Matematičke igre u nastavi matematike

Belošević-Mirt, Mirta

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Mirta Belošević-Mirt

MATEMATIČKE IGRE U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Matija Bašić

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija igara je grana primijenjene matematike koja proučava stratešku međuovisnost, odnosno situacije u kojima odluke jedne osobe utječu na odluke druge osobe i obratno. Osobe koje sudjeluju nazivamo igračima. Cilj je odrediti najpovoljnije strategije za svakog od igrača. Teorija igara se primjenjuje u ekonomiji, politici i drugim znanostima prilikom donošenja odluka i strategija. Glavna područja primjene teorije igara su kombinatorka, računarstvo i ekonomija. U ovom diplomskom radu opisat ću igre koje proučava kombinatorna teorija igara te njihovu primjenu u nastavi matematike. Kombinatornu igru Nim smatramo osnovnom bazom i matematičke rezultate te igre možemo primijeniti u svakoj kombinatornoj simetričnoj igri. Na ovaj način, vrlo jednostavnim matematičkim igrama s jednostavnim pravilima učenicima predstavimo teoriju kombinatornih i nekombinatornih igara i strategije njihova rješavanja. U radu ću opisati matematičke koncepte koje učenici kroz razne aktivnosti usavršavaju. Svi matematički koncepti koje učenici usvajaju kroz obrazovanje, međusobno su povezani. Važno je da učenici u svojem obrazovanju usvoje osnovne matematičke koncepte kako bi ih uspješno primijenili u svakodnevnom životu i u drugim područjima. Matematički koncepti prate odgojno-obrazovne ishode te su primjereni razvojnim mogućnostima učenika i njihovoj dobi. Kako bi učenik uspješno savladao matematički sadržaj, važno je da razvija matematičke procese koji uključuju prikazivanje i komunikaciju, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjenu tehnologije. Način izvođenja nastave treba biti okrenut prema učenicima, te se njeguje istraživačka nastava, odnosno učenje otkrivanjem i spoznajom. Primjenu teorije igara u kombinatornim igrama prikazat ću kroz opis prilagodbe igara u nastavi.

Poglavlje 1

Kombinatorna teorija igara

1.1 O kombinatornoj teoriji igara

Začetkom kombinatorne teorije igara smatramo djelo iz 1939. *Mathematics and Games*, autora Franka J. Spraguea i Stephena Grundyja. Moderna kombinatorna teorija igara kakvu poznajemo danas razvila se zahvaljujući John H. Conwayjevoj *On Numbers and Games* iz 1976. godine te kasnije 1982. godine djelu *Winning Ways for your Mathematical Plays* autora Elwyn R. Berlekampa, John N. Conwayja i Ricard K. Guyja. Kombinatorna teorija igara proučava točna rješenja određenih igara i njihove ishode prikazane u algebarskom obliku, strukturu kombinatornih igara te složenost igara i pozicija u igrama.

Kombinatorna teorija igara proučava kombinatorne igre, njihovu analizu, strategije i pozicije u igrama u kojima sudjeluju dva igrača. Oba igrača imaju uvid u trenutno stanje igre dok primjerice u igrama s kartama jedan igrač nema uvid u karte drugog igrača. U kombinatornim igrama nema elemenata slučajnosti poput bacanja kockica ili izvlačenja karata. Oba igrača su upoznata s točno definiranim pravilima igre. Pravila igre određuju i pozicije i poteze koji se smiju odigrati ovisno o trenutnoj poziciji igrača. Kombinatorne igre prema Berlekampu, Conwayju i Guyju možemo podijeliti na simetrične i nesimetrične igre. Simetrične igre su one u kojima oba igrača imaju iste moguće poteze iz bilo kojeg položaja u igri, dok u parnesimetričnim igrama svaki igrač ima različite moguće poteze ovisno o trenutnom položaju primjerice šah. Sve kombinatorne igre završavaju u konačnom broju poteza. Ishod igre može jedino biti pobjeda ili gubitak, dakle nije moguće igru završiti neriješeno bez pobjednika. Rezultat ne može biti neriješeno s obzirom na to da je postavljen uvjet da igra završava u konačnom broju poteza. Sve igre su određene skupom mogućih pozicija, početnom pozicijom i osobom koja je na redu da povuče potez. Igra se odvija tako da igrači naizmjenično povlače poteze sve dok jedan od igrača ne dođe u krajnju poziciju iz koje nema više mogućih poteza. Dakle, pravila igre određuju da će igra završiti u određenom broju poteza, a pobjednik se određuje temeljem zadnjeg poteza. Kombinatorne igre možemo podijeliti u dvije vrste s obzirom na zadnji potez. Igre u kojima je pobjednik igrač koji je povukao zadnji potez, a drugi igrač nema više poteza nazivamo normalne igre, primjerice Nim. S druge strane, gubitnik može biti igrač koji je povukao zadnji potez. Tu varijantu kombinatornih igara nazivamo *misere* igre, primjerice Chomp. U ovom radu smatrat ćemo da je gubitnik igrač koji nema više poteza koje može odigrati.

S obzirom na to da su kombinatorne igre najčešće igre s jednostavnim i jasnim pravilima, lako se mogu implementirati u srednjoškolsku i osnovnoškolsku matematiku. Igre za djecu predstavljaju zabavu. Korištenjem matematičkih igara u nastavi matematike učenici aktivno sudjeluju u nastavi igrajući matematičke igre i rješavajući matematičke probleme.

1.2 Simetrične igre

Proučavajući kombinatorne igre, nameću se pitanja: Kako analizirati igru? Je li jedan od igrača uvijek pobjednik? Kako odrediti koji igrač će igru započeti? Je li bolje igrati prvi ili drugi? Koja strategija je pobjednička? Kako bismo jednostavnije analizirali pobjedničku strategiju, promatrat ćemo igre s obzirom na pozicije koje dovode u gubitničku poziciju.

Definirajmo najprije pozicije prema redoslijedu igre. Neka su P-pozicije, pobjedničke pozicije za igrača koji je upravo odigrao svoj potez. S druge strane, neka su N-pozicije, pobjedničke pozicije igrača koji je sljedeći na potezu. Završnom pozicijom smatramo onu poziciju nakon koje više nema mogućih poteza (terminal position).

U simetričnim igrama moguće je odrediti P i N pozicije korištenjem sljedeće metode:

1. korak: Sve krajnje pozicije označiti kao P-pozicije.
2. korak: Sve pozicije iz kojih se jednim potezom može doći u P-poziciju označimo kao N-pozicije.
3. korak: Potrebno je pronaći pozicije koje vode u N-pozicije iz prethodnog koraka i označiti ih kao P-pozicije
4. korak: Ako u koraku 3. nema novih P-pozicija, sve pozicije su određene, u suprotnom, vrati se na korak 2.

Slijedeći opisanu metodu, lako se vidi da u konačnici igrač pomicanjem u P-pozicije pobjeđuje. Iz svake P-pozicije, jedina opcija koja je preostala suparniku je da dođe u N-poziciju. Naposljetku, igra završava u završnoj krajnjoj poziciji koju smo definirali kao P-poziciju, stoga je pobjednik igrač koji slijedi opisanu metodu.

Karakterizacija P-pozicija i N-pozicija za simetrične kombinatorne igre

Karakterizacija se odnosi na simetrične kombinatorne igre koje završavaju u konačnom broju poteza. P i N-pozicije su zadane rekurzivno na sljedeći način:

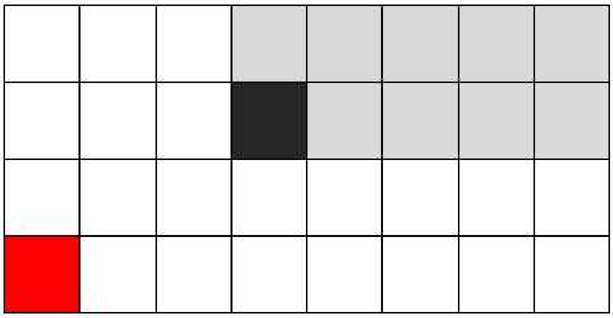
1. Sve krajnje pozicije su P-pozicije.
2. Iz svake N-pozicije, postoji barem jedan potez koji vodi u P-poziciju.
3. Iz svake P-pozicije, slijedi potez u N-poziciji.

Kada bismo promatrali verziju igre u kojoj je gubitnik igrač koji je povukao zadnji potez; *misere* igra, prvi uvjet je da su sve završne pozicije N-pozicije.

Primijenit ćemo karakterizaciju P-pozicija i N-pozicija na kombinatornim simetričnim igrama koje nazivamo igre oduzimanja. Dobile su naziv prema skupini igara u kojima igrači naizmjenično dodaju, premještaju ili uzimaju žetone ili novčiće.

Chomp

Igru Chomp osmislio je Fred Schuh 1952. godine, a igru kakvu danas poznajemo prikazao je David Gale 1974. godine. Igra se na pravokutnoj ploči sa $m \times n$ kvadratića. Kvadratić koji se nalazi u donjem lijevom kutu smatramo otrovnim. Neka i označava broj stupca, a j broj retka, te neka je $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Prema pravilima igre, igrač koji uzme kvadratić $(1, 1)$ je gubitnik. Igrači igraju naizmjenično uzimajući kvadratiće. Kada igrač koji je na redu odabere kvadratić (i, j), iz igre se miču svi kvadratići iznad i desno od tog kvadratića, odnosno kvadratići (a, b) za $i \leq a$ i $j \leq b$ kao što je prikazano na slici 1. Kada bismo igru igrali tako da je pobjednik igrač koji prvi pojede "otrovni" kvadratić, igra ne bi imala smisla jer bi pobjednik bio onaj koji je prvi na potezu.



Slika 1.1: Chomp ploča 4×8

Sljedeći teorem nam govori o tome tko je pobjednik igre Chomp.

Teorem 1.2.1. *Neka je Chomp igra na pravokutnoj ploči veličine veće od* 1×1*. Pobjednik je uvijek igrač koji započinje igru (igrač koji je prvi na potezu).*

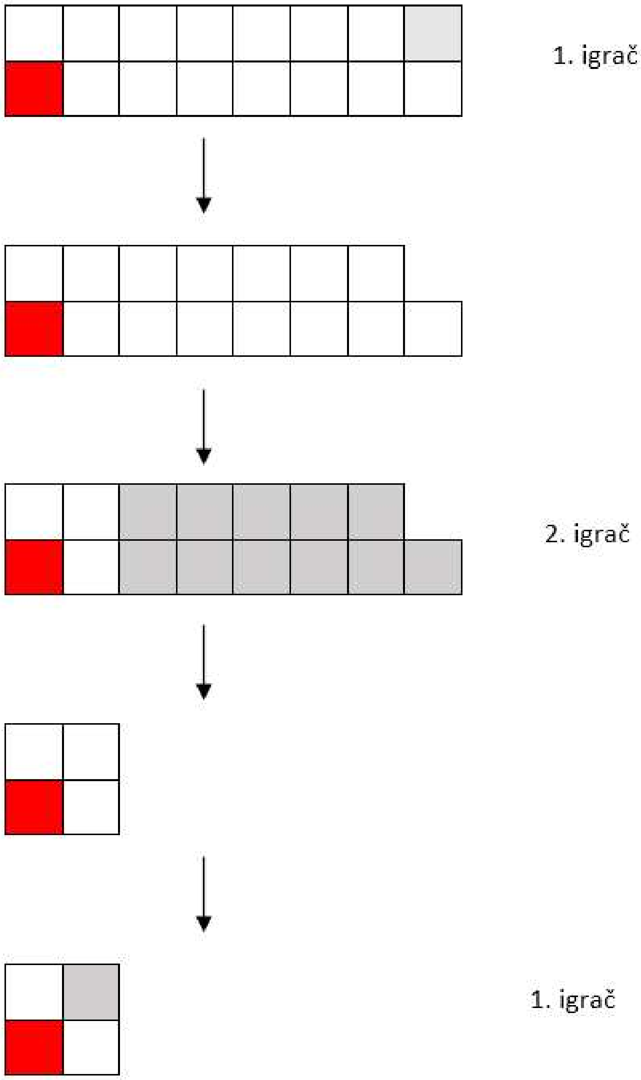
Dokaz. Pretpostavimo da igrač koji je prvi na potezu odabere kvadrat $(1, n)$ odnosno kvadrat u gornjem desnom vrhu. Kada bismo taj potez smatrali P-pozicijom, tada bi prvi igrač bio pobjednik prateći metodu određivanja P i N-pozicija. No, kada bi to bila N-pozicija, drugom igraču ostaje mogućnost odabiranja kvadrata položaja (i, j) koji ga vodi k P-poziciji. S obzirom da je prvi igrač mogao izabrati taj kvadrat (i, j) već pri prvom potezu i time sigurno eliminirati kvadrat $(1, n)$, zaključujemo da je potez prvog igrača pobjednički. □

Ovim teoremom dokazali smo da je igrač koji je prvi na potezu zaista pobjednik, no ne i koja strategija je pobjednička. Ne postoji teorem koji prikazuje pobjedničku strategiju na pravokutnoj ploči veličine $m \times n$, no za pojedine slučajeve je moguće odrediti pobjedničku strategiju [1].

Primjer 1.2.2. *Za ploču veličine* $2 \times n$ *odredite pobjedničku strategiju (slučaj* $n \times 2$ *je analogan).*

Rješenje. Prvi igrač koji je na potezu bira kvadrat u gornjem desnom kutu ostavljajući protivniku pravokutnik bez tog kvadratića. Bez obzira koji potez će osigrati protivnik, prvi igrač uvijek bira kvadrat tako da protivniku preostaje pravokutnik bez gornjeg desnog kuta. Koristeći se ovom strategijom, prvi igrač uvijek pobjeđuje.

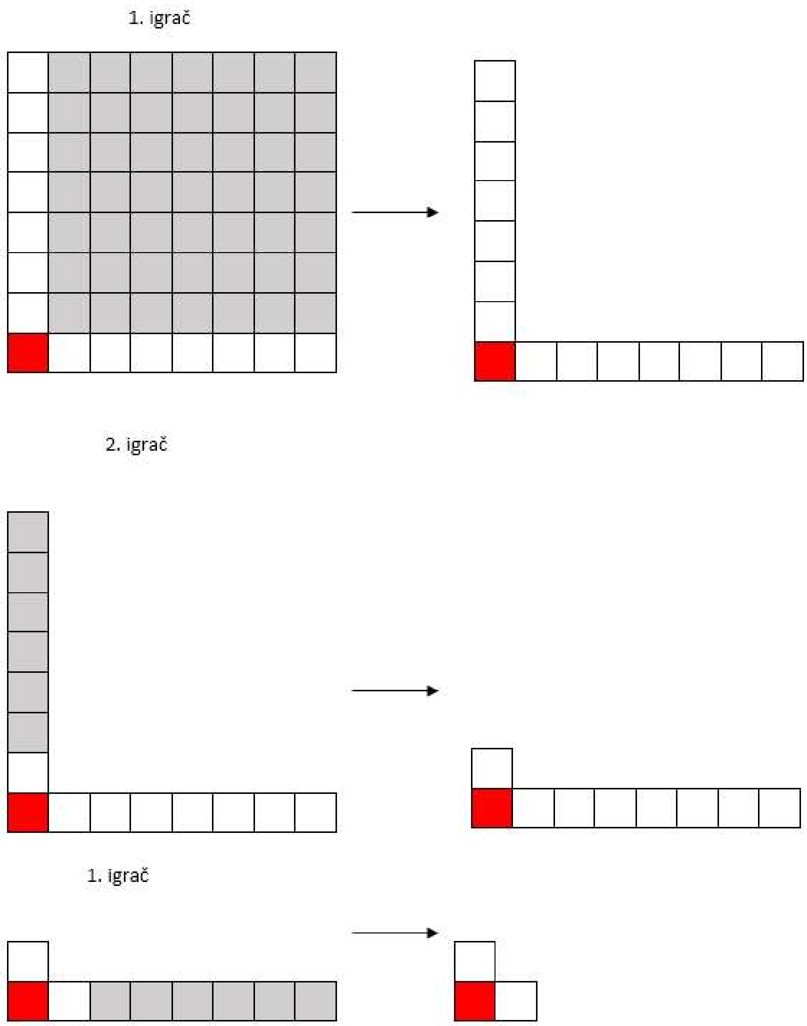
Primjer igre na pravokutniku 2×8 je prikazan na slici 1.2. Unatoč broju stupaca na pravokutnoj ploči, prvi igrač prati opisanu strategiju i pobjeđuje.



Slika 1.2: Chomp 2×8

Primjer 1.2.3. *Za ploču veličine $n \times n$ odredite pobjedničku strategiju.*

Rješenje. Prvi igrač bira kvadrat na poziciji $(2,2)$ te protivniku ostavlja ploču oblika slova L u kojem je broj kvadratića prvog stupca jednak broju kvadrata u zadnjem retku. Nakon što drugi igrač odigra svoj potez, strategija prvog igrača je kopirati poteze ostavljajući ploču u obliku slova L i jednakim brojem kvadrata u prvom stupcu i zadnjem redu. U konačnici, drugom igraču preostaje otrovani kvadrat.



Slika 1.3: Chomp $n \times n$

Također, zanimljiva je strategija koju koristimo na pravokutoj ploči 3×5. Prvi igrač bira kvadratić na položaju $(1,4)$. Prvi igrač uvijek ostavlja barem jedan kvadratić u prvom stupcu kako bi osigurao pobjedu. Osim na pravokutnoj ploči, Chomp se može igrati i u višedimenzionalnim prostorima, no generalizacija pobjedničke strategije ne postoji.

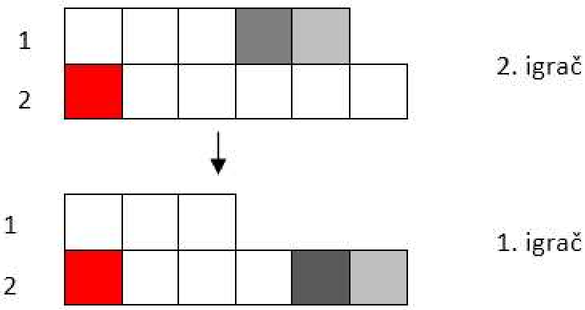
Prilagodba za primjenu igre Chomp u nastavi

Učenici igraju igru Chomp u parovima. Učenicima su objašnjena pravila igre. Gubitnik je onaj igrač kojemu je jedini preostali potez biranje otrovanog kvadrata. Svaki par dobiva 30 jednakih kvadrata i po volji ih slažu u pravokutnik (učenici ne moraju iskoristiti sve kvadrate). Kako bi učenici lakše odredili pobjedničku strategiju, najbolje je postaviti igru s manjim brojem kvadrata npr. 3×2. Učenici trebaju odrediti sve moguće poteze ovisno o prvom potezu prvog igrača. Nakon par pokušaja, mogu zaključiti da jedini kvadrati koje prvi igrač pri prvom potezu ne smije odigrati su oni na položaju $(1, 2)$ i $(2, 1)$ odnosno susjedni kvadrati otrovnom kvadratu.

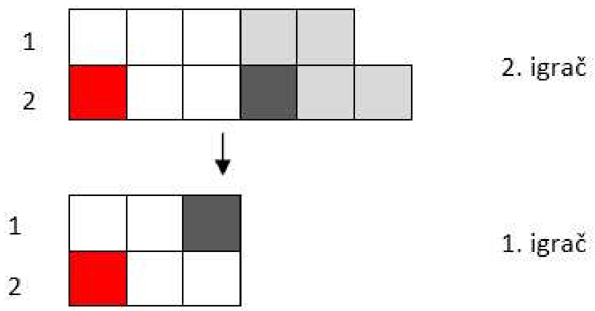
Učenici najprije igraju na ploči veličine $2 \times n$ gdje je n prirodni broj između 2 i 15. Ako je prvi potez prvog igrača poznat, gornji desni kvadrat, može li drugi igrač pobijediti? Koji potez prvi igrač mora odigrati da bi pobjedio? Učenici jednostavno mogu zaključiti koja je pobjednička strategija prvog igrača ponavljanjem igre na različitim pravokutnim mrežama. Pogledajmo strategije ako je prvi potez određen gornjim desnim kvadratom:

- Ako prvi igrač odabere gornji desni kvadrat, a drugi igrač odabere neki kvadrat iz drugog reda. Što mora odigrati prvi igrač kako bi pratio pobjedničku strategiju i pobijedio? Pozicija igre je prikazana na slici 1.5. - Prvi igrač mora pratiti pobjedničku strategiju i odabrati kvadrat tako da na ploči preostane pravokutnik sličan početnom, ali bez gornjeg desnog kuta (pravokutnik $2 \times l$, za $l < n$, $l \in \mathbb{N}$)

- Ako prvi igrač odabere gornji desni kvadrat, a drugi igrač odabere kvadrat iz prvog reda, na koji način prvi igrač odabire pobjedničku strategiju s početka igre? Prvi igrač ponovno odabire kvadrat u gornjem desnom kutu te tom strategijom na kraju i pobjeđuje. Pozicija igre nakon prvog poteza prikazana je na slici 1.4.



Slika 1.4: Chomp 2×6, drugi i treći potez



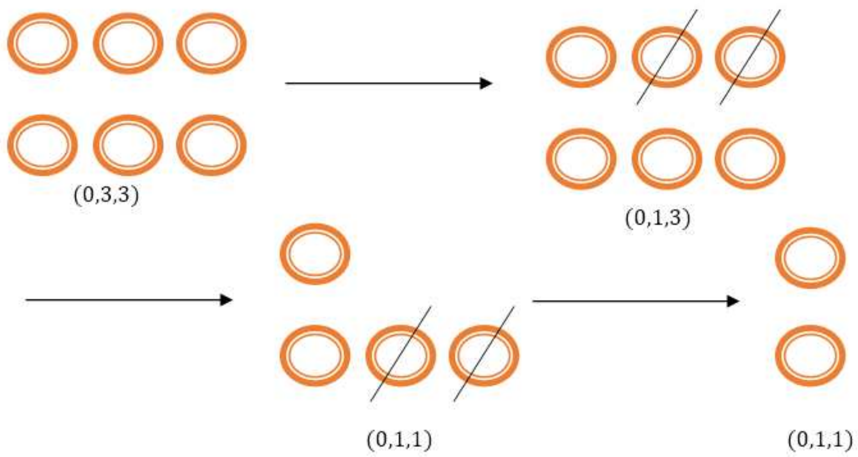
Slika 1.5: Chomp 2×6, drugi i treći potez

Nim

Nim i sve njegove varijante jedna je od najpoznatijih kombinatornih igara. Igra se tako da se po volji izabran broj žetona (ili štapića, šibica i sl.) rasporedi u po volji izabran broj redaka. Radi lakšeg razumijevanja, neka je broj žetona postavljen u 3 retka. Neka svaki redak predstavlja hrpu žetona. Broj žetona na svakoj hrpi označit ćemo s (x_1, x_2, x_3), na primjer $(5, 7, 9)$. Igra se naizmjenično. Svaki potez sastoji se od biranja hrpe i uzimanja određenog broja žetona s jedne hrpe. U jednom potezu, igrač ne smije uzeti žetone s više hrpa. Igrač s jedne hrpe može uzeti jedan ili više žetona do najviše svih žetona koji se nalaze na toj hrpi. Pobjednik je igrač koji uzme zadnji žeton.

Koristeći ranije opisanu metodu određivanja P i N-pozicija analizirajmo igru Nim s tri hrpe žetona. Neka su x_1, x_2 i x_3 brojevi žetona u hrpama. Igra završava kada jedan igrač nema više mogućih poteza. Prema karakterizaciji P i N- pozicija, završna pozicija je ona nakon koje više nema raspoloživih žetona, odnosno broj žetona u hrpama jednak je $(0, 0, 0)$. Tu poziciju smatramo P-pozicija. Kada bi igra bila postavljena tako da su žetoni samo na jednoj hrpi $(0, 0, x)$, x$\in \mathbb{N}$ tu igru smatramo trivijalnom jer igrač koji je na redu može uzeti x žetona nakon koje je pozicija u igri jednaka $(0, 0, 0)$. Prema svojstvu 2. karakterizacije pozicija, poziciju $(0, 0, x)$ smatramo N-pozicija jer iz nje jednim potezom dolazimo do P-pozicije i pobjednika igre.

Nadalje, kada bi igra bila postavljena tako da su žetoni posloženi u dvije hrpe, P-pozicije su one u kojima je broj žetona u obje hrpe jednak primjerice $(0, 1, 1)$, $(0, 2, 2)$ itd. Kada bi igrač uzeo sve žetone s jedne hrpe, igru svodimo na slučaj $(0, 0, x)$, a tu poziciju smatramo N-pozicijom. Prema karakterizaciji pozicija iz P-pozicija, slijedi potez u N-poziciji stoga početnu poziciju smatramo P-pozicijom. U slučaju da igrač ne uzme sve žetone s hrpe kao u početnoj poziciji kada je broj žetona na obje hrpe jednak, već igrač uzme samo jedan žeton, igrač koji je sljedeći na redu ponovno može s druge hrpe uzeti jednak broj žetona i izjednačiti broj žetona na obje hrpe. Igra se naizmjenično sve dok ne ostane jedna hrpa žetona. Primjer takve igre s brojem žetona $(0, 3, 3)$ i pozicije su prikazani na slici 1.6. gdje je $(0, 3, 3)$ P-pozicija, $(0, 1, 3)$ N-pozicija, $(0, 1, 1)$ je ponovno P-pozicija iz koje dalje slijedi N-pozicija i završna pozicija $(0, 0, 0)$.



Slika 1.6: Nim igra $(0, 3, 3)$

Kada promatramo igru Nim u kojoj se u sva tri retka nalazi određeni broj žetona primjerice $(1,1,1)$ ili $(1,2,2)$ lako vidimo da su to N-pozicije iz kojih dolazimo do P-pozicija prethodno opisanih. Sljedeća jednostavna pozicija je $(1,2,3)$ koja mora biti P-pozicija jer slijedi iz N-pozicije. Prateći metodu određivanja P i N-pozicija i njihovu karakterizaciju, možemo odrediti jednostavne pozicije, no na taj način ne možemo generalizirati i odrediti bez promatranja svih slučajeva koje pozicije su dobre P-pozicije. Odgovor na to pitanje nam daje zbrajanje brojeva u binarnom sustavu.

Nim-suma

Određivanje nim-sume kao strategije koja vodi k pobjedi, prvi je odredio Charles Bouton ([8]) 1902. godine. Nim-suma predstavlja zbroj dva nenegativna cijela broja prikazana u binarnom sustavu. Svaki nenegativni cijeli broj se jedinstveno može prikazati kao broj u bazi 2. Neka je $x \in \mathbb{N}_0$ oblika:

$$x = x_m 2^m + x_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + x_1 2 + x_0$$

za neki m, gdje je x_i jednak 0 ili 1, a $i = 0, 1, \ldots, m$. Prikaz broja x u binarnom sustavu jednak je $(x_m x_{m-1} x_1 x_0)_2$. Jednostavnije, nim-suma se računa tako da dva cijela nenegativna broja prižemo u bazi dva i zbrojimo odgovarajuće vrijednosti. Prisjetimo se, pri zbrajanju u bazi 2 vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} 1+0&=1\\ 0+1&=1\\ 0+0&=0\\ 1+1&=10 \end{aligned}$$

Pri određivanju nim-sume, važno je naglasiti da se jedinica ne prenosi odnosno pri zbroju dvije jedinice piše se samo vrijednost 0.

Definicija 1.2.4. *Nim-suma brojeva $(x_m \ldots {}_0)_2$ i $(y_m \ldots {}_0)_2$ jednaka je $(z_m \ldots z_0)_2$ i pišemo:*

$$(x_m \ldots x_0)_2 \oplus (y_m \ldots y_0)_2 = (z_m \ldots z_o)_2$$

gdje za svaki $k \in \{0, \ldots, m\}$, $z_k = x_k + y_k$ zbrajanje u bazi 2 bez prenošenja jedinice.

Svojstva nim-sume

Svojstva nim-sume proizlaze iz svojstva zbrajanja u bazi 2 i za svake x i y iz $\mathbb{N}_0$ vrijedi:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z, \forall x, y, z \in \mathbb{N}_0$ asocijativnost

2. $x \oplus y = y \oplus x, \forall x, y \in \mathbb{N}_0$ komutativnost
3. $0 \oplus x = x, \forall x \in \mathbb{N}_0$, neutralni element
4. $x \oplus x = 0, \forall x \in \mathbb{N}_0$ inverzni element

Strategiju igre Nim opisati ćemo sljedećim teoremom.

Teorem 1.2.5 (Boutonov teorem)**.** *Neka je G neka pozicija u Nimu.*

Ako je pozicija G-pozicija za koju je nim-suma jednaka 0*, tada svaki potez iz pozicije G vodi u poziciju kojoj je nim-suma vrijednosti različite od* 0*.*

Ako je pozicija G pozicija nim-sume različite od 0 *tada postoji potez iz pozicije G koji vodi k poziciji s nim-sumom jednakom* 0*.*

Dokaz. Neka x_i za $i = 1, \ldots, k$ označava broj žetona na svakoj hrpi.
Pretpostavimo da je $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k = 0$ i označimo s $x_1^{'}$ broj žetona u prvom retku nakon prvog poteza. Vrijedi $x_1 \neq x_1^{'}$. Imamo:

$$x_1^{'} \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k \neq x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k = 0$$

Obratno, pretpostavimo $x = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k \neq 0$. Promotrimo j-tu znamenku binarnog zapisa broja x. Barem jedna od znamenaka x_i na j-tom mjestu je jednaka 1. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je to j-ta znamenka broja x_1. Neka je $x_1^{'} = x \oplus x_1$. Tada je $x_1^{'} < x_1$ jer je j-ta znamenka jednaka 0 i odgovara x_1 sa svim znamenkama većeg reda od j. Dakle, postoji potez koji broj žetona iz x_1 mijenja u broj žetona jednak $x_1^{'}$ i vrijedi:

$$x_1^{'} \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k = x \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_k = x \oplus x = 0$$

□

Boutonov teorem možemo izreći i na sljedeći način:

Korolar 1.2.6. *Pozicija* $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *je P-pozicija ako i samo ako je nim-suma brojeva* x_i*, za* $i = 1, \ldots, k$ *jednaka* 0*:*

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k = 0$$

Dokaz. Neka $\mathcal{P}$ označava skup svih pozicija u Nimu za koje je nim-suma jednaka 0, a $\mathcal{N}$ komplementarni skup, skup svih pozitivnih nim-suma. Provjerimo karakterizaciju P i N-pozicija:

1. *Sve krajnje pozicije su u $\mathcal{P}$.*
   Jedina krajnja pozicija je pozicija $(0, 0, \ldots, 0)$. Nim-suma jednaka je:
   $$0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 = 0$$

2. *Iz svake pozicije u $\mathcal{N}$ postoji pozicija takva da je u skupu $\mathcal{P}$.*
   Definirali smo nim-sumu kao zbrajanje po stupcima i promatramo najlijeviji stupac s neparnim brojem jedinica. Kada bismo promijenili bilo koji broj koji u tom stupcu sadrži 1 u neki broj tako da je u tom stupcu paran broj jedinica, time bismo smanjili početni broj jer se jedinica mijenja u 0. S obzirom da je jedinica bila na značajnom mjestu, a nju smo zamijenili nulom, broj se smanjuje. Time smo dobili poziciju u skupu $\mathcal{P}$.

3. *Svaki potez iz pozicije iz skupa $\mathcal{P}$ vodi u poziciju u skupu $\mathcal{N}$.*
   Ako je $(x_1, \ldots, x_k)$ u $\mathcal{P}$ i x_1 promijenimo u $x_1^{'}$ takav da je $x_1' < x_1$, tada:
   $$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k = 0 \neq x_1' \oplus \cdots \oplus x_k$$
   zbog svojstva nim-sume i $x_1 \neq x_1^{'}$ Tada je $(x_1^{'}, x_2, \ldots, x_k)$ u skupu $\mathcal{N}$.

Time smo pokazali da je skup $\mathcal{P}$ skup P-pozicija. □

Odredimo na sljedećem primjeru je li pozicija (x_1, x_2, x_3) P-pozicija i koji potez koristeći Boutonovu strategiju vodi k pobjedi.

Primjer 1.2.7. *Neka je broj žetona u retcima jednak* $(8, 12, 13)$. *Odredi nim-sumu brojeva* $8, 12$ *i* 13.

Rješenje. Zapišimo najprije brojeve u binarnom sustavu i koristeći svojstva zbrajanja u binarnom sustavu odredimo nim-sumu:

$$\begin{aligned} 8 &= 1000_2 \\ 12 &= 1100_2 \\ 13 &= 1101_2 \\ 8 \oplus 12 \oplus 13 &= 1001_2 \neq 0 \end{aligned}$$

S obzirom da je nim-suma različita od 0, ta pozicija je N-pozicija. Prema Korolaru 1.2.6., moguće je doći iz N u P-poziciju tako da iz jednog retka oduzmemo broj žetona da dobijemo paran broj jedinica u svakom stupcu. Promatramo najlijeviji stupac u kojem se nalaze tri jedinice. Promijenimo broj žetona u trećem retku tako da od broja 13 oduzmemo određeni broj žetona kako bi broj jedinica u tom stupcu bio paran. Ako bismo iz trećeg retka uzeli 9 žetona, ostalo bi četiri žetona i nim suma je jednaka:

$$\begin{aligned} 8 \quad &= 1000_2 \\ 12 \quad &= 1100_2 \\ 4 \quad &= 100_2 \\ 8 \oplus 12 \oplus 4 &= 0000_2 \end{aligned}$$

Dakle, $(8, 12, 4)$ je P-pozicija.

Postoji više varijanti igre Nim. Primjerice Nimble, dvodimenzionalni Nim i sl. Pobjednička strategija se svodi na opisane strategije u klasičnom Nimu.

Sprague-Grundyjev teorem

Koristeći igru Nim, analizirat ćemo sve simetrične igre. Pobjednička strategija u igri Nim ovisi o dva faktora: tko od igrača igra prvi i o postavu igre odnosno koliko je žetona i hrpa. Koristeći strategiju računanja Nim-sume lako možemo odrediti pobjednika igre i prije nego igra započne. Sprague-Grundyjev teorem govori da se sve simetrične igre svode na Nim igru, odnosno u svim simetričnim igrama možemo primijeniti određivanje strategije i pozicija kao u igri Nim. Prvi igrač na raspolaganju ima $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mogućih pozicija, a drugi igrač $B_1, B_1 \ldots, B_n$. Kraći zapis: $G = \{G^L | G^D\}$, gdje je $G^L = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ skup pozicija prvog igrača i $G^D = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ skup pozicija drugog igrača. Smatramo da onaj igrač čiji je skup pozicija prazan, gubitnik; odnosno igrač koji više nema mogućih poteza. Definirajmo simetrične igre.

Definicija 1.2.8. *Igra G je simetrična ako i samo ako za svaku poziciju $P = \{G^L | G^D\}$ igre G vrijedi $G^L = G^D$.*

Drugim riječima, igra G je simetrična ako i samo ako su mogućnosti (potezi) prvog igrača jednaki mogućnostima drugog igrača.Neka dva igrača igraju dvije igre, igru G i igru H. Prema Conwayju ([9]), dvije igre G i H smatramo komponentama sume igre $G + H$ u kojoj, prema definiciji kombinatornih igara, igrači igraju naizmjenično birajući igru G ili H te igrajući dozvoljen potez u toj igri. Neka je G^L skup svih pozicija igrača 1 (lijevog igrača) i skup G^D skup svih pozicija igrača 2 (desnog igrača). Tada igru G zapisujemo kao $G = \{G^L | G^D\}$. Dakle, sumu dvije igre definiramo kao:

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L | G^D + H, G + H^D\}$$

gdje su G^L i H^L pozicije prvog igrača u igrama G i H redom, te G^D i H^D pozicije drugog igrača u igrama G i H redom.

Definirajući sumu dvije igre, igru Nim možemo zapisati kao sumu Nim igara od kojih svaka komponenta sume predstavlja jedan redak u Nim igri (Nimble), odnosno igru Nim G s n hrpa na kojima je redom $x_1, x_2 \ldots, x_n$ žetona možemo reprezentirati (prema [4]) kao disjunktnu sumu Nim igara $G_i, i \in \mathbb{N}$, od kojih se svaka sastoji od jedne hrpe s x_n žetona:

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n,$$

gdje je n broj hrpa. Igrač najprije bira hrpu $G_k, k = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$, a zatim broj žetona koje će uzeti s te hrpe.
Vratimo se na pravila igre Nim. Promatrajući pravila igre, možemo zaključiti da igru možemo igrati tako da broj žetona dodajemo ili uzimamo s određene hrpe. No, mijenjamo li dodavanjem žetona slijed igre? Odgovor je ne, jer ako jedan igrač doda x žetona na jednu hrpu, drugi igrač jednostavno može "poništiti" taj potez uzeći s te hrpe x broj žetona te se igra ponovno vraća u početnu poziciju. Dakle, i druge simetrične igre poput dodavanja žetona možemo razmatrati kao igru Nim. Sljedeći teorem postavit će nam temelj za Sprague Grundyjev teorem koji predstavlja inicijalni teorem simetričnih kombinatornih igara.

Teorem 1.2.9. *Neka je G igra koja se igra s konačnim brojem brojeva iz skupa $\mathbb{N}_0$. Svaki potez utječe na jedan od brojeva i mijenja taj broj tako da ga smanjuje. Broj je moguće i povećati, ali pravila igre omogućuju da se igra uvijek završi. Tada je ishod bilo koje pozicije u igri G jednak odgovarajućoj poziciji u igri Nim.*

Dokaz. Neka prvi igrač pogriješi prilikom povlačenja poteza i igra pobjedničkom strategijom. Ukoliko protivnik koristi pobjedničku strategiju, igrač 1 uvijek može povući potez tako da poziciju igre vrati u prijašnji status (tzv. status quo). U tom slučaju, pravila igre osiguravaju da se svakim potezom igra približava kraju. □

Nim-hrpe

Definicija 1.2.10. *Nim-vrijednost (ili Grundyjev broj [11]) je jednak broju žetona n jedne Nim-hrpe. Oznaka: $*n$. Definiramo ih kao:*

$$*n = \{*0, *1, *2, \ldots, *(n-1)\} = \{*m\}_{m<n}$$

gdje su $*0 = \{|\}, *1 = \{0|0\}, *2 = \{0, *|0, *\}, \ldots, *n = \{*0, \ldots, *(n-1)| * 0, \ldots, *(n-1)\}$ simetrične igre stupnja i, za $i =, 0 \ldots, n$, a zbog simetričnosti igre, opcije oba igrača su simetrične (prema [7] i [6]).

Teorem 1.2.11 (Sprague-Grundy)**.** *Svaka simetrična igra G ekvivalentna je nekoj Nim-hrpi.*

Dokaz. Neka su $\{A, B, C, \dots\}$ pozicije igre G takve da su ekvivalente Nim-hrpama. Neka je skup $\{a, b, c, \dots\}$ veličina Nim-hrpa. Neka je n najmanji broj u skupu $\mathbb{N}_0$ koji se ne nalazi u skupu brojeva $\{a, b, c, \dots\}$. Taj broj zovemo mex (eng. *minimal excludent*) vrijednost skupa $\{a, b, c, \dots\}$. Važno je razumijeti pojam mex (*minimal excludent*) skupa brojeva. Mex predstavlja najmanji nenegativni cijeli broj koji se ne nalazi u skupu. Primjerice ([3]):

$$mex(\emptyset) = 0$$
$$mex(\{1, 2, 3\}) = 0$$
$$mex(\{0, 2, 3, 5, 6, \dots\}) = 1$$

Tvrdimo da je G Nim-hrpa veličine n. Svi brojevi skupa $\mathbb{N}_0$ manji od n, sigurno se nalaze u skupu $\{a, b, c, \dots\}$ tako da je moguće povući potez kojim će se vrijednost broja n smanjiti. Ako je neki od brojeva iz skupa $\{a, b, c, \dots\}$ veći od n, moguće je i povećati broj n, no sa svakim potezom sigurno mijenjamo vrijednost od n. Prema Teoremu 1.2.9., igra G je ekvivalentna jednoj Nim-hrpi vrijednosti n. □

Prethodni teorem možemo zapisati i na sljedeći način:

Korolar 1.2.12. *Neka je G simetrična igra. Tada je Nim-vrijednost (Grundyjev broj u oznaci: $\mathcal{G}(G)$) jednak k ako i samo ako je G =. Grundyjevi brojevi određuju koji potez u bilo kojoj simetričnoj igri (ne samo igri Nim) trebamo odigrati kako bismo igrali pobjedničku strategiju.*

Drugim riječima, ako je igra suma više disjunktnih igara, tada Sprague-Grundyjev teorem kaže da ako oba igrača igraju optimalno, tada će igrač koji započinje igru pobijediti ako je nim-suma Grundy brojeva pozicija u svakoj pod igri na početku igre nije nula. Inače, igrač koji je prvi na potezu sigurno gubi igru. Grundyjev broj jednak je 0 za igru u kojoj je prvi igrač gubitnik i jednak je mex vrijednosti skupa brojeva svih mogućih sljedećih pozicija u igri. Pogledajmo na primjeru kako odrediti Grundyjev broj.

Primjer 1.2.13. *Neka igra Nima ima jedan redak s n žetona. Igrač koji je na redu može uzeti koliko god želi žetona s te hrpe. Pobjednik je igrač koji uzme zadnji žeton.*

- *Kada bi igra započela s* 0 *žetona, igrač koji je na redu odmah gubi stoga je Grundyjev broj jednak* 0.

- *Kada bi igra započela s* 1 *žetonom, igrač koji je prvi na redu može uzeti* 1 *žeton i pobijediti. Dakle, drugi igrač nema mogućih poteza i* $\mathcal{G}(1) = mex(0) = 1$.

- *Kada bi igra imala n žetona, prvi igrač može uzeti* $1, 2, \ldots, n$ *žetona. Mogući potezi drugog igrača su* $n-1, n-2, \ldots, 1$ *žetona redom. Dakle,* $\mathcal{G}(n) = mex(\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}) = n$.

Kako primijeniti Sprague-Grundyjev teorem u simetričnim igrama?

1. Podijeliti igru na sumu disjunktnih igara.
2. Za svaki sumand, izračunati Grundyjev broj
3. Odrediti nim-sumu svih Grundyjevih brojeva
4. Ako je nim-suma jednaka 0, igrač koji je na potezu pobjeđuje birajući taj potez.

Pravila igre se mogu mijenjati. Primjerice: igrač može uzeti najviše 3 žetona pri svakom potezu ili uzeti broj žetona jednak. Pogledajmo primjer strategije u igri Nim korištenjem Sprague-Grundyjevog teorema.

Primjer 1.2.14. *U igri Nim nalaze se* 4 *hrpe. Hrpe sadrže redom* $4, 6, 8$ *i* 2 *žetona. Prema pravilima igre, pobjednik je igrač koji povuče zadnji potez. Prema pravilima igre, igrač bira hrpu žetona i broj žetona te hrpe podijeli s jednim od brojeva iz skupa* $A = \{2, 3, 6\}$*. Broj žetona koji ostaje na toj hrpi jednak je količniku broja žetona te hrpe i jednog po volji izabranog broja iz skupa A.*

Slika 1.7: Nim igra $(4, 6, 8, 2)$

Rješenje. Neka je R rješenje jednako nim-sumi svih pozicija:

$$R = nim - suma(\mathcal{G}(4), \mathcal{G}(6), \mathcal{G}(8), \mathcal{G}(2))$$

Odredimo Grundyjeve brojeve za te pozicije.

$$\mathcal{G}(n) = mex(P),$$

gdje je P skup svih pozicija iz pozicije n.
Za četvrtu hrpu vrijedi: $\mathcal{G}(2) = mex(\{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(0), \mathcal{G}(0)\})$, gdje su $0, 0, 1$ redom, količnici broja 2 i brojeva $2, 3, 6$ redom. Primijetimo da vrijedi: $\mathcal{G}(0) = 0$ jer je iz pozicije 0 moguće doći jedino u poziciju 0. Nadalje, $\mathcal{G}(1) = mex(\{0\}) = 1$ jer iz te pozicije jedino možemo doći u poziciju 0 (prema pravilima igre), stoga je najmanja nenegativna vrijednost koja se ne nalazi u skupu $\{0\}$ jednaka 1.
Dakle,

$$\mathcal{G}(2) = mex(\{0, 0, 1\}) = 2 \qquad (1)$$

Slično, za prvu hrpu vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(4) &= mex(\{\mathcal{G}(2), \mathcal{G}(1), \mathcal{G}(0)\}) \\ &= mex(\{2, 1, 0\}) \\ &= 3 \qquad (2) \end{aligned}$$

Analogno,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(6) &= mex(\{\mathcal{G}(3), \mathcal{G}(2), \mathcal{G}(0)\}) \\ &= mex(\{2, 1, 2\}) \\ &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(8) &= mex(\{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), \mathcal{G}(4)\}) \\ &= mex(\{1, 2, 3\}) \\ &= 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

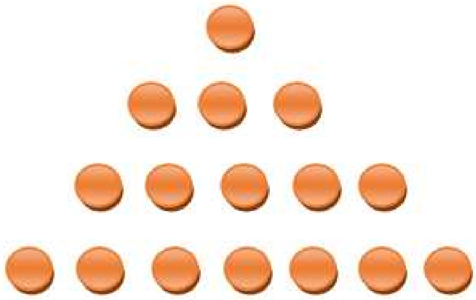
Iz $(1), (2), (3)$ i (4) slijedi:

$$R = nim - suma(3, 2, 0, 0) = 1$$

S obzirom da je vrijednost jednaka 1, znamo da igrač koji je trenutno na redu u pobjedničkoj poziciji. Kako bi iskoristio pobjedničku strategiju, protivnika navodi u poziciju za koju je nim-suma jednaka 0. Broj žetona s prve hrpe treba podijeliti s 2 tako da na toj hrpi ostane 2 žetona za koje je Grundyjev broj jednak 2 jednak kao i za četvrtu hrpu, nim-suma brojeva 2 i 2 je jednaka 0. Konačno, prvi potez pobjedničke strategije je uzeti 2 žetona s prve hrpe.

Prilagodba za primjenu igre Nim u nastavi

Učenici igraju Nim u parovima. Nakon što učenike upoznamo s pravilima normalne verzije igre, pred njih postavimo žetone (ili šibice) kao što je prikazano na slici 1.8. Pobjednik je učenik koji izvuče zadnji žeton.

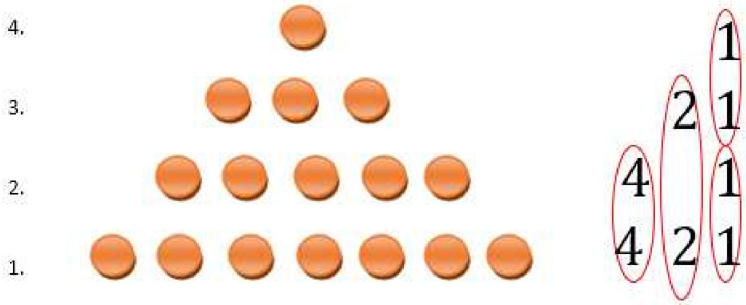


Slika 1.8: Nim $(1, 3, 5, 7)$

Na koji način učenici ne znajući strategiju određivanja nim-sume odabiru pobjedničku strategiju? Učenici ponavljaju igru više puta. Kada na stolu ostane nekoliko žetona, lako je odrediti pobjedničku strategiju i predvidjeti suparnikove poteze. No, kako u priču uvesti binarne znamenke i zbrajanje u binarnom sustavu? Jednostavnija strategija koju možemo koristiti u igri Nima, a koja se krije iza nim-sume je da prikažemo broj žetona u retku pomoću potencija broja 2 i grupiranjem istih znamenaka. Na taj način, vrlo lako bez pretvaranja brojeva u binarni sustav i zbrajanja lako odredimo koji potez povući kako bi nas odveo do pobjede.
Pogledajmo sliku 1.9. i zapišimo broj žetona s potencijama broja 2 i grupirajmo u parove iste brojeve. Nim-suma početne pozicije je jednaka 0. Dakle, igrač koji započinje igru birajući bilo koji broj žetona iz bilo kojeg retka, ne može pobijediti ako drugi igrač koristi pobjedničku strategiju i ostavlja svom igraču poziciju kojoj je nim-suma jednaka 0. Kada bi prvi igrač uzeo 5 žetona iz drugog retka, drugi igrač mora imitirati potez prvog igrača i iz prvog retka uzeti 5 žetona da bi nim-suma bila jednaka 0.

Koristeći ovu strategiju ili strategiju zbrajanja u binarnom sustavu, učenici razvijaju sljedeće koncepte:

- Učenici primjenjuju jednostavnu operaciju zbrajanja (u binarnom sustavu), prikazuju brojeve kao zbroj potencija broja 2, te koriste matematičku operaciju oduzimanje.



Slika 1.9: Nim $(1, 3, 5, 7)$ i potencije broja 2

- Učenici razumiju kako poredak žetona i distribucija po redovima utječu na slijed igre te ih primjenjuju u svojoj strategiji.
- Primjenjuju vjerojatnost prilikom odlučivanja o sljedećem potezu te određuju mogućnost uspjeha određene pozicije u igri.

Poglavlje 2

Nekombinatorne igre

U ovom poglavlju opisat ćemo jednu vrstu nekombinatornih igara - slagalice. Pod slagalicama smatramo igre u kojima osoba igra ”sama protiv igre”. Drugim riječima, vrstu igre namijenjene jednoj osobi. Slagalice, kao i ostale kombinatorne igre, dobro reprezentiraju složene strategije koje proizlaze iz jednostavih igara s jednostavnim pravilima. Pobjedničku strategiju slagalica promatramo kao put od početnog stanja do konačnog stanja odnosno točno konačno rješenje slagalice. Primjerice, možemo upotrijebiti isti princip kojim dokazujemo da postoji pobjednička strategija u igrama s konačnim brojem poteza u kojima sudjeluju više igrača kako bismo dokazali da u slagalicama s konačnim brojem poteza, također postoji pobjednička strategija.

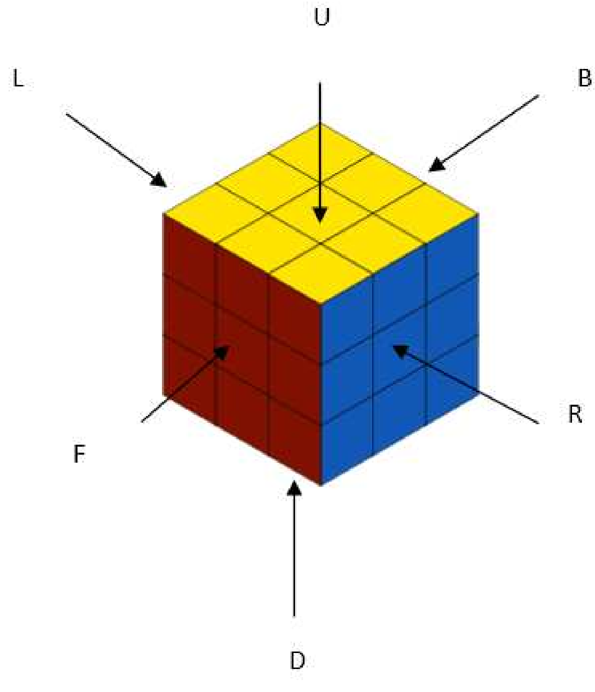
2.1 Rubikova kocka

Rubikovu kocku izumio je profesor Ernó Rubik na arhitektonskom fakultetu u Budimpešti 1974. godine s namjerom rješavanja problema pomicanja dijelova mehanizma koji ne utječu na stabilnost tog mehanizma. Rubikova kocka se sastoji od 6 strana, svaka u jednoj boji koje se sastoje od 9 malih kocka. No, kada bismo rastavili Rubikovu kocku, vidimo da središnji dio zapravo nije mala kocka. Dakle, Rubikova kocka se sastoji od 26 malih kocka i to:

- 6 središnjih
- 12 bridnih
- 8 vršnih

Zamislimo da je Rubikova kocka zadana u istom položaju (orijentaciji) te da središnje kocke određuju jednu stranu. Označimo okretanje osnovnih strana kocke redom kao što su prikazani na slici 2.1:

- F okretanje prednje strane (*eng. front*)
- B okretanje stražnje strane (*eng. back*)
- U okretanje gornje strane (*eng. up*)
- D okretanje donje strane (*eng. down*)
- L okretanje lijeve strane (*eng. left*)
- R okretanje desne strane (*eng.right*)

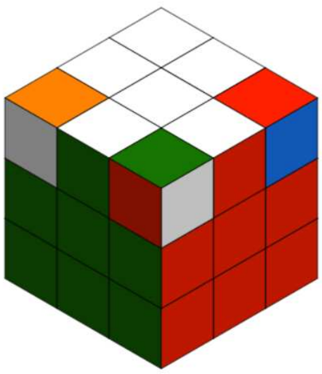


Slika 2.1: Strane Rubikove kocke

Nadalje, kako bismo označili male kockice, upotrijebit ćemo strane na kojima se kockice nalaze i označavat ćemo ih malim slovima l, u, b, f, r i d. Ukoliko promatramo središnju kockicu, označit ćemo je malim slovom jedne strane na kojoj se nalazi. Ukoliko promatramo vršnu kockicu, označit ćemo je s 3 slova gdje prvo slovo označava stranu na kojoj se kockica nalazi. Bridne kockice označavat ćemo s dva slova koja označavaju dvije strane na kojima se kockica nalazi.

Definicija 2.1.1. *Potez na Rubikovoj kocki je konačan niz osnovnih i osnovno suprotnih poteza.*

Potez u kojem nismo okrenuli niti jednu stranu kocke nazivamo neutralni potez; oznaka: I. Osnovni potez predstavlja okretanje određene strane Rubikove kocke za 90° u smjeru kazaljke na satu. Osnovni suprotan potez je potez u kojem određenu stranu Rubikove kocke okrenemo za 90° suprotno od smjera kazaljke na satu označit ćemo s X^{-1} gdje je X jedan od osnovnih poteza označenih na slici 2.1. Osim što razlikujemo vrste kockica od kojih se Rubikova kocka sastoji, razlikujemo orijentaciju i permutacije kockica. Permutacija se odnosi na preraspodjelu kockica u ovisnosti o poziciji i orijentaciji kockice. Kada bismo na gornjoj strani imali sve kockice iste boje, osim tri vršne kockice, permutacijom te tri vršne kockice možemo postaviti na odgovarajući položaj, ali ne moramo nužno orijentirati prema gore (vidi slika 2.2) gdje su vršne kockice ful, ruf i bur nalaze na dobroj poziciji, no nisu dobro orijentirane. Orijentacija predstavlja potez kojime određenu kockicu želimo postaviti tako da se nalazi na određenoj strani, primjerice kada bismo sve kockice iste boje htjeli postaviti tako da se nalaze na gornjoj strani Rubikove kocke.



Slika 2.2: Permutacija tri vrha

Kombinatorika Rubikove kocke

Odredimo položaje koje kockice mogu zauzeti promatrajući u potpunosti rastavljenu Rubikovu kocku. Vršne kockice mogu zauzimati isključivo vršne pozicije. Sukladno tome, bridne kockice se međusobno mogu izmjenjivati, ali ne mogu zauzeti položaj vršne kockice. Središnje kockice uvijek ostaju u središnjem položaju. Da bismo odredili broj mogućih konfiguracija Rubikove kocke, trebamo odrediti broj permutacija bridnih i vršnih kockica. Kada bismo Rubikovu kocku rastavili na ranije spomenutih 26 kockica i promatrali na koliko načina je ponovno možemo sastaviti, lako možemo odrediti broj konfiguracija. Najprije, jedna vršna kockica može zauzeti jedno od 8 vršnih mjesta. Sljedećoj preostaje 7 vršnih mjesta itd. Dakle, broj načina na koje možemo postaviti vršne kockice je jednak $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1 = 8! = 40320$.
Nadalje, svaku vršnu kockicu možemo okrenuti na tri moguća načina s obzirom da je vidljivi dio kockice u tri različite boje. S obzirom na to, broj mogućih orijentacija za svaku kockicu je tri. Dakle, broj mogućih orijentacija za svih 8 kockica je jednak $3 \cdot 3 \cdot \ldots 3 = 3^8 = 6561$.
S obzirom na broj vršnih položaja i orijentaciju svake od vršnih kockica, broj načina postavljanja vršnih kockica jednak je:

$$8! \cdot 3^8 = 40320 \cdot 6561 = 264539520$$

Odredimo na isti način broj mogućih položaja bridnih kockica. S obzirom da ih ima 12, postoji $12! = 479001600$ različitih položaja bridnih kockica. Svaka ima dvije moguće orijentacije stoga je broj orijentacija svih bridnih kockica jednak $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{12} = 4096$. Dakle, broj načina na koje možemo postaviti bridne kockice jednak je:

$$12! \cdot 2^{12} = 479001600 \cdot 4096 = 1961990553600$$

Konačni broj postavljanja vršnih i rubnih kockica jednak je umnošku mogućih položaja bridnih kockica i mogućih položaja vršnih kockica:

$$8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} = 519024039293878272000$$

Taj broj konfiguracija jednak je broju mogućnosti sastavljanja Rubikove kocke iz 20 malih kocaka i 6 središnjih kockica koje su fiksirane. Zamislimo da je Rubikova kocka rješena (svaka strana kocke je u jednoj boji). Promotrimo broj mogućih poteza iz te pozicije. Svaka od vršnih kockica može doći na jednu od 8 pozicija, dakle postoji 8! mogućnosti. Iz tih mogućnosti, nisu moguće svih 3^8 orijentacija. Kada bi 7 vršnih kockica bilo na svome mjestu, postoji samo jedna moguća opcija za zadnju vršnu kockicu stoga je broj orijentacija jednak $3^7 = 2187$. Dakle, ukupan broj mogućih pozicija vršnih kockica u ovom slučaju jednak je:

$$8! \cdot 3^7 = 40320 \cdot 2187 = 88179840$$

Slično, odredimo broj mogućih pozicija bridnih kockica. Bridne kockice možemo rasporediti na 12! različitih načina. No, kada bismo promotrili položaj zadnje dvije bridne kockice, vidimo da je on određen samo jednim položajem stoga je broj mogućih pozicija jednak $12!/2 = 239500800$. Orijentacija zadnje bridne kockice je određena položajem prethodne stoga je broj orijentacija jednak 2^{11}. Ukupan broj mogućih položaja bridnih kockica jednak je:

$$\frac{12!}{2} \cdot 2^{11} = 239500800 \cdot 2048 = 490497638400 \cdot$$

Dakle, ukupan broj konfiguracija Rubikove kocke (bez rastavljanja) jednak je umnošku broja pozicija vršnih i pozicija bridnih kockica:

$$88179840 \cdot 490497638400 = 43252003274489856000$$

odnosno više od 43 trilijuna. Primijenjujući permutacije bez ponavljanja i načelo umnoška vrlo jednostavno možemo odrediti broj konfiguracija Rubikove kocke koje je moguće dobiti bez rastavljanja Rubikove kocke. Na koji način odrediti algoritam rješavanja Rubikove kocke unatoč trilijunskom broju konfiguracija Rubikove kocke?

Grupa Rubikove kocke

Prisjetimo se svojstva algebarske strukture grupe. Za $(G, *)$ kažemo da je grupa na nepraznom skupu G s binarnom operacijom $*$ za koju vrijede svojstva zatvorenost, postojanje neutralnog elementa i inverznog elementa te asocijativnost. Ako vrijedi svojstvo komutativnosti, kažemo daje $(G, *)$ Abelova grupa. Neka je G_R skup svih poteza Rubikove kocke, i $*$ operacije uzastopnog izvođenja poteza. Provjerimo je li grupa Rubikove kocke $(G_R, *)$ Abelova grupa.

1. Nakon poteza X iz skupa G_R slijedi potez Y iz skupa G_R. Potez XY je u skupu G_R, dakle vrijedi zatvorenost.

2. Uzastopno izvođenje poteza je acosijativno stoga vrijedi asocijativnost.

3. Neutralni element predstavlja potez u kojem je stanje kocke nepromijenjeno.

4. Inverzni element predstavlja suprotni potez, odnosno svaki potez možemo "poništiti" vraćanjem kocke u početni položaj (položaj prije prvog poteza).

Dakle, $(G_R, *)$ je grupa. Očito, ne vrijedi komutativnost jer konfiguracija kocke nije jednaka kada bismo povukli potez XY i potez YX. Primjerice, kada bismo najprije povukli potez FR, izgled kocke je različit nego kada bismo povukli potez RF. Dakle, $(G_R, *)$ nije Abelova grupa.

Prije smo pokazali broj mogućih konfiguracija Rubikove kocke. U terminima grupe, taj broj označava broj elemenata skupa G_R, odnosno jednak je redu grupe. Definirajmo najprije komutatore i konjugatore teorije grupa.

Teorem 2.1.2. *Neka je potez X Rubikove kocke jednak $X = Y_1Y_2 \dots Y_n$. Tada je njegov suprotan potez dan s $X^{-1} = (Y_1Y_2 \dots Y_n)^{-1}$.*

Ekvivalentan zapis je:

$$X^{-1} = (Y_1Y_2 \dots Y_n)^{-1} = Y_n^{-1}Y_{n-1}^{-1} \dots Y_2^{-1}Y_1^{-1}$$

Dokaz je jednostavan korištenjem matematičke indukcije stoga ga nećemo iznositi u ovom radu. Ovaj teorem nam govori da se svaki potez može poništiti.
Kao što smo ranije naveli, grupa $(G_R, *)$ nije komutativna, no za neke poteze vrijedi komutativnost. Primjerice za poteze UD vrijedi $UD = DU$.

Definicija 2.1.3. *Dana su dva poteza X i Y Rubikove kocke. Komutator poteza X i Y je potez $XYX^{-1}Y^{-1}$.*

Korištenje komutatora jedna je od tehnika kojom mijenjamo pozicije određenih kockica dok druge ostaju nepromijenjene. Za dva proizvoljna niza X i Y, komutator će djelovati samo na kockice koje se nalaze u sjecištu oba niza X i Y. Ako su potezi X i Y disjunktni, odnosno ne sadrže zajedničke kockice, tada komutator neće utjecati na ništa. Ideja je korištenjem komutatora smanjiti broj kockica koje se nalaze u presjeku dvaju poteza. Nekoliko je različitih načina korištenja komutatora kao što su 3-ciklus vršnih kockica, 3-ciklus bridnih kockica, zamjena dvije vršne kockice i sl. Ilustrirat ćemo primjer zamjene dvije vršne kockice.

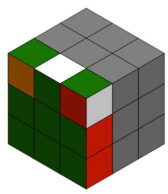
Primjer 2.1.4. *Neka je konfiguracija Rubikove kocke kao na slici 2.3. Neka je X potez koji utječe na sivi dio kocke i okretanje jedne vršne kockice, a Y potez koji utječe na obojano područje kocke. Algoritam je sljedeći:*

1. *Konstruiraj potez X tako da se kockica fur zarotira i ostane na istom mjestu. Potez ne smije mijenjati obojano područje već samo sivo.*

2. *Potezom Y postavi kockicu ful na mjesto kockice fur tako da mijenjaš samo obojani dio kocke.*

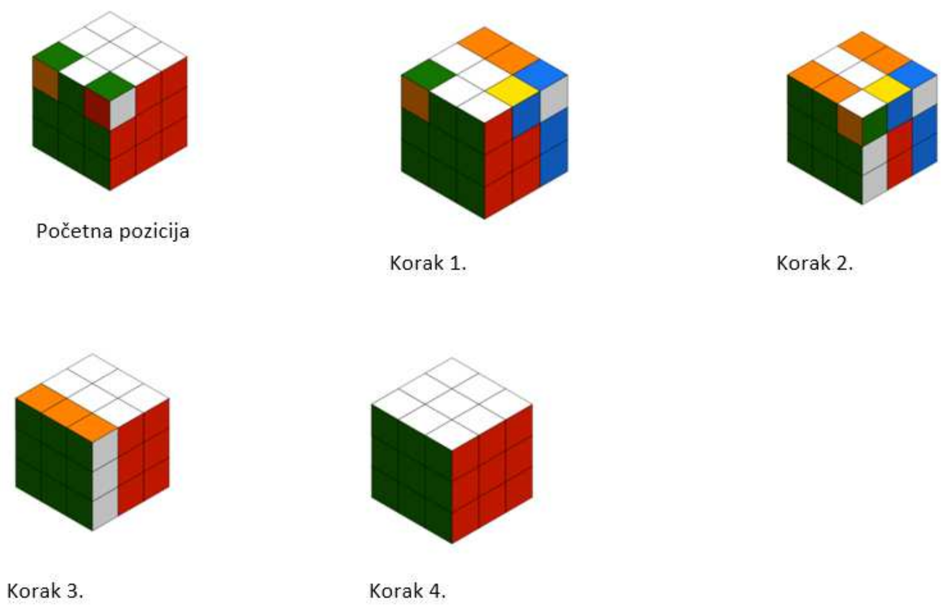
3. *Povuci potez* X^{-1}.

4. *Povuci potez* Y^{-1}.



Slika 2.3: Konfiguracija Rubikove kocke

Ilustrirajmo korake redom:



Slika 2.4: Rubikova kocka - zamjena vršnih kockica

Definicija 2.1.5. *Dana su dva poteza X i Y Rubikove kocke. Konjugat poteza X potezom Y je potez $Y^{-1}XY$ i označavamo ga s X^Y.*

Primjerice, ako X mijenja dva brida, tada potez $Y^{-1}XY$ mijenja druga dva brida. Drugim riječima, ako potezom X napravimo određeni ciklus na kocki, tada konjugat postiže isti ciklus na kocki, ali na drugom mjestu.

Nekoliko je poteza koje ne možemo koristiti pri rješavanju Rubikove kocke bez da istovremeno ne učinimo i druge poteze, a to su:

1. Okrenuti jedan rub.

2. Permutirati dvije kockice.

3. Rotirati jedan vrh.

Heisov algoritam

Postoje različiti algoritmi rješavanja Rubikove kocke. U ovom radu opisat ćemo jedan od njih i objasniti povezanost s teorijom grupa. Heisov algoritam (prema [2]je sljedeći:

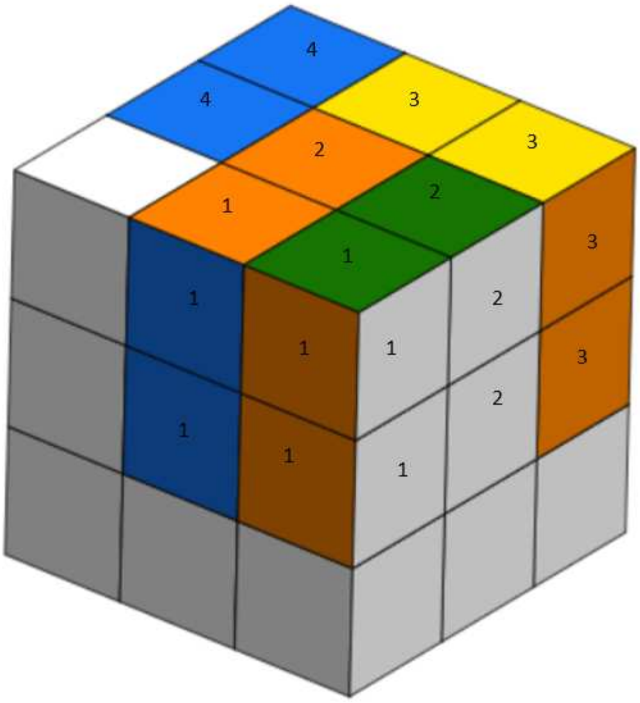
1. Napravi 4 kvadratna susjedna bloka. Jedan kvadratni blok predstavlja 4 kockice koje čine kvadrat (unutanji ili vanjski) prikazan na slici 2.5 Zanimljivost ovog koraka je da kvadratni blokovi ne moraju biti u istoj boji, ali moraju imati jednu zajedničku boju i jedan kvadratni blok mora biti unutarnji (blok 2), a ostala tri vanjska.

2. Spoji 4 kvadratna bloka i usmjeri preostale rubove tako da budu u odgovarajućem položaju, odnosno da se na stranama Rubikove kocke nalaze kvadratni blokovi u istoj boji. Odgovarajući položaj u ovom koraku predstavlja da su na primjer kockice uf i u iste boje.

3. Postavi preostalih 5 bridnih kockica i bilo koja dva vrha korištenjem komutatora i konjugatora na odgovarajuću poziciju na Rubikovoj kocki.

4. Postavi posljednja 3 vrha koristeći konjugatore i komutator na odgovarajuću poziciju.

Heiseov algoritam jedan je od zahtjevnijih algoritama rješavanja Rubikove kocke.



Slika 2.5: Korak 1. - 4 kvadratna bloka

Prilagodba za primjenu Rubikove kocke u nastavi

Učenici korištenjem Rubikove kocke u nastavi razvijaju geometrijsko mišljenje, sposobnost percipiranja te logičko zaključivanje. Također, u višim razredima srednje škole lako mogu odrediti broj konfiguracija Rubikove kocke korištenjem permutacija. Metodu za početnike čitatelj može pronaći u (ref na litraturu). Učenicima na nastavi možemo pojasniti prvi korak metode za početnike - rješavanje prvog sloja. Učenici mogu riješiti prvoj sloj Rubikove kocke i bez korištenja algoritma pokušavajući naizmjeničnim potezima dok ne dođu do rješenja. Upute za rješavanje prvog sloja:

1. Najprije na gornjoj strani kocke složi žuti križ.
2. Rotiraj žuti križ tako da se na krakove križa nastavljaju barem dva jednobojna para (na obje strane kocke, a par se sastoji od bridne i središnje kockice). Nakon ovog

koraka, preostalo je upariti dvije kockice iste boje koje se nastavljaju na preostala dva kraka. Dva su moguća položaja tih kockica.

3. Prva mogućnost je da je potrebno zamijeniti položaj dvije kockice na susjednim stranama kako bismo dobili četiri jednobojna para koja se nastavljaju na krakove križa. Druga mogućnost je da se raznobojni parovi nalaze na suprotnim stranama kocke. U oba slučaja, koristimo istu strategiju: Bridnu kockicu žutog kroža na koju se nastavlja par koji nije iste boje, prebaci na donju stranu kocke. Zatim, rotiraj donju stranu kocke kako bi položaj bridne kockice jedne boje bio uz središnju kockicu te iste boje te rotiraj za 180° stranu na kojoj se nalazi jednobojni par kako bi se nastavljao na krak križa. Na isti način, postavi i četvrti jednobojni par.

4. Postavi sve četiri žute vršne kockice na odgovarajuće mjesto kako bi prvi sloj bio riješen. Metoda postavljanja prvog vrha na odgovarajuću poziciju: Postavi jedan vrh kockice sa žutom stranom u donji sloj kocke tako da je jedna strana kockice iste boje kao jednobojni par kockica na toj strani. Rotiraj bočnu stranu kocke na kojoj se nalazi žuti vrh za 90°. Zatim, rotiraj donji sloj kocke tako da se žuti brid i vršna kockica nalaze na istoj strani. Rotiraj kocku tako da se te dvije kockice nalaze u gornjem sloju. Preostala četiri vrha se na isti način mogu postaviti u odgovarajuću poziciju.

Učenicima bi nakon svakog koraka prikazali trenutnu konfiguraciju Rubikove kocke. Naprednijim učenicima i onima koji žele znati više, nakon definicija i objašnjenja komutatora i konjugata možemo prikazati algoritam kojime rješavamo Rubikovu kocku bez obzira na početnu konfiguraciju, a koji je opisan sljedećim potezima:

1. $URU^{-1}R^{-1}U^{-1}F^{-1}UF$

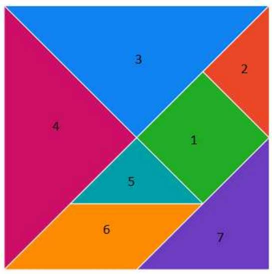
2. $R^{-1}U^{-1}F^{-1}UFR$

3. $RUR^{-1}URUUR^{-1}$

4. $R^{-1}FR^{-1}BBRF^{-1}R^{-1}BB$

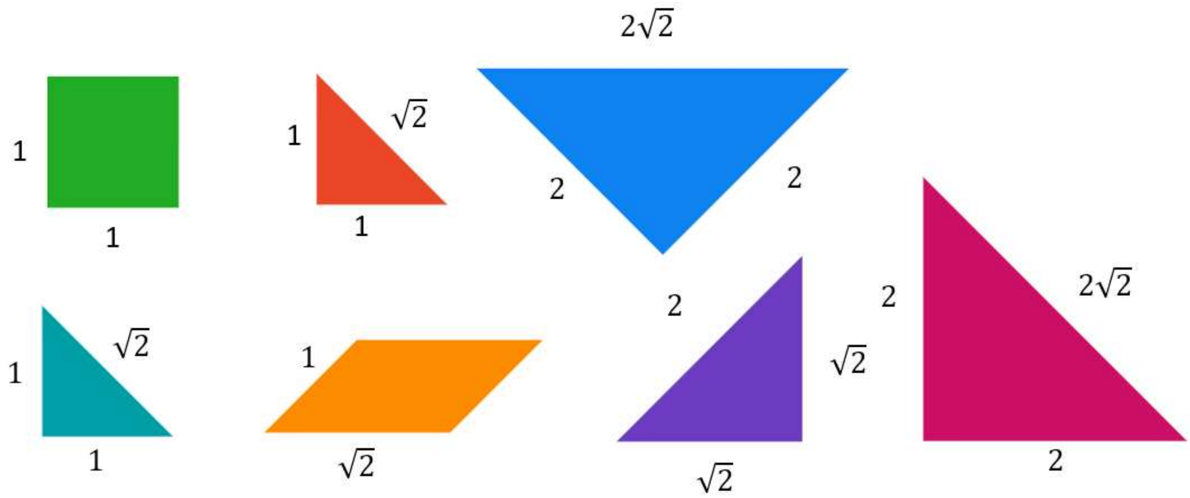
2.2 Tangram

Igra tangram jednostavna je igra u kojoj je kvadrat podijeljen na 7 različitih geometrijskih likova: 5 jednakokračnih pravokutnih trokuta, 1 paralelogram i 1 kvadrat prikazanih na slici 2.6. Skup svih likova nazivamo *tangram*, pojedinačne geometrijske likove nazivamo *tan* te lik koji oblikujemo od *tanova* nazivamo *tangram lik*.
Tangram je zanimljiva igra koju možemo koristiti u nastavi matematike tako da primjerice određujemo međusobni odnos površina tanova, odnos stranica, uspoređujemo površine i opsege nastalih tangram likova i sl. Zanimljivo je i promatrati na koliko različitih načina možemo dobiti tangram lik trokut, paralelogram, trapez i ostale geometrijske likove ([12]). Od tanova možemo napraviti tisuće različitih likova poput životinja, slova, figure čovjeka. Pravila slagalice su jednostavna: sastaviti svih 7 tanova tako da čine zadanu figuru bez preklapanja. U ovom radu predstavit ćemo teorem i dokaz koji se vrlo jednostavno može provesti i u nastavi matematike.



Slika 2.6: Tangram

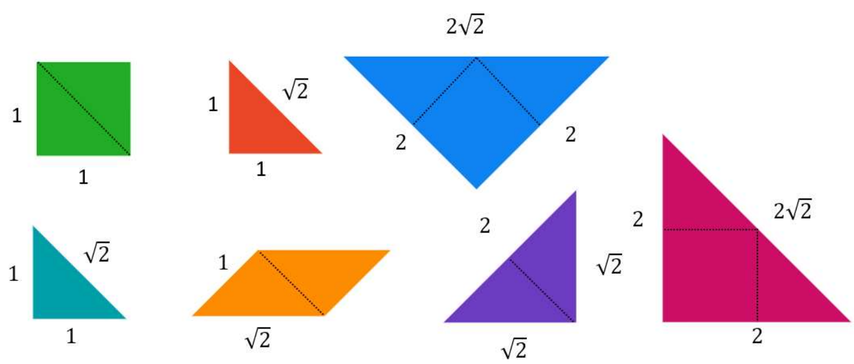
Označimo najprije tanove kao na slici 2.6. Neka je stranica kvadrata 1 duljine 1. Duljine preostalih stranica tan likova lako možemo izračunati koristeći sličnost trokuta. Duljine preostalih stranica tan likova prikazane su na slici 2.7.



Slika 2.7: Tangram - duljine stranica likova

Teorem 2.2.1. *Pomoću tangram slagalice može se oblikovati točno* 13 *konveksnih tangram likova.*

Teorem ćemo dokazati pomoću 4 leme i diofantske jednadžbe sa 6 nepoznanica i 4 uvjeta. Jednadžba ima 20 rješenja koja predstavljaju 20 konveksnih likova među kojima je točno 13 onih koje možemo dobiti iz tan likova. Podijelimo tanove kao što je prikazano na slici 2.8. Koristeći sukladnost trokuta i poučak SSS, vidimo da se tanovi sastoje od 16 jednakokračnih pravokutnih trokuta s duljinom hipotenuze $\sqrt{2}$ i katetama jedinične duljine.



Slika 2.8: 16 jednakokračnih pravokutnih trokuta

Lema 2.2.2. *Ako* 16 *jednakokračnih pravokutnih trokuta određuju konveksan lik, onda stranica racionalne duljine ne može biti postavljena uz stranicu iracionalne duljine drugog trokuta.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno odnosno da se slaganjem stranice racionalne duljine jednog trokuta uz stranicu trokuta iracionalne duljine može sastaviti konveksan lik. Trokuti se u ovom slučaju mogu slagati naizmjenično uz pravac ili prema određenom pravilu. Promotrimo drugi slučaj.

Zamislimo da trokute slažemo uz pravac počevši od iste točke tako da su s jedne strane pravca stranice raconalne duljine a s druge strane stranice iracionalne duljine. Kada bismo svih 16 trokuta posložili na taj način, s obje strane pravca krajnji vrhovi trokuta trebali bi se podudarati jer je prema pretpostavci lik konveksan. S jedne strance pravca biti će m trokuta sa stranicom racionalne duljine, te s druge strane n trokuta sa stranicom iracionalne duljine, $m+n < 16$ za $m, n \in \mathbb{N}$. Neka je duljina racionalne stranice (katete jednakokračnog pravokutnog trokuta) jednaka a, onda je duljina hipotenuze jednaka $a\sqrt{2}$. Prema ovom slaganju vrijedi: $m \cdot a = n \cdot a\sqrt{2}$ što nije moguće jer je s lijeve strane jednakosti prirodan broj, a s desne strane iracionalan broj.

Ukoliko bismo promotrili prvi slučaj trokute možemo posložiti tako da se par stranica racionalne i iracionalne duljine s jedne strane pravca podudara s parom stranica racionalne i iracionalne duljine. Lako je zaključiti da na taj način ne možemo dobiti konveksan lik jer uvijek ostaju praznine koje treba popuniti. S obzirom da te praznine određuju racionalne stranice pod kutom od 45°, a taj kut zatvaraju stranice racionalne i iracionalne duljine, jedna racionalna stranica past će uz iracionalnu stranicu. □

Prije nego iskažemo drugu lemu, promotrimo unutarnje kutove konveksnog lika opisanog u prethodnoj lemi. Svi su jednaki $45°, 90°$ ili $135°$. Direktna posljedica toga je lema 2.2.4. koju nećemo dokazivati.

Lema 2.2.3. *Neka je konveksan mnogokut sastavljen od 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta. Tada vrijedi:*

1. *Svaka stranica mnogokuta sastoji se ili samo od stranica racionalne duljine ili samo od stranica iracionalne duljine trokuta.*

2. *Ako stranice mnogokuta sastavljene od racionalnih stranica trokuta nazovemo racionalnim, a one druge iracionalnim, onda u tom mnogokutu racionalne i iracionalne stranice alterniraju, osim ako zatvaraju pravi kut. Stranice koje zatvaraju pravi kut su ili obje racionalne ili obje iracionalne.*

Lema 2.2.4. *Ako* 16 *sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta određuju konveksni lik, onda taj lik može imati najviše* 8 *stranica (osmerokut).*

Dokaz. Zbroj svih unutarnjih kutova mnogokuta s n stranica jednak je $(n-2)\cdot 180°$. Najveći unutarnji kut mnogokuta jednak je 135°, a zbroj svih unutarnjih kutova je manji ili jednak $n \cdot 135°$, vrijedi:

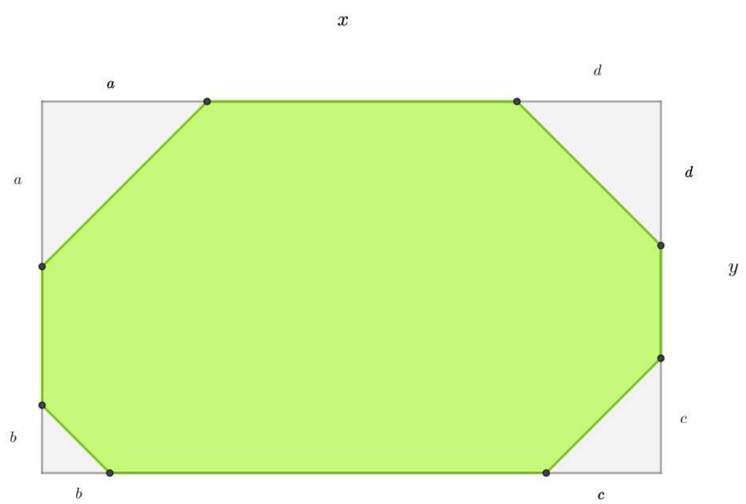
$$(n-2)\cdot 180° \leq n \cdot 135° \iff n \leq 8$$

□

Lema 2.2.5. *Ako* 16 *sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta određuju konveksni lik, onda taj lik možemo upisati u pravokutnik tako da sve stranice racionalne duljine (ili sve stranice iracionalne duljine) pripadaju stranicama pravokutnika.*

Dokaz slijedi direktno iz svojstva da su unutarnji kutovi veličine 45°, 90° ili 135° i lema 2.2.2. i 2.2.3. Dokažimo teorem 2.2.1. (detaljniji dokaz čitatelj može pronaći u [5]).

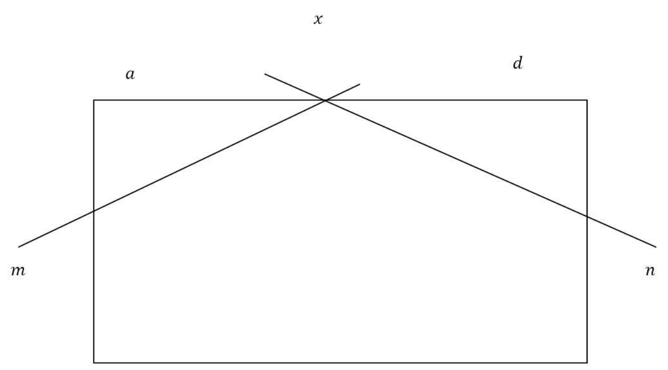
Dokaz. Kao što smo ranije spomenuli, u dokazu ćemo koristiti konveksne mnogokute koji se mogu sastaviti od 16 sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta te odbaciti one koji se ne sastoje od tanova. Prema lemi 2.2.7. pretpostavimo da je osmerokut upisan u pravokutnik te da stranice racionalnih duljina leže na stranicama pravokutnika duljine stranica x i y kao što je prikazano na slici 2.9.



Slika 2.9: Osmerokut u pravokutniku

BSO neka je $x \geq y$. Neka stranice iracionalne duljine osmerokuta leže na pravcima m i n. Kada bi sjecište pravaca m i n bilo na stranici pravokutnika (slika 2.10), duljina $a = d$.

Ako se sjecište pravaca m i n nalazi izvan pravokutnika tada vrijedi: $a + d < x$. Dakle, vrijedi $a + d \leq x$. Analogno, vrijedi $c + b \leq x$, $a + b \leq y$ i $d + c \leq y$. Promotrimo sljedeće



Slika 2.10: Sjecište pravaca m i n na stranici pravokutnika

površine:

$$P_{pravokutnik} = x \cdot y$$
$$P_{osmerokut} = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

jer je površina jednog jednakokračnog pravokutnog trokuta jednaka $\frac{1}{2}$

Površine odsječaka P_1, P_2, P_3 i P_4 (pravokutnih trokuta čiji se pravi kut nalazi u vrhovima pravokutnika) su jednake:

$$\mathrm{P}_1 = \tfrac{a^2}{2}, P_2 = \tfrac{b^2}{2}, P_3 = \tfrac{c^2}{2} \text{ i } P_4 = \tfrac{d^2}{2}$$

Slijedi:

$$P_{pravokutnik} - P_{osmerokut} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$
$$x \cdot y - 8 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}$$
$$2xy - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Problem smo sveli na traženje cjelobrojnih rješenja jednadžbe s danim uvjetima. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a \leq b, c, d$. Vrijedi $x < 10$ jer je zbroj svih stranica racionalne duljine tangrama manji od 10. Riješimo jednadžbu $2xy - 16 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ uz uvjete:

$$
\begin{aligned}
2 \leq x &< 10 \\
2 \leq y &< x \\
0 \leq a &\leq y \\
a \leq b &< y \\
a \leq c &\leq y \\
a \leq d &\leq y
\end{aligned}
$$

Postoji točno 23 rješenja jednadžbe prikazanih na slici 2.7. Rješenja eliminiramo na sljedeći način:

- Slučajevi 1. i 3. su ekvivalentni.
- Slučajevi 8., 9. i 7. su ekvivalentni.
- Slučajevi 12., 13. i 11. su ekvivalentni.
- Slučajevi 18. i 17. su ekvivalentni.
- Slučaj 23. odbacujemo jer sadrži dugačak paralelogram koji ne možemo dobiti od dijelova tanova.
- U slučaju 19. duljina jedne stranice paralelograma jednaka je $10\sqrt{2}$ što je jednako zbroju stranica iracionalne duljine tanova, no drugu stranicu paralelograma ne možemo imati stoga odbacujemo slučaj.
- Slučajeve 17. i 22. odbacujemo jer zahtijevaju 8 stranica iracionalnih duljina na rubovima.

Dakle, postoji točno 13 konveksnih tangrama. □

	x	y	a	b	c	d	
1.	3	3	0	0	1	1	Tangram
2.	3	3	0	1	0	1	Tangram
3.	3	3	0	1	1	0	
4.	4	2	0	0	0	0	Tangram
5.	4	3	0	0	2	2	Tangram
6.	4	3	0	2	0	2	Tangram
7.	4	4	0	0	0	4	Tangram
8.	4	4	0	0	4	0	
9.	4	4	0	4	0	0	
10.	4	4	2	2	2	2	Tangram
11.	5	2	0	0	0	2	Tangram
12.	5	2	0	0	2	0	
13.	5	2	0	2	0	0	
14.	5	2	1	1	1	1	Tangram
15.	5	3	0	1	2	3	Tangram
16.	5	3	0	2	1	3	Tangram
17.	5	5	0	3	0	5	
18.	5	5	0	5	0	3	
19.	5	5	1	4	1	4	
20.	6	2	0	0	2	2	Tangram
21.	6	2	0	2	0	2	Tangram
22.	6	4	0	4	0	4	
23.	9	8	0	8	0	8	

Slika 2.11: Rješenja jednadžbe, slika preuzeta [10]

Prilagodba za primjenu Tangrama u nastavi

Učenici mogu igrati u paru ili samostalno. Slaganje tangrama možemo provesti na dva načina:

1. Učenici slažu tangram likove prema zadanim predlošcima.

2. Učenici samostalno osmišljavaju tangram likove i figure. Igrom tangram, osim što učenici slažu tangram likove, iste mogu opisivati i konstruirati. Istraživati određene pravilnosti koje se pojavljuju, uspoređivati odnose stranica, površina, opsege tangram likova. Ukoliko aktivnost provodimo u srednjoj školi, učenike upoznajemo s različitim konceptima sukladnosti, sličnosti, prebrojavanja i sl. U osnovnoj školi, učenici mogu vježbati postotke i razlomke koristeći se igrom tangram.

Primjeri zadataka

Zadatak 1. Složi sljedeće tangram likove (označene sivo) od danih geometrijskih likova (tanova). Niti jedan dio se ne smije preklapati niti prelaziti osjenčan dio.

Zadatak 2. Odredi površinu i opseg osjenčanih likova.

Zadatak 3. Usporedi površinu i opseg osjenčanih likova.

Zadatak 4. Jesu li osjenčani likovi slični? Objasni.

Slika 2.12: Tangram likovi

Poglavlje 3

Zaključak

Kombinatorne i nekombinatorne igre kao i njihove strategije rješavanja možemo primijeniti u nastavi matematike kako bi učenici razvili sposobnost apstraktnog mišljenja, prikazali konkretnu situaciju i svakodnevni problem matematičkim jezikom, primijenili i razvili prostornu inteligenciju. Ukratko, matematičkim igrama povezujemo i primjenjujemo različite grane matematike. Teorija igara primjenjuje kombinatoriku i neke od složenijih sadržaja koji nisu primjenjivi u svakodnevnoj nastavi matematike, no pojedini učenici koji se ističu lako mogu savladati neke od navedenih matematičkih teorija. Jedna od učinkovitih metoda koju učenici mogu primijeniti u ovim igrama jest metoda pokušaja i pogrešaka. Na taj način jednostavno mogu doći do algoritama i pobjedničkih strategija. Učenik (igrač) u kombinatornoj igri analizira svoje i protivničke poteze, mogućnosti i pobjedničke poteze dok u nekombinatornim igrama samostalno rješava slagalice. Jedna od najvažnijih teorema teorije igara je teorem Spraguea i Grundyja. Osim teorije igara, važni rezultati prikazani su upravo primjenom teorije grupa.

Bibliografija

[1] *Game reading Chomp*, http://www.public.coe.edu/~jwhite/s09/game%20reading%20chomp.pdf, pristupljeno: listopad 2022.

[2] *Rubik's cube theory*, http://arxiv.org/abs/0910.5433, pristupljeno: studeni 2022.

[3] Nowakowski R. J. Wolfe D. Albert, M. A., *Lessons in Play An Introduction to Combinatorial Game Theory*, 2. izd., Florida: CRC Press, 2019.

[4] R. B. Austin, *Impartial and partisan games*, unpublished master's thesis., University of Calgary, 1976.

[5] Lehman S. Baranović, N., *Matematika u tangramu, tangram u matematici*, 8. kongres nastavnika matematike RH (2018), 20–37, http://arxiv.org/abs/0910.5433, pristupljeno: studeni 2022.

[6] Conway J.H. Guy R. K. Berlekamp, E.R., *Winning Ways for your Mathematical Plays*, 2. izd., A K Peters/CRC Press, 2001.

[7] M. Botičan, *Kombinatorne igre*, Hrvatski matematički elektronički časopis, br. 6, 1–16.

[8] C.L. Bouton, *Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory*, Annals of Mathematics **3** (1901-1902), br. 1/4, 35–39.

[9] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, 2. izd.., A K Peters/CRC Press, 2001.

[10] P. Scott, *Convex tangrams*, The Australian Mathematics Teacher **62** (2006), br. 2, 2–5.

[11] A. N. Siegel, *Combinatorial Game Theory*, 146., American Mathematical Society, 2013.

[12] M. Tchoshanov, *Building Students' Mathematical Proficiency: Connecting Mathematical Ideas Using the Tangram*, Learning and Teaching Mathematics **10** (2011), 16–23.

Sažetak

U ovom radu prikazali smo osnovne strategije kombinatornih i nekombinatornih igara, njihovu primjenu u nastavi matematike i matematičke koncepte koje učenici usvajaju primjenom istih, prijedloge i implementaciju igara u nastavi matematike te moguće učeničke strategije. Analizirajući igre, važnu primjenu u strategijama i algoritmima ima teorija grupa.

Summary

In this thesis, we described the basic strategies in combinatorial and non-combinatorial games. We presented their application when teaching mathematics in elementary or high school. Furthermore, the mathematical concepts that are applied by students are explained as well as suggestions and implementation of games in mathematics classes and possible strategies students could come up with. Group theory also has an important and essential application in game strategies and algorithms.

Životopis

Rođena sam 9. veljače 1996. godine u Zagrebu. Osnovnu školu Trnsko u Zagrebu završila sam 2011. godine nakon koje upisujem Prvu Gimnaziju u Novom Zagrebu. Nakon položene mature, 2015. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, nastavnički smjer te godine 2020. stječem titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Iste godine upisujem diplomski studij Matematike, nastavnički smjer te sam u zimskom semestru pohađala praksu u sklopu studija u Osnovnoj školi AUgusta Šeone u Zagrebu i Prirodoslovnoj školi Vladimira Preloga. Kroz cijeli studij radim kao Office manager u tvrtci B2 Kapital d.o.o. te se u rujnu 2022. godine zapošljavam u istoj tvrtci kao Mlađi specijalist za ljudske potencijale i podršku poslovanju.