SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mirta Ćuk

RJEŠAVANJE PROBLEMA U KURIKULUMU ZA NASTAVNI PREDMET MATEMATIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Eva Špalj

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Prije svega, hvala mojim dragim profesoricama: Sanji Antoliš i Evi Špalj što su mi otkrile čari matematike i pratile me na mom putu od srednjoškolskih dana sve do izrade diplomskog rada.
Veliko hvala mojim roditeljima i obitelji, na bezuvjetnoj podršci, ljubavi i ohrabrenju.
Ivanu, na svakoj pomoći, bodrenju i brizi tijekom stresnih perioda. Hvala vam što ste često više vjerovali u mene od mene same.

Sadržaj

Uvod

Problem je nezaobilazna pojava u svakodnevnom ljudskom životu. Problemi predstavljaju pitanja na koje je potrebno dati odgovore to jest zadatke koje je potrebno riješiti. Stoga je kontinuirano stvaranje novih problema čovjeka natjeralo na njihovo rješavanje. Uslijed takvih okolnosti pojavljuje se izraz „rješavanje problema“, koji pojednostavljeno označava proces postizanja zadanog cilja savladavanjem prepreka, odnosno proces stvaranja željena rezultata. Šira tema ovog diplomskog rada upravo je rješavanje problema u matematici, a uža tema su strategije za rješavanje problema koje predstavljaju svojevrstan alat za rješavanje određenih problemskih situacija.
Cilj je ovog diplomskog rada istražiti i analizirati strategije rješavanja problema u nastavnom predmetu Matematika. Sukladno cilju, svrha ovog rada je prezentirati potencijale u učenju i poučavanju strategija za rješavanje problema u nastavi matematike. Stoga ovaj rad ima svrhu ukazati na značaj razvoja nastavničkih vještina potrebnih za poučavanje djece o strategijama za rješavanje problema. Time je osobito važno ukazati na značaj pristupa nastavnika tematici rješavanja problema. Isto tako, ovim radom želi se potaknuti dublje razumijevanje problematike u području izučavanja discipline rješavanja problema; kao jednog od glavnih pokretača razvoja ljudskog društva.

Diplomski rad ukupno se sastoji od sedam poglavlja:

1. Uvod
2. Matematički proces: rješavanje problema
3. Pravni i regulatorni okvir
4. Strategije rješavanja problema
5. Analiza strategija
6. Primjena strategija u nastavi matematike
7. Zaključak

U uvodu je definirana tema, cilj i svrha rada. Obrazložena je struktura rada, te su ukratko opisana sva glavna poglavlja.
U drugom poglavlju objašnjen je pojam problema i rješavanja problema u općenitom smislu, te su iznesene metodološke pretpostavke rješavanja problema.
U trećem poglavlju predstavljene su najpoznatije strategije rješavanja problema u matematici. Poglavlje se sastoji od općenitog opisa i definicija strategija rješavanja problema te od dijela u kojem je svaka strategija zasebno definirana i pojašnjena.
U četvrtom poglavlju predstavljen je pravni i regulatorni okvir u pogledu matematike kao znanosti i nastavnog predmeta na razini EU i Republike Hrvatske. U ovom poglavlju posebno je istražen dio zakonske regulative koji se odnosi na rješavanje problema i pripadajuće strategije/metode.
U petom poglavlju detaljno su istražene i predstavljene tri strategije rješavanja problema: Rješavanje unatrag, Rješavanje jednostavnijeg analognog problema i Pogađanje i testiranje. Za svaku od strategija definirane su osnovne i dodatne karakteristike, te je objašnjena njihova potencijalna primjena u svakodnevnom životu. Uz navedeno, za svaku od strategija predstavljeni su matematički primjeri sa iskazanim procesom dolaska do konačnog rješenja.
U šestom poglavlju objašnjena je moguća primjena opisanih strategija. U poglavlju su prikazani ishodi učenja, definirane su nastavne metode rješavanja problema i dane su smjernice odabira matematičkih primjera.

Poglavlje 1

Matematički proces: rješavanje problema

1.1 Problem

Problem u širem smislu riječi označava pitanje koje čeka odgovor i/ili zadatak koji čeka rješenje. Najčešće, u današnjem društvu, problem se odnosi na suočavanje s izborom djelovanja koji je težak, bilo za pojedinca, bilo za društvo u cjelini. Međutim, problem je vrlo raširena društvena pojava koja se javlja u različitim područjima, oblicima, obujmu, i slično. Primjerice, u matematici problem predstavlja iskaz koji zahtijeva rješenje, obično matematičkim operacijama ili geometrijskim konstrukcijama.
Problemi mogu biti jednostavni, komplicirani, kompleksni ili kaotični. Neke uobičajene vrste problema su globalni problemi, osobni problemi i društveni problemi. S gledišta ljudskog razmišljanja, problem generalno predstavlja čovjeku nepovoljne okolnosti kojima je potrebno pronaći i primijeniti odgovarajuće rješenje.

1.2 Rješavanje problema

Rješavanje problema jedna je od osnovnih kognitivnih sposobnosti ljudi koja je usko povezana s raznim procesima poput učenja, donošenja odluka i rasuđivanje [3]. Izraz „rješavanje problema“ (eng. problem-solving) pojednostavljeno označava proces postizanja cilja savladavanjem prepreka tj. rješavanjem različitih problema. Problemi kojima je potrebno rješenje kreću se od jednostavnih osobnih zadataka (npr. kako uključiti uređaj) do složenih problema u poslovnom i tehničkom području. Rješavanje problema može se opisati kao beskonačan skup različitih metoda koje se koriste kako bi se steklo potpuno razumijevanje ljudske okoline, te kako bi se identificirale i provele nužne promjene tj. zahvati, a sve kako bi se došlo do željenog ishoda, odnosno rezultata. S povijesnog gledišta, rješavanje problema može se maštovito opisati kao srž ljudske evolucije i glavna pokretačka snaga razvoja čovječanstva. Definitivno je jasno kako je ljudsko rješavanje problema tijekom povijesti rezultiralo društvenim, kulturnim, tehničkim, ekonomskim i drugim evolucijama, te je ujedno jedini izvor svih novih izuma. Isto tako, rješavanje problema osnova je za stalno učenje, usavršavanje, komunikaciju i ljudsku interakciju u svrhu daljnjeg ljudskog razvoja društva.

Metodološke pretpostavke za uspješno rješavanje problema temelje se na nekoliko koraka koji su potrebni kako bi se problem doveo do konačnog rješenja. U početku je potrebno identificirati, te analizirati i opisati (dokumentirati) problem; zatim je potrebno utvrditi temeljne uzroke i razviti alternativna rješenja (opcije). U konačnici se odabrano rješenje implementira i mjere se rezultati kako bi se ocijenila uspješnost rješavanja problema te pronalaska konačnog rješenja [10]. Svaki korak u procesu rješavanja problema koristi vještine i metode koje doprinose ukupnoj učinkovitosti utjecanja na promjene i određuju razinu složenosti problema koji se može riješiti.

Rješavanje problema izrazito je važno za djecu, te se smatra jednom od najvažnijih životnih vještina koje se uče tijekom rasta i razvoja djece. Prema tome, ljudi uče rješavati jednostavne probleme od vrlo rane dobi, primjerice uče jesti, koordinirati pokrete, komunicirati i sl. Tijekom godina života vještine rješavanja problema usavršavaju se, sazrijevaju i postaju sofisticiranije. Na taj način ljudi od najranijeg djetinjstva postaju sposobni rješavati sve kompleksnije probleme te život nastavljaju uz beskonačan potencijal za napredak. Smatra se izrazito važnim djecu naučiti samostalnom rješavanju problema, što će rezultirati donošenjem zdravih životnih odluka.

Poglavlje 2

Pravni i regulatorni okvir

2.1 Općenito

Pravni i regulatorni okvir u kontekstu ovog diplomskog rada podrazumijeva skup pravnih (zakonskih) i regulatornih dokumenata na razini Europske unije odnosno Republike Hrvatske, a kojima se definiraju i uspostavljaju uvjeti za područje rješavanja problema u matematici.
Europska unija ističe matematiku kao izrazito važnu znanost čija je primjena nužna za daljnji razvoj gospodarstva. Stoga tijela EU kroz različite inicijative i programe financiranja promiču matematiku te potiču daljnja istraživanja. Na europskoj razini donose se obvezujuće Uredbe, Direktive i Odluke te neobvezujuća Mišljenja i Preporuke, te se na taj način prenose u hrvatsko zakonodavstvo. Analizirani su sljedeći dokumenti na razini Europske unije:

- Preporuka o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje, Europsko vijeće, 2018.
- Izvješće: Matematičko obrazovanje u Europi: Zajednički izazovi i nacionalne politike, Europska komisija, 2011.

Zakonska regulativa na razini Republike Hrvatske podrazumijeva skup Zakona, Pravilnika, Odluka i ostalih propisa koji se odnose na izvornu temu ovog diplomskog rada – rješavanje problema u matematici. Stoga su analizirani sljedeći dokumenti na razini Republike Hrvatske:

- Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019.
- Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2. u Republici Hrvatskoj, Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019.

- Pravilnik o odgovarajućoj vrsti obrazovanja učitelja i stručnih suradnika u osnovnoj školi, Ministarstvo znanosti i obrazovanja, 2019.

2.2 Zakonski okvir Europske Unije

Ključne kompetencije

Na europskoj razini tijela Europske Unije podupiru države članice u jačanju osnovnih vještina i ključnih kompetencija svih građana. Podrška se prvenstveno odnosi na olakšavanje uzajamnog učenja i razmjenu najbolje prakse između država članica EU. S povijesnog aspekta, podrška Europske Unije razvoju ključnih kompetencija nije novost već sustavan rad na procesu jačanja ljudskih resursa tijekom proteklih godina. Europska komisija potiče države članice da se snažnije usredotoče na matematičke kompetencije i vještine stanovnika, kako bi se stavio veći naglasak na primjenu matematike u svakodnevnom životu.
Prema tome, 2006. godine Europski parlament i Vijeće Europske unije usvojili su Preporuku o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje. U toj se Preporuci od država članica zahtijeva da razvijaju pružanje ključnih kompetencija za sve građane. Preporuka je tada predstavljala ključni referentni dokument za razvoj obrazovanja, osposobljavanja i učenja s ciljem stjecanja kompetencija na području država članica EU. Preporuka je iznijela važne smjernice za strategije cjeloživotnog učenja, uključujući strategije za postizanje opće pismenosti; upućujući države članice da se koriste dokumentom i prilagode smjernice nacionalnom okruženju.
U svibnju 2018. Europsko vijeće donijelo je ažuriranu Preporuku Vijeća o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje. U skladu s Preporukom razvoj ključnih kompetencija i osnovnih vještina trebalo bi promicati na sljedeće načine[13]:

- pružanjem visokokvalitetnog obrazovanja, osposobljavanja i cjeloživotnog učenja za sve
- podupiranjem nastavnog osoblja u uvođenju pristupa poučavanju i učenju na temelju kompetencija
- promicanjem različitih pristupa učenju i konteksta u perspektivi cjeloživotnog učenja
- razvojem metoda za vrednovanje i priznavanje ključnih kompetencija

Preporuka koju je donijelo Europsko vijeće naglašava da su zahtjevi u pogledu kompetencija danas drukčiji s obzirom na to da je sve više radnih mjesta podložno automatizaciji. Isto tako, ističe se da tehnologija ima sve veću ulogu u svim područjima rada i života. Sukladno tome, poduzetničke, socijalne i građanske kompetencije sve su važnije za osiguravanje otpornosti i sposobnosti prilagodbe promjeni. Upravo su vještine kao što su

rješavanje problema, kritičko razmišljanje, sposobnost surađivanja, kreativnost, računalno razmišljanje i samoregulacija istaknute kao krucijalne, te su u principu korisni alati s pomoću kojih ono što je naučeno primjenjujemo u praksi za stvaranje novih ideja, teorija, proizvoda i novog znanja.
Stoga je europskoj razini donesen tzv. „Europski referentni okvir" koji predstavlja temeljni dokument koji se odnosi na područje cjeloživotnog učenja. Okvir se temelji na pretpostavci da svi imaju pravo na kvalitetno i uključivo obrazovanje, osposobljavanje i cjeloživotno učenje, a sa svrhom održavanja i stjecanja vještina pomoću kojih mogu u cijelosti sudjelovati u društvu i uspješno se kretati na tržištu rada. Glavni ciljevi Referentnog okvira su prepoznavanje i definiranje ključnih kompetencija, te osiguravanje podrške za kreatore politike, pružatelje obrazovanja i osposobljavanja, nastavno osoblje, savjetnike za profesionalno usmjeravanje, poslodavce, javne službe za zapošljavanje i same učenike. Isto tako, svrha donošenja ovakve vrste dokumenta ima za cilj podupirati napore na europskoj, nacionalnoj, regionalnoj i lokalnoj razini kako bi se poticao razvoj kompetencija iz perspektive cjeloživotnog učenja.
Ključne kompetencije mogu se opisati kao dinamična kombinacija znanja, vještina i stavova koje učenik treba razvijati tijekom cijelog života, počevši od rane dobi nadalje. Razvoj kompetencija potiče se visokokvalitetnim obrazovanjem, osposobljavanjem i cjeloživotnim učenjem. Smatra se da su ključne kompetencije nužne za postavljanje temelja za stvaranje ravnopravnijih i demokratskijih društava. Kompetencije jasno odgovaraju na potrebu za održivim razvojem, socijalnom kohezijom i daljnjim razvojem demokratske kulture.
Europski referentni okvir utvrđuje sljedećih osam ključnih kompetencija:

- kompetencija pismenosti - podrazumijeva sposobnost učinkovitog komuniciranja i povezivanja s drugima na primjeren i kreativan način
- kompetencija višejezičnosti - podrazumijeva sposobnost prikladne i učinkovite upotrebe različitih jezika za komunikaciju
- matematička kompetencija te kompetencija u prirodoslovlju, tehnologiji i inženjerstvu – podrazumijeva sposobnost razvijanja i primjene matematičkog mišljenja i uvida u rješavanju niza problema u svakodnevnim situacijama
- digitalna kompetencija – podrazumijeva sigurnu, kritičnu i odgovornu upotrebu digitalnih tehnologija i rukovanje njima za učenje, na poslu i za sudjelovanje u društvu
- osobna i socijalna kompetencija te kompetencija učenja kako učiti - podrazumijeva sposobnost promišljanja o sebi, učinkovitog upravljanja vremenom i informacijama, surađivanja s drugima na konstruktivan način, zadržavanja otpornosti te upravljanja vlastitim učenjem i karijerom

- kompetencija građanstva – podrazumijeva sposobnost da se postupa kao odgovoran građanin te da se u potpunosti sudjeluje u građanskom i društvenom životu na temelju razumijevanja društvenih, gospodarskih, pravnih i političkih koncepata i struktura, kao i globalnih promjena i održivosti

- poduzetnička kompetencija – podrazumijeva sposobnost djelovanja na temelju mogućnosti i ideja te njihovo pretvaranje u dodatnu vrijednost, temelji se na kreativnosti, kritičkom razmišljanju i rješavanju problema, preuzimanju inicijative i ustrajnosti te sposobnosti surađivanja s drugima

- kompetencija kulturne svijesti i izražavanja – podrazumijeva sposobnost razumijevanja i poštovanja načina na koji se ideje i smisao kreativno izražavaju i prenose u različitim kulturama u obliku niza umjetničkih i drugih kulturnih formi

U studenom 2019. godine, nastavno na donošenje preporuka, Europska komisija organizirala je konferenciju o pristupima učenju i okruženju u školskom obrazovanju. Osnovni cilj konferencije bio je pružanje potpore država članicama u kontekstu potporu razvoja ključnih kompetencija njihovih građana.

Matematička kompetencija te kompetencija u prirodoslovlju, tehnologiji i inženjerstvu

Kao što je navedeno, kompetencija u matematici te kompetencija u prirodoslovlju, tehnologiji i inženjerstvu na europskoj razini identificirana je kao jedna od ključnih kompetencija. Specifičnije, matematička kompetencija označava sposobnost razvijanja i primjene matematičkog mišljenja i uvida u rješavanju niza problema u svakodnevnim situacijama. Temelji se na dobroj matematičkoj pismenosti, a naglasak je na procesu i aktivnosti, kao i na znanju. Smatra se ključnom za osobno ispunjenje, proaktivno građanstvo, prosperitet, socijalnu uključenost i zapošljavanje temeljeno na znanju.
Matematička kompetencija u različitom opsegu uključuje sposobnost i spremnost na upotrebu matematičkih načina razmišljanja i prikaza (formule, modeli, nacrti, grafikoni, dijagrami, i sl.). Za konkurentnost u području matematike potrebno je usvojiti osnovna znanja i vještine te steći stavove povezane s ovom kompetencijom. Potrebno znanje u području matematike uključuje dobro poznavanje brojeva, mjera i struktura, osnovnih operacija i osnovnih matematičkih prikaza, razumijevanje matematičkih pojmova i koncepata te svijest o pitanjima na koja matematika može ponuditi odgovore. Pojedinac bi trebao imati vještine za primjenu osnovnih matematičkih načela i procesa u svakodnevnim situacijama kod kuće i na poslu (npr. financijske vještine) te za praćenje i ocjenjivanje argumentacijskog slijeda. Pojedinac bi trebao moći matematički rasuđivati, razumjeti matematički dokaz i komunicirati matematičkim jezikom te upotrebljavati odgovarajuća pomagala, uključujući statističke

podatke i grafikone, i razumjeti matematičke aspekte digitalizacije. Pozitivan stav u matematici temelji se na poštovanju istine te na spremnosti na traženje razloga i procjenu njihove valjanosti.
Europska komisija naglašava da postoje problemi u pogledu matematičke pismenosti. Ova tvrdnja dokazuje se činjenicom da je opća matematička pismenost kod gotovo polovice odraslih stanovnika EU na najnižoj razini [7]. Isto tako, činjenica je da su mnoge europske zemlje suočene s opadanjem broja studenata matematike, znanosti i tehnologije. Stoga se naglašava važnost hitnosti rješavanja problema nedostatka stručnjaka za matematiku i srodna polja, jer to u konačnici može znatno utjecati na konkurentnost gospodarstava država članica Europske Unije. Ističe se važnost daljnjeg jačanja podrške metodama koje promiču aktivno učenje učenika i kritičko mišljenje, te im se istovremeno pridaje ogroman potencijal u europskim okvirima razvoja.
Prema Izvješću Europske komisije [7], Europsko izvješće pruža jedan oblik nacionalnih smjernica o pristupima poučavanju matematike. Izvješće daje pregled nacionalnih politika za reformu nastavnih planova i programa matematike, promicanje inovativnih nastavnih metoda i ocjenjivanje te poboljšanje obrazovanja i osposobljavanja nastavnika. Poziva na sveobuhvatne politike matematičkog obrazovanja koje se temelje na kontinuiranom praćenju i istraživanju. Također se zalaže za sveobuhvatne politike podrške za nastavnike, obnovljeni fokus na različite primjene matematičkih znanja i vještina rješavanja problema te za provedbu niza drugih strategija. Izvješće također donosi preporuke o tome kako povećati motivaciju za učenje matematike i poticati razvoj poslovnih karijera povezanih s matematikom. Istraživanja sugeriraju da učinkovita poduka matematike uključuje korištenje različitih nastavnih metoda.

2.3 Zakonski okvir Republike Hrvatske

Ciljevi, sadržaj i očekivani ishodi učenja matematičkog obrazovanja općenito su definirani nastavnim planom i programom – koji se naziva kurikulum. Kurikulum za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj jasno definira odgojno-obrazovne ciljevi učenja i poučavanja. Prema važećem kurikulumu [16], učenici će temeljem usvojenih matematičkih znanja, vještina i procesa:

- primijeniti matematički jezik u usmenome i pisanome izražavanju, strukturiranju, analizi, razumijevanju i procjeni informacija upotrebljavajući različite načine prikazivanja matematičkih ideja, procesa i rezultata u matematičkome kontekstu i stvarnome životu
- samostalno i u suradničkome okružju matematički rasuđivati logičkim, kreativnim i kritičkim promišljanjem i povezivanjem, argumentiranim raspravama, zaključivanjem, provjeravanjem pretpostavki i postupaka te dokazivanjem tvrdnji

- rješavati problemske situacije odabirom relevantnih podataka, analizom mogućih strategija i provođenjem optimalne strategije te preispitivanjem procesa i rezultata, po potrebi uz učinkovitu uporabu odgovarajućih alata i tehnologije
- razviti samopouzdanje i svijest o vlastitim matematičkim sposobnostima, upornost, poduzetnost, odgovornost, uvažavanje i pozitivan odnos prema matematici i radu općenito
- prepoznati povijesnu, kulturnu i estetsku vrijednost matematike njezinom primjenom u različitim disciplinama i djelatnostima kao i neizostavnu ulogu matematike u razvoju i dobrobiti društva.

Matematički procesi kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika važni su na svim razinama obrazovanja te prožimaju sve domene kurikuluma. Organizirani su u pet skupina:

1. prikazivanje i komunikacija
2. povezivanje
3. logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje
4. rješavanje problema i matematičko modeliranje
5. primjena tehnologije

Međutim, učinkovito provođenje ciljeva kurikuluma u praksu u učionici ovisi, između ostalog, o mnogim drugim stvarima, poput pružanja specifične podrške i smjernica učiteljima i školama za isporuku specifičnih nastavnih planova i programa.
Pravni i regulatorni okvir EU i Republike Hrvatske jasno definira pravila i smjernice u pogledu matematike kao znanosti i nastavnog predmeta u osnovnim i srednjim školama. Sukladno tome, Kurikulum definira rješavanje problema kao jedan od najvažnijih matematičkih procesa, a strategije rješavanja problema u matematici kao neizostavan alat u učenju. Međutim, iako je samo područje vrlo dobro pravno-zakonski regulirano, postoji određena praznina odnosno nedoumica u pogledu nastavničkih materijala koji se isključivo bave ovom tematikom. Konkretnije, u praktičnoj primjeni zakonske regulative nedostaje preporuka sadržajnog nastavničkog materijala koji bi objasnio budućim i sadašnjim nastavnicima koje metode i na koji način poučavati. Stoga je na nastavnicima da odaberu način na koji će, i kada, predstaviti određene strategije svojim učenicima.

Poglavlje 3

Strategije rješavanja problema

3.1 Općenito

Rješavanje problema općenito je prihvaćeno kao sredstvo za unaprjeđenje vještina razmišljanja i ima vrlo važnu ulogu u procesu učenja u sklopu kurikuluma matematike. Alat za rješavanje problema naziva se strategija, metoda i/ili tehnika rješavanja određenih problemskih situacija. Bitno je napomenuti da ne postoji jedinstven način rješavanja matematičkog problema jer se rješavanje može provesti na više načina, odnosno moguće je upotrijebiti više različitih strategija za rješavanje problema. Rješavanje matematičkih problema te upotreba strategija pri rješavanju za većinu učenika zna biti težak i izazovan zadatak, najvjerojatnije zbog toga što problem zahtijeva apstraktno razmišljanje o situaciji, a zatim modeliranje rješenja korištenjem matematičkih pojmova.
Na temelju dosadašnjih istraživanja u rješavanju matematičkih problema može se zaključiti da proces rješavanja problema zahtijeva skup sustavnih aktivnosti pri čemu se koristi logično planiranje, te se stvaraju alternative i odabiru odgovarajuće metode za njegovu provedbu. Svaki proces rješavanja problema zahtijeva metodu ili strategiju za rješavanje problema, konkretan plan za postizanje cilja kako bi se postiglo željeno rješenje. U tom kontekstu, osoba koja rješava problem mora odabrati odgovarajući proces i provesti pretpostavljeni plan što je bolje moguće.
Polazeći od pretpostavke da je opći cilj obrazovanja osposobiti proaktivne, motivirane i neovisne građane za suočavanje i prevladavanje stalnih izazova, stvaranje kritičkog razmišljanja postaje od primarne važnosti. Upravo je područje rješavanja problema, a specifično problemskih situacija u matematici, važan pokretač i dio izazova u pronalaženju rješenja za probleme. Stoga je poučavanje rješavanja matematičkih problema učinkovit način razvijanja vještina 21. stoljeća, posebice mlađe populacije. Time se mladi ujedno i pripremaju na rješavanje izazovnih životnih situacija i suočavanje s budućim preprekama koje im nosi poslovni i privatni život, međuljudski odnosi te još puno toga. Razvoj kritičkog

razmišljanja kroz metode strategijskog rješavanja problema može koristiti u širem kontekstu kako bi se pomoglo učenicima da steknu moderne vještine potrebne za uspjeh u karijeri. Osim toga, uključivanjem u proces učenja i uvježbavanjem specifičnih metoda za rješavanje matematičkih problema, učenici bi mogli naučiti način razmišljanja za pristup i uspješno rješavanje problema u širem kontekstu.
Rješavanje problema vrlo je široko područje u kojem se primjenjuje nekoliko različitih strategija, metoda, tj. tehnika. Rješavanje matematičkih problema uključuje nekoliko procesa koji se koriste stoljećima, dok se u aktualnoj literaturi [11] spominju sljedeće strategije:

- rješavanje unatrag
- pronalaženje uzorka
- usvajanje drugačijeg pogleda
- rješavanje jednostavnijeg analognog problema
- uzimanje ekstremnih slučajeva u obzir
- skiciranje
- pogađanje i testiranje
- uzimanje u obzir svih mogućnosti
- organiziranje podataka
- logično rasuđivanje

U nastavku diplomskog rada obrazložit će se značenje svake od navedenih strategija, detaljnije će se opisati sljedeće tri strategije:

- rješavanje unatrag
- rješavanje jednostavnijeg analognog problema
- pogađanje i testiranje

Za svaku od ove tri strategije utvrdit će se njihovo osnovno značenje, karakteristike i dodatne specifičnosti. Prikazat će se njihova primjena u svakodnevnom životu te primjena u matematici s naglaskom na pristup od strane učitelja i učenika. Prikazat će se načini primjene, predstaviti primjeri primjene u matematičkom okruženju, ali će se opisati i neke svakodnevne situacije. Isto tako, za sve će strategije biti detaljno iskazani primjeri na temelju kojih se želi približiti tematika i olakšati proces prenošenja znanja i vještina s učitelja na učenika.

3.2 Rješavanje unatrag

Rješavanje problema unatrag označava obrnut proces primjenjiv na problemsku situaciju, odnosno kreiranje rješenja polazeći od krajnjih točaka te postupno dolazeći do početnih točaka nekog procesa. Ova se metoda koncipira na kretanju od konačnog rješenja i vraćanje korak po korak, kako bi se došlo do početka. Osim toga, metoda je karakteristična po tome što ima suprotan smjer, odnosno započinje se sa željenim krajnjim rezultatom na umu, a zatim se postupno planira kako do njega doći. Osnovna karakteristika ove strategije je ta da su matematičke operacije obrnute, odnosno inverzne. Prilikom upotrebe metode rada unatrag, svaka se matematička operacija mora obrnuti kako bi se uspješno riješila problemska situacija i pronašli početni uvjeti.

3.3 Pronalaženje uzoraka

Pronalaženje uzorka je strategija rješavanja problema koju karakterizira ispitivanje podataka s ciljem pronalaska odgovarajućeg uzorka. Uzorak se definira kao manji skup podataka koje istraživač odabire ili koji se razabiru iz većeg skupa korištenjem unaprijed definirane metode odabira. Praktično, uzorak sadržava obilježja osnovnoga skupa i omogućava donošenje zaključka o cjelini, a može se javiti u mnogim situacijama. Uzorkovanje je vrlo često pojam u statistici, a označava proces u statističkoj analizi prilikom kojeg znanstvenici uzimaju unaprijed određeni broj opažanja iz veće populacije kako bi stvorili uvjete za stvaranje određenog uzroka.

3.4 Usvajanje drugačijeg pogleda

Usvajanje drugačijeg pogleda odnosno gledišta je strategija koju karakterizira sagledavanje problem iz druge perspektive. Ova je metoda iznimno korisna za rješavanje matematičkih problema te omogućuje izbjegavanje nepogodnih situacija upravo iz razloga što se promatranjem s drugačijeg gledišta može na vrijeme uočiti izvor problema i doći do željenog rezultata tj. rješenja.

3.5 Rješavanje jednostavnijeg analognog problema

Rješavanje jednostavnijeg analognog problema je strategija koju karakterizira promjena fokusa s glavnog problema na manji, jednostavniji i potencijalno rješiv problem. Osnovna ideja ove metode je da se želi napraviti odmak od pretpostavki izvornog problema na način da se problem dovoljno pojednostavi i uslijed toga postane rješiv. Time će rješenje jednostavnijeg problema pružiti širi uvid u izvorni problem i povećati šanse za pronalazak izvornog rješenja. Analogno odnosno kontinuirano ili istovjetno rješavanje problema podrazumijeva da se problem ponovno predstavlja u smislu nekog drugog procesa ili situacije koja je „poznatija" odnosno o kojoj se posjeduje više informacija.

3.6 Uzimanje ekstremnih slučajeva u obzir

Promatranje ekstremnih slučajeva može biti vrlo korisna strategija za analizu određenih situacija, bez obzira radi li se o matematičkom problemu ili ne. Primjenjujući ovu strategiju, neke varijable se drže konstantnima dok druge variraju do ekstrema. Tada, ako varijabli nije propisana nikakva specifikacija, ekstremni slučaj pruža koristan uvid i put k rješenju problema. Neki se problemi mogu puno lakše riješiti razmatranjem ekstreminh slučajeva. Bitno je još napomenuti da se uzimaju u obzir krajnosti onih varijabli koje ne utječu na stvarnu problemsku situaciju. Dakle, promjenom tih varijabli neće se promijeniti smisao i svrha zadatka, odnosno problema. Promatranjem ekstremnih slučajeva se zapravo postavlja nova situacija, odnosno problemu se pristupa u kontekstu najgoreg mogućeg scenarija. Većina nas je i nesvjesno koristila ovu strategiju u stvarnom životu kada smo se zapitali *Što je najgore što se može dogoditi?* pri donošenju neke odluke. Odnosno, što je najgore što se može dogoditi ako naš argument pođe po zlu? Taj "najgori mogući scenarij" je klasičan primjer korištenja ove strategije koji ponekad može uvelike pomoći u rješavanju problematične situacije ili problema na inteligentan način.

3.7 Skiciranje

Skiciranje je strategija koju karakterizira stvaranje vizualnog prikaza problema. Predstavlja gotovo povijesnu te dokazano korisnu i učinkovitu metodu rješavanja problema. Dugi niz godina ovu strategiju istraživači u području matematičkog obrazovanja preporučuju kao osnovnu i jednu od najčešće korištenih tehnika kod djece i mlađih osoba[10]. Smatra se da je stvaranje crteža izrazito važno za rješavanje različitih problema iz stvarnog svijeta, a posebice onih problema koja imaju poveznicu s geometrijom[12]. Navedeno proizlazi iz činjenice da se crteži koje čovjek izrađuje oslanjaju na prostornu strukturu koja se prethodno mora konstruirati u ljudskom umu.

3.8 Pogađanje i testiranje

Pogađanje i testiranje označava strategiju koja se temelji na pogađanju rješenja te naknadno provjeravanje odgovara li rješenje zadanom problemu. U slučaju da nije pogođeno točno rješenje, nova pretpostavka prilagođava se ponovno dok se ne ispune svi uvjeti, odnosno dok se ne pogodi rješenje. Važna karakteristika ove metode je da se svaka sljedeća pretpostavka temelji na informacijama dobivenim testiranjem prethodne pretpostavke. Ova strategija ističe važnost sustavnog rada, a upravo sustavan pristup problemu učenicima omogućuje da rade na učinkovit način, umjesto da nasumično biraju brojeve s nadom da će na kraju doći do odgovora na problem.

3.9 Uzimanje u obzir svih mogućnosti

Strategija koja se naziva „Uzimanje u obzir svih mogućnosti" često podrazumijeva razradu svih potencijalnih scenarija te vrednovanje istih sukladno njihovoj izvjesnosti nastanka. Ovu metodu rješavanja problema karakterizira dublje promišljanje i sagledavanje problema sa više aspekata, odnosno uzimanje u obzir svih mogućnosti (scenarija) koji se mogu dogoditi u budućnosti. Preduvjet za korištenje ove metode svakako je pretpostavka da problem ili skup problema može imati više različitih odgovora. Upotrebom ove metode djecu se potiče na logičko razmišljanje i sustavan rad s ciljem pronalaska rezultata tj. odgovora na problem. Ova metoda za učenike vrlo je važna iz razloga što se korištenjem iste razvijaju sustavne vještine za pronalaženje svih mogućih rješenja za postavljene probleme. Smatra se da ova strategija kod djece posebno potiče ustrajnost i razvija želju testiranja odnosno pokušaja primjene različitih pristupa rješavanju problema.

3.10 Logično rasuđivanje

Logičko rasuđivanje, koje se često naziva i logično zaključivanje, strategija je rješavanja problema koja uključuje proces korištenja racionalnih, sustavnih koraka s ciljem pronalaska zaključka o problemu, odnosno rješenja/rezultata. Primjena logike u općenitom smislu predstavlja osnovu za rješavanje problema, stoga ova strategija nalazi svoju primjenu gotovo u svakom aspektu ljudskog života. U matematici se koraci temelje na unaprijed definiranom matematičkom postupku, a zaključci se donose na temelju datih činjenica i matematičkih načela. Strategije zaključivanja uključuju učenike u traženje učinkovitih strategija za rješavanje osnovnih kombinacija brojeva. Na taj način učenici stječu sposobnost promatranja brojeva i operacija na mnogo istovjetnih načina.

Poglavlje 4

Analiza strategija rješavanja problema

4.1 Rješavanje unatrag

Karakteristike strategije

Jedna od istaknutijih strategija rješavanja problema upotrebom logičkog promišljanja svakako je metoda pod nazivom „rješavanje unatrag“, a često se naziva i rad unatrag. U općenitom smislu, rješavanje problema unatrag označava obrnut proces, odnosno kreiranje rješenja polazeći od krajnjih točaka te postupno dolazeći do početnih točaka nekog procesa. Ova metoda izrazito je moćna i učinkovita u području rješavanja problema, te je ključna matematička strategija koja ponekad može zamijeniti dugotrajan i naporan rad. Za rješavanje specifičnih problemskih situacija vrlo je važno znati ispravno identificirati probleme čija se rješenja dramatično olakšavaju radom unatrag. Upravo široke upotrebe i učinkovitosti, ova metoda vrlo često nalazi svoju primjenu u svakodnevnom životu.
Metoda rješavanja unatrag koncipira se na započinjanju s konačnim rješenjem i vraćanjem, korak po korak, kako bi se došlo do početka. Na ovaj način postiže se organiziran i usredotočen te prije svega učinkovit proces rješavanja problema pri čemu je krajnji cilj jasno definiran. Upravo je ključan element metode rada unatrag potpuna kristalizacija cilja. Nakon što je rješenje pronađeno, rezultati se mogu provjeriti započinjanjem s ovim rješenjem i provođenjem radnje od početka do kraja.
Ova metoda karakteristična je po tome što ima suprotan smjer, odnosno započinje se s željenim krajnjim rezultatom na umu, a zatim se postupno planira kako do njega doći. Osnovna karakteristika ove strategije je ta da su matematičke operacije obrnute, odnosno inverzne. Prilikom upotrebe metode rada unatrag, svaka se matematička operacija mora obrnuti kako bi se vratila na početak. Dakle, ako rad unaprijed zahtijeva zbrajanje, kada učenici rade unatrag morat će oduzimati. I ako množe radeći naprijed, moraju dijeliti kada rade unatrag. Stoga je velika prednost ove metode upravo razumijevanje inverznih mate-

matičkih operacija te korištenje istih. Jednom kada učenici razumiju inverzne operacije i znaju da moraju početi s rješenjem i vratiti se na početak, morat će naučiti prepoznati vrste problema koji zahtijevaju rad unatrag. Tako će učenici lakše prepoznati potencijal upotrebe ove metode, a na to će ih navesti zaključak da se problemi koji navode niz događaja ili niz koraka mogu riješiti radom unatrag. Rad unatrag vrlo dobro funkcionira za probleme u kojima se izvodi niz operacija na nepoznatom broju i prilikom čega je poznat isključivo konačni rezultat. Stoga ova metoda podrazumijeva da se s konačnim rezultatom počinje te se primjenjuju matematičke operacije obrnutim redoslijedom dok se ne dođe do početnog broja, tj. uvjeta. Rad unatrag omogućuje logičko razmišljanje i promišljanje o problemu, te će učenici učenjem ovakve vrste metode jednostavnije procijeniti životnu situaciju kada je potrebno koristiti ovaj moćni alat, te uslijed korištenja opće priznatih matematičkih strategija, imati mnogo veće koristi u budućnosti. Vrlo je korisno, s ciljem uspješnog provođenja metode omogućiti učenicima da razgovaraju o svojim razmišljanjima o problemu prije nego započinju samostalan rad iz razloga što bi trebali razumjeti strukturu problema prije samog početka.

U praksi postoji mogućnost da će većini učenika biti teško svladati ovu strategiju jer su, sukladno njihovu matematičkom obrazovanju, primarno naučeni da počnu od početka problema i provedu radnju do kraja, odnosno korak po korak. Od najranijih dana u školi, učenike se obično uči rješavati probleme na najjednostavniji mogući način. Ovo je način na koji su tipični problemi iz udžbenika matematike trebali biti riješeni. Nažalost, znatan dio ovog navodnog ”rješavanja problema” radi se napamet. učenici se bore s jednim problemom, učitelj tada obično otkriva ”model rješenja”, a preostali problemi rješavaju na sličan način. Od učenika se traži malo maštovitog razmišljanja. Zapravo, mi to niti ne smatramo problemima; umjesto toga, mi ih nazivamo vježbama, čija je svrha jednostavno učvrstiti određenu metodu rješavanja ponovljenom upotrebom.

Klasičan primjer u kojemu se ”prešutno” koristi rješavanje unatrag su matematički dokazi. Učenici se po prvi puta s time susreću u srednjoj školi pri rješavanju geometrijskih zadataka u kojima se od njih traži da dokažu neke tvrdnje, tj da pokažu da je nešto istinito za dani geometrijski lik ili tijelo. Tada učenici traže načine na koje mogu jednostavno ponoviti prethodne postupke za rješavanje uzastopnih problema umjesto da problemu pristupe na drugačiji način i primjene strategiju rješavanja unatrag. Osim srednjoškolaca, često se i studenti koji se u sklopu svog studija susreću s višom razinom matematike, muče s dokazima. Ne razumiju ih, uče napamet bez razumijevanja, ali uvijek ostaje to pitanje: *Od kuda se sad to stvorilo?*. Tada je bitno naglasiti da se dokazi pišu obrnutim redoslijedom, odnosno primjenjuje se strategija rješavanja unatrag.

Primjena u svakodnevnom životu

Rješavanje odnosno rad unatrag u ovom kontekstu definira se kao matematička metoda u području rješavanja problema, međutim, kao što je i navedeno u uvodnom dijelu, vrlo često se koristi pri svakodnevnom ljudskom odlučivanju. Najčešća primjena ove metode u svakodnevnom životu, a čega često nismo ni svjesni, podrazumijeva planiranje odnosno izradu vremenskog rasporeda zadataka. To je izvrstan primjer iz stvarnog života gdje se klasična metoda rješavanja problema u potpunosti uklopila u dnevno izvršavanje ljudskih obaveza. Korištenjem ove metode, ljudi stvaraju rasporede te planove za različite zadatke koji moraju biti dovršeni do određenog vremena. Prilikom izrade jednostavnog rasporeda često se definira što točno mora biti učinjeno, te se ponekad bilježi i procjena koliko bi svaki zadatak trebao trajati. Zatim se praktično radi unatrag kako bi se dodijelili određeni vremenski intervali svakom zadatku s ciljem planiranja odgovarajućeg vremena početka rada što ujedno označava planirani start obavljanja konkretnih zadataka.
Isto tako, primjer svakodnevne primjene ove metode može se također očitati u policijskom radu, točnije u metodologiji rada prilikom obavljanja očevida, primjerice prometnih nesreća. U takvim slučajevima, policijski posao zahtijeva svojesvrstan rad unatrag, odnosno rekonstrukciju događaja kako bi se utvrdilo što se točno dogodilo, odnosno koji su uzroci prometne nesreće i tko potencijalno snosi odgovornost.
Primjerice, rad unatrag koristi se prilikom pronalaženja najboljeg puta do nepoznatog mjesta na karti. Tipično, prvo se pokuša locirati odredišna točka, a zatim se postupno vraćati kroz mrežu cesta dok se ne dođe do poznatog okruženja.
Specifična primjena ove metode izražena je u različitim društvenim disciplinama. Primjerice, u psihologiji se često koristi metoda „rješavanje unatrag“. Egzaktan primjer odnosi se na činjenicu da je psihoterapija često usmjerena na definiranje konkretnih ciljeva pacijenata, ponajviše s ciljem ozdravljenja i rehabilitacije, što uključuje postupno rješavanje određenih problema na zadanom putu.
Zaključak o primjeni ove metode u svakodnevnom životu može se poetično opisati, a to je da učinkoviti ljudi ”počinju s ciljem na umu”.[4]

Primjeri

Slijedi nekoliko primjera matematičkih zadataka. Svaki će zadatak biti riješen na dva načina; prvi je algebarski način koji svodi dani problem na rješavanje jednadžbe ili sustava jednadžbi, a drugi način je primjenom strategije rješavanja unatrag.

Primjer 4.1.1. *Ivan, Josip i Tomislav zajedno imaju* 12 000 *kn. Ivan polovinu svog novca podijeli na dva jednaka dijela i da ih Josipu i Tomislavu, a drugu polovinu zadrži za sebe.*

Nakon Ivana, isto tako postupio je Josip, a zatim i Tomislav, poslije čega sva tri prijatelja imaju jednak iznos novca. Koliko je novca svaki od dječaka imao na početku? [1]

U nastavku, slijedi rješenje danog primjera algebarskom metodom, odnosno svođenjem na sustav jednadžbi s tri nepoznanice.

Rješenje 4.1.2. *Neka x, y i z predstavljaju količinu novaca koju su redom Ivan, Josip i Tomislav imali na početku. Zajedno imaju 12 000 kn što se može zapisati jednadžbom:*

$$x + y + z = 12\ 000.$$

Ivan polovinu svog novca podijeli na dva jednaka dijela i da ih Josipu i Tomislavu. To znači da su Josip i Tomislav dobili po četvrtinu iznosa, a Ivanu je ostala polovinja njegova iznosa. Tablični prikaz trenutne situacije:

	Ivan	Josip	Tomislav
početak	x	y	z
Ivanova podjela	$\frac{x}{2}$	$y + \frac{x}{4}$	$z + \frac{x}{4}$

Tablica 4.1: Ivanova podjela

Radi jednostavnosti kasnije raspodjele, sve vrijednosti u tablici biti će zapisane kao jedan razlomak:

	Ivan	Josip	Tomislav
početak	x	y	z
Ivanova podjela	$\frac{x}{2}$	$\frac{4y+x}{4}$	$\frac{4z+x}{4}$

Tablica 4.2: Stanje nakon Ivanove podjele

Nakon Ivana, isto tako postupio je i Josip. To znači da Josipu ostaje polovina njegova iznosa, a po četvrtinu njegova iznosa dobivaju Ivan i Tomislav. Napomenimo još da Josip više nema isti iznos novaca s kojim je krenuo, nego i nadodanu četvrtinu od Ivanova početna iznosa. Dakle, Josipova podjela izgleda ovako:

	Ivan	Josip	Tomislav
početak	x	y	z
Ivanova podjela	$\frac{x}{2}$	$\frac{4y+x}{4}$	$\frac{4z+x}{4}$
Josipova podjela	$\frac{x}{2} + \frac{4y+x}{16}$	$\frac{4y+x}{8}$	$\frac{4z+x}{4} + \frac{4y+x}{16}$

Tablica 4.3: Josipova podjela

Sređivanjem izraza dobiva se:

	Ivan	Josip	Tomislav
početak	x	y	z
Ivanova podjela	$\frac{x}{2}$	$\frac{4y+x}{4}$	$\frac{4z+x}{4}$
Josipova podjela	$\frac{9x+4y}{16}$	$\frac{4y+x}{8}$	$\frac{5x+4y+16z}{16}$

Tablica 4.4: Stanje nakon Josipove podjele

Sada, isto tako postupa i Tomislav. To znači da Tomislavu ostaje polovina njegova iznosa, a po četvrtinu njegova iznosa dobivaju Ivan i Josip:

	Ivan	Josip	Tomislav
početak	x	y	z
Ivanova podjela	$\frac{x}{2}$	$\frac{4y+x}{4}$	$\frac{4z+x}{4}$
Josipova podjela	$\frac{9x+4y}{16}$	$\frac{4y+x}{8}$	$\frac{5x+4y+16z}{16}$
Tomislavova podjela	$\frac{9x+4y}{16}+\frac{5x+4y+16z}{64}$	$\frac{4y+x}{8}+\frac{5x+4y+16z}{64}$	$\frac{5x+4y+16z}{32}$

Tablica 4.5: Tomislavova podjela

Sređivanjem izraza dobiva se:

	Ivan	Josip	Tomislav
početak	x	y	z
Ivanova podjela	$\frac{x}{2}$	$\frac{4y+x}{4}$	$\frac{4z+x}{4}$
Josipova podjela	$\frac{9x+4y}{16}$	$\frac{4y+x}{8}$	$\frac{4x+16y+16z}{16}$
Tomislavova podjela	$\frac{41x+20y+16z}{64}$	$\frac{13x+36y+16z}{64}$	$\frac{5x+4y+16z}{32}$

Tablica 4.6: Stanje nakon Tomislavove podjele

Nadalje, poznato je da nakon sve tri raspodjele novaca, sva tri prijatelja imaju jednak iznos, stoga vrijedi:

$$\frac{41x+20y+16z}{64} = \frac{13x+36y+16z}{64} = \frac{5x+4y+16z}{32} \qquad \Big/ \cdot 64$$

$$41x+20y+16z = 13x+36y+16z = 10x+8y+32z$$

Iz produžene jednakosti, dobiven je sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} 41x+20y+16z = 13x+36y+16z, \\ 13x+36y+16z = 10x+8y+32z, \\ 41x+20y+16z = 10x+8y+32z. \end{cases}$$

Svođenjem na standardni oblik sustava tri jednadžbe s tri nepoznanice dobiva se:

$$\begin{cases} 7x - 4y = 0, \\ 3x + 28y - 16z = 0, \\ 31x + 12y - 16z = 0. \end{cases}$$

Rješavanjem sustava ne dobiva se jedinsveno rješenje:

$$(x, y, z) = \left(\frac{4}{7}y, y, y\frac{13}{7}y\right), y \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem $x = \frac{4}{7}y$ *i* $z = \frac{13}{7}y$ *u jednadžbu* $x + y + z = 12000$ *postavljenu na samom početku zadatka dobiva se rješenje:*

$$(x, y, z) = (2000, 3500, 6500).$$

To znači da je na početku Ivan imao 2 000 *kn, Josip* 3 500 *kn i Tomislav* 6 500 *kn.*

U nastavku, dano je rješenje primjera primjenom strategije rješavanja unatrag. To je pogodna strategija jer je poznato da na kraju, poslije svih raspodjela, sva tri dječaka imaju jednak iznos novca. Odnosno, poznato je završno stanje, a nepoznato početno.

Rješenje 4.1.3. *Dječaci zajedno imaju točno* 12000 *kn te nakon svih raspodjela, sva tri dječaka imaju jednak iznos novca. Stoga, krajnje je stanje:*

	Ivan	Josip	Tomislav
kraj	4000	4000	4000

Tablica 4.7: Krajnje stanje

Zadnji od dječaka koji je raspodjeljivao svoje novce je Tomislav, stoga ćemo kod rješavanja unatrag prvo proći kroz njegovu raspodjelu, ali unatrag, provodeći obrnute operacije. Tomislav je svoje novce raspodijelio tako da je pola ostavio sebi, a četvrtinu dao svakom od preostalih dječaka. To znači da je on prije raspodjele imao dvostruko više novaca:

$$2 \cdot 4000 = 8000.$$

Četvrtinu tog iznosa, 2000 *kn su dobili Ivan i Josip. Pošto se zadatak rješava unatrag, provodimo obrnute računske operacije, odnosno sada taj iznos moramo oduzeti:*

	Ivan	Josip	Tomislav
kraj	4000	4000	4000
prije Tomislava	4000 – 2000	4000 – 2000	8000

Tablica 4.8: Prije Tomislavove raspodjele

Sređivanjem, dobiva se:

	Ivan	Josip	Tomislav
kraj	4000	4000	4000
prije Tomislava	2000	2000	8000

Tablica 4.9: Stanje prije Tomislavove raspodjele

Prije Tomislava, isto je napravio Josip. Dakle, prije njegove raspodjele on je imao dvostruko više novaca, $2000 \cdot 2 = 4000$*, a svaki od preostalih dječaka je imao* $4000 \cdot \frac{1}{4} = 1000$ *manje:*

	Ivan	Josip	Tomislav
kraj	4000	4000	4000
prije Tomislava	2000	2000	8000
prije Josipa	2000 – 1000	4000	8000 – 1000

Tablica 4.10: prije Josipove raspodjele

Sređivanjem, dobiva se:

	Ivan	Josip	Tomislav
kraj	4000	4000	4000
prije Tomislava	2000	2000	8000
prije Josipa	1000	4000	7000

Tablica 4.11: Stanje prije Josipove raspodjele

Prije Josipa, isto je napravio Ivan. Dakle, prije njegove raspodjele on je imao dvostruko više novaca, $1000 \cdot 2 = 2000$*, a svaki od preostalih dječaka je imao* $2000 \cdot \frac{1}{4} = 500$ *manje:*

	Ivan	Josip	Tomislav
kraj	4000	4000	4000
prije Tomislava	2000	2000	8000
prije Josipa	1000	4000	7000
prije Ivana	2000	4000 – 500	7000 – 500

Tablica 4.12: prije Ivanove raspodjele

Sređivanjem, dobiva se:

	Ivan	Josip	Tomislav
kraj	4000	4000	4000
prije Tomislava	2000	2000	8000
prije Josipa	1000	4000	7000
prije Ivana	2000	3500	6500

Tablica 4.13: Stanje prije Ivanove raspodjele

Stanje prije Ivanove raspodjele zapravo je početno stanje. To znači da je na početku Ivan imao 2 000 *kn, Josip* 3 500 *kn i Tomislav* 6 500 *kn.*

Zadatak je zadan na školskom natjecanju iz matematike za peti razred. U nacionalnom kurikulumu za peti razred se kao razrada odgojno obrazovnog ishoda *MAT OŠ A.5.1. Brojevnim izrazom u skupu prirodnih brojeva s nulom modelira problemsku situaciju*, spominje i tumačenje dobivenog rješenja u kontekstu problema te računanje vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza. Osim toga, kao razrada odgojno obrazovnog ishoda *MAT OŠ B.5.1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu*, navedeno je kako se od učenika očekuje da prepozna nepoznanicu u problemskoj situaciji, problemsku situaciju zapiše linearnom jednadžbom te da izražava nepoznatu veličinu iz jednostavne linearne jednadžbe koristeći se vezom među računskim operacijama [16].U nacionalnom kurikulumu se u ishodima ne spominje rješavanje sustava jednadžbi, niti rješavanje jednadžbi u skupu racionalnih brojeva. Stoga, kroz redovnu nastavu učenik nije mogao steći potrebno znanje za rješavanje navedenog primjera. No, ishodi dodatne nastave matematike definirani su u školskom kurikulumu. Iako školski kurikulumi nisu jedinstveni, svakome je cilj proširivanje znanja učenika stečenog na redovnoj nastavi, između ostalog i kroz rješavanje problemskih te netipičnih zadataka za redovnu nastavu.
Rješavanja sustava tri jednadžbe s tri nepoznanice zahtjevan je zadatak za učenike te dobi. Osim toga, učenici petih razreda još se nisu ni susreli sa sustavima dvije jednadžbe s dvjema nepoznanicama u redovnoj nastavi matematike, niti su im poznate metode rješavanja sustava jednadžbi (metoda supstitucije te metoda suprotnih koeficijenata). Još k tome učenici petih razreda se do sada nikada nisu susreli s jednadžbama/sustavima jednadžbi

koje nemaju jedinstveno rješenje. S obzirom na sve navedeno, dolazi se do zaključka kako je rješavanje danog primjera algebarskom metodom prekomplicirano i nedostižno učeniku petog razreda osnovne škole.
Primjenom strategije rješavanja unatrag se uveliko skratilo vrijeme i kompliciranost postupka rješavanja. Izbjegnut je sustav jednadžbi te problem komentiranja jednistvenosti rješenja, a osim toga, u postupku rješavanja nije se moralo računati s razlomcima, već samo s cijelim brojevima.

Primjer 4.1.4. *U autobusu je bilo* 57 *putnika. Na prvoj su stanici neki putnici izišli iz autobusa, a ušlo ih je* 11*. Na sljedećoj je stanici iz autobusa izišla trećina putnika, a ušla su tri putnika. Nakon toga je u autobusu bilo* 25 *putnika. Koliko je putnika izišlo na prvoj stanici? [9]*

Rješenje primjera algebarskom metodom, gdje se tekstualni zadatak zapisuje matematičkom jednadžbom prikazan je u nastavku.

Rješenje 4.1.5. *Neka x predstavlja broj putnika koji su izašli na prvoj stanici. U autobusu je bilo* 57 *putnika, te je na prvoj stanici izišlo x putnika, a ušlo ih je* 11*. Matematički izraz koji predstavlja opisanu situaciju jest:*

$$57 - x + 11,$$

sređivanjem izraza se dobiva:

$$68 - x.$$

Na sljedećoj stanici, iz autobusa je izišla trećina putnika. Broj se putnika u autobusu promijenio u odnosu na početno stanje, stoga je potrebno oduzeti trećinu novog broja putnika, ne trećinu od 57*. Također, ušla su tri putnika pa se dobiva izraz:*

$$68 - x - \frac{68 - x}{3} + 3,$$

sređivanjem izraza se dobiva:

$$71 - x - \frac{68 - x}{3}.$$

Nakon toga, u autobusu je bilo 25 *putnika te se dani izraz može izjednačiti s* 25 *i zapisti pomoću jednadžbe:*

$$71 - x - \frac{68 - x}{3} = 25.$$

Rješenje jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
71 - x - \frac{68 - x}{3} &= 25 \\
x + \frac{68 - x}{3} &= 46 \qquad \Big/ \cdot 3 \\
3x + 68 - x &= 138 \\
2x &= 70 \qquad \Big/ : 2 \\
x &= 35
\end{aligned}
$$

Dakle, 35 *putnika je izišlo na prvoj stanici.*

Ponovno je poznato završno stanje, a nepoznato početno. Stoga, pogodna je startegija rješavanja unatrag kako bi se od krajnjeg stanja putnika u autobusu izračunao broj putnika koji su izišli na prvoj stanici.

Rješenje 4.1.6. *Na kraju ostaje* 25 *putnika u autobusu. Na stanici su ušla tri putnika, a pošto se sada zadatak rješava strategijom unatrag, sve matematičke operacije moraju se zamijeniti njima suprotnim operacijama. Dakle, inače bi se ulazak tri putnika zapisao kao* +3*, ali sada se oduzima* 3 *te se dobiva matematički izraz:*

$$25 - 3 = 22$$

Trećina je izašla, to znači da 22 *putnika predstavljaju dvije trećine ljudi u autobusu. Odnosno u vozilu je bilo:*

$$\frac{2}{3} \cdot 22 = 33 \textit{ putnika.}$$

Na prvoj stanici je ušlo 11*. Ponovno, primjenom suprotne operaciju dobiva se da je na prvoj stanici bilo*

$$33 - 11 = 22 \textit{ putnika.}$$

Prije prve stanice autobus je prevozio 57 *putnika, prema tome na prvoj stanici je ušlo:*

$$57 - 22 = 35 \textit{ putnika.}$$

Primjenjujući startegiju rješavanja unatrag, zadatak je riješen u svega par koraka pri čemu se moralo paziti samo na obrnute računske operacije te da se tranformacije provode unazad, odnosno od krajnjeg stanja prema početnom. Česta greška koja se učenicima događa jest da trećinu putnika koja izlazi na drugoj stanici zapišu kao trećinu početnih putnika, time se dobiva jednadžba:

$$57 - x + 11 - \frac{57}{3} + 3 = 25,$$

čije je rješenje $x = 27$. Dobiveno rješenje je cijeli broj, bez daljnje provjere, učenici bi mogli pomisliti da su dobili točno rješenje. Na primjer, da su rješavanjem netočno postavljene jednadžbe dobili neki razlomak, onda bi shvatili da broj putnika mora biti cijeli broj, te promislili o postavi jednadžbe i pokušali si pronaći grešku.

Primjer 4.1.7. *Ako broju n dodamo* 5*, zatim rezultat pomnožimo sa* 5 *i na kraju oduzmemo* 3*, dobiti ćemo broj* 77*. Onda je:*

1) $n = 9$ **2)** $n = 10$ **3)** $n = 11$ **4)** $n = 12$

[5]

Zadatak se prvo rješava algebarskom metodom postavljanja linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom.

Rješenje 4.1.8. *Postava jednadžbe:*

$$\begin{aligned}
(n+5)\cdot 5 - 3 &= 77,\\
5n + 25 - 3 &= 77,\\
5n &= 77 - 25 + 3,\\
5n &= 55,\\
n &= 11.
\end{aligned}$$

Rješenje je odgovor **3)** $n = 11$.

Uočimo da je poznat krajnji rezultat, stoga, može se koristiti strategija rješavanja unatrag. Kroz postupak rješavanja će se od krajnjeg rezultata - broja 77, doći do početne nepoznanice - broja *n*. Sve navedene tranformacije izboditi će se u obrnutom redoslijedu i koristiti će se obrnute računske operacije.

Rješenje 4.1.9. *Krajnji rezultat je broj* 77*. U posljednjem koraku oduzima se broj* 3*, stoga koristeći strategiju rješavanja unatrag, broju* 77 *dodaje se broj* 3*:*

$$77 + 3 = 80.$$

*Prije toga smo rezultat se množio*5*, sada se dijeli s* 5*:*

$$80 : 5 = 16.$$

Sada, pošto je prva tranformacija bila dodavanje broja 5*, sada će kranja tranformacija biti oduzimanje broja* 5*:*

$$16 - 5 = 11.$$

Dobiven je početni broj: $n = 11$ *te je točan odgovor* **3)** $n = 11$.

Navedeni je primjer namijenjen učenicima osnovnih škola te postavljanje jednadžbe s jednom nepoznanicom i nije tako lak zadatak svakom učeniku. Očekivana greška u postavi jednadžbe je izostavljanje zagrada, tj. zapisivanje jednadžbe kao:

$$n + 5 \cdot 5 - 3 = 77.$$

Rješavanjem gornje jednadžbe dobiva se rješenje $n = 55$, koje nije niti jedno od ponuđenih odgovora. No, ako bi se zadatak rješavao pomoću strategije rješavanja unatrag, onda bi se izbjegla mogućnost greške izostavljanja zagrada i dobio točan rezultat.

4.2 Rješavanje jednostavnijeg analognog problema

Karakteristike strategije

Rješavanje jednostavnijeg problema predstavlja istaknutu i značajnu strategiju rješavanja problema. Ova metoda označava postupak pronalaženja temeljne poteškoće u problemskoj situaciji, pokušaj privremenog zanemarivanja te poteškoće, te potom uključivanje te poteškoće natrag u rješenje koje se izvodi za pojednostavljeni problem. Osnovna ideja ove metode je da se želi napraviti odmak od pretpostavki izvornog problema na način da se problem dovoljno pojednostavi i uslijed toga postane rješiv. Time će rješenje jednostavnijeg problema pružiti širi uvid u izvorni problem i povećati šanse za pronalazak izvornog rješenja.
Analogija predstavlja apstraktnu paralelu između dvije sasvim različite stvari, stoga se analogije javljaju kada postoje paralele između dvije različite situacije, odnosno u slučajevima kada je jedna situacija slična drugoj u određenim aspektima. Uslijed pronalaska jedne paralele, često se brzo može doći i do drugih, stoga se smatra da analogije, osim logičkog, na neki način razvijaju i kreativno promišljanje. Analogno odnosno kontinuirano ili istovjetno rješavanje problema podrazumijeva da se problem ponovno predstavlja u smislu nekog drugog procesa ili situacije koja je „poznatija“ odnosno o kojoj se posjeduje više informacija.

Primjena u svakodnevnom životu

Praktična primjena ove metode u svakodnevnom životu vidljiva je u različitim aspektima. Primjerice, u današnje vrijeme vrlo velika većina ljudi koristi računala gotovo na svakodnevnoj bazi, što u svrhu poslu ili zabave, dok u isto vrijeme većina tih ljudi koristi samo osnovne funkcije tj. mogućnosti ovako naprednih uređaja. S obzirom da su računala generalno izrazito kompleksni strojevi, čovjek nije u mogućnosti odjednom usvojiti svo znanje o upravljanju i mogućnostima/potencijalima koje računalo pruža. Zbog toga, čovjek odabire rješavanje jednostavnijeg problema, te postupno savladava korake tj. operacije na računalu koji se mogu smatrati kompleksnim; te s vremenom postaju još i kompleksniji. Još jedan primjer koji pokazuje primjenu rješavanje jednostavnijeg problema je preračunavanje vrijednosti između temperaturnih skala: Celsius i Fahrenheit. Praktično rješavanje problema odnosi se na upotrebu jednostavnog izračuna kojim se Celsius stupnjevi udvostručuju te se dodaje 30 stupnjeva, a umjesto korištenja klasične formule $F = \frac{9}{5}C + 32$. Takav prosti izračun je u principu korektno proračunata procjena temperaturnih vrijednosti, međutim, u smislu svakodnevnih potreba ljudi funkcionira izrazito učinkovito čime ispunjava svoju svrhu – te je ujedno i odličan primjer primjene ove metode u svakodnevnom životu.

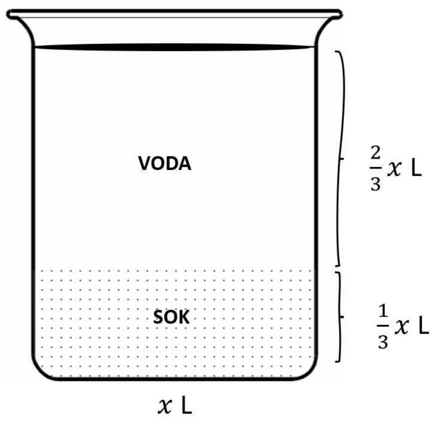
Primjeri

U nastavku slijede dva primjera matematičkih zadataka prigodnih za primjenu strategije rješavanja jednostavnijeg analognog problema. Svaki od primjera bit će riješen na dva načina; bez primjene i s primjenom strategije.

Primjer 4.2.1. *Dvije boce jednakih volumena napunjene su smjesom soka i vode. U prvoj boci omjer količina vode i soka je* $2:1$*, a u drugoj boci* $4:1$*. Ako prelijemo sadržaje obiju boca u treću bocu, koliki će u njoj biti omjer količina vode i soka? [2]*

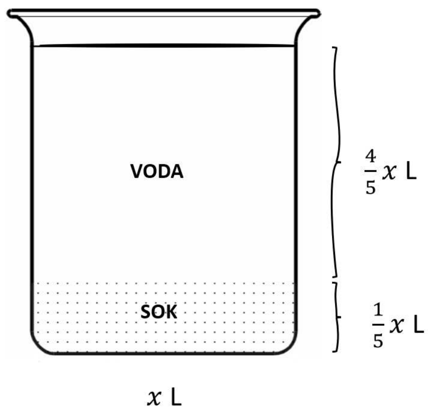
Slijedi rješenje generalnog problema, bez primjene strategije rješavanja jednostavnijeg analognog problema.

Rješenje 4.2.2. *Neka x predstavlja volumen prve (i druge) boce. Kako je u prvoj boci omjer količine vode i soka jednak* $2:1$*, to znači da se u prvoj boci nalazi $\frac{2}{3}x$ vode i $\frac{1}{3}x$ soka. Za lakše shvaćanje i vizualizaciju problema, dana je skica sadržaja prve boce:*



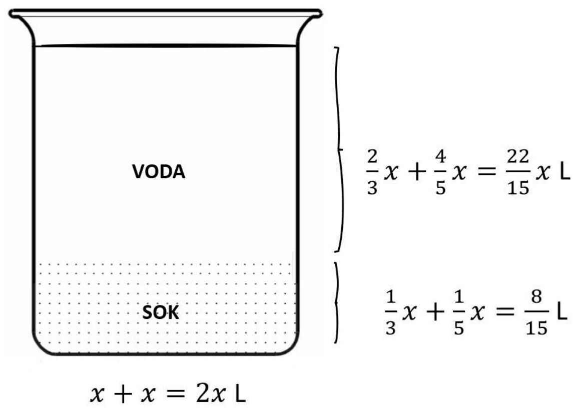
Slika 4.1: Prva boca

Analogno, u drugoj boci se tada nalazi $\frac{4}{5}x$ vode i $\frac{1}{5}x$ soka. Skica sadržaja druge boce:



Slika 4.2: Druga boca

Prebace li se smjese iz prve i druge boce u treću bocu, tada se u trećoj boci nalazi $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = \frac{22}{15}x$ *vode te* $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = \frac{8}{15}x$ *soka. Skica sadržaja treće boce:*



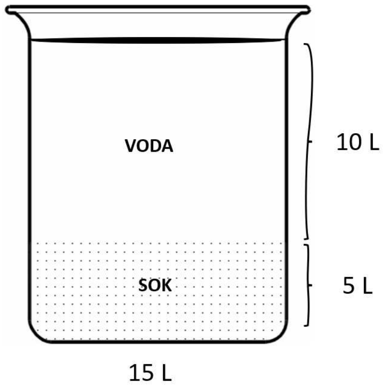
Slika 4.3: Treća boca

Omjer vode i soka u trećoj boci jednak je:

$$\frac{voda}{sok} = \frac{\frac{22}{15}x}{\frac{8}{15}x} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}.$$

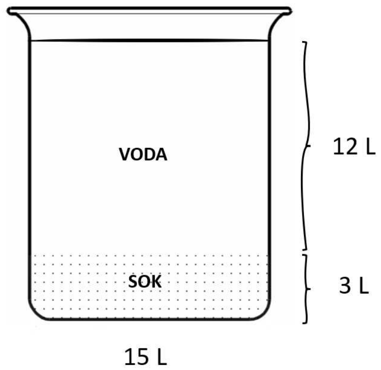
Slijedi rješenje u kojemu je primijenjena strategija rješavanja jednostavnijeg analognog problema. Volumen boce nije definiran, ali bez smanjenja općenitosti, primjenom strategije rješavanja jednostavnijeg analognog problema, može se odabrati boca zadanog volumena. U navedenom primjeru, pogodan volumen bio bi cijeli broj koji se istovremeno lako može podijeliti na 3 i na 5 djelova. Odnosno, traži se najmanji višekratnik brojeva 3 i 5, broj 15. Bilo koji drugi volumen boce također bi polučio točno rješenje, ali radi jednostavnosti izabran je volumen od 15 L.

Rješenje 4.2.3. *Ako su prva i druga boca volumena* 15 *L, tada se u prvoj boci nalazi* 10 *L vode i* 5 *L soka. Radi lakše vizualizacije i shvaćanja problema, skicirana je prva boca:*



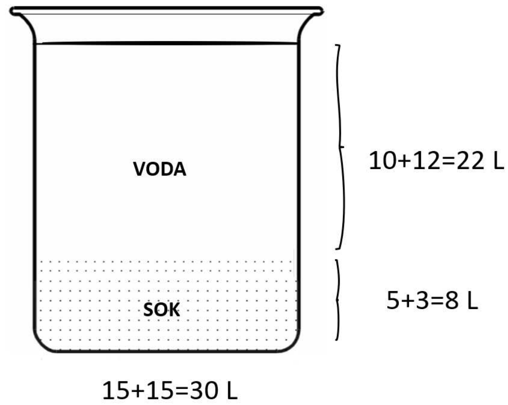
Slika 4.4: Prva boca

U drugoj boci je 12 *L vode i* 3 *L soka. Skica:*



Slika 4.5: Druga boca

Sada, ako se sadržaj obiju boca prelije u treću bocu, u njoj se nalazi $10 + 12 = 22$ *L vode te* $5 + 3 = 8$ *L soka.*



Slika 4.6: Treća boca

Omjer vode i soka jednak je:

$$\frac{voda}{sok} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}.$$

Dakle, omjer količine vode i soka u trećoj boci je $11 : 4$.

Većina učenika krene rješavati dani primjer samo zbrajajući omjere, zadatak riješe za svega nekoliko trenutaka i smatraju da je točan odgovor:

$$(2 + 4) : (1 + 1) = 6 : 2 = 3 : 1.$$

Teško je sada objasniti učenicima da to nije točno rješenje i promijeniti njihovo mišljenje. Zato se koristi strategija rješavanja analognog problema kako bi učenici na konkretnom primjeru i uvidjeli da je njihovo prvotno rješenje netočno, te osim toga, odmah dobili i generalno rješenje zadatka. Dakle, rješavanjem analognog jednostavnijeg problema, u navedenom slučaju je to boca zadanog volumena od 15 L, nije dobiveno specifično rješenje koje vrijedi samo za boce tog volumena, već je dobiveno i generalno rješenje. Odnosno, u ovom primjeru se strategija rješavanja jednostavnijeg problema svodi na specifikaciju bez gubitka općenitosti.

Prvo i drugo ponuđeno rješenje međusobno su slični. Razlika je u tome što je učenicima puno jednostavnije odrediti količinu soka i vode u boci određenog volumena, nego u boci nepoznatog volumena. Osim toga, kasnije se zbrajaju cijeli brojevi, nije potrebno spretno baratanje s razlomcima kako bi se došlo do rješenja. Valja ponovno napomenuti da nije došlo do gubitka općenitosti kada se neodređenom obujmu boce dodijelila konkretnu vrijednost. Ipak, ova je promjena učinila rješenje problema mnogo lakšim i rješivim. Usvajanjem drugačijeg gledišta, dobiven je jednostavniji, ali analogan problem za riješiti, onaj koji je odmah doveo do rješenja izvornog problema.

Osim svega navedenoga, dani primjer je zanimljiv jer se na njemu jasno vidi činjenica da za neke probleme postoji širok izbor metoda rješavanja. Rijetko se samo jedna strategija može koristiti za rješavanje danog problema. Umjesto toga, kombinacija strategija je najvjerojatnija pojava pri rješavanju problema. Tako je u ovom primjeru osim startegije rješavanja analognog jednostavnijeg problema, primijenjena i strategija izrade crteža, odnosno vizualnog prikaza. Stoga je najbolje upoznati sve strategije i spretno ih koristiti kada je to prikladno.

Primjer 4.2.4. *Zadana su četiri broja:* $7\,895, 13\,127, 51\,873, 7\,356$. *Odredi koliki postotak njihovog zbroja je njihov prosjek. [11]*

Direktno rješenje zadatka (bez primjene strategije rješavanja jednostavnijeg analognog problema), u kojemu se računa traženi zbroj, prosjek i postotak dan je u nastavku

Rješenje 4.2.5. *Zbroj dana četiri broja iznosi:*

$$7\,895 + 13\,127 + 51\,873 + 7\,356 = 80\,251.$$

Prosjek dana četiri broja iznosi:

$$\frac{7\,895 + 13\,127 + 51\,873 + 7\,356}{4} = 20\,062,75.$$

Koliki postotak od zbroja je prosjek računa se pomoću postotne jednadžbe:

$$\begin{aligned} p\% \cdot zbroj &= prosjek, \\ p\% \cdot 80\,251 &= 20\,062,75, \\ p\% &= \frac{20062,75}{80251} = \frac{1}{4}, \\ p\% &= 25\%. \end{aligned}$$

Dakle, prosjek je 25% *zbroja danih brojeva.*

Sada slijedi rješenje danog primjera pomoću strategije rješavanja jednostavnijeg analognog problema. U ovom rješenju, promatrati će se opći slučaj i odrediti koliki postotak zbroja bilo koja četiri broja je njihov prosjek.

Rješenje 4.2.6. *Neka* x *predstavlja zbroj četiri broja. Tada je njihov prosjek jednak* $\frac{x}{4}$. *Sada, uz postavu postotne jednadžbe dobiva se:*

$$\begin{aligned} p\% \cdot zbroj &= prosjek, \\ p\% \cdot x &= \frac{x}{4}, \\ p\% &= \frac{\frac{x}{4}}{x} = \frac{1}{4}, \\ p\% &= 25\%. \end{aligned}$$

Prosjek je 25% *zbroja danih brojeva.*

Dani primjer je poprilično jednostavan, ali upravo se na takvim primjerima lakše može uvidjeti elegantnost i učinkovitost primjene određene strategije. Zanimljivo je još uočiti razliku između prvog i drugog primjera primjene strategije rješavanja analognog jednostavnijeg problema. U Primjeru 4.2.1. nam je jednostavniji problem specifikacija zadanog generalnog problema, dok je u Primjeru 4.2.4. jednostavniji problem zapravo generalizacija zadanog specifičnog problema.

4.3 Pogađanje i testiranje

Karakteristike strategije

Pogađanje i testiranje predstavlja svjetski priznatu, izrazito sofisticiranu te često vrlo korisnu strategiju, a koja se često kolokvijalno naziva i metodom pokušaja i promašaja. Temelj ove strategije je na pogađanju rješenja te naknadno provjeravanje odgovara li rješenje zadanom scenariju. U slučaju da nije pogođeno točno rješenje, nova pretpostavka prilagođava se ponovno dok se ne ispune svi uvjeti, odnosno dok se ne pogodi točno rješenje. Važna karakteristika ove metode je da se svaka sljedeća pretpostavka temelji na informacijama dobivenim testiranjem prethodne pretpostavke.
Ova strategija ističe važnost sustavnog rada, a upravo sustavan pristup problemu učenicima omogućuje da rade na učinkovit način, umjesto da nasumično biraju brojeve s nadom da će na kraju doći do odgovora na problem. Ova strategija posebno je korisna u slučaju kada je nužno odrediti granicu vrijednosti za varijable kako bi se moglo dalje upravljati rješenjem. Isto tako, ova strategija korisna je u slučaju kada je cijela situacija vrlo komplicirana, te se fokusiranjem na specifičan tj. jedinstven slučaj pokušava doći do točnog konačnog rješenja problema.
Inteligentno pogađanje i testiranje podrazumijeva donošenje zaključaka iz neispravnih pokušaja, a smatra se da ti zaključci dovode sve bliže i bliže točnom rješenju. Stoga, ne radi se samo o slijepom odnosno nasumičnom pogađanju jer bi uslijed takvog rješavanja bilo potrebno izrazito mnogo vremena, te bi šanse za pogodak bile smanjene. Umjesto toga, ova metoda odnosi na inteligentno pogađanje, testiranje rješenja po zadanim uvjetima zadatka te korištenje informacija dobivenih prethodnim testiranjem za novo pogađanje. Sam proces korištenja ove metode pogađanja na neki način tjera na tzv. “pametno” ili inteligentno pogađanje s ciljem smanjenja broja pogađanja i bržeg dolaska do rezultata.

Primjena u svakodnevnom životu

Ova se metoda vrlo često primjenjuje u svakodnevnom ljudskom životu, a najčešće potpuno nesvjesno. Kuhanje je klasičan primjer ove strategije, isprobavamo je li jelo dvoljno pečeno ili dovoljno mekano za serviranje. Osim toga, mnogi obrtnici i majstori zanata kroz svoj svakodnevan posao primjenjuju ovu strategiju. Uzmimo za primjer stolara koji mora procijeniti veličinu te oblik komada drveta koji mu je potreban za izradu konstrukcije, a zatim kontinuiranim ispitivanjem pristaje li obrađeno drvo unutar konstrukcije i dodatnim modificiranjem rješava problem.

Primjeri

U nastavku su navedena dva primjera matematičkih zadataka pogodna za primjenu strategije pogađanja i testiranja. Svaki zadatak biti će riješen na dva načina; prvi je algebarski način koji svodi dani problem na rješavanje sustava jednadžbi, a drugi način je primjenom strategije pogađanja i testiranja.

Primjer 4.3.1. *Znamenka desetica dvoznamenkastog broja veća je za* 4 *od znamenke jedinica. Ako tom broju pribrojimo broj zapisan istim znamenkama, ali u obrnutom poretku, dobit ćemo* 154*. O kojem je dvoznamenkastom broju riječ? [6]*

Prvo je dano algebarsko rješenje primjera svođenjem na sustav dvije jednadžbe s dvjema nepoznanicama.

Rješenje 4.3.2. *Neka je $\overline{xy}$ traženi dvoznamenkasti broj gdje su x i y njegove znamenke. Kako je znamenka desetica toga broja za* 4 *veća od znamenke jedinica dobivena je prva jednadžba:*

$$x + 4 = y.$$

Prije postavljanja druge jednadžbe, korisno je prisjetiti se da ukoliko su x i y znamenke broja $\overline{xy}$, tada je vrijednost toga broja jednaka $10x + y$. Stoga, činjenicu da je zbroj početnog broja i broja zapisanog istim zanemnkama, ali u obrnutom poretku jednak 154 *zapisuje se jednadžbom:*

$$\begin{aligned} 10x + y + 10y + x &= 154, \\ 11x + 11y &= 154. \end{aligned}$$

Dobiven je sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 11x + 11y = 154. \end{cases}$$

Rješenje danog sustava jednadžbi je $(x, y) = (9, 5)$ što znači da je traženi dvoznamenkasti broj 95.

Rješenje navedenog primjer koristeći metodu pogađanja i testiranja dano je u nastavku. Traže se znamenke te je ograničen skup valjanih pokušaja na skup brojeva $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, odnosno sužen je izbor.

Rješenje 4.3.3. *Znamenka je desetica dvoznamenkastog broja za* 4 *veća od znamenke jedinica. Stoga, ako bi znamenka jedinica bila* 0 *onda bi znamenka desetica toga broja bila* 4. *Preostaje provjeriti vrijede li i ostali uvjeti zadatka za taj broj:*

Desetice	Jedinice	Broj	Obrnuti broj	Zbroj=154
4	0	40	04 = 4	$40 + 4 = 44 \neq 154$

Tablica 4.14: Provjera znamenaka

Broj 40 *ne zadovoljava sve uvjete zadatka, prelazi se na novi broj. Ako bi znamenka jedinica bila* 1 *onda bi znamenka desetica toga broja bila* 5. *Preostaje provjeriti vrijede li i ostali uvjeti zadatka za taj broj:*

Desetice	Jedinice	Broj	Obrnuti broj	Zbroj=154
4	0	40	04 = 4	$40 + 4 = 44 \neq 154$
5	1	51	15	$51 + 15 = 66 \neq 154$

Tablica 4.15: Provjera znamenaka

Suma se dvoznamenkastoga broja i broja zapisanog istim znamenkama, ali u obrnutom poretku, nije znantno povećala, i dalje je dosta manja od 154. *Stoga, u idućem koraku isprobat će se dvoznamenkasti broj čija je znamenka jedinica za više nego za* 1 *veća od prethodnog broja. Ako bi znamenka jedinica bila* 4 *onda bi znamenka desetica toga broja bila* 8. *Preostaje provjeriti vrijede li i ostali uvjeti zadatka za taj broj:*

Desetice	Jedinice	Broj	Obrnuti broj	Zbroj=154
4	0	40	04 = 4	$40 + 4 = 44 \neq 154$
5	1	51	15	$51 + 15 = 66 \neq 154$
8	4	84	48	$84 + 48 = 132 \neq 154$

Tablica 4.16: Provjera znamenaka

Suma dva broja je sada bliža traženom zbroju od 154. *Ako se znamenka jedinica ponovno poveća za* 3, *ona bi iznosila* 7. *Onda bi znamenka desetica trebala biti za* 4 *veća što je nemoguće jer znamenka ne može biti* 11. *Sada se mora odabrati drugi broj za testiranje.*

Ako bi znamenka jedinica bila 5*, onda bi znamenka desetica bila* 9*. Preostaje provjeriti vrijede li i ostali uvjeti zadatka za taj broj:*

Desetice	Jedinice	Broj	Obrnuti broj	Zbroj=154
4	0	40	04 = 4	$40 + 4 = 44 \neq 154$
5	1	51	15	$51 + 15 = 66 \neq 154$
8	4	84	48	$84 + 48 = 132 \neq 154$
9	5	95	54	$95 + 54 = 154$ ✓

Tablica 4.17: Provjera znamenaka

Traženi broj je 95*.*

Iako je rješenje primjenom strategije pogađanja i testiranja malo duže od rješenja primjenom sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, ipak je jednostavnije jer su se provodile jednostavnije računske operacije. Izbjegnut je najteži korak, a to je postavljanje jednadžbe koja mnogim učenicima stvara poteškoće. Smatra se da u ovom zadatku nije problematično riješiti sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, već je najteži dio postaviti sustav. Najčešća pogreška učenika u ovom tipu zadatka jest da ne znaju od znamenaka broja $\overline{xy}$ doći do njegove vrijednosti $10x + y$, već to nespretno zapisuju samo kao $x + y$ ili xy, što naravno neće polučiti ispravan rezultat. Također, treba obratiti pozornost na odabir znamenaka. Iako se krenulo s odabirom znamenaka jedinica od manje prema većoj, nakon dvije iteracije primijećeno je da se zbroj ne povećava dovoljno brzo. Tada se donosi zaključak da se neće sve znamenke provjeravati redom, nego će ih se par preskočiti kako bi se ubrzao proces.

Primjer 4.3.4. *Zbroj znamenaka dvoznamenkastog broja je* 8*. Ako znamenke u broju zamijene mjesta, dobiveni broj je za* 54 *veći od početnog. Koji je to broj?[15]*

U nastavku slijedi rješenje primjera svođenjem na sustav jednadžbi.

Rješenje 4.3.5. *Neka je* $\overline{xy}$ *traženi dvoznamenkasti broj gdje su* x *i* y *njegove znamenke. Kako je zbroj znamenaka tog broja jednak* 8 *dobivena je prva jednadžba:*

$$x + y = 8.$$

Koristeći činjenicu da ukoliko su x *i* y *znamenke broja* $\overline{xy}$*, tada je vrijednost toga broja jednaka* $10x + y$ *dobiva se i druga jednadžba uz postavljanje uvjeta da ako znamenke u broju zamijene mjesta, dobiva se broj* $\overline{yx}$ *čija je vrijednost* $10y + x$*. Kako je taj broj za* 54 *veći od početnog, druga jednadžba je:*

$$10x + y + 54 = 10y + x,$$
$$9x - 9y = -54.$$

Dobiven je sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ 9x - 9y = -54. \end{cases}$$

čije je rješenje $(x, y) = (1, 7)$ *što znači da je traženi broj* 17.

U nastavku je prikazano rješenje korištenjem metode pogađanja i testiranja. Tražene nepoznanice su znamenke, stoga nam je sužen izbor na skup brojeva $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Rješenje 4.3.6. *Zbroj je znamenka jednak* 8. *To znači da kada bi znamenka desetica bila* 1 *onda bi znamenka jedinica morala biti* 7. *Sa znamenkom desetica kreće se od* 1 *iako to nije najmanji broj u skupu mogućih vrijednosti. Nula kao znamenka desetica se neće testirati, jer onda taj broj ne bi bio dvoznamenkast te ne bi zadovoljavao početne uvjete zadatka. Preostaje provjeriti vrijede li i ostali uvjeti zadatka za broj* 17*:*

Desetice	Jedinice	Broj	Obrnuti broj	Razlika=54
1	7	17	71	$71 - 17 = 54$
				✓

Tablica 4.18: Provjera znamenaka

Traženi broj je 17.

Već iz prvog pokušaja dobiveno je traženo rješenje. To je slučajnost jer se krenulo s testiranjem redom od najmanje prema najvećoj znamenki desetica te je odmah pogođen traženi broj. Za neku drugu tehniku odabira znamenaka ne bi se nužno točno rješenje pogodilo iz prve. Također, preporuča se prvo malo promisliti o odabiru znamenaka/varijabli, a ne samo slijepo krenuti uvrštavati i provjeravati uvjete jer bi to moglo potrajati. Kao što je već napomenuto u karakteristikama strategije, naglasak je na inteligentnom pogađanju.

Poglavlje 5

Primjena strategija u nastavi matematike

5.1 Ishodi

Mnogobrojni su ishodi kroz koje se mogu obraditi strategije rješavanja problema. Većina primjera navedenih u prethodnim poglavljima, naravno izuzevši one preuzete s matematičkih natjecanja, se mogu obraditi i na redovnoj nastavi matematike osmog razreda kroz odgojno obrazovne ishode MAT OŠ B.8.2. Primjenjuje razmjer, MAT OŠ B.8.3. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu, MAT OŠ B.8.4. Rješava i primjenjuje sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama. U srednjoj školi se svi navedeni primjeri mogu obraditi u bilo kojem razredu, ali možda najprikladnije bi bilo u prvom razredu gimnazija kroz ishode MAT SŠ A.1.1., MAT SŠ E.1.1. Računa s realnim brojevima, MAT SŠ B.1.3. Primjenjuje proporcionalnost, postotke, linearne jednadžbe i sustave [16]. Osim toga, u prvom razredu strukovnih škola kroz ishode MAT SŠ A.1.1., MAT SŠ E.1.1. Primjenjuje računanje u skupu realnih brojeva, MAT SŠ B.1.3. Primjenjuje proporcionalnost, linearne jednadžbe, nejednadžbe i sustave[17].

5.2 Nastavne metode

Nastavne metode matematike predstavljaju načine i sredstva prenošenja određenog sustava matematičkih znanja i umijeća [14]. Ne postoji samo jedna ispravna nastavna metoda kroz koju se učenicima mogu objasniti strategije rješavanja problema. No, najprikladnije su:

- problemska metoda
- heuristička metoda

Kako bi nastavnik mogao primijeniti neku nastavnu metodu u nastavnom procesu, mora biti dobro upoznat sa svim karakteristikama odabrane metode.
Problemska metoda nastave polazi od činjenice da svi matematički sadržaji u sebi sadrže problem. Stoga je pri obradi matematičkog sadržaja moguće najprije stvoriti problemsku situaciju i pred učenike postaviti problem. Rješavanje problemskih zadataka preporučen je način postupnog uvođenja problemske nastave u nastavu matematike. Problemska nastava predstavlja zahtjevan nastavni proces koji iziskuje usredotočenost nastavnika na isključivo jednog učenika (ili manju skupinu). Ovaj nastavni sustav vrlo je učinkovit i ima značajan broj prednosti, međutim za njega u modernom školstvu jednostavno nema dovoljno vremena.
Heuristička nastavna metoda nastala je iz potrebe da se uvođenjem samostalnog rada učenika prevlada predavačka nastava i generalno poboljša nastavni proces. Prilikom provođenja heurističke nastave aktivnost i samostalnost učenika su smanjene. Međutim, sposobnog praćenja nastave i umnog rada učenika i dalje se razvija putem nastavnikovog misaonog vođenja. Heuristička metoda primjenjuje se kada se problemska metoda ne može, odnosno ne stigne primijeniti. U modernom školstvu od učenika se očekuje da se dodatno interesira, stoga se primjenom heurističke metode može vrlo i raspoznati potencijal kod učenika.

5.3 Odabir primjera

Važnost poznavanja raznih strategija rješavanja problema već je istaknuta u prethodnim poglavljima. No, podjednako je važno znati kako poučavati strategije te na kojim ih primjerima predstaviti svojim učenicima. Primjeri kroz koje će učenici upoznati strategije rješavanja problema trebaju biti prikladni njihovoj dobi, razvoju, sposobnostima i interesima. Osim toga, trebaju biti zanimljivi i izazovni učenicima. Tako će neki primjeri, tj. zadaci biti prikladni za učenike već tako kako su predstavljeni u literaturi, dok neki ne. Ti primjeri se ipak mogu lako prilagoditi tako da postanu zanimljivi i prikladni razredu na način da se promjeni jedan ili više uvjeta kako bi postali jednostavniji ili složeniji, ovisno o sposobnosti učenika. Zanimljivi i izazovni problemi trebali bi:

- potaknuti interes i entuzijazam učenika za rješavanje matematičkih problema
- proširiti učenikovu matematičku intuiciji te razviti njihov uvid
- upoznati učenike s važnim matematičkim idejama
- pružiti prilike za iskustvo zabave, zadovoljstva i uzbuđenja otkrića povezanog s kreativnim rješavanjem problema[8]

Bez nepotrebnih komplikacija i pretrpavanja učenika novim dodatnim materijalima, dovoljno je samo zaviriti u već postojeće materijale, počevši od propisanih udžbenika, zbirki

i radnih bilježnica koje sadrže pozamašnu količinu problemskih zadataka povezanih s temom koja se trenutno obrađuje na satovima matematike.
Osim propisane literature i raznih priručnika, učenici također mogu biti vrijedan izvor zadataka ukoliko ih se potakne da sami stvaraju probleme. Ova aktivnost je izrazito motivirajuća, ali sudjelovanje učenika i sama količina zabave ove aktivnosti se može još dodatno povećati ukoliko se od učenika zatraži da riješe zadatke od svojih kolega. Također, stvaranje i kreiranje problemskih zadataka pomaže učenicima izoštriti vlastite vještine rješavanja problema. Bilo bi korisno kroz sate matematike i obradu problemskih zadataka, skrenuti pažnju učenicima na alternativne strategije rješavanja problema te ih motivirati da isti zadatak riješe na nekoliko načina te sami zaključe koja im se strategija čini najboljom.

Poglavlje 6

Zaključak

Rješavanje problema kao životni proces neizostavan je čimbenik ljudske evolucije, te je zasigurno glavna pokretačka snaga čovječanstva. Ljudsko rješavanje problema kroz povijest rezultiralo je društvenim, kulturnim, tehničkim, ekonomskim i drugim evolucijama, te je ujedno jedini izvor svih novih izuma. Isto tako, rješavanje problema osnova je za stalno učenje, usavršavanje, komunikaciju i ljudsku interakciju u svrhu daljnjeg ljudskog razvoja društva.

Već samo identificiranje problema vrlo je korisno za razvoj opažanja kod djece i mlađih osoba. Sukladno tome, djeca postavljaju pitanja kako probleme riješiti i dolaze do određenih odgovora/rezultata. Taj proces podrazumijeva primjenu različitih metoda odnosno tehnika koje se nazivaju strategijama rješavanja problema. Strategije su izuzetno važne, ali i ujedno vrlo korisne iz razloga što drastično pomažu tj. olakšavaju skratiti proces rješavanja zadataka.

Ne postoji strategija koja je pogodna za rješenje svakog zadatka (bilo kojeg) zadataka, ali se zadatak može riješiti primjenom više strategija. Kombinacija primjene više vrsta strategija kod djece je važna za razvoj upoznavanja različitih vještina i usvajanje različitih procesa rješavanja zadatka tj. pronalaska željenog odgovora.

Literatura u području poučavanja rješavanja problema za nastavnike je nedostatna i nesadržajna. Iz tog razloga, nastavnici trebaju sami osmišljavati načine kako svoje učenike upoznati s različitim strategijama. Primjeri najbolje prakse pokazuju da se upoznavanje učenika sa strategijama treba odvijati polako i postupno, odnosno da se kroz nastavu trebaju povremeno poučavati strategije rješavanja problema na nasumičnim primjerima.

Bibliografija

[1] *Školsko natjecanje iz matematike, 5. razred - osnovna škola*, 2011, http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2011/2011-OS-opc-45678-zad+rj/2011-OS-opc-45678-zad.pdf, zadnji put pristupljeno 12. listopada 2022.

[2] *Školsko natjecanje iz matematike, 8. razred - osnovna škola*, 2018, https://www.osfkf.hr/matematika/8z.pdf, zadnji put pristupljeno 16. rujna 2022.

[3] M. Bašić, *AHA! Putovanje u središte problema*, Hrvatsko matematičko društvo, 2020.

[4] S. Covey, *The 7 Habits of Highly Effective People: Powerful Lessons in Personal Change*, Simon&Schuster, 2013.

[5] B. Dakić, *Mala zbirka*, Element, 2017.

[6] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 1 udžbenik sa zbirkom zadataka za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, sv. 1, Element, 2017.

[7] Europska komisija, *Matematičko obrazovanje u Europi: Zajednički izazovi i nacionalne politike*, 2011, http://keyconet.eun.org/c/document_library/get_file?uuid=e456b461-d3cd-4bd5-aabc-2cae2d4bfaf9&groupId=11028, zadnji put pristupljeno 9. studenog 2022.

[8] G. Lenchner, *Creative problem solving in school mathematics*, Moems, 2005.

[9] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, *Državna matura 2020./2021. – ljetni rok, Matematika-viša razina*, https://www.ncvvo.hr/drzavna-matura-2020-2021-ljetni-rok-2/, zadnji put pristupljeno 12. listopada 2022.

[10] G. Polya, *How to solve it: A new aspect of mathematical method*, sv. 85, Princeton university press, 2004.

[11] A. S. Posamentier i S. Krulik, *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions, grades 6-12: a resource for the mathematics teacher*, Corwin press, 2008.

[12] J. Rellensmann, S. Schukajlow i C. Leopold, *Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance*, **95** (2017), 53–78.

[13] Vijeće Europske Unije, *Preporuke o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje*, 2018, `https://eur-lex.europa.eu/legal-content/HR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=HR`, zadnji put pristupljeno 10. listopada 2022.

[14] S. Varošanec, *Metodika nastave matematike II-dio*, 2004, `https://pdfslide.net/documents/metodika-nastave-matematike-ii-dio-za-internu-upotrebu.html?page=1`, zadnji put pristupljeno 16. listopada 2022.

[15] ———, *Matematika 1 udžbenik za 1. razred gimnazija i strukovnih škola*, Element, 2019.

[16] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, 2019, `https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html`, zadnji put pristupljeno 10. listopada 2022.

[17] ———, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za srednje strukovne škole u Republici Hrvatskoj*, 2019, `https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_209.html`, zadnji put pristupljeno 10. listopada 2022.

Sažetak

Osnovna tema diplomskog rada je rješavanje problema u matematici. Za učinkovito rješavanje problema primjenjuju se različite strategije. Diplomski rad posebno je usredotočen na strategije usko vezane za rješavanje određenih problemskih situacija i njihovo poučavanje u nastavi matematike.
Cilj ovog diplomskog rada je istražiti i analizirati strategije rješavanja problema u nastavnom predmetu Matematika. Svrha ovog rada je prezentirati potencijale u učenju i poučavanju strategija za rješavanje problema u nastavi matematike. Time je osobito važno ukazati na značaj pristupa nastavnika tematici rješavanja problema. U radu su predstavljeni praktični primjeri koje nastavnici mogu koristi pri poučavanju strategija za rješavanje problema. Ovim radom želi se potaknuti dublje razumijevanje problematike u području poučavanja strategija rješavanja problema.
Ključne riječi: problem, rješavanje problema, strategije rješavanja problema, praktični primjeri

Summary

The basic topic is problem solving in mathematics. Different strategies are used to effectively solve the problem. This document is particularly focused on strategies closely related to solving certain problem situations and teaching them in mathematics classes.
The aim of this thesis is to investigate and analyze strategies for problem solving in the teaching subject Mathematics. The purpose of this paper is to present potentials in learning and teaching strategies for problem solving in mathematics teaching. With this, it is particularly important to point out the importance of the teacher's approach to problem solving. The paper presents practical examples that teachers can use when teaching problem solving strategies. This work aims to encourage a deeper understanding of the problem in the area of teaching problem solving strategies.
Keywords: problem, problem solving, problem solving strategies, practical examples

Životopis

Mirta Ćuk rođena je 23. siječnja 1994. godine u Zagrebu. Pohađala je XV. gimnaziju u Zagrebu, gdje je maturirala 2013. godine te uspješno položila Državnu maturu. Iste godine upisuje preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2020. godine upisuje diplomski studij na istom fakultetu.
U sklopu rada u udruzi Mladi nadareni matematičari - Marin Getaldić, Mirta je vodila projekt RADDAR (Rad s darovitim učenicima). Osim toga, posjeduje dugogodišnje iskustvo u pružanju instrukcija iz matematike, kao i iskustvo u pripremanju učenika za državne ispite i natjecanja.
Usporedno studiju, započinje studentski posao analitičara u Generali osiguranju koji obavlja do 2018. godine. Nakon toga, zapošljava se u Photomathu kao kreator sadržaja i moderator kvalitete te usporedno u Algebri kao predavač na Junior Akademiji. Trenutno je zaposlena u ENNA Opskrbi kao stručni suradnik za vođenje portfelja električne energije.