Izračunljivost realnih funkcija

Staroverški, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Staroverški

IZRAČUNLJIVOST REALNIH FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojima. ♡

Sadržaj

Uvod

Pojam izračunljivosti možemo definirati uvođenjem pojma rekurzivnosti funkcija. Neformalno govoreći, rekurzivnost funkcije zamišljamo kao algoritam koji računa matematičku formulu te funkcije. U radu ćemo, naravno, to precizno definirati. Za početak promatramo funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

Kao aksiom uzimamo da je nulfunkcija izračunljiva. Također, uvodimo funkciju sljedbenika, koja vraća broj za jedan veći od zadanog, te funkciju koordinatne projekcije koja vraća zadanu koordinatu. Na ovu polaznu klasu funkcija, ostatak funkcija dobivamo kompozicijom, primitivnom rekurzijom i μ operatorom. Skup tih inicijalnih funkcija je rekurzivan. Također, sve funkcije koje su iz inicijalnih funkcija dobivene kompozicijom, primitivnom rekurzijom ili μ operatorom u konačno mnogo koraka su također rekurzivne.

Rekurzivnost promatramo i na funkcijama $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$. Da bismo došli do realnih funkcija, postepeno promatramo svojstva rekurzivnih funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Iz poznate činjenice da svaki realni broj možemo aproksimirati nekim racionalnim brojem, povući ćemo paralelnu definiciju za rekurzivnu funkciju $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Točnije, funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ bit će rekurzivna ako postoji njena rekurzivna aproksimacija $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, tj. ako vrijedi

$$|f(x) - F(x, n)| < 2^{-n}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analognu definiciju imamo i kod pojma izračunljivog broja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nadalje, proučavamo svojstva neprekidnih funkcija $S \to \mathbb{R}, S \subseteq \mathbb{R}$ te s tim u vezi promatramo uniformnu neprekidnost i efektivnu uniformnu neprekidnost.
Jedan od bitnijih rezultata u ovome djelu je teorem koji kaže da ako je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna, gdje je S omeđen skup, tada je i funkcija f omeđena. Naposlijetku, definirat ćemo pojam izračunljive funkcije te prikazati nekoliko svojstva i primjera takvih funkcija.

Poglavlje 1

Osnovna svojstva rekurzivnih funkcija

1.1 Kompozicija, primitivna rekurzija i μ operator

Definicija 1.1.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i $j \in \{1, \ldots, k\}$. Za funkciju definiranu s $I_j^k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_j$ kažemo da je projekcija na j-tu koordinatu.*
Neka su $s, z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirane sa $s(x) = x + 1$ i $z(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}$. Funkcija s je funkcija sljedbenika, a funkcija z je nulfunkcija.
Funkcije I_j^k, s i z zovemo inicijalne funkcije.

Definicija 1.1.2. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Za funkciju $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiranu sa $h(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x))$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$ kažemo da je dobivena kompozicijom funkcija f i $g_1, \ldots, g_n$.*

Napomena 1.1.3. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,$f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Neka je $G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ funkcija definirana s $G(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Tada je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$ ako i samo ako je $h = f \circ G$.*

Primjer 1.1.4. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(x, y) = f(y, x)$.*
Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $g(x, y) = f(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)$. Stoga je funkcija g dobivena kompozicijom funkcija f, I_2^2, I_1^2.

Definicija 1.1.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije. Neka je $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana induktivno po prvoj varijabli na sljedeći način:*

$$h(0, y_1, \ldots, y_2) = f(y_1, \ldots, y_n)$$
$$h(x + 1, y_1, \ldots, y_k) = g(h(x, y_1, \ldots, y_k), x, y_1, \ldots, y_k)$$

Tada za funkciju h kažemo da je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

Primjer 1.1.6. *Neka su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane s $f(x) = x$ i $g(x, y, z) = x + 1$. Neka je h funkcija dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.*
Imamo:

$$h(0, y) = y \tag{1.1}$$
$$h(x + 1, y) = g(h(x, y), x, y) \tag{1.2}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} h(0, y) &= y \\ h(1, y) &= h(0, y) + 1 = y + 1 \\ h(2, y) &= h(1, y) + 1 = y + 2 \end{aligned}$$

Fiksirajmo $y \in \mathbb{N}$. Dokažimo indukcijom po $x \in \mathbb{N}$ da je

$$h(x, y) = x + y. \tag{1.3}$$

Za $x = 0$ (1.3) vrijedi prema (1.1). Pretpostavimo da $h(x, y) = x + y$ vrijedi za neki $x \in \mathbb{N}$. Koristeći (1.2) dobivamo:

$$h(x + 1, y) = h(x, y) + 1 = (x + y) + 1 = (x + 1) + y.$$

Dakle, $h(x + 1, y) = (x + 1) + y$.
Prema tome, (1.3) vrijedi za svaki $x \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.7. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h(x, y) = xy$. Pokušajmo odrediti neke funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.*
Prema definiciji primitivne funkcije želimo funkcije f i g takve da je

$$h(0, y) = f(y), \tag{1.4}$$
$$h(x + 1, y) = g(h(x, y), x, y), \forall x, y \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Jednakosti (1.4) i (1.5) su ekvivalentne sa

$$\begin{aligned} 0 &= f(y), \\ (x + 1)y &= g(xy, x, y). \end{aligned}$$

Zapravo imamo

$$0 = f(y), \tag{1.6}$$
$$xy + y = g(xy, x, y). \tag{1.7}$$

Definirajmo $f = z$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $g(u, x, y) = u + y$. Jasno je da za ovako definirane funkcije vrijedi (1.6) i (1.7) $\forall x, y \in \mathbb{N}$. Prema tome h je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

Primjer 1.1.8. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x, y) = y^x$ (pri čemu uzimamo $0^0 = 1$). Pronađimo funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Jednakosti*

$$h(0, y) = f(y),$$
$$h(x + 1, y) = g(h(x, y), x, y)$$

su ekvivalentne jednakostima

$$1 = f(y), \tag{1.8}$$
$$y^x y = g(y^x, x, y). \tag{1.9}$$

Neka su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$f(y) = 1$$
$$g(u, x, y) = uy, \ \forall u, x, y \in \mathbb{N}$$

Tada je očito da vrijede jednakosti (1.8) i (1.9). Prema tome, h je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.

Primjer 1.1.9. *Neka je $c \in \mathbb{N}$ te $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Definirajmo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induktivno sa*

$$h(0) = c, \tag{1.10}$$
$$h(x + 1) = g(h(x), x). \tag{1.11}$$

Definirajmo $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $H(x, y) = h(x), \forall x, y \in \mathbb{N}$. Pokušajmo naći funkcije $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takve da je H dobivena primitivnom rekurzijom od F i G.
Jednakosti

$$H(0, y) = F(y)$$
$$H(x + 1, y) = G(H(x, y), x, y)$$

su ekvivalentne jednakostima

$$h(0) = F(y)$$
$$h(x + 1) = G(h(x), x, y)$$

što je prema (1.10) i (1.11) ekvivalentno jednakostima

$$c = F(y) \tag{1.12}$$
$$g(h(x), x) = G(h(x), x, y) \tag{1.13}$$

Za funkcije $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definirane sa $F(y) = c$ i $G(u, v, w) = g(u, v)$ vrijede jednakosti (1.12) i (1.13). Prema tome H je dobivena primitivnom rekurzijom od F i G.

Definicija 1.1.10. *Neka je $k \in \mathbb{N}$ te $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ funkcija koja ima sljedeće svojstvo:*

$$\text{za sve } x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N} \text{ postoji } y \in \mathbb{N} \text{ takav da je } f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0.$$

Neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$g(x_1, \ldots, x_k) = \min \{y \in \mathbb{N} \mid f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0\}, \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}.$$

Za funkciju g kažemo da je dobivena primjenom μ operatora na f.
Broj $\min\{y \in \mathbb{N} \mid f(x_1, \ldots, x_k) = 0\}$ označavamo i sa $\mu y(f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0)$. Dakle, $g(x_1, \ldots, x_k) = \mu y(f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0)$, $\forall x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.11. *Neka je $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s $f(x, y, k) = \begin{cases} 0, & (k+1)(y+1) > x \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$.*
Neka su $x, y, k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$f(x, y, k) = 0 \Leftrightarrow (k+1)(y+1) > x \Leftrightarrow k+1 > \frac{x}{y+1} \Leftrightarrow k > \frac{x}{y+1} - 1$$

Dakle,

$$f(x, y, k) = 0 \Leftrightarrow k > \frac{x}{y+1} - 1. \tag{1.14}$$

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada sigurno postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k > \frac{x}{y+1} - 1$.
Iz (1.14) slijedi da je $f(x, y, k) = 0$. Prema tome, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x, y, k) = 0$.
Neka je g funkcija dobivena primjenom μ operatora na f. Imamo $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(x, y) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f(x, y, k) = 0\}$.
Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Koristeći (1.14) dobivamo $g(x, y) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \frac{x}{y+1} - 1\}$.
Definirajmo $u := \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor$. Tada vrijedi

$$u \leqslant \frac{x}{y+1} < u + 1$$

pa je

$$u - 1 \leqslant \frac{x}{y+1} - 1 < u.$$

Sada vidimo da je $u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \frac{x}{y+1} - 1\}$.
Prema tome, $g(x, y) = u$, tj. $g(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$.

1.2 Rekurzivne funkcije

Definiramo induktivno niz skupova $(\mathcal{F}_0)_{n\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način.

Definicija 1.2.1. *Neka je $\mathcal{F}_0$ skup svih inicijalnih funkcija. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $\mathcal{F}_n$ definiran. Definirajmo skup A kao skup svih funkcija h za koje postoje $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{F}_n$ takve da je h dobivena kompozicijom $f, g_1, \dots, g_m$.*
Definirajmo B kao skup svih funkcija h za koje postoje $f, g \in \mathcal{F}_n$ takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g.
Nadalje, definirajmo C kao skup svih funkcija h za koje postoji $f \in \mathcal{F}_n$ takva da je h dobivena primjenom μ operatora na f. Definirajmo $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup A \cup B \cup C$. Na ovaj način smo definirali niz skupova $(\mathcal{F}_0)_{n\in\mathbb{N}}$.
Za neku funkciju f kažemo da je rekurzivna ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in \mathcal{F}_n$.

Primjetimo sljedeće: ako je f rekurzivna funkcija, onda je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ za neki $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Nadalje, uočimo da je svaka inicijalna funkcija rekurzivna. Naime, ako je f inicijalna funkcija, onda je $f \in \mathcal{F}_0$.

Primjer 1.2.2. *Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(x, y, z) = x + 1$. Za sve $x, y, z \in \mathbb{N}$ vrijedi $g(x, y, z) = s(I_1^3(x, y, z))$ pa zaključujemo da je g dobivena kompozicijom funkcija s i I_1^3. Imamo $s, I_1^3 \in \mathcal{F}_0$ pa je $g \in \mathcal{F}_1$. Prema tome, g je rekurzivna funkcija.*

Primjer 1.2.3. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x, y) = x + y$. Prema Primjru 1.1.6 funkcija h je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g gdje su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $f(x) = x$ i $g(x, y, z) = x + 1$. Primjetimo da je $f = I_1^1$, stoga je $f \in \mathcal{F}_0$ pa je i $f \in \mathcal{F}_1$. Prema Primjeru 1.2.2 imamo $g \in \mathcal{F}_1$ pa zaključujemo da je $h \in \mathcal{F}_2$. Dakle, h je rekurzivna funkcija.*

Iz definicije niza skupova $\mathcal{F}_n$ vidimo da je $\mathcal{F}_n$ sadržan u $\mathcal{F}_{n+1}$. Iz ovoga slijedi da je $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $n \leqslant m$. Naime, ovu tvrdnju lako dokazujemo indukcijom po m.
Za bazu indukcije uzimamo $m = n$. Tada je $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_m$ te tvrdnja vrijedi.
Pretpostavimo da za neki $m \in \mathbb{N}, n \leqslant m$ vrijedi $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$. Za $m + 1$ imamo $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_{m+1}$.
Tada vrijedi i $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_{m+1}$ te je tvrdnja dokazana principom matematičke indukcije.

Propozicija 1.2.4.
1. *Pretpostavimo da su $f, g_1, \dots, g_m$ rekurzivne funkcije te da je h dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \dots, g_m$. Tada je h rekurzivna funkcija.*
2. *Pretpostavimo da su f i g rekurzivne funkcije te da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Tada je h rekurzivna funkcija.*
3. *Pretpostavimo da je f rekurzivna funkcija te da je g dobivena primjenom μ operatora na f. Tada je g rekurzivna.*

Dokaz.

1. Budući da su $f, g_1, \ldots, g_m$ rekurzivne funkcije, postoje $n_0, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ takvi da je $f \in \mathcal{F}_{n_0}, g_1 \in \mathcal{F}_{n_1}, \ldots g_m \in \mathcal{F}_{n_m}$. Neka je $N = max\{n_0, n_1, \ldots, n_m\}$. Tada je $\mathcal{F}_{n_0} \subseteq \mathcal{F}_N, \mathcal{F}_{n_1} \subseteq \mathcal{F}_N, \ldots, \mathcal{F}_{n_m} \subseteq \mathcal{F}_N$ pa imamo $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{F}_N$. Slijedi da je $h \in \mathcal{F}_{N+1}$ te je stoga h rekurzivna funkcija.

2. Znamo da su f i g rekurzivne funkcije. Tada postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $f \in \mathcal{F}_m$ i $g \in \mathcal{F}_n$. Tada je ili $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$ ili $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$. Bez smanjenja općentosti uzmimo da je $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$. Tada su $f, g \in \mathcal{F}_m$. Slijedi je $h \in \mathcal{F}_{m+1}$ te da je h rekurzivna.

3. Budući da je f rekurzivna funkcija, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f \in \mathcal{F}_n$. Kako je g dobivena primjenom μ operatora na f, slijedi da je $g \in \mathcal{F}_{n+1}$ te je g također rekurzivna.

Primjer 1.2.5. *Neka je $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}, h(x, y) = xy$. Prema Primjeru 1.1.7 funkcija h je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g, gdje su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $f(x) = 0$, $g(u, x, y) = u + y$.*
Neka je $i : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, i(x, y) = x + y$. Prema Primjeru 1.2.3 funkcija i je rekurzivna. Za sve $u, x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $g(u, x, y) = i(I_1^3(u, x, y), I_3^3(u, x, y))$ pa slijedi da je g dobivena kompozicijom funkcija i, I_1^3 i I_3^3. Iz Propozicije 1.2.4 zaključujemo da je g rekurzivna. Uočimo da je $f = z$, stoga je i f rekurzivna funkcija. Prema Propoziciji 1.2.4 funkcija h je rekurzivna.

Primjer 1.2.6. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, h(x, y) = y^x$. Prema Primjeru 1.1.8 funkcija h je dobivena primitivnom rekurzijom od f i g gdje su $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $f(x) = 1$ i $g(u, x, y) = uy$.*
Neka je $i : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $i(x, y) = xy$. Prema primjeru 1.2.5 funkcija i je rekurzivna. Za sve $u, x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $g(u, x, y) = i(I_1^3(u, x, y), I_3^3(u, x, y))$. Iz Propozicije 1.2.4 zaključujemo da je g rekurzivna.
Uočimo da je f dobivena kompozicijom od s i z, $f(x) = s(z(x))$ pa je prema Propoziciji 1.2.4 također rekurzivna. Sada slijedi i da je h rekurzivna.

Propozicija 1.2.7. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tada je svaka konstantna funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna.*

Dokaz. Za $c \in \mathbb{N}$ neka je $g_c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g_c(x) = c$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Želimo dokazati da je g_c rekurzivna funkcija za svaki $c \in \mathbb{N}$.
Dokažimo to indukcijom po c.
Vrijedi $g_0(x) = z(I_1^k(x)), \forall x \in \mathbb{N}$. Stoga je g_0 rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija.
Pretpostavimo da je g_c rekurzivna funkcija za neki $c \in \mathbb{N}$.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $g_{c+1} = s(g_c(x))$. Tada je g_{c+1} rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.2.8. *Neka je $a \in \mathbb{N}$ te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Definirajmo funkciju h induktivno na sljedeći način:*

$$h(0) = a,$$
$$h(x+1) = g(h(x), x).$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Definirajmo $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $H(x, y) = h(x)$. Prema Primjeru 1.1.9 funkcija H je dobivena primitivnom rekurzijom od F i G, gdje su $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa

$$F(y) = c,$$

$$G(u, x, y) = g(u, x), \text{ za sve } y, u, x \in \mathbb{N}.$$

Iz Propozicije 1.2.7 slijedi da je F rekurzivna funkcija. Uočimo da je G dobivena kompozicijom funkcija $g, I_1^3 \text{ i } I_2^3$. Stoga je G rekurzivna (Propozicija 1.2.4.1). Sada iz Propozicije 1.2.4.2 slijedi da je H rekurzivna funkcija. Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$h(x) = H(x, y).$$

Posebno, za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $h(x) = H(x, 0)$. Dakle,

$$h(x) = H(I_1^1(x), z(x)), \text{ za svaki } x \in \mathbb{N}.$$

Slijedi da je h kompozicija funkcija $H, I_1^1 \text{ i } z$ te je h rekurzivna funkcija. □

Korolar 1.2.9. *Neka je $a \in \mathbb{N}$ te neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Definirajmo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:*

$$h(0) = a,$$
$$h(x+1) = g(h(x)).$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Definirajmo $g' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, g'(a, b) = g(a)$. Primjetimo da je g' dobivena kompozicijom funkcija g i I_1^2. Stoga je g' rekurzivna. Funkciju h možemo zapisati ovako:

$$h(0) = a,$$

$$h(x+1) = g'(h(x), x).$$

Prema Propoziciji 1.2.8 h je rekurzivna. □

Definicija 1.2.10. *Neka je $ph : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa* $ph(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Propozicija 1.2.11. *Funkcija ph je rekurzivna.*

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned} ph(0) &= 0 \\ ph(x+1) &= x, \ \textit{za svaki } x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} ph(0) &= 0, \\ ph(x+1) &= I_2^2(ph(x), x), \ \textit{za svaki } x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Iz propozicije 1.2.8 slijedi da je *ph* rekurzivna funkcija. □

Definicija 1.2.12. *Neka je $sg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa* $sg(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Neka je $\bar{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $\bar{sg}(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Propozicija 1.2.13. *Funkcije sg i $\bar{sg}$ su rekurzivne.*

Dokaz. Neka su $c_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $c_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantne funkcije s vrijednostima 0 i 1. Vrijedi

$$\begin{aligned} sg(0) &= 0, \\ sg(x+1) &= c_1(sg(x)), \ \textit{za svaki } x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Iz korolara 1.2.9 slijedi da je funkcija *sg* rekurzivna. Analogno

$$\begin{aligned} \bar{sg}(0) &= 1, \\ \bar{sg}(x+1) &= c_0(\bar{sg}(x)), \ \textit{za svaki } x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

pa vrijedi da je $\bar{sg}$ rekurzivna. □

Definicija 1.2.14. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Definiramo funkcije $f + g = \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f \cdot g) &= f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Propozicija 1.2.15. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g$ i $f \cdot g$ rekurzivne.*

Dokaz. Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcije definirana sam $h(u, v) = u + v$ za sve $u, v \in \mathbb{N}$. Prema Primjeru 1.2.3 funkcija h je rekurzivna.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = h(f(x), g(x)).$$

Dakle, $(f + g)(x) = h(f(x), g(x))$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Iz ovoga slijedi da je funkcija $f + g$ dobivena kompozicijom rekurzivnih funkcija h, f, g te je i ona rekurzivna.
Na isti način, koristeći Primjer 1.2.5, dobivamo da je $f \cdot g$ rekurzivna. □

Napomena 1.2.16. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija te neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(x, y) = f(y, x)$. Tada je i g rekurzivna. Naime, prema Primjeru 1.1.4, funkcija g je dobivena kompozicijom funkcija f, I_2^2, I_1^2 pa slijedi da je g rekurzivna.*

Definicija 1.2.17. *Za $x, y \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ako je } x \geqslant y \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za funkciju $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto x \dot{-} y$ kažemo da je modificirano oduzimanje.

Propozicija 1.2.18. *Modificirano oduzimanje je rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa $f(x, y) = y \dot{-} x$. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je

$$y \dot{-} (x + 1) = ph(y \dot{-} x). \tag{1.15}$$

Promotrimo slučaj kada je $y \geqslant x + 1$. Dakle, vrijedi (1.15)

$$\begin{aligned} y \dot{-} (x + 1) &= y - (x + 1) \\ &= y - x - 1 \\ &= (y - x) - 1 \\ &= ph(y - x) \\ &= ph(y \dot{-} x). \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je $y < x + 1$. Tada je $y \leqslant x$ (jer su $x, y \in \mathbb{N}$). Vrijedi,

$$y \dot{-} (x + 1) = 0 = ph(0) = ph(y \dot{-} x).$$

Dakle, i u ovom slučaju vrijedi (1.15).
Za svaki $y \in \mathbb{N}$ očito vrijedi

$$f(0, y) = y = I_1^1(y). \tag{1.16}$$

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Koristeći (1.15) dobivamo da je

$$f(x+1, y) = y \dot{-} (x+1) = ph(y \dot{-} x) = ph(f(x, y)).$$

Dakle,

$$f(x+1, y) = ph(f(x, y)). \tag{1.17}$$

Definirajmo $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N},\ G(a, b, c) = ph(a)$.
Funkcija G je rekurzivna jer je dobivena kompozicijom funkcija ph i I_1^3. Iz definicije od G i (1.17) slijedi da je $f(x+1, y) = G(f(x, y), x, y)$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$.
Iz ovoga i (1.16) zaključujemo da se f dobivena primitivnom rekurzijom od I_1^1 i G, stoga je f rekurzivna. Iz Napomene 1.2.16 slijedi da je funkcija $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(x, y) = f(y, x)$ rekurzivna.
Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $g(x, y) = f(y, x) = x \dot{-} y$, prema tome g je modificirano oduzimanje.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.2.19. *Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana sa $g(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor$. Tada je g rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$f(x, y, k) = \begin{cases} 0, & (y+1)(k+1) > x \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Prema Primjeru 1.2.2 funkcija g dobivena je primjenom μ operatora na f. Stoga je dovoljno pokazati da je f rekurzivna funkcija. Uočimo da za sve $u, v \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$u > v \iff u \dot{-} v \geqslant 1 \iff \overline{sg}(u \dot{-} v) = 0.$$

Stoga za sve $x, y, k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$f(x, y, k) = \overline{sg}((k+1)(y+1) \dot{-} x).$$

Definirajmo funkciju $g' : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa $g'(x, y, k) = (k+1)(y+1) \dot{-} x$. Tada je funkcija f kompozicija funkcija $\overline{sg}$ i g' pa je dovoljno dokazati da je g' rekurzivna funkcija.
Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa $h(x, y, k) = (k+1)(y+1)$. Funkcija g' je kompozicija modificiranog oduzimanja, funkcije h i funkcije I_1^3.
Dovoljno je pokazati da je h rekurzivna funkcija.
Primjetimo da je $h = (s \circ I_3^3)(s \circ I_2^3)$ pa iz Propozicije 1.2.15 slijedi da je h rekurzivna funkcija.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 1.2.20. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f_1, ..., , f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $f_1 + ... + f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $f_1 \cdot ... \cdot f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n. Baza: Očito tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
Pretpostavimo tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Korak: Neka su $f_1, \dots, f_{n+1} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije.
Imamo $f_1 + \cdots + f_{n+1} = (f_1 + \cdots + f_n) + f_{n+1}$ pa iz pretpostavke indukcije i Propozicije 1.2.15 slijedi da je $f_1 + \cdots + f_{n+1} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija.
Analogno dobivamo da je $f_1 \cdot \cdots \cdot f_{n+1} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija.
Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Primjer 1.2.21. *Neka je $abs : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $abs(x, y) = |x - y|$. Tvrdimo da je abs rekurzivna funkcija.
Uočimo prije svega da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x). \tag{1.18}$$

*Naime, ako je $x > y$ onda je $|x - y| = x \dot{-} y$, a $y \dot{-} x = 0$. Analogno zaključujemo u slučaju $x \leqslant y$.
Iz 1.18 slijedi da je abs zbroj modificiranog oduzimanja i funkcije f iz dokaza Propozicije 1.2.18 (za koju znamo da je rekurzivna). Tada je i abs rekurzivna funkcija.*

1.3 Rekurzivni skupovi

Definicija 1.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Definiramo $\chi_S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,*

$$\chi_S = \begin{cases} 1, & x \in S, \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

Za χ_S kažemo da je karakteristična funkcija skupa S.

Definicija 1.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za skup S kažemo da je rekurzivan skup u $\mathbb{N}^k$ ako je njegova karakeristična funkcija $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna.*

Primjer 1.3.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Prazan skup je rekurzivan u $\mathbb{N}^k$ jer je njegova karakteristična funkcija konstantna funkcija. (Primjer 1.1.9.)
Isto tako je $\mathbb{N}^k$ je rekurzivan skup.*

Primjer 1.3.4. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa $f(x, y) = \min\{x, y\}$ i $g(x, y) = max\{x, y\}$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da su f i g rekurzivne funkcije.
Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Dokažimo da je*

$$\min\{x, y\} = x \dot{-} (x \dot{-} y) \tag{1.19}$$

Ako je $x \leqslant y$ onda na lijevoj strani u (1.19) imamo x, a na desnoj $x \dot{-} 0$ što je jednako x.
Ako je $x > y$ onda na lijevoj strani u jednakosti (1.19) imamo y, a na desnoj $x \dot{-} (x - y)$ što je jednako $x - (x - y)$, a to je jednako y.
Neka je $m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje. Tada iz (1.19) slijedi da je $f(x, y) = m(x, m(x, y))$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Iz ovoga slijedi da je f dobivena kompozicijom funkcija m, I_1^2 i m pa zaključujemo da je f rekurzivna.
Dokažimo da vrijedi

$$max\{x, y\} = x + (y \dot{-} x). \tag{1.20}$$

Ako je $x \leqslant y$, na lijevoj strani jednakosti imamo y, a na desnoj $x + y - x = y$.
Ako je $x > y$, na lijevoj strani jednakosti imamo x, a na desnoj $x + 0 = x$.
Dakle, jednakost vrijedi.
Iz (1.20) slijedi da je $g(x, y) = x + m(y, x)$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Prema Propoziciji 1.2.15 i Napomeni 1.2.16 funkcija g je rekurzivna.

Primjer 1.3.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $a \in \mathbb{N}^k$. Tada je $\{a\}$ rekurzivan skup u $\mathbb{N}^k$.*
Dokažimo to.
Imamo $a = (a_1, ..., a_k)$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$, $x = (x_1, ..., x_k)$. Tada je

$$\chi_{\{a\}}(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases} = \begin{cases} 1, & x_1 = a_1, \ \dots \ , \ x_k = a_k \\ 0, & inače. \end{cases}$$

Iz ovoga zaključujemo da je

$$\chi_{\{a\}}(x_1, ..., x_k) = \overline{sg}(|x_1 - a_1|) \cdot ... \cdot \overline{sg}(|x_k - a_k|). \tag{1.21}$$

Za $i \in \{1, ..., k\}$ definirajmo $h_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa $h_i(x_1, ..., x_k) = \overline{sg}(|x_i - a_i|)$. Iz (1.21) slijedi da je $\chi_{\{a\}} = h_1 \cdot ... \cdot h_k$ pa je prema Korolaru 1.2.20 dovoljno dokazati da su $h_1, ..., h_k$ rekurzivne.
Neka je $i \in \{1, ..., k\}$. Neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $g(x_1, ..., x_k) = |x_i - a_i|$.
Neka je abs funkcija iz Primjera 1.2.21 te neka je $c_{a_i} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću a_i. Tada za sve $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$g(x_1, ..., x_k) = abs(I_i^k(x_1, ..., x_k), c_{a_i}(x_1, ..., x_k)).$$

Zaključujemo da je funkcija g dobivena kompozicijom gunkcija abs, I_i^k, c_{a_i} te je stoga rekurzivna.
Funkcija h_i je dobivena kompozicijom funkcija $\overline{sg}$ i g te je također rekurzivna. Time smo dokazali da je jednočlan skup $\{a\}$ rekurzivan.

Propozicija 1.3.6. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka su S i T rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$. Tada su $S \cup T$, $S \cap T$ i S^C rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S \cap T} = \begin{cases} 1, & x \in S \text{ i } x \in T \\ 0, & x \notin S \text{ ili } x \notin T \end{cases} = \chi_S(x) \cdot \chi_T(x),$$

$$\chi_{S \cup T} = sg(\chi_S(x) + \chi_T(x)),$$

$$\chi_{S^C} = \overline{sg}(\chi_S(x)).$$

Stoga su $S \cup T$, $S \cap T$ i S^C rekurzivni skupovi. □

Korolar 1.3.7. *Neka su $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ te neka su $S_0, ..., S_n$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$. Tada su $S_0 \cup ... \cup S_n$ i $S_0 \cap ... \cap S_n$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.
Baza: Za $n = 0$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Korak: Neka su $S_0, \ldots, S_{n+1}$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$. Imamo

$$S_0 \cap \cdots \cap S_{n+1} = (S_0 \cap \cdots \cap S_n) \cap S_{n+1}$$

pa iz induktivne pretpostavke i Propozicije 1.3.6 slijedi da je $S_0, \ldots, S_{n+1}$ rekurzivan skup. Analogno dobivamo da je $S_0 \cup \cdots \cup S_{n+1}$ rekurzivan skup. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi tvrdnja.

Primjer 1.3.8. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Svaki konačan podskup od $\mathbb{N}^k$ je rekurzivan.*
Naime, neka je S konačan podskup od $\mathbb{N}^k$. Ako je $S = \emptyset$ tvrdnja je jasna.
Inače imamo $S = \{a_0, ..., a_n\}$ za neke $a_0, ..., a_n \in \mathbb{N}^k$. Stoga je $S = \{a_0\} \cup ... \cup \{a_n\}$ pa je prema Primjeru 1.3.5 i Korolaru 1.3.7 S rekurzivan skup.

Propozicija 1.3.9. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in S$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa $f(x) = \mu y((x, y) \in S)$ (tj. $f(x) = \min\{y \in \mathbb{N} | (x, y) \in S\}$). Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}$. Tada je

$$(x, y) \in S \iff \chi_S(x, y) = 1 \iff \overline{sg}(\chi_S(x, y)) = 0.$$

Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(x) = \mu y(\overline{sg}(\chi_S(x, y)) = 0). \tag{1.22}$$

Definirajmo $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ na način $g(x, y) = \overline{sg}(\chi_S(x, y))$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, za svaki $y \in \mathbb{N}$. Funkcija g je rekurzivna jer je definirana kao kompozicija dvije rekurzivne dunkcije. Prema (1.22) za sve $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $f(x) = \mu y(g(x, y) = 0)$.
Dakle, f je dobivena primjenom μ operatora na g pa zaključujemo da je f rekurzivna. □

Propozicija 1.3.10. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada je $\{x \in \mathbb{N}^k | f(x) = g(x)\}$ rekurzivan skup.*

Dokaz. Označimo s $S = \{x \in \mathbb{N}^k | f(x) = g(x)\}$. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_S(x) = \overline{sg}(|f(x) - g(x)|).$$

Definirajmo $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa $h(x) = |f(x) - g(x)|$.
Slijedi da je $\chi_S(x) = \overline{sg}(h(x))$. Dovoljno je dokazati da je h rekurzivna, tada je i χ_S rekurzivna kao kompozicija $\overline{sg}$ i h.
Neka je abs funkcija iz Primjera 1.2.21. Tada vrijedi $h(x) = abs(f(x), g(x))$. Funkcija h dobivena je kompozicijom rekurzivnih funkcija abs, f, g te je i ona rekurzivna.
Time smo dokazali da je skup $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$ rekurzivan. □

Primjer 1.3.11. *Neka je $D = \{(x, y) \in \mathbb{N}^3 \mid x|y\}$. Tvrdimo da je D rekurzivan skup.*
Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \neq 0$. Tada vrijedi:

$$x|y \iff \frac{y}{x} \in \mathbb{N} \iff \left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor = \frac{y}{x} \iff x \cdot \left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor = y \iff x \cdot \left\lfloor \frac{y}{(x \dot{-} 1) + 1} \right\rfloor = y$$

Dakle,

$$x|y \iff x \cdot \left\lfloor \frac{y}{(x \dot{-} 1) + 1} \right\rfloor = y \tag{1.23}$$

Uočimo da (1.23) vrijedi i za $x = 0$. Naime, za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi ekvivalencija $0|y \iff 0 = y$. Prema tome (1.23) vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{N}$.
Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(a, b) = \left\lfloor \frac{a}{b+1} \right\rfloor$ za sve $a, b \in \mathbb{N}$. Primjetimo da je h rekurzivna po Propoziciji 1.2.19. Prema (1.23) i definiciji skupa D za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(x, y) \in D \iff x \cdot h(y, x \dot{-} 1) = y \tag{1.24}$$

Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = x \cdot h(y, x \dot{-} 1)$ i $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g(x, y) = y$.
Dakle,

$$(x, y) \in D \iff f(x, y) = g(x, y),$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$ što slijedi iz (1.24).
Iz ovoga slijedi $D = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | f(x, y) = g(x, y)\}$.
Stoga je prema Propoziciji 1.3.10 dovoljno dokazati da su f i g rekurzivne funkcije.
Funkcija g je rekurzivna jer je $g = I^2_2$.
Funkcija f je umnožak I^2_1 i h', gdje je $h' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h'(x, y) = h(y, x \dot{-} 1)$. Sada je dovoljno dokazati da je h' rekurzivna.
Primjetimo da je

$$x \dot{-} 1 = ph(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$ *te da je* h' *dobivena kompozicijom funkcija* h, I_2^2 *i* ph *te je stoga* h' *rekurzivna.*
Time smo dokazali da je D *rekurzivan skup.*

Primjer 1.3.12. *Skup* $2\mathbb{N}$ *svih parnih brojeva je rekurzivan.*
Neka je D *skup iz Primjera 1.3.11. Neka je* $x \in \mathbb{N}$.
Tada je $x \in 2\mathbb{N}$ *ako i samo ako* $2|x$ *pa je*

$$x \in 2\mathbb{N} \iff (2, x) \in D.$$

Iz ovoga slijedi da je

$$\chi_{2\mathbb{N}}(x) = \chi_D(2, x)$$

za sve $x \in \mathbb{N}$. *Neka je* c_2 *konstantna funkcija s vrijednošću* 2.
Iz prethodne jednadžbe zaključujemo da je $\chi_{2\mathbb{N}}$ *dobivena kompozicijom rekurzivnih funkcija* χ_D, c_2, I_1^1 *te je* $\chi_{2\mathbb{N}}$ *rekurzivna. Tada je i skup* $2\mathbb{N}$ *rekurzivan.*

Skup $2\mathbb{N} + 1$ *svih neparnih prirodnih brojeva je također rekurzivan jer je* $2\mathbb{N} + 1 = 2\mathbb{N}^C$

1.4 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$

Definicija 1.4.1. *Neka su* $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$. *Za funkcije* $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *kažemo da su komponentne funkcije od* f *ako za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$ *vrijedi* $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$.
Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ *kažemo da je rekurzivna ako su njene komponentne funkcije rekurzivne.*

Lema 1.4.2. *Neka su* $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka su* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ *i* $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *rekurzivne funkcije. Tada je* $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $(g \circ f)(x) = (g(f(x)) = g(f_1(x), ..., f_n(x))$. Zaključujemo da je $g \circ f$ kompozicija funkcija $g, f_1, ..., f_n$ pa slijedi da je $g \circ f$ rekurzivna funkcija (da su $f_1, ..., f_n$ rekurzivne slijedi iz činjenice da je f rekurzivna funkcija). □

Propozicija 1.4.3. *Neka su* $k, n, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka su* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ *i* $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^l$ *rekurzivne funkcije. Tada je* $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ *rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $g_1, ..., g_l : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od g. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (g_1(f(x)), ..., g_l(f(x))) = ((g_1 \circ f)(x), ..., (g_l \circ f)(x)).$$

Iz ovoga vidimo da su $g_1 \circ f, ..., g_l \circ f$ komponentne funkcije od $g \circ f$. Iz Leme 1.4.2 slijedi da su $g_1 \circ f, ..., g_l \circ f$ rekurzivne pa je i $g \circ f$ rekurzivna. □

Propozicija 1.4.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Tada je skup $\{x \in \mathbb{N}^k | f(x) = g(x)\}$ rekurzivan.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$. Neka su $f_1, \ldots, f_n$ komponentne funkcije od f te neka su $g_1, \ldots, g_n$ komponentne funkcije od g. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$x \in S \iff f_1(x) = g_1(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x).$$

Definirajmo skupove $S_1 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f_1(x) = g_1(x)\}$, ..., $S_n = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f_n(x) = g_n(x)\}$. Tada je $S = S_1 \cap ... \cap S_n$. Prema Propoziciji 1.3.10, $S_1, ..., S_n$ su rekurzivni skupovi pa je po Korolaru 1.3.7 S također rekurzivan. □

Lema 1.4.5. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Neka su $S_1, ..., S_n$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $x \in S_i$. Definiramo funkciju $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & \textit{ako je } x \in S_1 \\ \vdots \\ f_n(x), & \textit{ako je } x \in S_n. \end{cases}$$

Tada je F rekurzivna.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$F(x) = \chi_{S_1(x)} \cdot f_1(x) + ... + \chi_{S_n} \cdot f_n(x)$$

Iz Propozicije 1.2.15 i Korolara 1.2.20 slijedi da je F rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.4.6. *Neka su $k, n, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije. Neka su $S_1, ..., S_n$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstven $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $x \in S_i$. Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ sa*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & \textit{ako je } x \in S_1 \\ \vdots \\ f_n(x), & \textit{ako je } x \in S_n. \end{cases}$$

Tada je F rekurzivna funkcija.

Dokaz. Za $i \in \{1, ..., n\}$ neka su $f_i^1, ..., f_i^l : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od $f_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$. Nadalje, neka su $F_1, ..., F_l : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od F. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi:

$$(F^1(x), ..., F^l(x)) = \begin{cases} (f_1^1(x), ..., f_1^l(x)), \text{ ako je } x \in S_1 \\ \vdots \\ (f_n^1(x), ..., f_n^l(x)), \text{ ako je } x \in S_n. \end{cases}$$

Neka je $j \in \{1, ..., l\}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$F^j(x) = \begin{cases} f_j^1(x), \text{ ako je } x \in S_1 \\ \vdots \\ f_j^1(x), \text{ ako je } x \in S_n. \end{cases}$$

Prema Lemi 1.4.5 F^j je rekurzivna. Tada je i F rekurzivna jer su joj komponentne funkcije rekurzivne. □

Poglavlje 2

Rekurzivnost u $\mathbb{R}$

2.1 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$

Definicija 2.1.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ funkcija. Kažemo da je f rekurzivna funkcija ako postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot v(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Uočimo sljedeće: ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija onda je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.
Naime, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot f(x)$, gdje je $c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 0.

Lema 2.1.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija. Tada postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = a(x) - b(x)$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Prema definiciji postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot v(x)$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$.
Definirajmo S tako da je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid u(x) \in 2\mathbb{N}\}$. Tada je karakteristična funkcija od S oblika

$$\chi_S(x) = \chi_{2\mathbb{N}}(u(x)).$$

Iz ovoga i Primjera 1.3.12 zaključujemo da je S rekurzivan skup.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo

$$f(x) = \begin{cases} v(x), & x \in S \\ -v(x), & x \in S^C \end{cases} = \begin{cases} v(x) - 0, & x \in S \\ 0 - v(x), & x \in S^C \end{cases} \tag{2.1}$$

Definirajmo funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$.

$$a(x) = \begin{cases} v(x), \ x \in S \\ 0, \ x \in S^C \end{cases}, \ b(x) = \begin{cases} 0, \ x \in S \\ v(x), \ x \in S^C. \end{cases}$$

Prema Lemi 1.4.5 a, b su rekurzivne funkcije. Iz 2.1 slijedi $f(x) = a(x) - b(x)$ za sve $x \in S$. □

Lema 2.1.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ funkcija. Pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = a(x) - b(x)$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid a(x) < b(x)\}$. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_S(x) = sg(b(x) \dot{-} a(x)).$$

Iz ovoga zaključujemo da je funkcija χ_S dobivena kompozicijom funkcije sg i funkcije koja je dobivena kompozicijom modificiranog oduzimanja, b i a. Dakle, χ_S je rekurzivna i skup S je rekurzivan. Primjetimo da vrijedi

$$f(x) = \begin{cases} -|a(x) - b(x)|, \ x \in S \\ |a(x) - b(x)|, \ x \in S. \end{cases}$$

Funkcija $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $h(x) = abs(a(x), b(x))$ je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija abs, a i b. Vrijedi

$$f(x) = (-1)^{\chi_S(x)} \cdot h(x)$$

pa je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. □

Definicija 2.1.4. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ funkcije. Na očiti način definiramo $f + g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Nadalje, definiramo funkcije $-f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $|f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ sa $(-f)(x) = -f(x)$ i $|f|(x) = |f(x)|$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Propozicija 2.1.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije $f + g, f \cdot g, -f, |f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne.*

Dokaz. Po definiciji postoje rekurzivne funkcije $u, v, a, b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot v(x) \ \text{ i } ig(x) = (-1)^{a(x)} \cdot b(x) \text{ za sve } x \in \mathbb{N}^k.$$

Slijedi da je

$$f(x) \cdot g(x) = (-1)^{v(x)+a(x)} \cdot v(x) \cdot b(x),$$

za sve $x \in \mathbb{N}$.
Prema Propozicji 1.2.15 funkcije $u + a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $v \cdot b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ su rekurzivne pa slijedi da je $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(-f)(x) = (-1)^{u(x)+1} \cdot v(x) = (-1)^{s(u(x))} \cdot v(x)$$

pa je očito da je $-f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija.
Primjetimo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$|f(x)| = |(-1)^{u(x)} \cdot v(x)| = v(x)$$

te je f rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ pa onda i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.
Prema Lemi 1.4.2 postoje rekurzivne funkcije $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ i $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f_1(x) + g_1(x) - (f_2(x) + g_2(x)) \\ &= (f_1 + g_1)(x) - (f_2 + g_2)(x).\end{aligned}$$

Funkcije $f_1 + g_1,\ f_2 + g_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ su rekurzivne prema Propoziciji 1.2.15. Tada je i $f + g$ rekurzivna prema Lemi 2.1.3. □

Propozicija 2.1.6. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ i $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Po definiciji postoje $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(y) = (-1)^{u(y)} \cdot v(y)$ za sve $y \in \mathbb{N}^k$. Uzmimo $x \in \mathbb{N}^n$. Tada je

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (-1)^{u(g(x))} \cdot v(g(x)) = (-1)^{(u \circ g)(x)} \cdot (v \circ g)(x).$$

Prema Propoziciji 1.4.3, $u \circ g,\ v \circ g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ su rekurzivne funkcije pa je i funkcija $f \circ g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}$ rekurzivna. □

2.2 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$

Definicija 2.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija. Kažemo da je f rekurzivna funkcija ako postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $w(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}$.*

Uočimo sljedeće: $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $w(x) \neq 0$ i $f(x) = \frac{a(x)}{w(x)}$.

Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivna funkcija. Tada je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Naime, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $f(x) = \frac{f(x)}{c(x)}$, gdje je $c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 1.

Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcije. Tada funkcije $f + g$, $f \cdot g$, $-f$, $|f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ definiramo na očiti način. Ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, definiramo $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ sa $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$.

Primjer 2.2.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Tada je svaka konstantna funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna. Naime, ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ konstantna funkcija, onda postoje $a, b, c \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$ takvi da je $f(x) = (-1)^a \cdot \frac{b}{c}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*
Neka su $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ konstantne funkcije s vrijednostima a, b i c. Znamo da su u, v, w rekurzivne funkcije, a očito vrijedi $f(x) = (-1)^{u(x)} \cdot \frac{v(x)}{w(x)}$ pa je onda i f rekurzivna.

Propozicija 2.2.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g$, $f \cdot g$, $-f$, $|f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne. Ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, onda je funkcija $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.*

Dokaz. Znamo da postoje rekurzivne funkcije $a, a' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $w, w' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = \frac{a(x)}{w(x)} \;\; i \;\; g(x) = \frac{a'(x)}{w'(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Slijedi da je

$$(f \cdot g)(x) = \frac{(a \cdot a')(x)}{(w \cdot w')(x)}, \; \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Stoga je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija.
Na isti način, koristeći da je $(-f)(x) = \frac{(-a)(x)}{w(x)}$ i $|f(x)| = \frac{|a(x)|}{w(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, zaključujemo da su $-f, |f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Primjetimo da je

$$(f + g)(x) = \frac{a(x)}{w(x)} + \frac{a'(x)}{w'(x)} = \frac{a(x) \cdot w'(x) + a'(x) \cdot w(x)}{w(x) \cdot w'(x)}.$$

Dakle,

$$(f + g)(x) = \frac{a(x) \cdot w'(x) + a'(x) \cdot w(x)}{w(x) \cdot w'(x)},$$

pri čemu na w i w' u brojniku gledamo kao rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Prema Propoziciji 2.1.5, funkcija $a \cdot w' + w \cdot a' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ je rekurzivna, a prema Korolaru 1.2.20 funkcija $w \cdot w' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ je rekurzivna. Tada je i $f + g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.

Pretopostavimo da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Znamo da postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je za sve $x \in \mathbb{N}^k$, $w(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{u(x)} \frac{v(x)}{w(x)}$. Budući da je $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{N}^k$, vrijedi da je i $v(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{N}^k$.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Vrijedi

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(-1)^{u(x)} \frac{v(x)}{w(x)}} = \frac{1}{(-1)^{u(x)}} \cdot \frac{w(x)}{v(x)} = \frac{(-1)^{2u(x)}}{(-1)^{u(x)}} \cdot \frac{w(x)}{v(x)} = (-1)^{u(x)} \frac{w(x)}{v(x)}.$$

Dakle, $\frac{1}{f(x)} = (-1)^{u(x)} \frac{w(x)}{v(x)}$.
Po definiciji imamo da je $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. $\square$

Napomena 2.2.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada koristeći prethodnu propoziciju, analogno kao u dokazu Korolara 1.2.20 vidimo da su i funkcije $f_1 + ... + f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i $f_1 \cdot ... \cdot f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne.*

Propozicija 2.2.5. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada su skupovi $\{x \in \mathbb{N}^k | f(x) = 0\}$, $\{x \in \mathbb{N}^k | f(x) > 0\}$, $\{x \in \mathbb{N}^k | f(x) \geqslant 0\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Neka je $S_1 = \{x \in \mathbb{N}^k | f(x) = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{N}^k | f(x) > 0\}$ i $S_3 = \{x \in \mathbb{N}^k | f(x) \geqslant 0\}$.
Budući da je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna, možemo je zapisati kao $f(x) = (-1)^{u(x)} \frac{v(x)}{w(x)}$, gdje su $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $w(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{N}^k$.
Primjetimo $f(x) = 0 \iff v(x) = 0$. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S_1} = \overline{sg}(v(x)).$$

Funkcija χ_{S_1} je rekurzivna kao kompozicija dvije rekurzivne funkcije, $\overline{sg}$ i v pa je i skup S_1 rekurzivan.
Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S_2} = sg(v(x)) \cdot \chi_{2\mathbb{N}}(u(x)).$$

Funkcija χ_{S_2} je rekurzivna kao produkt dviju rekurzivnih funkcija. Tada je i skup S_2 rekurzivan.
Skup S_3 možemo zapisati kao $S_3 = S_1 \cup S_2$. Tada je S_3 rekurzivan skup jer je dobiven unijom dva rekurzivna skupa. $\square$

Korolar 2.2.6. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su skupovi $S_1 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}$, $S_3 = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $h = g + (-f)$. Iz propozicije 2.1.5 slijedi da je h rekurzivna funkcija.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Imamo $h(x) = g(x) - f(x)$ pa je stoga

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff f(x) = g(x) \\ h(x) > 0 &\iff f(x) < g(x) \\ h(x) \geqslant 0 &\iff f(x) \leqslant g(x). \end{aligned}$$

Prema tome $S_1 = \{x \in \mathbb{N}^k | h(x) = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{N}^k | h(x) > 0\}$ i
$S_3 = \{x \in \mathbb{N}^k | h(x) \geqslant 0\}$.
Tvrdnja korolara slijedi iz Propozicije 2.2.5 □

Propozicija 2.2.7. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Znamo da postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $w(y) \neq 0$ i $f(y) = (-1)^{u(y)} \cdot \frac{v(y)}{w(y)}$, $\forall y \in \mathbb{N}^k$.
Neka je $x \in \mathbb{N}^n$. Tada je

$$f(g(x)) = (-1)^{u(g(x))} \cdot \frac{v(g(x))}{w(g(x))}.$$

Dakle, $(f \circ g)(x) = (-1)^{(u \circ g)(x)} \cdot \frac{(v \circ g)(x)}{(w \circ g)(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^n$.
Iz Leme 1.4.2 slijedi da je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.2.8. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije te neka su $S_1, ..., S_n$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstven $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka je $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ \vdots & \\ f_n(x), & x \in S_n \end{cases}.$$

Tada je F rekurzivna.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$F(x) = \chi_{S_1}(x) \cdot f_1(x) + ... + \chi_{S_n}(x) \cdot f_n(x).$$

Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Funkcija $\chi_{S_i} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ je rekurzivna pa je rekurzivna i kao funkcija $\chi_{S_i} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, a onda i kao funkcija $\chi_{S_i} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$.
Iz Propozicije 2.2.3 i Napomene 2.2.4 slijedi da je F rekurzivna funkcija. □

2.3 Rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$

Definicija 2.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}^k \backslash \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Kažemo da je f rekurzivna funkcija ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n}$.*
Za funkciju F s ovim svojstvom kažemo da je rekurzivna aproksimacija funkcije f.

Napomena 2.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.*
Naime, neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana sa $F(x,n) = f(x)$, $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$.
Tada je $F = f \circ g$, pri čemu je $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana sa
$g(x_1, ..., x_k, n) = (x_1, ..., x_k)$.
Funkcija g je rekurzivna jer su njene komponentne funkcije rekurzivne (to su funkcije $I_1^{k+1}, ..., I_k^{k+1}$). Prema Propoziciji 2.2.7, $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna funkcija.
Iz definicije od F očito je $|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n}$, za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $n \in N$.
Prema tome f je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.

Propozicija 2.3.3. *Neka su $k, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}^k$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^l \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f. (Znamo da takav F postoji po definiciji.) Tada za sve $y \in \mathbb{N}^k$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|f(y) - F(y,n)| < 2^{-n}$.
Stoga za sve $x \in \mathbb{N}^l$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(g(x)) - F(g(x), n)| < 2^{-n}. \tag{2.2}$$

Definiramo $H : \mathbb{N}^{l+1} \to \mathbb{Q}$ sa $H(x,n) = F(g(x), n)$, $x \in \mathbb{N}^l$, $n \in \mathbb{N}$.
Prema (2.2) za sve $x \in \mathbb{N}^l$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|f(g(x)) - H(x,n)| < 2^{-n}$. Stoga je dovoljno pokazati da je H rekurzivna funkcija.
Neka je $G : \mathbb{N}^{l+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ funkcija definirana sa $G(x,n) = (g(x), n)$, $x \in \mathbb{N}^l$, $n \in \mathbb{N}$.
Iz definicije funkcije H slijedi da je $H(x,n) = F(G(x,n))$, $x \in \mathbb{N}^l$, $n \in \mathbb{N}$ pa je $H = F \circ G$.
Stoga je prema Propoziciji 2.2.7 dovoljno dokazati da je G rekurzivna funkcija.
Neka su $g_1, ..., g_k : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od g. Neka su $G_1, .., G_{k+1} : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od G. Neka je $j \in \{1, ..., k\}$.
Tada je $G_j(x,n) = g_j(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^l$.
Stoga je G_j kompozicija funkcija $g_j, I_1^{l+1}, ..., I_l^{l+1}$ te je G_j rekurzivna funkcija.
Dakle, $G_1, ..., G_k$ su rekurzivne funkcije.
Vrijedi $G_{k+1}(x,n) = n$ za sve $x \in \mathbb{N}^l$, $n \in \mathbb{N}$, tj. $G_{k+1} = I_{l+1}^{l+1}$ pa je G_{k+1} rekurzivna funkcija.
Pokazali smo da su sve komponetne funkcije od G rekurzivne pa je onda i G rekurzivna.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 2.3.4. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada su i funkcije $-f, |f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne.*

Dokaz. Postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n}$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$.
Imamo $|(-f)(x) - (-F(x,n))| < 2^{-n}$.
Definiramo $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $G(x,n) = -F(x,n)$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. Funkcija G je rekurzivna prema Propoziciji 2.2.7 te je onda i $-f$ rekurzivna jer vrijedi

$$|(-f)(x) - G(x,n)| < 2^{-n},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$.

Imamo $||f(x)| - |F(x,n)|| < 2^{-n}$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. Zapravo vrijedi

$$||f(x)| - |F(x,n)|| \leqslant |f(x) - F(x,n)| < 2^{-n}.$$

Definiramo $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $H(x,n) = |F(x,n)|$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. Funkcija H je rekurzivna prema Propoziciji 2.2.7 te je onda i f rekurzivna te vrijedi

$$||f(x)| - |H(x,n)|| < 2^{-n},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. □

Propozicija 2.3.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je funkcija $f + g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna.*

Dokaz. Znamo da postoje rekurzivne funkcije $F, G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$\begin{aligned} &|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n} \\ &|g(x) - G(x,n)| < 2^{-n}, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (F+G)(x,n)| &= |f(x) + g(x) - (F(x,n) + G(x,n)| \\ &= |f(x) - F(x,n) + g(x) - G(x,n)| \\ &\leqslant |f(x) - F(x,n)| + |g(x) - G(x,n)| \\ &< 2^{-n} + 2^{-n} = 2 \cdot 2^{-n}. \end{aligned}$$

Dakle, $|(f+g)(x) - (F+G)(x,n)| < 2 \cdot 2^{-n}$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. Stoga za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|(f+g)(x) - (F+G)(x,n+1)| < 2 \cdot 2^{-n+1} = 2^{-n}.$$

Definiramo $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $H(x,n) = (F+G)(x,n+1)$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$.
Tada vrijedi $|(f+g)(x) - H(x,n)| < 2^{-n}$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. Dovoljno je pokazati da je H rekurzivna.
Definiramo $K : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ sa $K(x,n) = (x, n+1)$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. Tada za sve $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi $H(x,n) = (F+G)(K(x,n))$ pa je $H = (F+G) \circ K$. Funkcija $F+G$ je rekurzivna prema Propoziciji 2.2.7 te je dovoljno pokazati da je funkcija K rekurzivna.
Neka su $K_1, ..., K_{k+1}$ komponentne funkcije od K. Primjetimo da vrijedi

$$\begin{aligned} K_1(x,n) &= I_1^{k+1}(x,n) \\ &\vdots \\ K_k(x,n) &= I_k^{k+1}(x,n) \\ K_{k+1}(x,n) &= s(I_{k+1}^{k+1}(x,n)) \end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da su $K_1, ..., K_{k+1}$ rekurzivne funkcije te je i K rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

Lema 2.3.6. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x,y) \in S$. Tada postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in S$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $\varphi(x) = \mu y((x,y) \in S)$.
Prema Propoziciji 1.3.9 funkcija φ je rekurzivna te je očito da je to upravo tražena funkcija. $\square$

Lema 2.3.7. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da su $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ i $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije te $q \in \langle 0, 1\rangle$ tako da je $|f(x) - F(x,n)| \leqslant M(x) \cdot q^n$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Odaberimo $u, v \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ takve da je $q < \frac{u}{v} < 1$.
Neka je $S = \{(x,n,m) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x \in \mathbb{N}^k, m, n \in \mathbb{N} \text{ i } M(x) \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^m < 2^{-n}\}$.
Dokažimo da je S rekurzivan skup.
Neka je $\tilde{f}(x,m,n) : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$, $\tilde{f}(x,m,n) = M(x) \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^m$ te neka je $\tilde{g}(x,m,n) : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$, $\tilde{g}(x,m,n) = 2^{-n}$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, m, n \in \mathbb{N}$.
Zapravo imamo

$$S = \{(x,m,n) \in \mathbb{N}^{k+2} | x \in \mathbb{N}^k, m, n \in \mathbb{N}, \tilde{f}(x,m,n) < \tilde{g}(x,m,n)\}.$$

Funkcija $\tilde{f}$ zapravo je umnožak dviju funkcija, $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$,

$$\tilde{f}_1(x,m,n) = M(x) \text{ i } \tilde{f}_2(x,m,n) = \left(\frac{u}{v}\right)^m$$

Funkcija $\tilde{f}$ je rekurzivna ako su funkcija $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ rekurzivne. Funkcija $\tilde{f}_1$ je rekurzivna jer je definirana kao kompozicija funkcija M i $I_1^{k+2}, \dots, I_k^{k+2}$. Funkciju $\tilde{f}_2$ možemo zapisati kao $\tilde{f}_2(x, m, n) = \frac{u^m}{v^m}$. Brojnik i nazivnik ovog razlomka možemo gledati kao funkcije $\mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ koje su dobivene kompozijom funkcije E, konstantne funkcije i I_{k+1}^{k+2}, gdje je $E : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $E(x, y) = x^y$. Te su funkcije rekurzivne te je tada i $\tilde{f}_2$ rekurzivna funkcija.
Funkcija $\tilde{g}$ je očito također rekurzivna. Sad po korolaru vrijedi da je S rekurzivan skup.
Pretpostavimo da su $x \in \mathbb{N}^k$ i $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $(x, m, n) \in S$. Tada je

$$M(x) \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^m < 2^{-n}$$

pa je

$$|f(x) - F(x, m)| \leqslant M(x) \cdot q^m \leqslant M(x) \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^m < 2^{-n}.$$

Dakle, za sve

$$(x, n, m) \in S \Rightarrow |f(x) - F(x, m)| < 2^{-n}. \tag{2.3}$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, n, m) \in S$. To je jasno ako je $M(x) = 0$.
Pretpostavimo $M(x) \neq 0$. Definirajmo $\varepsilon := \frac{2^{-n}}{M(x)}$. Nadalje, neka je (z_m) niz realnih brojeva definiran sa $z_m = \left(\frac{u}{v}\right)^m$.
Zbog toga što je $0 < \frac{u}{v} < 1$, poznato je da $z_m \longrightarrow 0$. Stoga postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geqslant m_0$ vrijedi $|z_m - 0| < \varepsilon$.
Odaberimo bilo koji $m \geqslant m_0$. Tada je $z_m < \varepsilon$, tj. $\left(\frac{u}{v}\right)^m < \frac{2^{-n}}{M(x)}$, što povlači da je $M(x) \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^m < 2^{-n}$.
Dakle, $(x, n, m) \in S$ te smo time dokazali da za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $n \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da $(x, n, m) \in S$.
Iz Leme 2.3.6 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, n, \varphi(x, n)) \in S$, za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $n \in \mathbb{N}$.
Sada iz (2.3) slijedi da za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - F(x, \varphi(x, n))| < 2^{-n}. \tag{2.4}$$

Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $G(x, n) = F(x, \varphi(x, n))$.
Funkcija G je rekurzivna zato što je $G = F \circ H$, gdje je H funkcija $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$, $H(x, n) = (x, \varphi(x, n))$ (očito je da su komponentne funkcije od H rekurzivne). Iz definicije od G i (2.4) slijedi da je

$$|f(x) - G(x, n)| < 2^{-n},$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$. Iz ovoga se jasno vidi da je f rekurzivna. $\square$

Lema 2.3.8. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada postoji rekurzivna funkcija $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $|f(x)| < M(x)$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Budući da je f rekurzivna funkcija, postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi $|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n}$, za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$.
Posebno, za $n = 0$ vrijedi $|f(x) - F(x,0)| < 1$.
Nadalje, vrijedi

$$|f(x)| - |F(x,0) \leqslant |f(x) - F(x,0)| < 1$$

pa je

$$|f(x)| \leqslant 1 + |F(x,0)|. \tag{2.5}$$

Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $G(x) = 1 + |F(x,0)|$. Koristeći Propoziciju 2.2.3 zaključujemo da je G rekurzivna funkcija. Stoga postoje rekurzivne funkcije $u, v, w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ za koje vrijedi $G(x) = (-1)^{w(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}$.
Iz (2.5) slijedi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(x)| \leqslant G(x) &\leqslant (-1)^{w(x)} \frac{u(x)}{v(x)} \\ &\leqslant \frac{u(x)}{v(x)} \leqslant u(x) < u(x) + 1 \end{aligned}$$

Dakle, $|f(x)| < u(x) + 1$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.
Definirajmo $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $M(x) = u(x) + 1$.
Očito je M rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.3.9. *Neka je $x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Budući da su f i g rekurzivne funkcije, postoje rekurzivne funkcije $F, G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi

$$|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n} \text{ i } |g(x) - G(x,n)| < 2^{-n}. \tag{2.6}$$

Prema Lemi 2.3.8 postoje rekurzivne funkcije $M, M' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$|g(x)| < M(x) \tag{2.7}$$

i

$$|f(x)| < M'(x).$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $n \in \mathbb{N}$. Koristeći (2.6) dobivamo

$$|F(x,n)| - |f(x)| \leqslant |F(x,n) - f(x)| < 2^{-n} \leqslant 1$$

pa je

$$|F(x,n)| < 1 + |f(x)|$$

$$|F(x,n)| < 1 + M'(x). \tag{2.8}$$

Koristeći (2.6), (2.7), (2.8) dobivamo

$$\begin{aligned}
&|f(x) \cdot g(x) - F(x,n) \cdot G(x,n)| \\
&= |f(x) \cdot g(x) - F(x,n) \cdot g(x) + F(x,n) \cdot g(x) - F(x,n) \cdot G(x,n)| \\
&= |(f(x) - F(x,n)) \cdot g(x) + F(x,n) \cdot (g(x) - G(x,n))| \\
&\leqslant |f(x) - F(x,n)| \cdot |g(x)| + |F(x,n) \cdot |g(x)| - G(x,n)| \\
&\leqslant 2^{-n} \cdot M(x) + (1 + M'(x)) \cdot 2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (1 + M(x) + M'(x)).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$|(f \cdot g)(x) - (F \cdot G)(x,n)| < (1 + M(x) + M'(x)) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

za sve $x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}$.
Prema Lemi 2.3.7 slijedi da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.3.10. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $\frac{1}{f} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Budući da je f rekurzivna funkcija postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi $|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n}$ za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $n \in \mathbb{N}$.

Pomoćna tvrdnja 1. Ako su $x \in \mathbb{N}^k$ i $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $m \cdot 2^{-n} < |F(x,n)|$, onda je $(m-1) < |f(x)|$.
Dokažimo ovu tvrdnju. Pretpostavimo da je $m \cdot 2^{-n} < |F(x,n)|$.
Tada je

$$(m-1) \cdot 2^{-n} < |F(x,n)| - 2^{-n}. \tag{2.9}$$

Vrijedi $|F(x,n)| - |f(x)| \leqslant |F(x,n) - f(x)| < 2^{-n}$ pa je

$$|F(x,n)| - 2^{-n} < |f(x)|. \tag{2.10}$$

Iz (2.9) i (2.10) slijedi $(m-1) \cdot 2^{-n} < |f(x)|$. Time je ova pomoćna tvrdnja dokazana.

Pomoćna tvrdnja 2. Ako su $x \in \mathbb{N}^k$ i $n, m, n' \in \mathbb{N}$ takvi da je $n' \geqslant n$, $m \cdot 2^{-n} < |f(x)|$, onda je $(m-1) \cdot 2^{-n} < |F(x,n')|$.

Pretpostavimo da je $m \cdot 2^{-n} < |f(x)|$. Tada je $(m-1) \cdot 2^{-n} < |f(x)| - 2^{-n}$.
Vrijedi
$$|f(x)| - |F(x, n')| \leqslant |f(x) - F(x, n')| < 2^{-n'} \leqslant 2^{-n}$$
pa je
$$|f(x)| - 2^{-n} < |F(x, n')|.$$
Slijedi $(m-1) \cdot 2^{-n} < |F(x, n')|$.
Time je Pomoćna tvrdnja 2 dokazana.

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Iz $f(x) \neq 0$ slijedi $|f(x)| > 0$ pa je i $\frac{|f(x)|}{4} > 0$. Stoga postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $2^{-n} < \frac{|f(x)|}{4}$.
Dakle, $4 \cdot 2^{-n} < |f(x)|$ pa iz *Pomoćne tvrdnje 2* slijedi da je $3 \cdot 2^{-n} < |F(x, n)|$.
Imamo sljedeći zaključak: za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $3 \cdot 2^{-n} < |F(x, n)|$.
Definirajmo
$$S = \{(x, n) \in \mathbb{N}^{k+1} | x \in \mathbb{N}^k, n \in \mathbb{N}, 3 \cdot 2^{-n} < |F(x, n)|\}.$$

Neka su $f', g' : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa $f'(x, n) = 3 \cdot 2^{-n}$ i $g'(x, n) = |F(x, n)|$.
Funkcija g' je rekurzivna prema Propoziciji 2.2.3.
Za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(x, n) = (-1)^0 \cdot \frac{3}{2^n}$. Koristeći Primjer 1.1.8 zaključujemo da je f' rekurzivna.
Vrijedi $S = \{z \in \mathbb{N}^{k+1} | f'(z) < g'(z)\}$. Skup S je rekurzivan prema Propoziciji 2.2.5.
Znamo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $3 \cdot 2^{-n} < |F(x, n)|$.
Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, n) \in S$. Prema Lemi 2.3.8 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, \varphi(x)) \in S$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je $(x, \varphi(x)) \in S$ pa je
$$3 \cdot 2^{-\varphi(x)} < |F(x, \varphi(x))|. \tag{2.11}$$
Iz *Pomoćne tvrdnje 1* slijedi da je
$$2 \cdot 2^{-\varphi(x)} < |f(x)|. \tag{2.12}$$
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada iz *Pomoćne tvrdnje 2* slijedi da je
$$2^{\varphi(x)} < |F(x, \varphi(x) + n)|.$$
Iz ovoga slijedi da je
$$F(x, \varphi(x) + n) \neq 0 \ \text{ i } \ \frac{1}{|F(x, \varphi(x) + n)|} < 2^{\varphi(x)}. \tag{2.13}$$

Iz (2.12) slijedi da je $\frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{2} \cdot 2^{\varphi(x)}$.
Imamo

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x, \varphi(x) + n)} \right| &= \left| \frac{F(x, \varphi(x) + n) + f(x)}{f(x) \cdot F(x, \varphi(x + n))} \right| \\
&= |F(x, \varphi(x) + n) - f(x)| \cdot \frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{1}{|F(x, \varphi(x + n)|} \\
&< 2^{-(\varphi(x)+n)} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{\varphi(x)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2^{-n+\varphi(x)}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F(x, \varphi(x) + n)} \right| < 2^{-n+\varphi(x)-1} < 2^{-n} \cdot 2^{\varphi(x)}.$$

Definirajmo funkciju $F' : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $F'(x, n) = F(x, \varphi(x) + n)$. Funkcija F' je rekurzivna zato što je ona zapravo kompozicija funkcija F i H, $F' = F \circ H$, gdje je $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^{k+1}$ funkcija definirana sa $H(x, n) = (x, \varphi(x) + n)$. Funkcija H je očito rekurzivna.
Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $G = \frac{1}{F'}$. Budući da je F' rekurzivna funkcija, tada je i G rekurzivna funkcija prema Propoziciji 2.2.3.
Sada definiramo još funkciju $M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $M(x) = 2^{\varphi(x)}$, koja je kompozicija potencije, φ i konstantne funkcije te je M rekurzivna.
Vrijedi nejednakost:

$$\left| \frac{1}{f(x)} - G(x, n) \right| < M(x) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Prema Lemi 2.3.7 funkcija $\frac{1}{f}$ je rekurzivna. □

2.4 Izračunljivi brojevi

Ako je $\alpha \in \mathbb{R}$, znamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da $|\alpha - q| < 2^{-n}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 2.4.1. *Kažemo da je α izračunljiv broj ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi $|\alpha - f(x)| < 2^{-n}$.*

Primjer 2.4.2. *Svaki racionalan broj je izračunljiv.*
Naime, ako je $\alpha \in \mathbb{Q}$ te $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ konstantna funkcija s vrijednošću α, onda je očito

$$|\alpha - f(n)| = 0 < 2^{-n}, \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Iz Primjera 2.2.2 slijedi da je α izračunljiv.

Propozicija 2.4.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija. Tada je $f(x)$ izračunljiv broj za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Budući da je f rekurzivna funkcija znamo da postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n}.$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Definirajmo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sa $g(n) = F(x,n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+1}$, $\varphi(n) = (x,n)$. Funkcija φ je očito rekurzivna.
Dakle, $g(n) = F(x,n) = F(\varphi(n))$, tj. $g = F \circ \varphi$ te je g rekurzivna prema Propoziciji 2.2.7.
Jasno je da je $|f(x) - g(n)| < 2^{-n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Stoga je $f(x)$ izračunljiv broj. □

Propozicija 2.4.4. *Neka je α izračunljiv broj te neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = \alpha$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Iz činjenice da je α izračunljiv broj slijedi dda postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|\alpha - g(n)| < 2^{-n}, \tag{2.14}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $F(x,n) = g(n)$. Primjetimo da je $F = g \circ I^{k+1}_{k+1}$ te je F rekurzivna funkcija.
Iz (2.14) te definicija funkcija f i F slijedi da je $|f(x) - F(x,n)| < 2^{-n}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k, \forall n \in \mathbb{N}$.
Slijedi da je f rekurzivna funkcija. □

Propozicija 2.4.5. *Neka su α i β izračunljivi brojevi. Tada su $-\alpha, |\alpha|, \alpha + \beta$ i $\alpha \cdot \beta$ izračunljivi brojevi. Nadalje, ako je $\alpha \neq 0$, onda je i $\frac{1}{\alpha}$ izračunljiv broj.*

Dokaz. Iz Propozicije 2.4.4 slijedi da su funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \alpha$ i $g(x) = \beta$ rekurzivne.
Funkcija $f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je rekurzivna prema Propoziciji 2.3.5.
Neka je $x \in \mathbb{N}$. Iz Propozicije 2.4.3 slijedi da je $(f + g)(x)$ izračunljiv broj. Očito je $(f + g)(x) = \alpha + \beta$.
Dakle, $\alpha + \beta$ je izračunljiv broj.
Analogno dobivamo da su $-\alpha, |\alpha|$ i $\alpha \cdot \beta$ izračunljivi brojevi.
Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$. Tada je $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{N}$ pa je i $\frac{1}{f}$ rekurzivna funkcija.
Analogno, kao i prije zaključujemo da je $\frac{1}{\alpha}$ izračunljiv broj. □

Poglavlje 3

Izračunljivost realnih funkcija

3.1 Nizovno izračunljive funkcije

Definicija 3.1.1. *Neka je (x_i) niz realnih brojeva. Kažemo da je (x_i) rekurzivan niz ako je (x_i) rekurzivan kao funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*

Dakle, (x_i) je rekurzivan niz ako i samo ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ takva da je $|x_i - F(i,n)| < 2^{-n}$, za sve $i, n \in \mathbb{N}$.

Napomena 3.1.2.
1. *Ako je α je izračunljiv broj te (x_i) niz definiran sa $x_i = \alpha$, $\forall i \in \mathbb{N}$, onda je (x_i) rekurzivan niz. Ovo slijedi iz Propozicije 2.4.4 i definicije rekurzivnog niza.*

2. *Ako je (x_i) rekurzivan niz, onda je x_i izračunljiv broj za svaki $i \in \mathbb{N}$. Ova tvrdnja slijedi iz Propozicije 2.4.3.*

Definicija 3.1.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f nizovno izračunljiva ako za svaki rekurzivan niz (x_i) takav da $x_i \in S$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $(f(x_i))$ rekurzivan niz.*

Propozicija 3.1.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ nizovno izračunljiva funkcija. Tada je $f(\alpha)$ izračunljiv broj za svaki izračunljiv broj $\alpha \in S$.*

Dokaz. Neka je $\alpha \in S$ izračunljiv broj. Tada je niz (x_i) definiran sa $x_i = \alpha, \forall i \in \mathbb{N}$ rekurzivan.
Budući da je f nizovno izračunljiva funkcija i (x_i) rekurzivan niz, slijedi da je $(f(x_i))$ rekurzivan niz. Iz Napomene 3.1.2 slijedi da je $x_i, \forall x \in \mathbb{N}$ izračunljiv broj, a $x_i = \alpha, \forall i \in \mathbb{N}$ te slijedi da je $f(\alpha)$ izračunljiv broj. □

Napomena 3.1.5. *Općenito, ako je X skup te $f, g : X \to \mathbb{R}$, onda definiramo funkcije $f + g : X \to \mathbb{R}$ i $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ sa $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ i $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, za svaki $x \in X$. Nadalje, na očiti način definiramo funkcije $-f, |f| : X \to \mathbb{R}$ te funkciju $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$ ako je $f(x) \neq 0$, $\forall x \in X$.*

Napomena 3.1.6. *Ako su (x_i) i (y_i) rekurzivni nizovi, onda su $(-x_i), (|x_i|), (x_i + y_i), (x_i \cdot y_i)$ rekurzivni.*
Nadalje ako je $x_i \neq 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, onda je niz $\left(\frac{1}{x_i}\right)$ rekurzivan.
To slijedi iz Propozicije 2.3.4, Propozicije 2.3.5, Propozicije 2.3.9 i Propozicije 2.3.10.

Propozicija 3.1.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ nizovno izračunljive funkcije. Tada su funkcije $-f, |f|, f+g, f \cdot g : S \to \mathbb{R}$ nizovno izračunljive. Nadalje, ako je $f(x) \neq 0$, $\forall x \in S$, onda je funkcija $\frac{1}{f} : S \to \mathbb{R}$ nizovno izračunljiva.*

Dokaz. Neka je (x_i) rekurzivan niz takav da je $x_i \in S$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Kako su f i g nizovno izračunljive funkcije, $(f(x_i))$ i $(g(x_i))$ su rekurzivni nizovi. Tada je i $(f(x_i) + g(x_i))$ rekurzivan niz prema Napomeni 3.1.6, tj. niz $((f + g)(x_i))$ je rekurzivan. Time smo dokazali da je $f + g$ nizovno iračunljiva funkcija.
Pretpostavimo da je $f(x) \neq 0, \forall x \in S$. Neka je (x_i) rekurzivan niz takav da je $x_i \in S$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Budući da je f nizovno izračunljiva funkcija, $f(x_i)$ je rekurzivan niz. Prema Napomeni 3.1.6 je $\left(\frac{1}{f(x_i)}\right)$ rekurzivan niz.
Dakle, $\left(\frac{1}{f}(x_i)\right)$ je rekurzivan niz. Slijedi da je $\frac{1}{f}$ nizovno izračunljiva funkcija. □

Definicija 3.1.8. *Ako je X skup, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$, onda definiramo funkcije $f_1 + ... + f_n : X \to \mathbb{R}$ i $f_1 \cdot ... \cdot f_n : X \to \mathbb{R}$ sa $(f_1 + ... + f_n)(x) = f_1(x) + ... + f_n(x)$ i $(f_1 \cdot ... \cdot f_n)(x) = f_1(x) \cdot ... \cdot f_n(x)$, za svaki $x \in S$.*

Korolar 3.1.9. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f_1, ..., f_n : S \to \mathbb{R}$ nizovno izračunljive funkcije. Tada su funkcije $f_1 + ... + f_n : S \to \mathbb{R}$ i $f_1 \cdot ... \cdot f_n : S \to \mathbb{R}$ nizovno izračunljive.*

Dokaz. Koristeći Propoziciju 3.1.7 ova se tvrdnja lako dokaže matematičkom indukcijom. □

Primjer 3.1.10. *Neka je α izračunljiv broj. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = \alpha$, za svaki $x \in S$. Tada je f nizovno izračunljiva funkcija.*
Naime, neka je (x_i) rekurzivan niz takav da je $x_i \in S, \forall i \in \mathbb{N}$. Vrijedi $f(x_i) = \alpha$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je $(f(x_i))$ rekurzivan (prema Napomeni 3.1.6). Slijedi da je f nizovno izračunljiva funkcija.

Napomena 3.1.11. *Neka su S i T podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $S \neq \emptyset$ i $S \subseteq T$. Neka je $f : T \to \mathbb{R}$ nizovno izračunljiva funkcija. Tada je očito $f|_S : S \to \mathbb{R}$ nizovno izračunljiva funkcija.*

Primjer 3.1.12. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = x^n$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je f nizovno izračunljiva funkcija.*
Ako je $n = 0$, onda je $f(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa iz Primjera 3.1.10 slijedi da je f nizovno izračunljiva.
Pretpostavimo da je $n \neq 0$. Neka je $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ identiteta. Očito je id nizovno izračunljiva funkcija.
Za $i \in \{1, ..., n\}$, neka je $h_i = id$. Primjetimo da je $f = h_1 \cdot ... \cdot h_n$ pa iz korolara slijedi da je f nizovno izračunljiva funkcija.

Primjer 3.1.13. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $a_0, ..., a_n$ izračunljivi brojevi. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je f nizovno izračunljiva funkcija.*
Za $i \in \{0, ..., n\}$ definiramo funkciju $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_i = a_i x^i$. Primjetimo da je $f = h_0 + ... + h_n$, stoga je prema Korolaru 3.1.9 dovoljno dokazati da je h_i nizovno izračunljiva za svaki $i \in \{0, ..., n\}$.
Za svaki $i \in \{0, ..., n\}$ vrijedi da je h_i umnožak funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_i$ i funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^i$. Iz Primjera 3.1.10 i Primjera 3.1.12 slijedi da su te funkcije nizovno izračunljive te je prema Propoziciji 3.1.7, h_i nizovno izračunljiva funkcija.

Napomena 3.1.14. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $a_0, ..., a_n$ izračunljivi brojevi. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, za svaki $x \in S$. Tada je f nizovno izračunljiva što slijedi iz Primjera 3.1.13 i Napomene 3.1.11.*

Primjer 3.1.15. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Tvrdimo da je f nizovno izračunljiva funkcija.*
Definiramo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $g(x) = 1 + x^2$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi $f = \frac{1}{g}$.
Iz Primjera 3.1.13 slijedi da je g nizovno izračunljiva funkcija. Tada je prema Propoziciji 3.1.7 funkcija $\frac{1}{f}$ nizovno izračunljiva.

3.2 Efektivna uniformna neprekidnost

Definicija 3.2.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ te $x_0 \in S$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna u točki x_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi:*

$$\text{ako je } |x - x_0| < \delta, \text{ onda je } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definicija 3.2.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f neprekidna ako je f neprekidna u x_0, za svaki $x_0 \in S$.*

Primjer 3.2.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $S \neq \emptyset$.*

1. *Neka je $c \in \mathbb{R}$ te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = c$, za svaki $x \in S$. Tada je f neprekidna*
   Naime, ako su $x_0 \in S$ i $\varepsilon > 0$, onda za bilo koji $\delta > 0$ i bilo koji $x \in S$ očito vrijedi implikacija
   $$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
2. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, za svaki $x \in S$. Neka su $x_0 \in S$ i $\varepsilon > 0$.*
   Za svaki $x \in S$ vrijedi $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$ pa ako uzmemo $\delta = \varepsilon$ onda je očito da vrijedi implikacija
   $$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
   Stoga je f neprekidna u x_0. Dakle, f je neprekidna funkcija.
3. *Neka je $f : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, za svaki $x \in \langle 0, \infty\rangle$. Tvrdimo da je f neprekidna funkcija.*
   Uzmimo $x_0 \in \langle 0, \infty\rangle$. Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo $\delta = \min\{\frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}, \frac{x_0}{2}\}$. Neka je $x \in \langle 0, \infty\rangle$ takav da je $|x - x_0| < \delta$. Iz definicije od δ slijedi da je $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$. Stoga je i $x_0 - x < \frac{x_0}{2}$ pa je $\frac{x_0}{2} < x$. Slijedi da je $\frac{1}{x} < \frac{2}{x_0}$.
   Koristeći ovu nejednakosti dobivamo da je
   $$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{x \cdot x_0} \\ &= |x - x_0| \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x_0} < \delta \cdot \frac{2}{x_0} \cdot \frac{1}{x_0} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2} \cdot \frac{2}{x_0^2} = \varepsilon. \end{aligned}$$
   Dakle, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
   Time smo dokazali da za svaki $x \in \langle 0, \infty\rangle$ vrijedi implikacija
   $$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(X) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
   Prema tome f je neprekidna u x_0. Dakle, f je neprekidna.

Definicija 3.2.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f uniformno neprekidna ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Napomena 3.2.5. *Očito je da vrijedi da je svako uniformno neprekidna funkcija i neprekidna funkcija.*

Primjer 3.2.6. *Neka je $f : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Tvrdimo da funkcija f nije uniformno neprekidna. Pretpostavimo da jest.*
Tada za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in \langle 0, \infty\rangle$ vrijedi

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{2\delta} < n$. Tada je

$$\frac{1}{2n} < \delta. \tag{3.2}$$

Definirajmo $x = \frac{1}{n}$ i $y = \frac{1}{2n}$. Očito su $x, y \in \langle 0, \infty\rangle$.
Imamo $|x - y| = \frac{1}{2n}$ pa je prema (3.2) $|x - y| < \delta$. Slijedi da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Međutim, $|f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geqslant 1 = \varepsilon$.
Došli smo do kontradikcije. Prema tome, funkcija f nije uniformno neprekidna.

Uočimo da je funkcija iz Primjera 3.2.6 neprekidna. Dakle, neprekidna funkcija ne mora biti uniformno neprekidna.

Propozicija 3.2.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Tada je f uniformno neprekidna ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi implikacija*

$$|x - y| < 2^{-m} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-n}. \tag{3.3}$$

Dokaz. Neka je f uniformno neprekidna funkcija. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Budući da je f uniformno neprekidna funkcija postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-n}. \tag{3.4}$$

Odaberimo $m \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-m} < \delta$.
Ako su $x, y \in S$ takvi da je $|x - y| < 2^{-m}$, onda je $|x - y| < \delta$ pa iz (3.4) slijedi da je $|f(x) - f(y)| < 2^{-n}$.
Time smo dokazali da vrijedi (3.3).

Pretpostavimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi

$$|x - y| < 2^{-m} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-n}. \tag{3.5}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada možemo odabrati $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $2^{-n} < \varepsilon$. Prema pretpostavci postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi (3.5). Dakle, vrijedi

$$|x - y| < 2^{-m} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Primjetimo da možemo uzeti $\delta = 2^{-m}$ te da vrijedi implikacija

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Time smo dokazali da je f uniformno neprekidna. $\square$

Napomena 3.2.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f : S \to \mathbb{R}$. Iz Propozicije 3.2.7 slijedi da je f uniformno neprekidna ako i samo ako postoji funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x, y \in S$ vrijedi*

$$|x - y| < 2^{-\varphi(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-n}.$$

Definicija 3.2.9. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f efektivno uniformno neprekidna ako postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x, y \in S$ vrijedi*

$$|x - y| < 2^{-\varphi(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-n}. \tag{3.6}$$

Napomena 3.2.10. *Očito je svaka efektivno uniformno neprekidna funkcija ujedno i uniformno neprekidna.*

Primjer 3.2.11. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$.*

1. *Neka je $c \in \mathbb{R}$. Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = c$, za svaki $x \in S$. Tada je f efektivno uniformno neprekidna funkcija jer za bilo koju (rekurzivnu) funkciju $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ te sve $n \in \mathbb{N}$ i $x, y \in S$ vrijedi (3.6).*

2. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, za svaki $x \in S$. Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ identiteta. Tada je φ rekurzivna funkcija i očito vrijedi (3.6). Prema tome f je efektivno uniformno neprekidna.*

Propozicija 3.2.12. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ efektivno uniformno neprekidne funkcije. Tada su funkcije $-f, |f|, f + g : S \to \mathbb{R}$ efektivno uniformno neprekidne.*

Dokaz. Budući da je f efektivno uniformno neprekidna, postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x, y \in S$ vrijedi

$$|x - y| < 2^{-\varphi(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-n}. \tag{3.7}$$

Očito je $|(-f)(x) - (-f)(y)| = |f(x) - f(y)|$, za sve $x, y \in S$. Stoga vrijedi

$$|x - y| < 2^{-\varphi(n)} \Rightarrow |(-f)(x) - (-f)(y)| < 2^{-n}.$$

Prema tome je funkcija $-f$ efektivno uniformno neprekidna.
Nadalje, za sve $x, y \in S$ vrijedi $||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)|$. Iz (3.7) dobivamo implikaciju

$$|x - y| < 2^{-\varphi(n)} \Rightarrow ||f(x)| - |f(y)|| < 2^{-n}.$$

Prema tome $|f|$ je efektivno uniformno neprekidna.
Zato što je g efektivno uniformno neprekidna postoji neprekidna funkcija $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x, y \in S$ vrijedi

$$|x - y| < 2^{-\varphi(n)} \Rightarrow |g(x) - g(y)| < 2^{-n}. \tag{3.8}$$

Iz (3.7) i (3.8) slijedi da za sve $x, y \in S$ vrijede implikacije

$$|x - y| < 2^{-\varphi(n+1)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-(n+1)} \tag{3.9}$$

i

$$|x - y| < 2^{-\psi(n+1)} \Rightarrow |g(x) - g(y)| < 2^{-(n+1)}. \tag{3.10}$$

Definirajmo funkciju $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tau(n) = \varphi(n + 1) + \psi(n + 1)$. Funkcija τ je rekurzivna jer je definirana kao zbroj dvije rekurzivne funkcije.
Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da su $x, y \in S$ takvi da je $|x - y| < 2^{-\tau(n)}$.
Dakle, $|x - y| < 2^{-(\varphi(n+1)+\psi(n+1))}$ pa je

$$|x - y| < 2^{-\varphi(n+1)} \text{ i } |x - y| < 2^{-\psi(n+1)}$$

Iz (3.9) i (3.10) slijedi da je

$$|f(x) - f(y)| < 2^{-(n+1)} \text{ i } |g(x) - g(y)| < 2^{-(n+1)}. \tag{3.11}$$

Koristeći (3.11) dobivamo da je

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \\ &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &< 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2 \cdot 2^{-(n+1)} = 2^{-n}. \end{aligned}$$

Dakle, $|(f + g)(x) - (f + g)(y)| < 2^{-n}$.
Time smo dokazali da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x, y \in S$ vrijedi

$$|x - y| < 2^{-\tau(n)} \Rightarrow |(f + g)(x) - (f + g)(y)| < 2^{-n}.$$

Zaključujemo da je funkcija $f + g$ efektivno uniformno neprekidna. □

3.3 Omeđene i izračunljive funkcije

Definicija 3.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $M \in \mathbb{R}$. Kažemo da je M gornja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi da je $x \leqslant M$.*

Definicija 3.3.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S odozgo omeđen skup ako postoji barem jedna gornja međa skupa S.*

Definicija 3.3.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je $m \in \mathbb{R}$. Kažemo da je m donja međa skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi da je $m \leqslant x$.*

Definicija 3.3.4. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S odozdo omeđen skup ako postoji barem jedna donja međa skupa S.*

Definicija 3.3.5. *Za skup $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je omeđen ako je S i odozdo i odozgo omeđen skup.*

Propozicija 3.3.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Tada je S omeđen skup ako i samo ako postoji $A \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| \leqslant A$ za svaki $x \in S$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S omeđen skup. Tada postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je $x \leqslant M$ i $m \leqslant x$, za svaki $x \in S$.
Neka je $x \in S$. Očito je
$$x \leqslant max\{M, -m\}. \tag{3.12}$$
Iz $m \leqslant x$ slijedi $-x \leqslant -m$ pa je
$$-x \leqslant max\{M, -m\}. \tag{3.13}$$
Sada iz (3.12) i (3.13) slijedi
$$|x| \leqslant max\{M, -m\}.$$
Time smo pokazali da postoji $A \in \mathbb{R}$ ($A = \max\{M, -m\}$) takav da je $|x| \leqslant A$ za svaki $x \in S$.

Obratno, pretpostavimo da postoji $A \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $|x| \leqslant A$, za svaki $x \in S$.
Stoga je $-A \leqslant x \leqslant A$, za svaki $x \in S$. Očito je da je S odozgo i odozdo omeđen skup te je stoga i omeđen. □

Definicija 3.3.7. *Neka je X skup te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f omeđena funkcija ako je Imf omeđen skup.*

Uočimo da iz Propozicije 3.3.6 slijedi: funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je omeđena ako i samo ako postoji $A \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(x)| \leqslant A$, za svaki $x \in X$.

Definicija 3.3.8. *Neka je X skup, $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija te $Y \subseteq X$. Kažemo da je f omeđena na Y ako je $f(Y)$ omeđen skup.*

Uočimo: f je omeđena na Y ako i samo ako postoji $A \in \mathbb{R}$ takav da $|f(y)| \leqslant A$, za svaki $y \in Y$.

Propozicija 3.3.9. *Neka je X skup te $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da su $Y_0, ..., Y_n$ skupovi takvi da je $X = Y_0 \cup ... \cup Y_n$ te da je f omeđena na Y_i, za svaki $i \in \{0, .., n\}$. Tada je f omeđena funkcija.*

Dokaz. Za svaki $i \in \{0, ..., n\}$ postoji A_i takav da vrijedi

$$|f(x)| \leqslant A_i, \ \forall x \in Y_i.$$

Neka je $A = max\{A_0, ..., A_i\}$. Neka je $x \in X$. Tada postoji $i \in \{0, ..., n\}$ takav da vrijedi $x \in Y_i$. Slijedi

$$|f(x)| \leqslant A_i.$$

Tada je $|f(x)| \leqslant A$. Dakle, $|f(x)| \leqslant A$ za svaki $x \in X$. □

Lema 3.3.10. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka su $x, y \in [a, b]$. Tada vrijedi $|x - y| \leqslant b - a$.*

Dokaz.

1. slučaj: $x \leqslant y$.
   Vrijedi $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$. Iz $a \leqslant x$ množenjem s (-1) dobivamo $-x \leqslant -a$. Sada dobivenu nejednakost zbrojimo s $y \leqslant b$ i dobivamo $y - x \leqslant b - a$.
   Dakle,
   $$|x - y| \leqslant b - a.$$

2. slučaj: $y \leqslant x$.
   Vrijedi $a \leqslant y \leqslant x \leqslant b$. Iz $a \leqslant y$ množenjem s (-1) dobivamo $-y \leqslant -a$. Sada dobivenu nejednakost zbrojimo s $x \leqslant b$ i dobivamo $x - y \leqslant b - a$.
   Dakle,
   $$|x - y| \leqslant b - a.$$

□

Lema 3.3.11. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ omeđen skup te neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i skupovi $T_0, ..., T_n \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $S = T_0 \cup ... \cup T_n$ te takvi da svaki $i \in \{0, ..., n\}$ vrijedi sljedeće:*

$$\textit{ako su } x, y \in T_i, \ \textit{onda je } |x - y| < \varepsilon.$$

Dokaz. Budući da je S omeđen, postoje donja međa a skupa S i gornja međa b tog skupa. Možemo pretpostaviti da je $a < b$.
Očito je da vrijedi $S \subseteq [a, b]$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\frac{b-a}{\varepsilon} < n$. Tada je

$$\frac{b-a}{n} < \varepsilon. \tag{3.14}$$

Za $i \in \{0, ..., n\}$ definiramo $t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$.
Primjetimo da vrijedi

$$a = t_0 < ... < t_{n-1} < t_n = b. \tag{3.15}$$

Za $i \in \{0, ..., n-1\}$ definiramo $T_i = [t_i, t_{i+1}] \cap S$. Iz (3.15) je jasno da je $[a, b] = [t_0, t_1] \cup ... \cup [t_{n-1}, t_n]$ pa kad lijevu i desnu stranu "presiječemo" sa S dobivamo $S = T_0 \cup ... \cup T_{n-1}$.
Neka je $i \in \{0, ..., n-1\}$. Neka su $x, y \in T_i$, tj. $x, y \in [t_i, t_{i+1}]$.
Iz Leme 3.3.10 slijedi

$$|x - y| \leqslant t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n} < \varepsilon.$$

Dakle, dobivamo $|x - y| < \varepsilon$.
Slijedi da za sve $x, y \in T_i$ vrijedi $|x - y| < \varepsilon$. □

Teorem 3.3.12. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ omeđen skup te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna funkcija. Tada je f omeđena funkcija.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon = 1$. Prema definiciji uniformne neprekidnosti postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1. \tag{3.16}$$

Prem Lemi 3.3.11 postoje $n \in \mathbb{N}$ i skupovi $T_0, ..., T_n \subseteq S$ takvi da je

$$S = T_0 \cup ... \cup T_n \tag{3.17}$$

te za svaki $i \in \{0, ..., n\}$ vrijedi

$$x, y \in T_i \Rightarrow |x - y| < \delta.$$

Neka je $i \in \{0, ..., n\}$. Tvrdimo da je funkcija f omeđena na T_i.
To je jasno ako je $T_i = \emptyset$.
Inače možemo odabrati neki $y \in T_i$.
Neka je $x \in T_i$. Tada je $|x - y| < \delta$ te iz (3.16) slijedi da je $|f(x) - f(y)| < 1$.
Koristeći ovu nejednakost dobivamo

$$|f(x)| = |f(x) - f(y) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |f(y)| < 1 + |f(y)|.$$

Dakle, $|f(x)| < 1 + |f(y)|$, za svaki $x \in T_i$.

Stoga je f omeđena na T_i, za svaki $i \in \{0, ..., n\}$. Iz ovoga, (3.17) i Propozicije 3.3.9 slijedi da je f omeđena funkcija. □

Napomena 3.3.13. *Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}$, $S \subseteq T$ i $S \neq \emptyset$. Neka je $f : T \to \mathbb{R}$. Lako je dokazati sljedeće tvrdnje.*

1. *Pretpostavimo da je $x_0 \in S$ te da je f neprekidna u x_0. Tada je $f|_S : S \to \mathbb{R}$ neprekidna u x_0.*

2. *Pretpostavimo da je f neprekidna. Tada je $f|_S : S \to \mathbb{R}$ neprekidna.*
3. *Pretpostavimo da je f uniformno neprekidna. Tada je $f|_S : S \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidna.*
4. *Pretpostavimo da je f efektivno uniformno neprekidna. Tada je $f|_S : S \to \mathbb{R}$ efektivno uniformno neprekidna.*

Primjer 3.3.14. *Neka je $f : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = \frac{1}{x}$, za svaki $x \in \langle 0, 1]$.*
Prema Primjeru 3.2.6 funkcija $\langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ je neprekidna pa iz Napomene 3.3.13 slijedi da je f neprekidna.
Imamo $Imf = \{f(x) | x \in \langle 0, 1]\} = \{\frac{1}{x} | \langle 0, 1]\} = [1, \infty\rangle$ pa je očito da Imf nije omeđen skup. Dakle, f nije omeđena funkcija.
Uočimo da je domena od f, tj. $\langle 0, 1]$ omeđen skup. Ovaj primjer pokazuje da pretpostavku iz Teorema 3.3.12, da je f uniformno neprekidna funkcija, ne možemo zamijeniti pretpostavkom da je f neprekidna funkcija. Onda tvrdnja ne vrijedi općenito.

Iz Teorema 3.3.12 slijedi da funkcija f iz prethodnog primjera nije uniformno neprekidna (jer kad bi bila, onda bi teorem povlačio da je omeđena funkcija, a vidjeli smo da nije).

Propozicija 3.3.15. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ omeđen skup te neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ efektivno uniformno neprekidne funkcije. Tada je i $f \cdot g : S \to \mathbb{R}$ efektivno uniformno neprekidna funkcija.*

Dokaz. Iz efektivne uniformne neprekidnosti od funkcija f i g slijedi da postoje rekurzivne funkcije $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$|x - y| < 2^{\varphi(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-n}, \tag{3.18}$$

$$|x - y| < 2^{\psi(n)} \Rightarrow |g(x) - g(y)| < 2^{-n}. \tag{3.19}$$

Iz Teorema 3.3.12 slijedi da su f i g omeđene funkcije.
Tada postoje $A, B \in \mathbb{R}$ takvi da je $|f(x)| \leqslant A$ i $g(x)| \leqslant B$, za svaki $x \in S$.
Možemo pretpostaviti da je $A > 0$ i $B > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$A + B < 2^{n_0}. \tag{3.20}$$

Iz (3.18) i (3.19) slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x, y \in S$ vrijede implikacije

$$|x - y| < 2^{\varphi(n+n_0)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2^{-(n+n_0)}, \tag{3.21}$$

$$|x - y| < 2^{\psi(n+n_0)} \Rightarrow |g(x) - g(y)| < 2^{-(n+n_0)}. \tag{3.22}$$

Neka je $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $\tau(n) = \varphi(n + n_0) + \psi(n + n_0)$. Očito je funkcija τ rekurzivna.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $x, y \in S$ takvi da je $|x-y| < 2^{-\tau(n)}$. Slijedi da je $|x-y| < 2^{-\varphi(n+n_0)}$ i $|x - y| < 2^{-\psi(n+n_0)}$.
Iz (3.21) i (3.22) slijedi da je

$$|f(x) - f(y)| < 2^{-(n+n_0)} \text{ i } |g(x) - g(y)| < 2^{-(n+n_0)}. \tag{3.23}$$

Koristeći (3.23) dobivamo da je

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
&\leqslant |f(x)||g(x) - g(x)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\
&\leqslant A \cdot |g(x) - g(y)| + B \cdot |f(x) - f(y)| \\
&\leqslant A \cdot 2^{-(n+n_0)} + B \cdot 2^{-(n+n_0)} = (A + B) \cdot 2^{-(n+n_0)} \\
&< 2^{n_0} \cdot 2^{-(n+n_0)} = 2^{-n}.
\end{aligned}$$

Dakle, $|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| < 2^{-n}$. Time smo dokazali da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x, y \in S$ vrijedi implikacija

$$|x - y| < 2^{-\tau(x)} \Rightarrow |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| < 2^{-n}.$$

Slijedi da je funkcija $f \cdot g$ efektivno uniformno neprekidna. □

Primjer 3.3.16. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Prema Primjeru 3.2.11 f je efektivno uniformno neprekidna funckija. Tvrdimo da $f \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije efektivno uniformno neprekidna, čak štoviše tvrdimo da $f \cdot f$ nije uniformno neprekidna.*
Označimo $g = f \cdot f$. Dakle, $g(x) = x^2$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je g uniformno neprekidna.
Neka je $\varepsilon = 1$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $|x-y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < 1$, tj.

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |x - y||x + y| < 1. \tag{3.24}$$

Uzmimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \delta$. Definirajmo $x = n + \frac{1}{n}$ i $y = n$.
Imamo

$$|x - y| = \frac{1}{n} < \delta$$

pa (3.24) povlači da je $|x - y||x + y| < 1$.
Iz definicije od x i y slijedi

$$|x - y||x + y| = \frac{1}{n}\left(2n + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n^2} > 1.$$

Došli smo do kontradikcije te zaključujemo da g nije uniformno neprekidna, time ni efektivno uniformno neprekidna.

Napomena 3.3.17. *Neka su $S \subseteq \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ te $f_0, ..., f_n : S \to \mathbb{R}$ efektivno uniformno neprekidne funkcije. Prema Propoziciji 3.2.12, lako slijedi indukcijom da je tada i funkcija $f_0 + ... + f_n : S \to \mathbb{R}$ efektivno uniformno neprekidna.*
Isto tako, koristeći Propoziciju 3.3.15, dobivamo da je $f_0 \cdot ... \cdot f_n : S \to \mathbb{R}$ efektivno uniformno neprekidna funkcija ako je S omeđen skup.

Propozicija 3.3.18. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ omeđen skup. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$. Tada je funkcija f efektivno uniformno neprekidna.*

Dokaz. Za $i \in \{0, ..., n\}$ neka je $h_i : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $h_i(x) = a_i \cdot x^i$. Jasno je da vrijedi $f = h_0 + ... + h_n$. Stoga je, prema Napomeni 3.3.17, dovoljno dokazati da je h_i efektivno uniformno neprekidna funkcija za svaki $i \in \{0, ..., n\}$.
Neka je $i \in \{0, ..., n\}$. Funkcija h_i je umnožak funkcije $S \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a_i$ i funkcije $S \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^i$. Funkcija $x \mapsto a_i$ je efektivno uniformno neprekidna prema Primjeru 3.1.13, a funkcija $x \mapsto x^i$ je efektivno uniformno neprekidna po Napomeni 3.3.17 i činjenici da je funkcija $S \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ efektivno uniformno neprekidna pa je, prema Propoziciji 3.3.15, funkcija h_i efektivno uniformno neprekidna. □

Definicija 3.3.19. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ omeđen skup te neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je f izračunljiva funkcija ako je f nizovno izračunljiva i efektivno uniformno neprekidna.*

Primjer 3.3.20. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ omeđen skup. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $a_0, ..., a_n$ izračunljivi brojevi. Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ za svaki $x \in S$. Tada je f izračunljiva funkcija.*
Ova tvrdnja slijedi iz Napomene 3.1.14 i Propozicije 3.3.18.

Propozicija 3.3.21. *Neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ izračunljive funkcije. Tada su i funkcije $-f, |f|, f + g, f \cdot g : S \to \mathbb{R}$ izračunljive.*

Dokaz. Nizovna izračunljivost slijedi iz Propozicije 3.1.7, a efektivna uniformna neprekidnost iz Propozicije 3.2.12 i Propozicije 3.3.15.
Zaključujemo da su funkcije $-f, |f|, f + g$ i $f \cdot g$ izračunljive. □

Primjer 3.3.22. *Neka je $f : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Funkcija je izračunljiva prema Primjeru 3.3.20. Očito je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle 0, 1]$. Tvrdimo da funkcija $\frac{1}{f} : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}$ nije izračunljiva.*
Očito je $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{x}$, za svaki $x \in \langle 0, 1]$.

Bibliografija

[1] Zvonko Iljazović, *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih skupova, disertacija*, Sveučilište u Zagrebu, 2010.

[2] I. Richards M. B. Pour-El, *Computability in Analysis and Physics*, Springer–Verlag, 1989.

[3] Mladen Vuković, *Izračunljivost, skripta*, Sveučilište u Zagrebu, 2009.

[4] Klaus Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer, 2000.

[5] Vedran Čačić, *Komputonomikon, izračunljivost za računarce*, Sveučilište u Zagrebu, 2021.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo svojstva rekurzivnih funkcija. Tema je podijeljena na tri cjeline. U prvom poglavlju uveli smo pojmove inicijalnih i rekurzivnih funkcija te smo prikazali neka njihova osnovna svojstva. U drugom poglavlju definirali smo rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ i $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ te smo proučavali svojstva tih funkcija. Zatim smo uveli pojam izračunljivog broja i povukli analogiju s realnim rekurzivnim funkcijama. Treće poglavlje bavi se nizovno izračunljivim funkcijama, efektivnom uniformnom neprekidnošću te omeđenim i izračunljivim funkcijama.

Summary

In this master's thesis we have studied properties of recursive functions. The topic is divided into three parts. In the first chapter, we have introduced the concepts of initial and recursive functions and presented some of their basic properties. In the second chapter, we defined the recursive functions $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ and $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ and studied their properties. Then we have introduced the notion of a computable number and drew an analogy with real recursive functions. The third chapter deals with sequentially computable functions, effective uniform continuity and bounded and computable functions.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu 16.04.1997. godine. Pohađala sam Osnovnu školu Augusta Cesarca u Krapini. Nakon osnovnoškolskog obrazovanja upisujem matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Krapina. Nakon srednje škole upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Kroz studiranje razvila sam inetres za računarstvo i programiranje te sam upisala diplomski smjer Računarstvo i matematika također na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.