Racionalna trigonometrija

Stipić, Ingrid

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ingrid Stipić

RACIONALNA TRIGONOMETRIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu je prikazano kako jednostavnije i prirodnije pristupiti geometrijskim problemima primjenjujući racionalnu trigonometriju. Racionalna trigonometrija ujedinjuje geometriju, algebru i teoriju brojeva. Uvođenje racionalne trigonometrije je motivirano time što se vrijednosti 6 osnovnih elemenata trokuta mogu prikazati u obliku razlomka. Naime, kvadrat udaljenosti i razmak su vrijednosti kvadrata brojeva dok su udaljenost i kut skoro linearne vrijednosti.
Umjesto udaljenosti i kuta, koji su temeljni pojmovi Euklidove geometrije, u radu ćemo razvijati racionalnu trigonometriju koja se temelji na pojmovima

$$kvadrat\ udaljenosti = (udaljenost)^2$$

$$razmak = (\sin(kut))^2$$

Povijesno gledajući, metričku geometriju je teško odvojiti od decimalnih brojeva radi izračuna kuteva. Racionalna trigonometrija se počela razvijati oko 19. stoljeća kada su se uočile teškoće i ograničenja Euklidove geometrije, no intuitivniji pojmovi udaljenosti i kuta su doveli do toga da se geometrija utemeljila samo na Euklidovoj geometriji koja dominira unazad zadnje dvije tisuće godina. No racionalna trigonometrija nam je mogla biti jednaka kao i Euklidova, možda i intuitivnija da smo se navikli na nju. Mnogi klasični geometrijski pojmovi i rezultati su ovdje redefinirani u općenitiji izgled kao što su Heronova formula, Arhimedov zakon, slični trokuti, paralelogram, ortocentar, Cevin teorem, Stewartov teorem, Brahmaguptina formula, pravilni mnogokuti, Eulerov pravac. Racionalna geometrija ne zahtijeva prethodno razumijevanje klasične geometrije, ona je zasebna i logički odvojena od Euklidove.

Učenici imaju poteškoća u razumijevanju pojmova i definicija kuta i trigonometrijskih funkcija, a kad i uspiju primijeniti formule često ne razumiju zašto je sve to točno. Zbog toga je jako važno najprije definirati osnovne pojmove. Kako bi definirali kut moramo upotrijebiti mjerenje i računanje. U klasičnoj geometriji se koriste različite mjerne jedinice. Većina znanstvenika i inžinjera koristi stupnjeve od 0° do 360°, no negdje koriste i grade od 0 do 400. Matematičari obično preferiraju radijansku mjeru, gdje puni kut ide do 6.283185... odnosno 2π. No koju god skalu izabrali, nastaju problemi kod dodavanja punog kuta i korištenja ili biranja predznaka. Za razliku od toga, kod racionalne tigonometrije razmak između dva pravca je bezdimenzionalna vrijednost i poprima vrijednosti između 0 i 1 gdje je razmak 0 kada su pravci paralelni, a 1 kada su pravci okomiti. Intuitivno možemo zaključiti da kutu od 45° stupnjeva pripada razmak od $1/2$, dok 30° i 60° postaju $1/4$ i $3/4$. Mjerenje razmaka se koristi između pravaca, ne polupravaca i kutovi od 0° do 90° i vrijednost kutova od 90° do 180° se gledaju simetrično.

Stari Grci su vjerovali da je relativna vrijednost fundamentalnija od apsolutne vrijednosti te u ovom radu promatramo takve vrijednosti. Uvodimo definicije bazirajući se na Kartezijevoj geometriji, a to uključuje zapis točke, pravca, trokuta, četverokuta, paralelne i okomite pravce, afine kombinacije te prikaz u koordinatnom sustavu. Definiramo polja i koristimo poznate identitete kao što su Fibonaccijev i Cauchyjev identitet. Racionalna trigonometrija promatra kvadrat vrijednosti, stoga je naravno povezana i sa kvadratnom jednadžbom, kao i sa linearnom jednadžbom te se rješavaju pripradni zadatci u proizvoljnom polju. Proučavanje kvadrata udaljenosti nastavljamo proučavanjem nekih osnovnih koncepata i rezultata racionalne trigonometrije kao što su nul-pravac, polovište, uvjet kolinearnosti, Pitagorin teorem i Arhimedova funkcija. Nadalje, promatramo razmak i dualni razmak koji se mogu shvatiti kao ekvivalentni pojmovi, no ovdje je dana prednost razmaku. Nadalje, u radu prezentiramo definicije i teoreme o simetralama dužina i kuteva, tj. njihove analogone iz racionalne trigonometrije. U racionalnoj trigonometriji imamo tako teoreme geometrije, a neki od njih su analogni s teoremima Euklidove geometrije, kao što su kosinusov i sinusov poučak, Heronova formula te teorem da je zbroj kutova u trokutu 180°. Najvažniji teoremi racionalne trigonometrije koje ćemo proučiti su teorem koji daje uvjet kolinearnosti točaka, formula tri razmaka, teorem o razmaku, teorem o dualnom razmaku. Kao što ćemo vidjeti u radu, racionalna trigonometrija je logičnija i praktičnija za izračunavanje.

Znanstvenicima, fizičarima i geodetima, racionalna trigonometrija može biti novi alat kojim se povećava točnost, a smanjuje vrijeme rješavanja geometrijskih problema. Matematičarima racionalna trigonometrija može poslužiti kao logički okvir za proučavanje metričkih prostora i njihovih primjena. Uvođenje racionalne trigonometrije zahtijeva od nas otvorenost prema novim idejama i želju za istraživanjem, a zauzvrat daje proširenje postojećeg znanja matematike kao i ljepotu svijeta oko nas. Ona učenicima kao i profesorima daje jednostavniju teoriju koja ne zahtijeva vremena kao Euklidova geometrija. Racionalna trigonometrija može i privući mlade ljude proučavanju matematičkih pojmova novijim i elegantnijim pristupom trigonometriji i geometriji.

Poglavlje 1

Osnovne ideje

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 1.1 knjige [4].

1.1 Upoznavanje s kvadratom udaljenosti i razmakom

Trigonometrija se bavi izračunavanjem vrijednosti kutova u trokutu. U klasičnoj trigonometriji mjerimo udaljenost i kut, dok u racionalnoj trigonometriji mjerimo kvadrat udaljenosti i razmak.

Definicija 1.1.1. *Udaljenost $d(A_1, A_2) = |A_1A_2|$ između točaka $A_1 = (x_1, y_1)$ i $A_2 = (x_2, y_2)$ je broj*

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

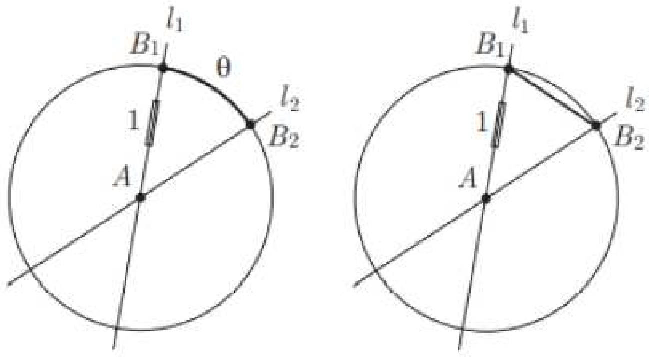
Prema tome, kvadrat udaljenosti definiramo na sljedeći način.

Definicija 1.1.2. *Kvadrat udaljenosti $Q(A_1, A_2)$ između točaka $A_1 = (x_1, y_1)$ i $A_2 = (x_2, y_2)$ je broj*

$$Q(A_1, A_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Očito je i $Q(A_1, A_2) = Q(A_2, A_1)$.

Razmak mjeri odvojenost između dva pravca. Krenimo prvo od kuta koji određujemo tako da nacrtamo kružnicu radijusa 1 sa središtem u točki A koje je sjecište ta dva pravca. Neka kružnica siječe te pravce u točkama B_1 i B_2 kao na slici 1.1. Tada definiramo kut θ između dva pravca kao duljinu luka između točaka B_1 i B_2. Ako su pravci blizu paralelnosti, tada se kut kojeg mjerimo u radijanima približava nuli, dok kod okomitih pravaca koristimo aproksimaciju broja π pa je približna vrijednost od $\pi/2 \approx 1.570796326...$



Slika 1.1: Kut između pravaca.[1]

Odmah možemo uočiti teškoće u navedenoj definiciji. Prva je ta da postoje dva načina odabira točke B_1 i dva načina odabira točke B_2 čime dobijemo četiri moguća para točaka za razmotriti. Općenito, imamo osam načina mjerenja duljine luka i ovisno o izboru definicije, možemo dobiti četiri različita rezultata.

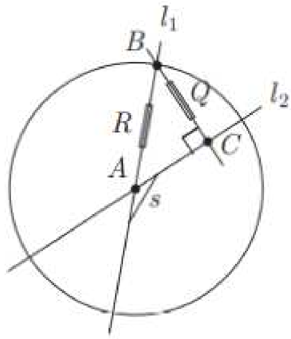
Druga mogućnost je ta da opet nacrtamo kružnicu radijusa jedan, ali sada gledajući udaljenost između točaka B_1 i B_2 kao na slici 1.1. Kada su pravci paralelni za odabrane točke B_1 i B_2, udaljenost $d(B_1B_2)$ jednaka je nuli, dok je za okomite pravce jednaka $\sqrt{2}$. Međutim, opet imamo dva izbora točaka, ali je ovo sigurno bolja metoda od prethodne.

Glavna ideja je da uzmemo bilo koju točku $B \neq A$ na jednom od pravaca te spustimo okomicu iz točke B na drugi pravac. Definiramo razmak $s(l_1, l_2)$ između dva pravca l_1 i l_2 kao omjer kvadrata udaljenosti

$$s(l_1, l_2) = \frac{Q(B, C)}{Q(A, B)} = \frac{Q}{R},$$

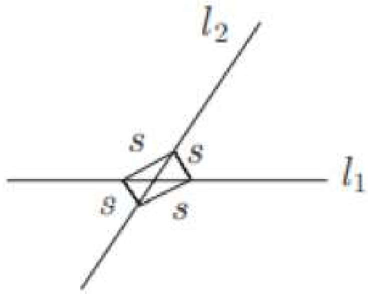
gdje su Q i R kvadrati udaljenosti između točaka B i C, odnosno B i A. U pravokutnom trokutu je Q kateta i R hipotenuza kao što je prikazano na slici 1.2.

[1] Slika je preuzeta iz knjige [4].



Slika 1.2: Separacija dva pravca.[2]

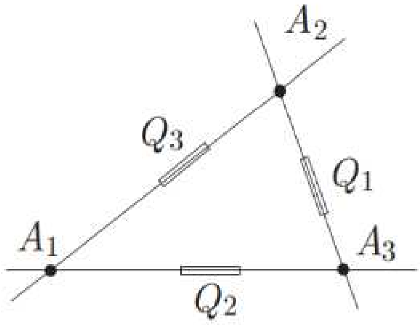
Broj s neovisan je o poretku pravaca, to jest $s(l_1, l_2) = s(l_2, l_1)$ ili izboru točke B i to je jedinstven realan broj između 0 i 1. Uočite da nam kružnica više nije bitna i da imamo četiri ekvivalentne mogućnosti izbora razmaka kao što je prikazano na slici 1.3.



Slika 1.3: Četiri moguća izbora razmaka.[3]

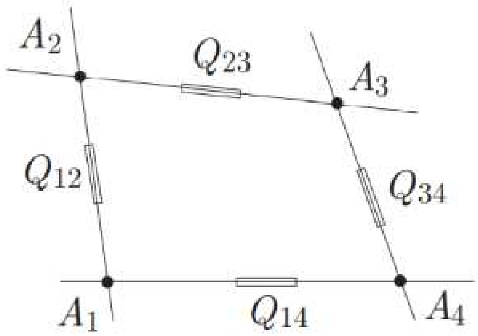
Neka je dan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$. Tada ćemo kvadrate udaljenosti između vrhova označavati s
$Q_1 = Q(A_2, A_3)$,
$Q_2 = Q(A_1, A_3)$,
$Q_3 = Q(A_1, A_2)$,
kao što je prikazano na slici 1.4. Isti zapis će se koristiti i kada točke A_1, A_2, A_3 budu kolinearne.

[2]Slika je preuzeta iz knjige [4].
[3]Slika je preuzeta iz knjige [4].



Slika 1.4: Trokut s kvadratima udaljenosti.[4]

Neka je dan četverokut $\overline{A_1A_2A_3A_4}$. Tada ćemo kvadrate udaljenosti prikazane na slici 1.5 njegovih vrhova označavati s
$Q_{12} = Q(A_1, A_2)$,
$Q_{23} = Q(A_2, A_3)$,
$Q_{34} = Q(A_3, A_4)$,
$Q_{14} = Q(A_1, A_4)$.
Kvadrati udaljenosti Q_{13} i Q_{24} su kvadrati dijagonala četverokuta.

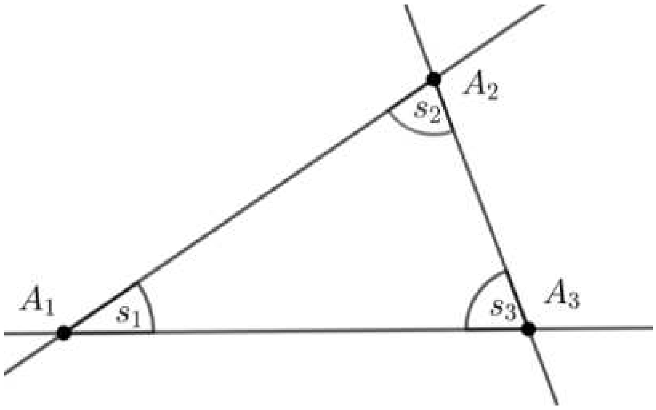


Slika 1.5: Četverokut s kvadratima udaljenosti.[5].

Neka je dan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$. Tada ćemo razmake označavati s
$s_1 = s(A_1A_2, A_1A_3)$,

[4]Slika je preuzeta iz knjige [4].
[5]Slika je preuzeta iz knjige [4].

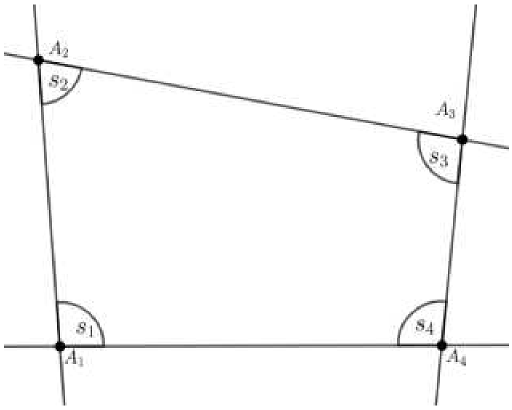
$s_2 = s(A_2A_1, A_2A_3)$,
$s_3 = s(A_3A_1, A_3A_2)$,
kao što je prikazano na slici 1.6 gdje je s_1 razmak suprotne stranice $\overline{A_2A_3}$ trokuta i slično za ostale razmake.



Slika 1.6: Razmak trokuta.

Općenito, ako su l_1, l_2, l_3 bilo koja tri pravca. Tada ćemo razmake označavati s
$s_1 = s(l_2, l_3)$,
$s_2 = s(l_1, l_3)$,
$s_3 = s(l_1, l_2)$.

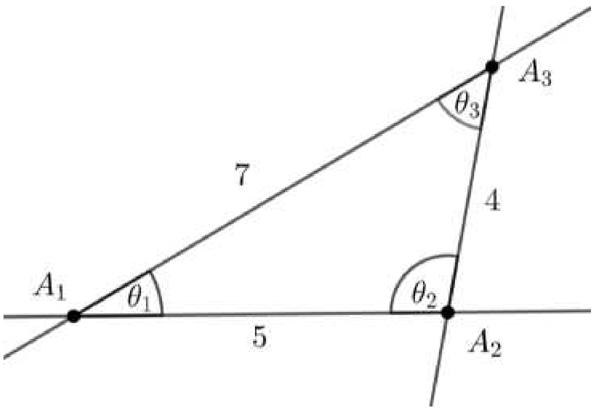
Neka je dan četverokut $\overline{A_1A_2A_3A_4}$. Tada ćemo razmake označavati s
$s_1 = s(A_1A_2, A_1A_4)$,
$s_2 = s(A_2A_1, A_2A_3)$,
$s_3 = s(A_3A_2, A_3A_4)$,
$s_4 = s(A_4A_1, A_4A_3)$,
kao što je priakzano na slici 1.7



Slika 1.7: Razmak četverokuta.

Pogledajmo razliku između klasične trigonometrije i racionalne trigonometrije na primjeru trokuta.

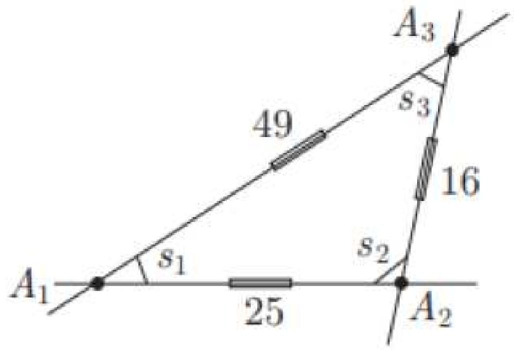
Pristup klasične trigonometrije:
Trokut s duljinama stranica $d_1 = 4, d_2 = 7, d_3 = 5$, ima pripadajuće kutove $\theta_1 \approx 33.92°, \theta_2 \approx 102.44°, \theta_3 \approx 43.64°$, gdje su kutovi i stranice označeni na slici 1.8.



Slika 1.8: Trokut.

Kako bismo riješili trokut i povezali ovih šest veličina, koristimo teorem o zbroju kutova u trokutu, kosinusov poučak i poučak o sinusima. Također, kako bismo izračunali mjeru kuta, potrebne su nam trigonometrijske funkcije i njihove inverzne funkcije koje je teško izračunati bez džepnog računala.

Pristup racionalne trigonometrije:
Trokut s kvadratima udaljenosti $Q_1 = 16, Q_2 = 49, Q_3 = 25$ i s pripadajućim razmacima $s_1 = 384/1225, s_2 = 24/25, s_3 = 24/49$, prikazan je na slici 1.9.



Slika 1.9: Trokut u racionalnoj trigonometriji[6]

U ovom slučaju za izračunavanje vrijednosti razmaka i kvadrata udaljenosti potrebno je poznavati samo elementarnu aritmetiku i algebru.

Razmak i koordinate

Neka je l pravac s implicitnom jednadžbom $ax + by + c = 0$. Implicitna jednadžba pravca l nije jedinstvena jer ju možemo pomnožiti s bilo kojim realnim brojem različitim od nule i tako dobiti ekvivalentnu jednadžbu. Dakle, pravac je određen omjerom $a : b : c$ pa ga stoga tako i definiramo.

Definicija 1.1.3. *Razmak $s(l_1, l_2)$ između pravaca $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ je broj*

$$s(l_1, l_2) = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Iz definicije slijedi da su dva pravca $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_1 : b_1 : c_1$ paralelna ako i samo ako vrijedi

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

te okomita ako i samo ako vrijedi

$$a_1 a_2 + b_2 b_1 = 0.$$

[6]Slika je preuzeta iz knjige [4].

Razmak između ta dva pravca je nepromijenjen ako se pravci translatiraju pa možemo pretpostaviti da se pravci sijeku u ishodištu $O = (0, 0)$ te da imaju jednadžbe $a_1x + b_1y = 0$ i $a_2x + b_2y = 0$.
Izračunajmo razmak između ta dva pravca.
Neka točka B leži na pravcu l_1 gdje $B = (-b_1, a_1)$ te točka C na pravcu l_2 ima oblik $C = (-\lambda b_2, \lambda a_1)$. Kvadrati udaljenosti trokuta $\overline{ABC}$ su onda

$$Q(A, B) = b_1^2 + a_1^2,$$

$$Q(A, C) = \lambda^2(b_2^2 + a_2^2),$$

$$Q(B, C) = (b_1 - \lambda b_2)^2 + (\lambda a_2 - a_1)^2.$$

Primjenom Pitagorinog poučka s pravim kutom u vrhu C dobivamo

$$Q(A, C) + Q(B, C) = Q(A, B).$$

Uvrštavanjem kvadrata udaljenosti u Pitagorin poučak dobivamo

$$\lambda^2(b_2^2 + a_2^2) + (b_1 - \lambda b_2)^2 + (\lambda a_2 - a_1)^2 = b_1^2 + a_1^2.$$

Sređivanjem ove jednadžbe dobivamo

$$2\lambda(a_1a_2 + b_1b_2 - \lambda(a_2^2 + b_2^2)) = 0.$$

Odakle slijedi da je

$$\lambda = 0 \text{ ili } \lambda = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

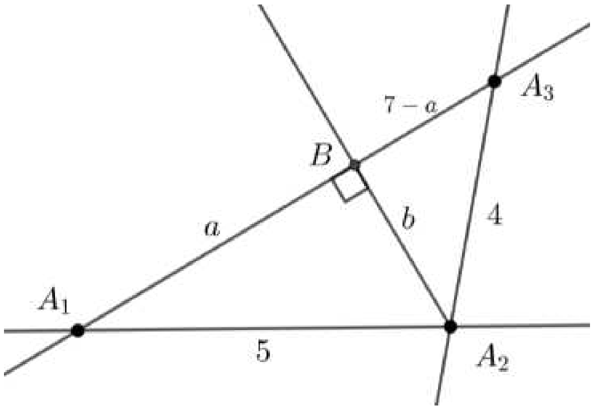
Kada je $\lambda = 0$, tada su pravci su okomiti. Uvrštavanjem drugog rješenja za λ u gornji izraz za $Q(B, C)$ dobivamo

$$Q(B, C) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Stoga je

$$s(l_1, l_2) = \frac{Q(B, C)}{Q(A, B)} = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Primjer 1.1.4. *Izračunajmo razmak s_1 u trokutu $\overline{A_1A_2A_3}$ sa stranicama duljine $d(A_2, A_3) = 4, d(A_1, A_3) = 7, d(A_1, A_2) = 5$. Neka točka B bude ortogonalna projekcija točke A_2 na pravac A_1A_3, neka je $a = d(A_1, B)$ i $b = d(A_2, B)$ kao na slici 1.10.*



Slika 1.10: Računanje razmaka.

Promatramo dva pravokutna trokuta $\overline{A_1A_2B}$ i $\overline{A_3A_2B}$ i primjenjujući Pitagorin poučak dobivamo

$$a^2 + b^2 = 25$$

i

$$(7 - a)^2 + b^2 = 16.$$

Oduzimanjem jednadžbi i sređivanjem dobivamo $14a - 49 = 9$, odnosno

$$a = 58/14 = 29/7.$$

Uvrštavanjem rezultata za a u jednu od jednadžbi dobivamo

$$b^2 = 25 - a^2 = 25 - (29/7)^2 = 384/49.$$

Tada je razmak

$$s_1 = \frac{Q(A_2, B)}{Q(A_1, A_2)} = \frac{384/49}{25} = \frac{384}{1225}.$$

1.2 Teoremi racionalne trigonometrije

Pet glavnih teorema koje ćemo kasnije dokazati su:

1. **Uvjet kolinearnosti:** Tri točke A_1, A_2, A_3 su kolinearne (odnosno leže na jednom pravcu) ako i samo ako vrijedi

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2).$$

2. **Pitagorin poučak:** Pravci A_1A_3 i A_2A_3 su okomiti ako i samo ako je

$$Q_1 + Q_2 = Q_3.$$

3. **Teorem o razmaku:** Neka je dan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$. Tada za kvadrate udaljenosti različite od nule vrijedi da je

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}.$$

4. **Teorem o dualnom razmaku:** Neka je dan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$. Tada definiramo dualni razmak $c_3 = 1 - s_3$ za kojeg vrijedi

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

5. **Formula tri razmaka:** Neka je dan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ za kojeg vrijedi da je

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3.$$

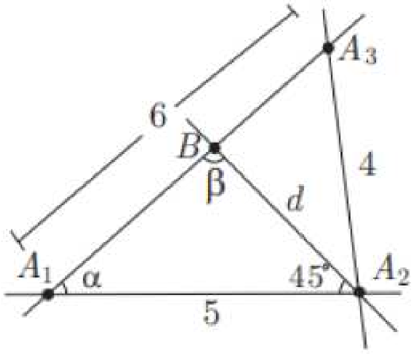
Naravno, postoje mnogo alternativnih formulacija ovih teorema, kao i generalizacija kvadrata udaljenosti i razmaka.

1.3 Različiti pristupi

U slijedećem primjeru ćemo prikazati kako računamo duljinu stranice pravokutnog trokuta najprije koristeći klasični trigonometrijski pristup, a zatim pristup racionalne trigonometrije.

Primjer 1.3.1. *Neka je dan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s duljinama stranica $d(A_1, A_2) = 5, d(A_2, A_3) = 4, d(A_3, A_1) = 6$. Dana je točka B na pravcu A_1A_3 s kutom od $45°$ između pravaca A_1A_2 i A_2B. Kolika je duljina d stranice $\overline{A_2B}$?*

Pristup klasične trigonometrije:
Neka kutovi kod vrhova A_1 i B budu α i β kao što je prikazano na slici 1.11.



Slika 1.11: Pristup klasične trigonometrije.[7]

Primjenjujući kosinusov poučak u trokutu $\overline{A_1A_2A_3}$ dobijemo

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\alpha.$$

Stoga koristeći kalkulator dobijemo da je

$$\alpha = \arccos\frac{3}{4} \approx 41.4096^\circ.$$

Zbroj kutova u trokutu $\overline{A_1A_2B}$ jednak je 180° pa je

$$\beta = 180^\circ - 45^\circ - 41.4096^\circ \approx 93.5904^\circ.$$

Poučak o sinusima u trokutu $\overline{A_1A_2B}$ daje

$$\frac{\sin\alpha}{d} = \frac{\sin\beta}{5}$$

te slijedi

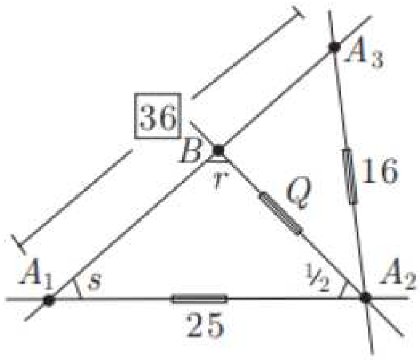
$$d \approx \frac{5\sin 41.4096^\circ}{\sin 93.5904^\circ} \approx 3.3137.$$

Pristup racionalne trigonometrije:

Odredimo prvo kvadrate udaljenosti svih zadanih stranica, odnosno $Q_1 = 16, Q_2 = 36$, $Q_3 = 25$ te pripadajući razmak za kut od 45° koji je jednak $1/2$. Neka s bude razmak

[7] Slika je preuzeta iz knjige [4].

između pravaca A_1A_2 i A_1A_3, a r razmak između pravaca BA_1 i BA_2, također, neka je $Q = Q(A_2, B)$ što vidimo na slici 1.12.



Slika 1.12: Pristup racionalne trigonometrije.[8]

Koristimo teorem o dualnom razmaku u trokutu $\overline{A_1A_2A_3}$ da bismo dobili

$$(25 + 36 - 16)^2 = 4 \cdot 25 \cdot 36 \cdot (1 - s)$$

pa je $s = 7/16$.
Koristimo formulu za razmak u trokutu $\overline{A_1A_2B}$ da bismo dobiili

$$\left(\frac{7}{16} + \frac{1}{2} + r\right)^2 = 2\left(\frac{49}{256} + \frac{1}{4} + r^2\right) + 4 \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot r$$

te pojednostavljeno

$$r^2 - r + \frac{1}{256} = 0.$$

Rješenje jednadžbe je $r = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{16}\sqrt{7}$.
Za svaki r, koristeći teorem o razmaku u trokutu $\overline{A_1A_2B}$, dobijemo

$$\frac{r}{25} = \frac{s}{Q}$$

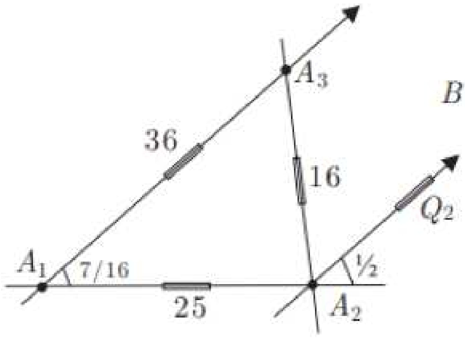
pa uvrštavajući vrijednosti da izračunamo kvadrat udaljenosti i pripadnu duljinu dobijemo

$$Q_1 = 1400 - 525\sqrt{7} \to d_1 = \sqrt{Q_1} \approx 3.3137...,$$

[8]Slika je preuzeta iz knjige [4].

$$Q_2 = 1400 + 525\sqrt{7} \rightarrow d_2 = \sqrt{Q_2} \approx 264.056...$$

Dobili smo dva rješenja i očito je točan odgovor d_1 jer početna pretpostavka opisuje dvije moguće situacije, a druga je ta da pravac A_2B ima razmak $1/2$ sa A_1A_2 kao na slici 1.13.



Slika 1.13: Drugi slučaj.[9]

[9]Slika je preuzeta iz knjige [4].

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 1.2, 1.3, 1.4 knjige [4].

U ovom poglavlju ćemo objasniti osnovne pojmove vezane za racionalnu trigonometriju koji će nam koristiti za razumijevanje koncepata razmaka i kvadrata udaljenosti.

2.1 Polje

Definicija 2.1.1. *Za neprazan skup F kažemo da je polje i označavamo s $(F, +, \cdot)$ ako su na njemu zadane operacije zbrajanja $+ : F \times F \to F$ i množenja $\cdot : F \times F \to F$ za koje vrijede sljedeća svojstva:*
• *$(F, +)$ je komutativna (Abelova) grupa, s neutralnim elementom* 0,
• *$(F, \cdot)$ je polugrupa, tj. množenje je asocijativno,*
• *vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju, odnosno*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ za sve } \; x, y, z \in F,$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \text{ za sve } \; x, y, z \in F,$$

• *svaki nenul element iz F je invertibilan.*[1]

U ovom radu ćemo imati polje racionalnih brojeva, realnih brojeva, kompleksnih brojeva i polje klasa ostatka modulo p kada je p prost broj.

[1] Definicija je preuzeta iz skripte [1]

Polje $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Skup $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{p-1}\}$ je prsten uz operacije zbrajanja i množenja modulo p. Prsten $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ je polje ako i samo ako je p prost broj.
Pokažimo na primjeru kako su definirane operacije u polju $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Primjer 2.1.2. *Računanje u polju $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:*

$$\bar{3} + \bar{5} = \bar{8} = \bar{1},$$

$$\bar{3} \cdot \bar{6} = \overline{18} = \bar{4},$$

$$\frac{\overline{34}}{\overline{53}} + \frac{\overline{19}}{\overline{17}} = \frac{\bar{6}}{\bar{4}} + \frac{\bar{5}}{\bar{3}} = \frac{\overline{38}}{\overline{12}} = \frac{\bar{3}}{\bar{5}} = \bar{2}.$$

Kvadrati brojeva

Promatramo proizvoljno polje F. Izraz 'broj' se koristi za element polja F. Broj a u F je kvadrat broja točno kada je oblika $a = r^2$ za neki broj r u F. Očito su 0 i 1 kvadrati brojeva u svakom polju.

Primjer 2.1.3. *U polju $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sa p elemenata, točno je $(p+1)/2$ različitih kvadrata brojeva.*

p	kvadrati u $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$\bar{3}$	$\bar{0}, \bar{1}$
$\bar{5}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}$
$\overline{11}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{9}$
$\overline{13}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}$
$\overline{17}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{16}$
$\overline{19}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{16}, \overline{17}$

U polju $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ako je p prost i oblika $p = 4l + 1$, tada je -1 kvadrat. Ako je oblika $p = 4l + 3$, onda broj -1 nije kvadrat.

Za broj s u polju F kažemo da je kvazi-korijen onda kada je $s(s-1)$ kvadrat. Očito su 0 i 1 kvazi-korijeni u bilo kojem polju.

U primjeru ispod dajemo popis brojeva s tim svojstvom.

Primjer 2.1.4. *U polju $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sa p elemenata točno je $(p+1)/2$ ili $(p+3)/2$ različitih kvazi-korijena ovisno o p.*

p	kvazi-korijen u $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$\bar{3}$	$\bar{0}, \bar{1}$
$\bar{5}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}$
$\bar{7}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$
$\bar{11}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{10}$
$\bar{13}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}$
$\bar{17}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{16}$
$\bar{19}$	$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{16}, \bar{18}$

2.2 Fibonaccijev i Cauchyjev identitet

Izdvojimo neke identitete koji će nam kasnije trebati.

Binomnim teoremom dan je razvoj $(x_1 + x_2)^n$ za prirodni broj n i elemente x_1, x_2 polja koristeći binomni koeficijent

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)...1}. \tag{2.1}$$

Razvoj tada glasi

$$(x_1 + x_2)^n = x_1^n + \binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2 + ... + \binom{n}{n-1} x_1 x_2^{n-1} + x_2^n. \tag{2.2}$$

Fibonaccijev identitet je jednakost

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 x_2 - y_2 y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2). \tag{2.3}$$

Cauchyjev identitet je jednakost

$$\begin{aligned}(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \\ = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.3 Linearne jednadžbe

Promotrimo dvije linearne jednadžbe s varijablama x i y oblika

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

i

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

gdje je barem jedan od koeficijenata a_1, b_1 odnosno a_2, b_2 različit od nule.
Jedinstveno rješenje (x, y) postoji onda kada je

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

U ovom slučaju je

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

S druge strane, pretpostavimo da je $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ tako da vrijedi $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$. Tada ako je $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ imamo više rješenja, no ako je $a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$ nema rješenja.

2.4 Kvadratne jednadžbe

Kvadratna jednadžba s nepoznanicom x je jednadžba oblika

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gdje su a, b, c realni brojevi i $a \neq 0$ te su njena rješenje jednaka

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Normirani oblik kvadratne jednadžbe za neke brojeve p i q je

$$(x - p)^2 = q.$$

Definicija 2.4.1. *Dvije kvadratne jednadžbe* $(x - p_1)^2 = q_1$ *i* $(x - p_2)^2 = q_2$ *su* ***kompatibilne*** *onda kada imaju barem jedno zajedničko rješenje.*

Teorem 2.4.2 (Jednakost kvadratnih jednadžbi)**.** *Kvadratne jednadžbe* $(x - p_1)^2 = q_1$ *i* $(x - p_2)^2 = q_2$ *su kompatibilne ako vrijedi*

$$\left((p_1 - p_2)^2 - (q_1 + q_2)\right)^2 = 4q_1 q_2.$$

U tom slučaju, ako je $p_1 \neq p_2$*, njihovo jedinstveno zajedničko rješenje je*

$$x = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{q_1 - q_2}{2(p_1 - p_2)}.$$

Dokaz. Ako je $p_1 = p_2$, onda su jednadžbe $(x - p_1)^2 = q_1$ i $(x - p_2)^2 = q_2$ jednake samo kada je $q_1 = q_2$, što je ekvivalentno uvjetu da je $(q_1^2 + q_2^2) = 4q_1q_2$.
Pretpostavimo suprotno, odnosno da vrijedi $p_1 \neq p_2$. Ako su jednadžbe kompatibilne i imaju zajedničko rješenje x, tada oduzimajući jednadžbe dobivamo
$2(p_1 - p_2)x = p_1^2 - p_2^2 - q_1 + q_2$ tako da je $x = \frac{p_1+p_2}{2} - \frac{q_1-q_2}{2(p_1-p_2)}$.
x zadovoljava i drugu jednadžbu pa kada ga uvrstimo slijedi:

$$\left(\frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{q_1 - q_2}{2(p_1 - p_2)} - p_2\right)^2 = q_2.$$

Sada sređujući gornju jednadžbu dobijemo $((p_1-p_2)^2-(q_1-q_2))^2 = 4(p_1-p_2)^2q_1$, raspišemo kvadrat razlike pa imamo $(p_1 - p_2)^4 - 2(p_1 - p_2)^2(q_1 - q_2) + (q_1 - q_2)^2 = 4(p_1 - p_2)^2q_1$, stoga slijedi $(p_1 - p_2)^4 + 2(p_1 - p_2)^2(q_1 + q_2) + (q_1 - q_2)^2 = 0$.
Kako bismo dobili izraz koji tražimo da iskoristimo kvadrat razlike moramo dodati i oduzeti član $(q_1 + q_2)$ te slijedi $\left((p_1 - p_2)^2 - (q_1 + q_2)\right)^2 = 4q_1q_2$. □

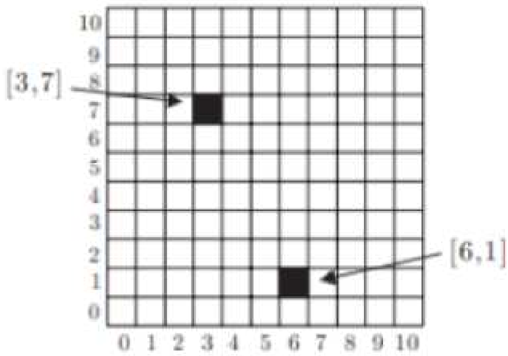
Primjer 2.4.3. *U polju racionalnih brojeva kvadratne jednadžbe* $(x-4)^2 = 9$ *i* $(x-6)^2 = 1$ *su jednake jer vrijedi* $((4 - 6)^2 - (9 + 1))^2 = 36 = 4 \cdot 9 \cdot 1$ *te je zajedničko rješenje, zbog toga što je* $4 \neq 6$*, slijedi* $x = \frac{4+6}{2} - \frac{9-1}{2(4-6)} = 7$.

2.5 Točke i pravci

Definicija 2.5.1. *Kažemo da je točka* $A = (x, y)$ *u proizvoljnom polju* F *uređeni par brojeva* x *i* y*, gdje su realni brojevi* x *i* y *koordinate točke* A.

Pomoću polja $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ prikažimo točke u koordinatnom sustavu kao u sljedećem primjeru.

Primjer 2.5.2. *Prikaz točke* $(\bar{3}, \bar{7})$ *i* $(\bar{6}, \bar{1})$ *u polju* $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.



Slika 2.1: Dvije točke u polju $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.[2]

U sljedećoj definiciji ćemo dati malo neuobičajenu definiciju pravca jer će nam upravo takav oblik biti prikladan u nastavku prilikom razvijanja racionalne trigonometrije.

Definicija 2.5.3. *Pravac $l = a : b : c$ je omjer sa svojstvom da barem jedan od a ili b nije jednak nuli.*

Definicija 2.5.4. *Pravac $l = a : b : c$ je nul-pravac ako vrijedi $a^2 + b^2 = 0$.*

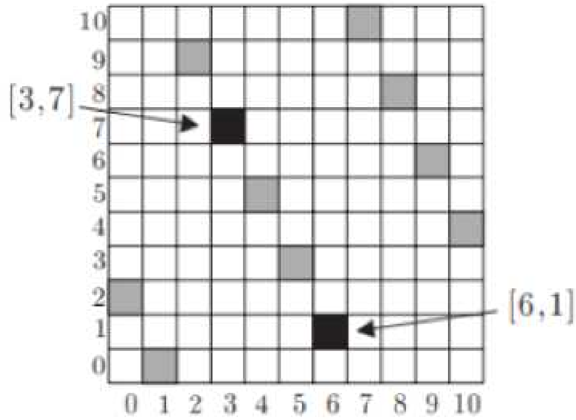
Ako je pravac $l = a : b : c$ nul-pravac tada a i b moraju biti različiti od nule i $(b/a)^2 = -1$ kako bi -1 bio kvadrat broja.

Definicija 2.5.5. *Točka $A = (x, y)$ leži na pravcu $l = a : b : c$ ako vrijedi $ax + by + c = 0$. Odnosno, pravac l prolazi točkom A.*

Kažemo da pravac $l = a : b : c$ prolazi ishodištem $O = (0, 0)$, tj. kažemo da je standardan ili centralan, ako je $c = 0$.

Primjer 2.5.6. *U polju $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ je prikazan pravac $\overline{10} : \bar{5} : \bar{1}$ (sivo) koji prolazi kroz točke $(\bar{3}, \bar{7})$ i $(\bar{6}, \bar{1})$.*

[2]Slika je preuzeta iz knjige [4].



Slika 2.2: Pravac $\bar{10} : \bar{5} : \bar{1}$ u $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}^3$

Definicija 2.5.7. *Za tri ili više točaka koje leže na zajedničkom pravcu kažemo da su kolinearne.*

Teorem 2.5.8 (Kolinearne točke). *Točke $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ su kolinearne onda kada vrijedi*

$$x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 = 0.$$

Dokaz. Ako su sve tri točke identične, onda je identitet očit.
Inače, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Iz teorema 2.5.8 imamo da točka (x_3, y_3) leži na jedinstvenom pravcu koji prolazi kroz (x_1, y_1) i (x_2, y_2) ako vrijedi $(y_1 - y_2)x_3 + (x_2 - x_1)y_3 + x_1y_2 - x_2y_2 = 0$ te odavde slijedi tvrdnja teorema. □

Definicija 2.5.9. *Trokut $\overline{A_1A_2A_3} = \{A_1, A_2, A_3\}$ je skup koji se sastoji od tri nekolinearne točke A_1, A_2, A_3.*

Primjer 2.5.10. *U polju $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ točke $A_1 = (\bar{2}, \bar{8}), A_2 = (\bar{9}, \bar{9}), A_3 = (\bar{10}, \bar{0})$ tvore trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s pravcima na kojima leže stranice*
$l_1 = A_2A_3 = \bar{9} : \bar{1} : \bar{1}$,
$l_2 = A_1A_3 = \bar{9} : \bar{9} : \bar{1}$,
$l_3 = A_1A_2 = \bar{7} : \bar{3} : \bar{1}$.

Definicija 2.5.11. *Četverokut $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ je skup od četiri različite točke od kojih nikoje tri nisu kolinearne.*

[3]Slika je preuzeta iz knjige [4].

Teorem 2.5.12 (Pravac kroz dvije točke)**.** *Za bilo koje dvije različite točke A_1 i A_2 postoji jedinstveni pravac $l = A_1A_2$ koji prolazi kroz obje točke. Neka su $A_1 = (x_1, y_1)$ i $A_2 = (x_2, y_2)$ dvije različite točke, tada je*

$$l = A_1A_2 = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1.$$

Dokaz. Ako su $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ različite točke, onda pravac $l = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$ prolazi kroz obje jer vrijedi

$$(y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0,$$

$$(y_1 - y_2)x_2 + (x_2 - x_1)y_2 + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Obratno, ako je $m = a : b : c$ pravac koji prolazi kroz točke A_1 i A_2, tada imamo

$$ax_1 + by_1 + c = 0,$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0.$$

Oduzmemo te dvije jednadžbe kako bismo dobili izraz $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$ pa je $a : b = y_1 - y_2 : x_2 - x_1$. Stoga je $m = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : d$ za neki broj d i kako točka A_1 leži na pravcu m, imamo $(y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 + d = 0$.
Zaključujemo da je $d = x_1y_2 - x_2y_1$ pa $m = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$. □

Teorem 2.5.13 (Pravci koji se sijeku)**.** *Neka se pravci $a_1 : b_1 : c_1$ i $a_2 : b_2 : c_2, a_3 : b_3 : c_3$ sijeku. Tada vrijedi*

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 = 0.$$

Dokaz. Ako tri pravca prolaze kroz točku (x, y), tada je $(x, y, 1)$ nenul rješenje homogenog linearnog sustava

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0.$$

Stoga imamo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 = 0.$$ □

2.6 Paralelni i okomiti pravci

Pravci $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ su paralelni onda i samo onda ako vrijedi $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, odnosno kada je $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$.

Teorem 2.6.1 (Presjek pravaca)**.** *Neka pravci l_1 i l_2 nisu paralelni. Tada postoji jedinstvena točka $A = l_1 \cap l_2$ koja leži na oba pravca. Neka su dani pravci $l_1 = a_2 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$, tada je*

$$A = l_1 \cap l_2 = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right).$$

Dokaz. Točka (x, y) leži na $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ ako vrijedi $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Kako pravci l_1 i l_2 nisu paralelni, vrijedi da je $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ pa je jedinstveno rješenje ovog sustava

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \; y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

□

Pravci $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ su okomiti onda i samo onda ako vrijedi $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$, odnosno kada je $a_1 : b_1 = -b_2 : a_2$.

Teorem 2.6.2 (O paralelama)**.** *Za bilo koju točku $A = (x, y)$ i bilo koji pravac $l = a : b : c$ postoji jedinstveni pravac k koji prolazi točkom A i paralelan je pravcu l. Pravac k određen je omjerom $k = a : b : -ax - by$.*

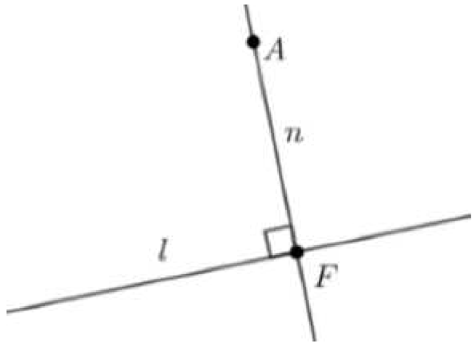
Dokaz. Ako je $l = a : b : c$, tada je bilo koji pravac k paralelan s l oblika $k = a : b : d$ za neki broj d. Pravac k prolazi točkom $A = (x, y)$ ako i samo ako je $ax + by + d = 0$. Takav pravac je jedinstveno određen te ima oblik $k = a : b : -ax - by$. □

Teorem 2.6.3 (O okomici na pravac)**.** *Za bilo koju točku $A = (x, y)$ i bilo koji pravac $l = a : b : c$ postoji jedinstveni pravac n koji prolazi kroz točku A i okomit je pravcu l. Pravac n određen je omjerom $n = -b : a : -bx - ay$.*

Dokaz. Ako je $l = a : b : c$, tada bilo koji pravac n okomit na l mora imati oblik $n = -b : a : d$ za neki broj d i prolazi točkom $A = (x, y)$ ako i samo ako je $-bx + ay + d = 0$. Takav pravac je jedinstveno određen te ima oblik $n = -b : a : -bx - ay$. □

Teorem 2.6.4 (Sjecište okomice i pravca)**.** *Za bilo koju točku $A = (x, y)$ i bilo koji pravac $l = a : b : c$, okomica n iz točke A na pravac l siječe taj pravac u točki*

$$F = \left(\frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx + a^2y - bc}{a^2 + b^2} \right).$$



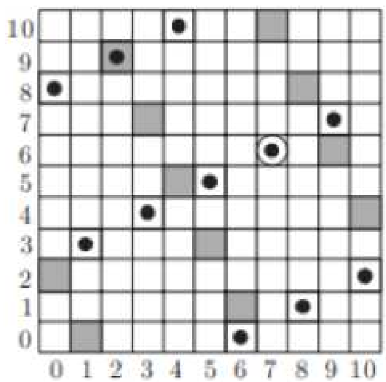
Slika 2.3: Okomica spuštena iz točke A na pravac l.

Dokaz. Po teoremu 2.6.3 okomica povučena iz točke $A = (x, y)$ na pravac $l = a : b : c$ je $n = -b : a : bx - ay$. Ova dva pravca nisu paralelna zbog pretpostavke da je $a^2 + b^2 \neq 0$. Po teoremu 2.6.1 vrijedi

$$F = n \cap l = \left(\frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx + a^2y - bc}{a^2 + b^2} \right).$$

$\square$

Primjer 2.6.5. *U polju $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ okomica iz točke $A = (\bar{7}, \bar{6})$ (krug s točkom) na pravac $l = \bar{10} : \bar{5} : \bar{1}$ (sivo) je $n = \bar{9} : \bar{4} : \bar{1}$ (crne točke) i presjek pravca i okomice je $F = (\bar{2}, \bar{9})$ (sivi kvadrat s točkom).*



Slika 2.4: Okomica pravca u polju $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.[4]

[3] Slika je preuzeta iz knjige [4].

2.7 Afine kombinacije

Definicija 2.7.1. *Za bilo koje točke $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ i bilo koja dva broja λ_1, λ_2 koji zadovoljavaju*

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

afina kombinacija $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ je točka

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2).$$

Teorem 2.7.2 (Afina kombinacija)**.** *Svaka točka koja leži na pravcu A_1A_2 je jedinstvena afina kombinacija $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ za neke brojeve λ_1, λ_2 takve da je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Obratno, bilo koja afina kombinacija ovog oblika leži na pravcu A_1A_2.*

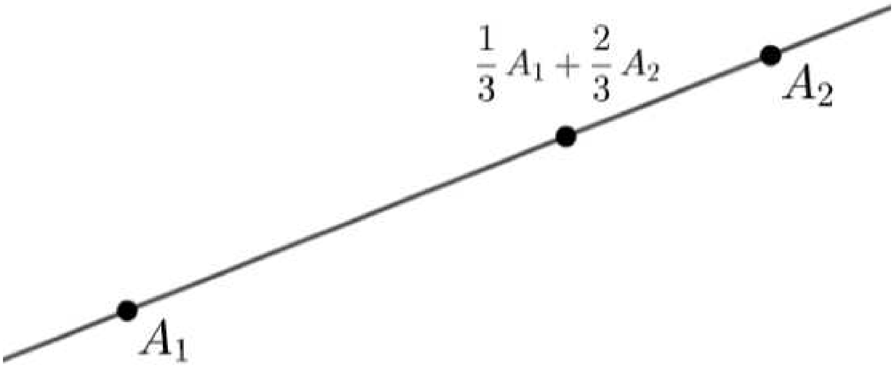
Dokaz. Pretpostavimo da su točke $A_1 = (x_1, y_1)$ i $A_2 = (x_2, y_2)$ različite i da vrijedi $A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ za neke brojeve λ_1, λ_2 koji zadovoljavaju $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.
Tada identitet

$$\begin{aligned}(y_1 - y_2)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (x_1 - x_1)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 &= \\ = (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)(x_2 y_1 - x_1 y_2)&\end{aligned}$$

zajedno s teoremom 2.5.12 pokazuje da A_3 leži na A_1A_2.
Obratno, pretpostavimo da točka $A = (x, y)$ leži na pravcu A_1A_2 tako da vrijedi $(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.
Kako su točke A_1 i A_2 različite, jedna od zagrada $(x_2 - x_1)$ i $(y_2 - y_1)$ je različita od nule.
Bez smanjena općenitosti, pretpostavimo da je $x_2 - x_1 \neq 0$.
Tada je $\lambda = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$ tako da vrijedi $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Uvrstimo ovu vrijednost u prethodnu jednakost te dobijemo $(y - \lambda y_1 - (1 - \lambda)y_2)(x_2 - x_1) = 0$.
Stoga je $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$ pa je točka A jednaka $A = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2$.
Provjerimo jedinstvenost.
Ako je $\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 = \mu A_1 + (1 - \mu)A_2$ za neke brojeve λ i μ, tada je razlika koordinata na lijevoj i desnoj strani
$(\lambda - \mu)(x_1 - x_2) = 0$,
$(\lambda - \mu)(y_1 - y_2) = 0$.
Po pretpostavci je $A_1 \neq A_2$ pa možemo zaključiti da vrijedi $\lambda = \mu$. □

Primjer 2.7.3. *Slika 2.5 prikazuje afinu kombinaciju $(1/3)A_1 + (2/3)A_2$ za dvije točke A_1, A_2 u polju racionalnih brojeva ili u polju realnih brojeva.*

[4]Slika je preuzeta iz knjige [4].



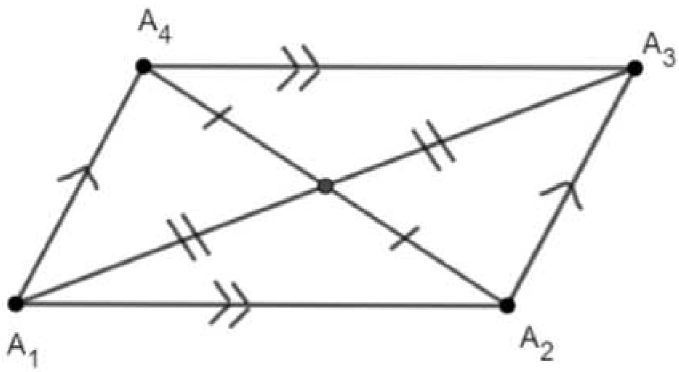
Slika 2.5: Afina kombinacija.

Definicija 2.7.4. *Za različite točke* $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$*, točka*

$$M = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

je polovište dužine $\overline{A_1A_2}$.

Teorem 2.7.5 (Središte paralelograma)**.** *Ako je* $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ *paralelogram, tada se njegove dijagonale raspolavljaju.*



Slika 2.6: Središte paralelograma.[5]

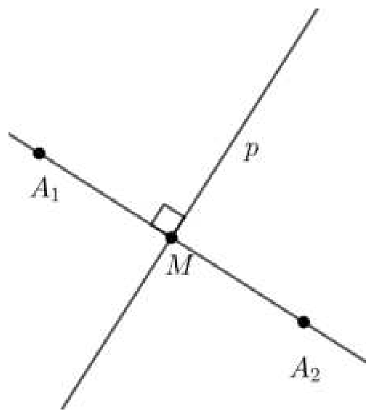
Dokaz. Neka su $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3), A_4 = (x_4, y_4)$ vrhovi paralelograma. Tada su pravci
$A_1A_2 = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$,

$A_3A_4 = y_3 - y_4 : x_4 - x_3 : x_3y_4 - x_4y_3$
paralelni te iz toga slijedi $(y_1 - y_2)(x_4 - x_3) - (y_3 - y_4)(x_2 - x_1) = 0$.
Slično, kako su A_2A_3 i A_1A_4 paralelni, tada vrijedi $(y_2 - y_3)(x_1 - x_4) - (y_4 - y_1)(x_3 - x_2) = 0$.
Raspišemo prethodne dvije jednakosti kao
$(y_1 - y_2)x_4 + (x_2 - x_1)y_4 - (y_1 - y_2)x_3 - (x_2 - x_1)y_3 = 0,$
$(y_3 - y_2)x_4 + (x_2 - x_3)y_4 + (x_3 - x_2)y_1 + (y_2 - y_3)x_1 = 0.$
Točke A_1, A_2, A_3 nisu kolinearne, stoga po teoremu 2.5.8 imamo
$\begin{vmatrix} y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_2 & x_2 - x_3 \end{vmatrix} = -(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1) \neq 0.$
Riješimo prethodne dvije jednakosti te dobijemo
$x_4 = x_1 - x_2 + x_3,$
$y_4 = y_1 - y_2 + y_3,$
pa je $\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_3 = \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_4$. □

Definicija 2.7.6 (Simetrala dužine)**.** *Simetrala dužine $\overline{A_1A_2}$ je okomica povučena iz polovišta M stranice $\overline{A_1A_2}$ na pravac A_1A_2.*

Teorem 2.7.7 (Simetrala dužine)**.** *Neka su $A_1 = (x_1, y_1)$ i $A_2 = (x_2, y_2)$ različite točke. Dužina $\overline{A_1A_2}$ ima simetralu dužine*

$$p = x_1 - x_2 : y_1 - y_2 : \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2}.$$



Slika 2.7: Simetrala dužine.

Dokaz. Kako je $A_1A_2 = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$, tada bilo koji pravac okomit na A_1A_2 ima oblik $p = x_1 - x_2 : y_1 - y_2 : c$ za neki broj c. Pravac p prolazi polovištem

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

dužine $\overline{A_1A_2}$ onda kada je

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{2} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{2} + c = 0.$$

Zbog toga je $c = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2}$ pa imamo $p = x_1 - x_2 : y_1 - y_2 : \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2}$. □

Poglavlje 3

Kvadrat udaljenosti

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 2.5 knjige [4].

Definirali smo kvadrat udaljenosti $Q(A_1, A_2)$ između točaka $A_1 = (x_1, y_1)$ i $A_2 = (x_2, y_2)$ kao broj

$$Q(A_1, A_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

U polju racionalnih brojeva ili u polju realnih brojeva $Q(A_1, A_2)$ je uvijek nenegativan te je jednak nuli ako vrijedi $A_1 = A_2$. Međutim, za ostala polja to ne mora vrijediti.

Primjer 3.0.1. *U polju kompleksnih brojeva za točke $A_1 = (0, 0)$ i $A_2 = (1, i)$ kvadrat udaljenosti je $Q(A_1, A_2) = 1^2 + i^2 = 0$.*

3.1 Pravci i trokut

Teorem 3.1.1 (Nul-pravac)**.** *Ako su A_1 i A_2 različite točke, tada je A_1A_2 nul-pravac onda kada je $Q(A_1, A_2) = 0$.*

Dokaz. Ako su $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ različite točke, tada zbog teorema 2.5.12 imamo $A_1A_2 = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$.
Zbog definicije nul-pravca vrijedi $(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 0$, a to je upravo uvjet da je $Q(A_1A_2) = 0$. □

Teorem 3.1.2 (Polovište)**.** *Neka A_1A_2 nije nul-pravac. Tada postoji jedinstvena točka A na tom pravcu koja zadovoljava uvjet*

$$Q(A_1, A) = Q(A, A_2).$$

Ta točka je polovište

$$M = (1/2)A_1 + (1/2)A_2$$

dužine $\overline{A_1A_2}$.
Nadalje, vrijedi $Q(A_1, M) = Q(M, A_2) = Q(A_1, A_2)/4$.

Dokaz. Ako su $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ različite točke, tada zbog teorema 2.7.2 bilo koja točka na pravcu A_1A_2 ima oblik

$$A = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$$

za neki broj λ.
Uvjet $Q(A_1, A) = Q(A, A_2)$ tada daje

$$((\lambda - 1)x_1 + (1 - \lambda)x_2)^2 + ((\lambda - 1)y_1 + (1 - \lambda)y_2)^2 = (\lambda x_1 + (-\lambda)x_2)^2 + (\lambda y_1 + (-\lambda)y_2)^2$$

Sređivanjem prethodne jednakosti dobijemo $((1 - \lambda)^2 - \lambda^2)((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2) = 0$.
Pod pretpostavkom da je A_1A_2 pravac te zbog teorema 3.1.1 vrijedi
$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \neq 0$ pa $(1 - \lambda)^2 - \lambda^2) = 0$.
Stoga je $\lambda = 1/2$ i točka A je polovište stranice $\overline{A_1A_2}$ i vrijedi

$$M = (1/2)A_1 + (1/2)A_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Tada je

$$Q(A_1, M) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2 = Q(M, A_2) = Q(A_1, A_2)/4.$$

□

Teorem 3.1.3 (O paralelogramu)**.** *U paralelogramu $\overline{A_1A_2A_3A_4}$ za kvadrate udaljenosti suprotnih stranica vrijedi $Q(A_1, A_2) = Q(A_3, A_4)$ i $Q(A_1, A_4) = Q(A_2, A_3)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3), A_4 = (x_4, y_4)$ vrhovi paralelograma. Zbog teorema 2.7.5, polovišta stranica $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_4}$ se sijeku tako da vrijedi

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4,$$

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4.$$

Tada je

$$x_1 - x_2 = x_4 - x_3,$$

$$y_1 - y_2 = y_4 - y_3.$$

No, zbog toga je i

$$\begin{aligned} Q(A_1, A_2) &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \\ &= (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 = Q(A_3, A_4). \end{aligned}$$

□

Teorem 3.1.4 (Uvjet kolinearnosti)**.** *Neka su A_1, A_2, A_3 točke i neka je $Q_1 = Q(A_2, A_3)$, $Q_2 = Q(A_1, A_3)$, $Q_3 = Q(A_1, A_2)$. Tada vrijedi da je*

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)$$

ako i samo ako su točke A_1, A_2, A_3 kolinearne.

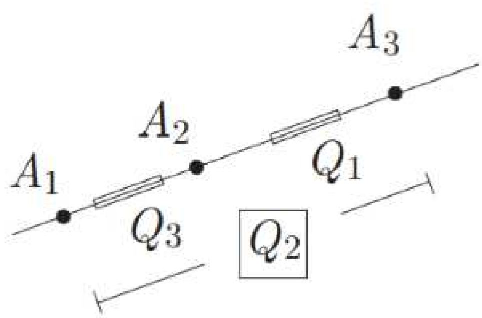
Dokaz. Neka su $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3)$.
Tada su kvadrati udaljenosti po definiciji

$$Q_1 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2,$$

$$Q_2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2,$$

$$Q_3 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Na slici 3.1 su prikazane kolinearne točke s pridruženim kvadratima udaljenosti.



Slika 3.1: Kolinarne točke.[1]

Raspišemo ih u obliku

$$Q_1 = a_1^2 + b_1^2,$$

$$Q_2 = a_2^2 + b_2^2,$$

$$Q_3 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2,$$

gdje su $a_1 = x_3 - x_1, b_1 = y_3 - y_2, a_2 = x_3 - x_1, b_2 = y_3 - y_1$ pa vrijedi

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = 2(a_1a_2 + b_1b_2).$$

[1]Slika je preuzeta iz knjige [4].

Koristimo izraz

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2$$

kojeg raspišemo kao

$$\begin{aligned} 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 &= 4((a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2)^2) \\ &= 4(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= 4(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1)^2, \end{aligned}$$

gdje je korišten Fibonaccijev identitet 2.3 u drugom retku. Kako je $4 \neq 0$, teorem 2.5.8 govori da je izraz $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1$ jednak ako i samo ako su točke A_1, A_2, A_3 kolinearne. □

Definicija 3.1.5. *Neka je F polje. Arhimedova funkcija $A : F^3 \to F$ za brojeve a, b, c je definirana kao*

$$A(a, b, c) = (a + b + c)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Uočite da je $A(a, b, c)$ simetrična funkcija.

Primjer 3.1.6. *Pokažimo da je za realne brojeve* 4, 6, 12 *funkcija $A(a, b, c)$ simetrična.*

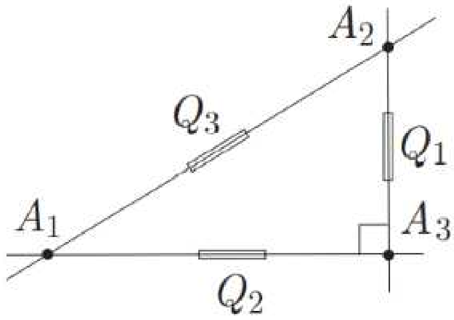
$A(4, 6, 12) = (4 + 6 + 12)^2 - 2(4^2 + 6^2 + 12^2) = 92,$
$A(6, 4, 12) = (6 + 4 + 12)^2 - 2(6^2 + 4^2 + 12^2) = 92,$
$A(12, 6, 4) = (12 + 6 + 4)^2 - 2(12^2 + 6^2 42^2) = 92.$

Teorem 3.1.7 (Pitagorin teorem)**.** *Neka je dan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s kvadratima udaljenosti Q_1, Q_2, Q_3. Vrijedi*

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

ako i samo ako su pravci A_1A_3 i A_2A_3 okomiti.

Dokaz. Neka su $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$. Tada zbog teorema 2.5.12 imamo $A_1A_3 = y_1 - y_3 : x_3 - x_1 : x_1y_3 - x_3y_1$ i $A_2A_3 = y_2 - y_3 : x_3 - x_2 : x_2y_3 - x_3y_2$. Ovi pravci su okomiti ako i samo ako vrijedi $(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$.



Slika 3.2: Pravokutan trokut s kvadratima udaljenosti.[2]

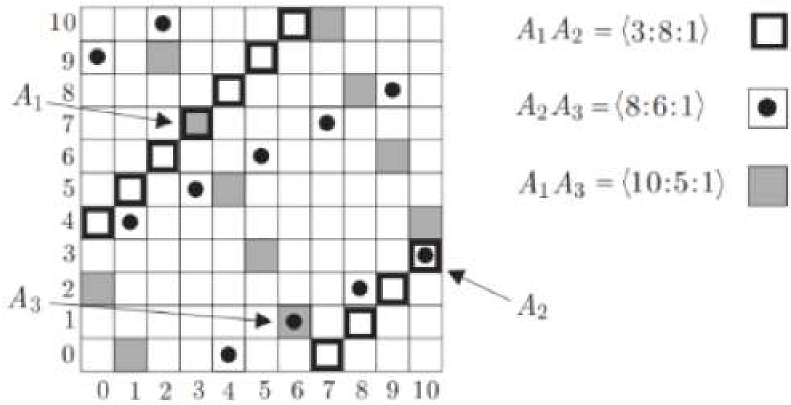
Slijedi

$$
\begin{aligned}
Q_1 + Q_2 - Q_3 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \\
&\quad - (x_1 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 \\
&= 2(x_3 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_2x_1 + y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3 + y_3^2) \\
&= 2((y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2))
\end{aligned}
$$

Kako je $2 \neq 0$, tada je desna strana jednakosti jednaka nuli zbog teorema 2.5.8 i pravci A_1A_3 i A_2A_3 su okomiti ako i samo ako je $Q_1 + Q_2 = Q_3$. □

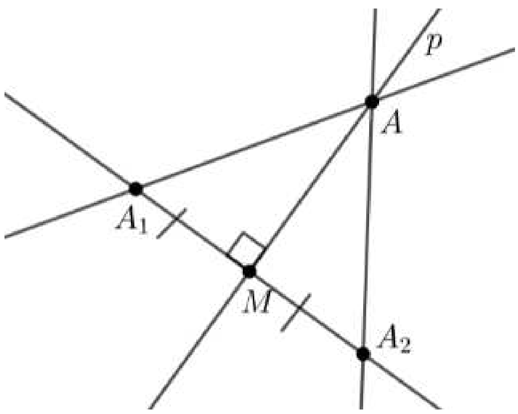
Primjer 3.1.8. *U polju $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ dan je pravokutan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$, gdje su točke $A_1 = (\bar{3}, \bar{7}), A_2 = (\overline{10}, \bar{3}), A_3 = (\bar{6}, \bar{1})$ kako je prikazano na slici 3.3 zajedno s pravcima $A_1A_2 = \bar{3} : \bar{8} : \bar{1}$, $A_1A_3 = \overline{10} : \bar{5} : \bar{1}$, $A_2A_3 = \bar{8} : \bar{6} : \bar{1}$.*

[2] Slika je preuzeta iz knjige [4].



Slika 3.3: Pravokutan trokut u $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}^3$

Teorem 3.1.9 (O simetrali dužine)**.** *Neka je p simetrala dužine $\overline{A_1A_2}$. Tada svaka točka A koja leži na pravcu p zadovoljava uvjet $Q(A, A_1) = Q(A, A_2)$. Obratno, svaka točka A koja zadovoljava ovu jednakost leži na pravcu p.*



Slika 3.4: Simetrala dužine.

Dokaz. Pretpostavimo da se točka A nalazi na pravcu p. Ako je $p = A_1A_2$, tada je A_1A_2 nul-pravac pa po teoremu 3.1.1 imamo $Q(A, A_1) = Q(A, A_2) = 0$.
Ako je $p \neq A_1A_2$, tada je A_1A_2 pravac. U ovom slučaju, ako A leži na A_1A_2, tada je A

[3]Slika je preuzeta iz knjige [4].

polovište dužine $\overline{A_1A_2}$ pa po teoremu 3.1.2 imamo $Q(A, A_1) = Q(A, A_2)$.
U suprotnome, ako A ne leži na A_1A_2, tada vrijedi da trokuti $\overline{AMA_1}$ i $\overline{AMA_2}$ imaju pravi kut u polovištu M od A_1A_2 pa iz Pitagorinog teorema slijedi

$$Q(A, A_1) = Q(A, M) + Q(M, A_1),$$

$$Q(A, A_2) = Q(A, M) + Q(M, A_2).$$

Zbog teorema 3.1.2 imamo $Q(M, A_1) = Q(M, A_2)$, stoga je $Q(A, A_1) = Q(A, A_2)$.
Obratno, pretpostavimo da je točka A sa svojstvom $Q(A, A_1) = Q(A, A_2) = Q$.
Ako je $Q(A_1, A_2) = 0$, tada zbog teorema 3.1.1 pravac A_1A_2 je nul-pravac jer su točke A, A_1, A_2 kolinearne pa točka A leži na pravcu A_1A_2.
U drugom slučaju, gdje vrijedi $Q(A, A_1) = Q(A, A_2) = Q$ pretpostavimo da je $Q(A_1, A_2) \neq 0$, tako da je A_1A_2 pravac. Neka točka F bude nožište okomice spuštene iz točke A na pravac A_1A_2. Po Pitagorinom teoremu vrijedi $Q(F, A_1) = Q - Q(A, D) = Q(F, A_2)$ pa zbog teorema 3.1.2 točka F je polovište M stranice $\overline{A_1A_2}$ i A leži na simetrali p dužine $\overline{A_1A_2}$. □

Teorem 3.1.10 (Kvadrat udaljenosti pravca)**.** *Za točku $A = (x, y)$ i za pravac $l = a : b : c$, kvadrat udaljenosti od A do nožišta F okomice spuštene iz točke A na pravac l je*

$$Q(A, F) = \frac{(ax + by + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

Dokaz. Iz teorema 2.6.4 slijedi da je nožište okomice spuštene iz točke A na pravac p točka

$$F = \left(\frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx + a^2y - bc}{a^2 + b^2}\right).$$

Tada je kvadrat udaljenosti

$$\begin{aligned}
Q(A, F) &= \left(\frac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2} - x\right)^2 + \left(\frac{-abx + a^2y - b}{a^2 + b^2} - y\right)^2 \\
&= \frac{a^2(ax + by + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2(ax + by + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} \\
&= \frac{(ax + +by + c)^2}{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

□

Definicija 3.1.11. *Kvadrat udaljenosti $Q(A, l)$ od točke A do pravca l definiramo kao kvadrat udaljenosti od točke A do nožišta F okomice spuštene iz točke A na pravac l.*

3.2 Arhimedova formula

Definicija 3.2.1. *Za tri točke A_1, A_2, A_3 s kvadratima udaljenosti Q_1, Q_2, Q_3, definiramo broj $\mathcal{A}$ pridružen skupu $\{A_1, A_2, A_3\}$ kao*

$$\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2).$$

Vrijednost $\mathcal{A}$ ne ovisi o redoslijedu točaka, odnosno $\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3) = A(Q_1, Q_3, Q_2) = A(Q_2, Q_1, Q_3) = A(Q_2, Q_3, Q_1) = A(Q_3, Q_2, Q_1) = A(Q_3, Q_1, Q_2)$.

Teorem 3.2.2. *Vrijednost $\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3)$ za točke $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$ je*

$$\mathcal{A} = 4(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1)^2.$$

Posebno, vrijednost $\mathcal{A}$ je kvadrat, a $\overline{A_1A_2A_3}$ je trokut onda kada je $\mathcal{A}$ različit od nule.

Dokaz. Formula za $\mathcal{A}$ je izvedena u dokazu teorema 3.1.4 i pokazuje da je $\mathcal{A}$ kvadrat. Vrijedi $\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3) = (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)$. Po teoremu 2.5.8 imamo $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 \neq 0$ onda kada su točke A_1, A_2, A_3 nekolinearne, odnosno kada tvore trokut. Kako je $4 \neq 0$ i izraz $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 \neq 0$, zaključujemo da je $\mathcal{A} \neq 0$. □

Primjer 3.2.3. *Prethodni teorem pokazuje da ne postoji niti jedan trokut u polju racionalnih brojeva čiji su kvadrati udaljenosti $Q_1 = 16, Q_2 = 36, Q_3 = 9$ jer u polju racionalnih brojeva broj $\mathcal{A} = 455$ nije kvadrat nekog broja.*

Teorem 3.2.4. *Neka trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ ima kvadrate udaljenosti Q_1, Q_2, Q_3 i pravi kut kod vrha A_3. Tada vrijedi*

$$\mathcal{A} = 4Q_1Q_2.$$

Dokaz. Koristimo formulu $\mathcal{A} = 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2$ zajedno s Pitagorinim teoremom 3.1.7 s pravim kutom u vrhu A, odnosno $Q_1 + Q_2 = Q_3$ te dobijemo $\mathcal{A} = 4Q_1Q_2$. □

Teorem 3.2.5. *Neka su dane točke A_1, A_2, A_3 i kvadrati udaljenosti $Q_1 = Q(A_2, A_3)$, $Q_2 = Q(A_1, A_3)$, $Q_3 = Q(A_1, A_2)$ koji nisu svi jednaki nuli i svaki od njih je zbroj dva kvadrata. Tada postoji trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s ovim kvadratima udaljenosti ako i samo ako je $\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3)$ kvadrat različit od nule.*

Dokaz. Ako takav trokut postoji, onda po teoremu 3.2.2 imamo da je $A(Q_1, Q_2, Q_3)$ kvadrat različit od nule.
Obratno, pretpostavimo da postoji $r \neq 0$ takav da vrijedi

$$A(Q_1, Q_2, Q_3) = 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = r^2$$

Tada biramo $A_3 = (0,0)$ i $A_1 = (a_1, b_1)$ takve da $a_1^2 + b_1^2 = Q_2 \neq 0$.
Definiramo

$$R = Q_1 + Q_2 - Q_3$$

i

$$a = \frac{a_1 R - b_1 r}{2Q_2}, b = \frac{b_1 R + a_1 r}{2Q_2}.$$

Provjerimo da $A_2 = (a_2, b_2)$ zadovoljava oba uvjeta $Q(A_2, A_2) = Q_1$ i $Q(A_2, A_1) = Q_3$. □

Primjer 3.2.6. *U polju $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ broj $\mathcal{A} = \bar{455} = \bar{4}$ je kvadrat i svaki broj je zbroj dva kvadrata pa zbog teorema 3.2.5 postoji trokut s kvadratima udaljenosti*
$Q_1 = \bar{16} = \bar{5}$,
$Q_2 = \bar{36} = \bar{3}$,
$Q_3 = \bar{9}$.
Razmaci pravaca na kojima leže stranice trokuta su jednaki

$$s_1 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_2Q_3} = \frac{\bar{4}}{\bar{4} \cdot \bar{3} \cdot \bar{9}} = \bar{9},$$

$$s_2 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_1Q_3} = \frac{\bar{4}}{\bar{4} \cdot \bar{5} \cdot \bar{9}} = \bar{1},$$

$$s_3 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_1Q_2} = \frac{\bar{4}}{\bar{4} \cdot \bar{5} \cdot \bar{3}} = \bar{3}.$$

Sljedeći teorem generalizira Heronovu formulu iz Euklidske geometrije.

Teorem 3.2.7 (Arhimedova formula)**.** *Neka je trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s kvadratima udaljenosti oblika $Q_1 = d_1^2, Q_2 = d_2^2, Q_3 = d_3^2$ za neke brojeve d_1, d_2, d_3. Tada je*

$$\mathcal{A} = (d_1 + d_2 + d_3)(d_1 + d_2 - d_3)(d_2 + d_3 - d_1)(d_3 + d_1 - d_2).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 \\
&= 4d_1^2d_2^2 - (d_1^2 + d_2^2 - d_3^2)^2 \\
&= (2d_1d_2 - (d_1^2 + d_2^2 - d_3^2))(2d_1d_2 + (d_1^2 + d_2^2 - d_3^2)) \\
&= (d_3^2 - (d_1 - d_2)^2)((d_1 + d_2)^2 - d_3^2) \\
&= (d_3 - d_1 + d_2)(d_3 + d_1 - d_2)(d_1 + d_2 - d_3)(d_1 + d_2 + d_3).
\end{aligned}$$

□

Definicija 3.2.8. *Definiramo funkciju* $Q : F^4 \to F$ *za neke brojeve* a, b, c, d *kao*

$$Q(a, b, c, d) = ((a + b + c + d)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2))^2 - 64abcd.$$

Primjer 3.2.9. *Izračunajmo vrijednost funkcije* $Q(a, b, c, d)$ *za brojeve* $3, 5, 7, 13$.
Imamo $Q(3, 5, 7, 13) = ((3+5+7+13)^2 - 2(3^2+5^2+7^2+13^2))^2 - 64 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = -8960$.

Teorem 3.2.10. *Neka su dani brojevi* a, b, c, d, c *takvi da je* $A(a, b, x) = 0 = A(c, d, x) = 0$.
Tada je $Q(a, b, c, d) = 0$.
Ako je $a + b \neq c + d$*, tada je*

$$x = \frac{(a - b)^2 - (c - d)^2}{2(a + b - c - d)}.$$

Dokaz. Ako vrijedi $A(a, b, x) = 0$ i $A(c, d, x) = 0$, onda imamo
$(x - a - b)^2 = 4ab$,
$(x - c - d)^2 = 4cd$.
Tada po teoremu 2.4.2 a, b, c, d zadovoljavaju uvjet

$$((a + b - c - d)^2 - 4(ab + cd))^2 = 64abcd$$

ili zapisano drugačije $((a + b + c + d)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2))^2 = 64abcd$.
Po istom teoremu, ako su $a + b \neq c + s$, onda je

$$x = \frac{(a + b) + (c + d)}{2} - \frac{4ab - 4cd}{2(a + b - c - d)} = \frac{(a - b)^2 - (c - d)^2}{2(a + b - c - d)}.$$

□

Teorem 3.2.11. *Neka su* A_1, A_2, A_3, A_4 *kolinearne točke te neka su njihovi kvadrati udaljenosti označeni s* $Q_{ij} = Q(A_i, A_j)$ *za sve* $i, j = 1, 2, 3, 4$. *Tada*

$$Q(Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{14}) = 0.$$

Nadalje, vrijede jednakosti

$$Q_{13} = \frac{(Q_{12} - Q_{23})^2 - (Q_{34} - Q_{14})^2}{2(Q_{12} + Q_{23} - Q_{34} - Q_{14})}$$

i

$$Q_{24} = \frac{(Q_{23} - Q_{34})^2 - (Q_{12} - Q_{14})^2}{2(Q_{23} + Q_{34} - Q_{12} - Q_{14})}$$

ako su nazivnici s desnih strana jednakosti različiti od nule.

Dokaz. Ako su A_1, A_2, A_3, A_4 kolinearne točke, tada vrijedi $Q(Q_{12}, Q_{23}, Q_{13}) = 0$ i $Q(Q_{14}, Q_{13}, Q_{34}) = 0$ kolinearni. Primjenjujući prethodni teorem vidimo da vrijedi $Q(Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}, Q_{14}) = 0$ i formula za Q_{13}. Formula za Q_{24} se može dokazati analogno formuli za Q_{13}. □

Poglavlje 4

Razmak

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 2.6 knjige [4].

Definirali smo razmak između nenul pravaca $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ kao broj

$$s(l_1, l_2) = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Ako je jedan ili oba od l_1, l_2 nul-pravac, tada je razmak $s(l_1, l_2)$ nedefiniran i bilo koji izraz koji uključuje njega ne možemo definirati. Razmak je dobro definiran i ostaje nepromijenjen ako se koeficijenti pomnože s bilo kojim brojem različitim od nule.
Također, vrijedi $s(l_1, l_2) = s(l_2, l_1)$ i $s(l_1, l_2) = 0$ točno kada su pravci l_1, l_2 paralelni. Razmak je nepromijenjen ako se l_1 zamijeni s njemu translatiranim pravcem.

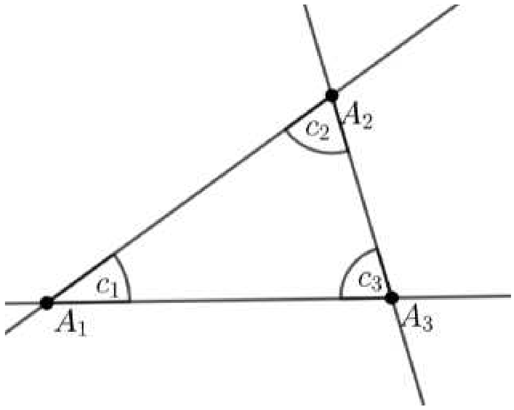
4.1 Dualni razmak i zakret

Definicija 4.1.1. *Dualni razmak $c(l_1, l_2)$ između pravaca $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ definiramo kao broj*

$$c(l_1, l_2) = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Dualni razmak koji uključuje nul-pravac nije definiran. Također, vrijedi
$c(l_1, l_2) = c(l_2, l_1)$ i $c(l_1, l_2) = 0$ onda kada su pravci l_1 i l_2 okomiti. Svojstvo da je $c(l_1, l_2) = 0$ za okomite pravce l_1 i l_2 možemo usporediti sa svojstvom da je skalarni produkt jednak nuli onda kada su vektori okomiti. Dualni razmak je nepromijenjen ako se bilo koji pravac zamijeni njemu translatiranim pravcem.
Kod trokuta sa stranicama koje leže na pravcima l_1, l_2, l_3 ćemo koristiti isto pravilo za označavanje kao kod razmaka, tj. s c_1 ćemo označiti dualni razmak pravaca l_1 i l_3 i tako

dalje. Na slici 4.1 kod polja racionalnih brojeva ili polja realnih brojeva dualni razmaci između pravaca koji se sijeku biti će upisani unutar trokuta.

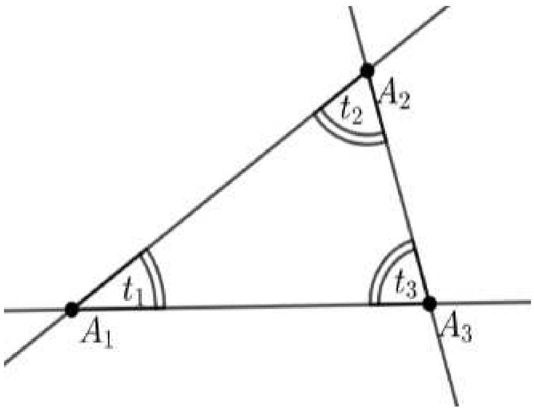


Slika 4.1: Dualni razmaci trokuta.

Definicija 4.1.2. *Zakret $t(l_1, l_2)$ između neokomitih pravaca $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ je broj*

$$t(l_1, l_2) = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}.$$

Na slici 4.2 su prikazane oznake zakreta trokuta.



Slika 4.2: Zakret trokuta.

Zakret nije definiran ako su pravci l_1 i l_2 okomiti jer tada imamo $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$. Zakret je uvijek kvadrat broja. Također, vrijedi $t(l_1, l_2) = t(l_2, l_1)$ i $t(l_1, l_2) = 0$ onda kada su pravci l_1, l_2 paralelni. Svojstvo da je $t(l_1, l_2) = 0$ za paralelne pravce l_1 i l_2 možemo usporediti sa svojstvom da je vektorski produkt kolinearnih vektora jednak nuli. Ako pravci nisu paralelni, tada imamo

$$t(l_1, l_2) = \frac{s(l_1, l_2)}{c(l_1, l_2)}.$$

Uočimo, ako je jedan od pravaca ili oba l_1 i l_2 nul-pravac, tada je zakret definiran iako niti razmak niti dualni razmak nisu definirani.

Primjer 4.1.3. *Neka su dani pravci $l_1 = 3 : 5 : 2, l_2 = 4 : 2 : 1$. Izračunajmo dualni razmak i zrakret.*
Dobijemo da je dualni razmak

$$c(l_1, l_2) = \frac{(3 \cdot 4 + 5 \cdot 2)^2}{(3^2 + 5^2)(4^2 + 2^2)} = \frac{242}{345},$$

a zakret

$$t(l_1, l_2) = \frac{(3 \cdot 2 - 4 \cdot 3)^2}{(3 \cdot 4 + 5 \cdot 2)^2} = \frac{9}{121}.$$

Teorem 4.1.4 (O sumi razmaka i dualnog razmaka)**.** *Za pravce l_1 i l_2, neka s i c budu razmak i dualni razmak između njih. Tada vrijedi*

$$s + c = 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo da su dani pravci $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$. Iskoristimo Fibonaccijev identitet 2.3 te dobijemo

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

Podijelimo jednakost s $(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)$ te iskoristimo definiciju za razmak i dualni razmak kako bismo dobili izraz $s + c = 1$. □

U polju racionalnih brojeva i u polju realnih brojeva ovaj teorem govori da su razmak i dualni razmak uvijek vrijednosti između 0 i 1 jer su oba uvijek pozitivna.

Teorem 4.1.5 (O kvazi-korijenu)**.** *Za pravce l_1 i l_2 razmak $s = s(l_1, l_2)$ je jednak nekom kvazi-korijenu. Obratno, svaki kvazi-korijen je dobiven kao razmak između neka dva pravca.*

Dokaz. Neka su $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ pa po definiciji za razmak $s = s(l_1, l_2)$ i dualni razmak $c = c(l_1, l_2)$, koristeći teorem 4.1.4 dobijemo da vrijedi

$$s(1 - s) = sc = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \left(\frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1^2 + b_1^2)}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \right)^2.$$

Kako je ovo kvadrat broja, s je kvazi-korijen.
Obratno, pretpostavimo da je s kvazi-korijen tako da vrijedi $s(1-s) = r^2$ za neki broj r.
Ako je $s = 1$, tada je razmak između pravaca $0 : 1 : 0$ i $1 : 0 : 0$ jednak nuli.
Inače, promotrimo pravce $l_1 = 0 : 1 : 0$ i $l_2 = r : 1-s : 0$. Razmak između njih po definiciji je

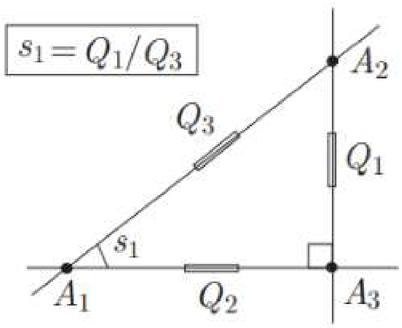
$$s(l_1, l_2) = \frac{r^2}{1 \cdot (r^2 + (1-s)^2)} = \frac{s(1-s)}{1-s} = s.$$

□

4.2 Omjeri

Teorem 4.2.1. *Neka je dan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s pravim kutom kod vrha A_3 i neka su dani pripradni kvadrati udaljenosti Q_1, Q_2, Q_3. Tada je razmak pravaca A_1A_2 i A_1A_3 jednak*

$$s_1 = s(A_1A_2, A_1A_3) = \frac{Q_1}{Q_3}.$$



Slika 4.3: Teorem omjer razmaka.[1]

Dokaz. Neka su dani vrhovi trokuta $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3)$. Tada imamo
$A_1A_2 = y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1$,
$A_1A_3 = y_1 - y_3 : x_3 - x_1 : x_1y_3 - x_3y_1$,
$A_2A_3 = y_2 - y_3 : x_3 - x_2 : x_2y_3 - x_3y_2$,
tako da je

$$s_1 = \frac{((y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1))^2}{((y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2)((y_1 - y_3)^2 + (x_3 - x_1^2)}.$$

[1] Slika je preuzeta iz knjige [4].

Kako su A_1A_3 i A_2A_3 okomiti, vrijedi $(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$. Sređivanjem izraza dobijemo

$$(y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1) = (y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1).$$

Stoga je brojnik od s_1 jednak

$$\begin{aligned}
&((y_1 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_1))^2 = \\
&= ((y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1))^2 + ((y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2 \\
&= ((y_1 - y_3)^2 + (x_3 - x_1)^2)((y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2)
\end{aligned}$$

gdje je iskorišten Fibonaccijev identitet 2.3 u zadnjem koraku.
Iskoristimo definiciju za kvadrat udaljenosti te dobijemo da je

$$s_1 = \frac{Q_2 Q_1}{Q_3 Q_2} = Q_1/Q_3.$$

□

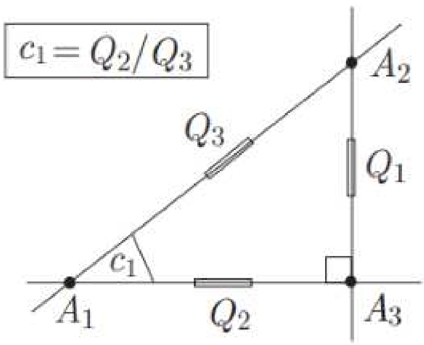
Teorem 4.2.2. *Neka je dan trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s pravim kutom kod vrha A_3 i neka su Q_1, Q_2, Q_3 pripradni kvadrati udaljenosti. Tada je dualni razmak pravaca A_1A_2 i A_1A_3 jednak*

$$c_1 = c(A_1A_2, A_1A_3) = \frac{Q_2}{Q_3}.$$

Dokaz. Koristimo teoreme 4.1.4 i 4.2.1 i Pitagorin teorem 3.1.7 kako bismo dobili

$$c_1 = c(A_1A_2, A_1A_3) = 1 - s(A_1A_2, A_1A_3) = 1 - \frac{Q_1}{Q_3} = \frac{Q_2}{Q_3}.$$

□



Slika 4.4: Teorem omjer dualnih razmaka.[2]

Teorem 4.2.3. *Neka je dan trokut* $\overline{A_1A_2A_3}$ *s pravim kutom kod vrha* A_3 *i neka su* Q_1, Q_2, Q_3 *pripadni kvadrati udaljenosti. Tada je zakret pravaca* A_1A_2 *i* A_1A_3 *jednak*

$$t_1 = t(A_1A_2, A_1A_3) = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Dokaz. Ako je $Q_3 \neq 0$, tvrdnja slijedi iz uvjeta $t_1 = s_1/c_1$ gdje koristimo izraz $s_1 = Q_1/Q_3$ iz teorema 4.2.1 i izraz $c_1 = Q_2/Q_3$ iz teorema 4.2.2.
Ako je $Q_3 = 0$, tada nisu definirani niti s_1 niti c_1. U ovom slučaju, Pitagorin teorem 3.1.7 daje $Q_1 = -Q_2$ te slijedi da je $t_1 = -1$. Po teoremu 3.1.1 vrijedi da je l_3 nul-pravac pa je stoga oblika $1 : i : d$ i za neki broj i koji zadovoljava $i^2 = -1$ za neki broj d.
Pravci l_2 i l_3 nisu okomiti, inače bi vrijedilo da je l_1 paralelan l_3.
Ako je $l_2 = a : b : c$, tada vrijedi $a + bi \neq 0$ i po definiciji zakreta dobijemo izraz

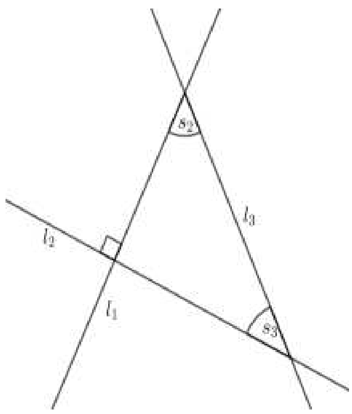
$$t_1 = t(l_2, l_3) = \frac{(ai - b)^2}{(a + bi)^2} = -1.$$

□

Definicija 4.2.4. *Kažemo da su dva razmaka* s_1 *i* s_2 *komplementarna onda kada vrijedi* $s_1 + s_2 = 1$.

4.3 Odnosi između pravaca

Teorem 4.3.1 (Komplementarni razmaci)**.** *Neka su dani okomiti ne-nul pravci* l_1 *i* l_2. *Tada su za bilo koji pravac* l_3 *razmaci* $s_1 = s(l_2, l_3)$ *i* $s_2 = s(l_1, l_3)$ *komplementarni.*



Slika 4.5: Komplementarni razmaci.

[2]Slika je preuzeta iz knjige [4].

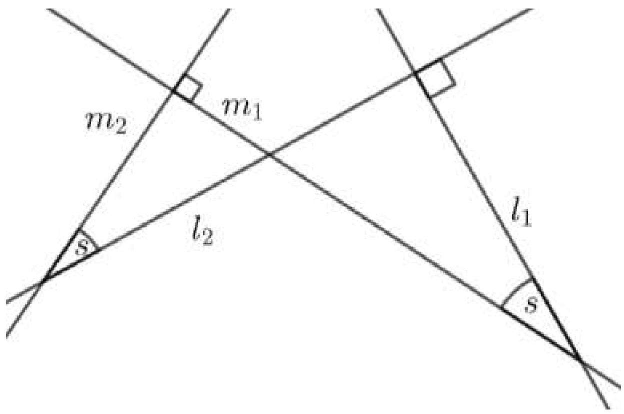
Dokaz. Pretpostavimo da su l_1 i l_2 okomiti pravci. Ako je l_3 paralelan bilo kojem od njih, onda je on okomit na drugoga pa su tada s_1 i s_2 jednaki 0 i 1 i stoga su komplementarni. Inače, bilo koja dva pravca će se sijeći te razmak između njih ostaje nepromijenjen kada se pravci zamijene translatiranim pravcima.
Pretpostavimo da pravci l_1, l_2, l_3 nisu paralelni i da sva tri pravca ne prolaze istom točkom. Neka je $A_1 = l_2 \cap l_3, A_2 = l_1 \cap l_3, A_3 = l_1 \cap l_2$ i neka su kvadrati udaljenosti od $\overline{A_1A_2A_3}$ jednaki Q_1, Q_2, Q_3. Kako je trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ pravokutan s pravim kutom kod vrha A_3, po teoremu 4.2.1 imamo $s_1 = Q_1/Q_3$ i $s_2 = Q_2/Q_3$. Stoga vrijedi

$$s_1 + s_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_3} = 1$$

po Pitagorinom teoremu 3.1.7. □

Teorem 4.3.2. *Neka su dani okomiti pravci l_1, l_2 te okomiti pravci m_1, m_2. Tada vrijedi*

$$s(l_1, m_1) = s(l_2, m_2).$$



Slika 4.6: Teorem o razmacima okomitih pravaca.

Dokaz. Primjenjujemo teorem 4.3.1 na pravce m_1, m_2, l_1 kako bismo dobili

$$s(l_1, m_1) + s(l_1, m_2) = 1.$$

Primijenimo taj teorem i na pravce l_1, l_2, m_2 kako bismo dobili

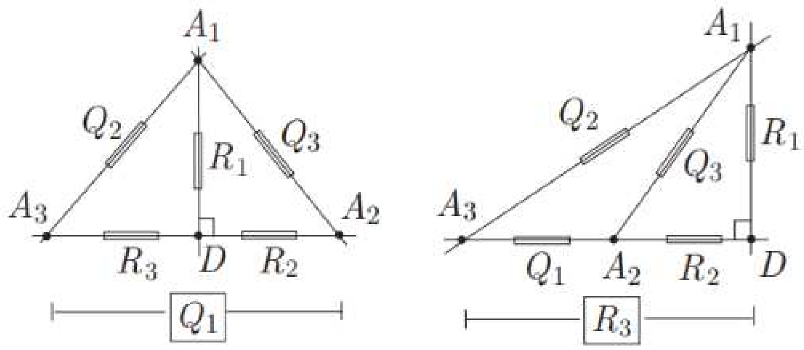
$$s(l_1, m_2) + s(l_2, m_2) = 1.$$

Oduzmemo te dvije jednadžbe i zaključimo $s(l_1, m_1) = s(l_2, m_2)$. □

4.4 Osnovni teoremi o razmaku

Teorem 4.4.1 (O razmaku)**.** *Neka su dane tri točke A_1, A_2, A_3 i trokut s kvadratima udaljenosti $Q_1 = Q(A_2, A_3), Q_2 = Q(A_1, A_3), Q_3 = Q(A_1, A_2)$ koji su različiti od nule. Definiramo razmake $s_1 = s(A_1A_2, A_1A_3), s_2 = s(A_2A_1, A_2A_3), s_3 = s(A_3A_1, A_3A_2)$. Tada imamo*

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}.$$



Slika 4.7: Teorem o razmaku.[3]

Dokaz. Ako su A_1, A_2, A_3 kolinearne točke, tada je $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ i teorem je dokazan. Inače, tri točke tvore trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ i kvadrati udaljenosti nisu jednaki nuli pa možemo pretpostaviti da je D nožište okomice iz točke A_1 na pravac A_2A_3. Definiramo kvadrate udaljenosti $R_1 = Q(A_1, D), R_2 = Q(A_2, D), R_3 = Q(A_3, D)$.
Kako su $\overline{A_1A_2D}$ i $\overline{A_1A_3D}$ pravokutni trokuti s pravim kutom u vrhu D, po teoremu 4.2.1 dobijemo $s_2 = R_1/Q_3, s_3 = R_1/Q_2$. Rješavajući po R_1 dobijemo da je $R_1 = Q_3s_2 = Q_2s_3$ tako da vrijedi

$$\frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}.$$

Slično, dobijemo

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2}.$$

□

[3]Slika je preuzeta iz knjige [4].

Teorem 4.4.2 (O dualnom razmaku)**.** *Neka su dane tri točke A_1, A_2, A_3 i trokut s kvadratima udaljenosti $Q_1 = Q(A_2, A_3), Q_2 = Q(A_1, A_3), Q_3 = Q(A_1, A_2)$ različitim od nule. Definiramo dualni razmak $c_3 = c(A_3A_1, A_3A_2)$. Tada imamo*

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

Dokaz. Ako su tri točke A_1, A_2, A_3 kolinearne stoga vrijedi $c_3 = 1$ $A(A_1, A_2, A_3) = 0$ i $A(A_1, A_2, A_3) = 0$ pa slijedi tvrdnja.
Inače, tri točke tvore trokut $\overline{A_1A_2A_3}$. Po definiciji dualnog razmaka c_3, pravci A_1A_3 i A_2A_3 su nenul. Neka je D nožište okomice povučene iz vrha A_1 na pravac A_2A_3.
Definiramo kvadrate udaljenosti $R_1 = Q(A_1, D)$, $R_2 = Q(A_2, D), R_3 = Q(A_3, D)$.
Kako su $\overline{A_1A_2D}$ i $\overline{A_1A_3D}$ pravokutni trokuti s pravim kutom u vrhu D, koristeći Pitagorin teorem 3.1.7 dobijemo

$$Q_3 = R_1 + R_2 \text{ i } Q_2 = R_1 + R_3.$$

Po teoremu 4.2.2 imamo $c_3 = R_3/Q_2$.
Rješavajući zadnje dvije jednadžbe, dobijemo da je

$$R_3 = Q_2c_3, R_1 = Q_2(1 - c_3) \text{ i } R_2 = Q_3 - Q_2(1 - c_3).$$

Kako su točke A_2, A_3, D kolinerane, koristeći uvjet kolinearnosti na kvadratima udaljenosti Q_1, R_2, R_3 dobijemo izraz $(Q_1 + R_3 - R_2)^2 = 4Q_1R_3$.
Uvrstimo izračunate vrijednosti za R_3 i R_2 u posljednju jednadžbu te slijedi

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

□

Teorem 4.4.3. *Neka su dani vrhovi trokuta A_1, A_2, A_3 i njemu pripradni kvadrati udaljenosti Q_1, Q_2, Q_3 te razmak $s_3 = s(A_3A_1, A_3A_2)$ različit od nule. Tada vrijedi*

$$\mathcal{A} = A(A_1, A_2, A_3) = 4Q_1Q_2s_3.$$

Dokaz. Iz teorema 4.1.4 i 4.4.2 imamo

$$\begin{aligned}4Q_1Q_2s_3 &= 4Q_1Q_2(1 - c_3)\\ &= 4Q_1Q_2 - (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2\\ &= (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = A(A_1, A_2, A_3) = \mathcal{A}.\end{aligned}$$

□

Primjer 4.4.4. *U polju realnih brojeva trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s kvadratima udaljenosti*
$Q_1 = 16$,
$Q_2 = 36$,
$Q_3 = 9$,
daje vrijednost $\mathcal{A} = A(16, 36, 9) = (16 + 36 + 9)^2 - 2(16^2 + 36^2 + 9^2) = 455.$
Prema teoremu 4.4.3 dobijemo

$$s_1 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_2Q_3} = \frac{455}{4 \cdot 36 \cdot 9} = \frac{455}{1296},$$

$$s_2 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_1Q_3} = \frac{455}{4 \cdot 16 \cdot 9} = \frac{455}{576},$$

$$s_3 = \frac{\mathcal{A}}{4Q_1Q_2} = \frac{455}{4 \cdot 16 \cdot 36} = \frac{455}{2304}.$$

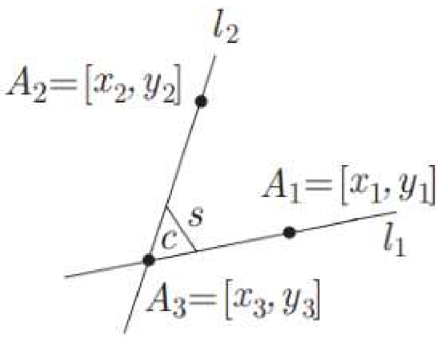
Primjer 4.4.5. *U polju kompleksnih brojeva trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s kvadratima udaljenosti*
$Q_1 = 1$,
$Q_2 = 2$,
$Q_3 = i$
daje vrijednost $\mathcal{A} = A(1, 2, i) = (1 + 2 + i)^2 - 2(1 + 4 - 1) = 6i.$
Prema teoremu 4.4.3 dobijemo
$s_1 = 3/4$,
$s_2 = 3/2$,
$s_3 = 3i/4$.

Teorem 4.4.6 (Formula za računanje razmaka)**.** *Neka su l_1 i l_2 pravci koji se sijeku u točki $A_3 = (x_3, y_3)$ i neka je $A_1 = (x_1, y_1)$ bilo koja točka na pravcu l_1 te $A_2 = (x_2, y_2)$ bilo koja točka na pravcu l_2. Tada je razmak s između l_1 i l_2 jednak*

$$s = \frac{((y_1 - y_3)(x_3 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1))^2}{((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2)((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2)}.$$

Dokaz. Po teoremu 2.5.12 vrijedi $l_1 = y_1 - y_3 : x_3 - x_1 : x_1y_3 - x_3y_1$ i
$l_2 = y_2 - y_3 : x_3 - x_2 : x_2y_3 - x_3y_2$. Iskoristimo definiciju za razmak kako bismo dobili tvrdnju. □

Pojmovi iz teorema 4.4.6 i 4.4.7 prikazani su na slici 4.8.



Slika 4.8: Prikaz razmaka i dualnog razmaka točaka.[4]

Teorem 4.4.7 (Formula za računanje dualnog razmaka)**.** *Neka su l_1 i l_2 pravci koji se sijeku u točki $A_3 = (x_3, y_3)$ i neka je $A_1 = (x_1, y_1)$ bilo koja točka na pravcu l_1 te $A_2 = (x_2, y_2)$ bilo koja točka na pravcu l_2. Tada je dualni razmak c između l_1 i l_2 jednak*

$$c = \frac{((y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2}{((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2)((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2)}.$$

Dokaz. Koristimo analogan argument kao u prethodnom teoremu. □

Teorem 4.4.8 (Formula tri razmaka)**.** *Neka su dani pravci l_1, l_2, l_3 s razmacima $s_1 = s(l_2, l_3)$, $s_2 = s(l_1, l_3)$, $s_3 = s(l_1, l_2)$. Tada vrijedi*

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_2^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1 s_2 s_3.$$

Dokaz. Ako su barem dva pravca paralelna, tada je jedan od razmaka jednak nuli, stoga su ostala dva razmaka jednaka pa formula vrijedi.
Neka su dana tri neparalelna pravca, tada translatiramo jedan od pravaca kako bismo dobili trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ s razmacima s_1, s_2, s_3 i kvadratima udaljenosti Q_1, Q_2, Q_3. Iz teorema 4.4.1 postoji broj D različit od nule, takav da vrijedi

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3} = \frac{1}{D} \tag{4.1}$$

Primijenimo teorem 4.4.2 gdje je

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

[4]Slika je preuzeta iz knjige [4].

U prethodnom izrazu iskoristimo $s + c = 1$ i raspišemo ga kao

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + 4Q_1Q_2s_3. \tag{4.2}$$

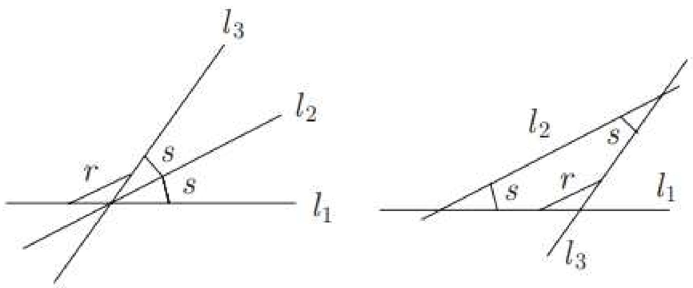
Iskoristimo jednakost 4.1 kako bismo zamijenili Q_1 sa s_1D, Q_2 sa s_2D i Q_3 sa s_3D u jednakosti 4.2, a potom podijelimo sa D^2.
Rezultat je $(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$. □

Teorem 4.4.9 (Jednaki razmaci)**.** *Neka su dani pravci l_1, l_2, l_3 i neka je $s(l_1, l_2) = s(l_2, l_3) = s$ kao na slici 4.9. Tada vrijedi*

$$s(l_1, l_3) = 0$$

ili

$$s(l_1, l_3) = 4s(1 - s).$$



Slika 4.9: Teorem o jednakim razmacima.[5]

Dokaz. Ako je $s(l_1, l_3) = r$, tada iz 4.4.8 vrijedi $(2s + r)^2 = 2(2s^2 + r^2) + 4s^2r$, odnosno $r(r - 4s(1 - s)) = 0$. Stoga je $r = 0$ ili $r = 4s(1 - s)$. □

4.5 Simetrale

Definicija 4.5.1. *Simetrala kuta između pravaca l_1, l_2 je pravac h koji prolazi kroz $l_1 \cap l_2$ i zadovoljava uvjet*

$$s(l_1, h) = s(l_2, h).$$

Uočimo da je u polju realnih brojeva ova definicija ekvivalentna definiciji simetrale kuta u Euklidskoj geometriji.

[5] Slika je preuzeta iz knjige [4].

Teorem 4.5.2 (Simetrala kuta)**.** *Simetrala kuta između pravaca l_1, l_2 postoji onda kada je $s(l_1, l_2)$ kvadrat broja. U tom slučaju postoje točno dvije simetrale i one su okomite.*
Neka su dani pravci $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ takvi da je $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$. Tada dvije simetrale kuta između pravaca l_1, l_2 uvijek postoje i jednadžba im je jednaka

$$a_1b_2 - a_1b_1 : 0 : b_2c_1 - b_1c_2$$

i

$$a_1b_2 - a_2b_1 : c_2a_1 - c_1a_2.$$

Ako je $a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$ i $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = r^2$, tada su simetrale kuta između pravaca l_1, l_2 dane sa

$$\begin{aligned}(a_1a_2 - b_1b_2 + r)(a_1b_2 - a_2b_1) &: (a_1b_2 + a_2b_1)(a_1b_2 - a_2b_1)\\ &: ((a_1^2 + b_1^2)b_2c_2 - (a_2^2 + b_2^2)b_1c_1 + r(b_2c_1 - b_1c_2))\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(a_1a_2 - b_1b_2 - r)(a_1b_2 - a_2b_1) &: (a_1b_2 + a_2b_1)(a_1b_2 - a_2b_1)\\ &: ((a_1^2 + b_1^2)b_2c_2 - (a_2^2 + b_2^2)b_1c_1 - r(b_2c_1 - b_1c_2)).\end{aligned}$$

Dokaz. Ako je $s(l_1, h) = s(l_2, h) = s$, tada po teoremu 4.4.9 je $s(l_1, l_2) = 4s(1 - s)$ jer l_1 i l_2 nisu paralelni. Teorem 4.1.5 govori da je $s(1 - s)$ kvadrat, stoga je i $s(l_1, l_2)$ kvadrat broja.
Obratno, pretpostavimo da su $l_1 = a_1 : b_1 : c_1$ i $l_2 = a_2 : b_2 : c_2$ i $s = s(l_1, l_2)$ kvadrati.
Kako vrijedi

$$s = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Ekvivalentno je uvjetu

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = r^2$$

za neki r. Ako je $h = a : b : c$, tada jednadžba $s(l_1, h) = s(l_2, h)$ glasi

$$\frac{(a_1b - ab_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a^2 + b^2)} = \frac{(a_2b - ab_2)^2}{(a_2^2 + b_2^2)(a^2 + b^2)}.$$

Koristimo izraz

$$(a_1b-ab_1)^2(a_2^2+b_2^2)-(a_2b-ab_2)^2(a_1^2+b_1^2) = -(a_1b_2-a_2b_1)((a^2-b^2)(a_1b_2+a_2b_1)-2ab(a_1a_2-b_1b_2))$$

koji se lagano može provjeriti direktnim računom.
Kako l_1 i l_2 nisu paralelni, vrijedi $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Koristimo zadnje dvije jednakosti kako

bismo dobili ekvivalentni uvjet

$$a^2(a_1b_2 + a_2b_1) - 2ab(a_1a_2 - b_1b_2) - b^2(a_1b_2 + a_2b_1) = 0. \tag{4.3}$$

Pretpostavimo da je $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$. Tada se prethodna jednakost svede na

$$ab(a_1a_2 - b_1b_2) = 0.$$

Ako je i $a_1a_2 - b_1b_2 = 0$, tada bi Fibonaccijev identitet

$$(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$$

implicirao $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 0$ što je nemoguće jer niti jedan od pravaca l_1 i l_2 nisu nul-pravci.
Dakle, mora vrijediti $ab = 0$ te pravac h mora biti ili oblika $1 : 0 : d_1$ ili $0 : 1 : d_2$ za neke vrijednosti d_1 i d_2 jedinstveno određene uvjetom da h prolazi točkom

$$l_1 \cap l_2 = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right).$$

Postoje dvije mogućnosti za h:
$h_1 = a_1b_2 - a_2b_1 : 0 : b_2c_1 - b_1c_2$ ili $h_2 = 0 : a_1b_2 - a_2b_1 : c_2a_1 - c_1a_2$.
Uočimo da je tada s kvadrat, odnosno

$$s = \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 - b_1b_2} \right)^2 .$$

Pretpostavimo sada da je $a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$. U ovom slučaju iz jednadžbe 4.3 slijedi da niti a niti b ne mogu biti nula. Ako je jedan od njih nula, tada je i drugi, što je nemoguće jer je $a : b : c$ pravac. Stoga, bez smanjena općenitosti možemo pretpostaviti da je
$b = a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$.
Jednadžbu 4.3 dopunimo do kvadrata koristeći Fibonaccijev identitet 2.3 kako bismo dobili

$$(a - (a_1a_2 - b_1b_2))^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = r^2.$$

Dobijemo dvije mogućnosti za h:

$$h_1 = a_1a_2 - b_1b_2 + r : a_1b_2 + a_2b_1 : d_1 \text{ ili } h_2 = a_1a_2 - b_1b_2 - r : a_1b_2 + a_2b_1 : d_2.$$

Brojevi d_1 i d_2 su određeni činjenicom da h prolazi kroz $l_1 \cap l_2$.
Tada računanjem dolazimo do toga da se jednadžbe za h_1 i h_2 mogu napisati kao

$$\begin{aligned} h_1 = {} & (a_1a_2 - b_1b_2 + r)(a_1b_2 - a_2b_1) : (a_1b_2 + a_2b_1)(a_1b_2 - a_2b_1) \\ & : ((a_1^2 + b_1^2)b_2c_2 - (a_2^2 + b_2^2)b_1c_1 + r(b_2c_1 - b_1c_2)) \end{aligned}$$

i

$$h_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - r)(a_1b_2 - a_2b_1) : (a_1b_2 + a_2b_1)(a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$: ((a_1^2 + b_1^2)b_2c_2 - (a_2^2 + b_2^2)b_1c_1 - r(b_2c_1 - b_1c_2)).$$

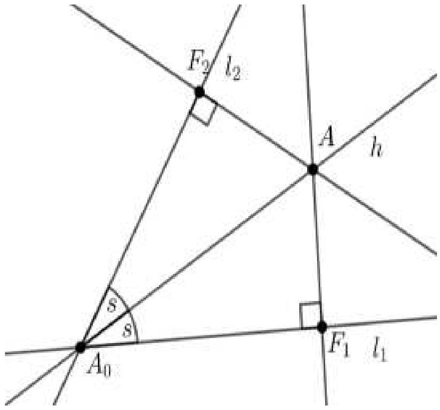
Ova dva pravca su okomita jer vrijedi $((a_1a_2-b_1b_2)+r)((a_1a_2-b_1b_2)-r)+(a_1b_2+a_2b_1)^2 = 0$ zbog Fibonaccijevog identiteta 2.3 i prema definiciji od r u ovom dokazu. □

Primjer 4.5.3. *U polju racionalnih brojeva zadani su pravci* $l_1 = 2 : 1 : -1$ *i*
$l_2 = 11 : 2 : -4$.
Tada je $(a_2^2 + b_1 32)(a_2^2 + b_2^2) = 625 = 25^2$ *i to je kvadrat pa kut između pravaca* l_1, l_2 *ima simetralu.*
Neka je $r = 25$ *i uočimo da* $a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$. *Prema teoremu 4.5.2 simetrale su jednake*
$h_1 = 1 : -3 : 1$ *i* $h_2 = 21 : 7 : -9$.
Ovi pravci su okomiti i vrijedi
$s(l_1, h_1) = s(l_2, h_1) = 49/50$,
$s(l_1, h_2) = s(l_2, h_2) = 1/50$.

Primjer 4.5.4. *U polju racionalnih brojeva dani su pravci* $l_1 = 3 : 1 : 5$ *i*
$l_2 = -3 : 1 : 2$.
Tada je $s(l_1, l_2) = 9/25$ *i to je kvadrat pa kut između pravaca* l_1, l_2 *ima simetralu.*
U ovom slučaju vrijedi $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$ *pa je simetrala kuta dana teoremom 4.5.2 kao*
$h_1 = 6 : 0 : 3 = 2 : 0 : 1$ *i* $h_2 = 0 : 6 : 21 = 0 : 2 : 7$.
Provjerimo da vrijedi izraz za simetralu kuta $s(l_1, h_1) = s(l_2, h_1) = 1/10$ *i*
$s(l_1, h_2) = s(l_2, h_2) = 9/10$.

Teorem 4.5.5 (Jednaki kvadrati udaljenosti dva pravca)**.** *Neka su dani pravci* l_1 *i* l_2 *te je* $l_1 \cap l_2$ *vrh kuta. Tada bilo koja točka A koja leži na simetrali h kuta između pravaca* l_1, l_2 *zadovoljava* $Q(A, l_1) = Q(A, l_2)$. *Obratno, bilo koja točka koja zadovoljava ovu jednadžbu leži na nekoj simetrali kuta između pravaca* l_1, l_2.

Dokaz. Neka su dani pravci l_1 i l_2. Pretpostavimo da je $l_1 \cap l_2$ je vrh kuta i da je A točka na jednoj simetrali h kuta. Pretpostavimo da je $A_0 = l_1 \cap l_2$ i da su F_1 i F_2 nožišta okomice spuštene iz vrha A na pravac l_1 i l_2.



Slika 4.10: Jednaki kvadrati udaljenosti dva pravca.

Tada su trokuti $\overline{A_0AF_1}$ i $\overline{A_0AF_2}$ pravokutni i po pretpostavci imamo

$$s(l_1, h) = \frac{Q(A, F_1)}{Q(A, A_0)} = s(l_2, h) = \frac{Q(A, F_2)}{Q(A, A_0)}.$$

Stoga je $Q(A, l_1) = Q(A, F_1) = Q(A, F_2) = Q(A, l_2)$.
Obratno, ako imamo $A \neq l_1 l_2$ i $Q(A, l_1) = Q(A, l_2)$, tada je $Q(A, F_1) = Q(A, F_2)$ gdje su F_1 i F_2 nožišta okomica spuštenih iz točke A na pravce l_1 i l_2.
Neka je $A_0 = l_1 \cap l_2$ i $h = A \cap A_0$. Tada vrijedi

$$s(l_1, h) = \frac{Q(A, F_1)}{Q(A, A_0)} = \frac{Q(A, F_2)}{Q(A, A_0)} = s(l_2, h)$$

pa je stoga h simetrala kuta između pravaca l_1, l_2. Preciznije, $l_1 \cap l_2$ je vrh kuta po teoremu 4.5.2. $\square$

Poglavlje 5

Primjene

U nastavku slijedimo izlaganja iz poglavlja 2.7, 3.10 i 4.23 knjige [4].

Primijenimo racionalnu trigonometriju kako bismo uvidjeli da je stvorena za matematiku i povezane joj discipline. Njome se olakšava Euklidova geometrija jer se koristi kvadrat vrijednosti koji je često olakšavajući za rješavanje praktičnih problema.

5.1 Primjeri

Primjer 5.1.1. *U bilo kojem polju dan je trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ gdje točke imaju koordinate $A_1 = (1,1), A_2 = (5,2), A_3 = (3,-1)$. Primijenimo teoreme racionalne trigonometrije.*

Kvadrati udaljenosti tog trokuta su $Q_1 = 13, Q_2 = 8, Q_3 = 17$
pa izračunamo $\mathcal{A} = A(13,8,17) = (17+8+17)^2 - 2(13^2 + 82 + 17^2) = 400$.
Izračunamo razmake
$s_1 = 25/34, s_2 = 100/221, s_3 = 25/26$
pa su stoga dualni razmaci $c_1 = 9/34, c_2 = 121/221, c_3 = 1/26$.
Primijenimo teoreme 4.4.1, 3.1.4, 4.4.2:

$$\frac{25/34}{13} = \frac{100/121}{8} = \frac{25/26}{17} = \frac{25}{442}$$

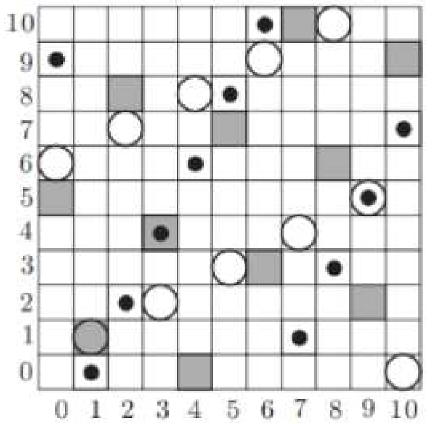
$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = \frac{225625}{48841} = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$$

$$(c_1 + c_2 - c_3 - 1)^2 = \frac{1089}{48841} = 4c_1c_2c_3.$$

Kako je $221 = 13 \cdot 17, 442 = 2 \cdot 13 \cdot 17, 48841 = 13^2 \cdot 17^2$, ove formule vrijede u bilo kojem polju koje nije karakteristika 13 ili 17. Ako polja nemaju karakteristike 3 ili 11, tada dualni razmaci nisu jednaki nuli pa su zakreti $t_1 = 25/9, t_2 = 100/121, t_3 = 25$.

Primjer 5.1.2. *Dan je trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ u polju $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ s koordinatama $A_1 = (\bar{1}, \bar{1})$, $A_2 = (\bar{3}, \bar{4}), A_3 = (\bar{9}, \bar{5})$. Primijenimoo teoreme racionalne trigonometrije.*

Stranice trokuta leže na pravcima
$l_1 = \bar{10} : \bar{6} : \bar{1}$ (mali crni krugovi),
$l_2 = \bar{1} : \bar{9} : \bar{1}$ (veliki otvoreni krugovi),
$l_3 = \bar{8} : \bar{2} : \bar{1}$ (sivi kvadrati) kako je prikazano na slici 5.1.



Slika 5.1: Trokut u polju $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.[1]

Kvadrati udaljenosti su $Q_1 = \bar{4}, Q_2 = \bar{3}, Q_3 = \bar{2}$,
stoga dobijemo $\mathcal{A} = A(\bar{4}, \bar{3}, \bar{2}) = (\bar{4} + \bar{3} + \bar{2})^2 - \bar{2}(\bar{16} + \bar{9} + \bar{4}) = \bar{1}$.
Teorem 4.4.3 daje razmake $s_1 = \bar{6}, s_2 = \bar{10}, s_3 = \bar{3}$.
Teorem 4.4.1 daje jednake omjere razmaka i kvadrata udaljenosti, odnosno dobijemo $\bar{6}/\bar{4} = \bar{10}/\bar{3} = \bar{3}/\bar{2} = \bar{7}$.
Uvjet kolinearnosti 3.1.4 vrijedi jer $(s_1 + s_2 + s_3)^2 = \bar{9} = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$.

Primjer 5.1.3. *Dan je trokut $\overline{A_1A_2A_3}$ u polju kompleksnih brojeva s koordinatama $A_1 = (0, 0), A_2 = (3, -i), A_3 = (1 + i, 2i)$. Primijenimo teoreme racionalne trigonometrije.*

Kvadrati udaljenosti su

$$Q_1 = (-2 + i)^2 + (3i)^2 = -6 - 4i,$$

$$Q_2 = (1 + i)^2 + (2i)^2 = -4 + 2i,$$

[1]Slika je preuzeta iz knjige [4].

$$Q_3 = (-3)^2 + i^2 = 8,$$

izračunamo
$\mathcal{A} = A(Q_1, Q_2, Q_3) = (-6-4i-4+21+8)^2 - 2[(-6-4i)^2 + (-4+2i)^2 + 8^2] = -192-56i.$
Teorem 4.4.3 daje razmake

$$s_1 = \frac{41}{40} + \frac{19}{20}i,$$
$$s_2 = \frac{43}{52} - \frac{27}{104}i,$$
$$s_3 = -\frac{199}{130} - \frac{16}{65}i.$$

Teorem 4.4.1 daje jednake omjere razmaka i kvadrata udaljenosti, odnosno dobijemo

$$\frac{\frac{41}{40}+\frac{19}{20}i}{-6-4i} = \frac{\frac{43}{52}-\frac{27}{104}i}{-4+2i} = \frac{-\frac{199}{130}-\frac{16}{65}i}{8} = -\frac{199}{1040} - \frac{2}{65}i.$$

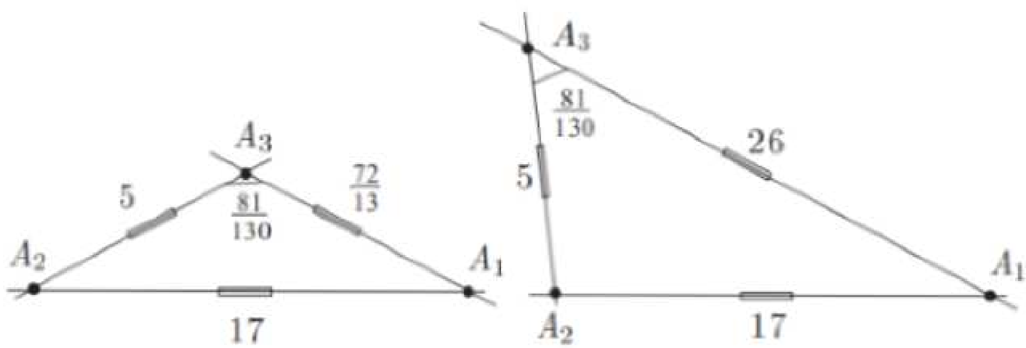
Uvjet kolinearnosti 3.1.4 vrijedi jer $(s_1+s_2+s_3)^2 = -\frac{398}{4225} + \frac{38577}{135200}i = (s_1^2+s_2^2+s_3^2)+4s_1s_2s_3$.

Primjer 5.1.4. *U polju racionalnih brojeva u trokutu* $\overline{A_1A_2A_3}$ *zadano je* $s_3 = 81/130$, $Q_1 = 5, Q_3 = 17$. *Primijenimo teoreme racionalne trigonometrije.*

Koristimo teorem 4.4.2 kako bismo dobili

$$(Q_2 - 12)^2 = 4 \cdot 5 \cdot Q_2 \cdot \frac{49}{130} = \frac{98}{13} \cdot Q_2.$$

Sredimo izraz kako bismo dobili $(13Q_2 - 72)(Q_2 - 26) = 0$ tako da imamo dva slučaja kao što vidimo na slici 5.2
i) $Q_2 = 72/19$,
ii) $Q_2 = 26$.



Slika 5.2: Dvije mogućnosti.[2]

i) Ako je $Q_2 = 72/13$, tada teorem 4.4.1 daje

$$\frac{s_1}{5} = \frac{s_2}{72/13} = \frac{81/130}{17}$$

tako da dobijemo razmake $s_1 = 81/442$, $s_2 = 2916/14365$, $s_3 = 81/130$.
ii) Ako je $Q_2 = 26$, tada teorem 4.4.1 daje

$$\frac{s_1}{5} = \frac{s_2}{26} = \frac{81/130}{17}$$

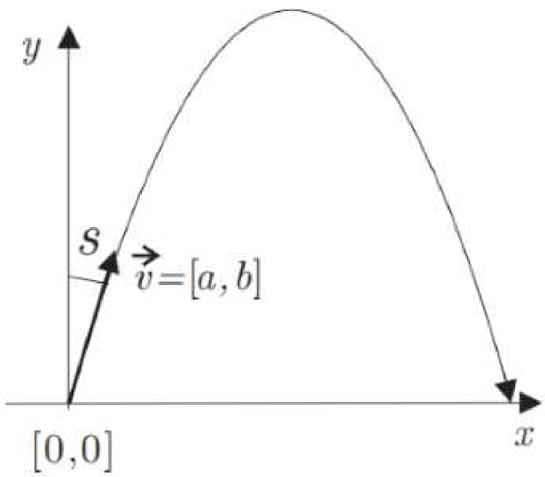
tako da dobijemo razmake $s_1 = 81/442$, $s_2 = 81/85$, $s_3 = 81/130$.

5.2 Fizika

Promotrimo trajektoriju hitca kao parabolu. Ako hitac počinje u ishodištu s brzinom $\overrightarrow{v} = (a, b)$ kao na slici 5.3, tada je njegov položaj u vremenu t dan s

$$\left(at, bt - \frac{gt^2}{2}\right)$$

gdje je g gravitacijsko ubrzanje.



Slika 5.3: Hitac.[3]

[2] Slika je preuzeta iz knjige [4].
[3] Slika je preuzeta iz knjige [4].

Primjer 5.2.1. *Dana je konstantna početna brzina* $v = \sqrt{a^2 + b^2}$*. Koji razmak s od vertikale rezultira time da pojektil prijeđe najveći horizontalni put prije nego padne na pod u točku* $(x, 0)$ *za neki x?*

Projektil padne na pod za vrijeme t gdje je

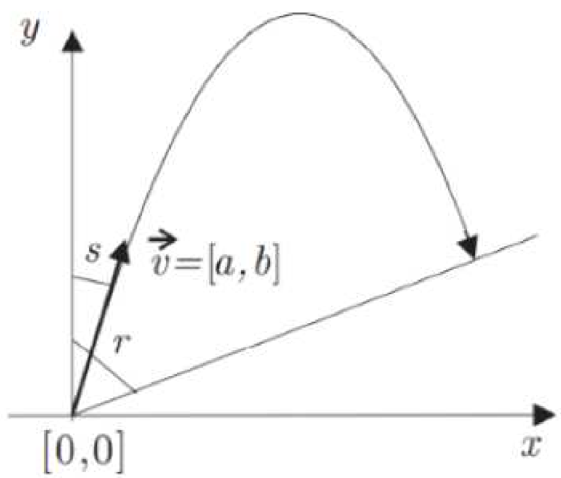
$$bt - \frac{gt^2}{2} = 0$$

tako da je ili $t = 0$ ili $t = 2b/g$.
Koristeći pristup racionalne trigonometrije, umjesto udaljenosti ćemo gledati kvadrat udaljenosti te je zapravo pitanje za koje vrijednosti $A = a^2$ i $B = b^2$, uz uvjet $A + B = v^2 = V$ daje najveću horizontalnu kvadratnu udaljenost

$$x^2 = (at)^2 = \frac{4AB}{g^2}.$$

Sada je to problem maksimiziranja produkta AB dva broja A i B s uvjetom da im je zbroj jednak V. Maksimalnu vrijednost dobijemo za $A = B = V/2$, dajući maksimalnu horizontalnu kvadratnu udaljenost $x^2 = \frac{V^2}{g^2}$.
Projektil bi trebao biti ispucan s razmakom jednakim $s = 1/2$ od vertkale.

Primjer 5.2.2. *Neka je projektil ispucan iz ishodišta na brdo koje je predstavljeno pravcem l kroz ishodište koji ima razmak r s vertikalom kao na slici 5.4. Početna brzina v je konstantna. Koji razmak s od vertikale će rezultirati maksimalnom horizontalnom udaljenosti nakon slijetanja?*



Slika 5.4: Projektil na brdu.[4]

Brdo je predstavljeno jednadžbom

$$x^2 = r(x^2 + y^2),$$

stoga projektil pogađa brdo za

$$(at)^2 = r\left((at)^2 + (bt - gt^2/2)^2\right).$$

Rješavajući dobijemo da je $t = 0$ ili t zadovoljava kvadratnu jednadžbu

$$\left(t - \frac{2b}{g}\right)^2 = \frac{4a^2(1-r)}{g^2 r}.$$

Stoga je $t = \frac{2b}{g} \pm \frac{2a}{g}\sqrt{\frac{1-r}{r}}$.
Kako bi horizontalna udaljenost bila maksimalna, zapravo trebamo maksimizirati at, odnosno

$$f(a,b) = ab \pm a^2 c$$

birajući a i b uz uvjet

$$g(a,b) = a^2 + b^2 = V$$

gdje je c konstanta $c = \sqrt{\frac{1-r}{r}}$.
Ovo možemo promatrati kao problem iz matematičke analize, koji se može riješiti Lagrangeovom metodom. Gradijenti su jednaki

$$\nabla f = (b \pm 2ac, a)$$

i

$$\nabla g = (2a, 2b)$$

te trebaju biti proporcionalni iz čega slijedi da je $(b \pm 2ac)b - a^2 = 0$.
Sredimo prethodni izraz te kvadriramo da bismo maknuli predznak kako bismo dobili $4a^2b^2c^2 = (a^2 - b^2)^2$ te napravimo supstituciju da dobijemo $a^2(V - a^2)c^2 = (2a^2 - V)^2$.
Ova se kvadratna jednadžba s nepoznanicom a^2 može zapisati u obliku

$$\left(a^2 - \frac{V}{2}\right)^2 = \frac{V^2c^2}{4(1+c^2)} = \frac{V^2(1-r)}{4}.$$

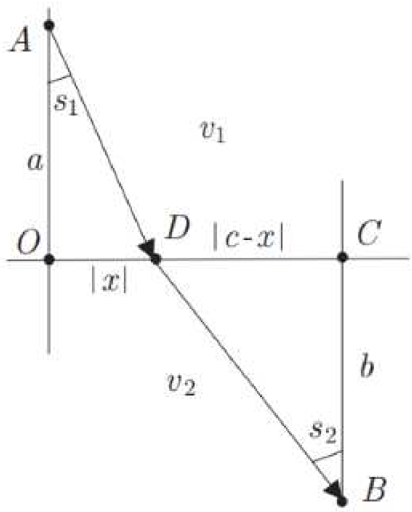
Stoga je $a^2 = \frac{V}{2}(1 \pm \sqrt{1-r})$ pa je razmak s između početnog smjera i vertikale

$$s = \frac{a^2}{V} = \frac{1 \pm \sqrt{1-r}}{2}.$$

Međutim, ovo je ekvivalentno izrazu $r = 4s(1-s)$, stoga projektilov početni smjer treba biti simetrala kuta između brda i vertikale. Uočimo da postoje dva rješenja, jedno kada projektil ide uzbrdo i jedno kada projektil ide nizbrdo.

[4]Slika je preuzeta iz knjige [4].

Primjer 5.2.3. *Neka čestica putuje od točke $A = (0, a)$ do točke $B = (c, -b)$ gdje su $a, b > 0$ kroz neku točku $D = (x, 0)$ na horizontalnoj osi kao na slici 5.5. Ako čestica ima brzinu v_1 u području $y \geq 0$ i brzinu v_2 u području $y < 0$, za koji izbor točke D će ukupno vrijeme putovanja biti najmanje?*



Slika 5.5: Snellov zakon.[5]

Osnovna formula koja povezuje udaljenost d i vrijeme t te brzinu v je

$$v = d/t. \tag{5.1}$$

Neka je $|OD| = |x|$ i $|DC| = |c - x|$, neka su vremena t_1 i t_2 koja su potrebna čestici da putuju od A do D ravnom linijom i od D do B dana s

$$t_1 = \frac{|AD|}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1},$$

$$t_2 = \frac{|DB|}{v_2} = \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Ukupno vrijeme t je

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

[5]Slika je preuzeta iz knjige [4].

Ovo je funkcija od x jer su a, b, v_1, v_2 konstante. Sada možemo izračunati vrijednost x u kojoj funkcija postiže minimum ili maksimum. Kako bi to napravili, potrebna je derivacija od $\sqrt{x}$. No, pogledajmo problem sa stajališta racioalne trigonometrije.
Kako je $Q = d^2$ jedna od tvrdnji racionalne trigonometrije, tada kvadriramo izraz 5.1 kako bismo dobili

$$V = Q/T$$

gdje su $V = v^2, T = t^2$. Kako je $Q(A, D) = a^2 + x^2$ i $Q(D, B) = (c - x)^2 + b^2$, kvadriramo i vremena t_1 i t_2 kako bismo dobili

$$T_1 = \frac{a^2 + x^2}{V_1}, \tag{5.2}$$

$$T_2 = \frac{(c - x)^2 + b^2}{V_2}. \tag{5.3}$$

Kako je $t = t_1 + t_2$, pokazat ćemo da vrijedi $A(T, T_1, T_2) = 0$. Koristeći definiciju Arhimedove funkcije i teorem 3.2.7 dobijemo $A(t, t_1, t_2) = (t + t_1 + t_2)(t + t_1 - t_2)(t + t_2 - t_1)(t_1 + t_2 - t)$ zbog uvjeta $t = t_1 + t_2$ dolazimo do $A(t, t_1, t_2) = 0$. Sve tri vrijednosti ovise o varijabli x, a nama je cilj izabrati x kako bi minimizirali T.
Vrijedi jednakost

$$(T_1 + T_2 - T)^2 = 4T_1T_2 \tag{5.4}$$

te sve tri vrijednosti ovise o varijabli x. Deriviranjem dobivamo

$$2(T_1 + T_2 - T)^2 \left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} - \frac{dT}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 4\frac{\mathrm{d}(T_1T_2)}{\mathrm{d}x}. \tag{5.5}$$

Kako bismo maksimizirali ili minimizirali T, trebamo prvo odrediti sve stacionarne točke njegove derivacije, tj. kada vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Kvadriramo jednadžbu 5.5 tako da dobijemo

$$T_1T_2\left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x}\right) = \left(T_2\frac{\mathrm{d}T_1}{dx} + T_1\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x}\right)^2.$$

Proširimo i sredimo jednadžbu kako bismo dobili općenitu formulu za maksimum i minimum, odnosno

$$T_2\left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x}\right)^2 = T_1\left(\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x}\right)^2. \tag{5.6}$$

Jednadžbe 5.6 i 5.2 uvrstimo u jednadžbu 5.3 gdje je

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{V_1},$$

$$\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} = \frac{2(x-c)}{V_2}.$$

Dobivamo

$$\frac{(c-x)^2 + b^2}{V_2} \cdot \frac{4x^2}{V_1^2} = \frac{a^2 + x^2}{V_1} \cdot \frac{4(c-x)^2}{V_2^2}$$

ili

$$\frac{V_2}{V_2} = \frac{(c-x)^2}{(c-x)^2 + b^2} \cdot \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

Razmaci s_1 i s_2 između pravca AD i vertikale te pravca DB i vertikale su

$$s_1 = \frac{x^2}{a^2 + x^2}$$

$$s_2 = \frac{(c-x)^2}{(c-x)^2 + b^2}.$$

Ovo potvrđuje Snellov zakon. Minimalno vrijeme dobivamo kada je

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{s_2}{s_1}.$$

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Zagreb, 2008., https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/la/linearna_algebra_sk_7.pdf, pristupljeno 06.09.2022.

[2] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna algebra 1*, skripta PMF-MO, https://pdfslide.net/documents/linearna-algebra-1-skripta-za\-nastavnicke-studije-na-pmf-mo.html?page=2, pristupljeno 06.09.2022.

[3] B. Širola, *Algebarske strukture*, skripta PMF-MO, https://pdfslide.net/documents/algebarske-strukture-boris-sirola\-pmf-bila-bi-da-je-to-nauka-o-algebarskim.html?page=2, pristupljeno 06.09.2022.

[4] N. J. Wilderger, *Divine Proportions, Rational trigonometry to universal trigonometry*, Wild Egg Pty Ltd., 2005.

Sažetak

Ovaj rad opisuje odnos racionalne trigonometrije s klasičnom Euklidovom geometrijom. U Euklidovoj geometriji osnovni pojmovi su udaljenost i kut, dok u racionalnoj trigonometriji koristimo kvadrat udaljenosti i razmak. Racionalna trigonometrija koristi kvadratne vrijednosti i zbog toga se rješenja mogu prikazati u racionalnom obliku tako da se sve može izračunati primjenom aritmetike i algebre te su na taj način dobivena jednostavnija rješenja.

U radu je iskazano i dokazano pet glavnih teorema racionalne trigonometrije kao i još neki potrebni za razvitak teorije. U njima se povezuje šest elemenata trokuta, a to su uvjet kolinearnosti, Pitagorin poučak, teorem o razmaku kao racionalan analogon poučka o sinusima, teorem o dualnom razmaku koji odgovara poučku o kosinusu i formula tri razmaka koja predstavlja teorem da je zbroj kutova u trokutu 180°. Nakon svakog teorema dan je primjer njegove primjene u geometriji i njegova usporedba s Euklidovom geometrijom.

U svakom od poglavlja predstavljeni su osnovni pojmovi i oznake potrebni za razvoj dane teorije. Također su definirane nove funkcije, npr. Arhimedova funkcija te su uvedeni i novi pojmovi poput dualnog razmaka i zakreta koje možemo povezati s vektorskim i skalarnim produktom. Neki od teorema koji su dokazani su sljedeći: teorem o polovištu, teoremi o paralelogramu, teoremi o simetrali dužine i teoremi o simetrali kuta. Na kraju rada dani su primjeri zadataka iz geometrije i fizike u kojima je korištena teorija racionalne trigonometrije.

Summary

This thesis describes the relationship between rational trigonometry and classical Euclidean geometry. In Euclidean geometry, the basic terms are distance and angle, while in rational trigonometry we use quadrance and spread. Rational trigonometry uses quadratic values and, because of this, solutions of the geometric problems can be presented in a rational form, so that everything can be calculated using arithmetic and algebra, and in this way simpler solutions are obtained.

Thesis presents and proves five main theorems of rational trigonometry, as well as some other results necessary for the development of the theory. They connect six elements of the triangle, namely Triple quad formula, Pythagoras' theorem, Spread law as a rational analog of the law of sines, Cross law which corresponds to the law of cosines, and Triple spread formula, which represents the theorem that the sum of the angles in a triangle is 180°. After each theorem, an example of its geometry application is given and a comparison with Euclidean geometry is given.

In each of the chapters, the basic terms and symbols necessary for the development of the given theory are presented. New functions were also defined, e.g. the Archimedes function, and new concepts such as cross and twist were introduced, which we can associate with the vector and scalar product. Some of the theorems that have been proved are as follows: Bisector theorem, Parallelogram theorems and theorems on vertex and perpendicular bisectors. At the end of the thesis, examples of problems from geometry and physics were given in which the theory of rational trigonometry can be applied.

Životopis

Rođena sam 2. srpnja 1997. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Josipa Zorića i Osnovnu školu Ivana Benkovića u Dugom Selu, a potom upisujem Srednju školu Dugo Selo, smjer: opća gimnazija. Srednjoškolsko obrazovanje završavam 2016. godine, a iste godine upisujem sveučilišni integrirani preddiplomski i diplomski studij Matematika i fizika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Tijekom studija bila sam demonstratorica iz kolegija Elementarna teorija brojeva.

Na petoj godini studija, 2021. godine, krećem raditi kao nastavnik matematike u Srednjoj školi Dugo Selo.