Optimizacija forme zakrivljenog štapa

Jelašić, Mislav

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:611704

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-16**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mislav Jelašić

OPTIMIZACIJA FORME ZAKRIVLJENOG ŠTAPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, studeni 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Model zakrivljenog štapa **2**
1.1 Diferencijalna formulacija 2
1.2 Slaba formulacija: klasična i mješovita zadaća 5

2 Problem optimizacije **9**
2.1 Optimalna debljina zakrivljenog štapa 9

3 Numerička implementacija **18**
3.1 Metoda konačnih elemenata 18
3.2 Rezultati testiranja 23

A Teorija elastičnosti **28**
A.1 Sustav jednadžbi zakrivljenog štapa 28
A.2 Postojanje i jedinstvenost rješenja 31

Bibliografija **33**

Uvod

U mnogim područjima znanosti, pa tako i u mehanici kontinuuma, postoje određeni problemi koje želimo optimizirati. Za njih je nerijetko potrebno definirati odgovarajući model, koji pojednostavnjuje fizikalnu prirodu stvari. Kao konkretan primjer promotrimo konstrukciju mosta, pod utjecajem sile teža. Pretpostavimo da je dana ukupna raspoloživa količina materijala za njegovu izgradnju. Zanima nas koja raspodjela materijala rezultira time da most bude najkruć. Odgovor na to pitanje dobivamo tako da 3D model mosta aproksimiramo pojednostavljenim 1D modelom štapa, za kojeg zatim definiramo željeni optimizacijski problem (u ovom slučaj njegove debljine), koji je moguće numerički riješiti. Ovakav pristup često se koristi pri modeliranju stenta.

Rad je podijeljen u tri dijela. U prvom poglavlju predstavljamo stacionarni problem za zakrivljeni štap, koji aproksimiramo ravnim štapićima. Najprije razvijamo diferencijalnu formulaciju modela, koja je opisana elastičnim jednadžbama, kontaktnim uvjetima štapića i rubnim uvjetima štapa. Iz nje dalje definiramo prostore rješenja za pomak i rotaciju zakrivljenog štapa te izvodimo klasičnu i mješovitu slabu (varijacijsku) formulaciju.

U drugom poglavlju navodimo problem optimizacije debljine. Za odabranu funkciju cilja i prostor ograničenja, postavljamo minimizacijsku zadaću i pokazujemo postojanje njenog rješenja. Na kraju, prezentiramo jednostavan algoritam iteracija u svrhu određivanja optimalne debljine štapa.

U trećem poglavlju, numerički simuliramo djelovanje vanjske sile na zakrivljeni štap, pomoću metode konačnih elemenata. Dodatno, određujemo njegovu optimalnu debljinu u skladu s postavljenom minimizacijskom zadaćom. Navodimo nekoliko različitih primjera, koje testiramo u programskom jeziku *Matlab*.

Detaljan izvod modela elastičnosti za neproduljivi i nesmičljivi (zakrivljeni) štap te dokaz egzistencije i jedinstvenosti rješenja pripadne zadaće dajemo u dodatku.

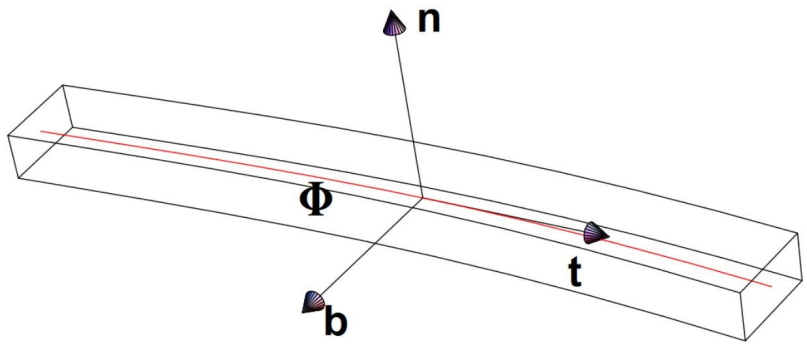
Poglavlje 1

Model zakrivljenog štapa

1.1 Diferencijalna formulacija

Matematički opis

Štap je elastično tijelo kojemu je jedna dimenzija (duljina) znatno veća od druge dvije. Iako ga je uobičajeno promatrati u tri dimenzije, za formulaciju stacionarnog (ravnotežnog) problema odlučujemo koristiti pojednostavljeni jednodimenzionalni *Antman-Cosseratov* model, dobiven linearizacijom nelinearnog trodimenzionalnog modela za neproduljive i nesmičljive elastične štapove. Pripadni sustav jednadžbi, dan u jednoj varijabli, moguće je zapisati kao limes sustava jednadžbi danog u sve tri (kada debljina poprečnih presjeka teži k nuli), zbog čega ovaj model pruža dobru aproksimaciju za dovoljno tanke štapove. Dodatno pojednostavljenje možemo dobiti zamjenom zakrivljenog štapa familijom ravnih štapića. Pored elastičnih jednadžbi, za diferencijalnu formulaciju potrebno je još postaviti odgovarajuće kontaktne uvjete među štapićima te rubne uvjete na krajevima štapa.



Slika 1.1: Zakrivljeni štap s označenom centralnom linijom i baznim funkcijama

Jednadžbe elastičnosti

Označimo sa $\Phi : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$ prirodnu parametrizaciju centralne linije zakrivljenog štapa. Za nju definiramo Frenetovu bazu $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$, gdje je $\boldsymbol{t}$ jedinična tangenta, a $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{b}$ normala i binormala, kojima je određena ravnina u kojoj se nalaze poprečni presjeci štapa (vidi sliku 1.1). Neka su zadane linijske gustoće vanjske sile $\boldsymbol{f} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$ i vanjskog momenta $\boldsymbol{m} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, koje djeluju na elastični štap. Uvodimo vektorske funkcije jedne varijable (parametrizirane sa $s \in [0, \ell]$), koje predstavljaju nepoznanice modela:

- $\boldsymbol{u} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, pomak centralne linije štapa,
- $\boldsymbol{\omega} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, infinitezimalna rotacija poprečnog presjeka štapa,
- $\boldsymbol{p} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, kontaktna sila štapa,
- $\boldsymbol{q} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, kontaktni moment štapa.

Mehaničko ponašanje zakrivljenog elastičnog štapa opisujemo linearnim sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda (ukupno 12 jednadžbi s 12 nepoznanica):

$$\begin{cases} 0 = \partial_s \boldsymbol{p} + \boldsymbol{f} & (1.1) \\ 0 = \partial_s \boldsymbol{q} + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{m} & (1.2) \\ 0 = \partial_s \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{q} & (1.3) \\ 0 = \partial_s \boldsymbol{u} + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\omega} & (1.4) \end{cases}$$

na segmentu $[0, \ell]$. Detaljan izvod diferencijalne formulacije može se pronaći u Dodatku A.1. Ovakav model određuje pomak centralne linije te infinitezimalnu rotaciju poprečnog presjeka pri deformaciji. Jednadžbe (1.1) i (1.2) predstavljaju redom zakone ravnoteže sila i ravnoteže momenata, dok jednadžbe (1.3) i (1.4) opisuju konstituivnu relaciju elastičnog štapa (uključujući uvjete neproduljivosti i nesmičljivosti), dobivenu iz zakona ponašanja. Matrične funkcije $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{H}$, zadane na segmentu $[0, \ell]$, opisuju elastična svojstva materijala štapa te lokalnu geometriju poprečnih presjeka. Definiramo ih na sljedeći način:

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{b}], \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \mu K & 0 & 0 \\ 0 & EI_{33} & EI_{23} \\ 0 & EI_{23} & EI_{22} \end{bmatrix},$$

gdje su $I_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ i K redom momenti inercije i torzijska krutost poprečnog presjeka štapa. Materijalne parametre λ i μ nazivamo Laméove konstante, a $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ Youngov modul elastičnosti. Debljinu kvadratnog poprečnog presjeka zakrivljenog štapa možemo bilježiti funkcijom $\boldsymbol{h} : [0, \ell] \to \mathbb{R}$, koja je zadana u svakoj točki parametrizirane centralne linije.

Aproksimacijski model

Zbog jednostavnije numeričke implementacije, jedan zakrivljeni štap želimo prikazati unijom konačno mnogo (malih) ravnih štapića. Standardni model štapa, opisan regularnom centralnom linijom, zamijenjujemo novim aproksimacijskim modelom, koji je opisan po dijelovima glatkom centralnom linijom. U [5] je pokazano da familija rješenja stacionarnih problema zakrivljenog štapa za glatke krivulje konvergira prema (jedinstvenom) rješenju ekvivalentnog problema za po dijelovima glatku krivulju. Kako (iste) ocjene vrijede i u obrnutom slučaju, postupak aproksimacije po dijelovima glatkom krivuljom u potpunosti je opravdan (i istovjetan je spajanju ravnih štapića).

Određujemo diferencijalnu formulaciju za zakrivljeni štap, sastavljen od ravnih štapića. Za proizvoljan $N \in \mathbb{N}$, koji označava njihov ukupan broj, zadajemo diskretizaciju domene:

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = \ell.$$

Neka je $\Phi \in C([0, \ell]; \mathbb{R}^3)$ neprekidna parametrizacija centralne linije zakrivljenog štapa, koja je definirana kao po dijelovima afina funkcija na segmentima $[s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \ldots, N$. Budući da ona nije glatka na cijeloj svojoj domeni, možemo promatrati sustav elastičnih jednadžbi (1.1) - (1.4) zadan jedino na uniji otvorenih intervala (s_{i-1}, s_i), $i = 1, \ldots, N$. Ravne štapiće predstavljamo kao dijelove zakrivljenog štapa na kojem je funkcija Φ afina. Preciznije, njihove centralne linije parametriziramo funkcijama

$$\Phi^i := \Phi\big|_{[s_{i-1}, s_i]} \in C^1([s_{i-1}, s_i]; \mathbb{R}^3), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Zabilježimo sa $\boldsymbol{f}^i$ i $\boldsymbol{m}^i$ restrikcije vanjske sile $\boldsymbol{f}$ i vanjskog momenta $\boldsymbol{m}$, na segment $[s_{i-1}, s_i]$, na kojem je definiran i-ti ravni štapić, za $i = 1, \ldots, N$. Kako je Φ^i afina funkcija, lako uočavamo da su pripadna tangenta, normala i binormala konstantne po iznosu. Tada za svaki $i = 1, \ldots, N$ vrijednost matrice $\boldsymbol{Q}$ na segmentu $[s_{i-1}, s_i]$ označimo sa $\boldsymbol{Q}^i = [\boldsymbol{t}^i\, \boldsymbol{n}^i\, \boldsymbol{b}^i]$. Ako još zadamo jednake Laméove konstante na svakom ravnom štapiću, onda na isti način možemo uvesti oznake $\boldsymbol{H}^i$, $i = 1, \ldots, N$ za konstantne vrijednosti matrice $\boldsymbol{H}$. Sada za i-ti ravni štapić možemo iskoristiti nepoznate funkcije

$$\boldsymbol{u}^i := \boldsymbol{u}\big|_{[s_{i-1}, s_i]}, \quad \boldsymbol{\omega}^i := \boldsymbol{\omega}\big|_{[s_{i-1}, s_i]}, \quad \boldsymbol{p}^i := \boldsymbol{p}\big|_{[s_{i-1}, s_i]}, \quad \boldsymbol{q}^i := \boldsymbol{q}\big|_{[s_{i-1}, s_i]}$$

kako bismo ograničili sustav elastičnih jednadžbi (1.1) - (1.4) na pripadni segment $[s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \ldots, N$. Primijetimo da su funkcije ravnih štapića $\boldsymbol{u}^i$, $\boldsymbol{\omega}^i$, $\boldsymbol{p}^i$ i $\boldsymbol{q}^i$ derivabilne na cijeloj svojoj domeni, dok funkcije zakrivljenog štapa $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ to nisu. Na kraju pretpostavimo da svaki ravni štapić ima konstantnu debljinu. Tada umjesto funkcije koja opisuje debljinu zakrivljenog štapa, možemo definirati vektor $\boldsymbol{h} = (h^1, \ldots, h^N)$.

Kontaktni uvjeti

Budući da sustav elastičnih jednadžbi (1.1) - (1.4) nije definiran u točkama $s_0, \ldots, s_N$, u njima je potrebno zadati određene uvjete. Primijetimo da su točke $s_0 = 0$ i $s_N = \ell$ rubne točke zakrivljenog štapa, dok su točke s_i, za $i = 1, \ldots, N-1$ dodirne točke ravnih štapića. Sada predstavljamo fizikalne uvjete kontakta, koji podrazumijevaju neprekidnost funkcija $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ u dodirnim točkama. Pritom razlikujemo dvije vrste: kinematičke i dinamičke kontaktne uvjete. Kinematički kontaktni uvjet zahtijeva da pomak središnje linije i infinitezimalna rotacija poprečnog presjeka budu neprekidni na zakrivljenom štapu:

$$\boldsymbol{u}^i(s_i) = \boldsymbol{u}^{i+1}(s_i), \quad \boldsymbol{\omega}^i(s_i) = \boldsymbol{\omega}^{i+1}(s_i), \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{1.5}$$

dok dinamički kontaktni uvjet osigurava ravnotežu kontaktnih sila i kontaktnih momenata:

$$\boldsymbol{p}^i(s_i) = \boldsymbol{p}^{i+1}(s_i), \quad \boldsymbol{q}^i(s_i) = \boldsymbol{q}^{i+1}(s_i), \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{1.6}$$

Rubni uvjeti

Uz kontaktne uvjete (1.5) i (1.6), definirane na presjecima domena štapića, rješenje problema zakrivljenog štapa jedinstveno je tek do na translaciju i rotaciju. Zbog toga je potrebno zadati prikladno ponašanje u njegovim rubnim točkama. Tamo gdje je pojedini kraj štapa ukliješten (učvršćen na progib i rotaciju), zadajemo Dirichletove rubne uvjete, a gdje je slobodan (slobodan na progib i rotaciju) Neumannove. Promatramo dva slučaja: ako su oba kraja štapa ukliještena imamo rubne uvjete

$$\boldsymbol{u}^1(0) = \boldsymbol{\omega}^1(0) = 0, \quad \boldsymbol{u}^N(\ell) = \boldsymbol{\omega}^N(\ell) = 0, \tag{1.7}$$

a ako je lijevi kraj ukliješten, a desni slobodan onda

$$\boldsymbol{u}^1(0) = \boldsymbol{\omega}^1(0) = 0, \quad \boldsymbol{p}^N(\ell) = \boldsymbol{q}^N(\ell) = 0. \tag{1.8}$$

1.2 Slaba formulacija: klasična i mješovita zadaća

Diferencijalnu formulaciju za stacionarni problem zakrivljenog štapa posve smo zadali sustavom jednadžbi (1.1) - (1.4) na intervalima (s_{i-1}, s_i), $i = 1, \ldots, N$, kontaktnim uvjetima (1.5) i (1.6) u točkama s_i, $i = 1, \ldots, N-1$ te jednim tipom rubnih uvjeta (1.7) ili (1.8) u točkama s_0 i s_N. Sljedeće što želimo je odrediti varijacijsku formulaciju i definirati pripadajuće slabo rješenje, koje se koristi u numeričkoj aproksimaciji modela.

Varijacijska formulacija za ravni štapić

Prvo formuliramo slabu (varijacijsku) zadaću za pojedini ravni štapić. Kako nepoznate funkcije moraju biti dovoljno glatke (barem neprekidno derivabilne), prostore rješenja za pomak i infinitezimalnu rotaciju i-tog štapića definiramo kao potprostore Soboljeva, koji zadovoljavaju uvjet neproduljivosti i nesmičljivosti:

$$\bar{V}_i := \left\{(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\omega}^i) \in H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3) \times H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3) : \partial_s \boldsymbol{u}^i + \boldsymbol{t}^i \times \boldsymbol{\omega}^i = 0\right\}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Klasična slaba (varijacijska) zadaća za i-ti ravni štapić tada se svodi na traženje funkcije $(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{\omega}^i) \in \bar{V}_i$, koja zadovoljava jednakost

$$\begin{aligned}\int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \boldsymbol{H}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}^i + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{m}^i \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i + \boldsymbol{p}^i(s_i) \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}^i(s_i) \\ - \boldsymbol{p}^i(s_{i-1}) \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}^i(s_{i-1}) + \boldsymbol{q}^i(s_i) \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i(s_i) - \boldsymbol{q}^i(s_{i-1}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i(s_{i-1}),\end{aligned} \tag{1.9}$$

za svaki $(\tilde{\boldsymbol{u}}^i, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i) \in \bar{V}_i$. Detaljan izvod klasične formulacije za jedan štap proizvoljne duljine, kao i dokaz egzistencije i jedinstvenosti rješenja zadaće, može se pronaći u Dodatku A.2. Kako ograničenja na prostore rješenja, zadana uvjetima neproduljivosti i nesmičljivosti, nije jednostavno numerički implementirati, potrebno je uvesti mješovitu slabu formulaciju, u kojoj ih zadajemo posebnom jednadžbom. Definiramo nove prostore:

$$V_i := H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3) \times H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3), \quad Q_i := L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Mješovita slaba (varijacijska) zadaća za i-ti ravni štapić sada se svodi na traženje funkcije $(\boldsymbol{y}^i, \boldsymbol{p}^i) \in V_i \times Q_i$, za koju vrijedi

$$\begin{aligned}&\int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \boldsymbol{H}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{p}^i \cdot \left(\partial_s \tilde{\boldsymbol{u}}^i + \boldsymbol{t}^i \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i\right) ds \\ &\quad = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}^i \, ds + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{m}^i \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{y}}^i \in V_i, \\ &\int_{s_{i-1}}^{s_i} \tilde{\boldsymbol{p}}^i \cdot \left(\partial_s \boldsymbol{u}^i + \boldsymbol{t}^i \times \boldsymbol{\omega}^i\right) ds = 0, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{p}}^i \in Q_i.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Slabu (varijacijsku) formulaciju cijelog zakrivljenog štapa dobivamo sumiranjem svih slabih formulacija pojedinih ravnih štapića. Pritom se vrijednosti funkcija na granicama u klasičnoj slaboj zadaći međusobno ponišavaju zbog kinematičkih (1.5) i dinamičkih (1.6) kontaktnih uvjeta. Ako dodatno uključimo (točno) jedan od rubnih uvjeta (1.7) ili (1.8), tada osiguravamo egzistenciju i jedinstvenost rješenja (ista tvrdnja vrijedi i za problem napisan u diferencijalnom obliku).

Varijacijska formulacija za zakrivljeni štap

Sada definiramo slabu (varijacijsku) zadaću za cijeli zakrivljeni štap, koji se sastoji od ravnih štapića. Najprije uvodimo vektorsku funkciju

$$\boldsymbol{y}_S := (\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^N) = ((\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{\omega}^1), \ldots, (\boldsymbol{u}^N, \boldsymbol{\omega}^N)) \in (\mathbb{R}^6)^N,$$

koja opisuje pomake centralnih linija i infinitezimalne rotacije poprečnih presjeka ravnih štapića. Kinematički kontaktni uvjet, koji definira neprekidnost rješenja $\boldsymbol{y}_S$, uključujemo u definiciju prostora rješenja:

$$H^1(0, \ell; \mathbb{R}^{6N}) = \left\{ \boldsymbol{y}_S = (\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^N) \in \prod_{i=1}^{N} H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^6) : \boldsymbol{y}^i(s_i) = \boldsymbol{y}^{i+1}(s_i), i = 1, \ldots, N-1 \right\}$$

i kažemo da je zadovoljen u jakom smislu. Za razliku od njega, dinamički kontaktni uvjet, koji predstavlja ravnotežu sila $\boldsymbol{p}$ i momenata $\boldsymbol{q}$, postavlja se slabo, tako da ga uvrstimo u formulaciju korištenjem parcijalne integracije. Dirichletove rubne uvjete na krajevima štapa uvrštavamo u prostor rješenja, a Neumannove u varijacijsku jednadžbu. Prema tome, za dani uvjet (1.7) definiramo normiran prostor

$$V_S := \left\{ \boldsymbol{y}_S = (\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^N) \in H^1(0, \ell; \mathbb{R}^{6N}) : \boldsymbol{y}^1(0) = \boldsymbol{y}^N(\ell) = 0 \right\},$$

a za (1.8)

$$V_S := \left\{ \boldsymbol{y}_S = (\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^N) \in H^1(0, \ell; \mathbb{R}^{6N}) : \boldsymbol{y}^1(0) = 0 \right\},$$

s pripadnom normom

$$\|\boldsymbol{y}_S\|_{V_S}^2 = \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{y}^i\|_{H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^6)}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\|\boldsymbol{u}^i\|_{H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)}^2 + \|\boldsymbol{\omega}^i\|_{H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)}^2 \right).$$

Dodatno, uvodimo pomoćni normirani prostor

$$Q_S := L^2(0, \ell; \mathbb{R}^3) = \prod_{i=1}^{N} L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3), \quad \|\boldsymbol{p}_S\|_{Q_S}^2 = \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{p}^i\|_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)}^2.$$

Na prostorima V_S i Q_S definiramo bilinearne forme:

$$k_S : V_S \times V_S \to \mathbb{R}, \quad k_S(\boldsymbol{y}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \boldsymbol{H}^i \left(\boldsymbol{Q}^i \right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds, \tag{1.11}$$

$$b_S : Q_S \times V_S \to \mathbb{R}, \quad b_S(\boldsymbol{p}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{p}^i \cdot \left(\partial_s \tilde{\boldsymbol{u}}^i + \boldsymbol{t}^i \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \right) ds, \tag{1.12}$$

te linearni funkcional:

$$l_S : V_S \to \mathbb{R}, \quad l_S(\tilde{\boldsymbol{y}}_S) = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}^i \, ds + \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{m}^i \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds. \tag{1.13}$$

Mješovita slaba (varijacijska) zadaća za zakrivljeni štap sada glasi: nađi $(\boldsymbol{y}_S, \boldsymbol{p}_S) \in V_S \times Q_S$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} &k_S(\boldsymbol{y}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(\boldsymbol{p}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) = l_S(\tilde{\boldsymbol{y}}_S), \quad \forall \tilde{\boldsymbol{y}}_S \in V_S, \\ &b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \boldsymbol{y}_S) = 0, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{p}}_S \in Q_S. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ovdje funkcija $\boldsymbol{p}_S = (\boldsymbol{p}^1, \ldots, \boldsymbol{p}^N) \in Q_S$ predstavlja Lagrangeove multiplikatore, koji osiguravaju uvjete neproduljivosti i nesmičljivosti, dok funkcija $\boldsymbol{y}_S = (\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^N) \in V_S$ definira rješenje za stacionarni problem zakrivljenog štapa. Ako uvedemo dodatni prostor

$$V_S^{\mathrm{Ker}} = \{\tilde{\boldsymbol{y}}_S \in V_S : b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) = 0, \, \forall \tilde{\boldsymbol{p}}_S \in Q_S\},$$

tada klasična slaba (varijacijska) zadaća za zakrivljeni štap kaže: nađi $\boldsymbol{y}_S \in V_S^{\mathrm{Ker}}$ takav da

$$k_S(\boldsymbol{y}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) = l_S(\tilde{\boldsymbol{y}}_S), \quad \forall \tilde{\boldsymbol{y}}_S \in V_S^{\mathrm{Ker}}. \tag{1.15}$$

Primijetimo da su gornje varijacijske formulacije ekvivalentne, odnosno rješenje jedne zadaće u potpunosti određuje rješenje druge (i obratno). Preciznije, ako funkcija $\boldsymbol{y}_S \in V_S^{\mathrm{Ker}}$ zadovoljava (1.15), tada postoji $\boldsymbol{p}_S \in Q_S$ tako da $(\boldsymbol{y}_S, \boldsymbol{p}_S) \in V_S \times Q_S$ zadovoljava (1.14), dok se s druge strane lako vidi da je za rješenje mješovite (slabe) zadaće $(\boldsymbol{y}_S, \boldsymbol{p}_S)$, funkcija $\boldsymbol{y}_S$ ujedno i rješenje klasične. Dodatno se može dokazati da za svaki linearni funkcional $l_S \in V_S'$, postoji jedinstveno rješenje i jedne i druge zadaće. Za klasičnu zadaću, taj se rezultat dobiva primjenom Lax-Milgramove leme: potrebno je pokazati da su bilinearne forme k_S i b_S, te linearni funkcional l_S neprekidni (ograničeni), pri čemu k_S još mora biti V_S^{Ker}-eliptična (koercitivna na prostoru V_S^{Ker}). Egzistencija i jedinstvenost mješovite zadaće slijedi pak iz Brezzi-Fortinovog teorema, jer b_S zadovoljava *inf-sup* uvjet (vidi [3]).

Poglavlje 2

Problem optimizacije

2.1 Optimalna debljina zakrivljenog štapa

Minimizacijska zadaća

Nakon što smo predstavili model ravnoteže zakrivljenog štapa, želimo pronaći idealnu formu za zadanu vanjsku silu (pretpostavljamo da vanjskog momenta nema, odnosno da iznosi nula). Ispitujemo utjecaj debljina pojedinih štapića na mehanička svojstva cijelog štapa. Cilj nam je prilagoditi debljinu štapa tako da bude najkruć (za zadanu silu posjeduje najmanju moguću energiju pri ravnotežnoj deformaciji). Pri postavljanju minimizacijske zadaće, koristimo mješovitu formulaciju, danu u terminima debljina ravnih štapića.

Prije nego što definiramo problem optimizacije za zakrivljeni štap, prvo analiziramo njegovu ovisnost o parametru debljine. Primijetimo da se varijable h^i pojavljuju jedino u elementima matrica $\boldsymbol{H}^i, i = 1, \ldots, N$. Ako označimo sa $S_i = [-\frac{1}{2}h^i, \frac{1}{2}h^i]^2$ poprečni presjek i-tog ravnog štapića, onda momente inercije i torzijsku krutost računamo formulama:

$$I^i_{23} = \int_{S_i} z_2 z_3 \, dz_2 \, dz_3 = 0, \quad I^i_{22} = \int_{S_i} z_2^2 \, dz_2 \, dz_3 = \frac{1}{12}(h^i)^4, \quad I^i_{33} = \int_{S_i} z_3^2 \, dz_2 \, dz_3 = \frac{1}{12}(h^i)^4,$$

$$K^i = \frac{1}{6}(h^i)^4 + 32 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h^i)^4}{(2k-1)^5 \pi^5} \left((2k-1)\frac{\pi}{2} - 2\, th \frac{(2k-1)\pi}{2} \right).$$

Neka su Laméove konstante i Youngov modul elastičnosti jednaki na cijelom štapu. Sada matrice $\boldsymbol{H}^i$ možemo zapisati izrazima $\boldsymbol{H}^i = (h^i)^4 \tilde{\boldsymbol{H}}^i$, $i = 1, \ldots, N$, gdje je $\tilde{\boldsymbol{H}}^i$ definirana za konstantni poprečni presjek $\tilde{S}_i = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$, skaliran faktorom h^i s obzirom na svoje središte. Pri rješavanju optimizacijskog problema pretpostavljamo da vanjska sila $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}^1, \ldots, \boldsymbol{f}^N)$ ne ovisi o debljinama štapića, čime efektivno zanemarujemo njihovu težinu.

Za dani vektor debljina $\boldsymbol{h} = (h^1, \ldots, h^N)$, mješovita varijacijska zadaća (1.14) zapisana s parametrima $\boldsymbol{h}$ glasi: nađi $(\boldsymbol{y}_S, \boldsymbol{p}_S) \in V_S \times Q_S$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} &k_S(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{y}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(\boldsymbol{p}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) = l_S(\tilde{\boldsymbol{y}}_S), \quad \forall \tilde{\boldsymbol{y}}_S \in V_S, \\ &b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \boldsymbol{y}_S) = 0, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{p}}_S \in Q_S. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Možemo primijetiti da bilinearna forma b_S ne ovisi o rješenju $\boldsymbol{y}_S$, pa onda niti o debljini $\boldsymbol{h}$. Promatramo minimizacijsku zadaću, gdje funkcija cilja mjeri sveukupnu elastičnu energiju zakrivljenog štapa, koja odgovara umnošku njegove sile i pomaka:

$$J : V_S \times Q_S \to \mathbb{R}, \quad J(\boldsymbol{y}_S, \boldsymbol{p}_S) = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot \boldsymbol{u}^i \, ds. \tag{2.2}$$

Tražimo $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ takav da rješenje zadaće (2.1) da minimalnu vrijednost funkcionala (2.2). Pri tome definiramo skup ograničenja $W \subset \mathbb{R}^N$, koji propisuje minimalnu i maksimalnu debljinu štapića te ukupni volumen materijala od kojeg je štap izrađen:

$$W = \left\{ h \in \mathbb{R}^N : h_{\min} \leq h^i \leq h_{\max},\ i = 1, \ldots, N,\ \sum_{i=1}^{N} (h^i)^2 (s_i - s_{i-1}) = V_0 \right\}. \tag{2.3}$$

Uočimo da je skup W ograničen i zatvoren. Za odabranu vrijednost vektora $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$, koja zadovoljava uvjet iz skupa (2.3), označimo s $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}))$ pripadno rješenje zadaće (2.1). Problem optimizacije debljine zakrivljenog štapa sada glasi: odredi $\bar{\boldsymbol{h}} \in \mathbb{R}^N$ takav da

$$\begin{cases} J(\boldsymbol{y}_S(\bar{\boldsymbol{h}}), \boldsymbol{p}_S(\bar{\boldsymbol{h}})) = \min\limits_{\boldsymbol{h} \in W} J(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})), \\ \text{gdje je } (\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})) \text{ jedinstveno rješenje zadaće (2.1).} \end{cases} \tag{2.4}$$

Pokazuje se da je ovako definirana minimizacijska zadaća dobro postavljena.

Egzistencija rješenja

Postojanje minimizatora optimizacijskoga problema (2.4) bazirano je na određenim svojstvima skupa W i funkcionala J. Pritom je ovisnost od J o varijabli $\boldsymbol{h} = (h^1, \ldots, h^N)$ poželjno zapisati eksplicitno. Zato uvodimo novu oznaku za funkciju cilja:

$$\tilde{J}(\boldsymbol{h}) := J(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})) = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot \boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h}) \, ds, \tag{2.5}$$

gdje je $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}))$ rješenje zadaće (2.1) za parametar $\boldsymbol{h} \in W$. Za odrediti neprekidnost funkcionala $\tilde{J}$ s obzirom na $\boldsymbol{h}$, dovoljno je provjeriti da je preslikavanje $\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h})$ neprekidno. Trebamo pokazati da familija $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda))_\lambda$ rješenja zadaće (2.1) konvergira prema rješenju $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}))$ kada $\boldsymbol{h}_\lambda \to \boldsymbol{h}$. Najprije navodimo pomoćnu lemu:

Lema 2.1.1. *Neka su $(\boldsymbol{f}_\lambda^1)_\lambda$ i $(\boldsymbol{f}_\lambda^2)_\lambda$ familije funkcija iz prostora Q_S i $(\boldsymbol{h}_\lambda)_\lambda \subset W$. Za svaki $\tilde{\boldsymbol{y}}_S \in V_S$, označimo sa $F_\lambda \in V_S'$ neprekidni funkcional definiran formulom*

$$\langle F_\lambda, \tilde{\boldsymbol{y}}_S \rangle := \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}_\lambda^{1,i} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}^i \, ds + \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}_\lambda^{2,i} \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds.$$

Neka su $(\boldsymbol{y}_S^{\boldsymbol{h}_\lambda}, \boldsymbol{p}_S^{\boldsymbol{h}_\lambda})_\lambda \subset V_S \times Q_S$ jedinstvena rješenja problema

$$\begin{aligned} &k_S(\boldsymbol{h}_\lambda)(\boldsymbol{y}_S^{\boldsymbol{h}_\lambda}, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(\boldsymbol{p}_S^{\boldsymbol{h}_\lambda}, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) = \langle F_\lambda, \tilde{\boldsymbol{y}}_S \rangle, \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_S \in V_S, \\ &b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \boldsymbol{y}_S^{\boldsymbol{h}_\lambda}) = 0, \quad \tilde{\boldsymbol{p}}_S \in Q_S. \end{aligned} \tag{2.6}$$

1. *Ako postoji konstanta $C > 0$ (neovisna o λ) za koju je zadovoljen uvjet $\|\boldsymbol{f}_\lambda^1\|_{Q_S}, \|\boldsymbol{f}_\lambda^2\|_{Q_S} \leq C$, onda postoji $C' > 0$ takva da vrijedi: $\|\boldsymbol{y}_S^{\boldsymbol{h}_\lambda}\|_{V_S}, \|\boldsymbol{p}_S^{\boldsymbol{h}_\lambda}\|_{Q_S} \leq C'$.*
2. *Ako familije funkcija $(\boldsymbol{f}_\lambda^1)_\lambda$ i $(\boldsymbol{f}_\lambda^2)_\lambda$ konvergiraju prema nuli u normi prostora Q_S, kada $\boldsymbol{h}_\lambda \to \boldsymbol{h}$, tada dodatno $\boldsymbol{y}_S^{\boldsymbol{h}_\lambda} \to 0$ u V_S-normi i $\boldsymbol{p}_S^{\boldsymbol{h}_\lambda} \to 0$ u Q_S-normi.*

Za dokazivanje gornje tvrdnje koristimo sljedeći (općeniti) rezultat, vidi [3]:

Teorem 2.1.2 (Brezzi-Fortin)**.** *Neka su V i Q Hilbertovi prostori sa pripadnim normama $\|\cdot\|_V$ i $\|\cdot\|_Q$. Pretpostavimo da bilinearne forme $k : V \times V \to \mathbb{R}$ i $b : V \times Q \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju*

(1) $|k(u, v)| \leq A_0 \|u\|_V \|v\|_V$, $\forall u, v \in V$,

(2) $|b(u, p)| \leq B_0 \|u\|_V \|p\|_Q$, $\forall u \in V$, $\forall p \in Q$,

(3) $k(u, u) \geq \alpha_0 \|u\|_V^2$, $\forall u \in V$ *takav da* $b(u, p) = 0$, $\forall p \in Q$,

(4) $\inf\limits_{p \in Q} \sup\limits_{u \in V} \dfrac{b(u, p)}{\|u\|_V \|p\|_Q} \geq \beta_0$,

za pozitivne konstante A_0, B_0, α_0 i β_0. Neka je dodatno $f \in V'$. Tada postoji jedinstveno rješenje $(u, p) \in V \times Q$ mješovite zadaće

$$\begin{aligned} &k(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle_{V', V}, \quad \forall v \in V, \\ &b(u, \tilde{p}) = 0, \quad \forall \tilde{p} \in Q. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Štoviše, za njega vrijede ocjene:

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha_0} \|f\|_{V'}, \quad \|p\|_Q \leq \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{A_0}{\alpha_0} + 1 \right) \|f\|_{V'}. \tag{2.8}$$

Ako pokažemo da postoje konstante A_0, B_0, α_0 i β_0, takve da problemi (2.6) zadovoljavaju pretpostavke Teorema 2.1.2 (uniformno za sve λ), tada obje tvrdnje Leme 2.1.1 direktno slijede iz nejednakosti (2.8). Napomenimo da *inf-sup* uvjet implicira da je prostor funkcija $\{p \in Q : b(\tilde{u}, p) = 0, \forall \tilde{u} \in V\}$ trivijalan, čime je rješenje formulacije (2.7) jedinstveno.

Dokaz. Za početak primijetimo da bilinearna forma b_S ne ovisi o $\boldsymbol{h}_\lambda$ pa onda i λ. U [3] je pokazano da postoje konstante $B_0 > 0$ i $\beta_0 > 0$ takve da vrijede pretpostavke Teorema 2.1.2 za b_S. Preostaje još argumentirati neprekidnost i koercitivnost forme k_S. Prisjetimo se njene definicije:

$$k_S\left(\boldsymbol{h}_\lambda\right)\left(\boldsymbol{y}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(h_\lambda^i\right)^4 \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds. \tag{2.9}$$

Neprekidnost slijedi direktno iz ograničenosti matrica $\tilde{\boldsymbol{H}}^i$. Preciznije, ako označimo sa $C > 0$ konstantu takvu da vrijedi $\|\tilde{\boldsymbol{H}}^i\|_\infty \leq C$, za sve $i = 1, \ldots, N$, tada korištenjem uvjeta $h_{min} \leq h^i \leq h_{\max}$ i primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti imamo:

$$\begin{aligned}
k_S\left(\boldsymbol{h}_\lambda\right)\left(\boldsymbol{y}_S, \tilde{\boldsymbol{y}}_S\right) &\leq h_{\max}^4 \sum_{i=1}^{N} C \|\boldsymbol{Q}^i \partial_s \boldsymbol{\omega}^i\|_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} \|\boldsymbol{Q}^i \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i\|_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} \\
&\leq h_{\max}^4 C \left(\sum_{i=1}^{N} \|\partial_s \boldsymbol{\omega}^i\|^2_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} \|\partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i\|^2_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq h_{\max}^4 C \|\boldsymbol{\omega}_S\|_{H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_S\|_{H^1(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} \leq h_{max}^4 C \|\boldsymbol{y}_S\|_{V_S} \|\tilde{\boldsymbol{y}}_S\|_{V_S}.
\end{aligned}$$

Odabirom konstante $A_0 := h_{\max}^4 C$ pokazujemo traženu neprekidnost. Koercitivnost forme k_S dobivamo pak iz koercitivnosti matrice $\tilde{\boldsymbol{H}}^i$ (pripadni koeficijent označimo s $a_0 > 0$) i Poincaréove nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{y}_S\|^2_{V_S} &\leq C_P \sum_{i=1}^{N} \left(\|\partial_s \boldsymbol{u}^i\|^2_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} + \|\partial_s \boldsymbol{\omega}^i\|^2_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} \right) \\
&\leq 2 C_P \sum_{i=1}^{N} \left(\|\partial_s \boldsymbol{u}^i + \boldsymbol{t}^i \times \boldsymbol{\omega}^i\|^2_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{t}^i \times \boldsymbol{\omega}^i\|^2_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} + \|\partial_s \boldsymbol{\omega}^i\|^2_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} \right) \\
&\leq \tilde{C}_P \sum_{i=1}^{N} \|\partial_s \boldsymbol{\omega}^i\|^2_{L^2(s_{i-1}, s_i; \mathbb{R}^3)} \leq \tilde{C}_P \frac{a_0}{h_{\min}^4} \sum_{i=1}^{N} \left(h_\lambda^i\right)^4 \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i \cdot \partial_s \boldsymbol{\omega}^i \, ds \\
&\leq \frac{\tilde{C}_P a_0}{h_{\min}^4} k_S\left(\boldsymbol{h}_\lambda\right)\left(\boldsymbol{y}_S, \boldsymbol{y}_S\right),
\end{aligned}$$

gdje smo u trećem redu iskoristili jednakost $\partial_s \boldsymbol{u}^i + \boldsymbol{t}^i \times \boldsymbol{\omega}^i = 0$ iz uvjeta $b(u, p) = 0$, $\forall p \in Q$. Možemo vidjeti da je koercitivnosti od k_S zadovoljena za konstantu $\alpha_0 = h_{min}^4 / (\tilde{C}_P a_0)$. □

Nadalje, imamo sljedeći bitan teorem:

Teorem 2.1.3. *Neka je* $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}))$ *familija (parametrizirana sa* $\boldsymbol{h}$*) jedinstvenih rješenja zadaće* (2.1)*. Tada za svaki fiksni* $\boldsymbol{h}$*, familija rješenja* $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda))_\lambda$ *konvergira prema rješenju* $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}))$ *u normi prostora* $V_S \times Q_S$ *kada* $\boldsymbol{h}_\lambda \to \boldsymbol{h}$*.*

Dokaz. Da naglasimo zavisnost o parametru λ, uvodimo oznaku $\langle F_\lambda, \tilde{\boldsymbol{y}}_S \rangle$ umjesto $l_S(\tilde{\boldsymbol{y}}_S)$ te pomoću nje zapisujemo zadaću (2.1) na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &k_S(\boldsymbol{h}_\lambda)(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) = \langle F_\lambda, \tilde{\boldsymbol{y}}_S \rangle, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{y}}_S \in V_S, \\ &b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda)) = 0, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{p}}_S \in Q_S. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Koristeći prvu tvrdnju Leme 2.1.1 za funkciju $\boldsymbol{f}$ neovisnu o λ, dobivamo da je familija rješenja $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda),\ \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda))_\lambda$ (uniformno) ograničena nekom konstantom $M > 0$ u normi prostora $V_S \times Q_S$. Dalje pokazujemo da $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}),\ \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{h})) \to 0$ kada $\boldsymbol{h}_\lambda \to \boldsymbol{h}$. U tu svrhu izvodimo sustav jednadžbi za razliku $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}),\ \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{h}))$:

$$\begin{aligned} &k_S(\boldsymbol{h})\,(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}),\ \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}),\ \tilde{\boldsymbol{y}}_S) \\ &\quad = k_S(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) - (k_S(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}), \tilde{\boldsymbol{y}}_S)) \\ &\quad = k_S(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) - l_S(\tilde{\boldsymbol{y}}_S) \\ &\quad = k_S(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) - k_S(\boldsymbol{h}_\lambda)(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{N} \left((h^i)^4 - (h^i_\lambda)^4\right) \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}_\lambda) \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili redom činjenice da su $\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})$ i $\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda)$ također rješenja zadaće (2.1). Prema tome, funkcija $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}),\ \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{h}))$ zadovoljava mješovitu zadaću:

$$\begin{aligned} &k_S(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}),\ \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}),\ \tilde{\boldsymbol{y}}_S) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{N} \left((h^i)^4 - (h^i_\lambda)^4\right) \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}_\lambda) \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{y}}_S \in V_S, \\ &b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})) = 0, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{p}}_S \in Q_S. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Možemo zaključiti da je gornja formulacija oblika (2.6) za desnu stranu

$$\langle F_\lambda, \tilde{\boldsymbol{y}}_S \rangle := \sum_{i=1}^{N} \left((h^i)^4 - (h^i_\lambda)^4\right) \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}_\lambda) \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i \, ds.$$

Lako se pokazuje da je tako definiran funkcional neprekidan na prostoru V_S.

Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti i ograničenosti matrica $\tilde{H}^i$ ocijenjujemo:

$$\begin{aligned}|\langle F_\lambda, \tilde{\boldsymbol{y}}_S\rangle| &\leq \sum_{i=1}^{N} \left|(h_\lambda^i)^4 - (h^i)^4\right| \|\tilde{\boldsymbol{H}}^i\| \, \|\partial_s \boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}_\lambda)\|_{L^2(s_{i-1},s_i;\mathbb{R}^3)} \, \|\partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i\|_{L^2(s_{i-1},s_i;\mathbb{R}^3)} \\ &\leq CM \max_{i=1,\dots,N} \left|(h_\lambda^i)^4 - (h^i)^4\right| \|\tilde{\boldsymbol{y}}_S\|_{V_S},\end{aligned}$$

gdje smo u posljednjoj nejednakosti iskoristili uvjet $\|\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda)\|_{V_S} < M$ za procjenu izraza $\|\partial_s \boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}_\lambda)\|_{L^2(s_{i-1},s_i;\mathbb{R}^3)}$. Kako desna strana nejednakosti teži k nuli, kada $\boldsymbol{h}_\lambda \to \boldsymbol{h}$, iz druge tvrdnje Leme 2.1.1 slijedi konvergencija funkcija $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{h})) \to 0$, odnosno $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda))_\lambda \to (\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}))$ u normi prostora $V_S \times Q_S$. □

Time je završen dokaz neprekidnosti preslikavanja $\boldsymbol{h} \mapsto \tilde{J}(\boldsymbol{h})$. Sada možemo iskazati glavni rezultat našeg problema optimizacije.

Teorem 2.1.4. *Postoji rješenje minimizacijske zadaće* (2.4).

Dokaz. Skup $W \subset \mathbb{R}^N$ je zatvoren i ograničen, stoga je kompaktan. Iz Teorema 2.1.3 slijedi neprekidnost funkcionala $\tilde{J}$. Dakle, $\tilde{J}$ posjeduje ekstremnu točku (minimum) na W. □

Algoritam iteracija

Budući da smo pokazali da postoji (barem jedno) rješenje minimizacijske zadaće (2.4), sljedeći nam je zadatak osmisliti algoritam za njegovo pronalaženje. Za zadani $\boldsymbol{h}$ želimo promijeniti debljine štapića bez povećavanja funkcije cilja $\tilde{J}$. Počinjemo tako da za fiksni vektor $\boldsymbol{h} \in W$ promotrimo perturbaciju $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^N$ za koju vrijedi

$$\tilde{J}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}) \leq \tilde{J}(\boldsymbol{h}). \tag{2.12}$$

Ukoliko pretpostavimo da je funkcional $\tilde{J}$ diferencijabilan (u nekoj okolini točke $\boldsymbol{h}$), tada ga možemo razviti u Taylorov red, odnosno polinom određenog stupnja:

$$\tilde{J}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}) = \tilde{J}(\boldsymbol{h}) + d_h\tilde{J}(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g} + O(\boldsymbol{h}) \leq \tilde{J}(\boldsymbol{h}).$$

Ovdje je $d_h\tilde{J}(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}$ Geteauxova derivacija funkcionala $\tilde{J}$ u smjeru vektora $\boldsymbol{g}$, koja iznosi

$$\begin{aligned}d_h\tilde{J}(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g} &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\tilde{J}(\boldsymbol{h} + \lambda\boldsymbol{g}) - \tilde{J}(\boldsymbol{h})}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot \boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h} + \lambda\boldsymbol{g})\, ds - \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot \boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h})\, ds}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot \frac{\boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h} + \lambda\boldsymbol{g}) - \boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h})}{\lambda}\, ds = \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot d_{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}\, ds.\end{aligned}$$

Dakle, ako želimo smanjiti vrijednost funkcije cilja (da dobijemo „bolje" rješenje zadaće), moramo pronaći vektor $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^N$ koji zadovoljava uvjet:

$$d_h \tilde{J}(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g} = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i \cdot d_{\boldsymbol{h}} \boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}\, ds \leq 0. \tag{2.13}$$

Ovaj nas postupak dovodi do gradijentne metode. Preostaje još pobliže odrediti član pod integralom. Preciznije, uvodimo sustav jednadžbi kojeg zadovoljava izraz $d_h \boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}$. Nova formulacija slijedi direktno iz zadaće (2.11) za vektor $\boldsymbol{h}_\lambda := \boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{g}$. Nakon dijeljenja prve jednadžbe sa λ i uzimanja limesa $\lambda \to 0$ imamo:

$$\begin{aligned}
&k_S(\boldsymbol{h})\left(\lim_{\lambda\to 0} \frac{\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})}{\lambda},\ \tilde{\boldsymbol{y}}_S\right) + b_S\left(\lim_{\lambda\to 0} \frac{\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})}{\lambda},\ \tilde{\boldsymbol{y}}_S\right) \\
&\quad = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{(h^i)^4 - (h^i_\lambda)^4}{\lambda}\right) \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}_\lambda) \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i\, ds, \\
&k_S(\boldsymbol{h})(d_h \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(d_h \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) \\
&\quad = -\sum_{i=1}^{N} 4(h^i)^3 g^i \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}) \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}^i ds \\
&\quad = -d_h k_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \tilde{\boldsymbol{y}}_S) = k_S(\boldsymbol{h}_g)(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \tilde{\boldsymbol{y}}_S),
\end{aligned}$$

gdje je $(\boldsymbol{h}_g)^i = -4(h^i)^3 g^i$, $i = 1, \ldots, N$. Budući da forma b_S ne ovisi o $\boldsymbol{h}$ (čime je njena derivacija nula), dijeljenjem druge jednadžbe s λ i uzimanjem limesa $\lambda \to 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
&b_S\left(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \lim_{\lambda\to 0} \frac{\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda) - \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}_\lambda)) - b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}))}{\lambda} = 0, \\
&b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, d_h \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}) = d_h b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}))\boldsymbol{g} = 0.
\end{aligned}$$

Prema tome, funkcija $(d_h \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}, d_h \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}) \in V_S \times Q_S$ zadovoljava mješovitu zadaću:

$$\begin{aligned}
&k_S(\boldsymbol{h})(d_h \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}, \tilde{\boldsymbol{y}}_S) + b_S(d_h \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}, \tilde{y}_S) = k_S(\boldsymbol{h}_g)(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \tilde{\boldsymbol{y}}_S), \quad \forall \tilde{\boldsymbol{y}}_S \in V_S, \\
&b_S(\tilde{\boldsymbol{p}}_S, d_h \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}) = 0, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{p}}_S \in Q_S.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Kako ne možemo unaprijed zaključiti postojanje gornjih derivacija, prethodni je postupak potrebno opravdati sljedećim tehničkim rezultatom:

Teorem 2.1.5. *Neka je* $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}))$ *familija (parametrizirana sa* $\boldsymbol{h}$*) jedinstvenih rješenja zadaće* (2.1)*. Tada postoje sljedeći limesi:*

$$d_h \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g} := \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \left(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{g}) - \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\right), \quad d_h \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g} := \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \left(\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{g}) - \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})\right),$$

koji su jedinstvena rješenja zadaće (2.14).

Dokaz. Za svaki fiksni vektor $\boldsymbol{h}$, označimo sa $(d_h\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g},\ d_h\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g})$ rješenje zadaće (2.14) (primijetimo usput da je formulacija (2.14) zapravo oblika (2.7) pa Teorem 2.1.2 garantira egzistenciju i jedinstvenost). Želimo pokazati da je ono u stvari limes niza

$$\left(\boldsymbol{y}_S^\lambda, \boldsymbol{p}_S^\lambda\right) := \frac{1}{\lambda}\left(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}+\lambda\boldsymbol{g}) - \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}+\lambda\boldsymbol{g}) - \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})\right),$$

kada $\lambda \to 0$. Prvo uočimo da su funkcije $(\boldsymbol{y}_S^\lambda, \boldsymbol{p}_S^\lambda)$ rješenja zadaće (2.6) za desnu stranu

$$\langle F_\lambda, \tilde{\boldsymbol{y}}_S\rangle = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda}\left((h^i+\lambda g^i)^4 - (h^i)^4\right)\int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i\tilde{\boldsymbol{H}}^i\left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s\boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}+\lambda\boldsymbol{g})\cdot\partial_s\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i\,ds.$$

Promotrimo sada faktor koji množi integral. Za proizvoljni $c > 0$ uvodimo funkcije:

$$\phi_\lambda(t) := \frac{1}{\lambda}\left((t+\lambda c)^4 - t^4\right) = 4t^3c + 6t^2\lambda c^2 + 4t\lambda^2c^3 + \lambda^3c^4.$$

Lako se vidi da su $\phi_\lambda(t)$ uniformno ograničene na segmentu $[h_{\min}, h_{\max}]$ za dovoljno mali λ te da konvergiraju prema funkciji $\phi_0(t) = 4t^3c$, kada $\lambda \to 0$. Slijedi da je familija F_λ također uniformno ograničena, budući da smo u dokazu Leme 2.1.1 pokazali konvergenciju funkcija $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}+\lambda\boldsymbol{g}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}+\lambda\boldsymbol{g}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{h})) \to 0$ u normi prostora in $V_S \times Q_S$, (kada $\lambda \to 0$), koja dodatno povlači uniformnu ograničenost integrala. Dakle, prema prvoj tvrdnji Leme 2.1.1 dobivamo da su funkcije $(\boldsymbol{y}_S^\lambda, \boldsymbol{p}_S^\lambda)$ uniformno ograničene. Konačno, uzmimo funkcije $(\boldsymbol{y}_S^\lambda - d_h\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{p}_S^\lambda - d_h\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g})$ i uočimo da su one rješenja zadaće (2.6) za

$$\langle F_\lambda, \tilde{\boldsymbol{y}}_S\rangle = \sum_{i=1}^N \left(\frac{(h^i+\lambda g^i)^4 - (h^i)^4}{\lambda} - 4(h^i)^3g^i\right)\int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i\tilde{\boldsymbol{H}}^i\left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s\boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}+\lambda\boldsymbol{g})\cdot\partial_s\tilde{\boldsymbol{\omega}}^i\,ds.$$

Slično kao prije, može se pokazati da funkcije F_λ konvergiraju prema nuli. Druga tvrdnja Leme 2.1.1 sada povlači da $(\boldsymbol{y}_S^\lambda - d_h\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{p}_S^\lambda - d_h\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}) \to 0$ u normi prostora $V_S \times Q_S$, čime je dokaz završen. □

Kako je $d_h\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}$ rješenje zadaće (2.14), koja je oblika (2.10), možemo iskoristiti slične argumente kao u dokazu Teorema 2.1.3 da pokažemo neprekidnost funkcije $d_h\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}$ s obzirom na $\boldsymbol{h}$. Iz toga slijedi da je $\tilde{J}$ Fréchet diferencijabilna i klase C^1. Napokon, nakon što smo odredili $d_h\boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}$, koristeći (2.14) dodatno pojednostavljujemo račun za (2.13):

$$\begin{aligned}
d_h\tilde{J}(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g} &= \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{f}^i\cdot d_h\boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}\,ds = l_S(d_h\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}) \\
&= k_S(\boldsymbol{h})(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), d_h\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}) + b_S(\boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}), d_h\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}) = k_S(\boldsymbol{h})(d_h\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})\boldsymbol{g}, \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})) \\
&= k_S(\boldsymbol{h}_g)(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}), \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h})) = -\sum_{i=1}^N 4(h^i)^3g^i\int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i\tilde{\boldsymbol{H}}^i\left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s\boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h})\cdot\partial_s\boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h})\,ds
\end{aligned}$$

Iz prethodne jednadžbe vidimo da se smanjenje vrijednosti funkcije cilja $\tilde{J}$ u zadaći (2.4) svodi na traženje vektora $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^N$ koji zadovoljava:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} 4(h^i)^3 g^i \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h}) \cdot \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(\boldsymbol{h})\, ds \leq 0, \\ \text{gdje } \boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}) \text{ rješava zadaću (2.1) za dani } \boldsymbol{h}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Budući da je forma $\int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(h) \cdot \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(h)\, ds$ pozitivno definitna, zaključujemo da svaki vektor $\boldsymbol{g} = (g^1, \ldots, g^N)$, koji se sastoji od nenegativnih komponenti, smanjuje vrijednost funkcionala $\tilde{J}$. Ipak, metoda najbržeg silaska dobiva se za izbor:

$$g^i = (h^i)^3 \int_{s_{i-1}}^{s_i} \boldsymbol{Q}^i \tilde{\boldsymbol{H}}^i \left(\boldsymbol{Q}^i\right)^T \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(h) \cdot \partial_s \boldsymbol{\omega}^i(h)\, ds, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.16}$$

Konačno, moramo uzeti u obzir uvjete za minimalnu i maksimalnu debljinu štapića te ukupan volumen zakrivljenog štapa. To činimo tako da konstruiramo projektor P_W na skup ograničenja W i primijenimo iterativni postupak (do konvergencije):

$$\boldsymbol{h}^{(k+1)} = P_W(\boldsymbol{h}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{g}),\ k > 0, \tag{2.17}$$

gdje je $\alpha > 0$ veličina koraka gradijentne metode, kojeg određujemo Armijo metodom, vidi [2]. Sada predstavljamo algoritam za optimizaciju debljine zakrivljenog štapa:

INICIJALIZACIJA

1. Postavi početnu vrijednost $\boldsymbol{h}^{(0)}$
2. Odredi rješenje $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}^{(0)}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}^{(0)}))$ zadaće (2.1)
3. Izračunaj vrijednost funkcionala $\tilde{J}(\boldsymbol{h}^{(0)})$ danog izrazom (2.5)

ITERACIJE

1. Izračunaj $\boldsymbol{g}$ prema formuli (2.16)
2. Ažuriraj $\boldsymbol{h}^{(k+1)} = \boldsymbol{h}^{(k)} + \alpha \boldsymbol{g}$ za odgovarajući parametar α
3. Izračunaj projekciju $P_W(\boldsymbol{h}^{(k+1)})$ na skup ograničenja W definiran s (2.3)
4. Odredi rješenje $(\boldsymbol{y}_S(\boldsymbol{h}^{(k+1)}), \boldsymbol{p}_S(\boldsymbol{h}^{(k+1)}))$ zadaće (2.1)
5. Izračunaj vrijednost funkcionala $\tilde{J}(\boldsymbol{h}^{(k+1)})$ danog izrazom (2.5)

Poglavlje 3

Numerička implementacija

3.1 Metoda konačnih elemenata

Elementarna matrica za ravni štapić

Kako stacionarni problem zakrivljenog štapa nije moguće riješiti egzaktno, jedan od načina aproksimacije modela predstavlja metoda konačnih elemenata, koju primijenjujemo na mješovitu slabu (varijacijsku) formulaciju. Osnovna ideja je prostor rješenja naše zadaće aproksimirati nekim konačnodimenzionalnim potprostorom (kojeg unaprijed odaberemo) te numeričko računanje svesti na rješavanje matričnog sustava jednadžbi. Ovdje opisujemo određeni postupak, koji se može pronaći u [4].

Za početak izvodimo račun elementarne matrice (zadanu za problem jednog štapića) u metodi konačnih elemenata. Promatramo mješovitu slabu zadaću (1.10) za i-ti ravni štapić, definiranu na segmentu $[s_{i-1}, s_i]$ i tražimo aproksimaciju njenog rješenja $(\boldsymbol{y}^i, \boldsymbol{p}^i) \in V_i \times Q_i$. Radi lakšeg računanja, od sada pa nadalje izostavljamo indeks štapića. Matrični sustav jednadžbi stoga izvodimo za proizvoljan ravan štap duljine ℓ (bez smanjenja općenitosti, parametrizaciju centralne linije štapa možemo definirati na segmentu $[0, \ell]$). Neka je

$$H := V \times Q = H^1(0, \ell; \mathbb{R}^6) \times L^2(0, \ell; \mathbb{R}^3)$$

zadani prostor rješenja mješovite zadaće za stacionarni problem jednog štapa, kojeg želimo aproksimirati konačnodimenzionalnim potprostorom

$$\hat{H} := \hat{V} \times \hat{Q} = \mathbb{P}_m(0, \ell; \mathbb{R})^6 \times \mathbb{P}_n(0, \ell; \mathbb{R})^3,$$

gdje su $\mathbb{P}_m(0, \ell; \mathbb{R})$ i $\mathbb{P}_n(0, \ell; \mathbb{R})$ prostori polinoma stupnja manjeg ili jednakog $m \in \mathbb{N}$, odnosno $n \in \mathbb{N}$, definirani na segmentu $[0, \ell]$. Ako su $\{\phi_1, \ldots, \phi_{m+1}\}$ i $\{\psi_1, \ldots, \psi_{n+1}\}$ redom baze za $\mathbb{P}_m(0, \ell; \mathbb{R})$ i $\mathbb{P}_n(0, \ell; \mathbb{R})$, onda bazu za $\hat{H}$ možemo zadati elementima:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{(i-1)\cdot 6+1} &= (\phi_i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \varphi_{(m+1)\cdot 6+(j-1)\cdot 3+1} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, \psi_i, 0, 0),\\
\varphi_{(i-1)\cdot 6+2} &= (0, \phi_i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \varphi_{(m+1)\cdot 6+(j-1)\cdot 3+2} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \psi_i, 0),\\
\varphi_{(i-1)\cdot 6+3} &= (0, 0, \phi_i, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \varphi_{(m+1)\cdot 6+(j-1)\cdot 3+3} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \psi_i),\\
\varphi_{(i-1)\cdot 6+4} &= (0, 0, 0, \phi_i, 0, 0, 0, 0, 0), & &\\
\varphi_{(i-1)\cdot 6+5} &= (0, 0, 0, 0, \phi_i, 0, 0, 0, 0), & &\\
\varphi_{(i-1)\cdot 6+6} &= (0, 0, 0, 0, 0, \phi_i, 0, 0, 0), & &
\end{aligned}
$$

za sve indekse $i = 1, \ldots, m+1$ i $j = 1, \ldots, n+1$. Označimo sa $P_1 : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^6$ projektor na prostor $\hat{V}$, a sa $P_2 : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^3$ projektor na prostor $\hat{Q}$. Pomoću njih, nepoznate funkcije prikazujemo u (novoj) bazi prostora $\hat{H}$:

$$
\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{6} x_{(i-1)\cdot 6+j} \cdot P_1 \phi_{(i-1)\cdot 6+j}, \quad \boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{3} x_{(m+1)\cdot 6+(i-1)\cdot 3+j} \cdot P_2 \phi_{(m+1)\cdot 6+(i-1)\cdot 3+j}. \tag{3.1}
$$

Mješovita zadaća za metodu konačnih elemenata, dana u terminima novih prostora glasi: nađi $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) \in \hat{H}$ takav da vrijedi

$$
\begin{aligned}
&k(\boldsymbol{y}, \tilde{\boldsymbol{y}}) + b(\boldsymbol{p}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = l(\tilde{\boldsymbol{y}}), \quad \forall \tilde{\boldsymbol{y}} \in \hat{V},\\
&b(\tilde{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{y}) = 0, \quad \forall \tilde{\boldsymbol{p}} \in \hat{Q}.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

gdje su forme $k : \hat{V} \times \hat{V} \to \mathbb{R}$, $b : \hat{Q} \times \hat{V} \to \mathbb{R}$ i $l : \hat{V} \to \mathbb{R}$ definirane na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
k(\boldsymbol{y}, \tilde{\boldsymbol{y}}) &= \int_0^\ell \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}^T \partial_s \boldsymbol{\omega} \cdot \partial_s \tilde{\boldsymbol{\omega}}\, ds,\\
b(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{y}) &= \int_0^\ell \boldsymbol{p} \cdot (\partial_s \boldsymbol{u} + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\omega})\, ds,\\
l(\boldsymbol{y}) &= \int_0^\ell \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\, ds.
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem izraza (3.1) u jednadžbe (3.2) imamo:

$$
\begin{aligned}
&k\left(\sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{6} x_{(i-1)\cdot 6+j} \cdot P_1 \phi_{(i-1)\cdot 6+j}, P_1 \phi_k\right)\\
&\quad + b\left(\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{3} x_{(m+1)\cdot 6+(i-1)\cdot 3+j} \cdot P_2 \phi_{(m+1)\cdot 6+(i-1)\cdot 3+j}, P_1 \phi_k\right) = l(P_1 \phi_k), \quad k = 1, \ldots, (m+1)\cdot 6,\\
&b\left(P_2 \phi_k, \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{6} x_{(i-1)\cdot 6+j} \cdot P_1 \phi_{(i-1)\cdot 6+j}\right) = 0, \quad k = (m+1)\cdot 6 + 1, \ldots, (m+1)\cdot 6 + (n+1)\cdot 3.
\end{aligned}
$$

Ako još iskoristimo bilinearnost formi k i b dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{6} x_{(i-1)\cdot 6+j}\cdot k(P_1\phi_{(i-1)\cdot 6+j}, P_1\phi_k)$$
$$+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{3} x_{(m+1)\cdot 6+(i-1)\cdot 3+j}\cdot b(P_2\phi_{(m+1)\cdot 6+(i-1)\cdot 3+j}, P_1\phi_k) = l(P_1\phi_k),\quad k=1,\dots,(m+1)\cdot 6,$$
$$\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{6} x_{(i-1)\cdot 6+j}\cdot b(P_2\phi_k, P_1\phi_{(i-1)\cdot 6+j}) = 0,\quad k=(m+1)\cdot 6+1,\dots,(m+1)\cdot 6+(n+1)\cdot 3.$$

Gornje jednadžbe definiraju jedinstveni matrični sustav, u kojem komponente x_i, $i = 1,\dots,$ $(m+1)\cdot 6+(n+1)\cdot 3$ predstavljaju njegove nepoznanice. Koeficijenti matrice dane su vrijednostima bilinearnih formi k i b, dok je desna strana zadana funkcionalom l (iz prve jednadžbe) i nulama (iz druge). Usput je važno primijetiti da forma k ovisi samo o vektoru infinitezimalne rotacije $\boldsymbol{\omega}$, koji je određen preko druge tri komponente vektora $\boldsymbol{y}$.

Za konkretan račun koristimo polinome drugog stupnja za prostor $\hat{V}$ i prvog stupnja za prostor $\hat{Q}$. Neka je baza prostora $\mathbb{P}_2(0,\ell;\mathbb{R})$ određena rubnim točkama i polovištem:

$$\begin{aligned}
\phi_1(s) &= \frac{2}{\ell^2}\cdot(s-\frac{\ell}{2})\cdot(s-\ell) = \frac{2}{\ell^2}s^2-\frac{3}{\ell}s+1,\\
\phi_2(s) &= \frac{2}{\ell^2}\cdot s\cdot(s-\frac{\ell}{2}) = \frac{2}{\ell^2}s^2-\frac{1}{\ell}s,\\
\phi_3(s) &= -\frac{4}{\ell^2}\cdot s\cdot(s-\ell) = -\frac{4}{\ell^2}s^2+\frac{4}{\ell}s,
\end{aligned}\tag{3.3}$$

a baza prostora $\mathbb{P}_1(0,\ell;\mathbb{R})$ samo rubnim točkama štapa:

$$\begin{aligned}
\psi_1(s) &= -\frac{1}{\ell}(s-\ell),\\
\psi_2(s) &= \frac{1}{\ell}s.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

U tom slučaju, elementarna matrica i elementarna desna strana dane su sa

$$M=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{11} & B^{12}\\
0 & A^{11} & 0 & A^{12} & 0 & A^{13} & B^{21} & B^{22}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{31} & B^{32}\\
0 & A^{21} & 0 & A^{22} & 0 & A^{23} & B^{41} & B^{42}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{51} & B^{52}\\
0 & A^{31} & 0 & A^{32} & 0 & A^{33} & B^{61} & B^{62}\\
(B^{11})^T & (B^{21})^T & (B^{31})^T & (B^{41})^T & (B^{51})^T & (B^{61})^T & 0 & 0\\
(B^{12})^T & (B^{22})^T & (B^{32})^T & (B^{42})^T & (B^{52})^T & (B^{62})^T & 0 & 0
\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} D^1\\ 0\\ D^2\\ 0\\ D^3\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\tag{3.5}$$

čiji su elementi definirani kao matrice i vektori dimenzije 3:

$$
\begin{aligned}
&A_{i,j}^{\alpha\beta} := k((0,\phi_\alpha e_j),(0,\phi_\beta e_i)), \quad \alpha \in \{1,2,3\}, \quad \beta \in \{1,2,3\},\\
&B_{i,j}^{2\alpha-1,\beta} := b(\psi_\beta e_j,(\phi_\alpha e_i,0)), \quad \alpha \in \{1,2,3\}, \quad \beta \in \{1,2\},\\
&B_{i,j}^{2\alpha,\beta} := b(\psi_\beta e_j,(0,\phi_\alpha e_i)), \quad \alpha \in \{1,2,3\}, \quad \beta \in \{1,2\},\\
&D_i^{\alpha} := l(\phi_\alpha e_i), \quad \alpha \in \{1,2,3\}.
\end{aligned}
$$

Prvi blok redak elementarne matrice M odgovara test funkciji za pomak $\boldsymbol{u}$, a drugi test funkciji za infinitezimalnu rotaciju $\boldsymbol{\omega}$, koji su pridruženi lijevom rubu štapa. Treći i četvrti blok redak odgovaraju test funkcijama $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{\omega}$, pridružene desnom rubu, dok (analogno) sljedeća dva blok retka test funkcijama pridruženim polovištu štapa. Zadnja dva blok retka odgovaraju test funkcijama $\boldsymbol{p}$ za redom lijevi i desni rub. Identičnu strukturu posjeduje i vektor desne strane F.

Budući da smo sustav definirali za ravni štap, pripadne matrice $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{H}$ su konstantne na segmentu $[0,\ell]$. Označimo sa $\boldsymbol{A_t}$ matricu, za koju vrijedi $\boldsymbol{A_t}x = \boldsymbol{t} \times x$. Gornji se izrazi tada mogu svesti na egzaktno integriranje polinoma:

$$
\begin{aligned}
A_{i,j}^{\alpha\beta} &= k((0,\phi_\alpha e_j),(0,\phi_\beta e_i)) = \int_0^\ell \boldsymbol{QHQ}^T \partial_s(\phi_\alpha e_j)\cdot\partial_s(\phi_\beta e_i)\,ds\\
&= \int_0^\ell \boldsymbol{QHQ}^T(\phi'_\alpha e_j)\cdot(\phi'_\beta e_i)\,ds = \int_0^\ell \phi'_\alpha\phi'_\beta\,(\boldsymbol{QHQ}^T e_j\cdot e_i)\,ds\\
&= (\boldsymbol{QHQ}^T)_{i,j}\int_0^\ell \phi'_\alpha(s)\phi'_\beta(s)\,ds,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{i,j}^{2\alpha-1,\beta} &= b(\psi_\beta e_j,(\phi_{2\alpha-1}e_i,0)) = \int_0^\ell \psi_\beta e_j\cdot(\partial_s\phi_{2\alpha-1}e_j + \boldsymbol{t}\times 0)\\
&= \int_0^\ell \psi_\beta e_j\cdot(\phi'_{2\alpha-1}e_j + \boldsymbol{A_t}0)\,ds = \int_0^\ell \psi_\beta\phi'_{2\alpha-1}\,(e_j\cdot e_i)\,ds\\
&= \delta_{j,i}\int_0^\ell \psi_\beta(s)\,\phi'_{2\alpha-1}(s)\,ds,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{i,j}^{2\alpha,\beta} &= b(\psi_\beta e_j,(0,\phi_{2\alpha}e_i)) = \int_0^\ell \psi_\beta e_j\cdot(0 + \boldsymbol{t}\times(\phi'_{2\alpha}e_j))\,ds\\
&= \int_0^\ell \psi_\beta e_j\cdot(0 + \boldsymbol{A_t}(\phi'_{2\alpha}e_j))\,ds = \int_0^\ell \psi_\beta\phi'_{2\alpha}\,(e_j\cdot\boldsymbol{A_t}e_i)\,ds\\
&= (\boldsymbol{A_t})_{j,i}\int_0^\ell \psi_\beta(s)\,\phi'_{2\alpha}(s)\,ds,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$D_i^\alpha = l(\phi_\alpha e_i) = \int_0^\ell f \cdot \phi_\alpha e_i \, ds = f_i \int_0^\ell \phi_\alpha(s) \, ds. \tag{3.9}$$

Matrica sustava za zakrivljeni štap

Nakon što smo odredili elementarnu matricu za pojedini ravni štapić, sada sastavljamo matricu sustava za cijeli zakrivljeni štap. Ideja je objediniti elementarne matrice u jednu veliku matricu, tako da dobijemo matrični sustav koji rješava (stacionarni) problem za zakrivljeni štap. Za početak se prisjetimo da su ravni štapići međusobno povezani u rubnim točkama. Zbog toga, vektori pomaka $\boldsymbol{u}$ i infinitezimalne rotacije $\boldsymbol{\omega}$ u rubnim točkama ovise o oba ravna štapića, koja se spajaju u toj točki. Definiramo matricu sustava M_S, koja je blok matrica (sastavljena od 3×3 matrica) ukupne dimenzije $6 \cdot (N + 1) + 6 \cdot N + 6 \cdot N$, čije elementi, koji odgovaraju izrazima (3.6), (3.7) i (3.8) za svaki ravni štapić, ubacujemo na odgovarajuće mjesto. Analogno određujemo i vektor desne strane F_S. Usput primijetimo da ako se matrica $A^{\alpha\beta}$ nalazi u n-tom blok retku i m-tom blok stupcu, tada se matrica $A^{\beta\alpha}$ nalazi u m-tom blok retku i n-tom blok stupcu. Slično, ako se matrica $B^{\alpha\beta}$ nalazi u n-tom blok retku i m-tom blok stupcu, tada se matrica $(B^{\beta\alpha})^T$ nalazi u m-tom blok retku i n-tom blok stupcu. Sada navodimo pozicije elemenata, definirane za i-ti ravni štapić, $i = 1, \ldots, N$ (zbog prethodno objašnjene simetrije, dajemo samo retke u kojima se nalaze):

- B^{11}, B^{12}, D^1 u retcima $6 \cdot (i - 1) + \{1, 2, 3\}$
- A^{11}, A^{12}, A^{13}, B^{21}, B^{22} u retcima $6 \cdot (i - 1) + \{4, 5, 6\}$
- B^{31}, B^{32}, D^2 u retcima $6 \cdot i + \{1, 2, 3\}$
- A^{22}, A^{21}, A^{23}, B^{41}, B^{42} u retcima $6 \cdot i + \{4, 5, 6\}$
- B^{51}, B^{52}, D^3 u retcima $6(N + 1) + 6 \cdot (i - 1) + \{1, 2, 3\}$
- A^{31}, A^{32}, A^{33}, B^{61}, B^{62} u retcima $6(N + 1) + 6 \cdot (i - 1) + \{4, 5, 6\}$
- $(B^{11})^T$, $(B^{21})^T$, $(B^{31})^T$, $(B^{41})^T$, $(B^{51})^T$, $(B^{61})^T$ u retcima $6(N+1)+6N+6\cdot(i-1)+\{1, 2, 3\}$
- $(B^{12})^T$, $(B^{22})^T$, $(B^{32})^T$, $(B^{42})^T$, $(B^{52})^T$, $(B^{62})^T$ u retcima $6(N+1)+6N+6\cdot(i-1)+\{4, 5, 6\}$

Možemo zaključiti da prvih $6(N + 1)$ redaka odgovaraju funkcijama $\boldsymbol{y}$, koje su pridružene dodirnim točkama ravnih štapića, a sljedećih $6N$ redaka funkcijama $\boldsymbol{y}$, koje su pridružene njihovim polovištima. Posljednjih $6N$ redaka odgovaraju test funkcijama $\boldsymbol{p}$, pridružene ravnim štapićima. Konačno, rješavanjem matričnog sustava $M_S X = F_S$, dobivamo traženu aproksimaciju rješenja.

3.2 Rezultati testiranja

Tehničke specifikacije

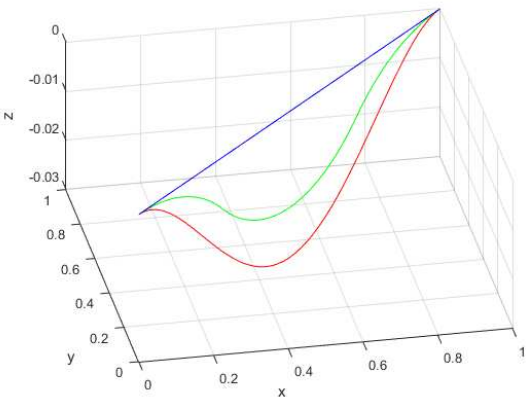
Sada kada smo definirali metodu konačnih elemenata za zakrivljeni štap, prikazujemo neke osnovne primjere (njegovih) deformacija, pod utjecajem vanjske sile. Određujemo pomake centralnih linija u točkama diskretizacije štapa te računamo vrijednosti optimalnih debljina (svakog) štapića u skladu s minimizacijskom zadaćom. Za prvi primjer uzimamo štap čija su oba kraja ukliještena, dok za drugi primjer uzimamo štap s jednim ukliještenim i jednim slobodnim krajem. Budući da iterativni algoritam teži (samo) prema lokalnim ekstremima, nemamo rezultat jedinstvenosti rješenja.

U našim testovima, koristimo aproksimaciju zakrivljenog štapa sa ukupno $N = 50$ ravnih štapića. Uzimamo da je svaki od njih izrađen od istog materijala - čelika, za kojeg Youngov modul elastičnosti iznosi $E = 2.1 \cdot 10^{11}$, a Laméova konstanta $\mu = 8.3 \cdot 10^{10}$. Zbog jednostavnosti, neka je vanjska sila $\boldsymbol{f}$ jednaka na svakom štapiću i ima konstantan iznos. Algoritam započinjemo tako da zadamo početnu distribuciju debljina, konkretno uniformnu sa $h^i = 0.001$, za svaki $i = 1, \ldots, N$. Dodatno, stavimo da je $h_{\min} = 0.5 \cdot h^i$ i $h_{\max} = 1.5h^i$ (debljine mogu odstupati za najviše 50%) te pretpostavimo da je volumen nepromijenjiv. Iteracije izvršavamo dok relativna greška funkcije cilja J ne padne ispod zadane granice ili dok ne dođemo do maksimalnog broja koraka, u našem slučaju 200. Na sljedećim slikama, plavom bojom je prikazana nedeformirana, a crvenom i zelenom deformirana centralna linija štapa, redom za uniformnu i optimalnu debljinu štapića. U donjoj tablici navedene su početna i konačna vrijednost funkcije cilja J (izračunate u prvoj i posljednjoj iteraciji algoritma) za zadanu parametrizaciju štapa Φ i vanjsku silu $\boldsymbol{f}$.

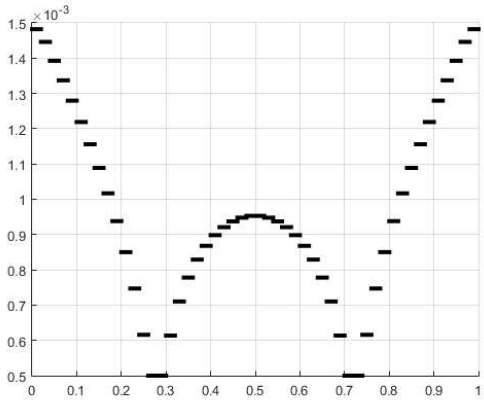
Primjer	Početna vrijednost J_0	Konačna vrijednost J_k	Ukupan broj iteracija
Slika 3.1	$1.10 \cdot 10^{-3}$	$6.51 \cdot 10^{-4}$	200
Slika 3.2	$2.20 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$	200
Slika 3.3	$1.53 \cdot 10^{-2}$	$9.00 \cdot 10^{-3}$	16
Slika 3.4	$5.60 \cdot 10^{-2}$	$3.30 \cdot 10^{-3}$	17
Slika 3.5	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$6.65 \cdot 10^{-4}$	53
Slika 3.6	$8.08 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-4}$	109
Slika 3.7	$2.57 \cdot 10^{-4}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	200
Slika 3.8	$1.30 \cdot 10^{-2}$	$4.37 \cdot 10^{-4}$	200

Tablica 3.1: Vrijednosti funkcije cilja iz algoritma

Primjer 1: ukliještena oba kraja štapa

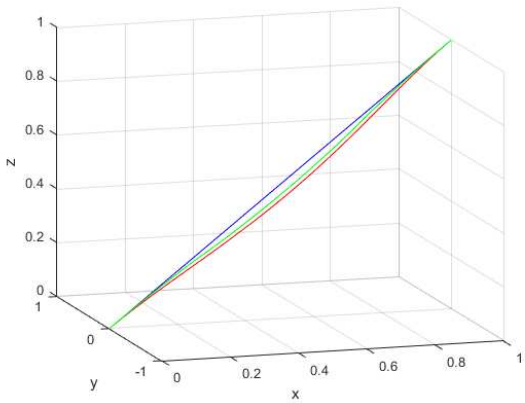


(a) Prikaz nedeformiranog i deformiranog štapa

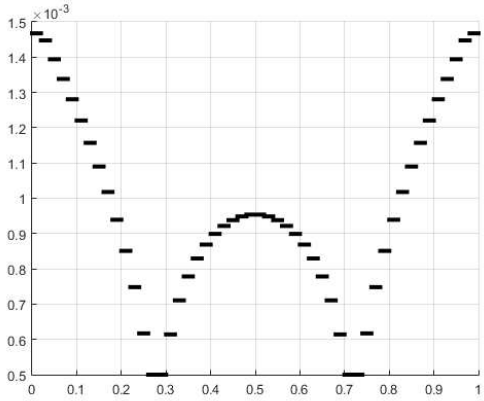


(b) Prikaz optimalnih debljina štapića

Slika 3.1: Parametrizacija $\Phi(s) = (s, s, 0),\ s \in [0, 1]$, sila $f = (0, 0, -0.05)$

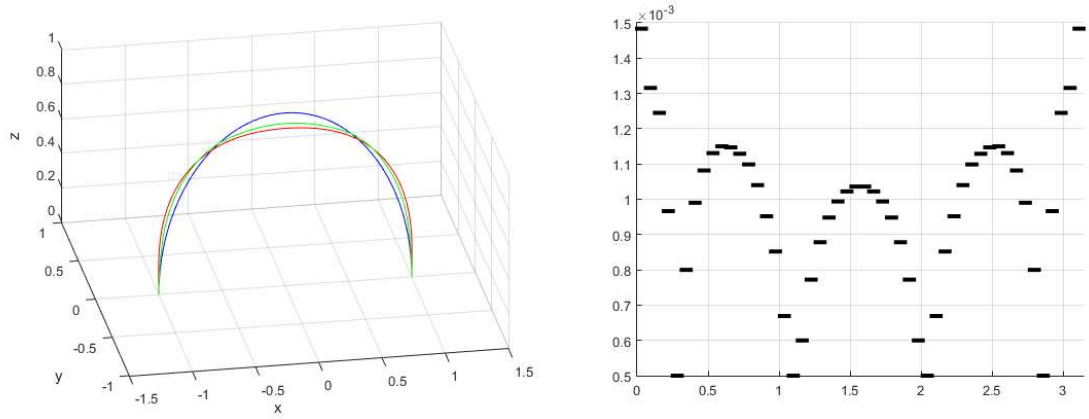


(a) Prikaz nedeformiranog i deformiranog štapa



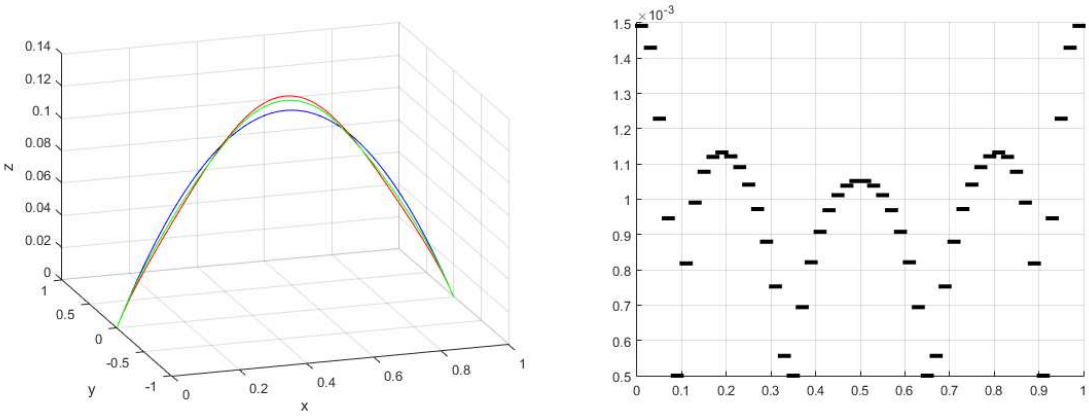
(b) Prikaz optimalnih debljina štapića

Slika 3.2: Parametrizacija $\Phi(s) = (s, 0, s),\ s \in [0, 1]$, sila $f = (0, 0, -0.1)$



(a) Prikaz nedeformiranog i deformiranog štapa (b) Prikaz optimalnih debljina štapića

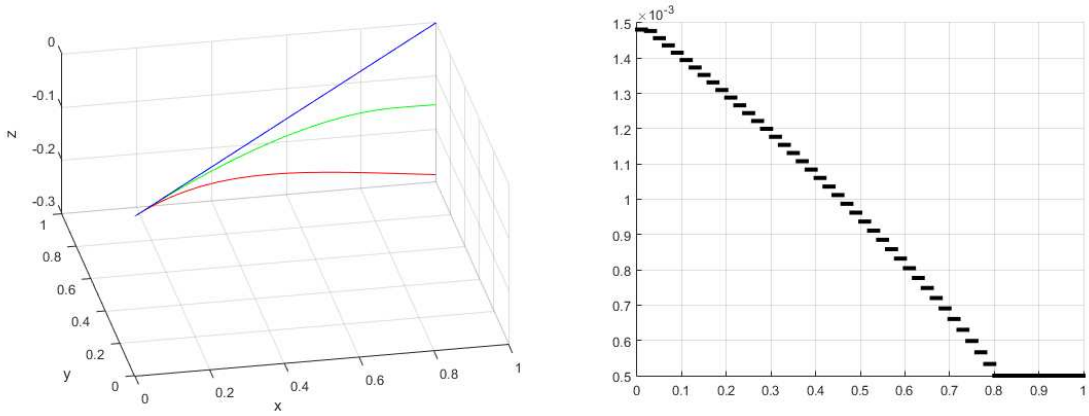
Slika 3.3: Parametrizacija $\Phi(s) = (-cos(s), 0, sin(s)),\ s \in [0, \pi]$, sila $f = (0, 0, -0.5)$



(a) Prikaz nedeformiranog i deformiranog štapa (b) Prikaz optimalnih debljina štapića

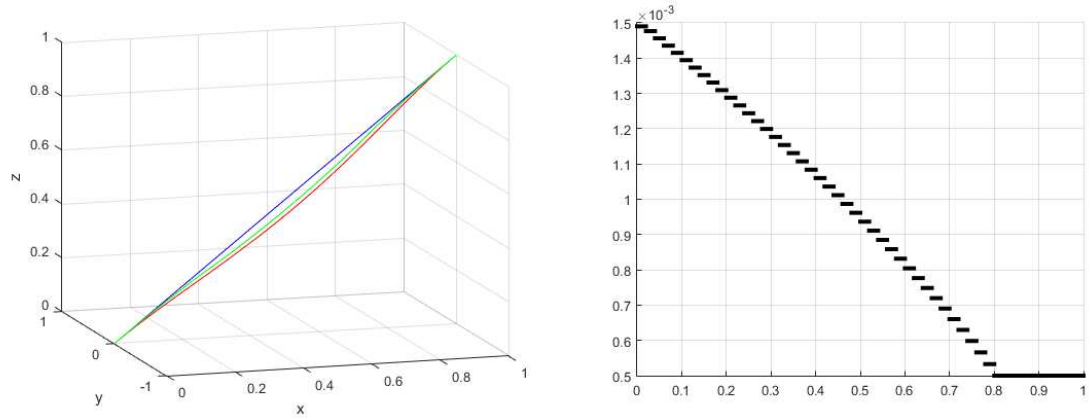
Slika 3.4: Parametrizacija $\Phi(s) = (s, 0, 0.5s(1 - s))$, sila $f = (0, 0, -0.5)$

Primjer 2: jedan kraj štapa ukliješten, drugi kraj štapa slobodan



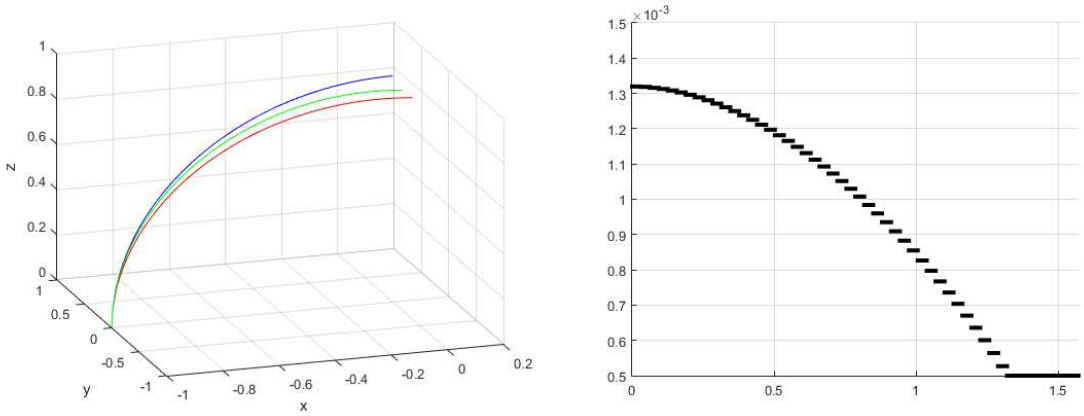
(a) Prikaz nedeformiranog i deformiranog štapa (b) Prikaz optimalnih debljina štapića

Slika 3.5: Parametrizacija $\Phi(s) = (s, s, 0)$, sila $f = (0, 0, -0.01)$



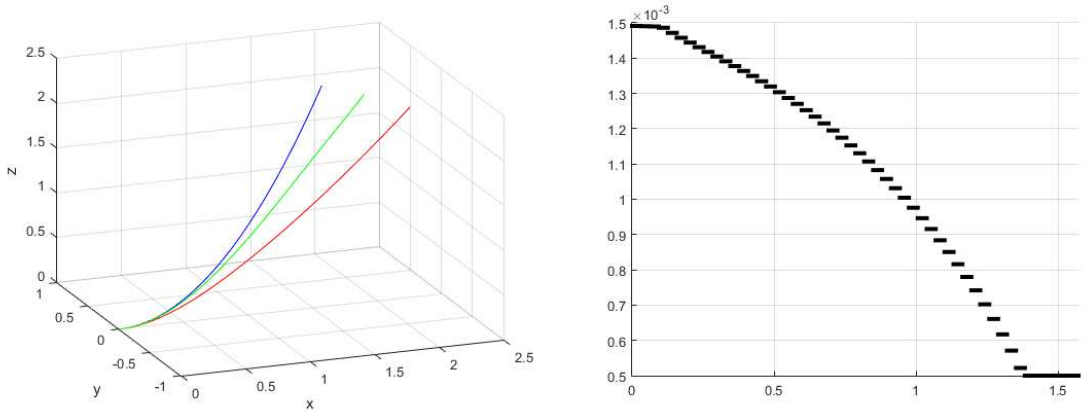
(a) Prikaz nedeformiranog i deformiranog štapa (b) Prikaz optimalnih debljina štapića

Slika 3.6: Parametrizacija $\Phi(s) = (s, 0, s)$, sila $f = (0, 0, -0.01)$



(a) Prikaz nedeformiranog i deformiranog štapa (b) Prikaz optimalnih debljina štapića

Slika 3.7: Parametrizacija $\Phi(s) = (-cos(s), 0, sin(s))$, sila $f = (0, 0, -0.005)$



(a) Prikaz nedeformiranog i deformiranog štapa (b) Prikaz optimalnih debljina štapića

Slika 3.8: Parametrizacija $\Phi(s) = (s, 0, s^2)$, sila $f = (0, 0, -0.0025)$

Dodatak A

Teorija elastičnosti

A.1 Sustav jednadžbi zakrivljenog štapa

U ovom dodatku izvodimo jednodimenzionalni linearizirani *Antman-Cosseratov* model elastičnosti, definiran za ravnotežni problem zakrivljenog štapa. Pritom se ograničavamo na promatranje (relativno) malih deformacija, koje nastaju pri dovoljno slabom vanjskom djelovanju. U nedeformiranom stanju zakrivljeni štap geometrijski opisujemo (prirodnom) parametrizacijom centralne linije $\boldsymbol{\varphi} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$ te familijom poprečnih presjeka $D(x)$, dobivenih presjekom štapa i ravnine okomite na centralnu liniju. Ako su poprečni presjeci pravilnog oblika, centralnu liniju možemo izabrati tako da prolazi kroz sva njihova težišta. Za razvoj matematičkog modela možemo iskoristiti sljedeće fizikalne pretpostavke:

1. Svaki poprečni presjek pri pomaku ostaje nedeformiran, odnosno pomiče se kruto.
2. Svaki poprečni presjek poslije pomaka ostaje okomit na pomaknutu centralnu liniju.
3. Centralna linija pri deformaciji ostaje neproduljena.

Označimo sa $\boldsymbol{p}$ i $\boldsymbol{q}$ redom kontaktnu silu i kontaktni moment na $D(x)$, kojim desni komad štapa djeluje na lijevi. Neka je $\boldsymbol{f}$ linijska gustoća vanjske sile, a $\boldsymbol{m}$ vanjskog momenta. Definiramo nepoznate funkcije $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, koje opisuju pomak centralne linije i infinitezimalnu rotaciju poprečnog presjeka pri deformaciji. Položaj deformiranog štapa potpuno je određen pomakom njegove centralne linije. Kako je $\boldsymbol{t}(x) := \boldsymbol{\varphi}(x)'$ jedinična tangenta, postoje neprekidne vektorske funkcije $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{b}$ takve da je skup $\{\boldsymbol{t}(x), \boldsymbol{n}(x), \boldsymbol{b}(x)\}$ ortonormirana baza. Vektori $\boldsymbol{n}(x)$ i $\boldsymbol{b}(x)$ razapinju ravninu okomitu na centralnu liniju (u kojoj se nalazi $D(x)$), i zovu se normala i binormala. Zakrivljeni štap u nedeformiranom položaju sada možemo parametrizirati funkcijom:

$$\boldsymbol{\Phi} : [0, \ell] \times S \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\Phi}(x, y, z) = \boldsymbol{\varphi}(x) + y\boldsymbol{n}(x) + z\boldsymbol{b}(x).$$

Dodatno, neka je $\boldsymbol{U} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija pomaka svake točke zakrivljenog štapa. Tada deformirani položaj 3D tijela možemo parametrizirati zbrojem funkcija $\boldsymbol{\Phi}(x, y, z) + \boldsymbol{U}(x, y, z)$. Prema principu ravnoteže, ukupna sila i ukupni moment na svaki komad tijela nužno mora biti nula:

$$\boldsymbol{p}(x) - \boldsymbol{p}(0) + \int_0^x \boldsymbol{f}(\xi)\, d\xi = 0,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}(x) + (\boldsymbol{\varphi}(x) + \boldsymbol{u}(x)) \times \boldsymbol{p}(x) - \boldsymbol{q}(0) - (\boldsymbol{\varphi}(0) + \boldsymbol{u}(0)) \times \boldsymbol{p}(0)\\ + \int_0^x (\boldsymbol{m}(\xi) + (\boldsymbol{\varphi}(\xi) + \boldsymbol{u}(\xi)) \times \boldsymbol{f}(\xi))\, d\xi = 0.\end{aligned}$$

Deriviranjem gornjih jednadžbi te uvrštavanjem prve u drugu dobivamo diferencijalni oblik:

$$\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{f} = 0, \tag{A.1}$$

$$\boldsymbol{q}' + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{m} = 0. \tag{A.2}$$

Budući da želimo dobiti linearni model, u (A.2) smo zanemarili nelinearni član $\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{p}$. Prema prvoj pretpostavci modela, poprečni presjeci štapa mogu jedino translatirati i rotirati pri deformaciji, pa je

$$\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{U} = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{u} + R(y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b}).$$

R ovdje predstavlja matricu rotacije, koja se može zapisati u eksponencijalnom obliku

$$R = e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ...$$

gdje je A antisimetrična matrica. Linearnom aproksimacijom gornjeg izraza dobivamo:

$$\boldsymbol{U} - \boldsymbol{u} = (R - I)(y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b}) \approx A(y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\omega} \times (y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b}),$$

jer za svaku antisimetričnu matricu A postoji jedinstveni vektor $\boldsymbol{\omega}$ takav da $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$. Drugu pretpostavku matematički raspisujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}0 &= (\boldsymbol{t} + \boldsymbol{u}') \cdot (\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{U} - (\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{u}))\\ &= (\boldsymbol{t} + \boldsymbol{u}') \cdot (y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\omega} \times (y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b}))\\ &= y\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} + z\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b}) + y\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{n} + z\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{\omega} \times (y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b})\\ &\approx \boldsymbol{\omega} \cdot (y\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{t} + y\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{b}\\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot (-y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{n}) + y\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{n} + z\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{b},\end{aligned}$$

za sve $(y, z) \in S$. Pritom smo koristili svojstva skalarnog i vektorskog produkta te činjenicu da su vektori $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{b}$ međusobno okomiti. Zadnja jednakost implicira uvjete nesmičljivosti:

$$-\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{b} = 0.$$

Treća pretpostavka kaže da se štap pri deformaciji ne rasteže, što znači da imamo jedino translaciju u tangencijalnom smjeru:

$$\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{t} = 0.$$

Ovo svojstvo nazivamo uvjet neproduljivosti centralne linije. Posljednje tri jednadžbe, koje opisuju materijalnu restrikciju štapa, možemo zajedno napisati na sljedeći način:

$$\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\omega} = 0. \tag{A.3}$$

Za potpuni opis modela zakrivljenog štapa, potrebno je još definirati zakon ponašanja (koji slijedi iz 3D teorije elastičnosti):

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\omega}'.$$

Matrica $\boldsymbol{Q}$ opisuje lokalnu geometriju štapa, a matrica $\boldsymbol{H}$ elastična svojstva materijala, te svojstva poprečnih presjeka $D(x)$:

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{b}], \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \mu K & 0 & 0 \\ 0 & EI_{33} & EI_{23} \\ 0 & EI_{23} & EI_{22} \end{bmatrix}.$$

$E > 0$ nazivamo Youngov modul elastičnosti, a $\mu > 0$ modul smicanja. Momenti inercije I_2, I_3 i I_{23} te torzijska krutost K definirani su formulama:

$$I_2(x) = \int_{D(x)} y^2\,dy\,dz, \quad I_3(x) = \int_{D(x)} z^2\,dy\,dz, \quad I_{23}(x) = \int_{D(x)} yz\,dy\,dz,$$

$$K(x) = \int_{D(x)} ((\partial_y r - z)^2 + (\partial_z r + y)^2)\,dy\,dz,$$

gdje je r jedinstveno rješenje Neumannove zadaće: naći $r \in H^1(D(x))$, $\int_{D(x)} r = 0$ tako da

$$\int_{D(x)} ((\partial_y r - z)\partial_y v + (\partial_z r + y)\partial_z v)\,dy\,dz = 0, \quad v \in H^1(D(x)).$$

Kako je $\boldsymbol{Q}$ ortogonalna matrica, zakon ponašanja možemo još zapisati i sa

$$\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{q} = 0. \tag{A.4}$$

Model zakrivljenog štapa određen je četirima diferencijalnim jednadžbama prvog reda (A.1), (A.2), (A.3) i (A.4). Za dobro postavljenu zadaću, potrebno je još zadati određene rubne uvjete (uvjete na krajevima štapa). Dirichletov ili kinematički uvjet zadaje pomak i rotaciju, a Neumannov ili dinamički uvjet kontaktnu silu i moment. Ako vrijednost rubnog uvjeta iznosi nula, kažemo da je on homogen, a u suprotnom je nehomogen (napomenimo da se svaki nehomogeni rubni uvjet može homogenizirati). Istaknimo najčešće slučajeve:

(a) *uklješten kraj* je učvršćen na progib i rotaciju: $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\omega}(0) = 0$,

(b) *slobodan kraj* je slobodan na progib i rotaciju: $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{p}(0) = 0$,

(c) *šarnirani kraj* je učvršćen na progib i slobodan na rotaciju: $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{q}(0) = 0$,

(d) *užlijebljen kraj* je slobodan na progib i učvršćen rotaciju: $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{\omega}(0) = 0$.

A.2 Postojanje i jedinstvenost rješenja

Promatramo sustav elastičnih jednadžbi zakrivljenog štapa (A.1) - (A.4) na segmentu $[0, \ell]$. Želimo dokazati da postoji jedinstveno rješenje ukoliko je na lijevom kraju zadan (homogeni) Dirichletov rubni uvjet, a na desnom (homogeni) Neumannov rubni uvjet:

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\omega}(0) = 0, \;\; \boldsymbol{p}(\ell) = \boldsymbol{q}(\ell) = 0.$$

Neka su $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H^1(0, \ell)^3$, $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{w}(0) = 0$ funkcije takve da vrijedi uvjet $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{w} = 0$. Ako pomnožimo jednadžbu (A.1) s $\boldsymbol{v}$, a jednadžbu (A.2) s $\boldsymbol{w}$, zatim ih obje integriramo po njihovoj domeni te na kraju zbrojimo dobivamo:

$$\int_0^\ell \boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}' \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w} = 0.$$

Parcijalnom integracijom prvog i trećeg člana pod integralom imamo:

$$-\int_0^\ell \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v})\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} - \int_0^\ell \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{w}' + (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{w})\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{w} + \int_0^\ell \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w} = 0,$$

$$-\int_0^\ell \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{w}) - \int_0^\ell \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{w}' + \int_0^\ell \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \int_0^\ell \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w} = 0,$$

$$\int_0^\ell \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{w}' = \int_0^\ell \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \int_0^\ell \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w},$$

pri čemu smo uvrstili oba rubna uvjeta te primijenili svojstva test funkcija $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$. Ako iskoristimo još zakon ponašanja, dolazimo do sljedeće varijacijske (slabe) zadaće: naći $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}) \in V := \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in H^1(0, \ell)^3 \times H^1(0, \ell)^3 : \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{w}(0) = 0,\ \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{w} = 0\}$ takav da

$$\int_0^\ell \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{w}' = \int_0^\ell \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \int_0^\ell \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w}, \quad \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in V. \tag{A.5}$$

Primijetimo da je norma na prostoru V definirana formulom

$$\|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\|_V^2 = \|\boldsymbol{v}\|_{H^1}^2 + \|\boldsymbol{w}\|_{H^1}^2.$$

Postojanje jedinstvenog rješenja slabe formulacije slijedi primjenom Lax-Milgramove leme.

Teorem A.2.1. (Lax-Milgram) *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *Hilbertov prostor. Neka je* $B : V \times V \to \mathbb{R}$ *neprekidna i koercitivna bilinearna forma, tj. postoje konstante* $\alpha, \beta > 0$ *takve da vrijedi:*

(1) (neprekidnost) $|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \, \|v\|$, $\forall u, v \in V$,

(2) (koercitivnost) $B(v, v) \geq \beta \|v\|^2$, $\forall v \in V$,

te $L : V \to \mathbb{R}$ *neprekidan (ograničen) linearan funkcional. Tada postoji jedinstveni* $u \in V$ *takav da je* $B(u, v) = L(v)$*, za svaki* $v \in V$*. Dodatno, ako je bilinearna forma* B *simetrična, tada je to rješenje ujedno i minimizator funkcionala* $J : V \to \mathbb{R}$, $J(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - L(v)$.

Teorem A.2.2. *Neka su* $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{m} \in L^2(0, \ell; \mathbb{R}^3)$ *i* $\boldsymbol{H}$ *uniformno pozitivno definitna. Tada varijacijska zadaća* (A.5) *ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je V Hilbertov prostor. Dovoljno je dokazati da je V zatvoreni potprostor Hilbertovog prostora $H^1 \times H^1$ (produktni prostor Hilbertovih prostora je i sam Hilbertov). Neka je $(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{\omega}_n)_n \subset V$ niz koji jako konvergira prema $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}) \in H^1 \times H^1$. Tada posebno $\boldsymbol{v}_n \longrightarrow \boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{\omega}_n \longrightarrow \boldsymbol{\omega}$ u H^1-normi pa zbog $\boldsymbol{v}_n(0) = \boldsymbol{\omega}_n(0) = 0, n \in \mathbb{N}$ slijedi $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{\omega}(0) = 0$. Kako je $\boldsymbol{v}_n' + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\omega}_n = 0, n \in \mathbb{N}$ te $\int_0^\ell (\boldsymbol{v}_n' + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{w}_n) \cdot \boldsymbol{\varphi} \longrightarrow \int_0^\ell (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{\varphi}, \forall \boldsymbol{\varphi} \in V$, primjenom osnovne leme varijacijskog računa dobivamo $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\omega} = 0$. Dakle, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}) \in V$. Definiramo sada (simetričnu) bilinearnu formu B i linearni funkcional L na prostoru V:

$$B((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})) = \int_0^\ell \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{w}', \quad L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \int_0^\ell \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w}.$$

Pokažimo da je bilinearna forma B koercitivna i neprekidna.

$$\begin{aligned}
\|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega})\|_V^2 &\leq C_1 \|\boldsymbol{u}'\|_{L_2}^2 + C_2 \|\boldsymbol{\omega}'\|_{L_2}^2 \leq C_1 (\|\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\omega}\|_{L_2} + \|\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\omega}\|_{L_2})^2 + C_2 \|\boldsymbol{\omega}'\|_{L_2}^2 \\
&\leq C_1 \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2 + C_2 \|\boldsymbol{\omega}'\|_{L^2}^2 \leq C_1 (1 + C_2) \|\boldsymbol{\omega}'\|_{L^2}^2 \leq C \|\boldsymbol{Q}\omega'\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{C}{\lambda_{min}} \int_0^\ell \boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\omega}' = \frac{C}{\lambda_{min}} \|B((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}), (v, w))\|
\end{aligned}$$

gdje smo primijenili redom Poincaréovu nejednakost i nejednakost trokuta, invarijantnost norme na ortogonalne matrice te činjenicu da je $\boldsymbol{H}$ uniformno pozitivno definitna.

$$\begin{aligned}
|B((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}), (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}))| &\leq \|\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\omega}'\|_{L^2} \|\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{w}'\|_{L^2} \leq \|\boldsymbol{H}\|_\infty \|\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\omega}'\|_{L^2} \|\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{w}'\|_{L^2} \\
&\leq \|\boldsymbol{H}\|_\infty \|\boldsymbol{\omega}'\|_{L^2} \|\boldsymbol{w}'\|_{L^2} \leq \|\boldsymbol{H}\|_\infty \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1} \|\boldsymbol{w}\|_{H^1} \leq \|\boldsymbol{H}\|_\infty \|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})\|_V \|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\|_V
\end{aligned}$$

Za kraj pokažimo još neprekidnost linearnog funkcionala L.

$$\begin{aligned}
|L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| &\leq \left| \int_0^\ell \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \right| + \left| \int_0^\ell \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{w} \right| \leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^2} \|\boldsymbol{v}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{m}\|_{L^2} \|\boldsymbol{w}\|_{L^2} \\
&\leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^2} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1} + \|\boldsymbol{m}\|_{L^2} \|\boldsymbol{w}\|_{H^1} \leq (\|\boldsymbol{f}\|_{L^2} + \|\boldsymbol{m}\|_{L^2}) \, \|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\|_V.
\end{aligned}$$

□

Bibliografija

[1] Aganović, I. i K. Veselić: *Jednadžbe matematičke fizike*. Školska Knjiga, 1985.

[2] Armijo, L.: *Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives*. Pacific Journal of Mathematics, 16, 1966.

[3] Grubišić, L., J. Iveković, J. Tambača i B. Žugec: *Mixed formulation of the one-dimensional equilibrium model for elastic stents*. Rad HAZU, Matematičke znanosti, 21:219–240, 2017.

[4] Iveković, J.: *Numerička metoda za model lineariziranog stenta*. diplomski rad, PMF-Matematički odsjek, 2015. `https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:401004`.

[5] Tambača, J.: *A model of irregular curved rods, in Proceedings of the Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing*. Kluwer, stranice 289–299, 2003.

[6] Tambača, J.: *Teorija elastičnosti*. skripta, PMF-Matematički odsjek, 2015.

[7] Čanić, S., L. Grubišić, D. Lacmanović, M. Ljulj i J. Tambača: *Optimal design of vascular stents using a network of 1D slender curved rods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 394, 2022.

Sažetak

U ovom radu prezentiramo optimizaciju forme elastičnog zakrivljenog štapa. Najprije uvodimo jednodimenzionalni *Antman-Cosseratov* model, definiran za neproduljive i nesmičljive štapove, koji je zadan sustavom diferencijalnih jednadžbi. Zakrivljeni štap je zatim aproksimiran konačnom unijom ravnih štapića. Uz određene rubne uvjete, izvodimo slabu (varijacijsku) formulaciju našeg problema (prvo za pojedini ravni štapić, a onda i za cijeli zakrivljeni štap). Glavni zadatak je pronaći optimalnu debljinu štapa, za koju je štap najkrući, kada na njega djeluje vanjska sila. Iz mješovite formulacije, definiramo minimizacijsku zadaću koristeći podatljivost kao funkciju cilja. Također pokazujemo da postoji rješenje zadanog problema. Za računanje optimalne debljine prezentiramo iterativni algoritam. Na kraju, definiramo metodu konačnih elemenata za zakrivljeni štap, koju koristimo za numeričko određivanje rješenja.

Summary

In this paper we present the optimization of the form of an elastic curved rod. First, we introduce a one-dimensional *Antman-Cosserat* model, defined for inextensible and unshearable rods, which is given by a system of differential equations. The curved rod is then approximated by a finite union of straight rods. Using certain boundary conditions, we derive a weak (variational) formulation of our problem (firstly for a single straight rod, and then for the entire curved rod). The main goal is to find the thickness of rod for which the rod is the most stiff, when an external force acts on it. From the mixed formulation, we prescribe minimization problem using compliance as a cost function. We also show that there is a solution to the given problem. For calculating the optimal thickness, we present an iterative algorithm. Finally, we define the finite element method for a curved rod, which we use to numerically calculate the solution.

Životopis

Roden sam 17. studenoga 1998. godine u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Josipa Račića, obrazovanje nastavljam u zagrebačkoj V. gimnaziji, gdje maturiram 2017. godine s odličnim uspjehom. Zbog sklonosti prema matematici, iste godine upisujem preddiplomski studij matematike (inženjerski smjer) na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji završavam u rujnu 2020. godine i stječem akademski naziv sveučilišnog prvostupnika. Nakon toga, započinjem diplomski studij Primijenjene matematike na istom fakultetu. Zanima me fizikalna primjena matematike poput teorije elastičnosti i mehanike fluida, te područje računalnog vida i obrade podataka. Nakon završetka fakulteta planiram se zaposliti u struci.