Lokalno kompaktne grupe

Šalgaj, Nikola

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nikola Šalgaj

LOKALNO KOMPAKTNE GRUPE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marcela Hanzer

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

"O, okrutna matematiko, nisam Vas zaboravio, otkad su se Vaše mudre pouke, slađe od meda, prelile u moje srce, poput osvježujućeg vala...Bez Vas, u svojoj borbi protiv čovjeka, možda bih bio pobijeđen."[1]

[1] **Comte de Lautréamont** (pseudonim), Maldororova pjevanja iz Sabranih djela Isidorea Ducassea ([7]).

Sadržaj

Uvod

Ukoliko se pokušava detaljnije razumjeti razvoj matematičkog pojma mjere tijekom prve polovice dvadesetog stoljeća, utoliko taj razvoj ispada zamršeniji i divergentniji. Ovaj rad može se shvatiti kao izlaganje dijela jedne grane tog razvoja čiji je temeljni rezultat egzistencija i jedinstvenost Haarove mjere na lokalno kompaktnoj grupi. Tom rezultatu prethodili su ključni rezultati teorije mjere s jedne strane te razvoj teorije Liejevih grupa i njihovih reprezentacija s druge. Dok su Liejeve grupe diferencijabilne mnogostrukosti glatkih grupnih operacija, topološke grupe su sve grupe opskrbljene topologijom u kojoj su grupne operacije neprekidne. Topološke grupe, dakle, možemo poimati kao poopćenje Liejevih grupa i takvo poimanje je uvelike u skladu s povijesnim razvojem uz njih vezanih teorija.

Na tragu tog razvoja nalazi se i takoreći euklidska motivacija mađarskog matematičara Alfreda Haara. Naime, Jordanova i Lebesgueova mjera zadovoljavaju jedno geometrijski intuitivno svojstvo - invarijantne su s obzirom na translacije, što se paralelno odražava na razini integrala na način da je Lebesgueovo integriranje invarijantno s obzirom na translaciju funkcija. Bilo je već pokazano da je na strukturno izdašnim Liejevim grupama također moguće provesti takvu integraciju, stoga se Haar pitao je li to moguće provesti na nekoj široj klasi topoloških grupa.

Odgovor do kojeg je bio došao 1933. godine (v. [6]) u svojoj općenitosti i eleganciji zacijelo je premašio i očekivanja sâmog Haara: u suštini svaka lokalno kompaktna grupa posjeduje mjeru invarijantnu s obzirom na translacije - Haarovu mjeru. Tri godine kasnije John Von Neumann dokazao je da je Haarova mjera na lokalno kompaktnoj grupi jedinstvena do na množenje pozitivnim realnim brojem.

Otkriće lokalne kompaktnosti kao apstraktnog, ali vrlo jednostavnog i čisto topološkog dovoljnog uvjeta za postojanje Haarove mjere narednih je godina intenziviralo napredak teorije topoloških grupa i njihovih reprezentacija, što je pak kasnije omogućilo razvoj apstraktne harmonijske analize kao proširenja i produbljenja klasične Fourierove analize.

Doduše, kao što je malo prije sugerirano sintagmom "u suštini", Haar nije pokazao da je općenita lokalna kompaktnost dovoljna za postojanje Haarove mjere: uz lokalnu kompaktnost on je, naime, pretpostavio da topologija na grupi zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti. Međutim, njegov dokaz dao se bez velikih konceptualnih promjena prepraviti tako da se željena egzistencija mogla izvesti bez drugog aksioma prebrojivosti. Prvi je to učinio André Weil 1940. godine i time pokazao da zaista svaka lokalno kompaktna grupa ima Haarovu mjeru. Štoviše, Weil je pokazao i svojevrstan obrat: svaku grupu s Haarovom mjerom moguće je snabdjeti lokalno kompaktnom topologijom.

Osim toga, Weil je u istoj knjižici "Intégration dans les groupes topologiques et ses applications" ([10]) prvi na sustavan i suvremenom post-bourbakiovskom čitatelju terminološko čitljiv način iznio sadržaj koji se nalazi i u ovom radu. Premda je primarna referenca našega rada knjiga "A Course in Abstract Harmonic Analysis" Geralda B. Follanda ([5]) gdje nadasve pratimo njezino poglavlje "Locally Compact Groups", zanimljivo je "baciti oko" i primijetiti *u kojoj mjeri* Follandov tekst, od redoslijeda izlaganja i definiranja pojmova do samih postupaka u dokazima, crpi i prati Weilov tekst. Posljedično, odnosno *tranzitivno*, i ovaj skroman rad, moglo bi se reći, "odiše" Weilovim duhom.

Ukratko, rad započinje ekspozicijom definicija i rezultata iz opće topologije, teorije mjere i Banachovih algebri koji će nam trebati u nastavku rada, a dobro ih se prisjetiti ili možda nisu toliko poznati, poput pojma kompleksne mjere.

Središnji dio je drugo poglavlje gdje se uvodi glavni objekt - lokalno kompaktna grupa i izvode njezina bitna svojstva. Riječ je, dakle, o topološkoj grupi lokalno kompaktne topologije, uz što najčešće pretpostavljamo da je topologija Hausdorffova i σ-kompaktna s obzirom na neku mjeru na Borelovoj algebri. Općenito nećemo raditi s komutativnim grupama, pa ni invarijantnosti mjera s obzirom na lijeve i desne translacije općenito nisu ekvivalentne. Zbog toga sada ispravljamo sitnu nepreciznost prethodnog dijela teksta - u ovom radu pokazat ćemo da svaka lokalno kompaktna grupa ima lijevu Haarovu mjeru, analogno će slijediti da ima desnu Haarovu mjeru, no te dvije mjere ne moraju se nužno podudarati. Inače, lijeva (desna) Haarova mjera, osim što je invarijantna s obzirom na lijeve (desne) translacije, prema definiciji mora biti Radonova. Iako se, kako je kazano, lijeva i desna Haarova mjera ne moraju podudarati, odstupanje lijeve Haarove mjere od toga da bude desna ponaša se prilično pravilno, stoga ćemo uvesti modularnu funkciju koja bilježi to odstupanje te demonstrirati kako je modularna funkcija korisna primjerice prilikom integracije.

Nakon elementarnih primjera lokalno kompaktnih grupa i njima pripadnih lijevih Haarovih mjera, u trećem poglavlju bavimo se prostorom kompleksnih Radonovih mjera $M(G)$ i $L^p(G)$ prostorima na nekoj lokalno kompaktnoj grupi G. Na prostorima $M(G)$ i $L^1(G)$ uvodimo konvoluciju i pokazujemo kako je konvolucija na $M(G)$ poopćenje konvolucije na $L^1(G)$, dok je dakako konvolucija na $L^1(G)$ poopćenje poznate konvolucije na $L^1(\mathbb{R})$. Ispostavlja se da uz konvoluciju $*$ oba prostora $M(G)$ i $L^1(G)$ imaju strukturu Banachove $*$-algebre te da se $L^1(G)$ može pravilno uložiti u $M(G)$.

Posljednje poglavlje je svojevrsna generalizacija drugog poglavlja jer razmatramo homogene prostore, što su topološki prostori na kojima djeluje lokalno kompaktna grupa G, pa nas zanima postojanje G-invarijantnih i kvazi-invarijantnih mjera na homogenim prostorima. Dokazujemo da su esencijalno svi homogeni prostori homeomorfni nekom kvocijentnom prostoru grupe G; iskazujemo teorem o postojanju invarijantnih mjera, koje ne postoje u svim homogenim prostorima, ali uz modularnu funkciju lako se vidi kada postoje, i naposljetku teorem o postojanju kvazi-invarijantnih mjera, koje postoje uvijek.

Poglavlje 1

Preliminarni sadržaji

Poveći dio odjeljaka 1.1 i 1.2 ovog poglavlja zajedno s dokazima iskazanih tvrdnji može se pronaći u ([4]) pa ćemo samo u protivnom istaknuti literaturu iz koje je izvađena tvrdnja i u kojoj se nalazi njezin dokaz.

1.1 Opća topologija

Uzmimo dvije različite točke x i y te dva međusobno disjunktna zatvorena skupa A i B topološkog prostora X. Topološki prostor X je:

- $\mathbf{T_1}$, ako postoji otvoren skup U takav da $x \in U$ i $y \notin U$; ekvivalentno, ako je $\{x\}$ zatvoren za svaki $x \in X$;
- $\mathbf{T_2}$ ili **Hausdorffov**, ako postoje međusobno disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da $x \in U$ i $y \in V$;
- $\mathbf{T_4}$ ili **normalan Hausdorffov**, ako je Hausdorffov i ako postoje međusobno disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $A \subseteq U$ i $B \subseteq V$.

Okolina točke x u topološkom prostoru X je skup $A \subseteq X$ takav da se x nalazi u unutrašnjosti od A, tj. $x \in \operatorname{Int} A$. **Baza okoline** od $x \in X$ je familija $\mathcal{N}$ otvorenih skupova koja zadovoljava sljedeća dva svojstva:

i. $x \in V$, za svaki $V \in \mathcal{N}$,

ii. ako je $x \in U$, gdje je U otvoren, postoji $V \in \mathcal{N}$ takav da je $V \subseteq U$.

Ako svaka točka $x \in X$ ima kompaktnu okolinu, Hausdorffov topološki prostor X je **lokalno kompaktan**. Na lokalno kompaktnom prostoru za svaku (otvorenu) okolinu U neke točke x postoji kompaktna okolina K od x takva da je $K \subseteq U$. Posljednju tvrdnju koristit ćemo prešutno tijekom cijelog rada, primjerice pozivat ćemo se na propoziciju koja garantira postojanje okoline neke točke i uz to odmah pretpostaviti da je okolina kompaktna.

Nadalje, ako je X jednak nekoj prebrojivoj uniji kompaktnih skupova, tada kažemo da je X **σ-kompaktan**. Klasa topoloških prostora s kojom radimo kroz veći dio rada jest klasa **Hausdorffovih, lokalno kompaktnih i σ-kompaktnih prostora**. Zbog toga uvodimo oznaku **LKH** za Hausdorffove lokalno kompaktne topološke prostore.

Slijede dva teorema čije poznatije verzije vrijede uz pretpostavku da je X potpun metrički prostor u prvom teoremu i normalan prostor u drugom; međutim tvrdnje obaju teorema stoje i kada je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor:

Teorem 1.1.1 (**Baireov teorem za LKH prostore**). *Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor.*

(i) Ako je $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz otvorenih gustih skupova u X, onda je $\cap_{n=1}^{+\infty} U_n$ gust u X.

(ii) X nije prebrojiva unija nigdje gustih skupova.

*Kažemo da je $A \subseteq X$ **nigdje gust** ako je* $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\, A) = \emptyset$.

Za dokaz gornjeg teorema konzultirati [3, str. 193.].

Teorem 1.1.2 (**Urysohnova lema za LKH prostore**). *Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i $K \subseteq U \subseteq X$ gdje je K kompaktan i U otvoren. Postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$ takva da je $f = 1$ na K i* $\mathrm{supp}\, f \subseteq U$.

Neka je $(X_i)_{i\in I}$ proizvoljna familija topoloških prostora. **Produktna topologija** na $X = \Pi_{i\in I} X_i$ je topologija generirana projektivnim preslikavanjima $\pi_i : X \to X_i$, tj. najslabija topologija na X u kojoj su sva projektivna preslikavanja neprekidna. Predbazu produktne topologije čine, dakle, skupovi $\pi_i^{-1}(U_i)$, gdje je U_i proizvoljan otvoren skup u X_i, a i proizvoljan indeks iz I, što će reći da je svaki otvoren skup produktnog topološkog prostora neka unija skupova $\pi_i^{-1}(U_i)$.

Promotrimo poseban slučaj $X\times Y$ i preslikavanje $f : X \to X\times Y$ definirano s $x \mapsto (x, y)$, gdje je $y \in Y$ fiksan. Pokažimo očekivano - da je f neprekidna funkcija. Znamo da je proizvoljan otvoren skup iz $X \times Y$ oblika $\cup_{j\in J} U_j \times V_j$, gdje je U_j otvoren u X, a V_j otvoren u Y. Tada vrijedi:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} U_j \times V_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j \times V_j) = \bigcup_{j\in J}\{x \in X \,|\, (x, y) \in U_j \times V_j\} = \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Budući da su praslike otvorenih skupova od f otvorene u X, slijedi da je f neprekidna.

Krucijalan će nam biti sljedeći vrlo netrivijalan teorem:

Teorem 1.1.3 (Tikhonovljev teorem). *Ako je $(X_i)_{i\in I}$ neka familija kompaktnih topoloških prostora tada je $X = \Pi_{i\in I} X_i$ s produktnom topologijom kompaktan topološki prostor.*

Ako topološki prostor X zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, što znači da svaka točka ima prebrojivu bazu okolina, tada vrijedi poznata karakterizacija zatvarača skupa: $x \in \mathrm{Cl}\, A$ ako i samo ako postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u A koji konvergira u x. Također, funkcija $f : X \to Y$, gdje je Y topološki prostor, neprekidna je u $x \in X$ ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira u x, preslikani niz $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u $f(x)$. Zanima nas postoje li generalizacije tih karakterizacija za općeniti topološki prostor, na što je odgovor potvrdan. No, prije toga, trebaju nam dva pojma: usmjeren skup i hiperniz.

Definicija 1.1.4. ***Usmjeren skup*** *je uređen par $(A, \preccurlyeq)$ skupa A s binarnom relacijom $\preccurlyeq$ koja je refleksivna, tranzitivna te zadovoljava sljedeće svojstvo "usmjerljivosti":*

$$\forall \alpha, \beta \in A,\ \exists \gamma \in A \text{ t.d. } \alpha \preccurlyeq \gamma \text{ i } \beta \preccurlyeq \gamma.$$

Hiperniz *u skupu X je preslikavanje $A \to X$, $\alpha \mapsto x_\alpha$; kraće ga zapisujemo kao $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.*

Primjetno je da je $(\mathbb{N}, \leq)$ usmjeren skup, a svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X ujedno je i hiperniz. Izraz $\alpha \preccurlyeq \beta$ ponekad se zapisuje kao $\beta \succcurlyeq \alpha$. Neka je sada X topološki prostor.

Definicija 1.1.5. *Hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u X* ***konvergira*** *u točku $x \in X$, ako:*

$$\forall U \text{ okolinu od } x,\ \exists \alpha_0 \in A \text{ t.d. } \forall \alpha \in A,\ \alpha_0 \preccurlyeq \alpha \Rightarrow x_\alpha \in U.$$

Konvergenciju jednostavno zapisujemo kao $x_\alpha \to x$.

Sada smo spremni iskazati željene generalizacije:

Propozicija 1.1.6. *Neka je X topološki prostor i $B \subseteq X$. Tada je $x \in \mathrm{Cl}\, B$ ako i samo ako postoji hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ u B koji konvergira u x.*

Propozicija 1.1.7. *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna u $x \in X$ ako i samo ako za svaki hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ koji konvergira u x preslikani hiperniz $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ konvergira u $f(x)$.*

1.2 Teorija mjere

Lijep i koncizan pregled teorije mjere potrebne za bavljenje lokalno kompaktnim grupama nalazi se u [9]. Poneke formulacije uzete su iz te knjige, međutim esencijalno se više-manje cijeli ovaj odjeljak može pronaći u spomenutoj [4].

Neka je X LKH topološki prostor.

σ-konačne mjere

Borelova σ-algebra na X je σ-algebra generirana topologijom na X. Označavamo ju s $B(X)$ (preciznije bi bilo označiti je s $B(X, \mathcal{T})$, no načelno nećemo raditi s više topologija na istom skupu). Dakle, ako je $\mathcal{T}$ topologija na X, tada je $B(X) = \sigma(\mathcal{T})$, što je najmanja σ-algebra na X koja sadrži $\mathcal{T}$. Elemente Borelove σ-algebre zovemo **Borelovi skupovi**, a mjere na izmjerljivom prostoru $(X, B(X))$ zovemo **Borelove mjere**.

Uzmimo sada Borelovu mjeru μ na X i Borelov skup B. Mjera μ je:

- **regularna izvana** na B, ako $\mu(B) = \inf\{\mu(U) \mid B \subseteq U, U \text{ otvoren}\}$;
- **regularna iznutra** na B, ako $\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq B, K \text{ kompaktan}\}$;
- **regularna**, ako je regularna izvana i iznutra na svim Borelovim skupovima.

Kažemo da je Borelova mjera μ **Radonova** ako je konačna na svim kompaktnim skupovima, regularna izvana na svim Borelovim skupovima i regularna iznutra na otvorenim skupovima.

Sjetimo se da smo u prethodnom odjeljku napomenuli kako ćemo načelno raditi s topološkim prostorima koji su LKH, ali i σ-kompaktni. Dok je topološki prostor X σ-kompaktan ako je X prebrojiva unija kompaktnih skupova, mjera na izmjerljivom prostoru X je **σ-konačna** ako je X prebrojiva unija izmjerivih skupova konačnih u mjeri μ. Otuda direktno vidimo da je Borelova mjera na σ-kompaktnom skupu koja je konačna na svim kompaktnim skupovima ujedno i σ-konačna mjera.

Posebno, Radonova mjera na σ-kompaktnom skupu je σ-konačna. Osim toga, prema [4, str. 216.], Radonova mjera na σ-kompaktnom skupu je regularna.

U nastavku ćemo iskazati važne rezultate iz teorije mjere, poput Fubini-Tonnelijevog i Radon-Nikodymovog teorema, koji pretpostavljaju da su mjere na koje se odnose σ-konačne. Kako je na σ-kompaktnom prostoru svaka Radonova mjera σ-konačna (i regularna), sada je jasnije zašto nam je pretpostavka da je X, osim što je LKH, i σ-kompaktan, toliko dragocjeno rasterećujuća.

Sasvim općenito, neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ prostori mjere. Sjetimo se da je njihov **produktni prostor mjera** $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \otimes \nu)$ definiran na sljedeći način: $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ je σ-algebra generirana skupovima oblika $A \times B$ za $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{G}$, a $\mu \otimes \nu$ je jedinstvena mjera na $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ za koju vrijedi $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ za sve $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{G}$.

Teorem 1.2.1 (Fubini-Tonellijev teorem [8, str. 53.]**).** *Neka su $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ-konačni prostori mjere.*

(i) Neka je $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-izmjeriva. Tada je:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

(ii) Neka je $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mu \otimes \nu$-integrabilna. Tada je za μ-gotovo svaki x funkcija $y \mapsto f(x,y)$ ν-integrabilna, dok je funkcija $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ μ-integrabilna. Analogno, za ν-gotovo svaki y funkcija $x \mapsto f(x,y)$ je μ-integrabilna, dok je funkcija $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ ν-integrabilna. Također vrijedi:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Ponovimo definicije L^p prostora, za $1 \le p \le +\infty$, na općenitom izmjerljivom prostoru $(X, \mathcal{F})$. Ono što će u radu najčešće varirati bit će mjere na fiksnom izmjerljivom prostoru, zato koristimo oznaku $L^p(\mu)$ ili L^p ukoliko je mjera podrazumijena. Za izmjerivu $f : X \to \mathbb{C}$ definiramo norme:

$$\|f\|_{L^p(\mu)} := \left(\int_X |f|^p\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p < +\infty;$$
$$\|f\|_{L^\infty(\mu)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| = \inf\{a \ge 0 \,|\, \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

Poistovjećujući funkcije koje su jednake μ-gotovo svuda, definiramo L^p prostore:

$$L^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ izmjeriva i } \|f\|_p < +\infty\}, \ 1 \le p \le +\infty.$$

Ovdje definiramo i **uniformnu normu** na prostoru ograničenih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Uočimo (samo) izvanjsku sličnost uniformne norme na prostoru ograničenih funkcija, koju ćemo označavati s $\|\cdot\|_\infty$, te norme na prostoru L^∞ koju ćemo uvijek, radi razlikovanja od uniformne, označavati s $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Neka sada $L^p(\mu)$ i $L^p(\nu)$ za $1 \le p \le +\infty$ označavaju L^p prostor na respektivno $(X, \mathcal{F}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{G}, \nu)$. Za $1 \le p < +\infty$ vrijedi poznata **Minkowskijeva nejednakost**:

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \ \forall f, g \in L^p.$$

S druge strane, služimo se **”integralnom” nejednakošću trokuta**:

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \le \int_X |f|\, d\mu.$$

Sljedeći teorem spaja te dvije nejednakosti:

Teorem 1.2.2 (**Minkowskijeva nejednakost za integrale**). *Neka su* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *i* $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ σ*-konačni prostori mjere.*

(i) Neka je $f : X \times Y \to [0, +\infty\rangle$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$*-izmjeriva i* $1 \leq p < +\infty$. *Tada je:*

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X f(x,y)^p\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

(ii) Neka je $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$*-izmjeriva i* $1 \leq p \leq +\infty$. *Ako je funkcija* $x \mapsto f(x,y)$ *u* $L^p(\mu)$ *za* ν*-gotovo svaki* y *i funkcija* $y \mapsto \|f(x,y)\|_p$ *u* $L^1(\nu)$*, tada je* $y \mapsto f(x,y)$ *u* $L^1(\nu)$ *za* μ*-gotovo svaki* x*, funkcija* $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ *je u* $L^p(\mu)$*, i:*

$$\left\| \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right\|_{L^p(\mu)} \leq \int_Y \|f(x,y)\|_{L^p(\mu)} d\nu(y).$$

Sretno notorna je činjenica da su integrali zapravo linearni funkcionali. Kako bismo, dakle, preslikavanje $\varphi \mapsto \int \varphi\, d\mu$ razmatrali kao funkcional, potrebno je uzeti neki vektorski prostor funkcija sa zajedničkom domenom X. Mi ćemo uzeti prostor $C_c(X)$.

Podsjetimo se: **nosač** (supp) funkcije je zatvarač skupa na kojem funkcija poprima vrijednosti različite od 0, a značajan je skup neprekidnih funkcija s kompaktnim nosačem $C_c(X)$; zapišimo to precizno:

$$\operatorname{supp} \varphi = \operatorname{Cl}\{x \in X \,|\, \varphi(x) \neq 0\}, \quad C_c(X) = \{\varphi : X \to \mathbb{R} \text{ neprekidna} \,|\, \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktan}\}.$$

Dakle, za fiksnu mjeru μ na X, $\varphi \mapsto \int \varphi\, d\mu$ je funkcional I_μ vektorskog prostora $C_c(X)$. Nameće se pitanje odnosa mjera na prostoru X i funkcionala na $C_c(X)$, odnosno naravi preslikavanja $\mu \mapsto I_\mu$. Ispostavilo se korisnim, naime, uzeti za domenu preslikavanja $\mu \mapsto I_\mu$ skup Radonovih mjera, a za kodomenu skup pozitivnih linearnih funkcionala na $C_c(X)$. Linearan funkcional I na $C_c(X)$ je **pozitivan linearan funkcional** ako je $I(\varphi) \geq 0$, kada je $\varphi \geq 0$. Sljedeći teorem objašnjava takav odabir domene i kodomene:

Teorem 1.2.3 (**Rieszov teorem reprezentacije**). *Ako je* I *pozitivan linearan funkcional na* $C_c(X)$*, onda postoji jedinstvena Radonova mjera* μ *na* X *t.d.* $I(\varphi) = \int \varphi\, d\mu$ *za sve* $\varphi \in C_c(X)$.

Drugim riječima, preslikavanje $\mu \mapsto I_\mu$ je bijektivno na navedenoj domeni i kodomeni. Ovaj teorem ključan je rezultat na koji ćemo se pozivati tijekom cijelog rada s obzirom da nam je osnovni cilj pokazati egzistencije stanovitih mjera. Intuitivno, na nekom proizvoljnom prostoru čini se lakšim iznjedriti nekakav linearan funkcional nego mjeru, a Rieszov teorem reprezentacije upravo nam omogućuje da doskočimo toj teškoći. Osim u pokazivanju egzistencije mjere, ovaj teorem pomaže nam i kod dokazivanja jedinstvenosti mjere, pa vrijedi izdvojiti jednu njegovu očitu, ali vrlo korisnu posljedicu:

Korolar 1.2.4. *Ako su μ i ν dvije Radonove mjere na X t.d. $\int \varphi\, d\nu = \int \varphi\, d\mu$ za svaki $\varphi \in C_c(X)$, onda je $\mu = \nu$.*

Dokaz. Mjere μ i ν daju dva linearna funkcionala I_μ i I_ν koja su jednaka na $C_c(X)$, tj. $I_\mu = I_\nu$. Poznato je da je $I_\mu(\varphi) \geq 0$, kada je $\varphi \geq 0$, iz čega slijedi da su I_μ i I_ν pozitivni linearni funkcionali. Sada primjenom prethodnog teorema dobivamo $\mu = \nu$.

□

Neka su μ i ν proizvoljne mjere na $(X, \mathcal{F})$. Kažemo da je mjera ν **apsolutno neprekidna** s obzirom na mjeru μ i to označavamo s $\nu \ll \mu$, ako su svi μ-nul skupovi ujedno i ν-nul skupovi, tj.:

$$\mu(B) = 0 \implies \nu(B) = 0, \ \forall B \in B(X).$$

Uzmimo sada izmjerivu nenegativnu funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ i definirajmo:

$$\mu_f(B) := \int_B f\, d\mu.$$

Gornja jednakost kraće se zapisuje kao: $d\mu_f = f\, d\mu$, tj. $d\mu_f(x) = f(x)\, d\mu(x)$. Nije teško pokazati da je tada μ_f mjera na $(X, \mathcal{F})$ apsolutno neprekidna s obzirom na μ, tj. $\mu_f \ll \mu$. Obrat ove tvrdnje je Radon-Nikodymov teorem:

Teorem 1.2.5 (**Radon-Nikodymov teorem**)**.** *Neka su μ i ν dvije σ-konačne mjere na $(X, \mathcal{F})$. Ako je ν apsolutno neprekidna s obzirom na μ, $\nu \ll \mu$, postoji izmjeriva nenegativna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ takva da je $\nu = \mu_f$, tj.*

$$\nu(B) = \int_B f\, d\mu, \ \forall B \in B(G) \quad (d\nu = f\, d\mu). \tag{1.1}$$

Ako postoji izmjeriva nenegativna funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ takva da je $d\nu = g\, d\mu$, onda je $f = g$ μ-gotovo svuda. Funkciju f zovemo ***Radon-Nikodymova derivacija*** *mjere ν s obzirom na mjeru μ i označavamo s $\frac{d\nu}{d\mu}$.*

Zaključujemo da je $\nu \ll \mu$ ako i samo ako postoji izmjeriva nenegativna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ takva da je $\nu = \mu_f$, tj. $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Posebno, ako je Radon-Nikodymova derivacija mjere ν s obzirom na mjeru μ pozitivna, $f = \frac{d\nu}{d\mu} > 0$, onda se može pokazati da je $\frac{1}{f}$ Radon-Nikodymova derivacija mjere μ s obzirom na mjeru ν, odnosno $\frac{1}{f} = \frac{d\mu}{d\nu}$. Posebno, $\mu \ll \nu$ te ν i μ imaju podudarne familije nul skupova. U tom slučaju kažemo da su mjere μ i ν **ekvivalentne**. Ako je uz to Radon-Nikodymova derivacija $\frac{d\nu}{d\mu}$ neprekidna, kažemo da su μ i ν **strogo ekvivalentne**.

U duhu Korolara 1.2.4 postavlja se pitanje, ukoliko su μ i ν Radonove mjere i X LKH i σ-kompaktan, postoji li neki dovoljni "integralni" uvjet uz koji bi vrijedila jednakost (1.3), a odgovor se nalazi u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 1.2.6. *Neka su μ i ν dvije Radonove mjere na X. Ako postoji neprekidna funkcija $f : X \to \langle 0, +\infty\rangle$ t.d. $\int \varphi \, d\nu = \int \varphi f \, d\mu$ za sve $\varphi \in C_c(X)$, onda je $\nu = \mu_f$. Posebno, $\nu \ll \mu$.*

Realne i kompleksne mjere

U radu će nam trebati norma mjere. Kako bismo bili u mogućnosti valjano definirati tu normu, potrebne su nam općenitije vrste mjera koje mogu poprimiti negativne realne, odnosno kompleksne vrijednosti. Zato, neka je $(X, \mathcal{F})$ prostor mjere, i krenimo s definicijom:

Definicija 1.2.7. ***Realna mjera*** *na $(X, \mathcal{F})$ je funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [-\infty, +\infty]$ sljedećih svojstava:*

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. *μ postiže najviše jednu od vrijednosti $\{-\infty, +\infty\}$,*

iii. *ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$, onda $\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.*

(Obične) mjere očito su realne te ćemo ih - jasnoće radi - tijekom rada s realnim ili kasnije kompleksnim mjerama zvati nenegativne mjere.

Prema važnom **Jordanovom teoremu o dekompoziciji** svaka realna mjera μ može se na jedinstveni način rastaviti na nenegativne mjere μ^+ i μ^- tako da je $\mu = \mu^+ - \mu^-$ i $\mu^+ \perp \mu^-$. Okomitost mjera ovdje je relevantna samo utoliko što ju treba navesti radi jedinstvenosti rastava, stoga je dovoljno spomenuti da okomitost dviju mjera znači da postoji rastav prostora X na dva disjunktna skupa tako da je jedna mjera 0 na jednom skupu, a druga mjera 0 na drugom skupu. Mjeru μ^+ zovemo **pozitivna varijacija** od μ, a μ^- **negativna varijacija** od μ. Mjeru $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ zovemo **totalna varijacija** od μ.

Definicija 1.2.8. ***Kompleksna mjera*** *na $(X, \mathcal{F})$ je funkcija $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ sljedećih svojstava:*

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. *ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$, onda $\mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$, gdje red (kompleksnih brojeva) konvergira apsolutno.*

Primijetimo, nenegativna mjera je kompleksna ako i samo ako je konačna. Nadalje, kompleksna mjera μ ima svoj realni i imaginarni dio: konačne realne mjere μ_r i μ_i takve da je $\mu = \mu_r + i\mu_i$. Kompleksna mjera nema neku poopćenu Jordanovu dekompoziciju, međutim možemo joj definirati totalnu varijaciju:

Definicija 1.2.9. ***Totalna varijacija*** *kompleksne mjere μ je nenegativna mjera $|\mu|$ definirana s:*

$$|\mu|(B) := \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\mu(B_j)| \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ B_1, \ldots, B_n \text{ međusobno disjunktni},\ B = \cup_{j=1}^{n} B_j \right\},\ B \in \mathcal{F}.$$

Kompleksna mjera ne može postići beskonačne vrijednosti, no direktno iz definicije nije jasno vrijedi li isto za njezinu totalnu varijaciju. Ipak:

Propozicija 1.2.10 ([1, str. 2.])**.** *Totalna varijacija $|\mu|$ kompleksne mjere μ je konačna, odnosno $|\mu|(X) < +\infty$.*

Integrali nad realnim, odnosno kompleksnim mjerama definiraju se prirodno preko integrala nad njima pripadnim nenegativnim mjerama μ_r^+, μ_r^-, μ_i^+ i μ_i^-. Slijedi propozicija koja se može interpretirati kao još jedna osobita verzija integralne nejednakosti trokuta:

Propozicija 1.2.11. *Za kompleksnu mjeru μ i funkciju $f : X \to \mathbb{C}$ vrijedi: f je integrabilna u mjeri μ ako i samo ako je integrabilna u mjeri $|\mu|$, i u tom slučaju:*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f| \, d|\mu|.$$

Vraćamo se na Radonove mjere.

Realna Radonova mjera je realna Borelova mjera μ kojoj su pozitivna i negativna varijacija, μ^+ i μ^-, (nenegativne) Radonove mjere.

Kompleksna Radonova mjera je kompleksna Borelova mjera μ kojoj su realni i imaginarni dio, μ_r i μ_i, realne Radonove mjere.

Tek je skup kompleksnih Radonovih mjera podatan za elegantnu algebarsku i topološku opskrbu, stoga je skup kompleksnih Radonovih mjera na topološkom (Borel-izmjerljivom) prostoru X zaslužio oznaku $M(X)$. Posebno, na njemu definiramo najavljenu **normu mjere**:

$$\|\mu\| := |\mu|(X),\ \mu \in M(X). \tag{1.2}$$

Vidimo da nam Propozicija 1.2.10 garantira da $\|\mu\|$ ne može poprimiti beskonačne vrijednosti. Osnovno o prostoru $M(X)$ iskazano je u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 1.2.12. *Neka je μ kompleksna Borelova mjera.*

(i) *μ je (kompleksna) Radonova mjera ako i samo ako je $|\mu|$ (nenegativna) Radonova mjera.*

(ii) *$(M(X), \|\cdot\|)$ je normirani prostor.*

Sjetimo se da smo uspostavili bijekciju između nenegativnih Radonovih mjera i pozitivnih linearnih funkcionala na $C_c(X)$. Nije neopravdano slutiti da i $M(X)$ pravilno korespondira s nekim prostorom funkcionala. Kao i uvijek (u ovom radu), odgovor na slutnju je potvrdan, pa definirajmo prvo prostor $C_0(X)$:

$$C_0(X) := \{\varphi : X \to \mathbb{R} \text{ neprekidna} \,|\, \forall\varepsilon > 0,\ \exists K \subseteq X \text{ kompaktan t.d } |\varphi(x)| < \varepsilon,\ x \in X \setminus K\}.$$

Ponekad se kaže da je $C_0(X)$ prostor funkcija koje **trnu u beskonačnosti**.
Inače, $C_0(X) = \mathrm{Cl}_{(C(X),\|\cdot\|_\infty)}(C_c(X))$, što se intuitivno može prilično lijepo predočiti imajući u vidu slučaj $X = \mathbb{R}$ i spomenuto "trnjenje u beskonačnosti". Neka sada $C_0(X)^*$ označava prostor pozitivnih ograničenih linearnih funkcionala prostora $C_0(X)$. Naravno, funkcional I na $C_0(x)$ je ograničen ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi:

$$|I(\varphi)| \leq M\|\varphi\|_\infty,\ \forall\varphi \in C_0(X).$$

Norma $\|I\|$ je najmanji M koji zadovoljava gornje nejednakosti. Za $\mu \in M(X)$ prirodno definiramo funkcional $I_\mu(\varphi) = \int_X \varphi\, d\mu$ za $\varphi \in C_0(X)$ te konačno iskazujemo izdašan teorem koji opisuje (na)slućenu korespondenciju:

Teorem 1.2.13 (Rieszov teorem reprezentacije kompleksnih mjera)**.** *Preslikavanje $\mu \mapsto I_\mu$ je izometrički izomorfizam prostora $M(X)$ i $C_0(X)^*$.*

Za kraj odjeljka izlažemo osnovne rezultate o apsolutnoj neprekidnosti i Radon-Nikodymovom teoremu za kompleksne mjere, uglavnom analogne onima za nenegativne mjere. Neka je $\nu \in M(X)$ i μ nenegativna mjera na $(X, B(X))$. Kažemo da je kompleksna Radonova mjera ν **apsolutno neprekidna** s obzirom na nenegativnu mjeru μ, $\nu \ll \mu$, ako vrijedi:

$$\mu(B) = 0 \implies \nu(B) = 0,\ \forall B \in B(X).$$

Uzmimo $f \in L^1(\mu)$ i definiramo:

$$\mu_f(B) := \int_B f\, d\mu,\ B \in B(X).$$

Tada je $\mu_f \in M(X)$ i $\mu_f \ll \mu$. Obrat tvrdnje je sljedeći teorem:

Teorem 1.2.14 (Radon-Nikodymov teorem za kompleksne mjere). *Neka je $\nu \in M(X)$ i μ nenegativna σ-konačna mjera na $(X, B(X))$. Ako je ν apsolutno neprekidna s obzirom na μ, $\nu \ll \mu$, postoji $f \in L^1(\mu)$ takva da je $\nu = \mu_f$, tj.*

$$\nu(B) = \int_B f\, d\mu, \ \forall B \in B(X) \quad (d\nu = f\, d\mu). \tag{1.3}$$

Ako postoji $g \in L^1(\mu)$ takva da je $d\nu = g\, d\mu$, onda je $f = g$ μ-gotovo svuda. Također, $\|\nu\| = \|f\|_{L^1(\mu)}$.

1.3 Banachove algebre

Za razliku od prva dva, ovaj odjeljak crpljen je iz poglavlja o Banachovim algebrama knjiga [2] i [5].

Definicija 1.3.1. ***Asocijativna algebra nad poljem*** *$\mathbb{F}$ je uređeni par $(\mathcal{A}, \cdot)$, gdje su $\mathcal{A}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i množenje $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ takvi da su zadovoljena sljedeća svojstva:*

i. $x(yz) = (xy)z, \ \forall x, y, z \in \mathcal{A}$,

ii. $a(xy) = (ax)y = x(ay), \ \forall x, y \in \mathcal{A}, \ \forall a \in \mathbb{F}$,

iii. $x(y + z) = xy + xz, \ (x + y)z = xy + yz, \ \forall x, y, z \in \mathcal{A}$.

Algebra je ***komutativna****, ako je $xy = yx$ za sve $x, y \in \mathcal{A}$, i* ***unitalna****, ako postoji $e \in \mathcal{A}$ takav da je $xe = ex = x$ za sve $x \in \mathcal{A}$.*

Pretpostavimo sada da je vektorski prostor $\mathcal{A}$ snabdjeven normom $\|\cdot\|$ i da je taj normiran prostor Banachov, odnosno da je svaki Cauchyjev niz u $\mathcal{A}$ ujedno i konvergentan niz u $\mathcal{A}$. Također, ograničit ćemo se na algebre nad poljem $\mathbb{C}$.

Definicija 1.3.2. ***Banachova algebra*** *je asocijativna algebra $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathbb{C}$ čiji je vektorski prostor $\mathcal{A}$ Banachov prostor s normom koja zadovoljava nejednakost:*

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|, \ \forall x, y \in \mathcal{A}. \tag{1.4}$$

Iz gornje nejednakosti slijedi da je množenje na Banachovoj algebri $\mathcal{A}$ neprekidno preslikavanje; ukoliko Banachova algebra $\mathcal{A}$ ima jedinicu, tada je invertiranje neprekidno na grupi invertibilnih elemenata.

Definicija 1.3.3. ***$*$-algebra*** *je asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{C}$ zajedno s* ***involucijom****: preslikavanjem $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto x^*$ sljedećih svojstava:*

1. $(x+y)^* = x^* + y^*, \ \forall x, y \in \mathcal{A}$,
2. $(ax)^* = \overline{a}x^*, \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \forall a \in \mathbb{C}$,
3. $(xy)^* = y^*x^*, \ \forall x, y \in \mathcal{A}$,
4. $x^{**} = x. \ \forall x \in \mathcal{A}$.

C*-algebra *je Banachova $*$-algebra gdje norma zadovoljava jednakost:*

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \ \forall x \in \mathcal{A}. \tag{1.5}$$

(1.4) i (1.5) spojeni deduciraju jednakost $\|x^*\| = \|x\|$, za svaki $x \in \mathcal{A}$. Zaista, $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\| \, \|x\|$, što daje $\|x\| \leq \|x^*\|$. Koristeći $x^{**} = x$ analogno slijedi $\|x^*\| \leq \|x\|$.

Definirajmo za kraj prikladna preslikavanja:

Definicija 1.3.4. ***Homomorfizam*** *Banachovih algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je ograničen linearan operator $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ koji čuva operaciju množenja:*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y), \ \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ $*$-algebre, ***$*$-homomorfizam*** *od $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je homomorfizam Banachovih algebri koji komutira s involucijom:*

$$\varphi(x^*) = \varphi(x)^*, \ \forall x \in \mathcal{A}.$$

Poglavlje 2

Haarova mjera

Kao što je najavljeno u uvodnom dijelu, cilj ovog poglavlja je - nakon izlaganja o topološkim i posebice lokalno kompaktnim grupama - dokazati egzistenciju lijeve Haarove mjere na proizvoljnoj lokalno kompaktnoj grupi.

2.1 Lokalno kompaktne grupe

Započinjemo s definicijom općenite topološke grupe. Ona je više od onog što se nalazi u njezinom nazivu: naime, da bi objekt bio topološka grupa, nije nam dovoljno da je istovremeno i topološki prostor i grupa, već zahtijevamo da se te dvije strukture nekako slažu.

Definicija 2.1.1. ***Topološka grupa*** *G je uređena trojka $(G, \mathcal{T}, \cdot)$, gdje su $(G, \mathcal{T})$ topološki prostor i $(G, \cdot)$ grupa takvi da su grupovne operacije $(x, y) \mapsto xy$ i $x \mapsto x^{-1}$ neprekidne s obzirom na topologiju $\mathcal{T}$.*

Kako je $x \mapsto x^{-1}$ preslikavanje iz G u G, jasno je što znači da je ono neprekidno. S druge strane, množenje $(x, y) \mapsto xy$ je preslikavanje $G \times G \to G$, stoga nije naodmet podsjetiti se opisa produktne topologije. Znamo da je ona, u ovom slučaju, generirana skupom:

$$\left\{\Pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) \,|\, U, V \text{ otvoreni u } G\right\} = \{U \times V \,|\, U, V \text{ otvoreni u } G\}.$$

Pokažimo sada sljedeću propoziciju:

Propozicija 2.1.2. *Ako su x_0, y_0 fiksni elementi topološke grupe G, tada su preslikavanja $x \mapsto xy_0$ i $y \mapsto x_0y$ neprekidne bijekcije.*

Dokaz. Primijetimo, preslikavanje $x \mapsto xy_0$ je kompozicija preslikavanja $x \mapsto (x, y_0)$ i $(x, y) \mapsto xy$. U preliminarnim sadržajima (v. str. 6.) pokazano je da je prvo preslikavanje neprekidno, dok je potonje neprekidno prema definiciji topološke grupe. Tada je neprekidna i njihova kompozicija $x \mapsto xy_0$. Inverz preslikavanja $x \mapsto xy_0$ je očito $x \mapsto xy_0^{-1}$, stoga je bijekcija. Tvrdnja za $y \mapsto x_0y$ slijedi analogno. □

Definicija 2.1.3. *Za $A, B \subseteq G$ definiramo skupove:*

$$AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\} \ \text{ i } \ A^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in A\}.$$

Umjesto $A\{x\}$ i $\{x\}A$ zapisivat ćemo kraće Ax i xA. Također, razlikujemo skupove A^2 i AA, jer A^2 sadrži samo "kvadrate" elemenata iz A, dok AA sadrži i umnoške dvaju različitih elemenata iz A. Ukoliko je $A^{-1} = A$, reći ćemo da je skup A **simetričan**.

Napomena 2.1.4. *Čini se da se definirane operacije na $\mathcal{P}(G)$ ponašaju "grupovno", što je gotovo točno. Naime, lako se vidi da se općenito $A^{-1}A$ i AA^{-1} ne podudaraju s $E := \{1\}$, gdje je 1 neutralni element grupe G. Ipak, očito vrijede neke "algebarski intuitivne" te "računski korisne" relacije:*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \ (AB)C = A(BC), \ AE = EA = A.$$

Posebno, imamo:

$$(Ax)^{-1} = x^{-1}A^{-1}, \ (xA)^{-1} = A^{-1}x^{-1}, \ (Ax)y = A(xy), \ y(xA) = (yx)A.$$

Napomena 2.1.5. *Vrijedi $A \cap B = \emptyset$ ako i samo ako $1 \notin A^{-1}B$.*
Zaista, presjek od A i B je prazan ako i samo ako za svaki $x \in A$ te za svaki $y \in B$ vrijedi $x \neq y$, tj. $x^{-1}y \neq 1$, što upravo znači da $1 \notin A^{-1}B$. Posebno, vrijedi:

$$1 \notin AB \Leftrightarrow A^{-1} \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A^{-1} \cap B)^{-1} = B^{-1} \cap A = \emptyset \Leftrightarrow 1 \notin BA.$$

Osnovna svojstva topoloških grupa sabrana su u sljedećoj propoziciji:

Propozicija 2.1.6. *Neka je G topološka grupa.*

(i) Topologija od G je invarijantna s obzirom na translaciju i inverziju, tj. ako je U otvoren, tada su za svaki $x \in G$ otvoreni lijevi translat xU, desni translat Ux te inverz U^{-1}. Štoviše, otvoreni su AU te UA, gdje je A proizvoljan podskup od G.

(ii) Za svaku okolinu U od 1 postoji otvorena simetrična okolina V od 1 t.d. $VV \subseteq U$.

(iii) Ako je H podgrupa od G, tada je i $\mathrm{Cl}\, H$ podgrupa od G.

(iv) Svaka otvorena podgrupa od G je zatvorena.

(v) *Ako su A i B kompaktni u G, tada je kompaktan i AB.*

Dokaz. (i) Prema Propoziciji 2.1.2 funkcija $f(y) = x^{-1}y$, $f : G \to G$ je neprekidna bijekcija. Tada je $xU = f^{-1}(U)$ otvoren. Analogno se pokaže da je Ux otvoren. Slično, $U^{-1} = g^{-1}(U)$, gdje je $g(x) = x^{-1}$ neprekidna bijekcija na G; dakle U^{-1} je otvoren. Primijetimo da je $AU = \cup_{x\in A} xA$, pa je i on otvoren; dakako, analogno slijedi otvorenost skupa UA.

(ii) Neka je $f(x, y) = xy$. Primijetimo da je tada $f(A \times B) = AB$, $A, B \subseteq G$. Jer je f neprekidna i $f(1, 1) = 1$, za svaku okolinu U od 1 u G postoji okolina W od $(1, 1)$ u $G \times G$ t.d. $f(W) \subseteq U$. Prema definiciji okoline i opisu otvorenog skupa u produktnoj topologiji znamo da:

$$(1, 1) \in \operatorname{Int} W = \bigcup_{j\in J} W_{1j} \times W_{2j},\ \ W_{1j}, W_{2j} \text{ otvoreni u } G,$$

stoga postoji $j \in J$ t.d. $1 \in W_{1j}$ i $1 \in W_{2j}$. Tada se 1 nalazi u njihovim inverzima i konačno $1 \in V{:=}W_{1j} \cap W_{2j} \cap W_{1j}^{-1} \cap W_{2j}^{-1}$. V je razvidno simetrična, otvorena okolina od 1 te vrijedi:

$$VV = f(V \times V) \subseteq f(W_{1j} \times W_{2j}) \subseteq f(\operatorname{Int} W) \subseteq f(W) \subseteq U.$$

(iii) Prema Propoziciji 1.1.6 za $x, y \in \operatorname{Cl} H$ postoje hipernizovi $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ i $(y_\beta)_{\beta\in B}$ u H t.d. $x_\alpha \to x$ i $y_\beta \to y$.
Pokažimo da $(x_\alpha, y_\beta) \to (x, y)$. Naime, radi se o konvergenciji u $G \times G$ s usmjerenim skupom $(A \times B, \preccurlyeq_{A\times B})$, gdje je $(\alpha_1,\beta_1) \preccurlyeq_{A\times B} (\alpha_2,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \preccurlyeq_A \alpha_2$ i $\beta_1 \preccurlyeq_B \beta_2$. Neka je U okolina od (x, y); iz opisa produktne topologije slijedi da postoje U', V' otvoreni u G t.d. $x \in U'$ i $y \in V'$. Zbog $x_\alpha \to x$ i $y_\beta \to y$ postoje $\alpha_0 \in A$ i $\beta_0 \in B$ takvi da vrijedi:

$$(\alpha_0,\beta_0) \preccurlyeq_{A\times B} (\alpha,\beta) \Rightarrow \alpha_0 \preccurlyeq_A \alpha \text{ i } \beta_0 \preccurlyeq_B \beta \Rightarrow x_\alpha \in U' \text{ i } y_\beta \in V' \Rightarrow (x_\alpha, y_\beta) \in U'{\times}V' \subseteq U.$$

Dakle, $(x_\alpha, y_\beta) \to (x, y)$.
Sada, prema Propoziciji 1.1.7, neprekidne funkcije $(x, y) \mapsto xy$ i $x \mapsto x^{-1}$ čuvaju konvergenciju hipernizova, stoga $x_\alpha y_\beta \to xy$ i $x_\alpha^{-1} \mapsto x^{-1}$. Jer je H grupa, ovi hipernizovi su u H, stoga, ponovno zbog Propozicije 1.1.6, $xy, x^{-1} \in \operatorname{Cl} H$. Dakle, $\operatorname{Cl} H$ je podgrupa od G.

(iv) Primijetimo, jer svi lijevi translati podgrupe H pokrivaju cijeli G, vrijedi $x \notin H$ ako i samo ako $x \in yH$ za neki $y \notin H$, odnosno:

$$G \setminus H = \bigcup_{y\in G\setminus H} yH.$$

Ako je H otvoren, tada su, prema (i) dijelu, otvoreni svi yH, pa iz gornje jednakosti slijedi da je $G\setminus H$ otvoren, tj. H je zatvoren.

(v) Ako su A i B kompaktni, tada je $A \times B$ kompaktan u $G \times G$, što slijedi iz Tikhonovljevog teorema (1.1.3). Kako je AB slika od $A \times B$ s obzirom na neprekidnu funkciju $(x, y) \mapsto xy$, AB je također kompaktan.

$\square$

Definicija 2.1.7. *Neka je H podgrupa topološke grupe G, G/H pripadni kvocijentni skup lijevih klasa te $q : G \to G/H$ kanonsko kvocijentno preslikavanje $x \mapsto xH$.* ***Kvocijentnu topologiju*** *na G/H čini skup svih $U \subseteq G/H$ za koje je $q^{-1}(U)$ otvoreno u G.*

Napomena 2.1.8. *(i) Familija $\{U \subseteq G/H \,|\, q^{-1}(U) \text{ otvoren u } G\}$ čini topologiju na G/H jer praslika čuva sve skupovne operacije.*

(ii) Kanonsko kvocijentno preslikavanje $q : G \to G/H$ je neprekidno, što slijedi direktno iz njezine definicije.

(iii) q je otvoreno preslikavanje, odnosno, ako je U otvoren u G, onda je $q(U)$ otvoren u G/H. Zaista, za U otvoren u G imamo:

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(U)) &= \{x \in G \,|\, q(x) \in q(U)\} = \{x \in G \,|\, xH = yH, y \in U\} \\ &= \{x \in G \,|\, x \in yHH^{-1} = yH, y \in U\} = UH. \end{aligned}$$

Iz Propozicije 2.1.6 slijedi da je UH, tj. $q^{-1}(q(U))$ otvoren u G; dakle $q(U)$ je otvoren u G/H.

Propozicija 2.1.9. *Neka je H podgrupa topološke grupe G.*

(i) Ako je H zatvorena podgrupa, topologija na G/H je Hausdorffova.

(ii) Ako je topologija na G lokalno kompaktna, topologija na G/H je također lokalno kompaktna.

(iii) Ako je H normalna podgrupa, G/H je topološka grupa.

Dokaz. (i) Neka su xH i yH dvije različite točke u G/H. Slično kao u prijašnjim dokazima vidimo da je $f(z) = x^{-1}zy$, $f : G \to G$ neprekidna funkcija. Kako je $xHy^{-1} = f^{-1}(H)$, xHy^{-1} je zatvoren, jer je H zatvorena. Relacija $xH \neq yH$ vrijedi ako i samo ako $x^{-1}y \notin H$, tj., $y \notin xH$ i $1 \notin xHy^{-1}$ (relacija $\in$ čuva množenje slijeva i zdesna).

Tada je $G \setminus xHy^{-1}$ otvoren i sadrži 1, pa postoji okolina U' od 1 t.d. $U' \cap xHy^{-1} = \emptyset$. Prema Propoziciji 2.1.6(b) postoji U otvorena simetrična okolina od 1 t.d. $UU \subseteq U'$, pa je $UU \cap xHy^{-1} = \emptyset$. Jer je q otvoreno preslikavanje i $1 \in U$, vidimo da su $q(Ux) = UxH$ i $q(Uy) = UyH$ otvorene okoline od, respektivno, xH i yH u prostoru G/H; preostalo je, dakle, pokazati $UxH \cap UyH = \emptyset$.

Primjenjujući Napomenu 2.1.4 i Napomenu 2.1.5, $U = U^{-1}$ te jednakosti $HH = H$ i $H = H^{-1}$ koje vrijede jer je H podgrupa (posebno, $1 \in H$), imamo:

$$\begin{aligned} UU \cap xHy^{-1} = \emptyset &\Leftrightarrow 1 \notin (UU)^{-1}xHy^{-1} = U^{-1}(UxHy^{-1}) \\ &\Leftrightarrow 1 \notin (UxHH^{-1}y^{-1})U^{-1} = UxH(UyH)^{-1} \\ &\Leftrightarrow UxH \cap UyH = \emptyset. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je G/H Hausdorffov topološki prostor.

(ii) Neka je K kompaktna okolina od 1 u G, tj. $1 \in \operatorname{Int} K$. Iz Propozicije 2.1.6(e) znamo da je Kx kompaktan, dok $1 \in \operatorname{Int} K \Rightarrow x \in (\operatorname{Int} K)x \subseteq \operatorname{Int}(Kx)$; dakle, Kx je kompaktna okolina od x. Budući da je q neprekidna, $q(Kx) = KxH$ je kompaktan u G/H, dok $q(x) = xH \in \operatorname{Int}(Kx)H \subseteq \operatorname{Int}(KxH)$, stoga je KxH kompaktna okolina od xH. Dakle, G/H je lokalno kompaktan topološki prostor. (Naime, općenito vrijedi $(\operatorname{Int} A)B \subseteq \operatorname{Int}(AB)$, jer je $(\operatorname{Int} A)B$ otvoren i $(\operatorname{Int} A)B \subseteq AB$.)

(iii) Poznato je da kvocijentni prostor G/H zajedno s operacijom množenja $q(x)q(y)=q(xy)$ (inverz $q(x) = q(x^{-1})$), ukoliko je H normalna podgrupa od G, čini grupu. Da bi grupa bila topološka, treba pokazati neprekidnost množenja i invertiranja.
Neka je U okolina od $q(xy) = F((q(x), q(y))$ u G/H, gdje F označava množenje na G/H. Tada je $q^{-1}(U)$ okolina od xy u G. Kako je $(x, y) \mapsto xy$ neprekidno, slično kao u dokazu Propozicije 2.1.6(ii), znamo da postoje otvorene okoline V od x i W od y, u G, takve da je $VW \subseteq q^{-1}(U)$. Ponovno, jer je q otvoreno preslikavanje, $q(V)$ je otvorena okolina od $q(x)$, a $q(W)$ je otvorena okolina od $q(y)$, tj. $q(V) \times q(W)$ je otvorena okolina od $(q(x), q(y))$ u prostoru G/H. Također, vrijedi:

$$F(q(V) \times q(W)) = q(V)q(W) = q(VW) \subseteq q(q^{-1}(U)) \subseteq U.$$

Dakle, množenje na G/H je neprekidno, a slično - nešto lakše, pokaže se da je invertiranje također neprekidno na G/H. Ukratko, za okolinu U od $q(x)^{-1} = q(x^{-1})$ u G/H, postoji otvorena okolina V od x u G t.d. $V^{-1} \subseteq q^{-1}(U)$, odnosno otvorena okolina $q(V)$ od $q(x)$ u G/H, t.d. $q(V)^{-1} = q(V^{-1}) \subseteq U$. Konačno, zaključujemo da je G/H topološka grupa.

□

Korolar 2.1.10. *Ako je G topološka grupa, onda je* $\operatorname{Cl}\{1\}$ *zatvorena normalna podgrupa od G, a $G/$*$\operatorname{Cl}\{1\}$ *Hausdorffova topološka grupa.*

Dokaz. Budući da svaka podgrupa sadrži 1, svaka zatvorena podgrupa mora biti nadskup od $\{1\}$, a kako je prema Propoziciji 2.1.6(iii) $\operatorname{Cl}\{1\}$ podgrupa, upravo je $\operatorname{Cl}\{1\}$ najmanja zatvorena podgrupa od G.

Pokažimo da je $\mathrm{Cl}\{1\}$ normalna u G. Konjugati podgrupe su podgrupe, a iz dokaza u Propoziciji 2.1.6(i) jasno je kako su (lijeve i desne) translacije zatvorenog skupa također zatvorene; dakle, $x\,\mathrm{Cl}\{1\}x^{-1}$ je zatvorena podgrupa od G, za svaki $x \in G$. Zbog minimalnosti je tada $\mathrm{Cl}\{1\} \subseteq x\,\mathrm{Cl}\{1\}x^{-1}$ za svaki $x \in G$, odnosno $\mathrm{Cl}\{1\} \subseteq G\,\mathrm{Cl}\{1\}G^{-1}$. Međutim, to je očito ekvivalentno s $G\,\mathrm{Cl}\{1\}G^{-1} = G^{-1}\,\mathrm{Cl}\{1\}G \subseteq \mathrm{Cl}\{1\}$. Dakle, $\mathrm{Cl}\{1\}$ je normalna (i zatvorena) podgrupa, pa direktno iz Propozicije 2.1.9(i)(iii) slijedi da je $G/\,\mathrm{Cl}\{1\}$ Hausdorffova topološka grupa. □

Razmotrimo sljedeća dva slučaja: ako G ima T_1 topologiju, znamo da je $\{1\}$ zatvoren, tj. $\mathrm{Cl}\{1\} = \{1\}$, zbog čega iz prethodnog korolara slijedi da je $G/\{1\}$ Hausdorffova topološka grupa. Preslikavanje $x \mapsto x\{1\}$, $G \mapsto G/\{1\}$ evidentno je izomorfizam grupa i homeomorfizam topoloških prostora, stoga je i G Hausdorffova topološka grupa. Drugim riječima, topološka grupa je T_1 ako i samo ako je T_2 (Hausdorffova).

Ukoliko G nema T_1 topologiju, $\{1\} \subsetneq \mathrm{Cl}\{1\}$, G nije Hausdorffova topološka grupa, no prema prethodnom korolaru, njoj "bliska" $G/\,\mathrm{Cl}\{1\}$ je Hausdorffova topološka grupa.

Odsad nadalje radit ćemo s pretpostavkom da je topologija grupe G lokalno kompaktna i Hausdorffova - pod pojmom **lokalno kompaktne grupe** podrazumijevat ćemo da je topologija i Hausdorffova. Vidimo da prilikom susreta s topološkom grupom lokalno kompaktne, ali ne i T_1 topologije možemo raditi s bliskom joj grupom $G/\,\mathrm{Cl}\{1\}$ koja jest LKHG.

Donekle slično, kao što je svaka lokalno kompaktna grupa Hausdorffova ili "skoro" Hausdorffova, tako je i svaka lokalno kompaktna grupa σ-kompaktna ili je pak sastavljena od međusobno nepovezanih kopija σ-kompaktne lokalno kompaktne grupe. Preciznije, a dokaz te tvrdnje može se pronaći u [5, str. 37.], svaka lokalno kompaktna grupa G ima podgrupu G_0 koja je otvorena, zatvorena i σ-kompaktna. Uz to, G je međusobno disjunktna unija (npr. lijevih) klasa grupe G_0, koje su, dakle, sve otvorene, zatvorene i σ-kompaktne. Zbog toga, ukoliko je G povezana, ta unija mora biti jednočlana, pa je u tom slučaju $G = G_0$ σ-kompaktna.

Dakle, ako G nije σ-kompaktna, možemo raditi s G_0 koja jest. Imajući to na umu, pod pojmom lokalno kompaktne grupe podrazumijevat ćemo i σ-kompaktnost. U protivnom ćemo naglasiti da LKHG nije nužno σ-kompaktna.

Objedinjeno iskazano: ako je G općenita lokalno kompaktna grupa, $(G/\,\mathrm{Cl}\{1\})_0$ je lokalno kompaktna, Hausdorffova i σ-kompaktna topološka grupa.

Sljedeća definicija koju ćemo navesti ima smisla za sve funkcije f čija je domena topološka grupa G, međutim, pod pojmom funkcije na G načelno pretpostavljamo da se radi o funkciji $f : G \to \mathbb{R}$. Dakako, prilikom razmatranja neprekidnosti te kasnije integrabilnosti (i izmjerivosti) funkcije f, podrazumijevat ćemo da na $\mathbb{R}$ radimo s klasičnom (Euklidskom) topologijom i Borelovom σ-algebrom, odnosno da je f (najčešće) neprekidna i Borelova funkcija.

Definicija 2.1.11. *Neka je f funkcija čija je domena topološka grupa G i $y \in G$. Tada definiramo **lijevu** $L_y f$ i **desnu** $R_y F$ **translaciju** funkcije f:*

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x), \quad R_y f(x) = f(xy).$$

Napomena 2.1.12. *Vrijedi: $L_{yz}f(x) = f((yz)^{-1}x) = f(z^{-1}(y^{-1}x)) = L_z f(y^{-1}x) = L_y L_z f(x)$. Slično, $R_{yz}f = R_y R_z f$. L_y i R_y su zapravo linearni operatori na vektorskom prostoru S funkcija $f : G \to Y$, gdje je Y neki vektorski prostor, pa smo shodno tome pokazali da su $y \mapsto L_y$ i $y \mapsto R_y$ homomorfizmi grupa G i $L(S)$, gdje je $L(S)$ prostor linearnih operatora na S.*

Definicija 2.1.13. *Kažemo da je $f : G \to \mathbb{R}$ **lijevo (desno) uniformno neprekidna** ako*

$$y \to 1 \Rightarrow \|L_y f - f\|_\infty \to 0, \quad (y \to 1 \Rightarrow \|R_y f - f\|_\infty \to 0). \tag{2.1}$$

Konvergencija u 1 može djelovati zbunjujuće, zacijelo zbog toga što su klasične algebarske strukture s obzirom na koja se izučavaju topološka svojstva komutativne, pa je 0 neutralni element. Treba imati na umu da je 1 neutralni element grupe G, stoga za "lijepu" f na G ima smisla očekivati da je u nekom smislu $L_y f \approx L_1 f = f$ kada $y \approx 1$.

Propozicija 2.1.14. *Ako je funkcija $f \in C_c(G)$, onda je f lijevo i desno uniformno neprekidna.*

Dokaz. Pokazujemo da je f desno uniformno neprekidna, lijeva varijanta slijedi analogno. Imajući u vidu klasičnu topologiju na $\mathbb{R}$ vrijedi:

$$(y \to 1 \Rightarrow \|R_y f - f\|_\infty \to 0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists V \text{ ok. od 1 t.d. } y \in V \Rightarrow \|R_y f - f\|_\infty < \varepsilon). \tag{2.2}$$

Također, f je neprekidna u $x \in G$ ako i samo ako:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U' \text{ okolina od } x \text{ t.d. } z \in U' \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon,$$

što je, zbog $y = x^{-1}z$ pa $z \in U' \Leftrightarrow y \in x^{-1}U' =: U$, U okolina od 1, ekvivalentno s:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U \text{ okolina od 1 t.d. } y \in U \Rightarrow |f(x) - f(xy)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i $K = \operatorname{supp} f$. Prema (2.3), za svaki $x \in K$ postoji okolina U_x od 1 t.d. $y \in U_x \Rightarrow |f(x) - f(xy)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Iz Propozicije 2.1.6(ii) slijedi da za svaki $x \in K$ postoji otvorena simetrična okolina V_x od 1 t.d. $V_x V_x \subseteq U_x$. Tada je $\{xV_x \mid x \in K\}$ otvoreni pokrivač kompaktnog skupa K, zbog čega postoje $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ t.d $K \subseteq \cup_{i=1}^n x_i V_{x_i}$. Definiramo $V = \cap_{i=1} n V_{x_i}$. V je otvorena okolina od 1; kako bismo pokazali da zadovoljava (2.2), uzimamo $y \in V$ i razlikujemo tri slučaja:

1. $x \in K$. Tada postoji $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ t.d. $x \in x_j V_{x_j}$ i vrijedi:

   - $xy = x_j(x_j^{-1}x)y \in x_j V_{x_j} y \subseteq x_j V_{x_j} V_{x_j} \subseteq x_j U_{x_j}$, dakle $x_j^{-1}xy \in U_{x_j}$, stoga $|f(x_j) - f(xy)| = |f(x_j) - f(x_j(x_j^{-1}xy))| < \frac{\varepsilon}{2}$;
   - $x_j^{-1}x \in V_{x_j}\{1\} \subseteq V_{x_j} V_{x_j} \subseteq U_{x_j}$, stoga $|f(x_j) - f(x)| = |f(x_j) - f(x_j(x_j^{-1}x))| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Zbrajanjem nejednakosti dobivamo željeno; za $y \in V$:

$$|f(xy) - f(x)| \leq |f(xy) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.4}$$

2. $xy \in K$. Slično kao u 1. slučaju, postoji $x_j \in K$ t.d. $x_j^{-1}xy \in U_{x_j}$ i $x_j^{-1}x \in U_{x_j}$. Zato za $y \in V$ vrijedi (2.4).

3. $x \notin K$ i $xy \notin K$. Onda je $|f(xy) - f(x)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.

Konačno, ako je $y \in V$, tada je $|R_y f(x) - f(x)| < \varepsilon$, za sve $x \in G$, zbog čega je zadovoljeno (2.2). Dakle, f je lijevo (i desno) uniformno neprekidna.

□

2.2 Haarova mjera

Neka je G lokalno kompaktna grupa. Kako je G opskrbljena topologijom, također ima pripadnu Borelovu σ-algebru, skup Borelovih mjera te njezin značajni podskup: skup Radonovih mjera. One mjere, poput Lebesguove, koje su motivirale razvoj pojma apstraktne mjere, osim što su Radonove, invarijantne su s obzirom na lijeve i desne translacije. Ukoliko si dopustimo geometrijsku intuiciju, "micanje" skupa naprosto ne bi trebalo promijeniti njegovu "veličinu", odnosno mjeru! Stoga je, iako nije definitorno svojstvo mjere (ni općenito ne može biti, jer translacija pretpostavlja postojanje algebarske strukture), prirodno željeti od mjere da bude invarijantna s obzirom na lijeve i desne translacije. Mjere koje ispunjuju tu želju, kao što smo spomenuli u uvodu, zovemo Haarove mjere, pa hajdemo ih prvo točno definirati:

Definicija 2.2.1. ***Lijeva Haarova mjera*** *na G je Radonova mjera μ na G koja je različita od* 0 *i za koju vrijedi $\mu(xB) = \mu(B)$ za svaki Borelov skup B na G i svaki x iz G.*
Desna Haarova mjera *na G je Radonova mjera μ na G koja je različita od* 0 *i za koju vrijedi $\mu(Bx) = \mu(B)$ za svaki Borelov skup B na G i svaki x iz G.*

Lijevu Haarovu mjeru označavat ćemo katkada s LHM, a desnu s DHM. Očekivane veze LHM i DHM te Haarovih mjera i translacija definiranih u prethodnom odjeljku nalazimo u idućoj propoziciji, no prije toga jedna kratka napomena:

Napomena 2.2.2. *Definiramo* $C_c^+(G) := \{f \in C_c(G) \mid f \geq 0, f \neq 0\}$.
Imajmo na umu da za $f \in C_c(G)$, $f \neq 0$, *postoje funkcije* $f^+ := \max\{f, 0\}$ *i* $f^- := \max\{-f, 0\}$ *koje su obje iz* $C_c^+(G)$ *te* $f = f^+ - f^-$. *Posebno,* $C_c(G)$ *je linearno proširenje od* $C_c^+(G)$.

Propozicija 2.2.3. *Neka je* μ *Radonova mjera na LKH grupi* G *i* $\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$.

(i) μ *je LHM ako i samo ako* $\tilde{\mu}$ *je RHM.*

(ii) μ *je LHM ako i samo ako je* $\int_G L_y f\, d\mu = \int_G f\, d\mu$ *za svaki* $f \in C_c^+(G)$ *i za svaki* $y \in G$.

Dokaz. (i) Uzmimo $B \in \mathcal{B}(G)$ i $x \in G$. Ako je μ LHM, $\tilde{\mu}(Bx) = \mu(x^{-1}B^{-1}) = \mu(B^{-1}) = \tilde{\mu}(B)$, pa je $\tilde{\mu}$ RHM. Obrat slijedi analogno.

(ii) Za $y \in G$ proizvoljan i fiksan definiramo mjeru $\mu_y(B) := \mu(yB)$, pa vrijedi:

$$\int_G L_y f\, d\mu = \int_G f(y^{-1}x)\, d\mu(x) \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} z = y^{-1}x,\ G \to G \\ d\mu(x) = d\mu(yz) = d\mu_y(z) \end{bmatrix} = \int_G f\, d\mu_y. \tag{2.5}$$

Pretpostavimo da je μ LHM, odnosno da je $\mu_y = \mu$. Znamo da je $C_c(G) \subseteq L^1(\mu)$ jer je μ Radonova mjera (v. [4, str. 217.]), stoga su sve funkcije iz $C_c^+(G)$ integrabilne. Tada je iz definicije integrala proizvoljne funkcije f iz $C_c^+(G)$ jasno kako je dovoljno pokazati jednakost $\int L_y f\, d\mu = \int f\, d\mu$ za $f = \chi_B$ za $B \in \mathcal{B}(G)$ proizvoljan. Naime, onda će zbog linearnosti integriranja i translacije vrijediti jednakost integrala za jednostavne funkcije, a uzimanjem supremuma, integralna jednakost će vrijediti za proizvoljnu $f \in C_c^+(G)$. Dakle, računamo:

$$\begin{aligned}\int_G L_y \chi_B\, d\mu &= \int_G \chi_B(y^{-1}x)\, d\mu(x) = \int_G \chi_{yB}(x)\, d\mu(x) = \mu(yB) = \mu_y(B) \\ &= \mu(B) = \int_G \chi_B d\mu.\end{aligned}$$

Obratno, pretpostavimo integralnu jednakost. Jer je prema Napomeni 2.2.2 $C_c(G)$ linearno proširenje od $C_c^+(G)$, jednakost $\int L_y f\, d\mu = \int f\, d\mu$ vrijedi za sve $f \in C_c(G)$. Odnosno, prema (2.5), jednakost $\int f\, d\mu_y = \int f\, d\mu$ vrijedi za sve $f \in C_c(G)$, zbog čega iz Korolara 1.2.4 direktno slijedi $\mu_y = \mu$; $y \in G$ je bio proizvoljan, pa je μ lijeva Haarova mjera.

□

Napomena 2.2.4. *Objašnjenje* $(*)$ *iz prethodnog dokaza. Vrlo je intuitivno provoditi metodu supstitucije prilikom općenitije integracije onako kako se to čini, mutatis mutandis, s Lebesgueovim i Riemannovim integralima. U [11, str. 50.] nalazi se rezultat koji opravdava intuiciju i omogućuje željenu supstituciju. Kasnije se više nećemo pozivati na ovaj rezultat.*

Uvođenjem sljedeće veličine - stanovite proporcije dviju funkcija kompaktnog nosača, u smislu da predstavlja veličinu aproksimativnog "pokrivanja" jedne funkcije linearnom kombinacijom lijevih translata druge funkcije, približavamo se dokazu egzistencije lijeve Haarove mjere. "Pokrivanje" funkcije f funkcijom g, gdje su $f, g \in C_c^+(G)$, formalno znači $f(x) \leq g(x)$, za svaki $x \in G$, što ćemo označavati jednostavno s $f \leq g$.

Definicija 2.2.5. *Za $f, \varphi \in C_c^+(G)$ definiramo:*

$$(f : \varphi) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \,\middle|\, f \leq \sum_{i=1}^{n} c_i L_{x_i}\varphi \text{ za neke } n \in N; x_i \in G, c_i > 0 \right\}. \tag{2.6}$$

Napomena 2.2.6. *Pokažimo da je prethodna definicija dobra, odnosno da je infimumni skup u (2.6) neprazan (tada infimum svakako postoji, jer, kako su $f, \varphi > 0$, infimumni skup je ograničen odozdo s 0). Također, $(f : \varphi) > 0$.*

Dokaz. Neka je $B := \{x \in G \,|\, \varphi(x) > \frac{1}{2}||\varphi||_\infty\}$. Imamo:

$$L_y\varphi(x) > \frac{1}{2}||L_y\varphi||_\infty = \frac{1}{2}||\varphi||_\infty \Leftrightarrow \varphi(y^{-1}x) > \frac{1}{2}||\varphi||_\infty \Leftrightarrow x \in yB.$$

Jasno, $\{yB \,|\, y \in G\}$ je otvoreni pokrivač od kompaktnog $\operatorname{supp} f$ (iz njegove definicije vidi se da je B otvoren - kao neprekidna praslika otvorenog skupa; tada su otvoreni i njegovi lijevi translati). Zato postoje $y_1, \ldots y_n \in G$ t.d. $\{y_iB \,|\, i = 1, \ldots n\}$ pokriva $\operatorname{supp} f$, odnosno, za proizvoljni $x \in \operatorname{supp} f$ postoji $y_j \in G$ t.d. $x \in y_jB$, pa je $L_{y_j}\varphi(x) > \frac{1}{2}||\varphi||_\infty$. Konačno:

$$\frac{1}{2}||\varphi||_\infty f(x) \leq L_{y_j}\varphi(x)||f||_\infty \Rightarrow f(x) \leq \frac{2||f||_\infty}{||\varphi||_\infty}L_{y_j}\varphi(x) \Rightarrow f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{2||f||_\infty}{||\varphi||_\infty}L_{y_i}\varphi(x), \ \forall x \in G.$$

Dakle, uz $c_i = \frac{2||f||_\infty}{||\varphi||_\infty}$, suma $\sum_{i=1}^n c_i = \frac{2N||f||_\infty}{||\varphi||_\infty}$ je u infimumnom skupu te je definicija dobra. Primijetimo, za proizvoljnu sumu $\sum_{i=1}^n c_i$ iz infimumnog skupa vrijedi:

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi((x_i)^{-1}x) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i||\varphi||_\infty, \forall x \in G \implies \frac{||f||_\infty}{||\varphi||_\infty} \leq \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Zbog toga je i $(f : \varphi) \geq \frac{||f||_\infty}{||\varphi||_\infty}$, što je pak veće od 0 za f, φ iz $C_c^+(G)$ koji su prema definiciji različiti od nul-funkcije. Sve zajedno, dobili smo da vrijedi:

$$0 < \frac{||f||_\infty}{||\varphi||_\infty} \leq (f : \varphi) \leq \frac{2N||f||_\infty}{||\varphi||_\infty}.$$

□

Definicija 2.2.7. *Neka je $f_0 \in C_c^+(G)$ fiksan. Definiramo* **normalizaciju** *s obzirom na f_0 kao:*

$$I_\varphi(f) = \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)}, \text{ za } f, \varphi \in C_c^+(G).$$

Iz prethodne napomene vidimo da je $(f_0 : \varphi) > 0$ pa je definicija normalizacije dobra. Iduća propozicija sadrži osnovna svojstva veličine $(f : \varphi)$ i normalizacije I_φ:

Propozicija 2.2.8. *Neka su $f, \varphi \in C_c^+(G)$ i $f_0 \in C_c^+(G)$ fiksan. Vrijedi:*

(i) $(f : \varphi) = (L_y f : \varphi)$, *za svaki $y \in G$, tj.* $I_\varphi(L_y f) = I_\varphi(f)$.

(ii) $(f_1 + f_2 : \varphi) \leq (f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi)$, *tj.* $I_\varphi(f_1 + f_2) \leq I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2)$.

(iii) $(cf : \varphi) = c(f : \varphi)$, *za $c > 0$, tj.* $I_\varphi(cf) = cI_\varphi(f)$, *za $c > 0$.*

(iv) $(f_1 : \varphi) \leq (f_2 : \varphi)$, *kada $f_1 \leq f_2$, tj.* $I_\varphi(f_1) \leq I_\varphi(f_2)$, *kada $f_1 \leq f_2$.*

(v) $(f : \varphi) \leq (f : \psi)(\psi : \varphi)$, *za svaki $\psi \in C_c^+(G)$.*

(vi) $(f_0 : f)^{-1} \leq I_\varphi(f) \leq (f : f_0)$.

Drugim riječima, I_φ je lijevo invarijantan, subaditivan, homogen i monoton funkcional.

Dokaz. Rutinski je, pa ga izostavljamo. □

Uz očitu tvrdnju da je $I_\varphi(f) \geq 0$, za $f \in C_c^+(G)$, kada bi još I_φ bio aditivan, a ne samo subaditivan, odmah bismo imali, uz pomoć Napomene 2.2.2, pozitivan linearan funkcional na $C_c(G)$. Međutim, I_φ je ”skoro” aditivan, na način pokazan u sljedećoj lemi:

Lema 2.2.9. *Neka su $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ i $\varepsilon > 0$. Postoji okolina V od 1 u G t.d.:*

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq V \Rightarrow I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq I_\varphi(f_1 + f_2) + \varepsilon. \tag{2.7}$$

Dokaz. Direktno iz Urysohnove leme za LKH prostore (1.1.2) slijedi da postoji $g \in C_c^+(G)$ t.d. $g \equiv 1$ na kompaktnom $\operatorname{supp}(f_1 + f_2)$. Neka je $\delta > 0$ konstanta koju ćemo odrediti (namjestiti) kasnije. Definiramo:

$$h := f_1 + f_2 + \delta g; \quad h_1 := \frac{f_1}{h}, \ h_2 := \frac{f_2}{h}, \text{ uz } h_i(x) := 0, \text{ ako je } h(x) = 0, \ i = 1, 2.$$

Očito je $h_1 + h_2 \leq 1$. Pokažimo da je $h_i \in C_c^+(G)$, $i = 1, 2$. Jasno je da je $h \in C_c^+(G)$ i $h_i \geq 0$. Zatim, $h_i(x) \neq 0 \Leftrightarrow f_i(x) \neq 0$ i $h(x) \neq 0$. Posebno, zatvoren $\operatorname{supp} h_i$ podskup je od kompaktnog $\operatorname{supp} f_i$, stoga je $\operatorname{supp} h_i$ kompaktan. Jasno je da je $h_i \geq 0$, stoga je preostalo pokazati neprekidnost.

Ako je $h_i(x) \neq 0$, tada postoji okolina od x na kojoj su f_i i h različiti od 0, pa na toj okolini točno vrijedi $h = \frac{f_i}{h}$ te je h_i neprekidna u x. Ako je $h_i(x) = 0$, jer $f_i(x) = 0$, ali $h(x) \neq 0$, postoji okolina od x na kojoj je $h \neq 0$, pa opet na toj okolini vrijedi $h_i = \frac{f_i}{h}$ i h_i je neprekidna u x. Treći slučaj, kada je $h_i(x) = 0$ jer $h(x) = 0$. Primijetimo, tada je $f_1(x) + f_2(x) + \delta g(x) = 0$, pa je $f_i(x) = 0$. Ako $x \notin \operatorname{supp} h$, tada postoji okolina od x na kojoj je $h = 0$, onda i $h_i = 0$, pa imamo neprekidnost u x. Ako $x \notin \operatorname{supp} f_i$, kao i za h, postoji okolina od x na kojoj je $f_i = 0$, pa $h_i = 0$, i h_i je neprekidna u x. Pokažimo da se ne može dogoditi da je $h(x) = 0$, $x \in \operatorname{supp} h$ i $x \in \operatorname{supp} f_i$. Naime, onda bi postojao hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ t.d. $x_\alpha \to x$ i $f_i(x_\alpha) > 0$, za sve $\alpha \in A$. Nadalje, taj hiperniz bio bi zadržan u $\operatorname{supp}(f_1 + f_2)$, stoga bi $h(x_\alpha) \geq \delta g(x_\alpha) = \delta > 0$ za sve $\alpha \in A$ i ne bi vrijedilo $h(x_\alpha) \to 0 = h(x)$; što mora vrijediti jer je h neprekidna. Imamo kontradikciju i time smo pokazali da smo iscrpili sve slučajeve te pokazali da je $h_i \in C_c^+(G)$, za $i = 1, 2$.

Pozivajući se na Propoziciju 2.1.14 postoje okoline V_i od 1 t.d.:

$$y^{-1}x \in V_i \Rightarrow |h_i(x) - h_i(y)| < \delta.$$

Odnosno, za $V = V_1 \cap V_2$ okolinu od 1 vrijedi:

$$y^{-1}x \in V \Rightarrow |h_i(x) - h_i(y)| < \delta, \ i = 1, 2.$$

Neka je $\varphi \in C_c^+(G)$ t.d. $\operatorname{supp} \varphi \subseteq V$. Uzimamo proizvoljnu sumu $\sum c_i L_{x_i}$ takvu da vrijedi $h \leq \sum c_i L_{x_i} \varphi$. Tada za $i = 1, 2$ imamo:

$$f_i(x) = h(x)h_i(x) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi(x_j^{-1}x) h_i(x) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j (\varphi \chi_V)(x_j^{-1}x) h_i(x) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi(x_j^{-1}x)(h_i(x_i) + \delta).$$

Zbog $h_1 + h_2 \leq 1$ i sjetivši se (2.6) imamo:

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leq \sum_{j=1}^{n} c_j (h_1(x_j) + \delta) + \sum_{j=1}^{n} c_j (h_2(x_j) + \delta) = \sum_{j=1}^{n} c_j (1 + 2\delta).$$

Odnosno:

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leq (1 + 2\delta) \sum_{j=1}^{n} c_j, \ \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} \text{ proizvoljna suma t.d. } h \leq \sum_{j=1}^{n} c_j L_{x_j} \varphi,$$

pa uzimanjem infimuma, uz (2.6), Propozicije 2.2.8(ii),(iii), dobivamo:

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leq (1+2\delta)(h : \varphi) = (1+2\delta)(f_1 + f_2 + \delta g : \varphi) \leq (1+2\delta)[(f_1 + f_2 : \varphi) + \delta(g : \varphi)].$$

Zatim dijelimo nejednakost s $(f_0 : \varphi) > 0$:

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq (1+2\delta)[I_\varphi(f_1+f_2) + \delta I_\varphi(g)] = I_\varphi(f_1+f_2) + [2\delta I_\varphi(f_1+f_2) + \delta(1+2\delta)I_\varphi(g)]$$

i primjenjujući Propoziciju 2.2.8(vii) na I_φ u uglatim zagradama:

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq I_\varphi(f_1 + f_2) + [2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(g : f_0)]. \tag{2.8}$$

Sada se treba vratiti na početak i sjetiti da je f_0 fiksan, V okolina od 1, $\varphi \in C_c^+(G)$ proizvoljan t.d. $\operatorname{supp} \varphi \subseteq V$; δ je "fleksibilna", pa za proizvoljan $\varepsilon > 0$ možemo odabrati $\delta > 0$ tako da vrijedi:

$$2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(g : f_0) < \varepsilon,$$

a onda zbog (2.8) vrijedi i (2.7). □

Napokon smo spremni za dokaz ključne egzistencije:

Teorem 2.2.10. *Svaka lokalno kompaktna grupa G ima lijevu Haarovu mjeru.*

Dokaz. Za $f \in C_c^+(G)$ definiramo zatvoren interval $X_f := [(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$. Neka je X Kartezijev produkt X_f-ova s pripadnom produktnom topologijom, dakle indeksi ovog produkta su funkcije f iz indeksnog skupa $C_c^+(G)$. Primijetimo da iz Propozicije 2.2.8(vi) slijedi $I_\varphi(f) \in X_f$ za sve $\varphi \in C_c^+(G)$ i za proizvoljan indeks $f \in C_c^+(G)$. Prema Tikhonovljevom teoremu (1.1.3) znamo da je X kompaktan, a i dobro je poznato da produktna topologija čuva Hausdorffovost (v. [4, str. 120.]), stoga je X Hausdorffov. Primijetimo:

$$X = \prod_{f \in C_c^+(G)} X_f = \left\{ J : C_c^+(G) \to \langle 0, +\infty \rangle \mid J(f) \in X_f = [(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)],\ \forall f \in C_c^+(G) \right\}.$$

Sada, primjerice, možemo vidjeti da je prostor pozitivnih linearnih funkcionala na $C_c^+(G)$ podskup od X; također da je $I_\varphi \in X$, za svaki $\varphi \in C_c^+(G)$.

Neka je V okolina od 1 u G; označimo:

$$K(V) := \operatorname{Cl}\{I_\varphi \mid \operatorname{supp} \varphi \subseteq V\}.$$

Pokažimo da familija svih skupova $K(V)$, gdje je V okolina od 1, zadovoljava tzv. svojstvo konačnog presjeka, tj. za proizvoljne $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_n$ okoline od 1 u G, presjek $\cap_{j=1}^n K(V_j)$ je neprazan. Naime, ako se sjetimo da je općenito $\operatorname{Cl}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$, imamo:

$$\{I_\varphi \mid \operatorname{supp} \varphi \subseteq V_1 \cap V_2\} \subseteq \{I_\varphi \mid \operatorname{supp} \varphi \subseteq V_1\} \cap \{I_\varphi \mid \operatorname{supp} \varphi \subseteq V_2\} \Rightarrow K(V_1 \cap V_2) \subseteq K(V_1) \cap K(V_2)$$

Induktivno se lako pokaže da isto vrijedi za $V_1, \dots, V_n$. Skup $K(V)$ neprazan je za svaku okolinu V od 1, a konačni presjek okolina jedinice je okolina jedinice, pa imamo:

$$\emptyset \subsetneq K(\cap_{j=1}^n V_j) \subseteq \cap_{j=1}^n K(V_j),$$

odnosno svojstvo konačno presjeka je zadovoljeno. Prema jednoj karakterizaciji kompaktnog prostora (v. [4, str. 128.]), presjek svih skupova familije na kompaktnom prostoru koja zadovolja svojstvo konačnog presjeka mora biti neprazan. Drugim riječima, u ovom slučaju, postoji $I \in X$ t.d. $I \in K(V)$ za svaku okolinu V od 1.

Pomnije interpretirajmo posljednju tvrdnju. Za proizvoljnu okolinu V od 1:

$$I \in \mathrm{Cl}_X\{I_\varphi \mid \operatorname{supp}\varphi \subseteq V\} \Leftrightarrow \forall U \text{ okolinu od } I \text{ u } X, \exists \varphi \in C_c^+(G), \operatorname{supp}\varphi \subseteq V \text{ t.d. } I_\varphi \in U.$$

Kako je X zapravo produkt intervala iz $\mathbb{R}$ indeksiran po skupu $C_c^+(G)$, s dakako klasičnom topologijom, preciznije je I označiti kao $(I(f))_{f \in C_c^+(G)}$, dok bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $U = \prod_{j=1}^n K_{X_{f_j}}(I(f_j), \varepsilon) \times \prod_{f \neq f_1, \dots f_n} X_f$ za neke $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in C_c^+(G)$ i $\epsilon > 0$, gdje $K_{X_{f_j}}$ označava otvorenu kuglu u prostoru $X_{f_j} \subseteq \mathbb{R}$. (Sjetimo se da je produktna topologija na beskonačnom indeksnom skupu generirana konačnim produktima otvorenih skupova, a pod "konačni" produkt misli se na beskonačni produkt skupova od kojih je samo njih konačno mnogo različito od prostora kojem pripadaju.) Zbog svega toga:

$$\begin{aligned} I_\varphi \in U &\Leftrightarrow (I_\varphi(f))_{f \in C_c^+(G)} \in \prod_{j=1}^n K_{X_{f_j}}(I(f_j), \varepsilon) \times \prod_{f \neq f_1, \dots f_n} X_f \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} I_\varphi(f_j) \in K_{X_{fj}}(I(f_j), \varepsilon),\ j = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow |I(f_j) - I_\varphi(f_j)| < \varepsilon,\ j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Na početku dokaza spomenuli smo da općenito vrijedi $I_\varphi(f) \in X_f$, pa to opravdava ekvivalenciju pod $(*)$ (zapravo smo intervale X_f "namjestili" kako bi to bilo zadovoljeno).
Jer je U bila proizvoljna okolina od I u X zapravo smo pokazali da za svaku okolinu V od 1 u G postoji $\varphi \in C_c^+(G)$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq V$ tako da vrijedi:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f_1, \dots, f_n \in C_c^+(G), \forall \varepsilon > 0,\ |I(f_j) - I_\varphi(f_j)| < \varepsilon,\ j = 1, \dots, n. \tag{2.9}$$

Uz pomoć toga sada ćemo dokazati da je I aditivan, homogen (dakle linearan) funkcional koji ujedno komutira s lijevim translacijama.

Počnimo s aditivnošću: neka su $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ i $\epsilon > 0$ proizvoljni. Lema 2.2.9 daje nam okolinu V od 1 t.d.:

$$\varphi \in C_c^+(G), \operatorname{supp}\varphi \subseteq V \Rightarrow |I_\varphi(f_1 + f_2) - I_\varphi(f_1) - I_\varphi(f_2)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Znamo da za taj V postoji φ, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq V$ t.d. možemo primijeniti (2.9) na funkcije $f_1, f_2, f_1 + f_2$ i $\frac{\varepsilon}{4}$ te nejednakošću trokuta dobiti:

$$|I(f_1 + f_2) - I(f_1) - I(f_2)| \leq |I(f_1 + f_2) - I_\varphi(f_1 + f_2)| + |I_\varphi(f_1 + f_2) - I_\varphi(f_1) - I_\varphi(f_2)| \\ + |I_\varphi(f_1) - I(f_1)| + |I_\varphi(f_2) - I(f_2)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti od $\varepsilon > 0$ imamo $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$.

Budući da, za razliku od aditivnosti, funkcionali normalizacije I_φ već jesu homogeni i lijevo invarijantni, primjenom (2.9) na f i $L_y f$, tj. f i cf ($c > 0$), sličnim, no jednostavnijim "ε-računom" nego kod aditivnosti, dobiva se $I(L_y f) = I(f)$ te $I(cf) = cI(f)$, $c > 0$.

Dakle, $I : C_c^+(G) \to \langle 0, +\infty\rangle$ je lijevo invarijantan i pozitivan linearan funkcional.

Proširimo I na $C_c^+(G)$. Za $f \in C_c(G)$ prema Napomeni 2.2.2 postoje $f^+, f^- \in C_c^+(G)$ t.d. $f = f^+ - f^-$ stoga ima smisla definirati $I : C_c(G) \to \mathbb{R}$ s:

$$I(f) := I(f^+) - I(f^-).$$

Moramo pokazati da je definicija dobra utoliko što vrijednost od $I(f)$ ne ovisi o izboru $g, h \in C_c^+(G)$ t.d. $f = g - h$. Zaista, ako je $f = f^+ - f^- = g - h$, tada je $f^+ + h = g + f^-$, pa:

$$I(f^+ + h) = I(g + f^-) \Rightarrow I(f^+) + I(h) = I(g) + I(f^-) \Rightarrow I(g) - I(h) = I(f^+) - I(f^-).$$

Jasno, za $f \in C_c^+(G)$, $f = f^+$, pa $I(f) \geq 0$. Dakle, I jest lijevo invarijantan pozitivan linearan funkcional na $C_c(G)$.

Konačno, prema Rieszovom teoremu (1.2.3) postoji jedinstvena Radonova mjera λ na G t.d.:

$$I(f) = \int_G f\, d\lambda, \ \forall f \in C_c(G).$$

Jer je I lijevo invarijantan, vrijedi:

$$\int_G Lyf\, d\lambda = I(L_y f) = I(f) = \int_G f\, d\lambda, \ \forall f \in C_c(G), \ \forall y \in G,$$

stoga iz Propozicije 2.2.3 slijedi da je λ lijeva Haarova mjera na G. □

Premda Rieszov teorem garantira jedinstvenost mjere za dani pozitivan linearan funkcional, primijetimo da zasad ništa ne znamo o eventualnoj jedinstvenosti funkcionala I iz prethodnog dokaza, a onda ni o jedinstvenosti LHM na G. Prije dokaza jedinstvenosti, jedna propozicija o dva bitna svojstva lijeve Haarove mjere:

Propozicija 2.2.11. *Ako je λ LHM na G, onda:*

(i) $\lambda(U) > 0$*, za svaki U otvoren i neprazan;*

(ii) $\int f\,d\lambda > 0$*, za sve* $f \in C_c^+(G)$*.*

Dokaz. (i) Pretpostavimo suprotno: neka je U otvoren i neprazan t.d. $\lambda(U)$=0. Tada je $\lambda(xU) = \lambda(U) = 0$, za sve $x \in G$. Ako je K proizvoljan kompaktan skup u G, familija $\{xU \,|\, x \in G\}$ je njegov otvoreni pokrivač, pa se K može pokriti s konačno mnogo skupova mjere 0, tj. $\lambda(K) = 0$. LHM λ je regularna iznutra, zbog čega je $\lambda(G) = \sup\{\lambda(K) \,|\, K \text{ kompaktan }\} = 0$, tj. $\lambda = 0$. Dakle, imamo kontradikciju, pa je $\lambda(U)$>0.

(ii) Za $f \in C_c^+(G)$ definiramo $U := f^{-1}(\langle \frac{1}{2}\|f\|_\infty, +\infty\rangle) = \{x \in G \,|\, f(x) > \frac{1}{2}\|f\|_\infty\}$. Jer je U otvoren i neprazan, $\lambda(U) > 0$ i imamo:

$$\int_G f\,d\lambda \overset{f\geq 0}{\geq} \int_U f\,d\lambda > \int_U \frac{1}{2}\|f\|_\infty d\lambda = \frac{1}{2}\|f\|_\infty \lambda(U) > 0.$$

□

Teorem 2.2.12. *Ako su* λ *i* μ *lijeve Haarove mjere na lokalno kompaktnoj grupi G, postoji* $c > 0$ *takav da* $\mu = c\lambda$*.*

Dokaz. Zbog Rieszovog teorema (1.2.3) za $c > 0$ ekvivalentno je:

$$\mu = c\lambda \Leftrightarrow I_\mu = I_{c\lambda} \Leftrightarrow \int_G f\,d\mu = \int_G f\,d(c\lambda) = \int_G cf\,d\lambda = c\int_G f\,d\lambda,\ \forall f \in C_c^+(G),$$

a kako je prema Propoziciji 2.2.11 $\int_G f\,d\lambda > 0$ za sve $f \in C_c^+(G)$, za pokazati da postoji $c > 0$ t.d. $\mu = c\lambda$, dovoljno je dokazati da za proizvoljne $f, g \in C_c^+(G)$ vrijedi:

$$\frac{\int_G f\,d\lambda}{\int_G f\,d\mu} = \frac{\int_G g\,d\lambda}{\int_G g\,d\mu}. \tag{2.10}$$

Uzmimo dakle $f, g \in C_c^+(G)$ i fiksirajmo simetričnu kompaktnu okolinu V_0 od 1. Definiramo skupove:

$$A = (\operatorname{supp} f)V_0 \cup V_0(\operatorname{supp} f), \quad B = (\operatorname{supp} g)V_0 \cup V_0(\operatorname{supp} g).$$

Skupovi A i B su kompaktni, što slijedi iz Propozicije 2.1.6(v). Pokažimo da je za $y \in V_0$ preslikavanje $x \mapsto f(xy) - f(yx)$ nošeno na A. Zaista:

$$x \notin A \Rightarrow xy \notin (\operatorname{supp} f)(V_0 y),\ yx \notin (yV_0)(\operatorname{supp} f) \overset{y^{-1}\in V_0}{\Rightarrow} xy, yx \notin \operatorname{supp} f \Rightarrow f(xy) - f(yx) = 0,$$

pa kontrapozicijom dobivamo traženu nošenost:

$$\{x \in G \mid f(xy) - f(yx) \neq 0\} \subseteq A \overset{A \text{ zatvoren}}{\Longrightarrow} \mathrm{Cl}\{x \in G \mid f(xy) - f(yx) \neq 0\} \subseteq A.$$

Analogno se pokaže da je za $y \in V_0$ preslikavanje $x \mapsto g(xy) - g(yx)$ nošeno na B.

Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je f uniformno neprekidna, (zbog Propozicije 2.1.14), postoje simetrične okoline jedinice $V_1 \subseteq V_0$ i $V_2 \subseteq V_0$ t.d. $\|R_y(f) - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ za $y \in V_1$ i $\|f - L_{y^{-1}} f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ za $y \in V_2$. (Naime, uniformna neprekidnost daje nam za neki ε okolinu V', međutim isto će činiti i simetrična okolina $V' \cap (V')^{-1} \cap V_0 \subseteq V'$.) Za $y \in V_f := V_1 \cap V_2$, gdje je $V_f \subseteq V_0$ također simetrična okolina od 1, imamo:

$$|f(xy)-f(yx)| \leq |f(xy)-f(x)|+|f(x)-f((y^{-1})^{-1}x)| \leq \|R_y f-f\|_\infty+\|f-L_{y^{-1}}f\|_\infty < \varepsilon, \ \forall x \in G.$$

Analogno za g dobivamo okolinu V_g, pa je $V := V_f \cap V_g \subseteq V_0$ simetrična okolina od 1 za koju vrijedi:

$$y \in V \Rightarrow |f(xy) - f(yx)| < \varepsilon, \ |g(xy) - g(yx)| < \varepsilon, \ \forall x \in G. \tag{2.11}$$

Uzmimo sada $h \in C_c^+(G)$ koja je parna ($h(x) = h(x^{-1})$ za sve $x \in G$) i nošena na V; uz Urysohnovu lemu za LKH prostore (1.1.2) nije teško pokazati egzistenciju takve funkcije. U narednom računu slobodno se koristimo Fubini-Tonellijevim teoremom (1.2.1) zbog toga što integriramo nenegativne funkcije nad kompaktnim skupovima: pozivanje na njega označavamo ovdje s FT. Sada napokon možemo računati:

$$\begin{aligned}
\int_G h(y)\,d\mu(y) \int_G f(x)\,d\lambda(x) &\overset{\text{LHM}}{=} \int_G h(y)\,d\mu(y) \int_G (L_{y^{-1}} f)(x)\,d\lambda(x) \\
&\overset{\text{FT}}{=} \int_G \int_G h(y) f(yx)\,d\lambda(x)\,d\mu(y).
\end{aligned}$$

Nadalje:

$$\begin{aligned}
\int_G h(x)\,d\lambda(x) \int_G f(y)\,d\mu(y) &\overset{\text{LHM}}{=} \int_G (L_y h)(x)\,d\lambda(x) \int_G f(y)\,d\mu(y) \\
&\overset{\text{FT}}{=} \int_G \int_G h(y^{-1}x) f(y)\,d\lambda(x)\,d\mu(y) \\
&\overset{h \text{ parna}}{=} \int_G \int_G h(x^{-1}y) f(y)\,d\lambda(x)\,d\mu(y) \\
&\overset{\text{FT}}{=} \int_G h(x^{-1}y) f(y)\,d\mu(y) \int_g d\lambda(x) \\
&\overset{\text{LHM}}{=} \int_G L_x(h(y) f(xy))\,d\mu(y) \int_G d\mu(x) \\
&\overset{\text{FT}}{=} \int_G \int_G h(y) f(xy)\,d\lambda(x)\,d\mu(y).
\end{aligned}$$

Oduzimanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_G h(x)\,d\lambda(x)\int_G f(y)\,d\mu(y)-\int_G h(y)\,d\mu(y)\int_G f(x)\,d\lambda(x)\right|\\
&=\left|\int_G\int_G h(y)[f(xy)-f(yx)]\,d\lambda(x)\,d\mu(y)\right|
\end{aligned}$$

Sada, jer je h nošena na V te je za $y \in V$ preslikavanje $x \to f(xy) - f(yx)$ nošeno na A, posljednji integral jednak je:

$$\begin{aligned}
\left|\int_A\int_V h(y)[f(xy)-f(yx)]\,d\lambda(x)\,d\mu(y)\right| &\overset{(2.11)}{\leq} \varepsilon\left|\int_A\int_V h(y)\,d\lambda(x)\,d\mu(y)\right|\\
&\overset{h\geq 0,\text{ FT}}{=} \varepsilon\int_A d\lambda(x)\int_V h(y)\,d\mu(y)\\
&= \varepsilon\lambda(A)\int_V h(y)\,d\mu(y).
\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo:

$$\left|\int_G h\,d\lambda\int_G f\,d\mu-\int_G h\,d\mu\int_G f\,d\lambda\right| \leq \varepsilon\lambda(A)\int_G h\,d\mu \;\Big/ : \int_G h\,d\mu\int_G f\,d\mu > 0$$

$$\left|\frac{\int_G h\,d\lambda}{\int_G h\,d\mu}-\frac{\int_G f\,d\lambda}{\int_G f\,d\mu}\right| \leq \frac{\varepsilon\lambda(A)}{\int_G f\,d\mu}.$$

Analogno se dobiva:

$$\left|\frac{\int_G h\,d\lambda}{\int_G h\,d\mu}-\frac{\int_G g\,d\lambda}{\int_G g\,d\mu}\right| \leq \frac{\varepsilon\lambda(B)}{\int_G g\,d\mu}.$$

Zbrajanjem posljednje dvije nejednakosti slijedi:

$$\left|\frac{\int_G f\,d\lambda}{\int_G f\,d\mu}-\frac{\int_G g\,d\lambda}{\int_G g\,d\mu}\right| \leq \varepsilon\left[\frac{\lambda(A)}{\int_G f\,d\mu}+\frac{\lambda(B)}{\int_G g\,d\mu}\right].$$

Izraz pod uglatim zagradama u posljednjoj nejednakosti je konstantan jer je okolina V_0 fiksna, pa su fiksni A i B; s druge strane ε je proizvoljno malen, stoga vrijedi željena jednakost (2.10). □

2.3 Modularna funkcija

Ako je G Abelova lokalno kompaktna grupa, svaka lijeva Haarova mjera na G evidentno je ujedno i desna Haarova mjera. Doduše, općenito to nije slučaj. Promatranje odstupanja neke LHM λ od toga da bude DHM, dakle ispitivanje odnosa $\lambda(B)$ i $\lambda(Bx)$ za općeniti Borelov skup B i $x \in G$, vodi nas da pojma modularne funkcije Δ.

Neka je $x \in G$. Promatramo desnu translaciju $\cdot x$ na Borelovoj σ-algebri na G. Ova problematika bila bi pojednostavljena kada bi promjena mjere desno-translatiranog skupa ovisila samo o translaciji, a ne i o pojedinom desno-translatiranom skupu. Jedinstvenost lijeve Haarove mjere upravo to implicira.

Naime, $\lambda_x(B) := \lambda(Bx)$ je također LHM na G, jer $\lambda_x(yB) = \lambda((yB)x) = \lambda(y(Bx)) = \lambda(Bx) = \lambda_x(B)$. Kako je $x \in G$ fiksan, iz Teorema 2.2.12 slijedi da postoji $\Delta(x) > 0$ takav da $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$. Dakle, imamo željeno svojstvo: mjera translatiranog skupa Bx dobiva se množenjem mjere od B s $\Delta(x)$, za proizvoljni Borelov skup B.

Ako je λ' početna LHM na G, onda postoji $c > 0$ takav da $\lambda' = c\lambda$. Iz toga lako slijedi $\lambda'_x = c\lambda_x$, i vrijedi:

$$\lambda_x = \Delta(x)\lambda \Rightarrow c\lambda_x = \Delta(x)(c\lambda), \text{ tj. } \lambda'_x = \Delta(x)\lambda'.$$

Zbog toga $\Delta(x)$ ne ovisi o izboru LHM λ na G. Drugim riječima, vrijednost $\Delta(x)$ ovisi samo o $x \in G$ i shodno tome dobro smo definirali **modularnu funkciju** $\Delta : G \to \langle 0, +\infty\rangle$.

U svjetlu Propozicije 2.2.3 sada očekujemo da bi se prilikom integracije desno translatirane funkcije trebala pojaviti modularna funkcija, čime se bavi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.3.1. *Modularna funkcija Δ je neprekidni homomorfizam iz G u multiplikativnu grupu $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Također, za svaku $f \in L^1(\lambda)$ vrijedi:*

$$\int_G R_y f(x)\, d\lambda(x) = \Delta(y^{-1}) \int_G f\, d\lambda(x), \ \forall y \in G \tag{2.12}$$

Dokaz. Korisno je imati pri umu vrlo jednostavnu činjenicu: iako G nije općenito Abelova, multiplikativna grupa na $\mathbb{R}_{>0}$ jest. Pokažimo prvo da je Δ homomorfizam. Neka su $x, y \in G$ i $B \in B(G)$; računamo:

$$\Delta(xy)\lambda(B) = \lambda(B(xy)) = \lambda((Bx)y) = \Delta(y)\lambda(Bx) = \Delta(y)\Delta(x)\lambda(B) = (\Delta(x)\Delta(y))\lambda(B).$$

Dakle, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ za sve $x, y \in G$, odnosno Δ je homomorfizam navedenih grupa. Prije neprekidnosti pokazat ćemo (2.12).

Neka je $f = \chi_B$, za $B \in B(G)$. Iz $xy \in B \Leftrightarrow x \in By^{-1}$ slijedi $\chi_B(xy) = \chi_{By^{-1}}(x)$, a potom:

$$\begin{aligned}\int_G R_y\chi_B(x)\, d\lambda(x) &= \int_G \chi_B(xy)\, d\lambda(x) = \int_G \chi_{By^{-1}}(x)\, d\lambda(x) = \lambda(By^{-1}) = \Delta(y^{-1})\lambda(B) \\ &= \Delta(y^{-1}) \int_G \chi_B(x)\, d\lambda(x).\end{aligned}$$

Jednakost (2.12) onda zbog linearnosti integrala vrijedi za sve jednostavne funkcije, zatim uzimanjem supremuma za sve $f \geq 0$ i $f \in L^1(\lambda)$ (sjetimo se da je f integrabilna ako i samo ako je $|f|$ integrabilna, tj. $f \in L^1(\lambda)$) te konačno, uz relaciju $f = f^+ - f^-$, za svaku $f \in L^1(\lambda)$.

Za dokaz neprekidnosti, primijetimo da iz (2.12) slijedi da za fiksnu $f \in C_c^+(G)$ vrijedi:

$$\Delta(y) = \frac{\int_G R_{y^{-1}} f \, d\lambda}{\int_G f \, d\lambda} = C \int_G R_{y^{-1}} f \, d\lambda,$$

stoga je dovoljno pokazati da je $y \mapsto \int_G R_{y^{-1}} f \, d\lambda$ neprekidno preslikavanje. Još malo jednostavnije, pokazat ćemo da je $y \mapsto \int_G R_y f \, d\lambda$ neprekidno; s obzirom da je $y \mapsto y^{-1}$ neprekidno, onda će biti neprekidno i $y \mapsto \int_G R_{y^{-1}} f \, d\lambda$.

Fiksirajmo simetričnu kompaktnu okolinu V_0 od 1. Preslikavanje $x \mapsto f(xy) - f(x)$ nošeno je na $A := (\operatorname{supp} f)V_0$, kada je $y \in V_0$. Jer je f desno uniformno neprekidna, za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji simetrična okolina $V \subseteq V_0$ od 1 takva da je $|f(xy) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\lambda(A)}$ za svaki $x \in G$, kada je $y \in V$. Jer je A kompaktan, $\lambda(A) < +\infty$. Za $y \in V$ je:

$$\left| \int_G R_y f \, d\lambda - \int_G f \, d\lambda \right| \leq \int_A |f(xy) - f(x)| \, d\lambda(x) < \frac{\varepsilon}{\lambda(A)} \lambda(A) = \varepsilon.$$

Dakle, $y \mapsto \int_G R_y f \, d\lambda$ neprekidno je u 1. Neka je $y_0 \in G$ proizvoljan. Tada je $g := R_{y_0} f \in C_c^+(G)$. Zbog toga što rezultat iz prethodnog paragrafa vrijedi za proizvoljnu funkciju iz $C_c^+(G)$, za $\varepsilon > 0$ postoji okolina V od 1 t.d. za $z \in V$:

$$\left| \int_G R_z g \, d\lambda - \int_G g \, d\lambda \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \int_G R_z (R_{y_0} f) \, d\lambda - \int_G R_{y_0} f \, d\lambda \right| = \left| \int_G R_{zy_0} f \, d\lambda - \int_G R_{y_0} f \, d\lambda \right| < \varepsilon$$

Konačno, za y iz okoline Vy_0 od y_0 je $z := yy_0^{-1} \in V$, $zy_0 = y$, pa vrijedi:

$$\left| \int_G R_y f \, d\lambda - \int_G R_{y_0} f \, d\lambda \right| < \varepsilon.$$

□

Definicija 2.3.2. *Kažemo da je grupa G* ***unimodularna*** *ako je* $\Delta_G \equiv 1$.

Dakle, ako je $\Delta_G \equiv 1$, svaka LHM na G je DHM, jer $\lambda_x = \Delta(x)\lambda = \lambda$ za sve $x \in G$. Sve Abelove grupe očito su unimodularne.

Propozicija 2.3.3. *Za kompaktnu podgrupu K od G je* $\Delta|_K \equiv 1$. *Posebno, svaka kompaktna grupa je unimodularna.*

Dokaz. Budući da je Δ neprekidni homomorfizam, $\Delta(K)$ je kompaktna podgrupa od $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Posebno, $\Delta(K)$ je ograničen u $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da postoji $y \in \Delta(K)$ koji je različit od 1. Jer je $\Delta(K)$ zapravo multiplikativna grupa, onda je $\{y^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \Delta(K)$, pa $\Delta(K)$ nije ograničen. Imamo kontradikciju, iz čega slijedi da je $\Delta|_K \equiv 1$. □

Svakoj LHM pripada jedn DHM: ako je λ LHM, definiramo $\rho(B) := \lambda(B^{-1})$ za $B \in B(G)$. ρ je DHM jer $\rho(Bx) = \lambda(x^{-1}B^{-1}) = \lambda(B^{-1}) = \rho(B)$. Očekujemo da se λ i ρ računski daju nekako povezati posredstvom Δ:

Propozicija 2.3.4. *Mjere λ i ρ su strogo ekvivalentne i $d\rho(x) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$.*

Dokaz. Pokažimo da je funkcional $f \mapsto \int_G f(x)\Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$ desno-invarijantan. Za $f \in C_c(G)$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\int_G (R_y f(x))\Delta(x^{-1})\, d\lambda(x) &= \left[\Delta(x^{-1}) = \Delta(yy^{-1}x^{-1}) = \Delta(y)\Delta((xy)^{-1}) = \Delta(y)\Delta(xy)^{-1}\right] \\ &= \Delta(y)\int_G f(xy)\Delta(xy)^{-1}\, d\lambda(x) = \Delta(y)\int_G R_y(f(x)\Delta(x)^{-1})\, d\lambda(x) \\ &\overset{(2.12)}{=} \int_G f(x)\Delta(x^{-1})\, d\lambda(x), \quad \forall y \in G.\end{aligned}$$

(Više puta koristimo $\Delta(x^{-1}) = \Delta(x)^{-1}$ što vrijedi jer je Δ homomorfizam.)
Dakle, $f \mapsto \int_G f(x)\Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$ je desno-invarijantan, očito pozitivan linearan funkcional na $C_c(G)$, stoga je njemu pripadna Radonova mjera μ, dobivena iz Rieszovog teorema (1.2.3), desna Haarova mjera. Teorem o jedinstvenosti lijeve Haarove mjere (2.2.12) ima evidentno svoju "desnu" inačicu, stoga postoji $c > 0$ t.d. $\mu = c\rho$ jer je ρ DHM na G.

Dakle, prema Rieszovom teoremu za $f \in C_c(G)$ imamo:

$$\int_G f(x)\Delta(x^{-1})\, d\lambda(x) = \int_G f(x) d\mu(x), \ \forall f \in C_c(G).$$

Primjenjujući sada Propoziciju 1.2.6 na Radonove mjere λ i μ te funkciju $\Delta(x^{-1})$ za $B \in B(G)$ dobivamo:

$$\mu(B) = \int_B \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x),$$

što uz $\mu = c\rho$ daje:

$$\int_B \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x) = (c\rho)(B) = \int_B c\, d\rho(x), \ \forall B \in B(G),$$

dakle $c\, d\rho(x) = \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$.

Preostalo je pokazati da je $c = 1$. Ako je c različito od 1, onda za $\varepsilon := |c - 1| > 0$, jer je $\Delta : G \to \langle 0, +\infty \rangle$ neprekidna u 1, postoji simetrična kompaktna okolina U od 1 na kojoj:

$$x \in U \Rightarrow x^{-1} \in U \Rightarrow |\Delta(x^{-1}) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}|c - 1|. \tag{2.13}$$

Također, zato jer je U kompaktna simetrična okolina, $\lambda(U) < +\infty$ i $\rho(U) = \lambda(U^{-1}) = \lambda(U) \geq \lambda(\operatorname{Int} U) > 0$ te nalazimo kontradikciju:

$$\begin{aligned}
&|c - 1|\,\lambda(U) = |(c - 1)\lambda(U)| = |c\rho(U) - \lambda(U)| = |\mu(U) - \lambda(U)| \\
&= \left| \int_U \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x) - \int_U d\lambda(x) \right| \leq \int_U |\Delta(x^{-1}) - 1|\, d\lambda(x) \overset{(2.13)}{<} \frac{1}{2}|c - 1|\lambda(U) \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Napokon, dobili smo $d\rho(x) = \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$. □

Napomena 2.3.5. *Primijetimo da je $d\rho(x) = \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$ ekvivalentno s:*

(i) $d\lambda(x^{-1}) = \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$,

(ii) $d\rho(x^{-1}) = \Delta(x)\, d\rho(x)$.

Naime, $\rho(B) = \lambda(B^{-1})$ za sve $B \in \mathcal{B}(G)$ znači da je $d\rho(x) = d\lambda(x^{-1})$ i $d\rho(x^{-1}) = d\lambda(x)$, iz čega direktno slijede (i) i (ii).

2.4 Primjeri

Prvi primjer koji je prvi i utoliko što je na neki način povijesno motivirao čitavi teorijski kontekst unutar kojeg se kreće ovaj rad je aditivna grupa realnih brojeva s pripadnom Lebesgueovom mjerom. Dakako, to uključuje i višedimenzionalnu grupu $(\mathbb{R}^n, +)$ s višedimenzionalnom Lebesgueovom mjerom λ. Grupa $(\mathbb{R}^n, +)$ je lokalno kompaktna topološka grupa, dok je Lebesgueova mjera λ regularna i invarijantna na translacije, pa je Haarova. Teorem o jedinstvenosti lijeve Haarove mjere potvrđuje činjenicu da su jedine Radonove mjere invarijantne s obzirom na translacije na $(\mathbb{R}^n, +)$ one koje su jednake $c\lambda$ za neki $c > 0$. Znamo da postoji Haarova mjera.

Nadalje, multiplikativna grupa realnih brojeva $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je također lokalno kompaktna, ali i topološka grupa: preslikavanja $(x, y) \mapsto xy$ i $x \mapsto \frac{1}{x}$ su neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Premda znamo da postoji (lijeva) Haarova mjera na $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, ne vidi se isprva kako je definirana. Naš Ansatz je sljedeći: radi se o mjeri $\mu = \lambda_{\frac{1}{|x|}}$, tj. $d\mu(x) = \frac{1}{|x|}\, dx$, gdje s dx skraćeno označavamo $d\lambda(x)$. Uzmimo izmjerivu $f \in C_c(\mathbb{R})$ i $y \in R$, pa računamo:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{L_y f(x)}{|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\frac{x}{y})}{|x|}\,dx = \begin{bmatrix} z = \frac{x}{y} \\ dx = y\,dz \end{bmatrix} = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)}{y|z|} y\,dz = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{f(z)}{|z|}\,dz, & y > 0; \\ \displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{f(z)}{-y|z|} y\,dz = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{f(z)}{|z|}\,dz, & y < 0. \end{cases}$$

Uz Propoziciju 2.2.3 zaključujemo da smo ovime zaista definirali (lijevu) Haarovu mjeru na $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Sljedeći bitan primjer lokalno kompaktne grupe je multiplikativna grupa na kompleksnom torusu, tj. grupa $(\mathbb{T}, \cdot)$, gdje je $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Pokažimo da je $\mathbb{T}$ LKH grupa. Preslikavanje $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$ je dobro definirana surjekcija, ali i homomorfizam grupa $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{T}, \cdot)$ (radi se o funkciji namatanja pravca na kružnicu). Primijetimo da je $\varphi(x) = e^{2\pi i x} = 1$ ako i samo ako je $x \in \mathbb{Z}$, stoga je $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{Z}$. Koristeći Prvi teorem o izomorfizmu grupa (v. [12, str. 25.]) vrijedi:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{T}.$$

S obzirom da je $\mathbb{Z}$ normalna, zatvorena podgrupa od $\mathbb{R}$ (normalnost slijedi direktno iz komutativnosti, a zatvorenost iz prebrojivosti), iz Propozicije 2.1.9 slijedi da je kvocijentni prostor $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, a onda i $\mathbb{T}$, lokalno kompaktna Hausdorffova topološka grupa.

Mjeru na $\mathbb{T}$ prenosimo s $\mathbb{R}$ također pomoću namatanja φ. Preciznije, pomoću $\varphi|_{[0,1]}$ za koju vrijedi $\operatorname{Im}\varphi|_{[0,1]} = \mathbb{T}$. Definiramo mjeru μ kao tzv. sliku mjere Lebesgueove mjere $\lambda_{[0,1]}$ s obzirom na $\varphi_{[0,1]}$, što znači:

$$\mu(B) := \lambda_{[0,1]}(\varphi|_{[0,1]}^{-1}(B)),\ B \in B(\mathbb{T}).$$

Lako slijedi da je μ dobro definirana mjera, a i da vrijedi sljedeća jednakost (v. [11, str. 50.]):

$$\int_{\mathbb{T}} g(y)\,d\mu(y) = \int_{[0,1]} g(e^{2\pi i x})\,dx,\ \ g \text{ izmjeriva na } \mathbb{T}.$$

Tehnički je malo naporno, ali može se pokazati da je mjera μ (lijeva) Haarova mjera.

Posljednji primjer je diskretna grupa. Diskretna grupa G je grupa s diskretnom topologijom, što znači da su svi podskupovi od G otvoreni, tj. topologija na G je njezin partitivni skup $\mathcal{P}(G)$. Posebno, otvoren je skup $\{1\}$ i ta činjenica je srž osebujnosti diskretne topologije i grupe. Naime, zbog toga su jedini konvergentni (hiper)nizovi konstantni (hiper)nizovi i sva preslikavanja na G su neprekidna. Zbog potonjeg je G topološka grupa. Nije teško pokazati da je $A \subseteq G$ kompaktan ako i samo ako je konačan. Dakle svaka točka x iz G

ima otvorenu i kompaktnu okolinu $\{x\}$ koja ju "izolira" od ostatka prostora. Posebno, G je lokalno kompaktna Hausdorffova topološka grupa. Posljedično posjeduje lijevu Haarovu mjeru μ. Budući da je $\{1\}$ otvoren, iz Propozicije 2.2.11 slijedi da je $\mu(\{1\}) > 0$, što vodi do:

$$\mu(\{x\}) = \mu(x\{1\}) \overset{\text{LHM}}{=} \mu(\{1\}), \ \forall x \in G,$$

dok za $A \subseteq G$ onda vrijedi:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{x\in A}\{x\}\right) = \sum_{x\in A}\mu(\{x\}) = \begin{cases} |A|\,\mu(\{1\}), & A \text{ konačan}, \\ +\infty, & A \text{ beskonačan}. \end{cases}$$

Zaključujemo da skup lijevih Haarovih mjera na diskretnoj grupi čine mjere oblika $c\nu$, gdje je ν brojeća mjera i $c > 0$.

Što se modularne funkcije tiče, sve Abelove grupe se unimodularne, pa je modularna funkcija u prva tri primjera konstantna i jednaka 1. Također, sve diskretne grupe su unimodularne jer vrijedi sljedeće:

$$\Delta(x) = \frac{\lambda_x(\{1\})}{\lambda(\{1\})} = \frac{\lambda(\{1\}x)}{\lambda(\{1\})} = \frac{\lambda(\{x\})}{\lambda(\{1\})} = \frac{\lambda(x\{1\})}{\lambda(\{1\})} = \frac{\lambda(\{1\})}{\lambda(\{1\})} = 1, \ \forall x \in G.$$

Poglavlje 3

L^p prostori i konvolucije

U preliminarnim sadržajima konstatirali smo da je prostor kompleksnih Radonovih mjera normiran prostor. U ovom poglavlju definirat ćemo konvoluciju mjera nad lokalnom kompaktnom grupom G i pokazati da uz nju prostor kompleksnih Radonovih mjera $M(G)$ postaje Banachova $*$-algebra. Štoviše, definirana konvolucija mjera može se shvatiti kao poopćenje konvolucije na L^1 prostoru što će nas dovesti do glavnog rezultata ovog poglavlja: prostor $L^1(\lambda)$, gdje je λ lijeva Haarova mjera na G, također ima strukturu Banachove $*$-algebre i može se uložiti u $M(G)$.

3.1 Algebra i konvolucija mjera

Neka je G lokalno kompaktna grupa i $M(G)$ normiran vektorski prostor kompleksnih Radonovih mjera na G.

Kako bismo definirali konvoluciju dviju Radonovih mjera μ i ν iz $M(G)$ prizvat ćemo Rieszov teorem o reprezentaciji kompleksne mjere i (1.2.13) , odnosno prvo ćemo definirati funkcional na prostoru $C_0(G)$:

$$I(\varphi) := \int_G \int_G \varphi(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

Jasno je da je I pozitivan i linearan funkcional. Jer je definicija dobra, podintegralna funkcija je integrabilna, stoga uz Fubini-Tonellijev teorem dobivamo:

$$\begin{aligned}|I(\varphi)| &= \left| \int_G \left(\int_G \varphi(xy)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \right| \overset{(1.2.11)}{\leq} \int_G \left| \int_G \varphi(xy)\, d\mu(x) \right| d|\nu|(y) \\ &\overset{(1.2.11)}{\leq} \int_G \int_G |\varphi(xy)|\, d|\mu|(x)\, d|\nu|(y) \leq \|\varphi\|_\infty \int_G d|\mu|(x) \int_G d|\nu|(y) \\ &\overset{(1.2)}{=} (\|\mu\|\, \|\nu\|)\|\varphi\|_\infty.\end{aligned}$$

Poznavajući definiciju norme funkcionala sada zaključujemo da je I ograničen pozitivan linearan funkcional na $C_0(G)$ i $\|I\| \leq \|\mu\|\,\|\nu\|$. Stoga iz spomenutog Rieszovog teorema (Teorem 1.2.13) slijedi da postoji jedinstvena mjera iz $M(G)$, označit ćemo je odmah s $\mu * \nu$, za koju vrijedi:

$$\int_G \varphi(z)\, d(\mu * \nu)(z) = \int_G \int_G \varphi(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y), \ \forall \varphi \in C_0(G); \tag{3.1}$$

također, jer je u ovom Rieszovom teoremu riječ o izometričkom izomorfizmu:

$$\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\,\|\nu\|. \tag{3.2}$$

Izraz (3.1) zapravo definira **konvoluciju mjera** μ i ν te smo upravo pokazali zašto je definicija dobra.

Propozicija 3.1.1. *Konvolucija $*$ je asocijativna operacija na $M(G)$.*

Dokaz. Uzmimo $\mu, \nu, \sigma \in M(G)$:

$$\begin{aligned}\int_G \varphi\, d(\mu * (\nu * \sigma)) &= \int_G \int_G \varphi(xy)\, d\mu(x)\, d(\nu * \sigma)(y) = \int_G \left(\int_G \varphi(x\cdot)\, d\mu(x) \right) d(\nu * \sigma)(y) \\ &= \int_G \left(\int_G \int_G \varphi(x(yz))\, d\mu(x) \right) d\nu(y) d\sigma(z) \\ &= \int_G \left(\int_G \int_G \varphi((xy)z)\, d\mu(x) d\nu(y) \right) d\sigma(z) \\ &= \int_G \int_G \varphi(yz)\, d(\mu * \nu)(y) d\sigma(z) = \int_G \varphi\, d((\mu * \nu) * \sigma), \ \forall \varphi \in C_0(G).\end{aligned}$$

□

Propozicija 3.1.2. *Konvolucija $*$ je komutativna operacija na $M(G)$ ako i samo ako je G komutativna grupa.*

Dokaz. Ako je G komutativna, za $\mu, \nu \in M(G)$ i $\varphi \in C_0(G)$ imamo:

$$\int_G \varphi\, d(\mu * \nu) = \int_G \int_G \varphi(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int_G \int_G \varphi(yx)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_G \varphi\, d(\mu * \nu).$$

Za obratnu implikaciju uzmimo Diracovu mjeru δ u $x \in G$. Prisjetimo se njezine definicije:

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in B \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{za } B \in B(G).$$

Za proizvoljan $\varphi \in C_0(G)$ računamo:

$$\int_G \varphi\, d(\delta_x * \delta_y) = \int_G \int_G \varphi(uv)\, d\delta_x(u)\, d\delta_y(v) = \varphi(xy) = \int_G \varphi\, d\delta_{xy}.$$

Dakle, jer je $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$, imamo:

$$\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x \Rightarrow \delta_{xy} = \delta_{yx} \Rightarrow xy = yx.$$

Zaključujemo da je G komutativna. □

Posljednje dvije propozicije pokazuju da je $(M(G), *)$ asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{C}$; komutativna ako i samo ako je grupa G komutativna. Drugo i treće svojstvo iz definicije asocijativne algebre (1.3.1) slijede direktno iz (3.1). $(M(G), *)$ ima multiplikativni identitet, tj. jedinicu, što je rezultat iduće propozicije:

Propozicija 3.1.3. *Asocijativna algebra $(M(G), *)$ (nad poljem $\mathbb{C}$) je unitalna s jedinicom Diracovom mjerom $\delta := \delta_1$.*

Dokaz. Neka je $\varphi \in C_0(X)$ i računamo:

$$\int_G \varphi\, d(\delta_1 * \mu) = \int_G \int_G \varphi(xy)\, d\delta_1(x)\, d\mu(y) = \int_G \varphi(y)\, d\mu(y) = \int_G \varphi\, d\mu.$$

Naravno, na isti način dobiva se $\mu * \delta_1 = \mu$, za svaki $\mu \in M(G)$. □

Nadalje, znamo da je $M(G)$ normiran prostor na kojem vrijedi nejednakost (1.4). Dakle, ako je $(M(G), \|\cdot\|)$ Banachov prostor, $(M(G), *)$ je Banachova algebra; a to stoji. Naime, prema Rieszovom teoremu o reprezentaciji kompleksne mjere (1.2.13), prostor $(M(G), \|\cdot\|)$ je izometrički izomorfan prostoru $(C_0(G)^*, \|\cdot\|)$, dakako s klasičnom normom ograničenog funkcionala. Na temelju poznatog rezultat funkcionalne analize (v. [4, str. 154.]) znamo da je prostor $C_0(G)^* = B(C_0(G), \mathbb{C})$, gdje B označava ograničene linearne operatore, Banachov zato što je $\mathbb{C}$ Banachov prostor. Kako izometrička izomorfnost dva normirana prostora čuva topološku narav, zaključujemo da je $(M(G), \|\cdot\|)$ Banachov prostor i konačno: $(M(G), *)$ je Banachova algebra. Prostor $(M(G), *)$ zovemo **algebra mjera** na G.

Definicija 3.1.4. *Na algebri mjera $(M(G), *)$ postoji **involucija**: preslikavanje $\mu \mapsto \mu^*$ definirano s:*

$$\mu^*(B) := \overline{\mu(B^{-1})},\ \forall B \in B(G),\ \textit{tj.}\ \int_G \varphi(x) d\mu^*(x) := \int_G \varphi(x^{-1})\, d\overline{\mu}(x),\ \forall \varphi \in C_0(G).$$

Relacija (1.3) objašnjava zašto su dva navedena načina definiranja involucije ekvivalentna. Sada se moramo uvjeriti da ovdje definirana involucija jest involucija u smislu definicije involucije na $*$-algebri (1.3.3) čineći, dakle, algebru mjera $(M(G), *)$ Banachovom $*$-algebrom. Samo treće svojstvo iz definicije zahtijeva raspis, stoga uzmimo $\mu, \nu \in M(G)$, $\varphi \in C_0(G)$ i računajmo:

$$\begin{aligned}\int_G \varphi \, d(\mu * \nu)^* &= \int_G \varphi(x^{-1}) \, d\overline{\mu * \nu}(x) = \int_G \int_G \varphi((xy)^{-1}) \, d\overline{\mu}(x) \, d\overline{\nu}(y) \\ &= \int_G \int_G \varphi(y^{-1}x^{-1}) \, d\overline{\nu}(y) d\overline{\mu}(x) = \int_G \int_G \varphi(yx) \, d\nu^*(y) \, d\mu^*(x) \\ &= \int_G \varphi \, d(\nu^* * \mu^*), \ \forall \varphi \in C_0(G).\end{aligned}$$

Imamo $(\mu * \nu)^* = \nu^* * \mu^*$, dakle $(M(G), *)$ je Banachova $*$-algebra.

3.2 L^p prostori i konvolucija funkcija

U ovom odjeljku pretpostavljamo da na lokalnoj kompaktnoj grupi G imamo fiksiranu lijevu Haarovu mjeru λ i zbog toga ćemo se koristiti kraćim oznakama dx i L^P misleći pritom na $d\lambda(x)$ i $L^p(\lambda)$. Izmjerljiv prostor na kojem ćemo promatrati L^p prostore također će biti fiksan - lokalno kompaktna grupa G, a ono što će varirati bit će mjere iz $M(G)$. Zbog toga koristimo po potrebi oznake oblika $L^p(\mu)$.

Definicija 3.2.1. *Neka su f i g funkcije iz L^1.* ***Konvolucija*** *funkcija f i g je funkcija $f * g \in L^1$ definirana s:*

$$(f * g)(x) := \int_G f(y) g(y^{-1}x) \, dy. \tag{3.3}$$

Moramo se uvjeriti da je definicija dobra: uz Fubini-Tonellijev teorem (1.2.1) simultano pokazujemo da $\int_G f(y)g(y^{-1}x)\,dy$ apsolutno konvergira za gotovo svaki x te da je $f * g \in L^1$. Prvo, $(x, y) \mapsto |f(y)g(y^{-1}x)|$ je nenegativna izmjeriva funkcija. Zbog toga, prema (i) dijelu Fubini-Tonellijevog teorema, smijemo mijenjati poredak dy i dx, tj:

$$\int_G \left(\int_G |f(y)g(y^{-1}x)| \, dy \right) dx = \int_G \left(\int_G |f(y)g(y^{-1}x)| \, dx \right) dy.$$

Zasad nismo pokazali da su gornji integrali konačni, međutim jesu za $f, g \in L^1$:

$$\begin{aligned}\int_G \left(\int_G |f(y)g(y^{-1}x)| \, dy \right) dx &= \int_G \left(\int_G |f(y)g(y^{-1}x)| \, dx \right) dy = \int_G |f(y)| \left(\int_G |g(y^{-1}x)| \, dx \right) dy \\ &\overset{\text{LHM}}{=} \int_G |f(y)| \left(\int_G |g(x)| \, dx \right) dy = \int_G |f(y)| \, \|g\|_1 \, dy = \|f\|_1 \, \|g\|_1.\end{aligned}$$

Posebno, $(x, y) \mapsto |f(y)g(y^{-1}x)|$ je integrabilna, stoga prema (ii) dijelu Fubini-Tonellijevog teorema, za gotovo svaki x funkcija $y \mapsto |f(y)g(y^{-1}x)|$ je integrabilna, tj. integral

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$$

apsolutno konvergira za gotovo svaki x. Dakako, tada konvergira i obično, stoga je $f * g$ dobro definirana za gotovo svaki x.
Također, dobili smo:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_G |(f * g)(x)|\, dx = \int_G \left| \int_G f(y)g(y^{-1}x)\, dy \right| dx \\ &\leq \int_G \left(\int_G |f(y)g(y^{-1}x)|\, dy \right) dx = \|f\|_1 \, \|g\|_1. \end{aligned}$$

Posebno, $f * g \in L^1$. Kako na L^1 prostoru poistovjećujemo funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0, činjenica da je $(f * g)(x)$ dobro definirana (samo) za gotovo svaki x iz G je zanemariva, odnosno možemo reći da je $f * g$ općenito/svugdje dobro definirana.

Poznato je da je $(L^1, \|\cdot\|_1)$ Banachov prostor, pa imajući to u vidu, uz upravo pokazanu nejednakost:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1, \ \forall f, g \in L^1,$$

čini se da bi $(L^1, *)$ mogao imati strukturu Banachove algebre i biti povezan s algebrom mjera $(M(G), *)$. Zaista, $(L^1, *)$ jest Banachova algebra: nije teško raspisati asocijativnost konvolucija funkcija na L^1, dok su ostala svojstva asocijativne algebre evidentno zadovoljena.

Što se tiče veze s algebrom mjera, uzmimo $f \in L^1(\lambda)$. Tada je s:

$$\mu_f(B) = \int_B f(x)\, dx, \text{ tj. } d\mu_f(x) = f(x)\, dx,$$

dobro definirana $\mu_f \in M(G)$ (vidi 1.2). Prema Radon-Nikodyomovom teoremu za kompleksne mjere (Teorem 1.2.14) preslikavanje $L^1(\lambda) \to M(G)$, $f \mapsto \mu_f$ je injektivno. Naime, ako je $\mu_f = \mu_g$, za $\mu_f, \mu_g \in M(G)$ i $f, g \in L^1(\lambda)$, odnosno $d\mu_f = g\, d\mu$, slijedi da je $f = g$ λ-gotovo svuda, što znači $f = g$ u $L^1(\lambda)$. Također, isti Radon-Nikodymov teorem daje $\|\mu_f\| = \|f\|_1$.

Nadalje, preslikavanje $I_f(\varphi) := \int_G \varphi(x)f(x)\, dx$, gdje je $\varphi \in C_0(G)$, očito je linearan funkcional te:

$$|I_f(\varphi)| \leq \int_G |\varphi(x)|\, |f(x)|\, dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_G |f(x)|\, dx = \|f\|_1 \, \|\varphi\|_\infty, \ \forall \varphi \in C_0(G).$$

Dakle, $I_f \in C_0(G)^*$ (posebno: $\|I_f\| \leq \|f\|_1$), pa prema Rieszovom teoremu reprezentacije kompleksne mjere (1.2.13), postoji jedinstven $\mu'_f \in M(G)$ tako da:

$$\int_G \varphi(x)\, d\mu'_f(x) = \int_G \varphi(x) f(x)\, dx, \ \forall \varphi \in C_0(G) \tag{3.4}$$

i $\|\mu'_f\| = \|I_f\|$. Međutim, poznato je da zbog $d\mu_f(x) = f(x)\, dx$ imamo:

$$\int_G \varphi(x)\, d\mu_f(x) = \int_G \varphi(x) f(x)\, dx, \ \forall \varphi \in C_0(G). \tag{3.5}$$

Dakle, u notaciji Rieszovog teorema, $I_{\mu'_f} = I_{\mu_f} = I_f$, a zbog injektivnosti $\mu \mapsto I_\mu$ slijedi $\mu'_f = \mu_f$. Također, $\|\mu_f\| = \|I_f\| = \|f\|_1$.

Propozicija 3.2.2. *Preslikavanje $L^1 \to M(G)$, $f \mapsto \mu_f$ je injektivan homomorfizam Banachovih algebri; odnosno postoji ulaganje $L^1 \hookrightarrow M(G)$.*

Dokaz. Injektivnost smo već pokazali. Prema definiciji homomorfizma Banachovih algebri (1.3.4) trebamo pokazati da je $f \mapsto \mu_f$ ograničen linearan operator koji čuva operaciju množenja. Primijetimo da $f \mapsto \mu_f$ možemo komponirati kao $f \mapsto I_f = I_{\mu_f} \mapsto \mu_f$, tj. kompozicija je linearnih preslikavanja $f \mapsto I_f$ te $I_{\mu_f} \mapsto \mu_f$ ($\mu \mapsto I_\mu$ je izomorfizam) pa je i sâmo linearno. Dakako, ograničenost vrijedi jer $\|\mu_f\| = \|f\|_1$.
Čuvanje množenja ovdje znači da vrijedi jednakost $\mu_{f*g} = \mu_f * \mu_g$, što je ekvivalentno $I_{\mu_{f*g}} = I_{\mu_f * \mu_g}$, za sve $f, g \in L^1$. Sljedeći raspis pokazuje da je to zadovoljeno:

$$\begin{aligned}
\int_G \varphi\, d(\mu_f * \mu_G) &\overset{(3.1)}{=} \int_G \int_G \varphi(yx)\, d\mu_f(y)\, d\mu_g(x) \overset{(3.5)}{=} \int_G \int_G \varphi(yx) f(y)\, dy\, g(x)\, dx \\
&= \int_G \int_G \varphi(yx) f(y) g(x)\, dy\, dx = \int_G \left(\int_G \varphi(yx) g(x)\, dx \right) f(y)\, dy \\
&\overset{\text{LHM}}{=} \int_G \left(\int_G \varphi(x) g(y^{-1}x)\, dx \right) f(y)\, dy = \int_G \varphi(x) \left(\int_G f(y) g(y^{-1}x)\, dy \right) dx \\
&\overset{(3.3)}{=} \int_G \varphi(x)(f * g)(x)\, dx \overset{(3.5)}{=} \int_G \varphi\, d\mu_{f*g}, \ \forall \varphi \in C_0(G)
\end{aligned}$$

□

Ukratko, L^1 je podalgebra od $M(G)$ i dozvoljeno je identificirati f iz L^1 s μ_f iz $M(G)$. Kako je $(M(G), *)$ Banachova $*$-algebra, L^1 također ima involuciju, i to takvu da vrijedi:

$\mu_{f^*} = (\mu_f)^*$. Dakle:

$$\int_G \varphi(x)\, d(\mu_f)^*(x) \overset{3.1.4}{=} \int_G \varphi(x^{-1})\, d\overline{\mu_f}(x) = \int_G \varphi(x^{-1})\overline{f}(x)\, dx = \begin{bmatrix} y = x^{-1} \\ G \to G \end{bmatrix}$$
$$= \int_G \varphi(y)\overline{f}(y^{-1})\, d(y^{-1}) = [y = x] = \int_G \varphi(x)\overline{f}(x^{-1})\, d(x^{-1})$$
$$\overset{2.3.5}{=} \int_G \varphi(x)\, \underbrace{\overline{f}(x^{-1})\, \Delta(x^{-1})}_{=: f^*(x)}\, dx = \int_G \varphi(x)\, d\mu_{f^*}(x), \ \forall \varphi \in C_0(G).$$

Dakle, $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$ je **involucija** funkcije f, a $(L^1, *)$ je Banachova $*$-algebra koju zovemo L^1 **grupna algebra** od G.

Vratimo se na definiciju konvolucije dviju funkcija iz L^1. Sada ćemo izvesti nekoliko međusobno ekvivalentnih i za račun korisnih izraza za $f * g$:

$$\int_G f(y)g(y^{-1}x)\, dy \overset{\text{LHM}}{=} \int_G f(xy)g((xy)^{-1}x)\, dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})\, dy;$$

$$\int_G f(y)g(y^{-1}x)\, dy = \left[\begin{bmatrix} y = z^{-1},\ G \to G \\ dy = d(z^{-1}) \overset{(2.3.5)}{=} \Delta(z^{-1})dz \end{bmatrix} = \int_G f(z^{-1})g(zx)\Delta(z^{-1})\, dz = [z = y]\right]$$
$$= \int_G f(y^{-1})g(yx)\Delta(y^{-1})dy;$$

$$\int_G f(y)g(y^{-1}x)\, dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy = \begin{bmatrix} y \to y^{-1},\ G \to G \\ dy \to \Delta(y^{-1})\, dy \end{bmatrix} = \int_G f(xy^{-1})g(y)\Delta(y^{-1})dy.$$

<u>Komentar</u>: Primijetimo da je supstitucija obrazložena u uglatim zagradama u trećem računu zapravo sažeto zapisan slijed dvije supstitucije drugog računa (također u vanjskim uglatim zagradama). U drugom računu supstitucije su izvedene i obrazložene na ”školski način” radi jasnoće. Ubuduće ćemo obrazloženje ove supstitucije u potpunosti izostavljati.

Sakupljamo posljednje račune u napomenu:

Napomena 3.2.3. *Vrijedi:*

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_G f(y)g(y^{-1}x)\, dy \\ &= \int_G f(xy)g(y^{-1})\, dy \\ &= \int_G f(y^{-1})g(yx)\Delta(y^{-1})\, dy \\ &= \int_G f(xy^{-1})g(y)\Delta(y^{-1})\, dy. \end{aligned}$$

Ako je G unimodularna:

$$(f*g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\,dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})\,dy = \int_G f(y^{-1})g(yx)\,dy = \int_G f(xy^{-1})g(y)\,dy.$$

Prva dva izraza (općenitog slučaja) možemo zapisati i preko lijevog, odnosno desnog translata:

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_G f(y)\, L_y g(x)\,dy \\ &= \int_G g(y^{-1})\, R_y f(x)\,dy.\end{aligned}$$

Propozicija 3.2.4. *Neka su $f, g \in L^1$ i $z \in G$.*

(i) $L_z(f * g) = (L_z f) * g$,

(ii) $R_z(f * g) = f * (R_z g)$.

Dokaz. Naime, lijeve i desne translacije komutiraju, tj. $R_y L_z = L_z R_y$:

$$R_y L_z f = R_y f(z^{-1}x) = f(z^{-1}xy) = L_z f(xy) = L_z R_y f.$$

Zbog toga, uz prethodnu Napomenu (3.2.3):

$$\begin{aligned}L_z(f * g)(x) &= L_z\left(x \mapsto \int_G g(y^{-1})(R_y f)(x)\,dy\right) = \int_G g(y^{-1}) L_z R_y f(x)\,dy \\ &= \int_G g(y^{-1}) R_y (L_z f)(x)\,dy = ((L_z f) * g)(x).\end{aligned}$$

$R_z(f * g) = f * (R_z g)$ pokazuje se analogno. □

Propozicija 3.2.5. *Neka je $1 \le p \le +\infty$, $f \in L^1$ i $g \in L^p$.*

(i) $(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\,dy$ *dobro je definiran za gotovo svaki x, $f * g \in L^p$ i $\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.*

(ii) Ako je G unimodularna, (i) vrijedi i za $g * f$.

(iii) Ako G nije unimodularna, ali $f \in C_c(G)$, onda je $g * f \in L^p$.

Dokaz. (i) Promatramo funkciju $y \mapsto f(y) L_y g(x)$. Pokažimo da je ta funkcija u $L^p(dx)$ za gotovo svaki $y \in G$. (Koristimo neformalnu oznaku $L^p(dx)$ kako bismo naglasili po kojoj varijabli integriramo; naravno i dx i dy odnose se na istu mjeru - fiksiranu LHM λ.)

$$\|f(y)L_y g(x)\|_{L^p(dx)}^p = |f(y)|^p \, \|L_y g\|_{L^p(dx)}^p \overset{\text{LHM}}{=} |f(y)|^p \, \|g\|_{L^p(dx)}^p < +\infty, \ \forall y \in G, \text{ jer } g \in L^p.$$

Nadalje, pokažimo da je funkcija $y \mapsto \|f(y)L_y g(x)\|_{L^p(dx)}$ u $L^1(dy)$ za gotovo svaki $y \in G$:

$$\int_G \|f(y)L_y g(x)\|_{L^p(dx)} \, dy = \int_G |f(y)| \, \|g\|_{L^p(dx)} \, dy = \|g\|_{L^p(dx)} \, \|f\|_{L^1(dy)} < +\infty, \ \forall y \in G.$$

Sada smijemo primijeniti Minkowskijevu nejednakost za integrale (1.2.2(ii)): prvo, funkcija $y \mapsto f(y)L_y g(x)$ je u $L^1(dy)$ za gotovo svaki $x \in G$, tj. $\int_G f(y)L_y g(x)$ apsolutno konvergira za gotovo svaki $x \in G$. Drugo, $(f * g)(x)$ je dobro definirana za gotovo svaki $x \in G$. Zato možemo primijeniti integralnu Minkowskijevu nejednakost:

$$\|f * g\|_{L^p} = \left\| \int_G f(y)L_y g(x) \, dy \right\|_{L^p(dx)} \leq \int_G \|f(y)L_y g(x)\|_{L^p(dx)} \, dy = \|f\|_{L^1} \, \|g\|_{L^p}.$$

Posebno, $f * g \in L^p$.

(ii) Neka je G unimodularna, tj. $\Delta = 1$. Iz Napomene 3.2.3 znamo da je tada:

$$(g * f)(x) = \int_G R_{y^{-1}} g(x) f(y) \, dy.$$

Kao u (i) dijelu, na $y \mapsto R_{y^{-1}} g(x) f(y)$ primjenjujemo Minkowskijevu nejednakost za integrale. Naime, kako je G unimodularna, mjera λ je i DHM, stoga se analogno kao u (i) dijelu pokaže da su zadovoljeni uvjeti Teorema o Minkowskijevoj nejednakosti za integrale (1.2.2). Dakle, $(g * f)(x)$ je dobro definirana za gotovo svaki $x \in G$, $g * f \in L^p$ i vrijedi $\|g * f\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^p} \, \|f\|_{L^1}$.

(iii) Neka je $K = \operatorname{supp} f$ kompaktan. Pozivat ćemo se na isti teorem, međutim sada moramo promatrati funkciju $y \mapsto R_{y^{-1}} g(x) f(y) \Delta(y^{-1})$. Prvo imamo:

$$\begin{aligned} \|R_{y^{-1}} g(x) f(y) \Delta(y^{-1})\|_{L^p(dx)} &= |f(y)| \, |\Delta(y^{-1})| \, \|R_{y^{-1}} g(x)\|_{L^p(dx)} \\ &= |f(y)| \, |\Delta(y^{-1})| \left(\int_G |R_{y^{-1}} g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = |f(y)| \, |\Delta(y^{-1})| \left(\int_G R_{y^{-1}} |g|^p(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{(2.12)}{=} |f(y)| \, \Delta(y)^{-1} \left(\Delta(y) \int_G |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = |f(y)| \, \Delta(y)^{\frac{1}{p}-1} \, \|g\|_{L^p} < +\infty, \ \forall y \in G. \end{aligned}$$

Zatim:

$$
\begin{aligned}
&\int_G \|R_{y^{-1}}g(x)f(y)\Delta(y^{-1})\|_{L^p(dx)}\,dy = \int_G |f(y)|\,\Delta(y)^{\frac{1}{p}-1}\,\|g\|_{L^p}\,dy \\
&= \|g\|_{L^p}\int_K |f(y)|\,\Delta(y)^{\frac{1}{p}-1}\,dy \leq \begin{bmatrix} y\mapsto \Delta(y)^{\frac{1}{p}-1} \text{ nepr.} \\ \Rightarrow \exists \max_{y\in K}\Delta(y)^{\frac{1}{p}-1} =: C \text{ na komp. } K\end{bmatrix} \\
&\leq C\,\|g\|_{L^p}\,\|f\|_{L^1} < +\infty,\ \ \forall y\in G.
\end{aligned}
$$

Prema Minkowskijevoj nejednakosti za integrale $(g * f)(x)$ je dobro definiran za gotovo svaki $x \in G$ te imamo:

$$
\begin{aligned}
\|g * f\|_{L^p} &= \left\|\int_G R_{y^{-1}}g(x)f(y)\Delta(y^{-1})\,dy\right\|_{L^p(dx)} \leq \int_G \|R_{y^{-1}}g(x)f(y)\Delta(y^{-1})\|_{L^p(dx)}\,dy \\
&\leq C\,\|g\|_{L^p}\,\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}
$$

Posebno, $g * f \in L^p$.

□

Slijedi propozicija donekle nalik Propoziciji 2.1.14 o lijevoj (desnoj) uniformnoj neprekidnosti funkcija iz $C_c(G)$. U narednim rezultatima i dokazima bitno je razlikovati norme $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Propozicija 3.2.6. *Ako je* $1 \leq p < +\infty$ *i* $f \in L^p$, *onda:*

$$
y \to 1 \implies \|L_y f - f\|_{L^p} \to 0 \ \ i \ \ \|R_y f - f\|_{L^p} \to 0.
$$

Dokaz. Neka je V simetrična kompaktna okolina od 1 u G. Ideja dokaza je prvo pokazati tvrdnju za funkcije iz $C_c(G)$ koristeći njihovu lijevu i desnu uniformnu neprekidnost (2.1.14) i zatim za funkcije iz L^p, uz pomoć poznate činjenice da je $C_c(G)$ gust u $L^p(G)$ u normi $\|\cdot\|_{L^p}$ za $1 \leq p < +\infty$ (v. [4, str. 217.]).
Dakle, uzmimo $g \in C_c(G)$ i definirajmo skup:

$$
K := (\operatorname{supp} g)V^{-1} \cup V(\operatorname{supp} g).
$$

Skup K je kompaktan i slično kao u dokazu Teorema o jedinstvenosti LHM (2.2.12) pokaže se da su funkcije $x \mapsto L_y g - g = g(y^{-1}x) - g(x)$ i $x \mapsto R_y g - g = g(xy) - g(x)$ nošene u K kada je $y \in V$ ($\operatorname{supp} g \subseteq K$ jer $1 \in V$). Za $y \in V$ imamo:

$$
\|L_y g - g\|_{L^p}^p = \int_K |L_y g(x) - g(x)|^p\,dx \leq \int_K \|L_y g - g\|_\infty^p\,dx = \lambda(K)\,\|L_y g - g\|_\infty^p
$$

Sada zbog lijeve uniformne neprekidnosti od g imamo:

$$
y \to 1 \implies \|L_y g - g\|_\infty \to 0 \implies \|L_y g - g\|_{L^p} \leq \lambda(K)^{\frac{1}{p}}\,\|L_y g - g\|_\infty \to 0.
$$

Slično se pokaže: $y \to 1 \implies ||R_y g - g||_{L^p} \to 0$.

Neka je sada $f \in L^p(G)$. Vrijedi $||L_y f||_{L^p} = ||f||_{L^p}$, a u dokazu Propozicije 3.2.5(iii) zapravo smo pokazali $||R_y f||_{L^p} = \Delta(y)^{-\frac{1}{p}}||f||_{L^p}$. Kako je V kompaktan, a $\Delta^{-\frac{1}{p}}$ neprekidna, skup $\Delta^{-\frac{1}{p}}(V)$ je kompaktan podskup od $\langle 0, +\infty\rangle$, pa postoji $C > 0$ t.d. je $||R_y f||_{L^p} \leq \Delta(y)^{-\frac{1}{p}}||f||_{L^p} \leq C||f||_{L^p}$ za proizvoljan $y \in V$. Nadalje, zbog navedene gustoće $C_c(G)$ u $L^p(G)$, za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $g \in C_c(G)$ t.d. $||f - g||_{L^p} < \varepsilon$. Sve zajedno dobivamo:

$$||R_y f - f||_{L^p} \leq \underbrace{||R_y(f - g)||_{L^p}}_{\leq C||f-g||_{L^p}} + ||R_y g - g||_{L^p} + ||g - f||_{L^p} \leq (C + 1)\varepsilon + ||R_y g - g||_{L^p}$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ i dokazane tvrdnje za $g \in C_c(G)$ zaključujemo:

$$y \to 1 \implies ||R_y g - g||_{L^p} \to 0,\ \forall g \in C_c(G) \implies ||R_y f - f||_{L^p} \leq (C + 1)\varepsilon + ||R_y g - g||_{L^p} \to 0.$$

Uz malo jednostavniji račun ($||L_y f||_{L^p} = ||f||_{L^p}$), slično slijedi: $y \to 1 \Rightarrow ||L_y f - y||_{L^p} \to 0$. □

Propozicija 3.2.7. *Ako je $f \in L^1(G)$ i $g \in L^\infty(G)$, onda je $f * g$ lijevo uniformno neprekidna i $g * f$ je desno uniformno neprekidna.*

Dokaz. Prvo pokazujemo da vrijedi:

$$L_z(f * g) - f * g \overset{\text{Prop.3.2.4}}{=} (L_z f * g) - f * g = (L_z f - f) * g.$$

Dakako, $L_z f - f \in L^1(G)$ za $f \in L^1(G)$, pa za proizvoljan $x \in G$ vrijedi:

$$|((L_z f - f) * g)(x)| \leq \int_G |(L_z f - f)(y)|\,|g(y^{-1}x)|\,dy \overset{g \in L^\infty}{\leq} ||g||_{L^\infty} \int_G |L_z f - f|(y)\,dy = ||g||_{L^\infty}||L_z f - f||_{L^1}.$$

Kombinirajući dobivamo:

$$||(L_z f - f) * g||_\infty \leq ||g||_{L^\infty}||L_z f - f||_{L^1},$$

i konačno:

$$z \to 1 \overset{\text{Prop.3.2.6}}{\implies} ||L_z f - f||_{L^1} \to 0 \implies ||(L_z f - f) * g||_\infty \leq ||g||_{L^\infty}||L_z f - f||_{L^1} \to 0.$$

Dakle, $f * g$ je lijevo uniformno neprekidna, a desna uniformna neprekidnost od $g * f$ dokazuje se analogno. □

Primjer 3.2.8. *Diracova funkcija:*

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & ako\ x = 1, \\ 0, & inače \end{cases}$$

je gotovo svuda jednaka 0*, ako je* $\lambda(\{1\}) = 0$*. Ako je* G *diskretna grupa, vrijedi* $\lambda(\{1\}) > 0$*, stoga* δ *nije gotovo svuda jednaka* 0*. Također, zbog jedinstvenosti LHM (Teorem 2.2.12) možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti* $\lambda(\{1\}) = 1$*, a tada je* $\lambda(\{x\}) = 1$ *za sve* $x \in G$ *(ako je* $\lambda(\{1\}) = c$*, uzimamo verziju Diracove funkcije u kojoj je* $\delta(1) = c$*). Dakle,* $\|\delta\|_{L^1} = \int_G \delta(x)\, d\lambda(x) = \lambda(\{1\}) = 1$*, pa je* $\delta \in L^1(G)$*. Sada uzimamo* $f \in L^1(G)$ *i računamo:*

$$(f * \delta)(x) = \int_G f(y)\delta(y^{-1}x)\, dy = f(x)\delta(1)\lambda(\{x\}) = f(x), \ \forall x \in G,$$
$$(\delta * f)(x) = \int_G \delta(y) f(y^{-1}x)\, dy = \delta(1) f(x)\lambda(\{1\}) = f(x), \ \forall x \in G.$$

Dakle, δ *je jedinica u* $L^1(G)$*. Međutim, ako* G *nije diskretna grupa,* $(L^1(G), *)$ *nema jedinicu, što ćemo sada pokazati. Pretpostavimo suprotno: neka je* $e \in L^1(G)$ *jedinica s obzirom na konvoluciju. Uzmimo neku kompaktnu okolinu* V *od* 1 *u* G *i definiramo* $U := V \setminus \{1\}$*. Kako* G *nije diskretna grupa vrijedi* $\lambda(\{1\}) = 0$*, stoga je* $0 < \lambda(U) = \lambda(V) < +\infty$*. Dakle,* $\chi_U \in L^1(G) \cap L^\infty(G)$ *i* $\chi_U \neq 0$*. Budući da je prema pretpostavci* $\chi_U = e * \chi_U = \chi_U * e$*, zbog* $e \in L^1(G)$ *i* $\chi_U \in L^\infty(G)$ *iz Propozicije 3.2.7 slijedi da je* χ_U *lijevo i desno uniformno neprekidna. Posebno,* χ_U *je (obično) točkovno neprekidna. Zbog toga je* $U = \chi_U^{-1}(\{1\})$ *zatvoren u* G *(jer je* $\{1\}$ *zatvoren u* $\mathbb{C}$*).*
Pokažimo da $U = V \setminus \{1\}$ *nije zatvoren. Jer* G *nije diskretna znamo da* $\{1\}$ *nije otvoren skup, pa* $G \setminus \{1\}$ *nije zatvoren skup. Posljedično* $G \setminus \{1\}$ *ne može biti jednak svojem zatvaraču, stoga mora vrijediti* $\mathrm{Cl}(G \setminus \{1\}) = G$*. Posebno, postoji hiperniz* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *u* $G \setminus \{1\}$ *koji konvergira prema* 1*. Kako je* V *okolina od* 1*, postoji* $\alpha_0 \in A$ *takva da* $\alpha_0 \leqslant \alpha$ *implicira* $x_\alpha \in V$*, tj.* $x_\alpha \in U$ *jer hiperniz* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *ne sadrži* 1*. Drugim riječima, postoji hiperniz* $(x_\alpha)_{\alpha\in A, \alpha_0 \leqslant \alpha}$ *iz* U *koji konvergira prema* $1 \notin U$*; dakle* U *nije zatvoren. Kontradikcija, iz koje slijedi da* $(L^1(G), *)$ *nema jedinicu. Konačno, dokazali smo da* $(L^1(G), *)$ *ima jedinicu ako i samo ako je* G *diskretna grupa.*

Izostanku jedinice u algebri $(L^1(G), *)$ pokušavamo doskočiti sljedećim pojmom:

Definicija 3.2.9. *Neka je* $\mathcal{U}$ *baza okoline od* 1 *u* G*. Kažemo da je familija funkcija* $\{\psi_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ ***aproksimacija jedinice*** *od* G *ako su za svaki* $U \in \mathcal{U}$ *zadovoljena sljedeća tri svojstva:*

i. $\mathrm{supp}\,\psi_U$ *je kompaktan i sadržan u* U*;*

ii. $\psi_U \geq 0$ *i* $\int_G \psi_U = 1$*;*

iii. $\psi_U(x^{-1}) = \psi_U(x),\ \forall x \in G.$

Propozicija 3.2.10. *Neka je* $\{\psi_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ *aproksimacija jedinice u* G.

(i) ako je $f \in L^p$ *za* $1 \leq p < +\infty$ *ili je* $f \in L^\infty$ *i pritom lijevo uniformno neprekidna, onda:*

$$U \to \{1\} \implies \|\psi_U * f - f\|_{L^p} \to 0.$$

(ii) ako je $f \in L^p$ *za* $1 \leq p < +\infty$ *ili je* $f \in L^\infty$ *i pritom desno uniformno neprekidna, onda:*

$$U \to \{1\} \implies \|f * \psi_U - f\|_{L^p} \to 0.$$

Dokaz. (i) Zbog $\int_G \psi_U = 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(\psi_U * f)(x) - f(x) &= \int_G \psi_U(y) L_y f(x)\,dy - \underbrace{\int_G \psi_U(y)\,dy}_{=1} \cdot f(x)\\ &= \int_G \psi_U(y)[L_y f(x) - f(x)]\,dy.\end{aligned}$$

Primjenjujemo Minkowskijevu nejednakost za integrale na funkciju $y \mapsto \psi_U(y)[L_y f(x) - f(x)]$ - ovog puta u jednom redu, tj. implicitno i usput ćemo vidjeti da su zadovoljeni uvjeti pripadnog Teorema 1.2.2. Dakle:

$$\begin{aligned}\|\psi_U * f - f\|_{L^p(dx)} &= \|\int_G \psi_U(y)[L_y f(x) - f(x)]\,dy\|_{L^p(dx)}\\ &\leq \int_G \|\psi_U(y)[L_y f(x) - f(x)]\|_{L^p(dx)}\,dy = \int_G \underbrace{|\psi_U(y)|}_{\psi_U \geq 0} \|L_y f - f\|_{L^p}\,dy\\ &= \int_{\operatorname{supp}\psi_U} \psi_U(y)\|L_y f - f\|_{L^p}\,dy,\ 1 \leq p \leq +\infty.\end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Ako je $p < +\infty$, uz poziv na Propoziciju 3.2.6, dok je za $p = +\infty$ pretpostavka propozicije lijeva uniformna neprekidnost funkcije f, stoga u oba slučaja zaključujemo da postoji okolina V od 1 takva da:

$$y \in V \implies \|L_y f - f\|_{L^p} < \varepsilon,\ 1 \leq p \leq +\infty. \tag{3.6}$$

Naime, u slučaju $p = +\infty$. za $y \in V$ je $\|L_y f - f\|_\infty < \varepsilon$ prema Propoziciji 3.2.6, no iz definicije normi je jasno da je onda $\|L_y f - f\|_{L^\infty} \leq \|L_y f - f\|_\infty < \varepsilon$.

Budući da je $\mathcal{U}$ baza okoline od 1, postoji "dovoljno malena" $U_0 \in \mathcal{U}$, $U_0 \subseteq V$ tako da za svaki $U \in \mathcal{U}$ t.d. $U \subseteq U_0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\|\psi_U * f - f\|_{L^p} &\leq \int_{\operatorname{supp}\psi_U} \psi_U(y)\|L_y f - f\|_{L^p}\,dy \leq \begin{bmatrix}\operatorname{supp}\psi_U \subseteq U \subseteq U_0 \subseteq V \\ \text{i (3.6)}\end{bmatrix} \\ &\leq \varepsilon \int_{\operatorname{supp}\psi_U} \psi_U(y)\,dy \overset{\psi_U \geq 0}{\leq} \varepsilon \int_G \psi_U(y)\,dy = \varepsilon,\ 1 \leq p \leq +\infty.\end{aligned}$$

Drugim riječima, imamo traženo:

$$U \to \{1\} \implies \|\psi_U * f - f\|_{L^p} \to 0.$$

Primijetimo da za dokaz tvrdnje nismo trebali svojstvo iii. iz definicije aproksimacije identiteta. U (ii) dijelu ćemo pak to svojstvo iskoristiti odmah.

(ii) Slično kao u (i), prvo računamo:

$$\begin{aligned}(f * \psi_U)(x) - f(x) &= \int_G R_y f(x) \underbrace{\psi_U(y^{-1})}_{=\psi_U(y)}\,dy - f(x) \cdot \underbrace{\int_G \psi_U(y)\,dy}_{=1} \\ &= \int_G [R_y f(x) - f(x)]\psi_U(y)\,dy.\end{aligned}$$

Ostatak dokaza slijedi analogno kao u (i).

□

Ostavljeno je pitanje postojanja aproksimacije identiteta na općenitoj lokalno kompaktnoj grupi G. Odgovor je da postoji. Zbog lokalne kompaktnosti su familija kompaktnih okolina od 1 i familija simetričnih kompaktnih okolina od 1 baze okolina od 1. Lako vidimo da je tada familija

$$\{\psi_U := \lambda(U)^{-1}\chi_U \mid U \text{ kompaktna i simetrična okolina od } 1\}$$

aproksimacija identitete u G. Naime, $\operatorname{supp}\psi_U = U$ je kompaktan, $\psi_U \geq 0$, $\int \lambda(U)\chi_U = 1$ te je ψ_U parna funkcija zbog simetričnosti od U. Familija neprekidnih funkcija može se dobiti uz Urysohnovu lemu za LKH prostore.

Poglavlje 4

Homogeni prostori

4.1 Osnovna svojstva homogenih prostora

Neka je G lokalno kompaktna (Hausdorffova) grupa i S lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor. U ključnim dijelovima ovog poglavlja koristit ćemo pretpostavku da je topološki prostor na G i σ-kompaktan.

Definicija 4.1.1. ***(Lijevo) djelovanje*** *grupe G na topološki prostor S je neprekidno preslikavanje $G \times S \to S$ dano s $(x, s) \mapsto xs$ takvo da vrijedi:*

i. *$s \mapsto xs$ je homeomorfizam na S, $\forall x \in G$;*

ii. *$x(ys) = (xy)s$, $\forall x, y \in G$, $\forall s \in S$.*

Prostor S zajedno s djelovanjem grupe G zove se ***G-prostor****.*
Ako za proizvoljne $s, t \in S$ postoji $x \in G$ takav da je $xs = t$, kažemo da je G-prostor ***tranzitivan****.*

Primjer 4.1.2. *(i) Trivijalan primjer: LKH grupa djeluje na samu sebe lijevim grupnim množenjem. Preciznije, djelovanje je $G \times G \to G$, $(x, y) \to xy$. Iz Propozicije 2.1.2 slijedi da grupno množenje zadovoljava definiciju djelovanja. Štoviše, G je tranzitivan G-prostor (za $x, y \in G$ je $(yx^{-1})x = y$).*

(ii) Neka je H zatvorena podgrupa od G. Tada je s $x(yH) := (xy)H$ dobro definirano tranzitivno djelovanje grupe G na kvocijentni prostor G/H. Drugim riječima, kvocijentni prostor G/H je tranzitivni G-prostor.

Dokaz. Prisjetimo se prvo Propozicije 2.1.9: G/H je LKH topološki prostor; doduše sâm nema nužno strukturu grupe.

Pokažimo da je za fiksni $x \in G$ preslikavanje $\overline{\alpha} : G/H \to G/H$ dano s $\overline{\alpha}(yH) = (xy)H$ neprekidno. Neka je $\alpha : G \to G/H$ preslikavanje $\alpha(y) = (xy)H$. Tada je $\alpha = \overline{\alpha} \circ q$. Primijetimo da je α zapravo preslikavanje $G \to G \to G/H$ dano s $y \mapsto xy \mapsto (xy)H$. Prema Propoziciji 2.1.2 neprekidno je $y \mapsto xy$, a drugo preslikavanje je zapravo kvocijentno preslikavanje koje je neprekidno prema svojoj definiciji. Dakle, α je neprekidno kao kompozicija neprekidnih preslikavanja. Za U otvoren skup u G/H vrijedi:

$$\overline{\alpha}^{-1}(U) = \{q(y) \in G/H \,|\, \overline{\alpha}(q(y)) \in U\} = \{q(y) \in G/H \,|\, \alpha(y) \in U\} = q(\alpha^{-1}(U)),$$

što je otvoren skup u G/H jer je α neprekidno, a q otvoreno preslikavanje. Dakle, $\overline{\alpha}$ je neprekidno preslikavanje. Njegov inverz je očito $yH \mapsto (x^{-1}y)H$, stoga je i on neprekidan, čime imamo dovoljno za zaključak da je $yH \mapsto (xy)H$ homeomorfizam na G/H za svaki $x \in G$.
Vrijedi $x(y(zH)) = x((yz)H) = (xyz)H = (xy)(zH)$ za sve $x, y \in G$ i $zH \in G/H$ te je za proizvoljne $xH, yH \in G/H$, $(yx^{-1})xH = yH$. Konačno, kvocijentni prostor G/H je tranzitivni G-prostor.
Primijetimo da je, zbog $G \cong G/\{1\}$, primjer (i) zapravo poseban slučaj ovog primjera.

□

Definicija 4.1.3. *Neka su S i T dva G-prostora i funkcija $f : S \to T$. Kažemo da je funkcija f **G-ekvivarijantna** ako komutira s djelovanjem grupe G, odnosno, ako zadovoljava sljedeće svojstvo:*

$$f(xs) = xf(s), \ \forall x \in G, \ \forall s \in S.$$

Teorem 4.1.4. *Ako je S tranzitivan G-prostor, gdje je G σ-kompaktna LKH grupa, onda postoji zatvorena podgrupa H od G takva da je S homeomorfan kvocijentnom prostoru G/H. Štoviše, između G/H i S postoji G-ekvivarijantan homeomorfizam. Takav prostor S zovemo **homogeni prostor**.*

Dokaz. Fiksirajmo $s_0 \in S$ pa definiramo funkciju $\varphi : G \to S$ s $\varphi(x) = xs_0$ i skup $H := \{x \in G \,|\, xs_0 = s_0\}$. Skup $\varphi(G) \subseteq S$ zove se **orbita** od s_0, a $H \subseteq G$ **stabilizator** od s_0. Primijetimo, $H = \varphi^{-1}(\{s_0\})$, stoga je H zatvoren podskup od G. Također, ako su $x, y \in H$, onda je $(xy^{-1})s_0 = (xy^{-1})(ys_0) = x(y^{-1}y)s_0 = xs_0 = s_0$, stoga je $xy^{-1} \in H$. Dakle, H je zatvorena podgrupa od G.
Nadalje, preslikavanje φ je surjektivno zbog tranzitivnosti G-prostora S: za svaki $t \in S$ postoji $x \in G$ t.d. $t = xs_0 = \varphi(x)$. Slično kao u Propoziciji 2.1.2 slijedi da je φ, tj. $x \mapsto xs_0$ neprekidno preslikavanje zbog neprekidnosti preslikavanja $(x, s) \mapsto xs$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & S \\ G/H \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Gornji dijagram sugerira da želimo cijepati/faktorizirati preslikavanje $\varphi : G \to S$ kroz H. Zanima nas, dakle, je li dobro definirano preslikavanje $\Phi(yH) := \varphi(y)$, čime bi gornji dijagram komutirao (vrijedilo bi $\varphi = \Phi \circ q$). Zaista:

$$xH = yH \Leftrightarrow y^{-1}x \in H \Leftrightarrow (y^{-1}x)s_0 = s_0 \Leftrightarrow xs_0 = ys_0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \Phi(xH) = \Phi(yH).$$

Štoviše, pokazali smo da je Φ dobro definirana injekcija, a kako je iz definicije očito $\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Im}\varphi = S$, slijedi da je Φ bijekcija. S obzirom da imamo $\varphi = \Phi \circ q$, gdje je φ neprekidno, a q otvoreno preslikavanje, slično kao u Primjeru 4.1.2(ii) pokazuje se da je Φ neprekidno preslikavanje.

Preostalo je pokazati da je Φ^{-1} neprekidno, da bi Φ bio homeomorfizam. Budući da je Φ bijektivno, dovoljno je pokazati da je $\Phi : G/H \to S$ otvoreno preslikavanje. Neka je V otvoren skup u G/H. Još bolje, tvrdimo da će to vrijediti ako je $\varphi : G \to S$ otvoreno preslikavanje. Zaista, neka je V otvoren skup u G/H. Tada je $q^{-1}(V)$ otvoren skup u G, i ako je φ otvoreno preslikavanje, onda je $\varphi(q^{-1}(V))$ otvoren skup u S. S druge strane, zbog $\varphi = \Phi \circ q$ imamo:

$$\varphi(q^{-1}(V)) = ((\Phi \circ q) \circ q^{-1})(V) = \Phi((q \circ q^{-1})(V)) \overset{q \text{ surjekcija}}{=} \Phi(V).$$

Dakle, za V otvoren u G/H, skup je $\Phi(V)$ je otvoren u S, tj. Φ je otvoreno preslikavanje.

Pokažimo onda da je $\varphi : G \to S$ otvoreno preslikavanje. Neka je U otvoren u G i $x_0 \in U$ proizvoljan. Neka je V kompaktna simetrična okolina od 1 t.d. je $VV \subseteq x_0^{-1}U$, tj. $x_0VV \subseteq U$. Sada koristimo σ-kompaktnost od G: postoji $(W_m)_{m\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih skupova koji pokrivaju G. Kako je V okolina od 1, vrijedi $1 \in \operatorname{Int} V$, stoga je $\{y \operatorname{Int} V \mid y \in G\}$ otvoreni pokrivač od $G = \cup_{m=1}^{+\infty} U_m$. Pojedini U_m je kompaktan pa postoje $y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn_m} \in G$ t.d. $(y_{mi} \operatorname{Int} V)_{i=1,2,\dots,n_m}$ pokriva U_m, a tada je i $(y_{mi}V)_{i=1,2,\dots,n_m}$ pokrivač od U_m. Dakle, $\{y_{mi}V \mid m \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots n_m\}$ je očito prebrojiva familija kompaktnih skupova koji pokrivaju G. Jednostavnije zapisano, postoji $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u G t.d. niz kompaktnih skupova $(y_nV)_{n\in\mathbb{N}}$ pokriva G. Primijetimo, upravo smo u suštini pokazali očekivano svojstvo: u σ-kompaktnom prostoru svaki otvoren pokrivač ima prebrojiv potpokrivač.

Zbog surjektivnosti od φ vrijedi:

$$S = \varphi(G) = \varphi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} y_nV\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \varphi(y_nV).$$

Primijetimo da homeomorfizam $s \mapsto y_n^{-1}s$ preslikava $\varphi(y_nV)$ u $\varphi(V)$, stoga je $\varphi(y_nV)$ homeomorfan $\varphi(V)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, S je prebrojiva unija homeomorfnih kopija skupa $\varphi(V)$. Prema Baireovom teoremu za LKH prostore (Teorem 1.1.1), S ne može biti prebrojiva unija nigdje gustih skupova, dakle $\varphi(V)$ nije nigdje gust skup. Odnosno, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\,\varphi(V)) \neq \emptyset$. Kako je V kompaktan, φ neprekidno, onda je $\varphi(V)$ kompaktan, pa i zatvoren, stoga je $\mathrm{Int}\,\varphi(V) \neq \emptyset$.

Uzmimo $x_1 \in V$ za koji je $\varphi(x_1) \in \mathrm{Int}\,\varphi(V)$. Homeomorfizam $s \mapsto x_0 x_1^{-1} s$ preslikava skup $\varphi(V)$ u $\varphi(x_0 x_1^{-1} V)$ i točku $\varphi(x_1)$ u $\varphi(x_0)$. Kako homemorfizam čuva topološka svojstva, tada vrijedi implikacija:

$$\varphi(x_1) \in \mathrm{Int}\,\varphi(V) \implies \varphi(x_0) \in \mathrm{Int}\,\varphi(x_0 x_1^{-1} V) \overset{x_1 \in V \text{ sim.}}{\subseteq} \mathrm{Int}\,\varphi(x_0 V V) \subseteq \mathrm{Int}\,\varphi(U).$$

Sjetimo se: x_0 je proizvoljna točka iz U, stoga smo pokazali da je proizvoljna $\varphi(x_0)$ iz $\varphi(U)$ ujedno u $\mathrm{Int}\,\varphi(U)$. Dakle, $\varphi(U)$ je otvoren skup i $\varphi : G \to S$ je otvoreno preslikavanje. Prema svemu pokazanom, zaključujemo da je $\Phi : G/H \to S$ homeomorfizam.

Pokažimo da je Φ G-ekvivarijantno preslikavanje. Primijetimo da djelovanje G na G/H, $x \cdot yH = (xy)H$, možemo zapisati kao $x \cdot q(y) = q(xy)$. Za $x \in G$ i $q(y) = yH \in G/H$ imamo:

$$\Phi(x \cdot q(y)) = \Phi(q(xy)) = \varphi(xy) = xys_0 = x(ys_0) = x \cdot \varphi(y) = x \cdot \Phi(q(y)).$$

Dakle, Φ je traženi G-ekvivarijantni homeomorfizam. □

Primjer 4.1.5. *Neka je $G = \mathbb{R}$ LKH grupa sa zbrajanjem kao grupnom operacijom i diskretnom topologijom, dakle $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. G-prostor koji razmatramo neka je također $\mathbb{R}$, međutim opskrbljen klasičnom topologijom, s djelovanjem $(x, s) \mapsto x + s$. Pratimo notaciju iz dokaza prethodnog teorema (4.1.4). Neka je $s_0 = 0$, pa je stabilizator od 0 skup $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 0 = 0\} = \{0\}$. Zbog toga što možemo identificirati $\mathbb{R}/\{0\}$ i $\mathbb{R}$, također identificiramo $\Phi/\{0\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Odnosno, $\Phi(x) = \varphi(x) = x + 0 = x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $\Phi(A) = A$ za svaki $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, stoga Φ ne može biti otvoreno preslikavanje $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$, gdje je $\mathcal{E}$ klasična topologija na $\mathbb{R}$. Dakle, premda Φ jest neprekidna bijekcija, nije otvoreno preslikavanje, pa nije ni homeomorfizam. U vidu prethodnog teorema, implicitno smo pokazali da $(R, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ nije σ-kompaktan topološki prostor. Eksplicitno, znamo da je $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ kompaktan u diskretnoj topologiji ako i samo ako je konačan, a zbog neprebrojivosti $\mathbb{R}$ se ne može pokriti s prebrojivo mnogo konačnih skupova.*

Preko $\Phi : G/H \to S$ identificiramo neki tranzitivni G-prostor S s G/H. Preciznije, pokazali smo $S = \Phi(G/H) = \varphi(G)$, što je orbita proizvoljno odabranog $s_0 \in S$, a H je stabilizator od s_0. Pitanje je što se događa ako odaberemo neki drugi $s_0' \in S$. Dakako, imamo $S = \Phi'(G/H') = \varphi'(G)$, što jest drugačija identifikacija. Međutim, ove dvije identifikacije "isprepletene su" na pravilan način. Naime, zbog tranzitivnosti postoji $x_0 \in G$ takav da je

$s_0' = x_0 s_0$. Preslikavanje $h : G \to G$ definirano s $x \mapsto x_0 x x_0^{-1}$ je tada homeomorfizam koji slika H u H' i automorfizam grupe G.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "q'"] \\ G/H \arrow[r, "\overline{h}"] & G/H' \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Lako vidimo da h inducira homeomorfizam $\overline{h}$ tako da gornji dijagram komutira. Želimo pokazati da je $\overline{h}$ G-ekvivarijantno preslikavanja, tj. da vrijedi:

$$\overline{h}(x \cdot q(y)) = h(x) \cdot \overline{h}(q(y)), \ \forall x, y \in G.$$

Koristeći gornji komutativni dijagram (4.2) te činjenicu da je h homomorfizam, pokažimo da je $\overline{h}$ G-ekvivarijantno preslikavanje:

$$\overline{h}(x \cdot yH) = (\overline{h} \circ q)(xy) = (q' \circ h)(xy) = q'(h(x)h(y)) = h(x) \cdot q'(h(y)) = h(x) \cdot \overline{h}(yH).$$

Dalje, očekujemo da možemo povezati identifikacije Φ i Φ' preko $\overline{h}$. Koristeći se komutativnim dijagramima (4.1 i njegov analogon za $'$; 4.2) za $x \in G$ imamo:

$$\begin{aligned}(\Phi' \circ \overline{h} \circ q)(x) &= (\Phi' \circ q' \circ h)(x) = (\varphi' \circ h)(x) = \varphi'(x_0 x x_0^{-1}) = x_0 x x_0^{-1} \cdot s_0' \\ &\overset{x_0 s_0 = s_0'}{=} x_0 x x_0^{-1} x_0 \cdot s_0 = x_0 \cdot (x s_0) = x_0 \cdot \varphi(x) = x_0 \cdot (\Phi \circ q)(x)\end{aligned}$$

Dakle:

$$(\Phi' \circ \overline{h})(q(x)) = x_0 \cdot \Phi(q(x)), \ \forall x \in G,$$

stoga, jer je q surjekcija, zaključujemo:

$$\Phi' \circ \overline{h} = x_0 \cdot \Phi.$$

Općenito ćemo tranzitivne G-prostore identificirati na opisani način s kvocijentnim prostorima G/H i sada podrobno razumijemo veze između različitih identifikacija istog homogenog prostora.

4.2 O mjerama na homogenim prostorima

Sada smo već naviknuti na činjenicu da na svakoj lokalno kompaktnoj Hausdorffovoj grupi postoji do na množenje pozitivnim skalarom jedinstvena lijeva Haarova mjera, tj. Radonova mjera invarijantna na lijeve translacije. U svjetlu svježih rezultata o homogenim prostorima, postavlja se pitanje mogućnosti nekakvog prijenosa lijeve Haarove mjere iz grupe G na homogeni G-prostor. Dakako, znamo da je homogeni G-prostor homeomorfan kvocijentnom prostoru G/H za neku zatvorenu podgrupu H od G, zbog čega, moglo bi se reći, za ispitivanje prijenosa mjere iz G na homogeni G-prostor uopće ne moramo "izlaziti" iz grupe G, što bitno olakšava rad.

Uzmimo, dakle, proizvoljnu lokalno kompaktnu Hausdorffovu grupu G i njezinu proizvoljnu zatvorenu podgrupu H. Kao što je već napomenuto, kvocijentni prostor G/H je lokalno kompaktan i Hausdorffov topološki prostor, ali nije nužno topološka grupa, čak ni grupa uopće (u slučaju kada je H normalna podgrupa, G/H jest topološka podgrupa). Zbog toga se ne možemo pozivati na pokazane teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti lijeve Haarove mjere. Uostalom, strogo gledano, općenito ne postoji lijeva Haarova mjera na G/H, jer Haarova mjera pretpostavlja strukturu grupe. Međutim, s obzirom da grupa G djeluje na kvocijentni prostor G/H preslikavanjem $x \cdot (yH) \mapsto (xy)H$, postoji prikladna definicija lijeve translacije na G/H:

$$xB := \{x \cdot yH \mid yH \in B\},\ B \subseteq G/H.$$

Slijedi da je Radonova mjera μ na G/H "lijeva Haarova mjera" - zvat ćemo je **G-invarijantna** Radonova mjera na G/H, ako je $\mu(xB) = \mu(B)$ za sve $B \in B(G/H)$ i sve $x \in G$.

Premda, nažalost, svaki kvocijentni prostor G/H nema G-invarijantnu mjeru (v. kontraprimjer u [5, str. 61.]), postoji jednostavan nužan i dovoljan uvjet za njezinu egzistenciju. Dokaz egzistencije G-invarijantne mjere na G/H izvodi se po već poznatoj "špranci": pomoću Rieszovog teorema o reprezentaciji mjere funkcionalom. Prevedimo naše pitanje iz jezika mjera u jezik funkcionala: zanima nas postoji li lijevo invarijantan pozitivan linearan funkcional I na prostoru $C_c(G/H)$, znajući da, kako na G imamo lijevu Haarovu mjeru λ, na prostoru $C_c(G)$ postoji lijevo invarijantni pozitivni linearni funkcional I_λ. Štoviše, znamo da je $I_\lambda(f) = \int_G f dx$ (koristimo ponovno skraćenicu dx za $d\lambda(x)$), uz napomenu da je I_λ jedinstven do na množenje pozitivnim skalarom.

Primijetimo, kada bismo bili imali surjekciju, označimo je s P, između prostora $C_c(G)$ i $C_c(G/H)$, mogli bismo pokušati definirati funkcional I na $C_c(G/H)$ preko funkcionala I_λ na $C_c(G)$. Preciznije, htjeli bismo definirati I takav da donji dijagram komutira.

$$\begin{tikzcd} C_c(G) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "I_\lambda"'] & C_c(G/H) \arrow[dl, "I"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Ukoliko će naš I biti lijevo-invarijantan, pozitivan, linearan i nadasve dobro definiran funkcional, Rieszov teorem dat će nam traženu G-invarijantnu mjeru μ na G/H. Vrijedit će, također, $I(g) = I_\mu(g) = \int_{G/H} g d\mu$, i postojat će $f \in C_c(G)$ t.d. $P(f) = g$, a uz komutativni dijagram (4.3), imamo:

$$\int_G f\,dx = I_\lambda(f) = I(P(f)) = I_\mu(P(f)) = \int_{G/H} P(f)\,d\mu = \int_{G/H} g\,d\mu, \tag{4.4}$$

što motivira sljedeću definiciju funkcije $P(f)$:

$$(P(f))(xH) := \int_H f(x\xi)\,d\xi, \quad (d\xi \text{ je LHM na } H). \tag{4.5}$$

Naime, $P(f)$ u točki xH daje integriranu f po xH kao podskupu od G, stoga ima smisla očekivati da će integral od $P(f)$ po kvocijentnom prostoru G/H (u prikladnoj mjeri) biti jednak funkciji f integriranoj po G, odnosno ima smisla očekivati da će vrijediti (4.4). Također, lako se vidi da se P ponaša linearno, pozitivno i lijevo-invarijantno. Nešto teže se pak pokaže da je $P(f)$ zapravo u $C_c(G/H)$, za $f \in C_c(G)$.

Ukratko, P je zaista dobro definirano s (4.5), i sada je, dakle, pitanje je li za proizvoljan $P(f) \in C_c(G/H)$ dobro definiran funkcional $I(P(f)) = I_\lambda(f)$, odnosno, ako je $P(f) = P(g)$, je li $I_\lambda(f) = I_\lambda(g)$, tj. $\int_G f\,dx = \int_G g\,dx$. Odgovor na ovo pitanje nije uvijek potvrdan i samo zbog toga nema svaki kvocijentni prostor G/H G-invarijantnu mjeru. Međutim, ispada da je odgovor potvrdan ako je $\Delta_G|_H = \Delta_H$. Štoviše, ako pretpostavimo da postoji G-invarijantna mjera μ na G/H, pripadni funkcional I_μ na $C_c(G/H)$ definira funkcional $I_\mu \circ P$ na prostoru $C_c(G)$, stoga vrijedi (4.4), iz čega pak nije teško pokazati da slijedi $\Delta_G|_H = \Delta_H$. Dakle, $\Delta_G|_H = \Delta_H$ je najavljeni nužni i dovoljni uvjet za postojanje G-invarijantne mjere Radonove mjere na G/H. To je preciznije iskazano u sljedećem teoremu, čiji se detaljan dokaz, koji smo ovdje samo skicirali, može pronaći u [5, str. 62.]:

Teorem 4.2.1. *Neka je G lokalno kompaktna (Hausdorffova) grupa i H zatvorena podgrupa u G. Na kvocijentnom prostoru G/H postoji do na množenje pozitivnim skalarom (realnim brojem) jedinstvena G-invarijantna Radonova mjera μ ako i samo ako je $\Delta_G|_H = \Delta_H$. U tom slučaju, možemo odabrati pozitivan skalar tako da vrijedi:*

$$\int_{G/H} P(f)\,d\mu = \int_G f(x)\,dx, \ \forall f \in C_c(G). \tag{4.6}$$

Neka je sada $\Delta_G|_H \neq \Delta_H$. Znamo da u tom slučaju ne postoji G-invarijantna mjera na G/H tj. ne postoji mjera μ t.d. $\mu(xB) = \mu(B)$ za sve $x \in G$ i $B \in B(G/H)$. Ipak, postoje mjere na G/H za koje vrijedi nešto relativno blisko tome. Za početak, za $x \in G$ definiramo mjeru μ_x na G/H:

$$\mu_x(B){:=}\mu(xB), \ B \in B(G).$$

Promatramo familiju mjera $\{\mu_x\}_{x\in G}$. Dakako, kada bi μ bila G-invarijantna, sve mjere u ovoj familiji bile bi međusobno jednake. Uvjet jednakosti olabavit ćemo u uvjet ekvivalencije nenegativih mjera, koju smo definirali u preliminarnim sadržajima. Dakle, kažemo da je mjera μ **kvazi-invarijantna**, ako je $\{\mu_x\}_{x\in G}$ familija međusobno ekvivalentnih mjera. To znači da je Radon-Nikodymova derivacija $\frac{d\mu_x}{d\mu_y} > 0$, za sve $x, y \in G$. Ekvivalentno rečeno, budući da je riječ o relaciji ekvivalencije, μ je kvazi-invarijantna ako je $\frac{d\mu_x}{d\mu} > 0$, za svaki $x \in G$. Primijetimo da se nul skupovi mjera iz $\{\mu_x\}_{x\in G}$ podudaraju kada je μ kvazi-invarijantna mjera.

Zatim, kažemo da je mjera μ **strogo kvazi-invarijantna**, ako je preslikavanje:

$$\lambda(x, p) = \frac{d\mu_x(p)}{\dot{\mu}(p)},\ \lambda : G \times (G/H) \to \langle 0, +\infty\rangle$$

neprekidna funkcija. Prema definiciji iz preliminarnih sadržaja, μ_x i μ su strogo ekvivalentne ako je derivacija $\frac{d\mu_x}{d\mu}$ pozitivna i neprekidna. Primijetimo, ako je mjera μ strogo kvazi-invarijantna, onda $\{\mu_x\}_{x\in G}$ jest familija međusobno strogo ekvivalentnih mjera, međutim to nije dovoljan uvjet da bi μ bila strogo kvazi-invarijantna. Naime, iz definicije vidimo da odnos $x \in G$ i derivacije $\frac{d\mu_x}{d\mu}$ također mora biti neprekidan.

Uz ovako olabavljene uvjete imamo egzistenciju: na svakom kvocijentnom prostoru G/H postoji strogo kvazi-invarijantna mjera. Svaka strogo kvazi-invarijantna mjera ima pripadnu tzv. ρ-**funkciju**, koja predstavlja težinu koliko je koja kvazi-invarijantna mjera "kvazi": to je neka neprekidna funkcija $\rho : G \to \langle 0, +\infty\rangle$ koja prati nejednakost $\Delta_G|_H \neq \Delta_H$ tako da vrijedi:

$$\rho(x\xi) = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}\rho(x),\ \forall x \in G,\ \forall \xi \in H.$$

Vidimo da, ako je $\Delta_G|_H = \Delta_H$, onda je ρ konstanta na H. Naposljetku, sljedeći teorem daje opis egzistencije i jedinstvenosti strogo kvazi-invarijantnih mjera na kvocijentnom prostoru G/H i svojevrsna je nadgradnja gornjeg Teorema 4.2.1 o egzistenciji i jedinstvenosti G-invarijantne mjere na G/H, što se vidi iz usporedbe jednakosti (4.6) i (4.7).

Teorem 4.2.2. *Neka je G lokalno kompaktna (Hausdorffova) grupa i H zatvorena podgrupa u G. Za svaku ρ-funkciju para (G, H) postoji strogo kvazi-invarijantna mjera μ na G/H takva da vrijedi:*

$$\int_{G/H} P(f)\, d\mu = \int_G f(x)\rho(x)\, dx,\ \forall f \in C_c(G). \tag{4.7}$$

Obratno, za svaku strogo kvazi-invarijantnu mjeru μ na G/H postoji ρ-funkcija para (G, H) takva da vrijedi (4.7). Također, sve strogo kvazi-invarijantne mjere na G/H međusobno su strogo ekvivalentne.

Bibliografija

[1] J. Adamus, *Measure Theory Lecture Notes*, `https://www.uwo.ca/math/faculty/adamus/teaching/4122b2020/MeasureTheoryLN1.pdf`, posjećeno u kolovozu 2022.

[2] D. Bakić, *Normirani prostori*, PMF-MO, Zagreb, 2012., skripta.

[3] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: General Topology, Pt. 2*, Addison-Wesley Educational Publishers Inc., Reading, Massachusetts, 1966.

[4] G. B. Folland, *Real Analysis (2nd ed.)*, John Wiley, New York, 1999.

[5] ———, *A Course in Abstract Harmonic Analysis (2nd ed.)*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2015.

[6] A. Haar, *Der Mass in der Theorie der kontinuerlichen Gruppen*, Annals of Mathematics **34** (1933), br. 1, `https://www.jstor.org/stable/pdf/1968346.pdf`.

[7] Lautréamont, *Maldoror [sabrana djela Isidorea Ducassea]*, Šareni dućan, Koprivnica, 2012.

[8] R. Mrazović, *Mjera i integral*, PMF-MO, Zagreb, 2022., skripta.

[9] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups (2nd ed.)*, Wiley-Interscience, New York, 1962.

[10] A. Weil, *L'Intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications, Deuxième Édition*, Hermann, Paris, 1965.

[11] H. Šikić i I. Krijan, *Mjera i integral*, PMF-MO, Zagreb, 2012., skripta.

[12] B. Širola, *Algebarske strukture*, PMF-MO, Zagreb, skripta.

Sažetak

U ovom radu bavimo se lokalno kompaktnim grupama kao najopćenitijim matematičkim objektima koji imaju lijevu (desnu) Haarovu mjeru, tj. Radonovu mjeru invarijantnu s obzirom na lijeve (desne) translacije. Nakon preliminarnih sadržaja sakupljenih u prvom poglavlju, u drugom poglavlju razmatramo osnovna svojstva topoloških i lokalno kompaktnih grupa te kao glavni rezultat dokazujemo egzistenciju i jedinstvenost lijeve (desne) Haarove mjere na proizvoljnoj lokalno kompaktnoj grupi. Iduće poglavlje bavi se algebrom mjera $M(G)$ i prostorom $L^1(G)$, gdje je G neka lokalno kompaktna grupa, i pokazujemo kako s uvedenom konvolucijom oba prostora posjeduju strukturu Banachove $*$-algebre. Naposljetku, u četvrtom poglavlju predstavljamo dva teorema o egzistenciji i jedinstvenosti invarijatnih i kvazi-invarijantnih mjera na homogenim prostorima, što su prostori snabdjeveni djelovanjem neke lokalno kompaktne grupe.

Summary

In this paper, we study the locally compact groups as the most general mathematical objects which have left (right) Haar measure, i.e. left (right) translation-invariant Radon measure. After the preliminaries assembled in Chapter 1, in Chapter 2 we examine basic features of topological and locally compact groups and as a main result we prove the existence and uniqueness of left (right) Haar measure on a locally compact group. Chapter 3 deals with the measure algebra $M(G)$ and space $L^1(G)$, where G is some locally compact group, and following the introduction of convolution, we show that both spaces have the structure of Banach $*$-algebra. Finally, in Chapter 4 we present two theorems about the existence and uniqueness of invariant and quasi-invariant measures on the homogeneous spaces, which are spaces equipped with an action of some locally compact group.

Životopis

Rođen sam 26. srpnja 1996. godine u Zagrebu. Odrastao sam u mjestu Obrankovec, kraj kojeg sam pohađao Osnovnu školu Sveti Đurđ, nakon čega upisujem i završavam Prvu gimnaziju Varaždin. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovao sam na brojnim natjecanjima u znanju, od kojih bih izdvojio državna natjecanja iz matematike gdje sam nekoliko puta nagrađen i pozvan na Hrvatsku matematičku olimpijadu.

Preddiplomski studij Matematike na zagrebačkom PMF-u upisao sam 2015., a završio 2018. godine, kada upisujem diplomski studij Teorijske matematike na istom fakultetu. Kao student uključio sam se u rad udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić", držao demonstrature iz kolegija Elementarna geometrija te 2020. godine primio nagrade Odsjeka i Fakulteta za izvrstan uspjeh na diplomskom studiju. Također studiram filozofiju i komparativnu književnost na Filozofskom fakultetu u Zagrebu.