite, sve orbite elemenata skupa X pod djelovanjem grupe permutacija Γ particioniraju skup X.

Permutacijska grupa Γ skupa X ujedno djeluje i na Kartezijevom produktu $X \times X$ uz

$$\gamma(x, y) = (\gamma x, \gamma y).$$

Orbite grupe permutacija Γ pri djelovanju na $X \times X$ nazivamo *orbitalama*. Lako se vidi da je Γ tranzitivna ako i samo ako je skup $\{(x, x) \mid x \in X\}$, odnosno *dijagonala* skupa $X \times X$, orbitala od Γ. U tom slučaju elemente preostalih orbitala možemo shvatiti kao bridove grafova na skupu X, općenito usmjerenih, te tako svaka orbitala određuje jedan graf.

Propozicija 2.8. *Neka je Γ obilno tranzitivna grupa permutacija na skupu X. Tada orbitale od Γ na $X \times X$ određuju grafove koji čine asocijacijsku shemu.*

Dokaz. Označimo sa $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_d$ orbitale od Γ na $X \times X$, pri čemu je Ω_0 dijagonala skupa $X \times X$. Tada očito graf određen sa Ω_0 kao bridove sadrži samo sve petlje.

Neka je Ω_i proizvoljna orbitala različita od Ω_0 i $(x, y) \in \Omega_i$. Budući da Γ djeluje obilno tranzitivno na $X \times X$, postoji $\gamma \in \Gamma$ takav da je $y = \gamma x$ i $x = \gamma y$. Tada je

$$(y, x) = (\gamma x, \gamma y) = \gamma(x, y) \in \Omega_i$$

pa vidimo da su svi dobiveni grafovi neusmjereni.

Preostalo nam je pokazati svojstva (b) i (c) definicije 2.1. Svojstvo (b) očito vrijedi zbog toga što orbitale uvijek particioniraju $X \times X$. Konačno, za proizvoljne $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ te $\gamma \in \Gamma$ imamo

$$\begin{aligned} |\{z \mid (x, z) \in \Omega_i, (z, y) \in \Omega_j\}| &= |\{\gamma z \mid (\gamma x, \gamma z) \in \Omega_i, (\gamma z, \gamma y) \in \Omega_j\}| \\ &= |\{z \mid (\gamma x, z) \in \Omega_i, (z, \gamma y) \in \Omega_j\}|, \end{aligned}$$

što očito ovisi samo o orbitali u kojoj se nalazi (x, y) pa su zadovoljena sva svojstva definicije 2.1. $\square$

Obilno tranzitivnu grupu permutacija možemo jednostavno konstruirati polazeći od proizvoljne grupe H. Uzmimo permutacije ξ i $\tau_{(a,b)}$ skupa H, za proizvoljne $a, b \in H$, definirane s

$$\begin{aligned} \xi h &= h^{-1}, \quad h \in H \\ \tau_{(a,b)} h &= ahb, \quad h \in H. \end{aligned}$$

Neka su $x, y \in H$ proizvoljni. Budući da vrijedi

$$\xi \tau_{(x^{-1}, y^{-1})}(x, y) = \xi(x^{-1}xy^{-1}, x^{-1}yy^{-1}) = \xi(y^{-1}, x^{-1}) = (y, x),$$

vidimo da je grupa generirana skupom $\{\xi\} \cup \{\tau_{(a,b)} \mid a, b \in H\}$ obilno tranzitivna grupa permutacija skupa H.

Odustanemo li od zahtjeva obilne tranzitivnosti, tj. ako je Γ proizvoljna grupa permutacija, orbitale od Γ particioniraju skup $X \times X$ i tako tvore koherentnu konfiguraciju, generalizaciju asocijacijskih shema.

Definicija 2.9. Koherentna konfiguracija *na X je skup matrica $\{A_1, \ldots, A_s\}$ dimenzija $n \times n$ s elementima 0 i 1 koji zadovoljava sljedeće uvjete:*

(a) $\sum_{i \in I_0} A_i = I$, *za neki podskup indeksa $I_0 \subseteq \{1, \ldots, s\}$,*

(b) $\sum_{i=1}^{s} A_i = J$,

(c) za svaku matricu A_i postoji matrica $A_{i'}$ tako da vrijedi $A_i^t = A_{i'}$,

(d) produkt matrica $A_i A_j$ je linearna kombinacija matrica $A_1, \ldots, A_s$ za sve i, j (koeficijente nazivamo presječnim brojevima).

Za koherentnu konfiguraciju kažemo da je homogena *ako je skup I_0 jednočlan,* komutativna *ako za sve indekse i, j vrijedi $A_i A_j = A_j A_i$, te* simetrična *ako je $A_i = A_i^t$ za sve $i \in \{1, \ldots, s\}$.*

Istim argumentima kao i u slučaju asocijacijskih shema možemo pokazati da je svaka simetrična koherentna konfiguracija nužno komutativna.

Propozicija 2.10. *Svaka neprazna komutativna koherentna konfiguracija je homogena.*

Dokaz. Neka je $\{A_1, \ldots, A_s\}$ neprazna komutativna koherentna konfiguracija. Iskoristimo li komutativnost i svojstvo (b) za proizvoljnu matricu A_i, $i \in \{1, \ldots, s\}$ dobivamo

$$A_i J = A_i \sum_{j=1}^{s} A_j = \sum_{j=1}^{s} A_j A_i.$$

Pretpostavimo da skup indeksa I_0 nije jednočlan, tj. da postoji A_i, $i \in I_0$ takav da je $A_i \neq I$. Tada je A_i dijagonalna matrica koja na dijagonali ima barem jedan element jednak 0. Neka je I_1 skup indeksa takvih da matrica A_i ima jedinice na dijagonalnim mjestima $(j, j), j \in I_1$. Tada je umnožak $A_i J$ jednak matrici koja retke indeksirane skupom I_1 ima ispunjene jedinicama, a preostale nulama, dok je umnožak JA_i jednak matrici koja stupce indeksirane skupom I_1 ima ispunjene jedinicama i preostale nulama (preciznije, $A_i J = (JA_i)^t$). Budući da u $A_i J$ postoji barem jedan redak ispunjen nulama, dobivamo kontradikciju s pretpostavkom komutativnosti. □

Vidimo da su svojstva koherentnih konfiguracija zajedno sa svojstvima simetričnosti i homogenosti upravo definicijska svojstva asocijacijskih shema pa zaključujemo da su simetrične koherentne konfiguracije ustvari asocijacijske sheme. U slučaju tranzitivne grupe permutacija Γ skupa X dijagonala od $X \times X$ je jedna orbitala, a preostale definiraju bridove usmjerenih grafova na skupu vrhova X. Dobivena koherentna konfiguracija nije nužno komutativna niti simetrična, ali očito je homogena[2]. Za komutativnost koherentne konfiguracije dovoljna je komutativnost početne grupe permutacija Γ, ali nije i nužna.

Primjer 2.11. *Pomoću GAP paketa [1] lako možemo naći komutativnu koherentnu konfiguraciju dobivenu pomoću tranzitivne grupe koja nije komutativna koristeći sljedeću tranzitivnu grupu G:*

```
G:=TransitiveGroup(8,8); # 2D_8(8)=[D(4)]2
GeneratorsOfGroup(G);
# [(1,2,3,4,5,6,7,8), (1,3)(2,6)(5,7)]
```

Nadalje, pomoću naredbi

```
cc:=HomogeneousCoherentConfigurationByOrbitals(G);
Display(cc);
# 4-class homogeneous coherent configuration of order 8.
# Schurian: true
IsCommutative(G); # false
IsCommutative(cc); # true
Print(cc);
```

vidimo da G određuje homogenu koherentnu konfiguraciju sa 4 klase. Rezultat `Schurian: true` *upravo nam govori da je koherentna konfiguracija dobivena pomoću orbitala tranzitivne grupe, što općenito ne vrijedi. Također, grupa*

[2]Tvrdnja slijedi direktno iz činjenice da je dijagonala od $X \times X$ jedna orbitala.

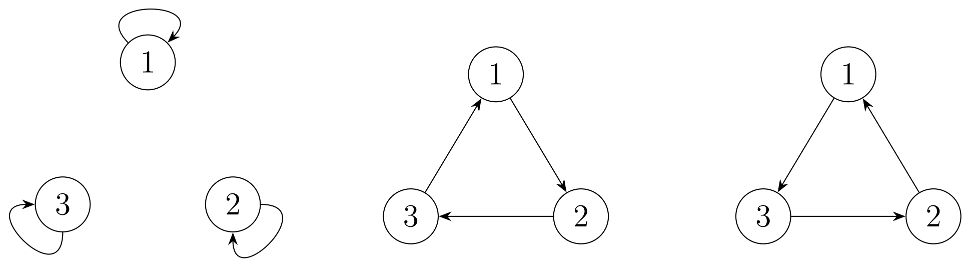
G nije komutativna, ali dobivena koherentna konfiguracija jest, što lako možemo i provjeriti budući da znamo generatore grupe. Dobivena komutativna koherentna konfiguracija predstavljena je matricom

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.12. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ te neka je Γ ciklička grupa permutacija na skupu X, odnosno $\Gamma = \{(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2)\}$. Grupa Γ je komutativna te se lako vidi i da je djelovanje grupe Γ na X tranzitivno, ali ne i obilno tranzitivno. Orbitale grupe Γ pri djelovanju na $X \times X$, ujedno i skupovi bridova grafova G_0, G_1 i G_2, redom su dane sa*

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \\ E_1 &= \{(1,2), (2,3), (3,1)\} \\ E_2 &= \{(1,3), (2,1), (3,2)\}, \end{aligned}$$

a pripadni grafovi prikazani su na slici 6.



Slika 6: redom slijeva nadesno G_0, G_1, G_2

Pripadna matrica dana je s

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

te je očito dobivena koherentna konfiguracija komutativna, ali nije simetrična.

Još jedan način konstruiranja asocijacijske sheme pomoću konačnih grupa koristi klase konjugacije. Neka je H proizvoljna konačna grupa. Kažemo da su elementi grupe $a, b \in H$ *konjugirani* (uz oznaku $a \sim b$) ako postoji element $g \in H$ takav da vrijedi $b = g^{-1}ag$. Relacija $\sim$ očito je relacija ekvivalencije pa njene klase, *klase konjugacije*, particioniraju H. Klasa konjugacije elementa $g \in H$ skup je svih elemenata $h \in H$ koji su konjugirani elementu g. Slično možemo definirati i *proširenu klasu konjugacije* elementa $g \in H$ kao skup svih $h \in H$ koji su konjugirani elementu g ili g^{-1}, odnosno skup

$$C_g = \{h^{-1}gh \mid h \in H\} \cup \{h^{-1}g^{-1}h \mid h \in H\}.$$

Lako se vidi da su i ovo klase relacije ekvivalencije pa sve proširene klase konjugacije particioniraju H. Označimo sa $C_0, C_1, \ldots, C_s$ sve proširene klase konjugacije grupe H, pri čemu je C_0 klasa koja sadrži neutralni element grupe (očito će neutralni element biti jedini element u toj klasi). Definirajmo grafove $G_0, G_1 \ldots, G_s$ kojima su vrhovi elementi grupe H, a proizvoljni vrhovi a i b susjedni su u grafu G_i ako je $ab^{-1} \in C_i$.

Kad bismo promatrali "obične" klase konjugacije ovako definirani grafovi ne bi nužno bili neusmjereni. Budući da smo krenuli od proširenih klasa konjugacije, grafovi su neusmjereni. Naime, pretpostavimo da graf G_i sadrži (usmjereni) brid (a, b). Tada je $ab^{-1} = h^{-1}gh$ za neke $g \in G_i$ i $h \in \Gamma$, tj. ab^{-1} je element proširene klase konjugacije od g. Primjenom inverza na obje strane jednakosti dobivamo $ba^{-1} = h^{-1}g^{-1}h$, odnosno ba^{-1} je također element iste proširene klase konjugacije.

Propozicija 2.13. *Grafovi $G_0, G_1 \ldots, G_s$ određeni proširenim klasama konjugacije $C_0, C_1, \ldots, C_s$ grupe H tvore asocijacijsku shemu.*

Dokaz. Za dokazivanje ove tvrdnje iskoristit ćemo već opisanu konstrukciju obilno tranzitivne grupe permutacija Γ polazeći od grupe H, tj. grupu permutacija generiranu s $\{\xi\} \cup \{\tau_{(a,b)} \mid a, b \in H\}$. Svaki graf G_i, odnosno proširenu klasu konjugacije C_i, povezat ćemo s jednom orbitalom od Γ pri djelovanju na $H \times H$.

Neka su $x, y \in H$ proizvoljni elementi grupe H. Dovoljno nam je dokazati jednakost skupova

$$\{\gamma(x, y) \mid \gamma \in \Gamma\} = \{(a, b) \in H \times H \mid ab^{-1} \sim xy^{-1} \text{ ili } ab^{-1} \sim yx^{-1}\}.$$

Uzmimo (a, b) iz skupa s desne strane jednakosti koju želimo pokazati. Neka su prvo $a, b \in H$ takvi da je $ab^{-1} \sim xy^{-1}$. Tada postoji $h \in H$ takav da je $hab^{-1}h^{-1} = xy^{-1}$. Znamo da postoji $u \in H$ takav da je $x = hau$, pa iz toga zaključujemo i $y = hbu$. Djelovanjem sa $\tau_{(h,u)} \in \Gamma$ na (a, b) dobivamo

$$\tau_{(h,u)}(a, b) = (hau, hbu) = (x, y)$$

te vidimo da je (a, b) element orbitale od (x, y) pod djelovanjem obilno tranzitivne grupe permutacija Γ.

Neka su sada $a, b \in H$ takvi da je $ab^{-1} \sim yx^{-1}$. Slično kao i prije, postoji $h \in H$ takav da je $hab^{-1}h^{-1} = yx^{-1}$ te $u \in H$ takav da je $y = hau$ i $x = hbu$. Sada definiramo $\gamma = \tau_{(y,x)}\xi\tau_{(h,u)}$ te zbog

$$\begin{aligned}\gamma(a, b) &= \tau_{(y,x)}\xi\tau_{(h,u)}(a, b)\\ &= \tau_{(y,x)}\xi(hau, hbu) = \tau_{(y,x)}\xi(y, x)\\ &= \tau_{(y,x)}(y^{-1}, x^{-1})\\ &= (yy^{-1}x, yx^{-1}x) = (x, y)\end{aligned}$$

ponovno vidimo da je (a, b) element orbitale od (x, y).

Obratno, za $\gamma(x, y)$ proizvoljan element orbitale od (x, y) želimo pokazati da je $\gamma x(\gamma y)^{-1} \sim xy^{-1}$ ili $\gamma x(\gamma y)^{-1} \sim yx^{-1}$. Tu tvrdnju dovoljno je provjeriti za generatore ξ i $\tau_{(a,b)}$, $a, b \in H$, grupe Γ. Uzmemo li $\gamma = \xi$, dobivamo

$$\xi x(\xi y)^{-1} = x^{-1}y \overset{x\in H}{\sim} x(x^{-1}y)x^{-1} = yx^{-1}.$$

Neka je još $\gamma = \tau_{(a,b)}$ za proizvoljne $a, b \in H$. Tada imamo

$$\tau_{(a,b)}x(\tau_{(a,b)}y)^{-1} = axb(ayb)^{-1} = axbb^{-1}y^{-1}a^{-1} \overset{a\in H}{\sim} xy^{-1},$$

čime smo pokazali i obratnu inkluziju. Također, sad možemo zaključiti i da je broj proširenih klasa konjugacije $s + 1$ jednak broju orbitala grupe Γ.

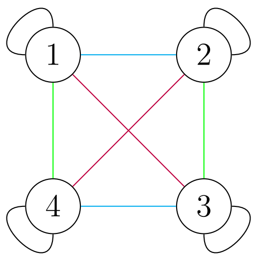
Vidimo da smo uspostavili bijekciju između grafova određenih proširenim klasama konjugacije grupe H i orbitala pod djelovanjem obilno tranzitivne grupe Γ konstruirane iz H. Već smo pokazali da orbitale obilno tranzitivne grupe permutacija određuju grafove koji tvore asocijacijsku shemu, pa smo time pokazali i tvrdnju propozicije. □

Primjer 2.14. *Promotrimo grupu $\Gamma = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ reda 4. Budući da je komutativna i vrijedi $-g = g$ za sve $g \in \Gamma$, za proizvoljan $g \in \Gamma$ imamo $C_g = \{g\}$, odnosno sve proširene klase konjugacije su jednočlane. Zato će asocijacijska shema koju određuju proširene klase konjugacije imati 4 klase. Navedeno možemo provjeriti i dobiti traženu asocijacijsku shemu izvedemo li sljedeći kod u GAP paketu [1]:*

```
G:=SmallGroup(4,2);
CC:=GroupCoherentConfiguration(G);
IsMetric(CC);
IsSymmetricCoherentConfiguration(CC);
Print(CC);
```

```
Display(CC);
#3-class association scheme of order 4
# Description: Group coherent configuration
# Symmetric: true
# Commutative: true
# Metric: false
```

Obojani graf i pripadna matrica dobivene asocijacijske sheme prikazani su na slici 7. Lako vidimo da ova asocijacijska shema ne dolazi od distancijsko regularnog grafa. Naime, iako je svaki od grafova (osim G_0) distancijsko regularan, niti jedan od njih nije povezan pa ne može biti "generator" te asocijacijske sheme.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Slika 7: asocijacijska shema dobivena od klasa konjugacije grupe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ reprezentirana pomoću obojanog grafa i pripadne matrice

Promotrimo za kraj i jedan geometrijski primjer.

Primjer 2.15 (Parcijalne geometrije)**.** Parcijalna geometrija *s parametrima* (r, k, t) *je incidencijska struktura* (P, L, I)*, pri čemu elemente skupa* P *zovemo* točkama*, elemente skupa* L pravcima*, te za* pIl*,* $p \in P, l \in L$*, kažemo da točka* p *leži na pravcu* l*, odnosno da pravac* l *prolazi točkom* p*. Incidencijska struktura* (P, L, I) *zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *kroz svake dvije različite točke prolazi najviše jedan pravac,*

2. *svaka točka leži na točno* r *pravaca,*

3. *svaki pravac prolazi kroz točno* k *točaka,*

4. *kroz točku* $p \in P$ *koja ne leži na pravcu* $l \in L$ *prolazi točno* $t \geq 1$ *pravaca koji pritom sijeku* l*, za proizvoljan pravac* $l \in L$*.*

Sada definiramo graf G čiji je skup vrhova P, a dva vrha su susjedna ako leže na istom pravcu. Broj točaka u tom grafu jednak je

$$v = k + k \cdot \frac{(k-1)(r-1)}{t}.$$

Fiksirajmo neki pravac l. Na njemu leži k točaka i kroz svaku od tih točaka promatramo preostale pravce i točke koje leže na njima — takvih točaka je $(k-1)(r-1)$. Budući da tako točke koje ne leže na l prebrojavamo točno t puta, dolazimo do izraza za ukupni broj točaka v. Primijetimo da je graf G regularan; svaki njegov vrh je stupnja $r(k-1)$ jer na svakom od r pravaca koji prolazi kroz neku točku leži još $k-1$ točaka. Uzmimo sada dva susjedna vrha, odnosno proizvoljne točke x i y koje leže na istom pravcu l. Osim x i y na pravcu l leži još $k-2$ točaka i te točke su njihovi zajednički susjedi. Za svaki od $r-1$ pravaca kroz x koji ne prolaze točkom y imamo točno $t-1$ pravaca koji ga sijeku, a prolaze kroz y. Tako zaključujemo da zajedničkih susjeda od x i y koji ne leže na pravcu l ima još $(r-1)(t-1)$. Konačno, za dvije točke koje ne leže na istom pravcu (pripadni vrhovi nisu susjedni) postoji točno rt zajedničkih susjeda. Time smo pokazali da je graf G jako regularan s parametrima

$$\left(k + k \cdot \frac{(k-1)(r-1)}{t}, r(k-1), (k-2) + (r-1)(t-1), rt\right),$$

pa po prethodnim razmatranjima vidimo da iz parcijalne geometrije možemo konstruirati asocijacijsku shemu s dvije klase.

3 Bose-Mesnerova algebra

Označimo sa $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ asocijacijsku shemu s d klasa te promotrimo realan vektorski prostor razapet matricama skupa $\mathcal{A}$, odnosno prostor svih linearnih kombinacija $\mathrm{span}(\mathcal{A})$.

Skup matrica $\mathcal{A}$ je linearno nezavisan. Naime, krenemo li od uvjeta iz definicije linearne nezavisnosti i raspišemo li po komponentama dobivamo:

$$\sum_{k=0}^{d} \lambda_k A_k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{d} \lambda_k (A_k)_{i,j} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Budući da su elementi matrice A_k jednaki 0 ili 1 za svaki $k = 0, 1, \dots, d$ te zbog svojstva (b) definicije 2.3 zaključujemo da je za sve $i, j = 1, \dots, n$ točno jedan element $[A_k]_{i,j}$ jednak 1, a preostali su jednaki 0. Također, jasno je da za svaki $k = 0, 1, \dots d$ postoji barem jedan element $[A_k]_{i,j}$ jednak 1. Iz toga slijedi da je $\lambda_k = 0$ za sve $k = 0, 1, \dots, d$, odnosno skup $\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ je linearno nezavisan. Iz toga možemo zaključiti da je dimenzija prostora $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ jednaka $d+1$, a skup $\mathcal{A}$ jedna njegova baza.

Iz svojstva (d) definicije 2.3 vidimo da je $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ zatvoren na matrično množenje, odnosno vektorski prostor $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ je komutativna matrična algebra koju nazivamo *Bose-Mesnerovom algebrom* asocijacijske sheme $\mathcal{A}$. Pokazat ćemo da je Bose-Mesnerova algebra asocijacijske sheme zatvorena i na još jednu vrstu množenja matrica.

Definicija 3.1. *Neka su A i B matrice tipa $m \times n$.* Schurov produkt *matrica A i B, u oznaci $A \circ B$, definiran je sa*

$$[A \circ B]_{i,j} = [A]_{i,j} \cdot [B]_{i,j}, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Schurov produkt često se naziva i *Hadamardovim produktom.* Budući da je $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$, $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ sadrži neutralni element (jedinicu) s obzirom na Schurov produkt. Primijetimo da za $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$A_i \circ A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{5}$$

odnosno skup $\mathcal{A} \cup \{0\}$ je zatvoren na Schurov produkt. Posljedično, $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ je također zatvoren na Schurov produkt jer je $\mathcal{A}$ njegova baza:

$$\left(\sum_{i=0}^{d} \alpha_i A_i\right) \circ \left(\sum_{j=0}^{d} \beta_j A_j\right) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} \alpha_i \beta_j (A_i \circ A_j) \stackrel{(5)}{=} \sum_{i=0}^{d} \alpha_i \beta_i A_i \in \mathcal{A}.$$

Dakle, Bose-Mesnerova algebra asocijacijske sheme $\mathcal{A}$ je vektorski prostor span(A) zatvoren na matrično množenje i Schurov produkt te sadrži pripadne neutralne elemente, redom I i J, odnosno komutativna algebra s jedinicom u odnosu na matrično množenje i Schurov produkt. Iz (5) slijedi da su matrice A_i, $i = 0, \ldots, d$, idempotentne u odnosu na Schurov produkt pa se stoga nazivaju i *Schurovim idempotentama asocijacijske sheme.* Također, Schurove idempotente sheme su u parovima međusobno ortogonalne s obzirom na Schurov produkt. Vrijedi i obrat navedenih tvrdnji.

Teorem 3.2. *Neka je M konačnodimenzionalan vektorski prostor realnih simetričnih matrica koji sadrži matrice I i J te neka je M zatvoren na matrično množenje i Schurov produkt. Tada postoji jedinstvena baza za M koju čine Schurove idempotente u parovima međusobno ortogonalne s obzirom na Schurov produkt i matrice te baze tvore asocijacijsku shemu.*

Dokaz. Može se pronaći u [6, Poglavlje 2.6]. □

Na skupu svih matrica definiran je i skalarni produkt sa

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^t B).$$

Restrikcijom na skup span($\mathcal{A}$) dobivamo $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB)$, za $A, B \in \operatorname{span}(\mathcal{A})$, odnosno span($\mathcal{A}$) je ujedno i unitaran prostor. Primijetimo da za matrice $A, B \in \operatorname{span}(\mathcal{A})$ vrijedi

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{i,k} = \operatorname{sum}(A \circ B), \qquad (6)$$

uz oznaku sum(M) za zbroj svih elemenata matrice M. Zbog toga korištenjem Schurovog produkta skalarni produkt možemo izraziti i kao

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{sum}(A \circ B), \qquad A, B \in \operatorname{span}(\mathcal{A}).$$

Do sada smo vidjeli da su Schurove idempotente, u parovima međusobno ortogonalne s obzirom na Schurov produkt, jedna baza za span($\mathcal{A}$). Od interesa nam je i još jedna baza za span($\mathcal{A}$) koja se sastoji od matrica koje su idempotentne i u parovima međusobno ortogonalne s obzirom na matrično množenje.

Neka je A matrična reprezentacija simetričnog operatora u ortonormiranoj bazi. Za simetričnu matricu A i njenu svojstvenu vrijednost λ označimo sa U_λ matricu čiji stupci čine ortonormiranu bazu za svojstveni potprostor pripadne svojstvene vrijednosti λ. Primijetimo da U_λ nije jedinstveno određena budući da pripadni svojstveni potprostor može imati više ortonormiranih baza. Promotrimo matricu $E_\lambda := U_\lambda U_\lambda^t$ za proizvoljan U_λ, odnosno djelovanje pripadnog operatora. Neka je v_λ svojstveni vektor pripadne svojstvene vrijednosti λ. Budući da je dovoljno promatrati djelovanje operatora na bazi, možemo pretpostaviti da je v_λ vektor baze svojstvenog potprostora, odnosno i-ti stupac matrice U_λ. Tada imamo

$$U_\lambda U_\lambda^t v_\lambda = U e_i = v_\lambda.$$

Neka je sada x vektor okomit na promatrani svojstveni potprostor. Tada vrijedi $U_\lambda^t x = 0$, odnosno $E_\lambda x = 0$. Zaključujemo da E_λ djeluje kao ortogonalna projekcija na svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, pa je u promatranoj fiksiranoj bazi prostora $\mathbb{R}^n$ njegov matrični prikaz $U_\lambda U_\lambda^t$ jedinstven. Zbog toga matrica E_λ ne ovisi o odabiru matrice U_λ.

Za matrice $E_\lambda = U_\lambda U_\lambda^t$ kažemo da su *glavne idempotente* matrice A. Budući da su svojstveni potprostori normalne matrice međusobno ortogonalni (pa to posebno vrijedi i za simetrične matrice) te da svaka matrica E_λ reprezentira ortogonalnu projekciju na svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, zaključujemo da su matrice E_λ međusobno ortogonalne.

Teorem 3.3 (Spektralna dekompozicija)**.** *Neka je A simetrična matrica reda n s glavnim idempotentama E_λ, $\lambda \in \sigma(A)$. Tada vrijedi:*

(a) $E_\lambda^2 = E_\lambda$ *i* $E_\lambda E_\mu = 0$ *za* $\lambda \neq \mu$,

(b) $AE_\lambda = \lambda E_\lambda$,

(c) $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda = I$,

(d) ako je $f(x)$ racionalna funkcija definirana u svim svojstvenim vrijednostima od A, vrijedi $f(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) E_\lambda$.

Dokaz. (a) Neka je $\lambda \in \sigma(A)$ svojstvena vrijednost matrice A te E_λ pripadna glavna idempotenta, $E_\lambda = U_\lambda U_\lambda^t$. Budući da stupci matrice U_λ čine ortonormiranu bazu pripadnog svojstvenog potprostora, vrijedi $U_\lambda^t U_\lambda = I_{m(\lambda)}$, pri čemu je $m(\lambda)$ kratnost svojstvene vrijednosti λ. Raspisom

$$E_\lambda^2 = U_\lambda U_\lambda^t U_\lambda U_\lambda^t = U_\lambda I_{m(\lambda)} U_\lambda^t = U_\lambda U_\lambda^t = E_\lambda$$

zaključujemo da su matrice E_λ idempotentne.

Neka su sada $\lambda, \mu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \mu$, različite svojstvene vrijednosti matrice A. Matrica A je simetrična (pa posljedično i normalna) te su stoga njeni svojstveni potprostori međusobno ortogonalni. Zato su i vektori baza svojstvenih potprostora pridruženih svojstvenim vrijednostima λ i μ međusobno ortogonalni pa zaključujemo

$$E_\lambda E_\mu = U_\lambda U_\lambda^t U_\mu U_\mu^t = U_\lambda \cdot 0 \cdot U_\mu^t = 0.$$

(b) Neka je ponovno $\lambda \in \sigma(A)$ te $E_\lambda = U_\lambda U_\lambda^t$ pripadna glavna idempotenta. Stupci matrice U_λ su svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti λ pa vrijedi $AU_\lambda = \lambda U_\lambda$. Stoga imamo

$$AE_\lambda = AU_\lambda U_\lambda^t = \lambda U_\lambda U_\lambda^t = \lambda E_\lambda.$$

(c) Označimo $S := \sum_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda$. Tvrdimo da vrijedi $S = I$. Očito je matrica S simetrična. Također, primijetimo da vrijedi

$$S^2 = \sum_{\lambda,\mu \in \sigma(A)} E_\lambda E_\mu \overset{(a)}{=} \sum_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda^2 \overset{(a)}{=} \sum_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda = S,$$

odnosno matrica S je idempotentna te zbog toga njene svojstvene vrijednosti mogu biti jednake jedino 0 i 1. Koristeći činjenicu da je E_λ ortogonalna projekcija na pripadni svojstveni potprostor te je zato trag matrice E_λ jednak dimenziji svojstvenog potprostora, možemo izračunati trag matrice S:

$$\mathrm{tr}(S) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{tr}(E_\lambda) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} m(\lambda) = n.$$

Sada zaključujemo da je jedina svojstvena vrijednost od S jednaka 1, a budući da je matrica I jedina regularna idempotentna matrica, vrijedi $S = I$.

(d) Neka je $r \in \mathbb{N}$ prirodan broj. Pomnožimo li relaciju iz pokazanog svojstva (c) s A^r dobivamo

$$A^r = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} A^r E_\lambda \overset{(b)}{=} \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^r E_\lambda,$$

iz čega uzimajući linearne kombinacije zaključujemo da za proizvoljan polinom p vrijedi

$$p(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} p(\lambda) E_\lambda. \tag{7}$$

Neka je q polinom za koji vrijedi $q(\lambda) \neq 0$, za svaku svojstvenu vrijednost $\lambda \in \sigma(A)$. Primijetimo da je tada $q(A)$ regularna. Ponovno koristimo svojstvo (c) te relaciju (7) za polinome da dobijemo

$$
\begin{aligned}
I = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} E_\lambda &= \sum_{\lambda\in\sigma(A)} q(\lambda)^{-1} q(\lambda) E_\lambda \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{\lambda\in\sigma(A)} q(\lambda)^{-1} q(A) E_\lambda \\
q(A)q(A)^{-1} &= q(A) \sum_{\lambda\in\sigma(A)} q(\lambda)^{-1} E_\lambda \\
q(A)^{-1} &= \sum_{\lambda\in\sigma(A)} q(\lambda)^{-1} E_\lambda. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Za kraj, množenjem relacija (7) i (8)

$$
\begin{aligned}
p(A)q(A)^{-1} &= \left(\sum_{\lambda\in\sigma(A)} p(\lambda)E_\lambda\right)\left(\sum_{\mu\in\sigma(A)} q(\lambda)^{-1}\right) \\
&= \sum_{\lambda,\mu\in\sigma(A)} p(\lambda)q(\mu)^{-1} E_\lambda E_\mu \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{\lambda\in\sigma(A)} p(\lambda)q(\lambda)^{-1} E_\lambda
\end{aligned}
$$

dobivamo tvrdnju koju smo trebali pokazati.

□

Napomena 3.4. *Neka je $\lambda \in \sigma(A)$ svojstvena vrijednost simetrične matrice A te neka je p_λ polinom definiran s*

$$
p_\lambda(x) = \frac{\prod_{\mu\in\sigma(A)}(x-\mu)}{x-\lambda}.
$$

Očito je $p_\lambda(\lambda) \neq 0$ i $p_\lambda(\mu) = 0$ za $\mu \in \sigma(A)\backslash\{\lambda\}$. Koristeći relaciju (7) dobivamo

$$
p_\lambda(A) = \sum_{\mu\in\sigma(A)} p_\lambda(\mu)E_\mu = p_\lambda(\lambda)E_\lambda
$$

te vidimo da je matrica E_λ polinom u A. Tako smo se ponovno uvjerili i da E_λ ne ovisi o odabiru matrice U_λ, odnosno vektora ortonormirane baze pripadnog svojstvenog potprostora.

Teorem 3.5. *Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa čije su matrice dimenzija $n \times n$. Tada postoje s obzirom na matrično množenje idempotentne i u parovima ortogonalne matrice $E_0, E_1, \ldots, E_d$ te brojevi $p_i(j) \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi:*

(a) $\sum_{j=0}^{d} E_j = I$,

(b) $A_i E_j = p_i(j) E_j$,

(c) $E_0 = \frac{1}{n} J$,

(d) $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$ *je baza za* $\mathrm{span}(\mathcal{A})$.

Dokaz. Budući da su matrice $A_i \in \mathcal{A}$ simetrične, po teoremu 3.3 za svaku A_i, $i = 0, 1, \ldots, d$, postoje međusobno ortogonalne idempotentne matrice Y_{ij} pridružene svojstvenim vrijednostima $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ matrice A_i takve da vrijedi:

$$A_i Y_{ij} = \lambda_{ij} Y_{ij}, \tag{9}$$

$$\sum_{\lambda_{ij} \in \sigma(A_i)} Y_{ij} = I. \tag{10}$$

Također, po napomeni 3.4 znamo da je svaki Y_{ij} polinom u A_i. Zbog toga i činjenice da matrice iz $\mathcal{A}$ međusobno komutiraju s obzirom na matrično množenje, Y_{ij} komutiraju s obzirom na matrično množenje međusobno i s matricama iz $\mathcal{A}$. Zato možemo zaključiti i da je proizvoljan konačan produkt matrica Y_{ij} također idempotentan.

Pomnožimo sada relacije (10) za sve $i = 1, \ldots, d$:

$$(Y_{11} + \ldots + Y_{1k_1})(Y_{21} + \ldots + Y_{2k_2}) \cdots (Y_{d1} + \ldots + Y_{dk_d}) = I,$$

pri čemu je k_i broj različitih svojstvenih vrijednosti matrice A_i. Kada izmnožimo sve zagrade s lijeve strane jednakosti dobit ćemo $k_1 k_2 \cdots k_d$ pribrojnika oblika $\prod_{i=1}^{d} Y_{ij_i}$, za Y_{ij_i} jednu od idempotenata u spektralnoj dekompoziciji od A_i. Dobivenu relaciju možemo zapisati kao

$$\sum_j E_j = I, \tag{11}$$

a budući da dobiveni pribrojnici E_j, svi oblika $\prod_{i=1}^{d} Y_{ij_i}$, mogu biti nulmatrice, zanima nas koliko ih "preživi".

Matrice E_j su idempotentne budući da je svaki E_j konačan produkt matrica Y_{ij}. Sve matrice Y_{ij} su međusobno komutativne, a za fiksiran i su Y_{ij} međusobno ortogonalne, pa vidimo da su i matrice E_j u parovima ortogonalne s obzirom na matrično množenje. Također, iz svojstva (9) vidimo da postoje realne konstante $p_i(j)$ takve da vrijedi

$$\begin{aligned} A_i E_j &= A_i \prod_{l=1}^{d} Y_{lk_l} \\ &= A_i Y_{ik_i} \prod_{l \neq i} Y_{lk_l} \\ &= p_i(j) Y_{ik_i} \prod_{l \neq i} Y_{lk_l} \\ &= p_i(j) E_j. \end{aligned}$$

Iz toga direktno slijedi i

$$A_i = A_i I = \sum_j A_i E_j = \sum_j p_i(j) E_j,$$

odnosno pokazali smo da je svaki $A_i \in \mathcal{A}$ linearna kombinacija matrica E_j (za $A_0 = I$ to slijedi iz (11)) pa matrice E_j razapinju prostor $\mathrm{span}(\mathcal{A})$. Konačno, iz međusobne ortogonalnosti matrica E_j zaključujemo da su linearno nezavisne pa čine bazu za $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ te ih imamo točno $d+1$.

Preostalo je pokazati svojstvo (c). Već otprije znamo da je $J \in \mathrm{span}(\mathcal{A})$ pa stoga J komutira sa svim baznim matricama E_j s obzirom na matrično množenje. Dobivamo

$$JE_j = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i E_i E_j = \alpha_j E_j$$

što implicira da je α_j jednak sumi elemenata u svakom stupcu od E_j. Također, vidimo da je α_j svojstvena vrijednost od J, a svojstvene vrijednosti matrice J su 0 (kratnosti $n-1$) i n (kratnosti 1). Zato zaključujemo da je $\alpha_j = 0$ ili $\alpha_j = n$ i za jednu od matrica E_j vrijedi $E_j = \frac{1}{n}J$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $E_0 = \frac{1}{n}J$. $\square$

Matrice E_j, $j = 0, 1, \ldots, d$, nazivamo *glavnim idempotentama* asocijacijske sheme $\mathcal{A}$.

Promotrimo li svojstvo (b) u teoremu 3.5, vidimo da stupci od E_j, $j = 0, 1, \ldots, d$, određuju svojstvene potprostore matrica A_i, $i = 0, 1, \ldots, d$, pri čemu su pripadne svojstvene vrijednosti jednake $p_i(j)$. Stoga brojeve $p_i(j)$ nazivamo *svojstvenim vrijednostima* asocijacijske sheme $\mathcal{A}$.

Uočimo da pomoću nekih osnovnih svojstava asocijacijskih shema možemo odrediti dio svojstvenih vrijednosti. Označimo sa $n_0, n_1, \ldots, n_d$ redom stupnjeve grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$, odnosno grafova određenih redom matricama susjedstva $A_0, A_1, \ldots, A_d$.

Lema 3.6. *Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa čije su matrice dimenzija $n \times n$ te neka su $p_i(j)$, $i, j = 0, 1, \ldots, d$, svojstvene vrijednosti od $\mathcal{A}$. Tada vrijedi:*

(a) $p_0(j) = 1$, $\forall j = 0, 1, \ldots, d$

(b) $p_i(0) = n_i$, $\forall i = 0, 1, \ldots, d$.

Dokaz. Budući da je $A_0 = I$ imamo $E_j = IE_j = A_0E_j = p_0(j)E_j$, pa vidimo da vrijedi $p_0(j) = 1$ za svaki $j = 0, 1, \ldots, d$.

Pomoću $E_0 = \frac{1}{n}J$ možemo pronaći svojstvene vrijednosti $p_i(0)$ za $i = 0, 1, \ldots, d$. Za $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} A_iE_0 &= p_i(0)E_0 \\ A_i\frac{1}{n}J &= p_i(0)\frac{1}{n}J \\ A_iJ &= p_i(0)J, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $p_i(0)$ jednak broju jedinica u svakom retku matrice A_i, odnosno stupnju pridruženog grafa G_i. $\square$

Brojeve $p_i(0)$ nazivamo i *stupnjevima* asocijacijske sheme.

Pokazali smo da su glavne idempotente asocijacijske sheme zaista idempotentne pa su zbog toga svojstvene vrijednosti svake matrice E_j sve jednake 0 ili 1. Također, trag $\mathrm{tr}(E_j)$ jednak je rangu matrice E_j koji je pak jednak dimenziji pripadnog svojstvenog potprostora. Označimo sa $m_0, m_1, \ldots, m_d$ dimenzije svojstvenih potporstora koje određuju redom $E_0, E_1, \ldots, E_d$. Kažemo da su brojevi $m_0, m_1, \ldots, m_d$ *kratnosti* asocijacijske sheme $\mathcal{A}$.

Teorem 3.5 daje nam novu bazu za $\mathrm{span}(\mathcal{A})$ i znamo da svaku matricu A_i možemo zapisati pomoću svojstvenih vrijednosti sheme:

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} p_i(j)E_j. \tag{12}$$

Analogno, budući da je $\mathcal{A}$ baza za $\mathrm{span}(\mathcal{A})$, postoje realni brojevi $q_i(j)$ takvi da je

$$E_i = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{d} q_i(j)A_j. \tag{13}$$

Brojeve $q_i(j)$ nazivamo *dualnim svojstvenim vrijednostima* asocijacijske sheme.

Lema 3.7. *Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa čije su matrice dimenzija $n \times n$ te neka su $q_i(j)$, $i, j = 0, 1, \ldots, d$, dualne svojstvene vrijednosti od $\mathcal{A}$. Tada vrijedi:*

(a) $q_0(j) = 1$, $\forall j = 0, 1, \ldots, d$

(b) $q_i(0) = m_i$, $\forall i = 0, 1, \ldots, d$.

Dokaz. Uočimo da za proizvoljne $i, j = 0, 1, \ldots, d$ vrijedi

$$E_i \circ A_j = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_i(k) A_k \right) \circ A_j = \frac{1}{n} q_i(j) A_j \tag{14}$$

pa postavljanjem $i = 0$ te korištenjem svojstva $E_0 = \frac{1}{n} J$ dobivamo

$$\frac{1}{n} J \circ A_j = \frac{1}{n} q_0(j) A_j.$$

Budući da je J neutralan element za Schurov produkt, zaključujemo da je $q_0(j) = 1$.

Drugi dio također možemo pokazati korištenjem relacije (14). Promotrimo li trag matrica s obje strane jednakosti za $j = 0$ te iskoristimo li da je $A_0 = I$, dobivamo

$$\begin{aligned} E_i \circ I &= \frac{1}{n} q_i(0) I \qquad \Big/ \, \mathrm{tr} \\ \mathrm{tr}(E_i) &= \frac{1}{n} q_i(0) n, \end{aligned}$$

što pokazuje da vrijedi $q_i(0) = m_i$. □

Prirodno je pitanje u kakvoj su vezi svojstvene i dualne svojstvene vrijednosti asocijacijske sheme.

Definicija 3.8. *Neka je P matrica dimenzija $(d+1) \times (d+1)$ za koju vrijedi $[P]_{i,j} = p_j(i)$ te neka je Q matrica dimenzija $(d+1) \times (d+1)$ za koju vrijedi $[Q]_{i,j} = q_j(i)$.*[3] *Matricu P nazivamo* matricom svojstvenih vrijednosti, *a matricu Q* matricom dualnih svojstvenih vrijednosti *asocijacijske sheme.*

Propozicija 3.9. *Za matricu svojstvenih vrijednosti P i dualnih svojstvenih vrijednosti Q vrijedi $PQ = QP = nI$.*

Dokaz. Uvrstimo li izraz (12) u (13) dobivamo

$$E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) A_j = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) \sum_{k=0}^{d} p_j(k) E_k,$$

[3]Budući da je $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ i $j \in \{0, 1, \ldots, d\}$, retke i stupce matrica P i Q indeksirat ćemo po $\{0, 1, \ldots, d\}$.

te gornji izraz pomnožimo s E_l, $l = 0, 1, \ldots, d$. Za $l = i$ imamo

$$E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) p_j(i) E_i,$$

a za $l \neq i$

$$0 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} q_i(j) p_j(l) E_l.$$

Dobivene izraze možemo ekvivalentno zapisati kao

$$n\delta_{il} = \sum_{j=0}^{d} q_i(j) p_j(l) = \sum_{j=0}^{d} [P]_{l,j} [Q]_{j,i},$$

odnosno matrično

$$PQ = nI. \tag{15}$$

Slično možemo pokazati i $QP = nI$ tako da uvrstimo (13) u (12). Time dobivamo izraz

$$A_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} p_i(j) \sum_{k=0}^{d} q_j(k) A_k$$

pomoću kojeg primjenom Schurovog produkta s A_l, $l = 0, 1, \ldots, d$, analogno dobivamo

$$n\delta_{il} = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) q_j(l) = \sum_{j=0}^{d} [Q]_{l,j} [P]_{j,i}.$$

□

Prethodna propozicija pokazuje nam i da su dualne svojstvene vrijednosti ustvari određene svojstvenim vrijednostima.

Označimo sa Δ_n dijagonalnu matricu koja na dijagonali ima stupnjeve grafova n_i, a sa Δ_m dijagonalnu matricu koja na dijagonali ima dimenzije svojstvenih potprostora m_i, odnosno

$$\Delta_n = \operatorname{diag}(n_0, n_1, \ldots, n_d)$$
$$\Delta_m = \operatorname{diag}(m_0, m_1, \ldots, m_d).$$

Propozicija 3.10. *Vrijedi* $P^t \Delta_m = \Delta_n Q$.

Dokaz. Pokazat ćemo jednakost odgovarajućih elemenata umnožaka s obje strane jednakosti koju dokazujemo:

$$\begin{aligned}
[P^t\Delta_m]_{i,j} &= \sum_{k=0}^{d}[P^t]_{i,k}[\Delta_m]_{k,j} \\
&= \sum_{k=0}^{d}[P]_{k,i}[\Delta_m]_{k,j} \\
&= \sum_{k=0}^{d} p_i(k)[\Delta_m]_{k,j} \\
&= p_i(j)m_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Delta_n Q]_{i,j} &= \sum_{k=0}^{d}[\Delta_n]_{i,k}[Q]_{k,j} \\
&= \sum_{k=0}^{d}[\Delta_n]_{i,k}q_j(k) \\
&= n_i q_j(i).
\end{aligned}$$

Dakle, dovoljno nam je pokazati $p_i(j)m_j = n_i q_j(i)$.

Iz teorema 3.5 znamo $A_iE_j = p_i(j)E_j$ pa uzimanjem traga dobivamo

$$p_i(j)\operatorname{tr}(E_j) = \operatorname{tr}(A_iE_j) \overset{(6)}{=} \operatorname{sum}(A_i \circ E_j) \overset{(14)}{=} \frac{1}{n}q_j(i)\operatorname{sum}(A_i). \tag{16}$$

Također, vrijedi $nn_i = \operatorname{sum}(A_i)$ jer je svaki A_i matrica susjedstva regularnog grafa G_i stupnja n_i. Sada možemo zaključiti

$$p_i(j)m_j = \frac{1}{n}q_j(i)nn_i,$$

iz čega direktno slijedi $p_i(j)m_j = n_i q_j(i)$, odnosno

$$P^t\Delta_m = \Delta_n Q. \tag{17}$$

□

Sada lako možemo i eksplicitno izračunati dualne svojstvene vrijednosti asocijacijske sheme pod pretpostavkom da su nam poznate svojstvene vrijednosti te matrice Δ_m i Δ_n. Matrice Δ_m i Δ_n očito su regularne pa vrijedi $Q = \Delta_n^{-1}P^t\Delta_m$.

Pomoću svojstvenih vrijednosti sheme također možemo naći i kratnosti m_i. Naime, množenjem jednakosti (17) slijeva redom sa Δ_n^{-1} i P, te zdesna sa Δ_m^{-1} dobivamo

$$P\Delta_n^{-1}P^t = PQ\Delta_m^{-1} \overset{(15)}{=} n\Delta_m^{-1}.$$

Kako bismo dobili kratnosti m_i dovoljno je usporediti dijagonalne elemente:

$$\sum_{k=0}^{d} p_k(i)^2 \frac{1}{n_k} = \frac{n}{m_i}.$$

Prisjetimo se, tijekom dokazivanja ekvivalencije definicija 2.1 i 2.3 pokazali smo da se presječni brojevi $p_{i,j}^k$ asocijacijske sheme javljaju kao koeficijenti uz bazne matrice A_k kod zapisivanja produkta $A_i A_j$:

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{i,j}^k A_k. \tag{18}$$

Također, zbog toga smo se uvjerili i da su koeficijenti $p_{i,j}^k$ nenegativni cijeli brojevi.

Slično dobivamo još jednu familiju parametara koji su dualni presječnim brojevima. S obzirom na to da je $\operatorname{span}(\mathcal{A})$ zatvoren na Schurov produkt vrijedi $E_i \circ E_j \in \operatorname{span}(\mathcal{A})$, pa postoje koeficijenti $q_{i,j}^k$ takvi da vrijedi

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{i,j}^k E_k. \tag{19}$$

Brojeve $q_{i,j}^k$ nazivamo *Kreinovim parametrima* asocijacijske sheme.

Ovaj dualni par familija parametara možemo povezati s prethodno promatranim svojstvenim vrijednostima sheme.

Propozicija 3.11. *Za presječne brojeve $p_{i,j}^k$ i Kreinove parametre $q_{i,j}^k$ vrijedi*

$$p_{i,j}^k = \frac{1}{\operatorname{sum} A_k} \sum_{r=0}^{d} p_i(r) p_j(r) p_k(r) m_r, \tag{20}$$

$$q_{i,j}^k = n m_i m_j \sum_{r=0}^{d} \frac{1}{(\operatorname{sum} A_r)^2} p_r(i) p_r(j) p_r(k). \tag{21}$$

Dokaz. Primijenimo li Schurov produkt sa A_k na jednakost (18) dobit ćemo $(A_i A_j) \circ A_k = p_{i,j}^k A_k$ zbog svojstva (5). Nadalje, promotrimo sumu svih elemenata dobivenih matrica:

$$p_{i,j}^k \operatorname{sum} A_k = \operatorname{sum}((A_i A_j) \circ A_k) \overset{(6)}{=} \operatorname{tr}(A_i A_j A_k).$$

Svaki A_i možemo zapisati u bazi glavnih idempotenti da dobijemo

$$\begin{aligned} A_i A_j A_k &= \left(\sum_{r=0}^{d} p_i(r) E_r\right) \left(\sum_{s=0}^{d} p_j(s) E_s\right) \left(\sum_{t=0}^{d} p_k(t) E_t\right) \\ &= \sum_{r=0}^{d} p_i(r) p_j(r) p_k(r) E_r. \end{aligned}$$

S obzirom na to da je $\operatorname{tr}(E_i) = m_i$ slijedi (20).

Kako bismo pokazali dualnu relaciju (21) krenut ćemo od dualne jednakosti (19) koju ćemo matrično pomnožiti sa E_k, iskoristiti idempotentnost matrica E_i s obzirom na matrično množenje i promatrati trag:

$$
\begin{aligned}
(E_i \circ E_j)E_k &= \frac{1}{n} q_{i,j}^k E_k \qquad \Big/ \operatorname{tr} \\
\operatorname{sum}(E_i \circ E_j \circ E_k) &= \frac{1}{n} q_{i,j}^k m_k .
\end{aligned} \tag{22}
$$

Matrice E_i možemo zapisati u bazi $\mathcal{A}$ pa imamo

$$
\begin{aligned}
E_i \circ E_j \circ E_k &= \left(\sum_{r=0}^{d} \frac{1}{n} q_i(r) A_r \right) \circ \left(\sum_{s=0}^{d} \frac{1}{n} q_j(s) A_s \right) \circ \left(\sum_{t=0}^{d} \frac{1}{n} q_k(t) A_t \right) \\
&= \sum_{r=0}^{d} \frac{1}{n^3} q_i(r) q_j(r) q_k(r) A_r .
\end{aligned}
$$

Dakle, pokazali smo

$$
q_{i,j}^k = \frac{1}{m_k \cdot n^2} \sum_{r=0}^{d} q_i(r) q_j(r) q_k(r) \operatorname{sum} A_r .
$$

Preostalo je svaku dualnu svojstvenu vrijednost izraziti preko svojstvenih vrijednosti koristeći (16):

$$
\begin{aligned}
q_{i,j}^k &= \frac{n}{\cancel{m_k}} \sum_{r=0}^{d} \frac{1}{\cancel{n^3}} \cdot \frac{p_r(i) m_i \cancel{n}}{\operatorname{sum} A_r} \cdot \frac{p_r(j) m_j \cancel{n}}{\operatorname{sum} A_r} \cdot \frac{p_r(k) \cancel{m_k n}}{\cancel{\operatorname{sum} A_r}} \cdot \cancel{\operatorname{sum} A_r} \\
&= n m_i m_j \sum_{r=0}^{d} \frac{1}{(\operatorname{sum} A_r)^2} p_r(i) p_r(j) p_r(k),
\end{aligned}
$$

što je i trebalo pokazati. □

Napomena 3.12. *Uočimo da su vrijednosti $p_{i,j}^k \operatorname{sum}(A_k)$ i $q_{i,j}^k \operatorname{tr}(E_k)$ invarijantne na permutacije indeksa i, j, k.*

Kreinovi parametri također su nenegativni. Kako bismo to pokazali potrebna nam je nova vrsta množenja matrica.

Definicija 3.13. *Neka je A matrica tipa $m_1 \times n_1$, a B matrica tipa $m_2 \times n_2$.* Kroneckerov produkt *matrica A i B, u oznaci $A \otimes B$, definiran je kao matrica tipa $m_1 m_2 \times n_1 n_2$ dobivena zamjenom svakog elementa a_{ij} matrice A matricom $a_{ij} B$.*

Lema 3.14 (Svojstva Kroneckerovog produkta)**.** *Neka su A, B, C, D proizvoljne realne matrice takve da su sva zbrajanja i množenja matrica dobro definirana te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni realni brojevi. Tada vrijedi:*

(a) $(\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B) = A \otimes (\alpha B)$,

(b) $(A \otimes B)^t = A^t \otimes B^t$,

(c) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$,

(d) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$,

(e) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$,

(f) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$,

(g) $A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$,

(h) $I_m \otimes I_n = I_{mn}$,

(i) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ *za regularne kvadratne matrice A i B.*

Neka je x svojstveni vektor kvadratne matrice A tipa $m \times m$ i y svojstveni vektor kvadratne matrice B tipa $n \times n$. Tada je $x \otimes y$ svojstveni vektor matrice $A \otimes B$.

Dokaz. Dokaz svih tvrdnji može se pronaći u [8]. Za ilustraciju dokažimo svojstvo (f).

Neka je $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{p,q}$, $C \in M_{n,k}$ i $D \in M_{q,r}$, odnosno neka su A i C te B i D ulančane matrice. Tada je $A \otimes B \in M_{mp,nq}$ i $C \otimes D \in M_{nq,kr}$ pa vidimo i da je produkt $(A \otimes B)(C \otimes D) \in M_{mp,kr}$ dobro definiran. Sada imamo

$$(AC) \otimes (BD) = [[AC]_{i,j} BD] = \left[\sum_{l=1}^{n} [A]_{i,l} [C]_{l,j} BD \right] = \left[\sum_{l=1}^{n} ([A]_{i,l} B)([C]_{l,j} D) \right]$$

Izraz $[\sum_{l=1}^{n} ([A]_{i,l} B)([C]_{l,j} D)]$ upravo je jednak ij-tom bloku matrice $(A \otimes B)(C \otimes D)$ iz čega slijedi tražena jednakost. $\square$

Kažemo da je kvadratna matrica B *glavna podmatrica* kvadratne matrice A ako je B dobivena iz A brisanjem redaka i stupaca s istim indeksima, ili ekvivalentno ostavljanjem redaka i stupaca matrice A s istim indeksima. Ako je B dobivena ostavljanjem prvih k redaka i k stupaca matrice A kažemo da je B *vodeća glavna podmatrica* matrice A.

Lema 3.15. *Neka su A i B kvadratne matrice reda n. Tada je matrica $A \circ B$ glavna podmatrica matrice $A \otimes B$.*

Dokaz. Definirajmo skup indeksa $I_1 := \{(k-1)\cdot n+k \mid k = 1, \dots n\}$. Tvrdimo da matricu $A \circ B$ možemo dobiti iz $A \otimes B$ tako da ostavimo retke i stupce s indeksima iz skupa I_1. Promotrimo element matrice $A \otimes B$ na mjestu $((i-1)\cdot n+i, (j-1)\cdot n+j)$. Očito se taj element nalazi u bloku koji je dobiven zamjenom elementa a_{ij} matrice A matricom $a_{ij}B$. Također, budući da je $(i-1)\cdot n+i \equiv i \pmod n$ i $(j-1)\cdot n+j \equiv j \pmod n$, promatrani element dobiven je kao umnožak $[A]_{i,j}\cdot[B]_{i,j}$ što je točno odgovarajući element matrice $A \circ B$. $\square$

Lema 3.16. *Neka je A kvadratna matrica reda n. Tada je A simetrična pozitivno semidefinitna matrica ako i samo ako je svaka njena glavna podmatrica simetrična pozitivno semidefinitna matrica.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A simetrična pozitivno semidefinitna. To po definiciji pozitivne semidefinitnosti znači da za svaki vektor $x \neq 0$ vrijedi $x^tAx \geq 0$. Neka je B proizvoljna glavna podmatrica matrice A. Tada je B očito simetrična jer je dobivena izostavljanjem redaka i stupaca jednakih indeksa. Neka je $x \neq 0$ proizvoljan vektor koji na i-tom mjestu ima 0 ako su i-ti redak i stupac izostavljeni iz matrice A da bismo dobili matricu B. Za takav x očito vrijedi

$$x^tAx = x^tBx \geq 0.$$

Suprotna implikacija trivijalno vrijedi jer je A jedna od svojih glavnih podmatrica. $\square$

Teorem 3.17 (Kreinov uvjet)**.** *Kreinovi parametri $q_{i,j}^k$ asocijacijske sheme su nenegativni.*

Dokaz. Zbog (22) možemo zaključiti da su brojevi $q_{i,j}^k$ svojstvene vrijednosti matrice $E_i \circ E_j$. Budući da je simetrična matrica pozitivno semidefinitna ako i samo ako su joj svojstvene vrijednosti nenegativne, dovoljno je pokazati da je matrica $E_i \circ E_j$ simetrična pozitivno semidefinitna za proizvoljne i, j.

Uočimo da vrijedi

$$(E_i \otimes E_j)^2 \overset{(f)}{=} E_i^2 \otimes E_j^2 = E_i \otimes E_j,$$

odnosno matrica $E_i \otimes E_j$ je idempotentna pa su joj svojstvene vrijednosti jednake 0 ili 1. Također, matrice E_i i E_j su simetrične pa je simetrična i $E_i \otimes E_j$. Zbog svega toga zaključujemo da je $E_i \otimes E_j$ pozitivno semidefinitna. Po prethodne dvije leme slijedi da je matrica $E_i \circ E_j$ glavna podmatrica pozitivno semidefinitne matrice $E_i \otimes E_j$ pa je i ona simetrična pozitivno semidefinitna, što je i trebalo pokazati. $\square$

Pokazali smo blisku vezu i dualna svojstva Schurovih idempotenti A_i i glavnih idempotenti E_i, svojstvenih i dualnih svojstvenih vrijednosti te presječnih brojeva i Kreinovih parametara asocijacijske sheme. Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ asocijacijske sheme takve da su presječni brojevi sheme $\mathcal{A}$ jednaki Kreinovim parametrima sheme $\mathcal{B}$. Tada su i presječni brojevi od $\mathcal{B}$ jednaki Kreinovim parametrima od $\mathcal{A}$ i za takve asocijacijske sheme kažemo da su formalno međusobno dualne.

U primjeru 2.5 definirali smo Johnsonovu shemu i kombinatorno dokazali formulu za njene presječne brojeve. Svojstvene vrijednosti Johnsonove sheme također se mogu izračunati općenito, pa iz toga možemo općenito izračunati i dualne svojstvene vrijednosti, presječne brojeve i Kreinove parametre Johnsonove sheme.

Teorem 3.18. *Za Johnsonovu shemu $J(v,k)$ vrijedi*

$$p_i(j) = \sum_{r=0}^{i} (-1)^{i-r} \binom{k-r}{i-r} \binom{v-k+r-j}{r} \binom{k-j}{r}.$$

Dokaz. Može se pronaći u [16]. $\square$

Primjer 3.19. *Već smo vidjeli da je Johnsonova shema $J(4,2)$ reprezentirana matricom*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pomoću jedonstavnih naredbi

```
J:=JohnsonScheme(4,2);
Display(J);
```

u GAP paketu [1] dobivamo da je $J(4,2)$ asocijacijska shema s 2 klase te da je matrica svojstvenih vrijednosti dana s

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lako možemo provjeriti da je dobivena matrica P u skladu s teoremom 3.18.

Primjerice, za $i = 1$, $j = 2$ teorem 3.18 nam daje

$$\begin{aligned} p_1(2) &= \sum_{r=0}^{1} (-1)^{1-r} \binom{2-r}{1-r} \binom{4-2+r-2}{r} \binom{2-2}{r} \\ &= (-1)^1 \binom{2}{1} \binom{0}{0} \binom{0}{0} + (-1)^0 \binom{1}{0} \binom{1}{1} \binom{0}{1} \\ &= -2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = -2, \end{aligned}$$

što je točno element matrice P na mjestu $(2,1)$, indeksiramo li retke i stupce po $\{0,1,2\}$.

Primjer 3.20. *Za Hammingovu shemu $H(3,2)$ ponovno pomoću GAP paketa [1] i naredbi*

```
H:=HammingScheme(3,2);
Display(H);
```

lako dobivamo matricu svojstvenih vrijednosti

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

4 P- i Q-polinomijalne asocijacijske sheme

Definicija 4.1. *Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa. Kažemo da je asocijacijska shema $\mathcal{A}$* P-polinomijalna *ako matrice A_i možemo numerirati tako da za svaki $i = 0, 1, \ldots, d$ postoji polinom p_i stupnja i za koji je $A_i = p_i(A_1)$.*

U poglavlju 2 definirali smo distancijsko regularne grafove i opisali konstrukciju asocijacijske sheme pomoću distancijsko regularnog grafa. Neka je G distancijsko regularan graf dijametra $d \geq 2$ i A njegova matrica susjedstva te označimo sa $\mathrm{d}(x, y)$ udaljenost vrhova x i y u grafu G. Za matrice susjedstva $A_0 = I, A_1 = A, A_2, \ldots, A_d$ dobivene tako da je $[A_i]_{x,y} = 1$ ako i samo ako je $\mathrm{d}(x, y) = i$ kažemo da su *distancijske matrice* distancijsko regularnog grafa G.

Teorem 4.2. *Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $A_0, A_1, \ldots, A_d$ su distancijske matrice distancijsko regularnog grafa,

(b) za $k > i + j$ je $p^k_{i,j} = p^j_{k,i} = p^j_{i,k} = 0$ te vrijedi $p^{i+j}_{i,j} \neq 0$ za sve i, j,

(c) za $k > i + 1$ je $p^k_{i,1} = p^1_{k,i} = p^1_{i,k} = 0$ te vrijedi $p^{i+1}_{i,1} \neq 0$ za sve i,

(d) $\mathcal{A}$ je P-polinomijalna.

Dokaz. Pokazat ćemo implikacije (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) $\implies$ (d) $\implies$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) Neka su $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ takvi da je $k > i + j$.

Za vrhove x, y koji su susjedni u k-tom grafu asocijacijske sheme vrijedi $\mathrm{d}(x, y) = k$, pa presječni broj $p^k_{i,j}$ označava broj vrhova z koji su u G udaljeni za i od x te za j od y. Budući da je najkraći put između x i y duljine k, ne može postojati niti jedan traženi vrh z za $i + j < k$ jer bi inače postojao put između x i y duljine $i + j$.

Slično, pretpostavimo da za x, y takve da je $\mathrm{d}(x, y) = j$ postoji barem jedan vrh z takav da je $\mathrm{d}(x, z) = k$ i $\mathrm{d}(z, y) = i$. Tada zbog $i + j < k$ postoji put od x do z koji prolazi kroz y i duljina mu je manja od k pa dobivamo kontradikciju, odnosno zaključujemo $p^j_{k,i} = 0$. Zbog simetričnosti je onda i $p^j_{i,k} = 0$.

Kada bi za neke i, j vrijedilo $p^{i+j}_{i,j} = 0$, tada za neke vrhove x, y na udaljenosti $i + j$ ne bi postojao niti jedan vrh z takav da je $\mathrm{d}(x, z) = i$ i $\mathrm{d}(z, y) = j$, što je kontradikcija s pretpostavkom $\mathrm{d}(x, y) = i + j$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Tvrdnja (c) slijedi direktno iz (b) za $j = 1$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Za A_0 i A_1 očito postoje polinomi $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = x$, stupnja 0 i 1 redom, takvi da je $A_0 = p_0(A_1)$ i $A_1 = p_1(A_1)$. Pretpostavimo da za neki k postoje polinomi $p_0, p_1, \ldots, p_k$ takvi da je $A_i = p_i(A_1)$ te da je p_i stupnja i za sve $i \leq k$. Relaciju $A_k = p_k(A_1)$ možemo zapisati kao

$$A_1^k = \tilde{p}_{k-1}(A_1) + \alpha A_k, \tag{23}$$

za neki $\alpha \neq 0$ i $\tilde{p}_{k-1}$ polinom stupnja najviše $k - 1$. Množenjem (23) sa A_1 dobivamo

$$A_1^{k+1} = \tilde{p}_k(A_1) + \alpha A_k A_1$$

za neki polinom $\tilde{p}_k$ stupnja najviše k. Sada možemo iskoristiti (2) da dobijemo

$$A_k A_1 = \sum_{i=0}^{d} p_{k,1}^i A_i,$$

što zbog (c) postaje $A_k A_1 = p_{k,1}^{k-1} A_{k-1} + p_{k,1}^k A_k + p_{k,1}^{k+1} A_{k+1}$, uz $p_{k,1}^{k+1} \neq 0$. Konačno, dobili smo

$$A_1^{k+1} = \tilde{p}_k(A_1) + \alpha p_{k,1}^{k-1} p_{k-1}(A_1) + \alpha p_{k,1}^k p_k(A_1) + \alpha p_{k,1}^{k+1} A_{k+1},$$

pa budući da je koeficijent $\alpha p_{k,1}^{k+1}$ uz A_{k+1} različit od nule, zaključujemo da postoji polinom p_{k+1} stupnja $k + 1$ takav da je $A_{k+1} = p_{k+1}(A_1)$. Po principu matematičke indukcije slijedi i tražena tvrdnja.

(d) $\Rightarrow$ (a) Pretpostavimo sada da je $\mathcal{A}$ P-polinomijalna shema te neka je p_i polinom stupnja i takav da je $A_i = p_i(A_1)$. Uz oznaku $\mathrm{d}(x, y)$ za udaljenost vrhova u grafu određenom s A_1 trebamo pokazati

$$\mathrm{d}(x, y) = j \iff [A_j]_{x,y} = 1.$$

Očito je $[A_1^j]_{x,y}$ broj šetnji[4] duljine j od x do y u grafu određenom matricom A_1. Za x, y takve da je $\mathrm{d}(x, y) = j$ znamo da postoji put (pa stoga i šetnja) duljine j od x do y te da ne postoji put između njih koji je kraći od j, odnosno imamo:

$$[A_1^j]_{x,y} \neq 0 \tag{24}$$
$$[A_1^i]_{x,y} = 0 \quad \text{za } i < j. \tag{25}$$

[4]Šetnja je niz vrhova grafa u kojemu su uzastopni vrhovi susjedni, pri čemu se vrhovi smiju ponavljati, za razliku od puta u kojemu se ne smiju ponavljati.

Zbog pretpostavke da je $\mathcal{A}$ P-polinomijalna asocijacijska shema znamo da za svaki $j > 0$ postoje $\alpha \neq 0$ i polinom $\tilde{p}_{j-1}$ stupnja najviše $j-1$ takvi da je

$$A_j = p_j(A_1) = \alpha A_1^j + \tilde{p}_{j-1}(A_1).$$

Neka su x, y vrhovi za koje je $\mathrm{d}(x, y) = j$. Tada imamo

$$[A_j]_{x,y} = \alpha [A_1^j]_{x,y} + [\tilde{p}_{j-1}(A_1)]_{x,y},$$

pa budući da je $\tilde{p}_{j-1}$ stupnja najviše $j-1$ zbog (25) slijedi $[A_j]_{x,y} = \alpha [A_1^j]_{x,y}$. Sada je $\alpha \neq 0$ po pretpostavci i $[A_1^j]_{x,y} \neq 0$ zbog (24) pa imamo i $[A_j]_{x,y} \neq 0$, odnosno $[A_j]_{x,y} = 1$.

S druge strane, ako su x, y takvi da je $[A_i]_{x,y} = 1$ i $\mathrm{d}(x, y) = j$, po već dokazanom slijedi $[A_j]_{x,y} = 1$. Zbog definicijskog svojstva (b) asocijacijske sheme dobivamo $i = j$. □

Napomena 4.3. *U primjeru 2.14 kao jedan od rezultata dobili smo informaciju* `Metric: false`*. Budući da smo pokazali ekvivalenciju između metričkih asocijacijskih shema i onih koje dolaze od distancijsko regularnog grafa, znamo da je taj rezultat značio upravo to da dobivena asocijacijska shema ne dolazi od distancijsko regularnog grafa.*

U asocijacijskoj shemi dobivenoj pomoću distancijsko regularnog grafa matrice A_i prirodno su poredane ovisno o udaljenostima u početnom grafu. Takav poredak često se naziva *P-polinomijalnim poretkom* budući da je to i poredak matrica iz definicije P-polinomijalne asocijacijske sheme.

Neka je G graf neke asocijacijske sheme s d klasa, bez petlji, te neka je $A \neq I$ pripadna matrica susjedstva. Znamo da za $r \in \mathbb{N}$ u matrici A^r na mjestu (x, y) stoji broj šetnji od x do y duljine r. Ako šetnji dozvolimo "stajanje na mjestu", zaključujemo da u matrici $(I + A)^r$ na mjestu (x, y) stoji broj šetnji od x do y duljine najviše r. Očito su svi elementi matrice $(I + A)^r$ nenegativni cijeli brojevi. Primijetimo da za proizvoljan $r \in \mathbb{N}$ u matrici $(I + A)^r$ elemenata koji su različiti od nule imamo više ili jednako u odnosu na $(I + A)^{r-1}$. Naime, ako je između nekih vrhova postojala šetnja duljine najviše $r-1$, postojat će i šetnja duljine najviše r, a neke šetnje mogu biti duljine točno r.

Neka je s najmanji cijeli broj takav da su svi elementi matrice $(I + A)^s$ pozitivni. Tada je jasno da su svi vrhovi međusobno povezani šetnjama duljine najviše s. Također, budući da je s najmanji takav cijeli broj, u $(I + A)^{s-1}$ postoji element jednak nuli. To znači da u grafu G postoji šetnja duljine s koja je ujedno i put budući da se ne može skratiti. Zaključujemo da je $\mathrm{diam}(G) = s$.

Lema 4.4. *Neka je G povezan graf dijametra s i A njegova matrica susjedstva. Tada su matrice $(I+A)^r$, $r = 0, 1, \dots, s$, linearno nezavisne.*

Dokaz. Pratimo li put duljine s zbog kojega je dijametar grafa jednak s, vidimo da će $(I+A)^r$, $r = 1, \dots, s$, imati strogo više elemenata različitih od nule u odnosu na $(I+A)^{r-1}$ jer će uvijek postojati put duljine točno r. Neka su α_i realni brojevi takvi da je

$$\sum_{i=0}^{s} \alpha_i (I+A)^i = 0.$$

Uzmimo vrhove x, y takve da je $\mathrm{d}(x,y) = s$. Tada je $[(I+A)^s]_{x,y} \neq 0$ i $[(I+A)^r]_{x,y} = 0$ za $r < s$ pa mora vrijediti $\alpha_s = 0$. Dobivamo relaciju $\sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i (I+A)^i = 0$ pa sličnim zaključivanjem induktivno dobivamo $\alpha_i = 0$ za sve $i = 0, 1 \dots, s$. $\square$

Neka je A ponovno matrica asocijacijske sheme s d klasa i neka je pripadni graf dijametra s. Očito je $(I+A)^r$ linearna kombinacija matrica asocijacijske sheme za sve $r = 0, 1, \dots, s$ pa vidimo i da je $s \leq d$ zbog dimenzije pripadnog prostora. Za asocijacijsku shemu s d klasa kažemo da je *metrička* ako u shemi postoji matrica A_i koja određuje graf G_i takav da je $\mathrm{diam}(G_i) = d$. Ponekad kažemo i da je takva asocijacijska shema *metrička u odnosu na G_i*.

Korolar 4.5. *Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa te neka je G_i graf određen matricom susjedstva A_i. Ako je $\mathcal{A}$ metrička u odnosu na G_i, tada matrice $(I+A_i)^r$, $r = 0, 1, \dots, d$, čine bazu za $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Po lemi 4.4 znamo da su matrice $(I+A_i)^r \in \mathrm{span}(\mathcal{A})$, $r = 0, 1, \dots, d$, linearno nezavisne. Budući da ih imamo točno $d+1$, one čine bazu za $\mathcal{A}$. $\square$

Metričke asocijacijske sheme još su jedna karakterizacija P-polinomijalnih shema.

Propozicija 4.6. *Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa te neka je G_i graf određen matricom susjedstva A_i. Asocijacijska shema $\mathcal{A}$ je metrička u odnosu na G_i ako i samo ako je G_i distancijsko regularan i $\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ su njegove distancijske matrice.*

Dokaz. Ako je G_i distancijsko regularan graf i matrice asocijacijske sheme s d klasa su njegove distancijske matrice, očito možemo zaključiti da vrijedi $\mathrm{diam}(G_i) = d$.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathrm{diam}(G_i) = d$ te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $G_i = G_1$. Po prethodnim razmatranjima znamo da su svi elementi matrice $(I + A_1)^d$ pozitivni te da su $(I + A_1)^r$, $r = 0, 1, \ldots, d$, linearno nezavisne. Postoje realni koeficijenti $\alpha_{r,j}$ takvi da je

$$(I + A_1)^r = \sum_{j=0}^{d} \alpha_{r,j} A_i.$$

Matrice $(I + A_1)^r$ za $r = 1, \ldots, d$ imaju strogo više elemenata različitih od nule u odnosu na $(I + A_1)^{r-1}$ pa je stoga skup $\{j \mid \alpha_{r,j} \neq 0\} \backslash \{j \mid \alpha_{r-1,j} \neq 0\}$ neprazan za svaki $r = 1, \ldots, d$. Vrijedi $\alpha_{0,0} = 1$ pa preostaje d indeksa j takvih da je $\alpha_{r,j} \neq 0$ i $\alpha_{r-1,j} = 0$ za neki $r = 1, \ldots, d$. Zaključujemo da za svaki r može postojati točno jedan takav indeks j pa zbog toga vidimo i da matrice $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ možemo numerirati tako da je A_i polinom u $(I + A_1)$ stupnja i. Slijedi da je $\mathcal{A}$ P-polinomijalna asocijacijska shema pa po teoremu 4.2 slijedi i tvrdnja propozicije. □

P-polinomijalne asocijacijske sheme možemo povezati i sa svojstvenim vrijednostima sheme.

Propozicija 4.7. *Asocijacijska shema $\mathcal{A}$ je P-polinomijalna ako i samo ako postoje polinomi p_k stupnja k takvi da je $[P]_{i,k} = p_k([P]_{i,1})$, pri čemu je P matrica svojstvenih vrijednosti od $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa i označimo s $\theta_i := [P]_{i,1}$ svojstvene vrijednosti od A_1.

Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ P-polinomijalna te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $A_0, A_1, \ldots, A_d$ pripadni P-polinomijalni poredak. Tada postoje polinomi p_k stupnja k takvi da vrijedi $A_k = p_k(A_1)$. Koristeći (12) i idempotentnost matrica E_i dobivamo

$$\sum_{i=0}^{d} [P]_{i,k} E_i = A_k = p_k(A_1) = p_k \left(\sum_{i=0}^{d} [P]_{i,1} E_i \right) = \sum_{i=0}^{d} p_k(\theta_i) E_i.$$

Sada množenjem redom s E_i, $i = 0, 1, \ldots d$, lako vidimo da mora vrijediti $[P]_{i,k} = p_k(\theta_i)$.

S druge strane, pretpostavimo da postoje polinomi p_k stupnja k takvi da je $[P]_{i,k} = p_k(\theta_i)$. Slično kao i prije, budući da za svaki polinom p vrijedi

$$p(A_1) = \sum_{i=0}^{d} p(\theta_i) E_i,$$

za $p = p_k$ dobivamo

$$p_k(A_1) = \sum_{i=0}^{d} p_k(\theta_i) E_i = \sum_{i=0}^{d} [P]_{i,k} E_i = A_k.$$ □

Slično kao i u prethodnom poglavlju možemo definirati pojmove dualne P-polinomijalnim shemama i metričkim shemama koje će imati i analogna svojstva. Do sada nam je za dualna svojstva bilo potrebno Schurovo množenje matrica pa stoga trebamo definirati analogni pojam za polinome.

Neka je E proizvoljna matrica te označimo sa $E^{(r)}$ Schurov produkt r kopija matrice E, uz $E^{(0)} = J$. Za polinom $q(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i x^i$ definiramo *Schurov polinom* u E kao

$$q \circ E := \sum_{i=0}^{m} q_i E^{(i)}.$$

Definicija 4.8. *Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa te neka su $E_0, E_1, \dots, E_d$ njene glavne idempotente. Kažemo da je asocijacijska shema $\mathcal{A}$* Q-polinomijalna *ako matrice E_i možemo numerirati tako da za svaki $i = 0, 1, \dots, d$ postoji polinom q_i stupnja i takav da je $E_i = q_i \circ E_1$.*

Poredak glavnih idempotenti takav da je $E_i = q_i \circ E_1$ nazivamo *Q-polinomijalnim poretkom.*

Za definiranje metričkih shema bio nam je potreban dijametar grafa kojeg smo povezali s pripadnom matricom susjedstva. Slično, možemo promatrati glavne idempotente. Za matricu E dimenzija $n \times n$ kažemo da je *Schur-povezana* ako postoji polinom p takav da je $p \circ E$ ranga n. Najmanji cijeli broj m takav da je rang od $q \circ E$ jednak n za neki polinom q stupnja m nazivamo *Schurovim dijametrom* od E. Za asocijacijsku shemu s glavnim idempotentama $E_0, E_1, \dots, E_d$ kažemo da je *kometrička* ako postoji E_i takav da je Schurov dijametar od E_i jednak d.

Lema 4.9. *Neka je E proizvoljna kvadratna matrica reda n čiji je Schurov dijametar jednak s. Tada su matrice $E^{(r)}$, $r = 0, 1, \dots, s$, linearno nezavisne.*

Dokaz. Po pretpostavci znamo da je s najmanji cijeli broj takav da je $q \circ E$ ranga n za neki polinom q stupnja s. Pretpostavimo suprotno, odnosno da su matrice $E^{(r)}$, $r = 0, 1, \dots, s$, linearno zavisne. Tada postoji $p \neq 0$ polinom stupnja najviše s takav da je $p \circ E = 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je p stupnja s. U protivnom bismo na jednakost $p \circ E = 0$ mogli konačno mnogo puta primijeniti Schurovo množenje sa E da bismo dobili polinom u E stupnja s.

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $q - \alpha p$ polinom stupnja manjeg od s. Tada imamo

$$(q - \alpha p) \circ E = R - 0,$$

za neku regularnu matricu R. Budući da smo pronašli polinom $q - \alpha p$ stupnja strogo manjeg od s takav da je $(q - \alpha p) \circ E$ regularna matrica, dobili smo kontradikciju s pretpostavkom da je s Schurov dijametar od E. $\square$

Korolar 4.10. *Neka je* $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ *asocijacijska shema s* d *klasa te neka su* $E_0, E_1, \ldots, E_d$ *njene glavne idempotente. Ako postoji glavna idempotenta* E_i *takva da je Schurov dijametar od* E_i *jednak* d*, tada matrice* $E_i^{(r)}$*,* $r = 0, 1, \ldots, d$*, čine bazu za* $\mathcal{A}$*.*

Napomena 4.11. *Glavne idempotente sheme su dijagonalizabilne i međusobno komutiraju s obzirom na matrično množenje pa se mogu simultano dijagonalizirati. Budući da su idempotentne, međusobno ortogonalne,* $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$ *i rang dijagonalne matrice* $\sum_{i=0}^{d} \alpha_i E_i$ *jednak je broju nenul elemenata na dijagonali, vrijedi*

$$\mathrm{r}\left(\sum_{i=0}^{d} \alpha_i E_i\right) = \sum_{\substack{i=0 \\ \alpha_i \neq 0}}^{d} \mathrm{r}(E_i),$$

uz oznaku $\mathrm{r}(A)$ *za rang matrice* A*.*

Za Q-polinomijalne sheme vrijede gotovo sve ekvivalencije analogne pokazanima za P-polinomijalne sheme. Za karakterizaciju pomoću distancijskih matrica distancijsko regularnog grafa ne možemo dati analogon budući da nije poznata kombinatorna interpretacija Q-polinomijalnih asocijacijskih shema.

Teorem 4.12. *Neka je* $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ *asocijacijska shema s* d *klasa te neka su* $E_0, E_1, \ldots, E_d$ *njene glavne idempotente. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $\mathcal{A}$ *je Q-polinomijalna,*

(b) za $k > i + j$ *je* $q_{i,j}^k = q_{k,i}^j = q_{i,k}^j = 0$ *te vrijedi* $q_{i,j}^{i+j} \neq 0$ *za sve* i, j*,*

(c) za $k > i + 1$ *je* $q_{i,1}^k = q_{k,i}^1 = q_{i,k}^1 = 0$ *te vrijedi* $q_{i,1}^{i+1} \neq 0$ *za sve* i*,*

(d) $\mathcal{A}$ *je kometrička,*

(e) postoje polinomi q_k *stupnja* k *takvi da je* $[Q]_{i,k} = q_k([Q]_{i,1})$*, pri čemu je* Q *matrica dualnih svojstvenih vrijednosti od* $\mathcal{A}$*.*

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b) Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ Q-polinomijalna te neka je q_i polinom stupnja i takav da je $E_k = q_k \circ E_1$. Za $i + j > d$ tvrdnja je očita pa pretpostavimo $i + j \leq d$. Za neke $\alpha_{i,j}^k$ vrijedi

$$q_i(x) q_j(x) = \sum_{k=0}^{i+j} \alpha_{i,j}^k q_k(x),$$

pri čemu sumiramo po k do $i+j$ budući da je polinom na lijevoj strani stupnja $i+j$. S druge strane, zbog (19) vrijedi

$$(q_i \circ E_1) \circ (q_j \circ E_1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{i,j}^k (q_k \circ E_1)$$

pa tako dobivamo

$$\sum_{k=0}^{i+j} \alpha_{i,j}^k (q_k \circ E_1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{i,j}^k (q_k \circ E_1).$$

Matrice $E_k = q_k \circ E_1$ su linearno nezavisne jer čine bazu pripadne Bose-Mesnerove algebre pa zaključujemo $q_{i,j}^k = 0$ za $k > i+j$. Također možemo zaključiti $q_{i,j}^{i+j} \neq 0$.

Propozicijom 3.11 pokazali smo da je vrijednost $q_{i,j}^k \operatorname{tr}(E_k)$ invarijantna na permutacije indeksa i, j, k. Svaka matrica E_k je idempotentna i različita od nulmatrice pa je njen rang barem 1. Trag idempotentne matrice jednak je njenom rangu pa zaključujemo da je $\operatorname{tr}(E_k) \neq 0$ za svaki $k = 0, 1, \ldots, d$. Pokazali smo da za $k > i+j$ vrijedi $q_{i,j}^k = 0$ pa $\operatorname{tr}(E_k) \neq 0$ implicira i $q_{k,i}^j = q_{i,k}^j = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Slijedi direktno za $j = 1$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Ovu implikaciju pokazujemo indukcijom analogno kao i odgovarajuću implikaciju u teoremu 4.2. Pretpostavimo da za neki k postoje polinomi q_k takvi da je $E_k = q_k \circ E_1$ za $i \leq k$. Koristeći pretpostavku (c) dobivamo

$$E_k \circ E_1 = \frac{1}{n} q_{k,1}^{k-1} E_{k-1} + \frac{1}{n} q_{k,1}^{k} E_k + \frac{1}{n} q_{k,1}^{k+1} E_{k+1}.$$

Sada lako vidimo da E_{k+1} možemo izraziti kao Schurov polinom u E_1 stupnja $k+1$ budući da je $E_k \circ E_1$ neki Schurov polinom u E_1 stupnja $k+1$.

(a) $\Rightarrow$ (d) Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $E_0, E_1, \ldots, E_d$ Q-polinomijalni poredak glavnih idempotenti.

Neka je $M \in \operatorname{span}(\mathcal{A})$ proizvoljna te neka su α_k, $k = 0, 1, \ldots, d$, takvi da je

$$M = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k E_k. \tag{26}$$

Iz napomene 4.11 slijedi da je M regularna ako i samo ako za svaki k vrijedi $\alpha_k \neq 0$.

Po pretpostavci su matrice E_i polinomi stupnja i u E_1, pa je zato linearna kombinacija oblika (26) polinom u E_1 stupnja najviše d. Svaka linearna kombinacija takva da je $\alpha_k \neq 0$ za svaki k daje regularnu matricu. Obratno, za svaku regularnu matricu posebno mora vrijediti i $\alpha_d \neq 0$, pa je ta regularna matrica polinom u E_1 stupnja d. Zaključujemo da je Schurov dijametar od E_1 jednak d.

(d) $\Rightarrow$ (c) Pretpostavimo da je Schurov dijametar od E_1 jednak d. Schurovim množenjem relacije

$$E_1^{(1)} = n(E_1 \circ E_0) = \sum_{i=0}^{d} q_{1,0}^{i} E_i$$

$s-1$ puta sa E_1 dobivamo da vrijedi

$$E_1^{(s)} = \frac{1}{n^{s-1}} \underbrace{\sum_{i_1=0}^{d} \sum_{i_2=0}^{d} \cdots \sum_{i_s=0}^{d}}_{s} q_{1,0}^{i_1} q_{1,i_1}^{i_2} q_{1,i_2}^{i_3} \cdots q_{1,i_{s-1}}^{i_s} E_{i_s}. \tag{27}$$

Definirajmo graf G takav da mu je skup vrhova $\{0, 1, \ldots, d\}$ te neka su vrhovi i, j susjedni ako i samo ako je $q_{1,i}^{j} \neq 0$. Budući da je vrijednost $q_{i,j}^{k} \operatorname{tr}(E_k)$ invarijantna na permutacije indeksa i, j, k te $\operatorname{tr}(E_k) \neq 0$, očito vrijedi da je $q_{1,i}^{j} \neq 0$ ako i samo ako je $q_{1,j}^{i} \neq 0$ pa je graf G neusmjeren.

Schurov dijametar od E_1 jednak je d pa stoga postoji polinom q stupnja d takav da je $q \circ E_1$ regularna matrica. Iz napomene 4.11 slijedi da su koeficijenti α_k u raspisu

$$q \circ E_1 = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k E_k$$

svi različiti od nule. Također, za bilo koji polinom $\tilde{q}$ stupnja manjeg od d, u raspisu $\tilde{q} \circ E_1 = \sum_{k=0}^{d} \beta_k E_k$ postoji neki koeficijent β_k jednak nuli.

Pretpostavimo da za svaku matricu E_j postoji neki $s < d$ takav da je koeficijent uz E_j u raspisu (27) od $E_1^{(s)}$ različit od nule. Budući da su Kreinovi parametri nenegativni, ti koeficijenti su pozitivni. Tada matrica $E_1^{(0)} + E_1^{(1)} + \ldots + E_1^{(d-1)}$ zapisana u bazi $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$ ima sve koeficijente pozitivne pa po napomeni 4.11 zaključujemo da je regularna. Dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da je Schurov dijametar od E_1 jednak d pa postoji matrica E_j takva da je za svaki $s < d$ koeficijent uz E_j u raspisu (27) od $E_1^{(s)}$ jednak nuli. Nadalje, koeficijent uz E_j u raspisu (27) od $E_1^{(d)}$ ne može biti jednak nuli. U suprotnom bi svaki polinom u E_1 stupnja manjeg ili jednakog d zapisan u bazi $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$ imao koeficijent uz E_j jednak nuli, pa po napomeni 4.11 ne bi mogao biti regularan.

Dakle, postoji matrica E_j takva da je d najmanji cijeli broj za koji je koeficijent uz E_j u raspisu (27) za $s = d$ pozitivan. Iz toga slijedi da u grafu G postoji šetnja duljine d između vrhova 0 i j te da je ta šetnja ujedno i najkraći put od 0 do j, odnosno vrh j je na udaljenosti d od vrha 0. Budući da u G postoji vrh na udaljenosti d od vrha 0 te da je broj vrhova grafa G jednak $d+1$, jedini bridovi u grafu G su oni koji povezuju vrhove u tom putu duljine d.

Očito je $q_{1,0}^1 \neq 0$, odnosno vrhovi 0 i 1 su susjedni, a bez smanjenja općenitosti možemo numerirati matrice $E_2, \ldots, E_d$ tako da je put duljine d u grafu G jednak $(0, 1, 2, \ldots, d)$. Iz strukture grafa G slijedi $q_{i,1}^{i+1} \neq 0$ i $q_{1,i}^j = 0$ za $1 < |i - j|$.

(a) $\Leftrightarrow$ (e) Dokaz je potpuno analogan dokazu propozicije 4.7. Označimo sa $\theta_i := [Q]_{i,1}$ dualne svojstvene vrijednosti. Pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ Q-polinomijalna shema, $E_0, E_1, \ldots, E_d$ Q-polinomijalni poredak glavnih idempotenti te polinomi q_k takvi da je $E_k = q_k \circ E_1$. Matrice sheme su idempotentne s obzirom na Schurovo množenje pa imamo

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{d}[Q]_{i,k}A_i = E_k = q_k \circ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{d}[Q]_{i,1}A_i\right) = \sum_{i=0}^{d} q_k\left(\frac{1}{n}\theta_i\right)A_i.$$

Schurovim množenjem s A_i dobivamo da je $[Q]_{i,k} = q_k(\frac{1}{n}[Q]_{i,1})$, odnosno postoje polinomi $\tilde{q}_k$ stupnja k takvi da je $[Q]_{i,k} = \tilde{q}_k([Q]_{i,1})$.

S druge strane, za svaki polinom q je

$$q \circ E_1 = \sum_{i=0}^{d} q\left(\frac{1}{n}\theta_i\right)A_i,$$

pa odavde za $q = q_k$ dobivamo i obratnu implikaciju.

□

Lako se vidi da su asocijacijske sheme s dvije klase s povezanim grafovima P-polinomijalne i Q-polinomijalne. Asocijacijska shema može biti P-polinomijalna u odnosu na najviše 2 njena grafa (vidi [2]).

Primjer 4.13. *Johnsonova i Hammingova shema dolaze od distancijsko regularnog grafa pa su stoga obje P-polinomijalne u odnosu na* G_1*, no može se pokazati da su obje ujedno i Q-polinomijalne. Johnsonova shema* $J(2k+1, k)$ *također je P-polinomijalna u odnosu na* G_k*.*

Literatura

[1] J. Bamberg, A. Hanaki, J. Lansdown, *AssociationSchemes: A GAP package for working with association schemes and homogeneous coherent configurations, Version 2.0.0*, 2022, dostupno na: `http://doi.org/10.5281/zenodo.2634955` (travanj 2022.).

[2] E. Bannai, E. Bannai, *How many P-polynomial Structures can an Association Scheme have?*, European Journal of Combinatorics 1.4 (1980), 289-298.

[3] R. C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced design*, Pacific Journal of Mathematics 13.2 (1963), 389-419.

[4] R. C. Bose, T. Shimamoto, *Classification and Analysis of Partially Balanced Incomplete Block Designs with Two Associate Classes*, Journal of the American Statistical Association 47.258 (1952), 151–184.

[5] A. E. Brouwer, *Coherent configurations*, dostupno na: `https://www.win.tue.nl/~aeb/2WF02/cohconf.pdf` (travanj 2022.).

[6] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer Berlin, Heidelberg, 1989.

[7] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer New York, New York, 2012.

[8] B. J. Broxson, *The Kronecker Product*, Master's Thesis, University of North Florida, College of Arts and Sciences, 2006, dostupno na: `https://digitalcommons.unf.edu/etd/25/` (kolovoz 2022.).

[9] P. J. Cameron, *Coherent configurations, association schemes and permutation groups*, Groups, Combinatorics and Geometry (A. A. Ivanov, M. W. Liebeck, J. Saxl), World Scientific, 2003, 55-71.

[10] E. R. Van Dam, J. H. Koolen, H. Tanaka, *Distance-Regular Graphs*, The Electronic Journal of Combinatorics, Dinamic Surveys, 2016, dostupno na: `https://arxiv.org/abs/1410.6294` (travanj 2022.).

[11] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Research Laboratories, 1973.

[12] S. Evdokimov, I. Ponomarenko, *Permutation group approach to association schemes*, European Journal of Combinatorics 30.6 (2009), 1456-1476.

[13] C. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.

[14] C. Godsil, *Association schemes*, 2010, dostupno na: https://www.math.uwaterloo.ca/~cgodsil/pdfs/assoc2.pdf (ožujak 2022.).

[15] C. Godsil, *Generalized Hamming schemes*, 2010, dostupno na: https://arxiv.org/abs/1011.1044 (travanj 2022.).

[16] C. Godsil, *Linear Algebra and Designs*, University of Waterloo, 1995.

[17] Y. J. Ionin, M. S. Shrikhande, *Combinatorics of Symmetric Designs*, Cambridge University Press, 2006.

[18] V. Krčadinac, J. Šiftar, *Konačne geometrije*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2013, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf (ožujak 2022.).

[19] G. Muić, M. Primc, *Vektorski prostori*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, dostupno na: https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/vp%5B1%5D.pdf (srpanj 2022.).

[20] J. J. Seidel, *Introduction to association schemes*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 26 (1991), dostupno na: https://www.emis.de/journals/SLC/opapers/s26seidel.pdf (ožujak 2022.).

[21] Y. Watanabe, *An algebraic study of association schemes and its applications*, Master's Thesis, Division of Mathematics, Graduate School of Information Sciences, 2015, dostupno na: https://researchmap.jp/yutawatanabe/published_papers/10074652/attachment_file.pdf (kolovoz 2022.).

Sažetak

Glavni promatrani objekti u ovom radu su asocijacijske sheme. Asocijacijska shema s d klasa je skup razapinjućih podgrafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ koji particioniraju bridove potpunog grafa K_n, a imaju svojstvo da za svaka dva vrha x i y koji su susjedni u G_k broj vrhova z susjednih sa x u G_i i susjednih sa y u G_j ovisi samo o indeksima i, j, k. Taj broj označavamo sa $p^k_{i,j}$ i nazivamo presječnim brojem sheme. Asocijacijske sheme možemo konstruirati pomoću distancijsko regularnih grafova, a najvažniji takvi primjeri su Johnsonova i Hammingova shema. Osim toga, vrlo su važne i konstrukcije pomoću konačnih grupa.

Matrice susjedstva grafova asocijacijske sheme razapinju komutativnu algebru koju nazivamo Bose-Mesnerovom algebrom. Pripadnu Bose-Mesnerovu algebru razapinju i idempotentne matrice određene svojstvenim potprostorima matrica sheme. Osim presječnih brojeva postoji još nekoliko bitnih parametara asocijacijske sheme kao što su svojstvene vrijednosti, dualne svojstvene vrijednosti i Kreinovi parametri, a imaju zanimljiva dualna svojstva.

Asocijacijske sheme dobivene pomoću distancijsko regularnih grafova ekvivalentne su P-polinomijalnim shemama, a poznate su i karakterizacije pomoću presječnih brojeva, svojstvenih vrijednosti sheme i dijametara grafova. Postoje i Q-polinomijalne sheme s karakterizacijama preko dualnih pojmova, ali ne i kombinatorna interpretacija poput distancijsko regularnih grafova.

Konkretni primjeri u diplomskom radu izračunati su pomoću GAP paketa *AssociationSchemes*.

Summary

The main objects studied in this thesis are association schemes. An association scheme with d classes is a set of spanning subgraphs $G_0, G_1, \ldots, G_d$ which partition the edges of the complete graph K_n and have the property that for every two vertices x and y which are adjacent in G_k the number of vertices z adjacent to x in G_i and adjacent to y in G_j depends only on the indices i, j, k. This number is denoted by $p_{i,j}^k$ and called an intersection number of the scheme. We can construct association schemes using distance-regular graphs and the most important examples are Johnson and Hamming schemes. Constructions using finite groups are very important as well.

AThe adjacency matrices of association scheme graphs span a commutative algebra called the Bose-Mesner algebra. The Bose-Mesner algebra of the association scheme is also spanned by idempotent matrices which are determined by eigenspaces of the adjacency matrices. Apart from the intersection numbers, there are other important parameters of the association scheme such as eigenvalues, dual eigenvalues and Krein parameters. These parameters have interesting dual properties.

Association schemes obtained from distance-regular graphs are equivalent to P-polynomial schemes, and can also be characterized via intersection numbers, eigenvalues of the scheme and diameters of its graphs. There are also Q-polynomial schemes with characterizations via dual terms, but no combinatorial interpretation such as distance-regular graphs is known.

Examples in the thesis were calculated using the GAP package *AssociationSchemes*.

Životopis

Lucija Relić rođena je 29. srpnja 1999. godine u Virovitici. Završila je Osnovnu školu Ivane Brlić-Mažuranić u Virovitici i prirodoslovno-matematički smjer u Gimnaziji Petra Preradovića Virovitica, a paralelno je stekla osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje u Glazbenoj školi Jan Vlašimsky u Virovitici, smjer violina. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovala je na natjecanjima iz matematike, fizike, geografije i hrvatskog jezika te na Međunarodnom natjecanju mladih prirodoslovaca IJSO 2013. godine u Indiji.

Obrazovanje je nastavila na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu gdje je 2017. godine upisala preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer istraživački, a 2020. godine diplomski sveučilišni studij Matematička statistika. Tijekom studija bila je demonstratorica iz raznih kolegija, a primila je i priznanje Matematičkog odsjeka za izniman uspjeh na studiju. Osim toga, od 2017. godine aktivno sudjeluje u radu udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić", čija je i predsjednica od 2018. godine.