SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Junaković

C*-ALGEBRE KOMPAKTNIH OPERATORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Ilja Gogić

Zagreb, studeni, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Samom sebi

Sadržaj

Uvod

Početak proučavanja C*-algebri vuče korijene iz radova Heisenberga, Jordana i von Neumanna u prvoj polovici 20. stoljeća. Teorija C*-algebra razvila primarno zbog njihove upotrebe u kvantnoj mehanici za modeliranje algebri opservabli, fizikalnog svojstva materije ili sustava koje se može kvantificirati mjerenjem (poput položaja ili impulsa). Paradigma koja opisuje skok iz klasične u kvantnu mehaniku matematički korespondira prijelazu sa opisavanja opservabli s realnim funkcijama, na opisivanje opservabli operatorima (preciznije, hermitskim operatorima na Hilbertovom prostoru). Dakle, radi se o prijelazu iz (komutativne) algebre funkcija u (nekomutativnu) algebru operatora na Hilbertovom prostoru. Heisenbergova tzv. matrična mehanika bio je prvi korak u tom smjeru (za što mu je dodijeljena Nobelova nagrada za fiziku, 1932.), čijoj su matematičkoj formulaciji pridonijeli Born i Jordan. Pokušavajući definirati univerzalno okruženje za promatranje algebri opservabli, von Neumann započinje s proučavanjem određene klase C*-algebri, koje danas nose njegovo ime. Sam naziv C*-algebra prvi put se javlja 40-ih godina 20. stoljeća u radovima Gelfanda i Naimarka. Njihov najveći doprinos teoriji C*-algebri se nalazi u tome da su pronašli apstraktnu definiciju C*-algebre *bez referenciranja na operatore na Hilbertovom prostoru*. To je zapravo sadržaj Gelfand-Naimarkovog teorema, no put do kojeg ćemo mi doći do njega je suprotan onom povijesnom. Mi polazimo od apstraktne definicije i zatim dokazujemo da se svaka apstraktna C*-algebra može realizirati kao podalgebra algebre operatora na Hilbertovom prostoru.

Druga tema ovog rada su kompaktni operatori, preciznije njihove algebre. Jednom kada razradimo njihovu teoriju, pokazat će se da oni sami za sebe čine C*-algebru te ćemo stoga biti u mogućnosti primjeniti teoriju C*-algebri (preciznije njihovu teoriju reprezentacija) i tako dobiti strukturni teorem za C*-algebre kompaktnih operatora.

Poglavlje 1

Banachove algebre

U ovom poglavlju započinjemo s promatranjem Banachovih[1] algebri. Nakon uvođenja osnovnih pojmova pažnju ćemo pridodati spektralnoj teoriji. Ona je neizostavni dio teorije Banachovih algebri u što ćemo se ubrzo i uvjeriti. Konačno, uvesti ćemo Gelfandovu[2] teoriju koja će svoju punu snagu pokazati u teoriji C*-algebri, posebnoj klasi Banachovih algebri.

1.1 Osnovni pojmovi i rezultati

Algebra je vektorski prostor $\mathbb{A}$ nad poljem $\mathbb{F}$ zajedno s bilinearnim preslikavanjem

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \, (a, b) \mapsto ab$$

Preslikavanje iz definicije algebre zovemo **množenje**.
Za algebru $\mathbb{A}$ kažemo da je **asocijativna** ako vrijedi $a(bc) = (ab)c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{A}$.

Općenito, uzimamo da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, no ako nije drugačije rečeno *u ovom radu riječ algebra isključivo će označavati kompleksnu asocijativnu algebru.*

Algebra $\mathbb{A}$ je **komutativna** ili **abelova** ako vrijedi $ab = ba$, $\forall a, b \in \mathbb{A}$.
Algebra $\mathbb{A}$ je **unitalna** ako postoji $1_{\mathbb{A}} = 1 \in \mathbb{A}$ takav da vrijedi $a1 = 1a = a$, $\forall a \in \mathbb{A}$.
Jedinstveni element $1_{\mathbb{A}} = 1 \in \mathbb{A}$ zovemo **jedinicom** u $\mathbb{A}$.

Vektorski potprostor $\mathbb{B}$ od $\mathbb{A}$ je **podalgebra** od $\mathbb{A}$ ako vrijedi $ab \in \mathbb{B}$, $\forall a, b \in \mathbb{B}$.
Primijetimo da je tada i sama $\mathbb{B}$ algebra s operacijom množenja dana restrikcijom na $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$.
Ako je $\mathbb{A}$ unitalna, $\mathbb{B}$ se zove **unitalna podalgebra** ako sadrži jedinicu algebre $\mathbb{A}$. Napomenimo da je moguće da je $\mathbb{B}$ unitalna algebra, ali da $\mathbb{B}$ nije unitalna podalgebra od $\mathbb{A}$.

[1] Stefan Banach, 1892-1945, poljski matematičar
[2] Israel Gelfand, 1913-2009, sovjetsko-američki matematičar

Normirana algebra je par $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ gdje je $\mathbb{A}$ algebra, a $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{A}$ koja je **submultiplikativna**, tj. vrijedi $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$, $\forall a, b \in \mathbb{A}$.

Ako je $\mathbb{A}$ unitalna algebra i ako je $\|1\| = 1$ kažemo da je $\mathbb{A}$ **unitalna normirana algebra**.

U sljedećoj propoziciji ćemo vidjeti kako uvjet submultiplikativnosti na normu osigurava određenu usklađenost algebarske operacije množenja s topologijom induciranom normom na $\mathbb{A}$.

Propozicija 1.1.1. *Množenje na algebri je neprekidno preslikavanje.*

Dokaz. $\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ promatramo kao normirani prostor s normom $\|(a, b)\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$. Neka je $\max\{\|a\|, \|b\|\} \leq M$ i $\epsilon > 0$. Definiramo $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2M+1}\}$. Neka su sada $x, y \in \mathbb{A}$ t.d. $\|x - a\| < \delta$ i $\|y - b\| < \delta$. Imamo

$$\begin{aligned}
\|xy - ab\| &= \|(x - a)(y - b) + ay + xb - ab - ab\| \\
&\leq \|x - a\|\,\|y - b\| + \|a\|\,\|y - b\| + \|x - a\|\,\|b\| \\
&< \delta^2 + 2M\delta < \delta + 2M\delta \\
&= (2M + 1)\delta < \epsilon
\end{aligned}$$

Primijetimo još kako smo zapravo dokazali da je množenje uniformno neprekidno na ograničenim skupovima jer tada M možemo izabrati neovisno o a i b pa posljedično tada i δ ne ovisi o a i b već samo o ϵ. □

Za normiranu algebru $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ kažemo da je **Banachova algebra** ako je $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ potpun prostor. Potpuna unitalna normirana algebra zove se **unitalna Banachova algebra**.

Iz definicija i neprekidnosti množenja jasno je da je zatvarač podalgebre opet podalgebra. Također, zatvorena podalgebra Banachove algebre je Banachova algebra.

Primjer 1.1.2. *Neka je S skup te l^∞ skup svih ograničenih $S \to \mathbb{C}$ funkcija. Tada je l^∞ unitalna Banachova algebra gdje su sve operacije definirane po točkama i norma je dana s $\|f\|_\infty = \sup_{x\in S}|f(x)|$.*

Primjer 1.1.3. *Neka je Ω topološki prostor te $C_b(\Omega)$ skup svih neprekidnih i ograničenih funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$. Tada je $C_b(\Omega)$ zatvorena podalgebra od $l^\infty(\Omega)$ pa je $C_b(\Omega)$ unitalna Banachova algebra. Ako je Ω kompaktan tada je $C_b(\Omega) = C(\Omega)$ gdje je $C(\Omega)$ skup svih neprekidnih funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$.*

U teoriji Banachovih, a posebno C*-algebri, bit će nam posebno zanimljivi prostori funkcija definiranih na takozvanim lokalno kompaktnim prostorima.

Definicija 1.1.4. *Neka je X topološki prostor. Za X kažemo da je* ***lokalno kompaktan*** *ako svaka točka $x \in X$ ima kompaktnu okolinu, tj. za svaki $x \in X$ postoji otvoren skup U i kompaktan skup K takvi da $x \in U \subseteq K$.*

Primjer 1.1.5. *Ako je Ω lokalno kompaktan Hausdorffov*[3] *topološki prostor (u daljnjem tekstu LCH prostor), za neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da* ***iščezava u beskonačnosti*** *ako je za svaki $\epsilon > 0$ skup $\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ kompaktan. Skup $C_0(\Omega)$ svih funkcija $\Omega \to \mathbb{C}$ koje iščezavaju u beskonačnosti je zatvorena podalgebra od $C_b(\Omega)$, dakle i sama je Banachova algebra. Uskoro ćemo vidjeti značajnost ove algebre u teoriji* C*-*algebri.*

Dosadašnji primjeri su bili sve primjeri komutativnih algebri. Navodimo sad najvažniji primjer nekomutativne algebre.

Primjer 1.1.6. *Neka je X normiran vektorski prostor. Označimo s $B(X)$ skup svih ograničenih linearnih operatora iz X u X. $B(X)$ je normirana algebra sa zbrajanjem i množenjem skalarima definiranim po točkama te množenjem danim s kompozicijom $(u, v) \mapsto u \circ v$. Norma je dana operatorskom normom, $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$. Ova algebra je nekomutativna čim je* $\dim X > 1$.

Primijetimo kako su svi primjeri bili "funkcijski", tj. vektorski prostor na kojem smo imali strukturu algebre je bio prostor "nekakvih" funkcija definiranih na "nekakvom" skupu. To će nam zapravo biti i jedini zanimljivi primjeri (osim polja $\mathbb{C}$ no i njega možemo shvatiti kao skup svih funkcija $\{*\} \to \mathbb{C}$). Naravno, poznata je i često korištena algebra kvadratnih matrica reda n nad $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})$, no ona je zapravo izomorfna algebri $B(\mathbb{C}^n)$.

Definicija 1.1.7. ***Lijevi (desni) ideal*** *u algebri $\mathbb{A}$ je vektorski potprostor I od $\mathbb{A}$ takav da*

$$a \in \mathbb{A},\ b \in I \implies ab \in I\ (ba \in I)$$

Ideal *u $\mathbb{A}$ je vektorski potprostor I od $\mathbb{A}$ koji je i lijevi i desni ideal u $\mathbb{A}$.* ***Maksimalan ideal*** *u $\mathbb{A}$ je pravi (tj. različit od $\mathbb{A}$) ideal u $\mathbb{A}$ koji nije sadržan u nijednom drugom pravom idealu od $\mathbb{A}$.*

Ideal I je ***modularan*** *ako postoji $e \in \mathbb{A}$ takav da je $a - ae \in I$ i $a - ea \in I$, $\forall a \in \mathbb{A}$. U tom slučaju za $e \in \mathbb{A}$ kažemo da je* ***jedinica modulo ideal*** *I.*

Standardnom primjenom Zornove[4] leme (vidi Dodatak, Teorem A.0.1.) dobivamo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.1.8. *Svaki pravi modularni ideal I u algebri $\mathbb{A}$ sadržan je u nekom modularnom maksimalnom idealu.*

[3] Felix Hausdorff, 1868-1942, njemački matematičar
[4] Max August Zorn, 1906-1993, njemački matematičar

Dokaz. Neka je I pravi modularni ideal u algebri $\mathbb{A}$ i neka je $e \in \mathbb{A}$ jedinica modulo I. Uočimo da za ideal J u $\mathbb{A}$ takav da $I \subseteq J$ vrijedi $J \neq \mathbb{A}$ ako i samo ako $e \notin J$. Jedan smjer je očit, a za drugi pretpostavimo $e \in J$. Tada za proizvoljan $a \in \mathbb{A}$ imamo $a - ae = i \in I$, tj. $a = i + ae$. Kako je J ideal i $e \in J$ imamo $ae \in J$. $I \subseteq J$ pa $i \in J$. Dakle, $a \in J$, tj. $J = \mathbb{A}$.

Promotrimo sada familiju $\Lambda := \{J \subseteq \mathbb{A} : J \text{ ideal u } \mathbb{A}, J \supseteq I, e \notin J\}$. $\Lambda \neq \emptyset$ jer $I \in \Lambda$. $(\Lambda, \subseteq)$ je parcijalno uređen skup. Neka je $\mathcal{L}$ lanac u Λ i stavimo $L := \bigcup \mathcal{L}$. Tvrdimo da je L gornja međa od Λ. Očito $L \subseteq \mathbb{A}$ i $L \supseteq J$. Prvo, pokažimo da je L potprostor. Neka su $a, b \in L$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Iz definicije od L imamo $a \in A$ i $b \in B$ za neke $A, B \in \mathcal{L}$. Kako je $\mathcal{L}$ lanac vrijedi $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $B \subseteq A$. U tom slučaju imamo $a, b \in A$ pa jer je A potprostor imamo $\alpha a + \beta b \in A \subseteq L$.

Nadalje, L je ideal u $\mathbb{A}$. Zaista, neka je $a \in \mathbb{A}$ i $x \in L$. Tada postoji $A \in \mathcal{L}$ takav da $x \in A$. Jer je A ideal imamo $ax, xa \in A \subseteq L$. Jasno je da svaki ideal koji sadrži modularan ideal i sam modularan. Dakle, L je modularan ideal.

Ostaje još pokazati $e \notin L$. Kad bi $e \in L$ onda bi $e \in A$ za neki $A \in \mathcal{L}$ pa onda $A \notin \Lambda$ što je kontradikcija s činjenicom da je $\mathcal{L}$ lanac u Λ.

Zornova lema sad povlači da u Λ postoji maksimalan element, a to je jasno maksimalan modularan ideal koji sadrži I. □

Primijetimo da ako je algebra $\mathbb{A}$ unitalna da je tada svaki ideal modularan. Naime, u definiciji modularnog ideala stavimo $e = 1$ pa se tvrdnja jednostavno svodi na činjenicu da je svaki ideal vektorski potprostor. Ovom opservacijom dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 1.1.9. *Neka je I pravi ideal u unitalnoj algebri $\mathbb{A}$. Tada postoji maksimalan ideal u $\mathbb{A}$ koji sadrži I.*

Idealima i njhovim svojstvima ćemo se još vratiti u točki 1.3 kada ćemo detaljnije proučavati komutativne algebre.

Vrlo bitna konstrukcija je ta kvocijentnog prostora. Idući teorem pokazuje kako definiramo strukturu algebre na kvocijentu prostora i zatvorenog ideala.

Teorem 1.1.10. *Neka je I zatvoren ideal u normiranoj algebri $\mathbb{A}$.
Tada je kvocijentni vektorski prostor $\mathbb{A}/I$ zajedno s množenjem*

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

algebra te zajedno s kvocijentnom normom

$$\|a + I\| = \inf_{b \in I} \|a + b\|$$

normirana algebra. Ako je $\mathbb{A}$ Banachova tada je i $\mathbb{A}/I$ Banachova algebra.

Dokaz. I je potprostor od $\mathbb{A}$ pa na $\mathbb{A}/I$ imamo standardnu strukturu vektorskog prostora. Pokažimo da je množenje na $\mathbb{A}/I$ dobro definirano. Neka vrijedi $a+I = a'+I$ te $b+I = b'+I$. Dakle, $a - a' \in I$ i $b - b' \in I$.

$$ab + I = a'b' + I \iff ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b \in I$$

što vrijedi jer je I ideal. Direktna provjera pokazuje da množenje na $\mathbb{A}/I$ zadovoljava sve aksiome algebre. Pokažimo da je kvocijentna norma uistinu norma na $\mathbb{A}/I$.

- Očito $\|a + I\| \geq 0$
- Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $a + I \in \mathbb{A}/I$. Ako je $\alpha = 0$ tada $\|\alpha(a + I)\| = \|0 + I\| = \inf_{b\in I}\|b\| = 0$ jer je I potprostor pa $0 \in I$. Ako je $\alpha \neq 0$ i $b \in I$, imamo $\frac{1}{\alpha}b \in I$. Slijedi

  $$\|\alpha(a + I)\| = \|(\alpha a) + I\| = \inf_{b\in I}\|\alpha a + b\| = \inf_{b\in I}|\alpha|\ \|a + \tfrac{1}{\alpha}b\| = |\alpha|\inf_{b\in I}\|a + b\| = |\alpha|\ \|a + I\|$$

- Neka $a + I, c + I \in \mathbb{A}/I$.

  $$\begin{aligned} \|(a + I) + (c + I)\| &= \|(a + c) + I\| \\ &= \inf_{b\in I}\|(a + c) + b\| \\ &= \inf_{b\in I}\|(a + c) + 2b\| \\ &\leq \inf_{b\in I}\{\|a + b\| + \|c + b\|\} \\ &\leq \inf_{b\in I}\|a + b\| + \inf_{b\in I}\|c + b\| \\ &\leq \|a + I\| + \|c + I\| \end{aligned}$$

- Ostaje pokazati $\|a + I\| = 0 \implies a + I = I$. Neka $\|a + I\| = 0$, tj. $\inf_{b\in I}\|a + b\| = 0$. Slijedi da postoji niz $(b_n) \subseteq I$ takav da $\|a + b_n\| \to 0$. Dakle, $b_n \to -a$. Kako je I zatvoren imamo $-a \in I$, no on je i vektorski potprostor pa i $a \in I$. Dakle, $a + I = I$.

Stoga je $\mathbb{A}/I$ normiran prostor.

Ostaje pokazati da je norma na $\mathbb{A}/I$ submultiplikativna. Neka je $\epsilon > 0$ i $a, b \in I$. Iz definicije infimuma slijedi da postoje $a', b' \in I$ takvi da $\epsilon + \|a + I\| > \|a + a'\|$ te $\epsilon + \|b + I\| > \|b + b'\|$. Slijedi

$$(\epsilon + \|a + I\|)(\epsilon + \|b + I\|) > \|a + a'\|\ \|b + b'\| \geq \|ab + c\|$$

gdje je $c = a'b' + ab' + a'b' \in I$. Dakle, $(\epsilon + \|a + I\|)(\epsilon + \|b + I\|) \geq \|ab + I\|$. Puštajući $\epsilon \to 0$ dobivamo $\|a + I\|\ \|b + I\| \geq \|ab + I\|$.

Posljednje, pokažimo da iz potpunosti od $\mathbb{A}$ slijedi potpunost od $\mathbb{A}/I$. U tu svrhu je dovoljno dokazati da svaki apsolutno konvergentan red u $\mathbb{A}/I$ konvergira i obično u $\mathbb{A}/I$

(vidi [2]). Neka je $\sum_n A_n$ apsolutno konvergentan red u $\mathbb{A}/I$, tj. $\sum_n \|A_n\| < \infty$. Iz definicije kvocijentne norme postoje $a_n \in A_n$ takvi da $\|a_n\| \leq \|A_n\| + 2^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Jasno je da $\sum_n \|a_n\| < \infty$ pa kako je $\mathbb{A}$ Banachov imamo i da red $\sum_n a_n$ konvergira. Neka je $a = \sum_n a_n$ i $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Vrijedi sljedeće:

$$a - s_n + I = (a + I) - (s_n + I) = (a + I) - \sum_{k=1}^{n} (a_k + I) = (a + I) - \sum_{k=1}^{n} A_n.$$

Kako je $\|a - s_n + I\| \leq \|a - s_n\| \to 0$ vidimo da $\sum_n A_n$ konvergira prema $a + I$ u $\mathbb{A}/I$. $\square$

Kvocijentno preslikavanje $\pi_I : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/I,\ a \mapsto a + I$ je epimorfizam algebri (Definicija 1.1.11.) s jezgrom I. Ako je $\mathbb{A}$ unitalna onda je klasa $1 + I$ jedinica u $\mathbb{A}/I$.

Pretpostavimo da je $\mathbb{A}/I$ unitalna s jedinicom $e + I$. Tada

$$(a+I)(e+I) = (e+I)(a+I) = a+I \iff ae+I = ea+I = a+I \iff ae-a, ea-a \in I,\ \forall a \in \mathbb{A}$$

Dakle, $\mathbb{A}/I$ je unitalna ako i samo ako je I modularan.

Pri proučavanju algebarskog objekta je jednako bitno proučavati preslikavanja između danih algebarskih objekata koja čuvaju strukturu. U tu ruku je sljedeća definicija standardna.

Definicija 1.1.11. *Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ algebre.*
Za linearni operator $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ kažemo da je ***homomorfizam algebri*** *ako*

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Injektivni homomorfizam zovemo ***monomorfizam****, surjektivni* ***epimorfizam****, a bijektivni* ***izomorfizam****. Ako su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ unitalne algebre i vrijedi $\phi(1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{B}}$ onda se ϕ zove* ***unitalni homomorfizam****.*

Poželjno i korisno svojstvo algebre je posjedovanje jedinice. No, često radimo s neunitalnim algebrama. U tom slučaju definiramo novu algebru u koju možemo izometrično uložiti početnu algebru.

Dokaz idućeg teorema je rutinska provjera te ga izostavljamo.

Teorem 1.1.12. *Neka je $\mathbb{A}$ algebra. Na skupu $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \times \mathbb{C}$ s množenjem*

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \quad a, b \in \mathbb{A}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

imamo strukturu unitalne algebre s jedinicom $(0, 1)$.
Preslikavanje $\mathbb{A} \to \tilde{\mathbb{A}},\ a \mapsto (a, 0)$ je monomorfizam algebri.

Algebru $\tilde{\mathbb{A}}$ iz prethodnog teorema zovemo **unitizacijom** algebre $\mathbb{A}$ i ponekad ćemo pisati $a + \lambda$ za $(a, \lambda) \in \tilde{\mathbb{A}}$. Preko prethodno opisanog monomorfizma, s obzirom da je njegova slika očito ideal u $\tilde{\mathbb{A}}$, $\mathbb{A}$ shvaćamo kao ideal od $\tilde{\mathbb{A}}$.

Teorem 1.1.13. *Neka je $\mathbb{A}$ neunitalna normirana algebra i $\tilde{\mathbb{A}}$ njena unitizacija. Na $\tilde{\mathbb{A}}$ definiramo normu s*

$$\|(a, \lambda)\|_{\tilde{\mathbb{A}}} = \|a\|_{\mathbb{A}} + |\lambda|, \ a \in \mathbb{A}, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tada na $\tilde{\mathbb{A}}$ imamo strukturu normirane algebre čija norma proširuje normu od $\mathbb{A}$. Također, ako je $\mathbb{A}$ Banachova tada je i $\tilde{\mathbb{A}}$ Banachova.

Dokaz. Jasno je da je $\| \cdot \|_{\tilde{\mathbb{A}}}$ norma koja proširuje normu od $\mathbb{A}$. Vrijedi $\|(0, 1)\| = 1$. Neka su $a, b \in \mathbb{A}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Imamo

$$\begin{aligned}
\|(a, \lambda)(b, \mu)\| &= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\| \\
&= \|ab + \lambda b + \mu a\| + |\lambda\mu| \\
&\leq \|a\| \, \|b\| + |\lambda| \, \|b\| + |\mu| \, \|a\| + |\lambda\mu| \\
&= (\|a\| + \lambda)(\|b\| + \mu) \\
&= \|(a, \lambda)\| \, \|(b, \mu)\|.
\end{aligned}$$

Dakle, $\tilde{\mathbb{A}}$ je normirana algebra. Kako je $\mathbb{C}$ potpun, jasno je da potpunost od $\mathbb{A}$ povlači potpunost od $\tilde{\mathbb{A}}$. □

Izbor norme u prethodnom teoremu je bio na neki način arbitraran. Zapravo bi bilo koja submultiplikativna norma koja proširuje normu od $\mathbb{A}$ bila dostatna. Na primjer mogli smo uzeti $\|(a, \lambda)\|_{\tilde{\mathbb{A}}} = \max\{\|a\|, |\lambda|\}$. Kada ćemo razmatrati unitizaciju C*-algebre vidjet ćemo da će nam izbor norme morati biti nešto suptilniji.

1.2 Spektralna teorija

Takozvana spektralna teorija vrlo je koristan alat u teoriji Banachovih algebri. Nastala kao prirodna generalizacija teorije dijagonalizacije matrica na konačnodimenzionalnim prostorima, u ovom općenitijem okruženju nam daje uvid u vezu između algebre i topologije. Počnimo s definicijom osnovnih pojmova.

Neka je $\mathbb{A}$ unitalna algebra. Za $a \in \mathbb{A}$ kažemo da je **invertibilan** ako postoji $b \in \mathbb{A}$ takav da $ab = ba = 1$. Skup svih invertibilnih elemenata označavamo s $\mathbb{A}^\times$. Rutinska je provjera vidjeti da $\mathbb{A}^\times$ zajedno s operacijom množenja iz algebre čini grupu.

Spektar elementa $a \in \mathbb{A}$ definiramo kao skup $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin \mathbb{A}^\times\}$.

Primjer 1.2.1. *Neka je $\mathbb{A} = M_n(\mathbb{C})$. Tada je za $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\sigma(A)$ upravo skup svih svojstvenih vrijednosti od A.*

Ako je $\mathbb{A} = C(\Omega)$, gdje je Ω kompaktan Hausdorffov prostor, onda je za $f \in C(\Omega)$, $\sigma(f) = f(\Omega)$.

U idućih nekoliko propozicija dokazujemo razna topološka svojstva invertibilnih elemenata i time započinjemo konstrukciju mosta između algebre i topologije u kontekstu Banachovih algebri. Primijetimo da je u svakom od sljedećih dokaza upravo submuliplikativnost norme ono što nam dopušta ključne zaključke.

Iduća propozicija je vrlo korisna generalizacija poznate formule za sumu geometrijskog reda.

Propozicija 1.2.2. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra te $a \in \mathbb{A}$ takav da je $\|a\| < 1$. Tada je $1 - a \in \mathbb{A}^\times$ i vrijedi $(1-a)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$.*

Dokaz. Iz submultiplikativnosti norme imamo $\|a^n\| \leq \|a\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nadalje, vrijedi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a\|^n < \infty$ zbog $\|a\| < 1$. Slijedi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a^n\| < \infty$. Kako je $\mathbb{A}$ potpun, postoji $s = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \in \mathbb{A}$. Primijetimo da tada vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

Nadalje, vrijedi $(1-a)(\sum\limits_{k=0}^{n} a^k) = (\sum\limits_{k=0}^{n} a^k)(1-a) = 1 - a^{n+1}$. Prelaskom na limes kad $n \to \infty$ dobivamo $(1-a)s = s(1-a) = 1$. □

Propozicija 1.2.3. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra. Tada je skup $\mathbb{A}^\times$ otvoren.*

Dokaz. Neka je $a \in \mathbb{A}^\times$ i $x \in K(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|})$. Pokažimo $x \in \mathbb{A}^\times$. Imamo $\|1 - a^{-1}x\| = \|a^{-1}(a-x)\| \leq \|a^{-1}\|\,\|a-x\| < 1$. Prema prethodnoj propoziciji je $1 - (1 - a^{-1}x) \in \mathbb{A}^\times$, tj. $a^{-1}x \in \mathbb{A}^\times$. Kako je $\mathbb{A}^\times$ grupa, množenjem s $a \in \mathbb{A}^\times$ dobivamo $x \in \mathbb{A}^\times$. □

Propozicija 1.2.4. *Na unitalnoj Banachovoj algebri $\mathbb{A}$, invertiranje $a \mapsto a^{-1}$ je neprekidna funkcija s $\mathbb{A}^\times$ u $\mathbb{A}^\times$.*

Dokaz. Neka je $a_0 \in \mathbb{A}^\times$. Tada je

$$\|1 - a_0^{-1}a\| = \|a_0^{-1}(a_0 - a)\| \leq \|a_0^{-1}\|\,\|a_0 - a\|.$$

Pomoću Propozicije 1.2.2. zaključujemo da ako je $\|a_0 - a\| \leq \|a_0^{-1}\|^{-1}$ onda je $a_0^{-1}a \in \mathbb{A}^\times$ i vrijedi

$$(a_0^{-1}a)^{-1} = \sum_{i=0}^{n}(1 - a_0^{-1}a).$$

Množenjem $a_0 \in \mathbb{A}^\times$ s $a_0^{-1}a \in \mathbb{A}^\times$ slijedi $a \in \mathbb{A}^\times$, dok direktnom provjerom dobivamo $a^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{n}[a_0^{-1}(a_0 - a)]^n a_0^{-1}$ □

Neka je sada $a_0 \in \mathbb{A}^\times$ i (a_n) niz u $\mathbb{A}^\times$ takav da $a_n \to a$. Za dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$ imamo $\|a_n - a_0\| \leq \|a_0^{-1}\|^{-1}$. Stoga

$$\begin{aligned}\|a_n^{-1} - a_0^{-1}\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} [a_0^{-1}(a_0 - a_n)]^n a_0^{-1} \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} [\|a_0^{-1}\| \, \|a_0 - a_n\|]^n \|a_0^{-1}\| \to 0.\end{aligned}$$

Dakle, $a_n^{-1} \to a_0^{-1}$ pa zaključujemo da je $a \mapsto a^{-1}$ neprekidna.

Propozicija 1.2.5. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra. Za $a \in \mathbb{A}$ rezolventna funkcija, $R_a : \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to \mathbb{A}$, $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$ je analitička te za $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ ima razvoj u red potencija*

$$R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} R_a(\lambda_0)^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n,$$

gdje red apsolutno konvergira za svaki $\lambda \in K\Big(\lambda_0, \frac{1}{\|R_a(\lambda_0)\|}\Big)$.

Dokaz. Pojam analitičnosti je definiran za funkcije definirane na otvorenom skupu pa stoga dokažimo prvo da je $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ otvoren skup.

Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Tvrdimo da je $K\Big(\lambda_0, \frac{1}{\|R_a(\lambda_0)\|}\Big) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Zaista, uzmimo $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_a(\lambda_0)\|}$. Tada je $\|(\lambda - \lambda_0) R_a(\lambda_0)\| < 1$. Iz Propozicije 1.2.2. slijedi da je $1 - (\lambda - \lambda_0) R_a(\lambda_0)$ invertibilan. Kako $\lambda_0 \notin \sigma(a)$ imamo da je $a - \lambda_0 1$ invertibilan. Sada iz jednakosti

$$a - \lambda 1 = a - \lambda_0 1 - (\lambda - \lambda_0) 1 = (a - \lambda_0 1)[1 - (\lambda - \lambda_0) R_a(\lambda_0)] \tag{$\triangle$}$$

slijedi da je $a - \lambda 1$ invertibilan kao produkt dva invertibilna elementa. Dakle, $\lambda \notin \sigma(a)$. Primijetimo kako smo ujedno pokazali da je za proizvoljni $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, R_a dobro definirana na otvorenom krugu oko λ_0 radijusa $\frac{1}{\|R_a(\lambda_0)\|}$.

Prelazimo na dokaz analitičnosti od R_a. Uzimanjem inverza u jednakosti $(\triangle)$ dobivamo

$$R_a(\lambda) = [1 - (\lambda - \lambda_0) R_a(\lambda_0)]^{-1} R_a(\lambda_0).$$

Sada nam Propozicija 1.2.2. daje

$$R_a(\lambda) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} R_a(\lambda_0)^n (\lambda - \lambda_0)^n \right] R_a(\lambda_0) = \sum_{n=0}^{\infty} R_a(\lambda_0)^{n+1} (\lambda - \lambda_0)^n.$$

□

Idući teorem iz kompleksne analize ključan je u dokazu nadolazećeg Gelfandovog teorema. Prisjetimo se da za funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kažemo da je *cijela* ako je holomorfna na čitavoj svojoj domeni $\mathbb{C}$.

Teorem 1.2.6. *(**Liouville**[5]) Svaka ograničena cijela funkcija je nužno konstanta.*

Također, potreban nam je rezultat koji govori da se jedino vektor $x = 0$ poništava u svim ograničenim linearnim funkcionalima. Za precizan iskaz i dokaz teorema vidi Dodatak, Korolar A.0.3.

Promotrimo $\mathbb{C}(z)$, algebru kvocijenata od $\mathbb{C}[z]$, na kojoj je norma dana s $\|p\| = \sup\limits_{|\lambda|\leq 1} |p(\lambda)|$. Tada je $\sigma(z) = \emptyset$. Gelfandov teorem nam govori kako se ovo ne može dogoditi u Banachovim algebrama te se on smatra fundamentalnim u teoriji Banachovih algebri.

Teorem 1.2.7. (***Gelfand***) *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra i $a \in \mathbb{A}$.*
Tada je $\sigma(a)$ neprazan i kompaktan podskup od $\mathbb{C}$.

Dokaz. Pokažimo prvo da je $\sigma(a)$ kompaktan. Primijetimo da smo u dokazu prošle propozicije, pokazavši da je $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ otvoren, pokazali da je $\sigma(a)$ zatvoren. Pokažimo ograničenost.

Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|a\|$. Imamo

$$1 > \tfrac{\|a\|}{|\lambda|} = \left\|\tfrac{a}{\lambda}\right\| = \left\|1 - (1 - \tfrac{a}{\lambda})\right\|.$$

Iz Propozicije 1.2.2. slijedi $1 - \frac{a}{\lambda} \in \mathbb{A}^\times$ te stoga, množenjem s $-\lambda 1 \in \mathbb{A}^\times$ i koristeći činjenicu da je $\mathbb{A}^\times$ grupa, dobivamo da je $a - \lambda 1 \in \mathbb{A}^\times$. Dakle, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. Dokazali smo $\sigma(a) \subseteq K(0, \|a\|)$, tj. $\sigma(a)$ je ograničen. Kako je u konačnodimenzionalnom normiranom prostoru kompaktnost ekvivalentna ograničenosti i zatvorenosti (vidi [2]), dokazali smo da je $\sigma(a)$ kompaktan.

$\sigma(a) \neq \emptyset$ pokazat ćemo pomoću spomenutog Liouvilleovog teorema. Pretpostavimo $\sigma(a) = \emptyset$. Tada je rezolventa R_a definirana na $\mathbb{C}$. Pokažimo da je ograničena. Pošto je R_a neprekidna svakako je ograničena na kompaktu $\overline{K}(0, \|a\|)$ dok za $|\lambda| > \|a\|$ imamo

$$\begin{aligned}
\|R_a(\lambda)\| &= \|(a - \lambda 1)^{-1}\| \\
&= \|\lambda^{-1}(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\| \\
&\leq \frac{|\lambda^{-1}|}{1 - |\lambda|^{-1}\|a\|} \\
&= \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.
\end{aligned}$$

[5] Joseph Liouville, 1809-1882, francuski matematičar

Slijedi $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} R_a(\lambda) = 0$, što pokazuje da je R_a ograničena.

Sveukupno, R_a je holomorfna, ograničena funkcija definirana na $\mathbb{C}$. Tada je za svaki $\varphi \in \mathbb{A}'$ skalarna funkcija $\lambda \mapsto (\varphi \circ R_a)(\lambda)$ cijela. Prema Liouvilleovom teoremu, $\varphi \circ R_a$ je konstanta. Pošto je $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} (\varphi \circ R_a)(\lambda) = 0$ mora biti $\varphi \circ R_a \equiv 0, \forall \varphi \in \mathbb{A}'$. Slijedi $R_a \equiv 0$. Dakle, za proizvoljni $\lambda \in \mathbb{C}$ je $(a - \lambda 1)^{-1} = 0$ što je u kontradikciji s time da 0 nije invertibilan. Zaključujemo $\sigma(a) \neq \emptyset$. □

Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra. Za $a \in \mathbb{A}$ definiramo **spektralni radijus** od a kao broj $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.

Primijetimo da nam prethodni teorem osigurava da je spektralni radijus dobro definiran pojam. Također, iz dokaza teorema slijedi $r(a) \leq \|a\|$.

Sljedeći teorem daje vrlo korisnu formulu za spektralni radijus u terminima norme elementa.

Teorem 1.2.8. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra i $a \in \mathbb{A}$. Tada je niz $(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i vrijedi $r(a) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Dokaz. Označimo $\nu(a) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ i pokažimo prvo $\nu(a) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Za dani $\epsilon > 0$ po definiciji postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da $\|a^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \nu(a) + \epsilon$, tj. $\|a^m\| \leq (\nu(a) + \epsilon)^m$. Za $n \in \mathbb{N}$ označimo s $p_n \in \mathbb{N}_0$ kvocijent, a s $q_n \in \{0, ..., m-1\}$ ostatak pri dijeljenju s m. Dakle, $n = mp_n + q_n$. Tada je $1 = \frac{m}{n} p_n + \frac{1}{n} q_m$ pa slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} p_n = 1$. Sada je

$$\|a^n\| = \|a^{mp_n + q_n}\| \leq \|a^m\|^{p_n} \|a\|^{q_n} \leq (\nu(a) + \epsilon)^{mp_n} \|a\|^{q_n} \implies \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\nu(a) + \epsilon)^{\frac{m}{n} p_n} \|a\|^{\frac{1}{n} q_n}$$

iz čega imamo

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} (\nu(a) + \epsilon)^{\frac{m}{n} p_n} \|a\|^{\frac{1}{n} q_n} = \lim_{n\to\infty} (\nu(a) + \epsilon)^{\frac{m}{n} p_n} \|a\|^{\frac{1}{n} q_n} = \nu(a) + \epsilon$$

Iz proizvoljnosti od ϵ slijedi

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \nu(a) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Iz ovoga slijedi $\nu(a) = \limsup\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \liminf\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ čime je dokazano da je niz $(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i da mu je limes jednak $\nu(a)$.

Znamo da je $r(a) \leq \|a\|$ te vrijedi $r(a^n) = r(a)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ (vidi Teorem 1.2.10.). Stoga imamo

$$r(a)^n = r(a^n) \leq \|a^n\| \implies r(a) \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

iz čega slijedi $r(a) \leq \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \nu(a)$. Ostaje pokazati $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$.

Fiksirajmo $a \in \mathbb{A}$ i neka je $K = K(0, \frac{1}{r(a)})$ (u slučaju $r(a) = 0$ stavimo $K = \mathbb{C}$). Tada je $1 - \lambda a \in \mathbb{A}^\times,\ \forall \lambda \in K$. Uzmimo ograničen funkcional $\varphi \in \mathbb{A}'$ i promotrimo funkciju

$$f : K \to \mathbb{C},\ f(z) = \varphi((1 - \lambda a)^{-1}).$$

Kao u dokazu Gelfandovog teorema, dobivamo da je f analitička funkcija na K. Stoga postoji jedinstveni niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u $\mathbb{C}$ takav da

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \lambda^n,\ \lambda \in K.$$

No, ako uzmemo $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|}$ onda je posebno $\lambda \in K$ i $\|\lambda a\| < 1$. Iz Propozicije 1.2.2. slijedi

$$(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n.$$

Kada na tu jednakost djelujemo s neprekidnim funkcionalnom φ dobivamo

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n)\lambda^n,\ |\lambda| < \frac{1}{\|a\|}.$$

Iz jedinstvenosti koeficijenta u razvoju analitičke funkcije, slijedi $\lambda_n = \varphi(a^n),\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Posebno, $\varphi(a^n)\lambda^n \to 0$ pa je niz $(\varphi(a^n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ograničen. Kako to vrijedi za svaki $\varphi \in \mathbb{A}'$, prema korolaru Banach-Steinhaus[6] principa uniformne ograničenosti (vidi Dodatak, Korolar A.0.5.) slijedi da je $(\lambda^n a^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ograničen niz u $\mathbb{A}$. Dakle, postoji $C(\lambda) > 0$ takav da $\|\lambda^n a^n\| \leq C(\lambda)$, tj. (za $\lambda \neq 0$) $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{C(\lambda)^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|},\ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Puštajući $n \to \infty$ dobivamo $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|\lambda|}$. Puštajući $|\lambda|$ da raste prema $r(a)$ dobivamo $\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$ i gotovi smo. □

Primijetimo sljedeću posljedicu ovog teorema. Spektar je čisto algebarski pojam pa tako i spektralni radijus. Na jednoj algebri možemo definirati više različitih normi koje je čine Banachovom. Teorem 1.2.8. kaže koju god takvu normu uzeli, niz $(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ će uvijek imati isti limes, konkretno $r(a)$.

Sada s Gelfandovim teoremom pri ruci možemo potpuno klasificirati takozvane *algebre s dijeljenjem*, tj. one algebre za koje vrijedi $\mathbb{A}^\times = \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

Teorem 1.2.9. *(Gelfand-Mazur[7]) Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra s dijeljenjem. Tada su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{C}$ izometrički izomorfne.*

[6]Hugo Steinhaus, 1887-1972, poljski matematičar
[7]Stanisław Mazur, 1905-1981, poljski matematičar

Dokaz. Definirajmo $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{A}$, $\varphi(\lambda) = \lambda 1$. Jasno je da je φ monomorfizam algebri. Neka je $a \in \mathbb{A}$. Iz prethodnog teorema znamo da je $\sigma(a) \neq \emptyset$. Uzmimo $\lambda \in \sigma(a)$. Kako je $a - \lambda 1 \notin \mathbb{A}^\times$ te $\mathbb{A}^\times = \mathbb{A} \setminus \{0\}$ mora biti $a - \lambda 1 = 0$, tj. $a = \lambda 1$. Dakle, φ je surjekcija. Nadalje,

$$\|\varphi(\lambda)\| = \|\lambda 1\| = |\lambda| \, \|1\| = |\lambda|$$

pa je φ i izometrija. □

Sljedeći teorem nam govori da je spektar usuglašen s algebarskim operacijama u algebri.

Teorem 1.2.10. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra te neka je $a \in \mathbb{A}$ i $p \in \mathbb{C}[z]$. Tada je $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$. Nadalje, ako je $a \in \mathbb{A}^\times$ onda je $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je za $\alpha \neq 0$, $\sigma(\alpha a) = \alpha\sigma(a)$. To će nam omogućiti da se bez smanjenja općenitosti u nastavku dokaza ograničimo na normirane polinome. Imamo

$$\lambda \in \sigma(\alpha a) \iff \alpha a - \lambda 1 \notin \mathbb{A}^\times \iff a - \tfrac{\lambda}{\alpha} 1 \notin \mathbb{A}^\times \iff \tfrac{\lambda}{\alpha} \in \sigma(a) \iff \lambda \in \alpha\sigma(a).$$

Neka je sada $p \in \mathbb{C}[z]$ normiran, stupnja $n \in \mathbb{N}$. Za $\lambda \in \mathbb{C}$ postoje $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{C}$ takvi da vrijedi

$$p(t) - \lambda = (t - \beta_1) \cdot ... \cdot (t - \beta_n). \tag{$\triangle$}$$

Stoga je $p(a) - \lambda 1 = (a - \beta_1 1) \cdot ... \cdot (a - \beta_n 1)$. Sada ako $\lambda \in \sigma(p(a))$ onda element s lijeve strane posljednje jednakosti nije invertibilan pa mora postojati $j \in \{1, ..., n\}$ takav da $a - \beta_j 1$ nije invertibilan, tj. $\beta_j \in \sigma(a)$. Sada iz ($\triangle$) slijedi $p(\beta_j) - \lambda = 0$, tj. $p(\beta_j) = \lambda$. Dakle, vrijedi $\sigma(p(a)) \subseteq p(\sigma(a))$.

Uzmimo sada $\lambda \in p(\sigma(a))$. Dakle, postoji $\gamma_j \in \sigma(a)$ takav da $\lambda = p(\gamma_j)$. γ_j je jedan od $\gamma_1, ..., \gamma_n$ koji zadovoljavaju $p(t) - \lambda = (t - \gamma_1) \cdot ... \cdot (t - \gamma_n)$. Slijedi $p(a) - \lambda a = (a - \gamma_1 1) \cdot ... \cdot (a - \gamma_n 1)$. Ako bi $p(a) - \lambda 1$ bio invertibilan imali bismo

$$1 = (p(a) - \lambda)^{-1}(a - \gamma_1 1) \cdot ... \cdot (a - \gamma_{j-1} 1)(a - \gamma_{j+1} 1) \cdot ... \cdot (a - \gamma_n 1)(a - \gamma_j 1)$$

pa bi $a - \gamma 1$ imao lijevi inverz. Analogno bi slijedilo da $a - \gamma 1$ ima desni inverz. Kad u algebri element ima lijevi i desni inverz oni su nužno jednaki pa je element invertibilan. Dakle, tada bi $a - \gamma 1$ bio invertibilan. Kontradikcija. Slijedi $p(\sigma(a)) \subseteq \sigma(p(a))$.

Ako je $a \in \mathbb{A}^\times$ tada je i $\lambda a \in \mathbb{A}^\times$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Uzmimo $\lambda \in \sigma(a)$. Tada je $\lambda \neq 0$ i vrijedi $a - \lambda 1 = a(1 - \lambda a^{-1}) = \lambda a(\lambda^{-1} - a^{-1})$ iz čega slijedi $\lambda^{-1} - a^{-1} \notin \mathbb{A}^\times$. Dakle, $\sigma(a)^{-1} \subseteq \sigma(a^{-1})$. Primjenom dokazanog na a^{-1} dobivamo jednakost. □

Sada ćemo se pozabaviti problemom spektra elementa u različitim ambijentnim algebrama. Promotrimo sljedeću situaciju: ako je $\mathbb{B}$ unitalna podalgebra od $\mathbb{A}$ te $b \in \mathbb{B}$ možemo se zapitati vrijedi li $\sigma_{\mathbb{A}}(b) = \sigma_{\mathbb{B}}(b)$. Naravno, vrijedi $\sigma_{\mathbb{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathbb{B}}(b)$ ali jednakost općenito ne vrijedi kao što idući primjer pokazuje.

Primjer 1.2.11. *Neka je $\boldsymbol{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Definiramo $A(\boldsymbol{D})$ kao skup svih neprekidnih funkcija na $\boldsymbol{D}$ koje su holomorfne na interioru od $\boldsymbol{D}$. Tada se lako vidi da je $A(\boldsymbol{D})$ unitalna zatvorena podalgebra od $C(\boldsymbol{D})$. Zatvorenost slijedi iz činjenice da je uniformni limes holomorfnih funkcija ponovno holomorfna funkcija. Neka je sada $\boldsymbol{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Tada je preslikavanje*

$$\phi : A(\boldsymbol{D}) \to C(\boldsymbol{T}),\ \phi(f) = f|_{\boldsymbol{T}}$$

unitalni izometrički monomorfizam iz $A(\boldsymbol{D})$ u $C(\boldsymbol{T})$. Izometričnost slijedi iz principa maksimum modula iz kompleksne analize, tj.

$$\|f\|_{A(\boldsymbol{D})} = \sup_{z\in\boldsymbol{D}} |f(z)| = \sup_{z\in\boldsymbol{T}} |f(z)| = \|\phi(f)\|_{C(\boldsymbol{T})}.$$

Stavimo sada $\mathbb{A} = C(\boldsymbol{T})$ i $\mathbb{B} = \phi(A(\boldsymbol{D}))$. Tada je $\mathbb{B}$ unitalna Banachova podalgebra od $\mathbb{A}$. Neka je $a \in A(\boldsymbol{D})$ identiteta na $\boldsymbol{D}$. Tada je $\sigma_{A(\boldsymbol{D})}(a) = a(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{D}$ pa je i $\sigma_{\mathbb{B}}(\phi(a)) = \boldsymbol{D}$. S druge strane imamo $\sigma_{\mathbb{A}}(\phi(a)) = a(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}$. Dakle, vrijedi $\sigma_{\mathbb{A}}(\phi(a)) \subsetneq \sigma_{\mathbb{B}}(\phi(a))$.

Kasnije ćemo vidjeti da ako imamo finiju strukturu na Banachovoj algebri (npr. C*-strukturu), situacija iz prošlog primjera se neće moći dogoditi te ćemo stoga u određenom apsolutnom smislu (neuvjetovano u kojoj algebri gledamo) moći pričati o spektru elementa.

Vrijedi sljedeće svojstvo iz topologije ravnine: ako je K kompaktan podskup od $\mathbb{C}$, tada $\mathbb{C} \setminus K$ ima točno jednu neomeđenu komponentu povezanosti. Za preostale, omeđene komponente povezanosti od $\mathbb{C} \setminus K$ kažemo da su *rupe* od K.

Teorem 1.2.12. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra i $\mathbb{B}$ njezina zatvorena unitalna podalgebra. Tada*

1. *Skup $\mathbb{B}^\times$ je otvoren i zatvoren podskup od $\mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$.*

2. *Za $b \in \mathbb{B}$ vrijedi*

$$\sigma_{\mathbb{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathbb{B}}(b) \text{ i } \partial\sigma_{\mathbb{B}}(b) \subseteq \partial\sigma_{\mathbb{A}}(b).$$

3. *Ako je $b \in \mathbb{B}$ takav da $\sigma_{\mathbb{A}}(b)$ nema rupa, onda $\sigma_{\mathbb{A}}(b) = \sigma_{\mathbb{B}}(b)$.*

Dokaz. 1. $\mathbb{B}^\times$ je otvoren podskup od $\mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$ prema Propoziciji 1.2.3. Što se tiče zatvorenosti, uzmimo niz (b_n) u $\mathbb{B}^\times$ koji konvergira prema $b \in \mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$. Kako je invertiranje neprekidna funkcija (Propozicija 1.2.4.), slijedi da (b_n^{-1}) konvergira prema b^{-1} u $\mathbb{A}$ pa zatvorenost od $\mathbb{B}$ implicira $b^{-1} \in \mathbb{B}$. Dakle, $b \in \mathbb{B}^\times$ pa je $\mathbb{B}$ zatvoren u $\mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$.

2. Uzmimo $\lambda \in \sigma_{\mathbb{A}}(b)$. Dakle, $b - \lambda 1$ nije invertibilan u $\mathbb{A}$ pa posebno ni u $\mathbb{B}$, tj. $\lambda \in \sigma_{\mathbb{B}}(b)$. Time smo dokazali $\sigma_{\mathbb{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathbb{B}}(b)$.
   Neka je sada $\lambda \in \partial\sigma_{\mathbb{B}}(b)$. Kako je $\sigma_{\mathbb{B}}(b)$ zatvoren jednak je svome zatvaraču pa imamo posebno $\lambda \in \sigma_{\mathbb{B}}(b)$. Također, $\lambda \in \overline{\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{B}}(b)}$ pa postoji niz (λ_n) u $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{B}}(b)$ takav da $\lambda_n \to \lambda$. Dakle, $\lambda_n 1 - b \in \mathbb{B}^\times$ ali $\lambda 1 - b \notin \mathbb{B}^\times$. Pretpostavimo $\lambda 1 - b \in \mathbb{A}^\times$. Tada $\lambda_n 1 - b \to \lambda 1 - b$ u $\mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$ pa iz zatvorenosti od $\mathbb{B}^\times$ u $\mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$ slijedi $\lambda 1 - b \in \mathbb{B}^\times$. Kontradikcija. Dakle, $\lambda \in \sigma_{\mathbb{A}}(b)$.
   Nadalje, iz $\lambda_n 1 - b \in \mathbb{A}^\times$ slijedi $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(b) \subseteq \overline{\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(b)}$. Sveukupno, $\lambda \in \partial\sigma_{\mathbb{A}}(b)$.

3. Ako je $b \in \mathbb{B}$ te $\sigma_{\mathbb{A}}(b)$ nema rupa onda je $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(b)$ povezan. Prema 1. i 2. $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{B}}(b)$ je otvoren i zatvoren podskup od povezanog skupa $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(b)$. Kako je $\sigma_{\mathbb{A}}(b) \neq \emptyset$ imamo $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(b) \neq \mathbb{C}$ pa slijedi $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(b) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{B}}(b)$, tj. $\sigma_{\mathbb{A}}(b) = \sigma_{\mathbb{B}}(b)$.

□

Za kraj ove točke napomenimo kako možemo definirati pojam spektra elementa u neunitalnoj algebri. Ako je $\mathbb{A}$ neunitalna algebra definiramo spektar od $a \in \mathbb{A}$ tako da stavimo $\sigma_{\mathbb{A}}(a) := \sigma_{\tilde{\mathbb{A}}}(a)$.

1.3 Karakteri Banachovih algebri

Takozvani karakteri bit će nam važan alat u opisivanju strukture (komutativnih) Banachovih algebri. Prvo, definicija.

Definicija 1.3.1. *Neka je $\mathbb{A}$ algebra. Za nenul homomorfizam algebri $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ kažemo da je **karakter** algebre $\mathbb{A}$. Skup svih karaktera algebre označavamo s $\Omega(\mathbb{A})$.*

Propozicija 1.3.2. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna algebra i $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$. Tada je φ unitalni homomorfizam.*

Dokaz. Kako je φ homomorfizam imamo $\varphi(1) = \varphi(1^2) = \varphi(1)^2$.
Slijedi $\varphi(1)(1 - \varphi(1)) = 0$. Dakle, $\varphi(1) = 0$ ili $\varphi(1) = 1$. Kad bi $\varphi(1) = 0$ imali bi za proizvoljan $a \in \mathbb{A}$, $\varphi(a) = \varphi(a1) = \varphi(a)\varphi(1) = 0$, tj. φ je nul homomorfizam. Kontradikcija. Dakle, φ je unitalni homomorfizam. □

Kako je često korisno prijeći na unitizaciju algebre, važno je imati na umu vezu između karaktera na originalnoj algebri i karaktera na unitizaciji. Iduće dvije propozicije pokazuju da je po tom pitanju situacija poprilično jednostavna.

Propozicija 1.3.3. *Neka je $\mathbb{A}$ algebra i $\tilde{\mathbb{A}}$ njena unitizacija. Za $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$ definiramo $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}$ sa*

$$\tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi(a) + \lambda, \quad a \in \mathbb{A}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tada je $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ bijekcija s $\Omega(\mathbb{A})$ na $\Omega(\tilde{\mathbb{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$, gdje je $\varphi_0 \in \Omega(\tilde{\mathbb{A}})$ dan s $\varphi_0(a + \lambda) = \lambda$.

Dokaz. Pokažimo prvo da za $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$ imamo $\tilde{\varphi} \in \Omega(\tilde{\mathbb{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$. Jasno je da je $\tilde{\varphi}$ linearno. Neka su $a, b \in \mathbb{A}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ proizvoljni. Računamo:

$$\tilde{\varphi}((a + \lambda)(b + \mu)) = \tilde{\varphi}(ab + \lambda b + \mu a + \lambda\mu) = \varphi(ab + \lambda b + \mu a) + \lambda\mu =$$
$$(\varphi(a) + \lambda)(\varphi(b) + \mu) = \tilde{\varphi}(a + \lambda)\tilde{\varphi}(b + \mu).$$

Dakle, $\tilde{\varphi}$ je homomorfizam između algebri $\tilde{\mathbb{A}}$ i $\mathbb{C}$.

Nadalje, $\tilde{\varphi} \neq 0$ jer $\varphi \neq 0$ pa postoji $a_0 \in \mathbb{A}$ takav da $\varphi(a_0) \neq 0$ pa je za prozivoljan $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tilde{\varphi}(a_0 + \lambda) \neq 0$. Time je pokazano da je $\tilde{\varphi}$ karakter od $\tilde{\mathbb{A}}$.

Pretpostavimo da postoji $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$ takav da je $\tilde{\varphi} = \varphi_0$. Dakle,

$$\varphi(a) + \lambda = \tilde{\varphi}(a + \lambda) = \varphi_0(a + \lambda) = \lambda, \ \forall a \in \mathbb{A}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Slijedi $\varphi(a) = 0, \ \forall a \in \mathbb{A}$, tj. $\varphi \equiv 0$. Kontradikcija. Dakle, $\tilde{\varphi} \in \Omega(\tilde{\mathbb{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$.

Neka su sada $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega(\mathbb{A})$ takve da $\tilde{\varphi_1} = \tilde{\varphi_2}$. Tada za $a \in \mathbb{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ imamo:

$$\tilde{\varphi_1}(a + \lambda) = \tilde{\varphi_2}(a + \lambda) \iff \varphi_1(a) + \lambda = \varphi_2(a) + \lambda \iff \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \iff \varphi_1 = \varphi_2.$$

Dakle, $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ je injekcija.

Ostaje pokazati da je $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ surjekcija na $\Omega(\tilde{\mathbb{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$.
Neka je $\psi \in \Omega(\tilde{\mathbb{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$. Shvaćajući $\mathbb{A}$ kao ideal od $\tilde{\mathbb{A}}$ (pomoću ulaganja $a \mapsto (a, 0)$) možemo promotriti $\psi|_{\mathbb{A}} \in \Omega(\mathbb{A})$ i imamo $\psi = \widetilde{\psi|_{\mathbb{A}}}$. □

Propozicija 1.3.4. *Neka je $\mathbb{A}$ neunitalna algebra i $\tilde{\mathbb{A}}$ njena unitizacija.*
Svaki karakter na $\mathbb{A}$ se na jedinstveni način može proširiti do karaktera na $\tilde{\mathbb{A}}$.

Dokaz. Neka je $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$. Definiramo $\tilde{\varphi} \in \Omega(\tilde{\mathbb{A}})$ s

$$\tilde{\varphi}(a + \lambda 1) = \varphi(a) + \lambda, \ a \in \mathbb{A}, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Jasno je da $\tilde{\varphi}$ proširenje od φ.

Neka je $\psi \in \Omega(\tilde{\mathbb{A}})$ takav da $\psi|_{\mathbb{A}} = \varphi$. Kako je ψ karakter mora biti $\psi(1) = 1$. Dakle,

$$\psi(a + \lambda 1) = \psi(a) + \lambda\psi(1) = \varphi(a) + \lambda,$$

tj. $\psi = \varphi$ pa je proširenje jedinstveno. □

U nastavku želimo vidjeti kakva svojstva imaju karakteri Banachovih algebri.

Propozicija 1.3.5. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra. Tada je $\varphi(a) \in \sigma(a), \ \forall a \in \mathbb{A}$.*

Dokaz. Prvo da za $a \in \mathbb{A}^\times$ vrijedi $\varphi(a) \neq 0$. Zaista, kako je prema Propoziciji 1.3.2. φ unitalan imamo

$$1 = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1})$$

pa zato $\varphi(a) \neq 0$.

Uzmimo sada $\lambda \notin \sigma(a)$. Dakle, $a - \lambda 1 \in \mathbb{A}^\times$ pa je $0 \neq \varphi(a - \lambda 1) = \varphi(a) - \lambda$, tj. $\lambda \neq \varphi(a)$. Time smo pokazali $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \sigma(a)$. □

Teorem 1.3.6. *Neka je $\mathbb{A}$ Banachova algebra i $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$*
Tada je φ ograničen linearan funkcional i vrijedi $|\varphi(a)| \leq r(a)$ za svaki $a \in \mathbb{A}$. Posebno, $\|\varphi\| \leq 1$ te ako je $\mathbb{A}$ unitalna vrijedi $\|\varphi\| = 1$.

Dokaz. Uzevši u obzir Propozicije 1.3.3. i 1.3.4. možemo pretpostaviti da je $\mathbb{A}$ unitalna. Tada je zbog prethodne propozicije $|\varphi(a)| \leq r(a) \leq \|a\|$, $\forall a \in \mathbb{A}$ pa je $\|\varphi\| \leq 1$.
Zbog $\varphi(1) = 1$ imamo $1 = |\varphi(1)| \leq \|\varphi\| \, \|1\| = \|\varphi\|$ pa $\|\varphi\| = 1$. □

Neprekidni homomorfizam φ takav da $\|\varphi\| \leq 1$ zovemo **kontraktivni** homomorfizam. Razlog je jasan, pošto tada $\varphi(a) \leq \|\varphi\| \, \|a\| \leq \|a\|$, tj. φ "smanjuje" normu.

U nastavku ove točke ograničiti ćemo se na proučavanje komutativnih Banachovih algebri. Naravno, njihova je algebarska struktura jednostavnija pa očekujemo da ćemo za njih moći pokazati nešto snažnije rezulate. Također, u ovom radu ćemo se prvo posvetiti klasifikaciji komutativnih C*-algebri pa je logično prvo proučiti komutativne Banachove algebre, čije su komutativne C*-algebre poseban slučaj.

Primijetimo da u ovom trenutku općenito još ne znamo je li $\Omega(\mathbb{A}) \neq 0$. Da to pokažemo uspostavit ćemo određenu bijektivnu korespondenciju između karaktera i određene klase ideala. S tim ciljem na umu moramo prvo dokazati još neka svojstva ideala, posebno u komutativnom slučaju.

Označimo s $\mathrm{Max}(\mathbb{A})$ skup svih modularnih maksimalnih ideala u algebri $\mathbb{A}$.

Lema 1.3.7. *Neka je $\mathbb{A}$ komutativna unitalna algebra.*
Tada je $a \in \mathbb{A}$ invertibilan ako i samo ako $a \notin M$ za sve $M \in \mathrm{Max}(\mathbb{A})$.

Dokaz. Neka $a \notin \mathbb{A}^\times$. To vrijedi ako i samo ako je $a\mathbb{A} = \{aa' : a' \in \mathbb{A}\}$ pravi ideal u $\mathbb{A}$ što je prema Korolaru 1.1.9. ekvivalentno s $a\mathbb{A} \subseteq M$ za neki $M \in \mathrm{Max}(\mathbb{A})$ što je opet ekvivalentno s $a \in M$ za neki $M \in \mathrm{Max}(\mathbb{A})$. □

Lema 1.3.8. *Neka je $\mathbb{A}$ komutativna algebra i $M \in \mathrm{Max}(\mathbb{A})$. Tada je $\mathbb{A}/M$ polje.*

Dokaz. Pokažimo prvo da algebra $\mathbb{A}/M$ nema pravih ideala.

Neka je I ideal u $\mathbb{A}/M$ i $\pi_M : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/M$ kanonski epimorfizam. Tada je $\pi_M^{-1}(I)$ ideal u

$\mathbb{A}$. Tvrdimo da $\pi_M^{-1}(I)$ sadrži M. Zaista, $\pi_M^{-1}(I) = \{a \in \mathbb{A} : a + M \in I\}$, a za $m \in M$ imamo $m + M = M \in I$ jer je I vektorski potprostor pa sadrži $0_{\mathbb{A}/M}$. Dakle, $\pi_M^{-1}(I)$ je ideal u $\mathbb{A}$ koji sadrži M pa iz maksimalnosti od M slijedi $\pi_M^{-1}(I) = \mathbb{A}$ ili $\pi_M^{-1}(I) = M$. Slijedi $I = \mathbb{A}/M$ ili $I = 0$.

Dakle, jedini maksimalni ideal u $\mathbb{A}/M$ je nul ideal. Neka je sada $a \in \mathbb{A}/M$, $a \neq 0_{\mathbb{A}/M}$. Imamo da je $\mathbb{A}/M$ unitalna komutativna algebra pa prema prethodnoj lemi slijedi da je a invertibilan jer očito a nije sadržan u nul idealu. □

Lema 1.3.9. *Neka je I modularan ideal u Banachovoj algebri $\mathbb{A}$.*
Ako je I pravi ideal tada je i njegov zatvarač $\overline{I}$ pravi ideal. Ako je I maksimalan, tada je I zatvoren.

Dokaz. Neka je $e \in \mathbb{A}$ jedinica modulo I. Pokažimo $I \cap K(e, 1) = \emptyset$. Neka je $\mathbb{A}'$ algebra definirana na sljedeći način: ako je $\mathbb{A}$ unitalna onda $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$, tj. $\mathbb{A}' = \tilde{\mathbb{A}}$ ako nije unitalna. Ako je $a \in \mathbb{A}$ takav da $\|a - e\| < 1$ onda je prema Propoziciji 1.2.2. $1 - (e - a)$ invertibilan u $\mathbb{A}'$. Neka je $(1 - (e - a))^{-1} = b + \lambda 1$ za $b \in \mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Imamo

$$1 = (b + \lambda 1)(1 - (e - a)) = b + \lambda 1 - be - \lambda e + \lambda a + ba.$$

Pretpostavimo sada $a \in I$. Ako je $1 \in \mathbb{A}$ onda

$$1 = \lambda 1 - (\lambda 1)e + b - be + (\lambda 1 + b)a \in I$$

jer je I modularan i e jedinica modulo I. Slijedi $I = \mathbb{A}$ što je kontradikcija s time da je I pravi ideal.

Ako $1 \notin \mathbb{A}$ onda

$$(1 - \lambda)1 = b - be - \lambda e + \lambda a + ba \in \mathbb{A}$$

iz čega slijedi $\lambda = 1$. Uvrštavanjem imamo $e = b - be + a + ba \in I$. Slijedi $I = \mathbb{A}$ što je opet kontradikcija.

Dakle, vrijedi $I \cap K(e, 1) = \emptyset$ iz čega odmah slijedi da je $\overline{I}$ pravi ideal. Sada ako je M modularni maksimalni ideal prema dokazanome je $\overline{M}$ pravi ideal koji sadrži M. Zbog maksimalnosti od M mora biti $\overline{M} = M$, tj, M je zatvoren. □

Sada možemo dokazati glavni teorem ove točke koji uspostavlja već spomenutu bijektivnu korespondenciju.

Teorem 1.3.10. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra.*
Tada je $\Omega(\mathbb{A}) \neq \emptyset$ te je preslikavanje

$$\varphi \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi)$$

bijekcija sa $\Omega(\mathbb{A})$ na $\mathrm{Max}(\mathbb{A})$.

Dokaz. Pokažimo da je $\mathrm{Ker}(\varphi)$ zatvoren ideal od $\mathbb{A}$. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ je očito potprostor od $\mathbb{A}$. Neka su $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ i $a \in \mathbb{A}$ proizvoljni. Tada $\varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = 0$, tj. $xa \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Dakle, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ je ideal. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ je zatvoren kao praslika zatvorenog skupa pri neprekidnom preslikavanju.

Tvrdimo da je $\mathbb{A} = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathbb{C}1_{\mathbb{A}}$. Očito, $\mathbb{A} \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathbb{C}1_{\mathbb{A}}$. Obratno, neka je $a \in \mathbb{A}$ proizvoljan. Tada $\varphi(a - \varphi(a)1_{\mathbb{A}}) = \varphi(a) - \varphi(a)\varphi(1_{\mathbb{A}}) = \varphi(a) - \varphi(a)1 = 0$, tj. $a - \varphi(a)1_{\mathbb{A}} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Dakle, $a - \varphi(a)1_{\mathbb{A}} = b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Slijedi $a = b + \varphi(a)1_{\mathbb{A}} \in \mathrm{Ker}(\varphi) + \mathbb{C}1_{\mathbb{A}}$.
Nadalje, takav rastav je jedinstven. Zaista, pretpostavimo da za neki $a \in \mathbb{A}$ vrijedi

$$a = b_i + \lambda_i 1_{\mathbb{A}},\ b_i \in \mathrm{Ker}(\varphi),\ \lambda_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2.$$

Tada $b_1 - b_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)1_{\mathbb{A}} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ pa $0 = \varphi((\lambda_2 - \lambda_1)1_{\mathbb{A}}) = (\lambda_2 - \lambda_1)\varphi(1_{\mathbb{A}}) = \lambda_2 - \lambda_1$. Dakle, $\lambda_1 = \lambda_2$ pa i $b_1 = b_2$ te stoga $\mathbb{A} = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathbb{C}1_{\mathbb{A}}$.

Sada jednostavno možemo pokazati da je $\mathrm{Ker}(\varphi)$ maksimalan ideal. Prvo, $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \mathbb{A}$ jer $\varphi \neq 0$. Neka je sada I ideal u $\mathbb{A}$ takav da $\mathrm{Ker}(\varphi) \subsetneq I$ i uzmimo $a \in I \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)$. Napišimo $a = b + \lambda 1_{\mathbb{A}}$, $b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Tada je $\lambda 1_{\mathbb{A}} = a - b \in I$. Slijedi $1_{\mathbb{A}} \in I$ pa je $I = \mathbb{A}$, tj. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ je maksimalan.

Pokažimo da je preslikavanje $\varphi \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi)$ injektivno.
Neka su $\varphi, \psi \in \Omega(\mathbb{A})$ takvi da $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi) =: I$. Uzmimo proizvoljan $a \in \mathbb{A}$ i napišimo ga kao $a = b + \lambda 1_{\mathbb{A}}$, $b \in I$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\varphi(a) = \varphi(b + \lambda 1_{\mathbb{A}}) = \varphi(b) + \lambda\varphi(1_{\mathbb{A}}) = \lambda 1 = \psi(b) + \lambda\psi(1_{\mathbb{A}}) = \psi(b + \lambda 1_{\mathbb{A}}) = \psi(a).$$

Ostaje pokazati da je $\varphi \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi)$ surjektivno.

Neka je M proizvoljan maksimalan ideal od $\mathbb{A}$. Prema Lemi 1.3.9. M je zatvoren ideal. Nadalje, prema Lemi 1.3.8., $\mathbb{A}/M$ je polje. Dakle, $\mathbb{A}/M$ je Banachova algebra u kojoj je svaki nenul element invertibilan pa prema Gelfand-Mazurovom teoremu (Teorem 1.2.9.) je $\mathbb{A}/M$ izometrički izomorfna algebri $\mathbb{C}$. Neka je $\Psi : \mathbb{A}/M \to \mathbb{C}$ izometrički izomorfizam i $\pi_M : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/M$ kanonski epimorfizam. Promotrimo preslikavanje $\varphi : \Psi \circ \pi_M : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$. Očito je $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$. Nadalje,

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \pi_M^{-1}(\mathrm{Ker}(\Psi)) = \pi_M^{-1}(\{0\}) = \mathrm{Ker}(\pi_M) = M.$$

Dakle, $\varphi \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi)$ je bijekcija. □

Korolar 1.3.11. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna komutativna Banachova algebra. Tada je $\Omega(\mathbb{A}) \neq \emptyset$.*

Dokaz. $\Omega(\mathbb{A}) \neq \emptyset$ jer je prema Korolaru 1.1.9. ideal $\{0\}$ sadržan u nekom maksimalnom idealu koji je prema dokazanom jezgra nekog karaktera na $\mathbb{A}$. □

Sljedeći teorem je poboljšanje tvrdnje iz Propozicije 1.3.5. u komutativnom slučaju. Naime, pokazuje kako pomoću karaktera potpuno možemo odrediti spektar elementa.

Teorem 1.3.12. *Neka je $\mathbb{A}$ komutativna Banachova algebra.*
Ako je $\mathbb{A}$ unitalna onda

$$\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Omega(\mathbb{A})\}.$$

Ako je $\mathbb{A}$ neunitalna onda

$$\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Omega(\mathbb{A})\} \cup \{0\}.$$

Dokaz. Neka je $\mathbb{A}$ unitalna te $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$ i $a \in \mathbb{A}$. Prema Propoziciji 1.3.2. imamo $\varphi(1) = 1$ pa slijedi $\varphi(\varphi(a)1 - a) = \varphi(a)1 - \varphi(a) = 0$, tj. imamo $\varphi(a)1 - a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ pa slijedi $\varphi(a)1 - a \notin \mathbb{A}^{\times}$. Naime, u suprotnom bi ideal $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sadržavao invertibilan element pa bi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{A}$ što je kontradikcija s time da φ nije nul homomorfizam. Dakle, $\varphi(a) \in \sigma(a)$.

Obratno, neka je $\lambda \in \sigma(a)$, tj. $\lambda 1_{\mathbb{A}} - a \notin \mathbb{A}^{\times}$. Prema Lemi 1.3.7. slijedi da je $\lambda 1_{\mathbb{A}} - a$ sadržan u nekom maksimalnom idealu M. Prema Teoremu 1.3.10. postoji $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$ takav da je $M = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Tada je

$$0 = \varphi(\lambda 1_{\mathbb{A}} - a) = \lambda 1 - \varphi(a) \implies \lambda = \varphi(a).$$

Dakle, $\lambda \in \{\varphi(a) : \varphi \in \Omega(\mathbb{A})\}$.

Neka je sada $\mathbb{A}$ neunitalna. Koristeći već dokazano te identifikaciju $\Omega(\tilde{\mathbb{A}}) = \Omega(\mathbb{A}) \cup \{\varphi_0\}$ imamo

$$\sigma(a) = \sigma_{\mathbb{A}}(a) = \sigma_{\tilde{\mathbb{A}}}(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \Omega(\mathbb{A})\} \cup \{\varphi_0(a)\} = \{\varphi(a) : \varphi \in \Omega(\mathbb{A})\} \cup \{0\}.$$

□

1.4 Gelfandova teorija

Gelfandova teorija je alat koji će nam u nadolazećim razmatranjima biti vrlo koristan. Naime, ona uspostavlja homomorfizam između apstraktne komutativne Banachove algebre i algebre $C_0(\Omega)$ gdje je Ω LCH prostor, tako da bi Gelfandovu teoriju mogli shvatiti kao teoriju reprezentacija za komutativne Banachove algebre.

Neka je $\mathbb{A}$ komutativna Banachova algebra. Teorem 1.3.6. nam govori da je prostor karaktera $\Omega(\mathbb{A})$ sadržan u jediničnoj kugli dualnog prostora $\mathbb{A}'$ kojeg možemo promatrati kao topološki prostor zajedno sa slabom*-topologijom (u nastavku, w*-topologija).
$\Omega(\mathbb{A})$ zajedno s relativnom w*-topologijom zovemo **prostor karaktera** od $\mathbb{A}$.

U nastavku želimo pokazati da prostor karaktera ima neka dobra topološka svojstva. Za to će nam koristiti sljedeći važan teorem iz funkcionalne analize.

Teorem 1.4.1. *(**Banach-Alaoglu**[8]) Neka je X normiran prostor.*
Jedinična kugla $\{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ je kompaktan skup u w-topologiji prostor X'.*

Prije nastavka podsjetimo se osnova w*-topologije. Neka je X normiran prostor. Za $x \in X$ preslikavanje $\hat{x} : X' \to \mathbb{C}$ dano formulom $\hat{x}(f) = f(x)$ je neprekidan linearan funkcional na X'. w*-topologija je slaba topologija na X' generirana svim funkcionalima oblika $\hat{x} \in X''$, $x \in X$. Lako se vidi da funkcionali $\hat{x}$ razlikuju točke od X' pa je w*-topologija Hausdorffova. Hiperniz (f_α) konvergira u w*-topologiji prema funkcionalu f ($f_\alpha \xrightarrow{w*} f$) ako i samo ako $\hat{x}(f_\alpha) \to \hat{x}(f)$, $\forall x \in X$, tj. ako i samo ako $f_\alpha(x) \to f(x)$, $\forall x \in X$. Bazu okolina u točki $f_0 \in X'$ čine skupovi oblika

$$U(f_0; x_1, ...x_n; \epsilon) = \{f \in X' : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon,\ i = 1, ...n\}.$$

U sljedećem teoremu opisujemo topološka svojstva prostora karaktera. Taj prostor i njegova svojstva će nam biti od iznimne važnosti za tzv. Komutativni Gelfand-Naimarkov[9] teorem u kojem ćemo opisati sve komutativne C*-algebre.

Teorem 1.4.2. *Neka je $\mathbb{A}$ komutativna Banachova algebra.*
Tada je $\Omega(\mathbb{A})$ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor. Ako je $\mathbb{A}$ unitalna, tada je $\Omega(\mathbb{A})$ kompaktan.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $\mathbb{A}$ unitalna i pokažimo da je $\Omega(\mathbb{A})$ w*-zatvoren skup. Uzmimo stoga $\varphi_0 \in \overline{\Omega(\mathbb{A})}^{w^*}$. Treba vidjeti $\varphi_0 \in \Omega(\mathbb{A})$, tj. dovoljno je pokazati

$$\varphi_0(ab) = \varphi_0(a)\varphi_0(b),\ \forall a, b \in \mathbb{A},\ \varphi_0(1_\mathbb{A}) = 1.$$

Neka su $a, b \in \mathbb{A}$ te $\epsilon > 0$ proizvoljni. Stavimo $\delta = (1 + \|a\| + |\varphi_0(b)|)^{-1}\epsilon$ i promotrimo skup $U := U(\varphi_0; 1; \epsilon) \cap U(\varphi_0; a, b, ab; \delta)$. Konkretno, imamo

$$U = \{\varphi \in \mathbb{A}' : |\varphi(1_\mathbb{A}) - \varphi_0(1_\mathbb{A})| < \epsilon, |\varphi(a) - \varphi_0(a)| < \delta, |\varphi(b) - \varphi_0(b)| < \delta, |\varphi(ab) - \varphi_0(ab)| < \delta\}.$$

Tada je U w*-otvorena okolina od φ_0 u $\mathbb{A}'$ pa $\Omega(\mathbb{A}) \cap U \neq \emptyset$. Uzmimo $\varphi \in \Omega(\mathbb{A}) \cap U$. φ je karakter od $\mathbb{A}$ pa prema Propoziciji 1.3.2. imamo $\varphi(1_\mathbb{A}) = 1$. Slijedi

$$|1 - \varphi_0(1_\mathbb{A})| = |\varphi(1_\mathbb{A}) - \varphi_0(1_\mathbb{A})| < \epsilon.$$

Kako to vrijedi za svaki $\epsilon > 0$ imamo $\varphi_0(1_\mathbb{A}) = 1$. Nadalje, koristeći multiplikativnost od φ i $\|\varphi\| \leq 1$ imamo

$$\begin{aligned}
|\varphi_0(ab) - \varphi_0(a)\varphi_0(b)| &= |\varphi_0(ab) - \varphi(ab) + \varphi(a)\varphi(b) - \varphi_0(a)\varphi_0(b)| \\
&= |\varphi_0(ab) - \varphi(ab) + \varphi(a)(\varphi(b) - \varphi_0(b)) + \varphi_0(b)(\varphi(a) - \varphi_0(a))| \\
&\leq |\varphi_0(ab) - \varphi(ab)| + |\varphi(a)|\,|\varphi(b) - \varphi_0(b)| + |\varphi_0(b)|\,|\varphi(a) - \varphi_0(a)| \\
&< (1 + \|a\| + |\varphi_0(b)|)\delta = \epsilon.
\end{aligned}$$

[8]Leonidas Alaoglu, 1914-1981, kanadsko-američki matematičar
[9]Mark Naimark, 1909-1978, sovjetski matematičar

Dakle, $\varphi_0(ab) = \varphi_0(a)\varphi_0(b)$.

$\Omega(\mathbb{A})$ je prema Teoremu 1.3.6. sadržan u jediničnoj kugli prostora $\mathbb{A}'$ koja je prema Banach-Alaoglu teoremu w*-kompaktna. Slijedi da je $\Omega(\mathbb{A})$ w*-kompaktan kao zatvoren potprostor w*-kompaktnog skupa.

Time je teorem dokazan ako je $\mathbb{A}$ unitalna algebra. Pretpostavimo sada da je $\mathbb{A}$ neunitalna. Prema Propoziciji 1.3.3. imamo identifikaciju od $\Omega(\mathbb{A})$ s $\Omega(\tilde{\mathbb{A}}) \setminus \{\varphi_0\}$. Kako je w*-topologija Hausdorffova, jednočlani skupovi su zatvoreni, tj. $\Omega(\mathbb{A})$ je otvoren, a prema prethodno dokazanome $\Omega(\tilde{\mathbb{A}})$ je kompaktan. Dakle, $\Omega(\mathbb{A})$ je otvoreni potprostor kompaktnog prostora $\Omega(\tilde{\mathbb{A}})$ pa tvrdnja slijedi iz očite činjenice da je svaki otvoreni topološki potprostor kompaktnog prostora lokalno kompaktan. □

Neka je $\mathbb{A}$ komutativna Banachova algebra i $a \in \mathbb{A}$. Definiramo preslikavanje

$$\hat{a} : \Omega(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}, \ \varphi \mapsto \varphi(a).$$

Jasno je da to preslikavanje neprekidno jer na $\Omega(\mathbb{A})$ gledamo relativnu w*-topologiju. Stoga je iduća definicija smislena.

Definicija 1.4.3. *Neka je $\mathbb{A}$ komutativna Banachova algebra. Preslikavanje*

$$\Gamma_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to C(\Omega(\mathbb{A})), \ a \mapsto \hat{a}$$

*zovemo **Gelfandova transformacija** od $\mathbb{A}$.*

U vidu prethodne definicije, definirali smo preslikavanje između apstraktne komutativne Banachove algebre i algebre neprekidnih funkcija na LCH prostoru. Postavlja se pitanje čuva li to preslikavanje strukturu algebre te ako i kada je ono injektivno ili još bolje, izometrično. Djelomične odgovore daje idući teorem koji opisuje osnovna svojstva Gelfandove transformacije.

Teorem 1.4.4. *Neka je $\mathbb{A}$ komutativna Banachova algebra takva da je $\Omega(\mathbb{A}) \neq \emptyset$ te $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{A}}$ Gelfandova transformacija. Tada*

1. *Γ je homomorfizam algebri koji je i unitalan kada je $\mathbb{A}$ unitalna.*

2. *Ako je $\mathbb{A}$ unitalna, vrijedi $\mathbb{A}^\times = \{a \in \mathbb{A} : \Gamma(a) \in C(\Omega(\mathbb{A}))^\times\}$.*

3. *$\Gamma(\mathbb{A}) \subseteq C_0(\Omega(\mathbb{A}))$ i $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$ za sve $a \in \mathbb{A}$.*

4. *Γ je kontraktivni homomorfizam.*

5. *Familija $\{\Gamma(a) : a \in \mathbb{A}\}$ razlikuje točke od $\Omega(\mathbb{A})$.*

6. *Γ je izometrija ako i samo ako vrijedi $\|a^2\| = \|a\|^2$ za sve $a \in \mathbb{A}$.*

Dokaz. 1. Neka su $a, b \in \mathbb{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ te $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$. Tada

$$(\Gamma(\alpha a + \beta b))(\varphi) = \varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) =$$
$$\alpha(\Gamma(a))(\varphi) + \beta(\Gamma(b)) = (\alpha\Gamma(a) + \beta\Gamma(b))(\varphi),$$

Dakle, $\Gamma(\alpha a + \beta b) = \alpha\Gamma(a) + \beta\Gamma(b)$, tj. Γ je linearno. Nadalje, imamo

$$\Gamma(ab)(\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = (\Gamma(a))(\varphi)(\Gamma(b))(\varphi) = (\Gamma(a))(\Gamma(b))(\varphi),$$

tj. $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\Gamma(b)$. Dakle, Γ je homomorfizam algebri.
Neka je sada $\mathbb{A}$ unitalna. Koristeći Propoziciju 1.3.2. imamo

$$\Gamma(1_{\mathbb{A}})(\varphi) = \varphi(1_{\mathbb{A}}) = 1, \text{ tj. } \Gamma(1_{\mathbb{A}}) \equiv 1.$$

Dakle, Γ je unitalni homomorfizam.

2. Neka je $\mathbb{A}$ unitalna. Prema Teoremu 1.3.12. imamo

$$a \in \mathbb{A}^\times \iff 0 \notin \sigma(a) \iff \varphi(a) \neq 0,\ \forall\varphi \in \Omega(\mathbb{A}) \iff$$
$$(\Gamma(a))(\varphi) \neq 0,\ \forall\varphi \in \Omega(\mathbb{A}) \iff \Gamma(a) \in C(\Omega(\mathbb{A}))^\times.$$

3. Koristeći Teorem 1.3.12. imamo

$$\|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\varphi\in\Omega(\mathbb{A})} |\hat{a}(\varphi)| = \sup_{\varphi\in\Omega(\mathbb{A})} |\varphi(a)| = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| = r(a).$$

Očito je dovoljno dokazati $\Gamma(\mathbb{A}) \subseteq C_0(\Omega(\mathbb{A}))$ u slučaju kad je $\mathbb{A}$ neunitalna jer kada je $\mathbb{A}$ unitalna imamo $C_0(\Omega(\mathbb{A})) = C(\Omega(\mathbb{A}))$. Neka je $a \in \mathbb{A}$ proizvoljan. Znamo $\Gamma(a) = \hat{a} \in C(\Omega(\mathbb{A}))$. Trebamo pokazati da je za dani $\epsilon > 0$ skup $\{\varphi \in \Omega(\mathbb{A}) : |\hat{a}(\varphi)| \geq \epsilon\}$ w*-kompaktan. Znamo da za svaki karakter φ vrijedi $\|\varphi\| \leq 1$ (Teorem 1.3.6.). Dakle, imamo $\{\varphi \in \Omega(\mathbb{A}) : |\hat{a}(\varphi)| \geq \epsilon\} \subseteq \overline{K}(0, 1)$. $\overline{K}(0, 1)$ je w*-kompaktan skup prema Banach-Alaoglu teoremu.
$\{\varphi \in \Omega(\mathbb{A}) : |\hat{a}(\varphi)| \geq \epsilon\} = |\hat{a}|^{-1}([\epsilon, \infty\rangle)$ je w*-zatvoren kao praslika zatvorenog skupa pri neprekidnoj funkciji. Sada je $\{\varphi \in \Omega(\mathbb{A}) : |\hat{a}(\varphi)| \geq \epsilon\}$ w*-kompaktan kao w*-zatvoren podskup w*-kompaktnog skupa $\overline{K}(0, 1)$.

4. Prema Teoremu 1.3.6. imamo da je svaki $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$ ograničen linearan funkcional i $\|\varphi\| \leq 1$. Stoga za $a \in \mathbb{A}$ i $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$ vrijedi

$$|\Gamma(a)(\varphi)| = |\hat{a}(\varphi)| = |\varphi(a)| \leq \|\varphi\|\ \|a\| \leq \|a\|.$$

Dakle, za $a \in \mathbb{A}$ imamo

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \sup_{\varphi \in \Omega(\mathbb{A})} |\Gamma(a)(\varphi)| \le \|a\|.$$

Slijedi da je Γ neprekidan i $\|\Gamma\| \le 1$.

5. Ako su $\varphi,\ \psi \in \Omega(\mathbb{A})$, t.d. $\varphi \neq \psi$ onda postoji $a \in \mathbb{A}$, t.d. $\varphi(a) \neq \psi(a)$. Tada $\Gamma(a)(\varphi) \neq \Gamma(a)(\psi)$.

6. Neka je Γ izometrija, tj. $\|\hat{a}\|_\infty = \|a\|$. Tada je

$$\|a^2\| = \|\widehat{a^2}\|_\infty = \|\hat{a}^2\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty^2 = \|a\|^2.$$

Obratno, neka vrijedi $\|a^2\| = \|a\|^2,\ \forall a \in \mathbb{A}$. Indukcijom jednostavno slijedi $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Sada iz 3. i formule za spektralni radijus (Teorem 1.2.8.) slijedi

$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \|\hat{a}\|_\infty = r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2n}} = \|a\|.$$

□

Rezimirajmo prethodni teorem. Ako je $\mathbb{A}$ komutativna Banachova algebra takva da $\Omega(\mathbb{A}) \neq \emptyset$, onda je

$$A \to C_0(\Omega(\mathbb{A})),\ a \mapsto \hat{a}$$

kontraktivni homomorfizam i $\|\hat{a}\|_\infty = r(a)$.

Ako već ne možemo dobiti da je Gelfandova transformacija izometrična, možemo se zapitati kada je ona samo injektivna. Imamo

$$\mathrm{Ker}(\Gamma) = \{a \in \mathbb{A} : \hat{a} = 0\} = \{a \in \mathbb{A} : \varphi(a) = 0,\ \forall a \in \mathbb{A}\} = \bigcap_{\varphi \in \Omega(\mathbb{A})} \mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(\mathbb{A})} M.$$

Zadnja jednakost slijedi iz činjenice da su jezgre karaktera u bijektivnoj korespondenciji sa skupom svih modularnih maksimalnih ideala od $\mathbb{A}$ (Teorem 1.3.10.).

Ideal $\bigcap_{M \in \mathrm{Max}(\mathbb{A})} M$ zovemo **radikalom** od $\mathbb{A}$ te ga označavamo s $\mathrm{rad}(\mathbb{A})$. U slučaju da je $\mathrm{rad}(\mathbb{A}) = \emptyset$ kažemo da je $\mathbb{A}$ **poluprosta**. Reformulirajući, Gelfandova transformacija je injektivna ako i samo ako je $\mathbb{A}$ poluprosta. Spomenimo još da za algebru koja nema netrivijalne ideale kažemo da je **prosta**. Uočimo da je pojam proste Banachove algebre zanimljiv samo u nekomutativnom slučaju budući je svaka unitalna prosta komutativna Banachova algebra izomorfna s $\mathbb{C}$. Naime, neka je $\mathbb{A}$ unitalna prosta komutativna Banachova algebra i pretpostavimo da postoji $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ neinvertibilan. Tada je $a\mathbb{A}$ pravi ideal u $\mathbb{A}$ što je nemoguće. Dakle, svaki nenul element od $\mathbb{A}$ je invertibilan pa je prema Gelfand-Mazurovom teoremu (Teorem 1.2.9.) $\mathbb{A}$ (izometrički) izomorfna s $\mathbb{C}$.

Poglavlje 2

C*-algebre

2.1 Osnovni pojmovi i rezultati

U ovom točki započinjemo s proučavanjem C*-algebri te razmatramo njihova najbitnija svojstva. Uvodimo tzv. funkcionalni račun za normalan element te dokazujemo Komutativni Gelfand-Naimarkov teorem kojim identificiramo apstraktnu C*-algebru s prostorom neprekidnih funkcija na LCH prostoru koje iščezavaju u beskonačnosti.

Osnovna struktura s kojom ćemo je raditi je *-algebra. Tu se radi o algebri s dodatnom operacijom koja apstrahira operaciju konjugiranja na kompleksnim brojevima te operaciju adjungiranja na $B(\mathcal{H})$ gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov[10] prostor.

Definicija 2.1.1. *Neka je $\mathbb{A}$ algebra.* **Involucija** *na $\mathbb{A}$ je preslikavanje $^*: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ takvo da vrijedi:*
1) $(a^*)^* = a, \ \forall a \in \mathbb{A}$.
2) $(a + b)^* = a^* + b^*, \ \forall a, b \in \mathbb{A}$.
3) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*, \ \forall a \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
4) $(ab)^* = b^* a^*, \ \forall a, b \in \mathbb{A}$.
Algebru na kojoj je zadana involucija zovemo ***-algebra**.

Iz svojstva 1) jasno je da je involucija bijekcija s $\mathbb{A}$ na $\mathbb{A}$. Nadalje, ako je $\mathbb{A}$ unitalna algebra vrijedi $1^* = 1$. Zaista, $a1^* = (a^*)^*1^* = (1a^*)^* = (a^*)^* = a$. Analogno, $1^*a = a$. Dakle, 1^* je jedinica u algebri $\mathbb{A}$ pa iz jedinstvenosti jedinice slijedi $1^* = 1$.

Primjer 2.1.2. *Osnovni primjer *-algebre je algebra $\mathbb{C}$ zajedno s kompleksnim konjugiranjem $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$.*

---
[10] David Hilbert, 1862-1943, njemački matematičar

Primjer 2.1.3. *Neka je Ω LCH prostor. Tada je $C_0(\Omega)$ *-algebra s involucijom $f \mapsto f^*$, $f^*(\omega) = \overline{f(\omega)}$, $\omega \in \Omega$. Posebno, ako je Ω kompaktan prostor, $C(\Omega)$ je *-algebra.*

Primjer 2.1.4. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Za $A \in B(\mathcal{H})$ znamo da postoji jedinstveni $A^* \in B(\mathcal{H})$ takav da vrijedi*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \ \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Preslikavanje $A \mapsto A^*$ definira involucija na $B(\mathcal{H})$.

Definicija 2.1.5. ***Normirana *-algebra** je *-algebra $\mathbb{A}$ za čiju involuciju vrijedi $\|a^*\| = \|a\|$, $\forall a \in \mathbb{A}$. Ako je $\mathbb{A}$ i Banachova kažemo da je ona **Banachova *-algebra**.*

Svi dosadašnji primjeri *-algebri su ujedno bili i primjeri Banachovih *-algebri. Primijetimo da uvjet $\|a^*\| = \|a\|$ osigurava neprekidnost involucije.

Neka je S podskup *-algebre $\mathbb{A}$. Definiramo $S^* = \{a^* : a \in S\}$. Ako je vrijedi $S^* = S$ kažemo da je S **samoadjungiran**. Za samoadjungiranu podalgebru $\mathbb{B}$ od $\mathbb{A}$ kažemo da je ***-podalgebra** od $\mathbb{A}$. Primijetimo da je tada $\mathbb{B}$ i sama *-algebra.

Ako je I samoadjungirani ideal, tada kvocijentna algebra $\mathbb{A}/I$ postaje *-algebra zajedno s involucijom $(a + I)^* = a^* + I$.

Na unitizaciji algebre $\tilde{\mathbb{A}}$ definiramo involuciju s $(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$. Tako $\tilde{\mathbb{A}}$ postaje *-algebra i uz identifikaciju $\mathbb{A} \to \mathbb{A} \times \{0\}$ je $\mathbb{A}$ samoadjungirani ideal od $\tilde{\mathbb{A}}$.

Za $a \in \mathbb{A}$ kažemo da je **hermitski** ako je $a = a^*$. Za svaki $a \in \mathbb{A}$ postoje jedinstveni hermitski elementi $b, c \in \mathbb{A}$ takvi da vrijedi $a = b + ic$ ($b = \frac{1}{2}(a + a^*)$, $c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$). b zovemo **realni**, a c **imaginarni** dio od a. Dakle, ako označimo s $\mathbb{A}_h$ skup svih hermitskih elemenata u $\mathbb{A}$ možemo pisati $\mathbb{A} = \mathbb{A}_h \oplus i\mathbb{A}_h$.

Kažemo da je $a \in \mathbb{A}$ **normalan** ako $aa^* = a^*a$ te **unitaran** ako $aa^* = a^*a = 1$.

Iduća propozicija pokazuje kako je spektar usuglašen i sa involucijom na *-algebri.

Propozicija 2.1.6. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna *-algebra i $a \in \mathbb{A}$. Vrijedi $a \in \mathbb{A}^\times$ ako i samo ako $a^* \in \mathbb{A}^\times$ te vrijedi $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Također, vrijedi*

$$\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)} := \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi direktno iz činjenice $1^* = 1$ te sljedećeg:

$$a \in \mathbb{A}^\times \iff aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \iff (a^{-1})^*a^* = a^*(a^{-1})^* = 1.$$

Koristeći upravo dokazano imamo:

$$\lambda \notin \sigma(a) \iff \lambda 1 - a \in \mathbb{A}^\times \iff (\lambda 1 - a)^* \in \mathbb{A}^\times \iff \overline{\lambda} 1 - a^* \in \mathbb{A}^\times \iff \overline{\lambda} \notin \sigma(a^*).$$

□

Prelazimo na definiciju centralnog objekta ovog rada, C*-algebre.

Definicija 2.1.7. *Za Banachovu *-algebru $\mathbb{A}$ kažemo da je* **C*-algebra** *ako je zadovoljeno* **C*-svojstvo**, *tj. vrijedi* $\|a^*a\| = \|a\|^2, \ \forall a \in \mathbb{A}$.

Zatvorenu *-podalgebru $\mathbb{B}$ C*-algebre $\mathbb{A}$ zvat ćemo C*-*podalgebra*. Ako je ujedno $\mathbb{A}$ unitalna i $\mathbb{B}$ sadrži njenu jedinicu, kažemo da je $\mathbb{B}$ *unitalna* C*-*podalgebra*.

Ispostavlja se da dana definicija C*-algebre nije optimalna, tj. u definiciji možemo tražiti slabiji uvjet. Preciznije, imamo sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.1.8. *Neka je* $\mathbb{A}$ *Banachova *-algebra.*
Ako vrijedi $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|, \ \forall a \in \mathbb{A}$ *tada je* $\mathbb{A}$ C*-*algebra.*

Dokaz. Iz nejednakosti $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\| \, \|a\|$ imamo $\|a\| \leq \|a^*\|$. Kako je $(a^*)^* = a$, iz iste nejednakosti primjenjene na a^* imamo $\|a^*\| \leq \|a\|$. Dakle, $\|a\| = \|a^*\|$. Sada imamo $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\| \, \|a\| = \|a\|^2$, tj. $\|a^*a\| = \|a\|^2$. □

Primijetimo kako smo ujedno pokazali da iz C*-svojstva slijedi $\|a^*\| = \|a\|$. Drugim riječima, mogli smo definirati C*-algebru kao Banachovu *-algebru čija norma zadovoljava C*-svojstvo (ili još općenitije uvjet iz prethodne propozicije).

Svi dosadašnji primjeri *-algebri su ujedno i primjeri C*-algebri, no najvažniji primjer C*-algebre će nam zasigurno biti $B(\mathcal{H})$ gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Slavni Gelfand-Naimarkov teorem govori kako se svaka C*-algebra može realizirati kao C*-podalgebra od $B(\mathcal{H})$ za neki Hilbertov prostor $\mathcal{H}$.

Propozicija 2.1.9. *Neka je* $\mathbb{A}$ C*-*algebra. Za hermitski element* $a \in \mathbb{A}$ *vrijedi* $r(a) = \|a\|$.

Dokaz. Neka je a hermitski. Tada je $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Sada indukcijom jednostavno slijedi $\|a^{2n}\| = \|a\|^{2n}$. Formula za spektralni radijus (Teorem 1.2.8.) nam daje $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \|a\|^{\frac{2^n}{2^n}} = \|a\|$. □

Vrijedi i jača verzija prethodne propozicije. Naime, $r(a) = \|a\|$ za sve *normalne* elemente, kao što ćemo kasnije i pokazati (Korolar 2.2.11.).

Ovaj jednostavan rezultat ima zanimljiv i važan korolar.

Korolar 2.1.10. *Postoji najviše jedna norma na *-algebri koja na njoj definira strukturu* C*-*algebre.*

Dokaz. Neka je $\| \cdot \|$ norma na *-algebri $\mathbb{A}$ koja ju čini C*-algebrom. Za proizvoljan $a \in \mathbb{A}$ je a^*a hermitski pa prema prethodnoj propozicij vrijedi $r(a^*a) = \|a^*a\|$. Dakle,

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a^*a)} |\lambda|.$$

Vidimo da $\|\cdot\|$ ovisi samo o *-strukturi na $\mathbb{A}$ pa slijedi da je takva norma jedinstvena. □

Prelazimo na problem unitizacije neunitalne C*-algebre. Već smo vidjeli kako je za Banachovu algebru $\mathbb{A}$ njena unitizacija $\tilde{\mathbb{A}}$ s normom $\|(a,\lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$ Banachova algebra. Nadalje, jednostavno je za provjeriti da u slučaju kad je $\mathbb{A}$ Banachova *-algebra da je također i $\tilde{\mathbb{A}}$ Banachova *-algebra s istom normom (uz involuciju danu s $(a,\lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$). No, u slučaju da je $\mathbb{A}$ C*-algebra, uz tu normu $\tilde{\mathbb{A}}$ nije nužno C*-algebra. Na primjer, uzmimo $\mathbb{A} = \mathbb{C}$ i $(a,\lambda) = (-2,1)$. Tada $\|(a,\lambda)\|^2 = 9$ ali $\|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| = 1$.

Sada nam je cilj proizvoljnoj C*-algebri pridružiti određenu unitalnu C*-algebru u koju početnu možemo izometrički *-homomorfno uložiti.

Definicija 2.1.11. ***Dvostruki centralizator*** C*-*algebre* $\mathbb{A}$ *je par* (L,R) *gdje su* $L,R \in B(\mathbb{A})$, *takvi da za sve* $a,b \in \mathbb{A}$ *vrijedi*

$$L(ab) = L(a)b, \ \ R(ab) = aR(b), \ \ R(a)b = aL(b).$$

Primjer 2.1.12. *Neka je* $\mathbb{A}$ C*-*algebra i* $c \in \mathbb{A}$. *Definiramo* $L_c,\ R_c : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$

$$L_c(a) = ca, \ \ R_c(a) = ac.$$

Tada je (L_c, R_c) *jedan dvostruki centralizator na* $\mathbb{A}$. L_c (R_c) *zovemo lijevi (desni) multiplikator.*

Lema 2.1.13. *Neka je* $\mathbb{A}$ C*-*algebra i* $a \in \mathbb{A}$. *Tada je* $\|a\| = \sup_{\|b\|\le 1} \|ab\| = \sup_{\|b\le 1|} \|ba\|$.

Dokaz. Uzmimo $b \in \mathbb{A}$, $\|b\| \le 1$. Tada $\|ab\| \le \|a\|\,\|b\| \le \|a\|$ pa slijedi

$$\sup_{\|b\|\le 1} \|ab\| \le \|a\|.$$

Neka je sada $a \neq 0$. Tada je $\|\frac{a^*}{\|a\|}\| = 1$ pa imamo

$$\sup_{\|b\|\le 1} \|ab\| = \|a\| \sup_{\|b\|\le 1} \|\frac{a}{\|a\|} b\| \ge \|a\|\,\|\frac{a}{\|a\|}\frac{a^*}{\|a\|}\| = \frac{1}{\|a\|}\|a\|^2 = \|a\|.$$

Kako ova nejednakost očito vrijedi i za $a = 0$ sveukupno imamo $\|a\| = \sup_{\|b\|\le 1} \|ab\|$.
Analogno, $\|a\| = \sup_{\|b\|\le 1} \|ba\|$. □

Lema 2.1.14. *Neka je* (L,R) *dvostruki centralizator* C*-*algebre* $\mathbb{A}$. *Tada* $\|L\| = \|R\|$.

Dokaz. Kako je $\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \le \|R\|\,\|a\|\,\|b\|$, koristeći prethodnu lemu imamo

$$\|L(b)\| = \sup_{\|a\|\leq 1} \|aL(b)\| \leq \|R\|\,\|b\|$$

te stoga $\|L\| \leq \|R\|$. Slično, $\|R(a)b\| = \|aL(b)\| \leq \|L\|\,\|a\|\,\|b\|$ pa opet zbog Leme 2.1.13. imamo

$$\|R(a)\| = \sup_{\|b\|\leq 1} \|R(a)b\| \leq \|L\|\,\|a\|$$

te stoga $\|R\| \leq \|L\|$. Dakle, $\|L\| = \|R\|$. □

Neka je $\mathbb{A}$ C*-algebra i označimo skup svih dvostrukih centralizatora s $M(\mathbb{A})$. Uz zbrajanje i množenje skalarima po komponenatama, a u svakoj komponenti po točkama, $M(\mathbb{A})$ postaje vektorski prostor. Sada na njemu, pozivajući se na prethodnu lemu, definiramo normu s $\|(L,R)\| = \|L\| = \|R\|$.

Za $(L_1,R_1),\ (L_2,R_2) \in M(\mathbb{A})$ definiramo množenje

$$(L_1,R_1)(L_2,R_2) = (L_1L_2, R_2R_1).$$

Direktnom provjerom vidimo da uz definirano množenje $M(\mathbb{A})$ postaje algebra.

Za linearni operator $L : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ definiramo $L^* : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ s $L^*(a) = (L(a^*))^*$. Tada je L^* također linearan i preslikavanje $L \to L^*$ je antilinearna izometrija s $B(\mathbb{A})$ na $B(\mathbb{A})$. Također, vrijedi $L^{**} = L$ i $(L_1L_2)^* = L_1^*L_2^*$. Za dvostruki centralizator (L,R) definiramo $(L,R)^* = (R^*,L^*)$. Rutinska je provjera da je dano preslikavanje involucija na $M(\mathbb{A})$. Nadalje uvijek shvaćamo $M(\mathbb{A})$ kao *-algebru uz gore definirane operacije. Ispostavlja se da tada imamo i finiju strukturu na $M(\mathbb{A})$.

Teorem 2.1.15. *Ako je $\mathbb{A}$ C*-algebra, tada je $M(\mathbb{A})$ C*-algebra.*

Dokaz. $M(\mathbb{A})$ je Banachova algebra jer na njoj gledamo operatorsku normu koja je potpuna jer je $\mathbb{A}$ Banachova.

Ostaje pokazati da za dvostruki centralizator $T = (L,R)$ vrijedi $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Neka je $a \in \mathbb{A},\ \|a\| \leq 1$. Imamo

$$\|L(a)\|^2 = \|(L(a))^*L(a)\| = \|L^*(a^*)L(a)\| = \|a^*R^*L(a)\| \leq \|R^*L\| = \|T^*T\|.$$

Stoga,

$$\|T\|^2 = \sup_{\|a\|\leq 1} \|L(a)\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T\|^2.$$

Dakle, $\|T^*T\| = \|T\|^2$. □

Algebru $M(\mathbb{A})$ zovemo **multiplikatorska algebra** od $\mathbb{A}$.

Propozicija 2.1.16. *Neka je* $\mathbb{A}$ C*-*algebra. Tada je preslikavanje*

$$\mathbb{A} \to M(\mathbb{A}),\ a \mapsto (L_a, R_a)$$

*izometrički *-homomorfizam. Nadalje,* $\mathbb{A}$ *je ideal u* $M(\mathbb{A})$.

Dokaz. Prema Primjeru 2.1.12. zaista imamo preslikavanje $\mathbb{A} \to M(\mathbb{A})$. Za proizvoljan $a \in \mathbb{A}$ odredimo normu od (L_a, R_a). Koristeći Lemu 2.1.13. imamo

$$\|(L_a, R_a)\| = \|L_a\| = \sup_{\|b\|\leq 1} \|L_a(b)\| = \sup_{\|b\|\leq 1} \|ab\| = \|a\|.$$

Dakle, $a \mapsto (L_a, R_a)$ je izometrija. Linearnost preslikavanja je očita, tako da ostaje pokazati da je ono *-homomorfizam. Trebamo pokazati da je

$$(L_{a^*}, R_{a^*}) = (L_a, R_a)^* = (R_a^*, L_a^*).$$

Neka je $b \in \mathbb{A}$ proizvoljan. Tada imamo

$$R_a^*(b) = (R_a(b^*))^* = (b^* a)^* = a^* b = L_{a^*}(b).$$

Time smo pokazali $L_{a^*} = R_a^*$ te se analogno pokaže $R_{a^*} = L_a^*$. Dakle, preslikavanje je zaista *-homomorfizam.

U vidu upravo dokazane tvrdnje, $\mathbb{A}$ možemo identificirati s *-podalgebrom od $M(\mathbb{A})$ i uz tu identifikaciju tvrdimo da je ona ideal u $M(\mathbb{A})$.

Uzmimo $(L, R) \in \mathbb{A}$ i proizvoljan $a \in \mathbb{A}$ te promotrimo

$$(L, R)(L_a, R_a) = (LL_a, R_a R).$$

Ono što treba dokazati je da postoji $c \in \mathbb{A}$ takav da

$$(LL_a, R_a R) = (L_c, R_c).$$

Kako je $LL_a(b) = L(ab) = L(a)b = L_{L(a)}(b)$ i $R_a R(b) = R(b)a = bL(a) = R_{L(a)}(b)$ možemo uzeti $c = L(a)$ i imamo traženu tvrdnju. Analogna tvrdnja vrijedi za $(L_a, R_a)(L, R)$ pa imamo da je $\mathbb{A}$ obostrani ideal u $M(\mathbb{A})$. $\square$

Primijetimo da je $M(\mathbb{A})$ unitalna C*-algebra s jedinicom $(\mathrm{id}_{\mathbb{A}}, \mathrm{id}_{\mathbb{A}})$. Dakle, vrijedi da su $\mathbb{A}$ i $M(\mathbb{A})$ izomorfne ako i samo ako je $\mathbb{A}$ unitalna.

Idućim teoremom riješeno je pitanje unitizacije C*-algebre.

Teorem 2.1.17. *Za* C*-*algebru* $\mathbb{A}$ *postoji jedinstveno proširenje norme na njezinoj unitizaciji* $\tilde{\mathbb{A}}$ *koje na njoj definira strukturu* C*-*algebre.*

Dokaz. Jedinstvenost odmah slijedi iz Korolara 2.1.10.

Što se tiče egzistencije, pretpostavimo prvo da je $\mathbb{A}$ unitalna. Tada je preslikavanje

$$\varphi : \tilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A} \oplus \mathbb{C},\ \varphi(a, \lambda) = (a + \lambda 1, \lambda)$$

*-izomorfizam. Zaista, očito je Ker $\varphi = \{(0_{\mathbb{A}}, 0)\}$ pa je φ injekcija. Nadalje, za proizvoljni $(a_0, \lambda_0) \in \mathbb{A} \oplus \mathbb{C}$ je $\varphi(a_0 - \lambda 1, \lambda_0) = (a_0, \lambda_0)$ pa je φ surjekcija. Također,

$$\varphi(a^*, \overline{\lambda}) = (a^* + \overline{\lambda}1, \overline{\lambda}) = (a^* + \lambda 1, \lambda)^*.$$

Dakle, φ je *-izomorfizam pa je traženo proširenje norme dano s $\|(a, \lambda)\| = \|\varphi(a, \lambda)\|$.

Sada pretpostavimo da je $\mathbb{A}$ neunitalna. Tada je $\mathbb{A} \cap \mathbb{C}1_{M(\mathbb{A})} = \{0\}$ jer inače bi, kako je $\mathbb{A}$ ideal u $M(\mathbb{A})$, bilo $\mathbb{A} = M(\mathbb{A})$, tj. $\mathbb{A}$ bi bila unitalna. Sada je preslikavanje

$$\varphi : \tilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A} \oplus \mathbb{C}1_{M(\mathbb{A})},\ \varphi(a, \lambda) = (a, \lambda 1_{\mathbb{A}})$$

*-izomorfizam pa je traženo proširenje norme dano s $\|(a, \lambda)\| = \|\varphi(a, \lambda)\|$. □

Od sada pa nadalje, kada ćemo promatrati unitizaciju neunitalne C*-algebre smatrati ćemo da je opskrbljena jedinstvenom normom koja ju čini C*-algebrom.

U idućih par rezultata ćemo proučiti kakve posljedice C*-svojstvo ima na *-homomorfizme C*-algebri.

Teorem 2.1.18. *Svaki *-homomorfizam između* C*-*algebri je kontraktivan.*

Dokaz. Neka je $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *-homomorfizam C*-algebri.
Pretpostavimo prvo da su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ unitalne te da je φ unitalan homomorfizam. Kako je $\varphi(\mathbb{A}^\times) \subseteq \mathbb{B}^\times$ vrijedi $\sigma_{\mathbb{B}}(\varphi(a)) \subseteq \sigma_{\mathbb{A}}(a),\ \forall a \in \mathbb{A}$. Slijedi $r(\varphi(a)) \leq r(a),\ \forall a \in \mathbb{A}$. Sada zbog Propozicije 2.1.9. imamo

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| = r(\varphi(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Dakle, φ je kontrakcija.

Sada uzmimo da je samo $\mathbb{A}$ unitalna. Tada je $\varphi(1_{\mathbb{A}})$ jedinica u *-algebri $\varphi(\mathbb{A})$. Neka je $\mathbb{D} = \overline{\varphi(\mathbb{A})}$ i da je tada $\mathbb{D}$ C*-algebra. Kako je množenje neprekidno (Propozicija 1.1.1.) i jer je $\varphi(\mathbb{A})$ gusta u $\mathbb{D}$ možemo zaključiti da je $\varphi(1_{\mathbb{A}})$ jedinica u $\mathbb{D}$. Pošto spektralni radijus ne ovisi o ambijentalnoj C*-algebri (Teorem 2.2.15.) istim računom kao ranije zaključujemo da je φ kontrakcija.

Neka sada ni $\mathbb{A}$ nije unitalna. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbb{B}$ unitalna. Naime, inače bismo $\mathbb{B}$ mogli zamijeniti s $\tilde{\mathbb{B}}$. Definiramo $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{B}$ kao $\tilde{\varphi}(a + \lambda 1_{\mathbb{A}}) = \varphi(a) + \lambda 1_{\mathbb{B}}$. Tada je $\tilde{\varphi}$ unitalan *-homomorfizam koji proširuje φ. Prema dokazanome imamo da je $\tilde{\varphi}$ kontrakcija pa je i $\varphi = \tilde{\varphi}|_{\mathbb{A}}$ kontrakcija. □

Iako smo koristili Teorem 2.2.15. (kojeg još nismo dokazali) kada dođemo do njegovog dokaza vidjet ćemo da nismo koristili prošli teorem ili neke njegove posljedice. Drugim riječima, argumentacija nije cirkularna.

Korolar 2.1.19. *Svaki *-izomorfizam između* C*-*algebri je izometrija.*

Dokaz. Neka je $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *-izomorfizam C*-algebri. Kako je φ^{-1} također *-homomorfizam koristeći prethodnu propoziciju imamo

$$\|a\| = \|\varphi^{-1}(\varphi(a))\| \leq \|\varphi(a)\| \leq \|a\|$$

tj. $\|\varphi(a)\| = \|a\|$. □

Poslije ćemo vidjeti da je dovoljno zahtijevati da se radi o *-monomorfizmu da bi dokazali njegovu izometričnost (Teorem 2.4.6.).

U konačnodimenzionalnom slučaju je spektar unitarnog operatora sadržan u jediničnoj kružnici, dok je spektar hermitskog operatora realan. Analogna tvrdnja vrijedi i u apstraktnijem okruženju proizvoljne C*-algebre.

Propozicija 2.1.20. *Neka je* $\mathbb{A}$ *unitalna* C*-*algebra i* $a \in \mathbb{A}$.

1. *Ako je a unitaran, onda je* $\sigma(a) \subseteq S(0, 1)$.
2. *Ako je a hermitski, onda je* $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Dokaz.

1. Neka je $a \in \mathbb{A}$ unitaran. Imamo $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|1\| = 1$. Dakle, $\|a\| = 1$. Za $\lambda \in \sigma(a)$ imamo $|\lambda| \leq 1$ jer vrijedi $r(a) \leq \|a\| = 1$. Slično, $\|a^*\|^2 = \|aa^*\| = \|1\| = 1$ pa $\|a^*\| = 1$. Tada je (Teorem 1.2.10.) $\lambda^{-1} \in \sigma(a^{-1}) = \sigma(a^*)$ pa, istim argumentom kao prije, imamo $|\lambda^{-1}| \leq 1$, tj. $|\lambda| \geq 1$. To zajedno s $|\lambda| \leq 1$ daje $|\lambda| = 1$.

2. Neka je $a \in \mathbb{A}$ hermitski i promotrimo element $e^{ia} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!}$. e^{ia} je dobro definiran element od $\mathbb{A}$ jer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\tfrac{(ia)^n}{n!}\| = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\|a^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\|a\|^n}{n!} < \infty.$$

Dakle, red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!}$ konvergira apsolutno, pa kako se nalazimo u Banachovom prostoru, konvergira i obično. Tvrdimo da je e^{ia} unitaran element. Prvo, primijetimo kako iz $\|a^*\| = \|a\|$ slijedi da je involucija neprekidan linearan operator na $\mathbb{A}$. Stoga, imamo

$$(e^{ia})^* = (\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(ia)^n}{n!})^* = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n i^n a^n}{n!} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}.$$

Dakle, e^{ia} je unitaran element pa prema 1. slijedi $\sigma(e^{ia}) \subseteq S(0, 1)$.

Neka je sada $\lambda \in \sigma(a)$ i promotrimo element $b := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(a - \lambda)^{n-1}$. Slično kao prije, zbog potpunosti od $\mathbb{A}$, imamo da je b dobro definiran element od $\mathbb{A}$. Primijetimo da a i b komutiraju što se svodi na činjenicu da a i $(a - \lambda)^{n-1}$ komutiraju. Imamo

$$(a - \lambda)b = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{i^n}{n!}(a - \lambda)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{i^n}{n!}(a - \lambda)^n - 1 = e^{i(a-\lambda)} - 1$$

$$e^{ia} - e^{i\lambda} = (e^{i(a-\lambda)} - 1)e^{i\lambda} = (a - \lambda)be^{i\lambda}.$$

Iz posljednje jednakosti slijedi $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia})$. Zaista, kad bi $e^{ia} - e^{i\lambda} \in \mathbb{A}^\times$ tada bi $be^{i\lambda}(e^{ia} - e^{i\lambda})^{-1}$ bio inverz za $a - \lambda$ što je kontradikcija s $a - \lambda \notin \mathbb{A}^\times$. Dakle, $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia})$ pa $|e^{i\lambda}| = 1$ što vrijedi ako i samo ako $\lambda \in \mathbb{R}$ (jer je $|e^{i\lambda}| = e^{-\mathrm{Im}\lambda}$).

□

Zadnje što ćemo pokazati vezano za karaktere jest da oni automatski poštuju *-strukturu C*-algebre.

Propozicija 2.1.21. *Za φ karakter* C*-*algebre $\mathbb{A}$ vrijedi $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$, $\forall a \in \mathbb{A}$.*

Dokaz. Uzmimo $a \in \mathbb{A}$ i napišimo ga kao $a = b + ic$ gdje su $b, c \in \mathbb{A}$ hermitski elementi. Skalari $\varphi(b)$ i $\varphi(c)$ su realni jer se prema Propoziciji 1.3.5. nalaze u $\sigma(b)$, tj. $\sigma(c)$, koji su prema prethodnoj propoziciji podskupovi od $\mathbb{R}$. Slijedi

$$\varphi(a^*) = \varphi(b - ic) = \varphi(b) - i\varphi(c) = \overline{\varphi(a) + i\varphi(c)} = \overline{\varphi(a)}.$$

□

2.2 Komutativne C*-algebre

Prisjetimo se da je Gelfandova transformacije za komutativne Banachove algebre injektivna ako i samo ako je ona poluprosta. Dakle, općenito Gelfandova transformacija ne može nam dati sve informacije o samoj algebri koju proučavamo. Cilj ovog poglavlja je dokazati takozvani Komutativni Gelfand-Naimarkov teorem koji govori da su komutativne C*-algebre izometrički izomorfne prostoru $C_0(\Omega(\mathbb{A}))$, odnosno $C(\Omega(\mathbb{A}))$ u unitalnom slučaju i upravo će Gelfandova transformacija uspostavljati taj izomorfizam.

U postizanju tog cilja morat ćemo prvo razviti jednu općenitiju teoriju za komutativne Banachove algebre koja će kulminirati Stone[11]-Weierstrassovim[12] teoremom.

Za proučavanje $\hat{\mathbb{A}} = \Gamma(\mathbb{A})$ komutativne Banachove algebre $\mathbb{A}$ u algebri $C(\Omega(\mathbb{A})$ (tj. $C_0(\Omega(\mathbb{A}))$ proučavat ćemo podalgebre od $C(K)$, K kompaktan Hausdorffov prostor (u daljnjem tekstu CH prostor), u svrhu nalaženja dovoljnih uvjeta da bi takva podalgebra bila gusta u $C(K)$.

U daljnjem neka je K CH prostor i $C(K, \mathbb{R})$ Banachova algebra svih neprekidnih realnih funkcija na K.

[11]Marshall H. Stone, 1903-1989, američki matematičar
[12]Karl Weierstrass, 1815-1897, njemački matematičar

Za funkcije $f, g : K \to \mathbb{R}$ definiramo funkcije

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\},\ x \in K.$$

Za skup X funkcija s K u $\mathbb{R}$ kažemo da je **rešetka** ako vrijedi

$$f, g \in X \implies f \vee g \in X \text{ i } f \wedge g \in X.$$

Vrijede iduće jednakosti:

$$f \vee g = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|),\ f \wedge g = \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|),\ |f| = f \vee (-f).$$

Iz toga odmah slijedi da je X potprostor prostora $\mathbb{R}^K$ svih funkcija s K u $\mathbb{R}$, rešetka ako i samo ako vrijedi $f \in X \implies |f| \in X$. Naravno, jasno je da je $C(K, \mathbb{R})$ rešetka.

Teorem 2.2.1. *Svaka zatvorena podalgebra $\mathbb{A}$ realne Banachove algebre $C(K, \mathbb{R})$ je rešetka.*

Dokaz. Dokažimo teorem prvo uz pretpostavku $1 \in \mathbb{A}$. Uzmimo, $f \in \mathbb{A},\ f \neq 0$. Tada je $\|f\|_\infty > 0$ i $\|f\|_\infty \geq |f(x)|,\ \forall x \in K$. Stoga imamo

$$|f|(x) = |f(x)| = \sqrt{f(x)^2} = \sqrt{\|f\|_\infty^2 - (\|f\|_\infty^2 - f(x)^2)} = \|f\|_\infty \sqrt{1 - \Big(1 - \tfrac{f(x)^2}{\|f\|_\infty^2}\Big)}.$$

Iskoristimo sad razvoj funkcije $\sqrt{1 - \lambda}$ u red potencija:

$$\sqrt{1 - \lambda} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \lambda^n$$

koji konvergira uniformno na segmentu $[0, 1]$. Iz ovoga slijedi

$$|f|(x) = \|f\|_\infty \Big[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \Big(1 - \tfrac{f(x)^2}{\|f\|_\infty^2}\Big)^n\Big].$$

Kako je $1 - \frac{f(x)^2}{\|f\|_\infty^2} \in [0, 1],\ \forall x \in K$ imamo da gornji red konvergira uniformno na K. No, uniformna konvergencija je zapravo konvergencija u normi prostora $C(K, \mathbb{R})$. Kako je $\mathbb{A}$ podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$ (koja sadrži 1) vidimo da su svi članovi gornjeg reda iz $\mathbb{A}$. Pošto je $\mathbb{A}$ zatvorena i njihov limes je u $\mathbb{A}$, dakle $|f| \in \mathbb{A}$. Time je pokazano da je $\mathbb{A}$ rešetka.

Promotrimo sada slučaj $1 \notin \mathbb{A}$. Tada $\mathbb{A}$ ne sadrži niti jednu konstantu osim 0. Definirajmo $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \oplus \mathbb{R}$. To je podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$ koja sadrži sve konstante, posebno i 1. $\tilde{\mathbb{A}}$ je zatvorena podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$ kao suma zatvorene podalgebre i konačnodimenzionalnog prostora (vidi [2]). Prema dokazanom $\tilde{\mathbb{A}}$ je rešetka. Dakle, za $f \in \mathbb{A} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}$ je $|f| \in \tilde{\mathbb{A}}$, tj. $|f| = g + \lambda$ za neke $g \in \mathbb{A},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Sada imamo

$$f^2 = |f|^2 = g^2 + 2\lambda g + \lambda^2 \implies \lambda^2 = f^2 - 2\lambda g - g^2.$$

Kako je $\mathbb{A}$ algebra slijedi $\lambda^2 \in \mathbb{A}$. No, već smo primjetili da $\mathbb{A}$ ne sadrži konstante osim 0 stoga je $\lambda = 0$. Dakle, $|f| = g \in \mathbb{A}$, tj. $\mathbb{A}$ je rešetka. $\square$

Sljedeći teorem je ključan jer nam daje dovoljne uvjete da podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$ bude u njoj gusta.

Teorem 2.2.2. *Neka je $\mathbb{A} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ takav da*

1. *$\mathbb{A}$ je rešetka.*
2. *Za proizvoljne $x, y \in K$, $x \neq y$ i za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ postoji $f \in \mathbb{A}$ takav da $f(x) = \lambda$ i $f(y) = \mu$.*

Tada je $\mathbb{A}$ gust u $C(K,\mathbb{R})$.

Dokaz. Neka je $g \in C(K,\mathbb{R})$ i $\epsilon > 0$. Trebamo pokazati da postoji $h \in \mathbb{A}$ takav da $\|h - g\|_\infty < \epsilon$.

Za $x, y \in K$, $x \neq y$ izaberimo $f_{x,y} \in \mathbb{A}$ takvu da $f_{x,y}(x) = g(x)$ i $f_{x,y}(y) = g(y)$. Definirajmo

$$U_{x,y} = \{u \in K : f_{x,y}(u) < g(u) + \epsilon\},\ V_{x,y} = \{u \in K : f_{x,y}(u) > g(u) - \epsilon\}.$$

$U_{x,y} = (f_{x,y} - g)^{-1}(\langle -\infty, \epsilon\rangle)$ pa je $U_{x,y}$ otvoren kao praslika otvorenog skupa pri neprekidnom preslikavanju. Analogno, $V_{x,y}$ je otvoren. Primijetimo da $U_{x,y}$ i $V_{x,y}$ sadrže točke x i y. Fiksirajmo sada točku $y \in K$ i promotrimo familiju podskupova od K, $\mathcal{U} = \{U_{x,y} : x \in K, x \neq y\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K pa iz kompaktnosti od K slijedi da postoje točke $x_1, ..., x_n \in K \setminus \{y\}$, $n \in \mathbb{N}$, takve da je

$$K = U_{x_1,y} \cup ... \cup U_{x_n,y}.$$

Neka je sada $g_y = f_{x_1,y} \wedge ... \wedge f_{x_n,y}$. Jer je $\mathbb{A}$ rešetka imamo $g_y \in \mathbb{A}$. Iz definicije skupova $U_{x,y}$ te činjenice da $U_{x_i,y}$, $i = 1, ..., n$ čine pokrivač za K, vrijedi

$$g_y(u) < g(u) + \epsilon,\ \forall u \in K.$$

Definirajmo $V_y = V_{x_1,y} \cap ... \cap V_{x_n,y}$. Tada iz definicije skupova $V_{x,y}$ imamo

$$g_y(u) > g(u) - \epsilon,\ \forall u \in V_y.$$

Primijetimo da je V_y otvoren skup koji sadrži y. Imamo da je $\mathcal{V} = \{V_y : y \in K\}$ otvoren pokrivač od K. Također, imamo familiju funkcija $\{g_y : y \in K\}$ iz $\mathbb{A}$ takvih da za proizvoljan $y \in K$ vrijedi

$$g_y(u) < g(u) + \epsilon,\ \forall u \in K,\quad g_y(u) > g(u) - \epsilon,\ \forall u \in V_y.$$

Iz kompaktnosti od K slijedi da postoje $y_1, ..., y_m$, $m \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_m}.$$

Stavimo sada $h = g_{y_1} \vee ... \vee g_{y_m}$. Imamo $h \in \mathbb{A}$ te vrijedi

$$g(u) - \epsilon < h(u) < g(y) + \epsilon,\ \forall u \in K.$$

Drugačije rečeno, vrijedi

$$|h(u) - g(u)| < \epsilon, \ \forall u \in K$$

iz čega slijedi $\|h - g\|_\infty < \epsilon$. □

Općenito, za skup S funkcija definiranih na skupu X kažemo da **razdvaja točke od** X ako za sve $x, y \in X$ postoji $f \in S$ takva da $f(x) \neq f(y)$. Kažemo da se skup S **poništava u točki** $x \in K$ ako za svaki $f \in S$ vrijedi $f(x) = 0$.

Teorem 2.2.3. *(**Stone-Weierstrass**) Neka je $\mathbb{A}$ zatvorena podalgebra od $C(K, \mathbb{R})$ koja razdvaja točke od K i koja se ne poništava u nijednoj točki od K. Tada je $\mathbb{A} = C(K, \mathbb{R})$.*

Dokaz. To što se $\mathbb{A}$ ne poništava u nijednoj točki od K znači da za svaku točku $x_0 \in K$ postoji $f \in \mathbb{A}$ takva da $f(x_0) \neq 0$.

Pokažimo da za proizvoljne točke $x, y \in K, \ x \neq y$ postoji $f \in \mathbb{A}$ takva da

$$f(x) \neq 0, \ f(x) \neq f(y).$$

Zaista, kako $\mathbb{A}$ razdvaja točke od K, postoji $g \in \mathbb{A}$ takva da $g(x) \neq g(y)$. Postoji $h \in \mathbb{A}$ takva da $h(x) \neq 0$. Ako je $g(x) \neq 0$ možemo uzeti $f = g$. Ako je $g(x) = 0$ i $h(x) \neq h(y)$, možemo uzeti $f = h$. Napokon, u slučaju $g(x) = 0$ i $h(x) = h(y)$ stavimo $f = g + h$.

Pokažimo sada za proizvoljne točke $x, y \in K, \ x \neq y$ postoji $\hat{f} \in \mathbb{A}$ takva da

$$\hat{f}(x) \neq 0, \ \hat{f}(y) = 0 \, .$$

Doista, ako za $f \in \mathbb{A}$ kao gore (dakle, $f(x) \neq 0, \ f(x) \neq f(y)$) vrijedi $f(y) = 0$ možemo uzeti $\hat{f} = f$. U slučaju da je $f(y) \neq 0$ tražena svojstva ima funkcija

$$\hat{f}(u) = \tfrac{f(u)}{f(y)} - \tfrac{f(u)^2}{f(y)^2}, \ u \in K.$$

Za takvu funkciju $\hat{f} \in \mathbb{A}$ sada možemo definirati

$$\tilde{f}(u) = \tfrac{\hat{f}(u)}{\hat{f}(x)}, \ u \in K.$$

Tada je $\tilde{f} \in \mathbb{A}$ i vrijedi

$$\tilde{f}(x) = 1, \ \tilde{f}(y) = 0.$$

Analogno, postoji $\overline{f} \in \mathbb{A}$ takva da vrijedi

$$\overline{f}(x) = 0, \ \overline{f}(y) = 1.$$

Sada za proizvoljne $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ funkcija $f = \lambda\hat{f} + \mu\overline{f} \in \mathbb{A}$ vrijedi

$$f(x) = \lambda, \ f(y) = \mu.$$

Dakle, $\mathbb{A}$ zadovoljava uvjet 2. iz Teorema 2.2.2. Prema Teoremu 2.2.1. $\mathbb{A}$ je rešetka, tj. $\mathbb{A}$ zadovoljava i uvjet 1. iz Teorema 2.2.2. koji na koncu daje $\mathbb{A} = C(K, \mathbb{R})$. □

Stone-Weierstrassov teorem se može iskazati (i analogno dokazati) na sljedeći način: zatvorena podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$ koja razdvaja točke od K i koja se ne poništava u nijednoj točki od K je *gusta* u K.

Imajući to na umu, možemo sada iskazati poznati Weierstrassov teorem iz realne analize koji je direktan korolar Stone-Weierstrassovog teorema čim da algebra svih polinoma na K razdvaja točke od K i ne poništava se u nijednoj točki od K.

Korolar 2.2.4. *(**Weierstrass**) Neka je K kompaktan podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada je svaka funkcija $f \in C(K,\mathbb{R})$ limes uniformno konvergentnog niza realnih polinoma na K.*

Ono što želimo sljedeće je formulirati i dokazati verziju Stone-Weierstrassovog teorema za LCH prostore. Naravno, razlog tome je što smo pokazali da je općenito za komutativne Banachove algebre $\Omega(\mathbb{A})$ LCH prostor pa ako želimo raditi u najvećoj mogućoj općenitosti potreban nam je alat za ispitivanje kada je podalgebra od $C_0(\Omega(\mathbb{A}))$ u njoj gusta.

Lema 2.2.5. *Neka je $\mathbb{A}$ zatvorena podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$ koja razdvaja točke od K i koja se poništava u $x_0 \in \mathbb{A}$. Tada je $\mathbb{A} = \{f \in C(K,\mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$*

Dokaz. Jasno je $\mathbb{A} \subseteq \{f \in C(K,\mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$. Što se tiče obratne inkluzije definirajmo

$$\mathbb{B} = \{f + \lambda 1 : f \in \mathbb{A},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gdje smo s 1 označili konstantnu funkciju $x \mapsto 1$. Iz činjenice da je $\mathbb{A}$ zatvorena podalgebra odmah slijedi da je i $\mathbb{A}$ zatvorena podalgebra od $C(K,R)$. Također, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ uzimanjem $\lambda = 0$. Stoga $\mathbb{B}$ također razdvaja točke od K. Kako je nulfunkcija u $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ sadrži (sve) konstantne funkcije pa se ne poništava u nijednoj točki od K. Sada smo u uvjetima Stone-Weierstrass teorema (Teorem 2.2.3.). Dakle, $\mathbb{B} = C(K,\mathbb{R})$.

Neka je sada $f \in C(K,\mathbb{R})$ takav da $f(x_0) = 0$. Iz dokazanog slijedi da postoje $g \in \mathbb{A}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ takvi da $f = g + \lambda 1$. Posebno, uvrštavanjem x_0 imamo

$$0 = f(x_0) = g(x_0) + \lambda = \lambda.$$

Slijedi $g = f \in \mathbb{A}$. Time je i obratna inkluzija dokazana. □

Teorem 2.2.6. *(**Stone-Weierstrass za LCH prostore**) Neka je Ω LCH prostor i $\mathbb{A}$ zatvorena podalgebra od $C_0(\Omega,\mathbb{R})$ koja razdvaja točke od Ω i ne poništava se u nijednoj točki od Ω. Tada je $\mathbb{A} = C_0(\Omega,\mathbb{R})$.*

Dokaz. Neka je $K = \Omega \cup \{\infty\}$ jednotočkovna kompaktifikacija (vidi Dodatak, Teorem A.0.6.) od K. Tada je K CH prostor. Definiramo

$$\mathbb{B} = \{f \in C(K,\mathbb{R}) : f(\infty) = 0\}.$$

Tada je $\mathbb{B}$ podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$. Tvrdimo da je $C_0(\Omega,\mathbb{R})$ izometrički izomorfno $\mathbb{B}$ preko preslikavanja

$$\phi : C_0(\Omega,\mathbb{R}) \to \mathbb{B},\ \phi(f) = f'$$

gdje je f' dano s $f'(x) = f(x),\ \forall x \in \Omega$ te $f'(\infty) = 0$. Jasno je da φ izometrični homomorfizam (pa i injekcija). Što se tiče surjektivnosti, za $g \in \mathbb{B}$ vrijedi $g|_\Omega \in C_0(\Omega,\mathbb{R})$ (vidi Dodatak, Teorem A.0.6.) te je $\phi(g|_\Omega) = g$.

Sada je $\phi(\mathbb{A})$ zatvorena podalgebra od $C(K,\mathbb{R})$ koja razdvaja točke od K i poništava se u $\infty \in K$. Iz prethodne leme slijedi $\phi(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$ iz čega slijedi $\mathbb{A} = C_0(\Omega,\mathbb{R})$. □

Primijetimo da smo Stone-Weierstrassov teorem za LCH prostore dokazali kao posljedicu Stone-Weierstassovog teorema. No, jasno je da LCH verzija teorema općenitija jer u slučaju da je prostor Ω kompaktan imamo $C_0(\Omega,\mathbb{R}) = C(\Omega,\mathbb{R})$. Drugim riječima, dvije verzije Stone-Weierstrass teorema su međusobno ekvivalentne.

Uočimo da smo se sa Stone-Weierstrassovim teoremom ograničili na proučavanje podalgebre od $C(\Omega,\mathbb{R})$ dok mi naravno želimo proučavati podalgebre od $C(\Omega) = C(\Omega,\mathbb{C})$. Na svu sreću, skok s realnog na kompleksni slučaj nije velik uz jedan prirodan dodatan uvjet.

Teorem 2.2.7. ***(kompleksni Stone-Weierstrass za LCH prostore)*** *Neka je Ω LCH prostor i $\mathbb{A}$ zatvorena *-podalgebra od $C_0(\Omega)$ koja razdvaja točke od Ω i koje se ne poništava u nijednoj točki od Ω. Tada je $\mathbb{A} = C_0(\Omega)$*

Dokaz. Neka je $\mathbb{B} = \mathbb{A} \cap C_0(\Omega,\mathbb{R})$. Tada je $\mathbb{B}$ (realna) zatvorena podalgebra od $C_0(\Omega,\mathbb{R})$. U smislu realnih vektorskih prostora vrijedi $\mathbb{A} = \mathbb{B} \oplus i\mathbb{B}$. Zaista, za proizvoljnu $f \in \mathbb{A}$ vrijedi $f = f_1 + f_2$ gdje su

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + \overline{f}),\ f_2 = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}).$$

Primijetimo da su f_1 i f_2 neprekidne funkcije koje poprimaju realne vrijednosti te su $f_1,\ f_2 \in \mathbb{A}$ zbog toga što je $\mathbb{A}$ *-algebra. Dakle, zaista $f_1, f_2 \in \mathbb{B}$.

Nadalje, $\mathbb{B}$ razdvaja točke od Ω. Zaista, neka su $x, y \in \Omega,\ x \neq y$. Znamo da postoji $f \in \mathbb{A}$ takva da $f(x) \neq f(y)$. Definirajmo f_1 i f_2 kao i prije. Tada su $f_1, f_2 \in \mathbb{B}$ i vrijedi

$$f_1(x) + if_2(x) = f(x) \neq f(y) = f_1(y) + if_2(y).$$

Slijedi $f_1(x) \neq f_1(y)$ ili $f_2(x) \neq f_2(y)$. Time je pokazano da $\mathbb{B}$ razdvaja točke od Ω.

Kad bi postojao $x_0 \in \Omega$ takav da $f(x_0) = 0,\ \forall f \in \mathbb{B}$ onda bi zbog rastava $\mathbb{A} = \mathbb{B} \oplus i\mathbb{B}$ to vrijedilo i za $\mathbb{A}$. Dakle, $\mathbb{B}$ se ne poništava u nijednoj točki od Ω.

Teorem 2.2.6. sada povlači $\mathbb{B} = C_0(\Omega,\mathbb{R})$. Sada iz $C_0(\Omega,\mathbb{R}) = \mathbb{A} \cap C_0(\Omega,\mathbb{R})$ slijedi $\mathbb{A} = C_0(\Omega)$. □

Čisto zbog potpunosti navedimo kompleksnu verziju Stone-Weierstrass teorema, koji je očita posljedica prethodnog teorema.

Korolar 2.2.8. ***(kompleksni Stone-Weierstrass za CH prostore)*** *Neka je K CH prostor i $\mathbb{A}$ zatvorena *-podalgebra od $C(K)$ koja separira točke od K i koja se ne poništava u nijednoj točki od K. Tada je $\mathbb{A} = C(K)$.*

Sada je sve spremno za dokaz centralnog teorema ove točke.

Teorem 2.2.9. ***(Komutativni Gelfand-Naimarkov teorem)***
Neka je $\mathbb{A}$ komutativna C-algebra. Tada je njena Gelfandova transformacija*

$$\Gamma : \mathbb{A} \to C_0(\Omega(\mathbb{A})),\ a \mapsto \hat{a}$$

*izometrički *-izomorfizam. Ako je $\mathbb{A}$ unitalna tada je Γ unitalni izometrički *-izomorfizam s $\mathbb{A}$ na $C(\Omega(\mathbb{A}))$.*

Dokaz. Iz Teorema 1.4.4. znamo da je $\Gamma : \mathbb{A} \to C_0(\Omega(\mathbb{A}))$ kontraktivni homomorfizam te da vrijedi $\|\Gamma(a)\|_\infty = r(a),\ \forall a \in \mathbb{A}$. Također, $\Omega(\mathbb{A})$ je LCH prostor. Nadalje, zbog Propozicije 2.1.21. za $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$ i $a \in \mathbb{A}$ imamo

$$\Gamma(a^*)(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \overline{\Gamma(a)(\varphi)} = \Gamma(a)^*(\varphi),$$

tj. $\Gamma(a^*) = \Gamma(a)^*$. Dakle, Γ je *-homomorfizam. Koristeću Korolar 2.1.19. i Teorem 1.4.4. imamo

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\Gamma(a^*a)\|_\infty = \|\Gamma(a)^*\Gamma(a)\|_\infty = \|\Gamma(a)\|_\infty^2.$$

Time smo pokazali da je Γ izometrija (posebno i injekcija). Ostaje pokazati surjektivnost od Γ. Za to ćemo iskoristiti kompleksni Stone-Weierstrassov teorema za LCH prostore. Kako je Γ izometrični *-homomorfizam to je $\Gamma(\mathbb{A})$ zatvorena *-podalgebra od $C_0(\Omega(\mathbb{A}))$. Teorem 1.4.4. nam govori da $\Gamma(\mathbb{A})$ razdvaja točke od $\Omega(\mathbb{A})$ te da se $\Gamma(\mathbb{A})$ ne poništava u nijednoj točki od $\Omega(\mathbb{A})$. Teorem 2.2.7. sada daje $\Gamma(\mathbb{A}) = C_0(\Omega(\mathbb{A}))$.

U slučaju da je $\mathbb{A}$ unitalna je $C_0(\Omega(\mathbb{A})) = C(\Omega(\mathbb{A}))$ i Teorem 1.4.4. nam govori da je Γ unitalni homomorfizam. □

Prethodni teorem govori da je *svaka* apstraktna komutativna C*-algebra izometrički *-izomorfna prostoru neprekidnih funkcija na LCH prostoru koji iščezavaju u beskonačnosti dok u unitalnom slučaju dobivamo da je izometrički *-izomorfna prostoru neprekidnih funkcija na kompaktnom skupu.

U nastavku navodimo neke zanimljive posljedice Komutativnog Gelfand-Naimarkovog teorema.

Korolar 2.2.10. *Svaka komutativna C*-algebra je poluprosta.*

Dokaz. Pri proučavanju Gelfandove transformacije komutativnih Banachovih algebri istaknuli smo činjenicu da je Gelfandova transformacija injektivna ako i samo ako je algebra poluprosta (Teorem 1.4.4.). Ostaje primjeniti Komutativni Gelfand-Naimarkov teorem koji, međuostalom, daje injektivnost Gelfandove transformacije. □

Neka je $\mathbb{A}$ C*-algebra. Kako je presjek bilo koje familije unitalnih C*-podalgebri od $\mathbb{A}$ ponovno unitalna C*-podalgebra od $\mathbb{A}$, za bilo koji podskup $S \subseteq \mathbb{A}$ možemo definirati $\mathrm{C}^*(S)$ kao najmanju unitalnu C*-podalgebru od $\mathbb{A}$ koja sadrži skup S. Za $\mathrm{C}^*(S)$ kažemo da je unitalna C*-podalgebra **generirana skupom** S.

Istaknimo posebno slučaj C*-algebre generirane jednim elementom $a \in \mathbb{A}$. Primijetimo da je a normalan ako i samo ako je $\mathrm{C}^*(a)$ komutativna. Također, u tom slučaju je $\mathrm{C}^*(a)$ zatvarač potprostora razapetog s $\{a^n(a^*)^m : n, m \in \mathbb{N}_0\}$. To je upravo skup svih polinoma u dvije varijable a i a^*. Dakle, unitalna C*-podalgebra generirana normalnim elementom $a \in \mathbb{A}$ je zatvarač od

$$\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[t_1, t_2]\}.$$

U slučaju da je $\mathbb{A}$ unitalna sa $\mathrm{C}^*(a)$ podrazumijevat ćemo da se radi o C*-algebri generiranoj sa skupom $\{1, a\}$.

Sada možemo proširiti rezultat $\|a\| = r(a)$ sa hermitskih na sve normalne elemente.

Korolar 2.2.11. *Neka je $a \in \mathbb{A}$ normalan element* C*-*algebre $\mathbb{A}$. Tada je $\|a\| = r(a)$.*

Dokaz. Znamo da je Gelfandova transformacija $\Gamma : \mathrm{C}^*(a) \to C_0(\Omega(\mathrm{C}^*(a)))$ izometrički *-izomorfizam pa koristeći Teorem 1.4.4. imamo $\|a\| = \|\Gamma(a)\|_\infty = r(a)$. □

Propozicija 2.2.12. *Neka je $\mathbb{A}$ unitalna* C*-*algebra i $a \in \mathbb{A}$ normalan element. Tada je $\hat{a}$ homeomorfizam s $\Omega(\mathrm{C}^*(a))$ na $\sigma(a)$.*

Dokaz. Znamo da je $\hat{a}$ neprekidno preslikavanje s $\Omega(\mathrm{C}^*(a))$ u $\mathbb{C}$ te je prema Teoremu 1.3.12. slika od $\hat{a}$ upravo $\sigma(a)$. Dakle, $\hat{a}$ je neprekidna surjekcija sa kompaktnog u Hausdorffov prostor. Kako je neprekidna bijekcija sa kompaktnog u Hausdorffov prostor nužno homeomorfizam, ostaje pokazati da je $\hat{a}$ injekcija.

Uzmimo $\varphi, \psi \in \Omega(\mathrm{C}^*(a))$ takve da $\hat{a}(\varphi) = \hat{a}(\psi)$, tj. $\varphi(a) = \psi(a)$. Kako karakteri čuvaju involuciju (Propozicija 2.1.21.) imamo

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \overline{\psi(a)} = \psi(a^*).$$

Pošto su φ i ψ homomorfizmi algebre $\mathrm{C}^*(a)$ imamo

$$\varphi(p(a, a^*)) = \psi(p(a, a^*)), \ \forall p \in \mathbb{C}[t_1, t_2].$$

Dakle, φ i ψ se podudaraju na skupu $\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[t_1, t_2]\}$ koji je gust u C*(a) pa iz neprekidnosti od φ i ψ slijedi $\varphi = \psi$. Time je dokazana injektivnost od $\hat{a}$. □

Neka je $\theta : \Omega_1 \to \Omega_2$ neprekidno preslikavanje između kompaktnih Hausdorffovih prostora. Tada definiramo **transponat** od θ kao

$$\theta^t : C(\Omega_2) \to C(\Omega_1), \ f \mapsto f \circ \theta.$$

Tada je θ^t unitalni *-homomorfizam. Zaista, θ je očito homomorfizam algebri. Nadalje,

$$\theta^t(f^*)(x) = (f^* \circ \theta)(x) = f^*(\theta(x)) = \overline{f(\theta(x))} = (f \circ \theta)^*(x) = (\theta^t(f))^*(x).$$

Dakle, θ^t je *-homomorfizam. Ako je θ još i homeomorfizam, lako se vidi da je transponat od θ^{-1} inverz od θ^t, tj. tada je θ^t unitalni *-izomorfizam. Zbog Korolara 2.1.19. tada imamo da je θ^t unitalni izometrički *-izomorfizam.

Teorem 2.2.13. *Neka je a normalan element unitalne* C**-algebre* $\mathbb{A}$ *i označimo* $\sigma(a) = \sigma_{C^*(a)}(a)$. *Tada postoji jedinstveni unitalni *-izomorfizam* $\phi_a : C(\sigma(a)) \to C^*(a)$ *takav da vrijedi* $\phi_a(\mathrm{id}) = a$.

Dokaz. C*(a) je komutativna te je stoga prema Komutativnom Gelfand-Naimark teoremu, Gelfandova transformacija Γ unitalni *-izomorfizam s C*(a) na $C(\Omega(C^*(a)))$. Nadalje, prema Propoziciji 2.2.12. $\hat{a}$ je homeomorfizam s $\Omega(C^*(a))$ na $\sigma(a)$ pa je prema prijašnjim opservacijama $\hat{a}^t$ unitalni *-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $C(\Omega(C^*(a)))$. Definirajmo sada $\phi_a = \Gamma^{-1} \circ \hat{a}^t$. Vrijedi da ϕ_a unitalni *-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na C*(a) kao kompozicija dva takva. Nadalje, vrijedi

$$\varphi_a(\mathrm{id}) = \Gamma^{-1}(\hat{a}^t(\mathrm{id})) = \Gamma^{-1}(\hat{a}) = a.$$

Prema kompleksnom Stone-Weierstrassovom teoremu za CH prostore (Korolar 2.2.8.) imamo C*(id) = $C(\sigma(a))$ pa je unitalni *-izomorfizam potpuno određen s djelovanjem na id. Dakle, ϕ_a je jedinstven *-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na C*(a) sa svojstvom $\phi_a(\mathrm{id}) = a$. □

Dakle, za svaku funkciju $f \in C(\sigma_{C^*(a)}(a))$ postoji jedinstveni $f(a) \in C^*(a)$ takav da $f(a) = \phi_a(f)$. Pridruživanje $f \mapsto f(a)$ zovemo **neprekidni funkcionalni račun** normalnog elementa a u C*-algebri $\mathbb{A}$.

U sljedećem teoremu navedena su osnovna svojstva neprekidnog funkcionalnog računa za normalni element unitalne C*-algebre. Dokaz je elementaran te ga stoga izostavljamo.

Teorem 2.2.14. *Neka je* $\mathbb{A}$ *unitalna* C**-algebra i* $a \in \mathbb{A}$ *normalan. Označimo* $\mathbb{B} = C^*(a)$. *Neka su* $f, g \in C(\sigma_{\mathbb{B}}(a))$. *Tada vrijedi*

1. *Ako je* $f(\lambda) = 1, \ \forall \lambda \in \sigma_{\mathbb{B}}(a))$, *onda je* $f(\lambda) = 1$.

2. *Ako je* $f(\lambda) = \lambda, \ \forall \lambda \in \sigma_{\mathbb{B}}(a))$, *onda je* $f(a) = a$.

3. *Ako je* $f(\lambda) = \overline{\lambda},\ \forall \lambda \in \sigma_{\mathbb{B}}(a))$*, onda je* $f(a) = a^*$.

4. $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$.

5. $(fg)(a) = f(a)g(a)$.

Ono što bi se moglo smatrati određenim nedostatkom neprekidnog funkcionalnog računa je to što se u radu s njim javlja spektar $\sigma_{\mathrm{C}^*(a)}(a)$ normalnog elementa u podalgebri $\mathrm{C}^*(a)$. Dakako, otprije znamo da je $\sigma_{\mathrm{C}^*(a)}(a) \supseteq \sigma_{\mathbb{A}}(a)$ ali bi naravno sve bilo jednostavnije kad bi vrijedila jednakost. Sada ćemo pokazati da kada radimo s C*-algebrama to i jest slučaj te upravo to neprekidni funkcionalni račun čini korisnim alatom.

Teorem 2.2.15. *Neka je* $\mathbb{B}$ *unitalna* C*-*podalgebra unitalne* C*-*algebre* $\mathbb{A}$.
Tada je $\sigma_{\mathbb{B}}(b) = \sigma_{\mathbb{A}}(b),\ \forall b \in \mathbb{B}$.

Dokaz. Ono što treba dokazati je $\mathbb{B}^\times = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$. Pretpostavim prvo da je $b \in \mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$ hermitski. Tada je $\sigma_{\mathbb{A}}(b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posebno, $\sigma_{\mathbb{A}}(b)$ nema rupa kao podskup do $\mathbb{C}$. Iz Teorema 1.2.12. slijedi $\sigma_{\mathbb{A}}(b) = \sigma_{\mathbb{B}}(b)$. Dakle, $0 \notin \sigma_{\mathbb{B}}(b)$, tj. $b \in \mathbb{B}^\times$.

Neka je $b \in \mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$ proizvoljan i $a \in \mathbb{A}$ njegov inverz u $\mathbb{A}$. Iz $ab = ba = 1$ slijedi $b^*a^* = a^*b^* = 1$ iz čega dobivamo $bb^*a^*a = a^*abb^* = 1$. Dakle, hermitski element bb^* je invertibilan u $\mathbb{A}^\times$ pa je prema dokazanome invertibilan i u $\mathbb{B}$. Neka je $c \in B$ inverz od bb^* u $\mathbb{B}$. Sada iz $bb^*c = 1$ i $ba = 1$ imamo $ba = bb^*c$ pa množenjem slijeva s a dobivamo $a = b^*c \in \mathbb{B}$. Dakle, $b \in \mathbb{B}^\times$. □

Time je opravdana oznaka $\sigma(a)$ za a element unitalne C*-algebre $\mathbb{A}$ jer prema prethodnom teoremu spektar ne ovisi o ambijentalnoj (pod)algebri u kojoj ga određujemo.

Teorem 2.2.16. ***(Teorem o preslikavanju spektra)*** *Neka je* $a \in \mathbb{A}$ *normalan element unitalne* C*-*algebre* $\mathbb{A}$ *i neka je* $f \in C(\sigma(\mathbb{A}))$*. Tada*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Dokaz. Jer je $f \mapsto f(a)$ unitalni *-izomorfizam s $C(\sigma(a))$ na $\mathrm{C}^*(a)$ imamo

$$\sigma(f(a)) = \sigma_{\mathrm{C}^*(a)}(f(a)) = \sigma_{C(\sigma(a))}(f) = f(\sigma(a))$$

gdje je zadnja jednakost opravdana Primjerom 1.2.1. □

2.3 Pozitivni elementi i uređaj u C*-algebri

U ovoj točki uvest ćemo parcijalni uređaj na skupu hermitskih elemenata C*-algebre. Glavni rezultat je egzistencija pozitivnog drugog korijena za pozitivne elemente te da su svi pozitivni elementi oblika a^*a. Tu se radi o generalizaciji sljedećeg primjera.

Primjer 2.3.1. *Neka je Ω LCH prostor i promotrimo C*-algebru $\mathbb{A} = C_0(\Omega)$. Tada je $\mathbb{A}_h$ skup svih realnih funkcija iz $\mathbb{A}$ te na $\mathbb{A}_h$ možemo definirati parcijalni uređaj*

$$f \leq g \iff f(\omega) \leq g(\omega),\ \forall \omega \in \Omega.$$

Vrijedi da je $f \in \mathbb{A}_h$ pozitivna, tj. $f \geq 0$ ako i samo ako postoji $g \in \mathbb{A}$ takva da je $f = \overline{g}g$. U tom slučaju f ima jedinstveni pozitivni drugi korijen, konkretno funkciju $\omega \mapsto \sqrt{f(\omega)}$.

Ono što još vrijedi je da pozitivnost realnih funkcija možemo iskazati potpuno u terminima norme: ako je $f \in \mathbb{A}_h$ sljedeće je ekvivalentno

1. *$f \geq 0$.*
2. *Za svaki $t \geq \|f\|_\infty$ vrijedi $\|t1 - f\|_\infty \leq t$.*
3. *Postoji $t \geq \|f\|_\infty$ takav da $\|t1 - f\|_\infty \leq t$.*

Zaista, ako je $f \geq 0$ i $t \geq \|f\|_\infty$ za $\omega \in \Omega$ imamo $t \geq 0 \geq f(\omega) - t1 \geq -t$ pa slijedi $\|t1 - f\|_\infty \leq t$. Da druga tvrdnja povlači treću je očito pa dokažimo da treća povlači prvu. Neka je $t \geq \|f\|_\infty$ takav da $\|t1 - f\|_\infty \leq t$ za $\omega \in \Omega$ imamo $|f(\omega) - t| \leq \|t1 - f\|_\infty \leq t$ pa je posebno $f(\omega) - t \geq -t$, tj. $f(\omega) \geq 0$.

Definicija 2.3.2. *Neka je $\mathbb{A}$ C*-algebra. Za $a \in \mathbb{A}$ kažemo da je* ***pozitivan*** *i pišemo $a \geq 0$ ako je a hermitski te vrijedi $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$. Skup svih pozitivnih elemenata označavamo s $\mathbb{A}^+$.*

Slično kako smo pokazali da u slučaju unitalne C*-algebre $\mathbb{A}$ i njezine unitalne C*-podalgebre $\mathbb{B}$ vrijedi $\mathbb{B}^\times = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}^\times$, htjeli bismo pokazati $\mathbb{B}^+ = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}^+$. U tu svrhu imamo sljedeću lemu.

Lema 2.3.3. *Neka je $\mathbb{B}$ podalgebra unitalne podalgebre $\mathbb{A}$ takva da vrijedi $\mathbb{B} + \mathbb{C}1 = \mathbb{A}$. Tada je $\sigma_{\mathbb{B}}(b) \cup \{0\} = \sigma_{\mathbb{A}}(b) \cup \{0\},\ \forall b \in \mathbb{B}$.*

Dokaz. U slučaju da $\mathbb{B}$ nije unitalna, prijelazom na njenu unitizaciju imamo preslikavanje $\tilde{\mathbb{B}} \to \mathbb{A},\ (b, \lambda) \mapsto b + \lambda 1$ koje je unitalni izomorfizam pa je stoga $\sigma_{\mathbb{B}}(b) = \sigma_{\tilde{\mathbb{B}}}(b) = \sigma_{\mathbb{A}}(b),\ \forall b \in \mathbb{B}$. Stoga je dovoljno promotriti slučaj kada je $\mathbb{B}$ unitalna.

Ako je $1_{\mathbb{B}} = 1_{\mathbb{A}}$ onda je $\mathbb{B} = \mathbb{A}$ i gotovi smo. Zato pretpostavimo $1_{\mathbb{B}} \neq 1_{\mathbb{A}}$. Tvrdimo da je tada $\sigma_{\mathbb{A}}(b) = \sigma_{\mathbb{B}}(b) \cup \{0\},\ \forall b \in \mathbb{B}$. U tom slučaju je jasno $0 \in \sigma_{\mathbb{A}},\ \forall b \in \mathbb{B}$. Ako su $b \in \mathbb{B}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ takvi da je $\lambda 1_{\mathbb{B}} - b \in \mathbb{A}^\times$ tada je $\lambda 1_{\mathbb{B}} - b \in \mathbb{B}^\times$ pa je $\sigma_{\mathbb{B}}(b) \subseteq \sigma_{\mathbb{A}}(b)$. Obratno, ako je $\lambda \neq 0$ takav da $\lambda 1_{\mathbb{B}} - b \in \mathbb{B}^\times$. Ako sa b' označimo inverz od $\lambda 1_{\mathbb{B}} - b$ u $\mathbb{B}$ onda je $b' + \frac{1}{\lambda}(1_{\mathbb{A}} - 1_{\mathbb{B}})$ inverz od $\lambda 1_{\mathbb{A}} - b$ u $\mathbb{A}$ iz čega slijedi $\sigma_{\mathbb{A}}(b) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_{\mathbb{B}}(b)$. □

Korolar 2.3.4. *Neka je $\mathbb{B}$ C*-podalgebra C*-algebre $\mathbb{A}$.*
Tada je $\sigma_{\mathbb{B}}(b) \cup \{0\} = \sigma_{\mathbb{A}}(b) \cup \{0\},\ \forall b \in \mathbb{B}$.

Dokaz. Slijedi iz Teorema 2.2.15. i prethodnog korolara. □

Sada jednostavno možemo zaključiti da vrijedi $\mathbb{B}^+ = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}^+$.

Primjer 2.3.5. *Neka je $S \neq \emptyset$. Tada je $f \in l^\infty(S)$ pozitivan u smislu* C*-*algebri ako i samo ako je $f(x) \geq 0,\ \forall x \in S$ jer je $\sigma(f) = \overline{f(S)}$. Dakle, ako je Ω LCH prostor, $f \in C_0(\Omega)$ je pozitivan ako i samo ako $f(\omega) \geq 0,\ \forall \omega \in \Omega$.*

Teorem 2.3.6. *Neka je $\mathbb{A}$* C*-*algebra i $a \in \mathbb{A}^+$. Tada postoji jedinstveni element $b \in \mathbb{A}^+$ takav da $b^2 = a$.*

Dokaz. Neka je $\Gamma : C^*(a) \to C_0(\Omega(C^*(a)))$ Gelfandova reprezentacija. Znamo da je Γ izometrički *-izomorfizam te je stoga $\sigma(\Gamma(a)) = \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$. Zaključujemo da je $\Gamma(a) \in C_0(\Omega(C^*(a)))^+$. Kao u Primjeru 2.3.1. slijedi da postoji $g \in C_0(\Omega(C^*(a)))^+$ takva da vrijedi $\Gamma(a) = g^2$. Neka je $b \in C^*(a)$ takav da $\Gamma(b) = g$. Primijetimo da je tada nužno $b \in \mathbb{A}^+$. Imamo

$$\Gamma(a) = g^2 = \Gamma(b)^2 = \Gamma(b^2)$$

iz čega slijedi $b^2 = a$.

Što se tiče jedinstvenosti, pretpostavimo da postoji još neki $c \in \mathbb{A}^+$ takav da $c^2 = a$. Tada je $ca = cc^2 = c^2c = ac$, tj. a i c komutiraju. Tada i c komutira s b jer je $b \in C^*(a)$ limes niza polinoma u varijabli a. Neka je $\mathbb{B} = C^*(b, c)$. Kako su b i c hermitski elementi koji komutiraju, $\mathbb{B}$ je komutativna. Neka je $\Gamma : \mathbb{B} \to C_0(\Omega(\mathbb{B}))$ Gelfandova reprezentacija od $\mathbb{B}$. Tada su $\Gamma(b)$ i $\Gamma(c)$ pozitivni korijeni od $\Gamma(a)$ u $C_0(\Omega(\mathbb{B}))$, za koji znamo da je jedinstven u toj algebri. Dakle, $\Gamma(b) = \Gamma(c)$ pa $b = c$. □

Ako je a pozitivan element C*-algebre $\mathbb{A}$ s $a^{\frac{1}{2}}$ označavamo jedinstveni pozitivan element takav da $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$ te ga zovemo **pozitivni drugi korijen** od a

Ako je c hermitski, onda je c^2 pozitivan pa možemo definirati

$$|c| = (c^2)^{\frac{1}{2}},\ c^+ = \frac{1}{2}(|c| + c),\ c^- = \frac{1}{2}(|c| - c).$$

Na sličan način kao maloprije, koristeći Gelfandovu reprezentaciju od $C^*(c)$, dobivamo da su $|c|, c^+$ i c^- pozitivni i da vrijedi $c = c^+ - c^-$ i $c^+c^- = 0$.

Zabilježimo sljedeću posljedicu ovih razmatranja u sljedećem korolaru.

Korolar 2.3.7. *Svaki element* C*-*algebre se može napisati kao suma četiri pozitivna elementa.*

Dokaz. Prisjetimo se da je $\mathbb{A} = \mathbb{A}_h \oplus i\mathbb{A}_h$ i primjenimo rastav hermitskog elementa na dva pozitivna elementa. □

U idućoj lemi direktno koristeći Gelfandovu reprezentaciju i Primjer 2.3.1. pokazujemo da se i u općenitoj C*-algebri pozitivnost može izraziti preko norme.

Lema 2.3.8. *Neka je a hermitski element unitalne* C*-*algebre i* $t \in \mathbb{R}$. *Ekvivalentno je*

1. $a \geq 0$.
2. *Za svaki* $t \geq \|a\|$ *vrijedi* $\|t1 - a\|_\infty \leq t$.
3. *Postoji* $t \geq \|a\|$ *takav da* $\|t1 - a\|_\infty \leq t$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $\mathbb{A} = \mathrm{C}^*(a)$ pa je ona komutativna. Tada je prema Komutativnom Gelfand-Naimarkovom teoremu $\mathbb{A}$ izometrički *-izomorfna C*-algebri $C(\sigma(a))$ pa sada tvrdnja slijedi iz Primjera 2.3.1. □

Za podskup vektorskog prostora kažemo da je **konus** ako je zatvoren na zbrajanje i množenje nenegativnim skalarima.

Propozicija 2.3.9. *Neka je* $\mathbb{A}$ C*-*algebra. Skup* $\mathbb{A}^+$ *je zatvoren konus od* $\mathbb{A}$.

Dokaz. Ako je $\mathbb{A}$ neunitalna, imamo $\mathbb{A}^+ = \tilde{\mathbb{A}}^+ \cap \mathbb{A}$ pa zato možemo pretpostaviti da je $\mathbb{A}$ unitalna.

Prvo pokažimo da je A^+ zatvoren. Prema Lemi 2.3.8. imamo

$$\mathbb{A}^+ = \mathbb{A}_h \cap \{a \in \mathbb{A} : \| \|a\|1 - a\| \leq \|a\|\}.$$

Kako je involucija izometrija, $\mathbb{A}_h$ je zatvoren. Drugi skup u pitanju je zatvoren zbog neprekidnosti norme. Slijedi da je $\mathbb{A}^+$ zatvoren kao presjek dva zatvorena skupa.

Očito da za $a \in \mathbb{A}^+$ i $t \in \mathbb{R}^+$ vrijedi $ta \in \mathbb{A}_h$. Neka su sada $a, b \in \mathbb{A}^+$. Prema Lemi 2.3.8. imamo $\| \|a\|1 - a\| \leq \|a\|$ i $\| \|b\|1 - b\| \leq \|b\|$. Sada je

$$\|(\|a\| + \|b\|)1 - (a + b)\| = \|(\|a\|1 - a) + (\|b\|1 - b)\| \leq \| \|a\|1 - a\| + \| \|b\|1 - b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

pa nam Lema 2.3.8. daje $a + b \geq 0$. □

Za dokaz idućeg teorema trebat će nam iduće svojstvo spektra. Neka je $\mathbb{A}$ unitalna Banachova algebra. Tvrdimo da je tada $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$, $\forall a, b \in \mathbb{A}$. Naime, dovoljno je vidjeti da je $1 - ab \in \mathbb{A}^\times \iff 1 - ba \in \mathbb{A}^\times$. Zaista, ako $1 - ba$ ima inverz c direktnom provjerom se vidi da je tada $1 + bca$ inverz od $1 - ba$.

Teorem 2.3.10. *Za a proizvoljan element* C*-*algebre je element a^*a pozitivan.*

Dokaz. Pokažimo prvo da ako je $-a^*a \in \mathbb{A}^+$ onda $a = 0$. Prema prethodnom komentaru je $\sigma(-aa^*) \setminus \{0\} = \sigma(-a^*a) \setminus \{0\}$ pa je i $-aa^* \in \mathbb{A}^+$. Napišimo $a = b + ic$, $b, c \in \mathbb{A}_h$. Tada je $a^*a + aa^* = 2b^2 + 2c^2$ pa je $a^*a = 2b^2 + 2c^2 - aa^* \in \mathbb{A}^+$. Stoga je $\sigma(a^*a) \subseteq \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$ pa je $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = 0 \implies a = 0$.

Teorem je dovoljno dokazati za $a \neq 0$ pa neka je $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ proizvoljan i označimo $b = a^*a$. Tada je b hermitski pa stoga možemo pisati $b = b^+ - b^-$. Za $c = ab^-$ je

$-c^*c = -b^-a^*ab^- = -b^-(b^+ - b^-)b^- = (b^-)^3 \in \mathbb{A}^+$ pa je prema dokazanome $c = 0$. Dakle, $b^- = 0$ pa je $a^*a = b^+ \in \mathbb{A}^+$. □

Realni vektorski prostor $\mathbb{A}_h$ možemo parcijalno urediti tako da stavimo $a \leq b \iff b - a \geq 0$. Pokažimo da se zaista radi o parcijalnom uređaju:

- Očito $a \leq a$ jer je element 0 pozitivan.
- Neka su $a, b, c \in \mathbb{A}_h$ takvi da $a \leq b, b \leq c$, tj. $b - a \leq 0$ i $c - b \leq 0$. Kako je $\mathbb{A}^+$ konus imamo $c - a = (c - b) + (b - a) \geq 0$, tj. $a \leq c$.
- Neka su $a, b \in \mathbb{A}_h$ takvi da $a \leq b$ i $b \leq a$. Tada $a - b \geq 0$ i $b - a \geq 0$. Tada je $b - a \in \mathbb{A}^+ \cap -\mathbb{A}^+ = \{0\}$ pa je $a = b$.

Ovaj uređaj također poštuje strukturu vektorskog prostora, tj. za $c \in \mathbb{A}_h$ vrijedi $a \leq b \implies a + c \leq b + c$ te za $t \in \mathbb{R}^+$ $a \leq b \implies ta \leq tb$. Također, $a \leq b \implies -b \leq -a$.

Nadalje, prethodni teorem nam omogućava da za $a \in \mathbb{A}$ definiramo njegovu **apsolutnu vrijednost** kao $|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}$.

Rezimirajmo glavne rezultate za pozitivne elemente i uvedeni uređaj u sljedećem teoremu.

Teorem 2.3.11. *Neka je $\mathbb{A}$ C*-algebra.*

1. $\mathbb{A}^+ = \{a^2 : a \in \mathbb{A}_h\} = \{a^*a : a \in \mathbb{A}\}$.
2. *Za $a, b \in \mathbb{A}_h$ i $c \in \mathbb{A}$ vrijedi $a \leq b \implies c^*ac \leq c^*bc$.*
3. *Ako $0 \leq a \leq b$ tada $\|a\| \leq \|b\|$.*
4. *Ako je $\mathbb{A}$ unitalna te $a, b \geq 0$ i invertibilni tada $a \leq b \implies 0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.*

Dokaz.

1. Slijedi iz Teorema 2.3.6. i Teorema 2.3.10.
2. Kako je $b - a \geq 0$ koristeći Teorem 2.3.6. i Teorem 2.3.10. imamo

$$c^*bc - c^*ac = c^*(b - a)c = c^*(b - a)^{\frac{1}{2}}(b - a)^{\frac{1}{2}}c = ((b - a)^{\frac{1}{2}})c)^*((b - a)^{\frac{1}{2}}c) \geq 0,$$

   tj. $c^*ac \leq c^*bc$.
3. Možemo pretpostaviti da je $\mathbb{A}$ unitalna (inače prijeđemo na $\tilde{\mathbb{A}}$). Očito je $b \leq \|b\|1$ pa slijedi $a \leq \|b\|1$. Jer je a hermitski imamo $\|a\| \in \sigma(a)$ pa slijedi $\|b\| - \|a\| \in \sigma(\|b\|1 - a) \subseteq \mathbb{R}^+$, tj. $\|a\| \leq \|b\|$.
4. Za $c \in \mathbb{A}_h$ ako je $c \geq 1$, tada je c invertibilan i $c^{-1} \leq 1$. To dobijemo Gelfandovom reprezentacijom primjenjenom na $C^*(c)$. Sada ako su $0 \leq a \leq b$ koristeći 2. imamo

$$1 = a^{\frac{-1}{2}} a a^{\frac{-1}{2}} \leq a^{\frac{-1}{2}} b a^{\frac{-1}{2}}$$

pa je $a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{-1}{2}} b a^{\frac{-1}{2}})^{-1} \leq 1$. Ponovno, koristeći 2. imamo

$$b^{-1} = a^{\frac{-1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}}) a^{\frac{-1}{2}} \leq a^{\frac{-1}{2}} a^{\frac{-1}{2}} = a^{-1}.$$

□

Nadalje, uređaj je usuglašen s drugim pozitivnim korijenom.

Teorem 2.3.12. *Ako su a, b pozitivni elementi* C*-*algebre $\mathbb{A}$ tada $a \leq b$ povlači $a^{\frac{1}{2}} \leq b^{\frac{1}{2}}$.*

Dokaz. Pokazati ćemo da $a^2 \leq b^2 \implies a \leq b$ iz čega će slijediti tvrdnja teorema. Kao i prije, možemo pretpostaviti da je $\mathbb{A}$ unitalna. Neka je $t > 0$ i neka su c i d realni i imaginarni dio elementa $(t1+b+a)(t1+b-a)$. Adjungiranjem dobijemo $(t1+b-a)(t1+b+a) = c-id$.

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}((c + id) + (c - id)) \\ &= \frac{1}{2}((t1 + b + a)(t1 + b - a)) + (t1 + b - a)(t1 + b + a)) \\ &= t^2 1 + 2tb + b^2 - a^2 \\ &\geq t^2 1 \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je c pozitivan i invertibilan. Pošto je

$$c^{\frac{-1}{2}} (c + id) c^{\frac{-1}{2}} = 1 + i c^{\frac{-1}{2}} d c^{\frac{-1}{2}} \in \mathbb{A}^{\times}$$

slijedi $(t1 + b + a)(t1 + b - a) = c + id \in \mathbb{A}^{\times}$. Posebno, $t1 + b - a$ je lijevoinvertibilan. No, kako je hermitski slijedi da je invertibilan. Tada $-t \notin \sigma(b - a)$, $\forall t > 0$ što je jedino moguće ako $\sigma(b - a) \subseteq \mathbb{R}^{+}$, tj. ako je $b - a \geq 0$, odnosno $a \leq b$. □

2.4 Aproksimativne jedinice i ideali

Kada radimo s neunitalnom C*-algebrom uvijek možemo prijeći na njezinu unitizaciju. No, to nije uvijek primjereno niti korisno. Određenu alternativu nam daje koncept aproksimativne jedinice koji je, kao što ćemo vidjeti, vrlo koristan za dokazivanje raznih svojstava, npr. da su zatvoreni ideali C*-algebre automatski samoadjungirani.

Definicija 2.4.1. ***Aproksimativna jedinica*** *u C*-algebri $\mathbb{A}$ je rastuća mreža $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pozitivnih elemenata norme manje ili jednake od* 1 *takva da*

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} a e_\lambda = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda a = a, \ \forall a \in \mathbb{A}.$$

Prije nego što pokažemo da svaka C*-algebra dopušta aproksimativnu jedinicu, par početnih napomena. Kao prvo, pošto je involucija na $\mathbb{A}$ neprekidna te vrijedi $\mathbb{A} = \mathbb{A}_h \oplus i\mathbb{A}_h$, jasno je da vrijedi $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} ae_\lambda = a,\ \forall a \in \mathbb{A}$ ako i samo ako $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda a = a,\ \forall a \in \mathbb{A}$.

Drugo, jasno je da je aproksimativnu jedinicu zanimljivo promatrati jedino u slučaju neunitalne algebre. Naime, ako je $\mathbb{A}$ unitalna stavimo $e_\lambda = 1,\ \forall \lambda \in \Lambda$ što se, osim formalno, ne razlikuje od same jedinice. Štoviše, može se pokazati da svaka aproksimativna jedinica konvergira prema 1.

Neka je $\mathbb{A}$ proizvoljna C*-algebra i označimo sa Λ skup svih pozitivnih elemenata $a \in \mathbb{A}$ takvih da $\|a\| < 1$. Tada je Λ parcijalno uređen skup s uređajem nasljeđenim iz $\mathbb{A}^+$. Štoviše, Λ je usmjeren skup: za sve $a, b \in \Lambda$ postoji $c \in \Lambda$ takav da $a, b \le c$. Pokažimo to. U slučaju da je $\mathbb{A}$ neunitalna račun provodimo u $\tilde{\mathbb{A}}$.

Primijetimo da je za $a \in \mathbb{A}^+$ element $1 + a$ invertibilan i $a(1 + a)^{-1} = 1 - (1 + a)^{-1}$. Tvrdimo da vrijedi

$$0 \le a \le b \implies a(1 + a)^{-1} \le b(1 + b)^{-1}. \tag{$\triangle$}$$

Doista, ako je $0 \le a \le b$, tada $1 + a \le 1 + b$ što povlači $(1 + b)^{-1} \le (1 + a)^{-1}$ (Teorem 2.3.11.). Slijedi $1 - (1 + a)^{-1} \le 1 - (1 + b)^{-1}$, tj. $a(1 + a)^{-1} \le b(1 + b)^{-1}$. Time smo dokazali ($\triangle$). Primijetimo da za $a \in \mathbb{A}^+$ element $a(1 + a)^{-1}$ leži u Λ. Naime, to je jasno za funkcijsku algebru $C(K)$, gdje je K CH prostor pa tvrdnja slijedi korištenjem Gelfandove transformacije na C*-podalgebru generiranu s 1 i a.

Neka su sada $a, b \in \Lambda$ proizvoljni. Definirajmo

$$a' = a(1 - a)^{-1},\ b' = b(1 - b)^{-1},\ c' = (a' + b')(1 + a' + b')^{-1}.$$

Tada je $c \in \Lambda$ te pošto je $a' \le a' + b'$ iz ($\triangle$) slijedi $a = a'(1 + a')^{-1} \le c$. Posve analogno dobivamo $b \le c$.

Teorem 2.4.2. *Svaka* C*-*algebra dopušta aproksimativnu jedinicu.*

Dokaz. Naravno, tvrdnju dokazujemo u slučaju da je $\mathbb{A}$ neunitalna. Tada je prema Teoremu 1.3.12. $0 \in \sigma(\mathbb{A}),\ \forall a \in \mathbb{A}$. Označimo kao i ranije s Λ skup svih pozitivnih elemenata norme manje od 1. Prema prijašnjim razmatranjima, Λ je usmjeren skup i definirajmo $e_\lambda = \lambda,\ \forall \lambda \in \Lambda$. Ostaje pokazati $a = \lim\limits_{\lambda\in\Lambda} ae_\lambda,\ \forall a \in \mathbb{A}$. Kako pozitivni elementi razapinju $\mathbb{A}$ (Korolar 2.3.7.), to je dovoljno dokazati za njih.

Neka je $a \in \Lambda$ i $\epsilon > 0$. Neka je $\Gamma : C^*(a) \to C_0(\Omega)$ Gelfandova reprezentacija. Tada ako stavimo $f = \Gamma(a)$ onda je skup $K = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \ge \epsilon\}$ kompaktan te stoga prema Urysohnovoj[13] lemi (tj. njezinoj posljedici, vidi Dodatak Teorem A.0.9.) postoji neprekidna funkcija kompaktnog nosača $g \in C_c(\Omega),\ 0 \le g \le 1$ takva da $g|_K \equiv 1$. Izaberimo

[13]Pavel Urysohn, 1898-1924, sovjetski matematičar

$\delta \in \langle 0, 1\rangle$ takav da $1 - \delta < \epsilon$. Tada je $\|f - \delta g f\| \leq \epsilon$. Zaista, prvo da je $\|f\|_\infty = \|\Gamma(a)\|_\infty = \|a\| < 1$ jer je Γ izometrija.

Sada ako je $\omega \in K$ imamo $g(\omega) = 1$ te stoga

$$|f(\omega) - \delta g(\omega) f(\omega)| \leq |f(\omega)||1 - \delta| \leq 1 - \delta < \epsilon.$$

Nadalje, za $\omega \notin K$ imamo $|f(\omega)| < \epsilon$ i $0 \leq g(\omega) \leq 1$. Zato je

$$|f(\omega) - \delta g(\omega) f(\omega)| \leq |f(\omega)||1 - \delta g(\omega)| \leq |f(\omega)| < \epsilon.$$

Sveukupno, $\|f - \delta g f\|_\infty \leq \infty$. Izaberimo sada $\lambda_0 = \Gamma^{-1}(\delta g)$. Tada je $\lambda_0 \in \Lambda$ te

$$\|a - e_{\lambda_0} a\| = \|a - \lambda_0 a\| = \|\Gamma^{-1}(f) - \Gamma^{-1}(\delta g)\Gamma^{-1}(f)\| = \|\Gamma^{-1}(f - \delta g f)\| = \|f - \delta g f\| \leq \epsilon.$$

Sada pretpostavimo da je $\lambda \in \Lambda$ i $\lambda \geq \lambda_0$. Tada je $1 - e_\lambda \leq 1 - e_{\lambda_0}$ pa je i $a(1 - e_\lambda)a \leq a(1 - e_{\lambda_0} a)$. Stoga je

$$\begin{aligned}
\|a - e_\lambda a\|^2 &= \|(1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}}(1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}} a\|^2 \\
&\leq \|(1 - e_\lambda)^{\frac{1}{2}} a\|^2 = \|a(1 - e_\lambda)a\| \\
&\leq \|a(1 - e_{\lambda_0})a\| \leq \|(1 - e_{\lambda_0})a \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Time smo pokazali $a = \lim_{\lambda \in \Lambda} a e_\lambda$ i gotovi smo. □

Ono što sada želimo pokazati je da je svaki zatvoren ideal C*-algebre automatski samoadjungiran pa posljedično i sam C*-algebra. To će nam upravo omogućiti aproksimativna jedinica.

Lema 2.4.3. *Neka je I zatvoren lijevi ideal u* C*-*algebri $\mathbb{A}$. Tada postoji rastuća mreža $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ pozitivnih elemenata takvih da $\|e_\lambda\| \leq 1$, $\forall \lambda \in \Lambda$ i $a = \lim_{\lambda \in \Lambda} a e_\lambda$, $\forall a \in \mathbb{A}$.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{B} = I \cap I^*$. Primijetimo da je $\mathbb{B}$ C*-podalgebra od $\mathbb{A}$ te stoga dopušta aproksimativnu jedinicu $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Nadalje, ako je $a \in I$ tada je $a^* a \in \mathbb{B}$ pa je $\lim_{\lambda \in \Lambda} a^* a e_\lambda = a^* a$, tj. $\lim_{\lambda \in \Lambda} \|a^* a - a^* a e_\lambda\| = 0$. Prelaskom na $\tilde{\mathbb{A}}$ u slučaju da je $\mathbb{A}$ neunitalna imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - a e_\lambda\|^2 &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a(1 - e_\lambda)\|^2 \\
&= \lim_{\lambda \in \Lambda} \|(1 - e_\lambda) a^* a (1 - e_\lambda)\| \\
&\leq \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a^* a (1 - e_\lambda)\| \\
&= \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a^* a - a^* a e_\lambda\| = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, $\lim_{\lambda \in \Lambda} a e_\lambda = a$. □

Teorem 2.4.4. *Neka je I zatvoren ideal u* C**-algebri* $\mathbb{A}$*. Tada je I samoadjungiran te stoga* C**-podalgebra od* $\mathbb{A}$*. Ako je $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica za I tada za $a \in \mathbb{A}$ vrijedi*

$$\|a + I\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|a - e_\lambda a\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|a - ae_\lambda\|.$$

Dokaz. Prema prethodnoj lemi I dopušta rastuću mrežu $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pozitivnih elemenata iz I, norme ne veće od 1 takvu da $a = \lim_{\lambda\in\Lambda} ae_\lambda$, $\forall a \in I$. Pošto je involucija izometrija, tada je i $a^* = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda a^*$. Jer je I ideal imamo $e_\lambda a^* \in I$, $\forall\lambda \in \Lambda$. Sada iz zatvorenosti od I slijedi $a^* \in I$. Dakle, I je samoadjungiran.

Neka je $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica u I, $a \in \mathbb{A}$ i $\epsilon > 0$. Po definiciji, postoji $b \in I$ takav da $\|a + b\| < \|a + I\| + \frac{\epsilon}{2}$. Kako je $b = \lim_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda b$ postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da $\|b - e_\lambda b\| < \frac{\epsilon}{2}$ za sve $\lambda \geq \lambda_0$. Prelaskom na $\tilde{\mathbb{A}}$ po potrebi imamo

$$\begin{aligned}
\|a - e_\lambda a\| &= \|(1 - e_\lambda)(a + b) - (1 - e_\lambda)b\| \\
&\leq \|(1 - e_\lambda)(a + b)\| + \|b - e_\lambda b\| \\
&\leq \|a + b\| + \|b - e_\lambda b\| \\
&< \|a + I\| + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Slijedi $\|a + I\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|a - e_\lambda a\|$ pa također

$$\|a + I\| = \|a^* + I\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|a^* - e_\lambda a^*\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|a - ae_\lambda\|.$$

□

Korolar 2.4.5. *Ako je I zatvoren ideal u* C**-algebri* $\mathbb{A}$ *onda je* $\mathbb{A}/I$ C**-algebra.*

Dokaz. Neka je $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativna jedinica u I. Tada za $a \in \mathbb{A}$ i $b \in I$ koristeći Teorem 2.4.4. te prelaskom na $\tilde{\mathbb{A}}$ po potrebi, imamo

$$\begin{aligned}
\|a + I\|^2 &= \lim_{\lambda\in\Lambda} \|a - ae_\lambda\|^2 = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|(1 - e_\lambda)a^*a(1 - e_\lambda)\| \\
&\leq \sup_{\lambda\in\Lambda} \|(1 - e_\lambda)(a^*a + b)(1 - e_\lambda)\| + \lim_{\lambda\in\Lambda} \|(1 - e_\lambda)b(1 - e_\lambda)\| \\
&\leq \|a^*a + b\| + \lim_{\lambda\in\Lambda} \|b - e_\lambda b\| \\
&= \|a^*a + b\|.
\end{aligned}$$

Slijedi $\|a + I\|^2 \leq \|a^*a + I\|$. Iz Propozicije 2.1.8. slijedi da je $\mathbb{A}/I$ C*-algebra. □

Sada možemo poopćiti Korolar 2.1.19. Ispostavlja se da je za zaključiti izometričnost *-homomorfizma između C*-algebri dovoljno tražiti injektivnost.

Teorem 2.4.6. *Svaki injektivni *-homomorfizam između* C**-algebri je izometrija.*

Dokaz. Neka je $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *-monomorfizam C*-algebri. Treba pokazati $\|\varphi(a)\|^2 = \|a\|^2$, tj. $\|\varphi(a^*a)\| = \|a^*a\|$, $\forall a \in \mathbb{A}$. Možemo pretpostaviti da je $\mathbb{A}$ komutativna (restrikcijom na C*(a^*a) po potrebi) te da je $\mathbb{B}$ komutativna (zamijenimo $\mathbb{B}$ s $\overline{\varphi(\mathbb{A})}$ po potrebi). Nadalje, proširenjem $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ do $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathbb{A}} \to \tilde{\mathbb{B}}$ po potrebi, možemo pretpostaviti da su $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ i φ unitalni.

Za karakter τ na $\mathbb{B}$, $\tau \circ \varphi$ je karakter na $\mathbb{A}$. Preslikavanje

$$\varphi' : \Omega(\mathbb{B}) \to \Omega(\mathbb{A}),\ \tau \mapsto \tau \circ \varphi$$

je neprekidno. Kako je $\Omega(\mathbb{A})$ kompaktan, $\varphi'(\Omega(\mathbb{B}))$ je kompaktan. Kontradikcije radi, pretpostavimo $\varphi'(\Omega(\mathbb{B})) \neq \Omega(\mathbb{A})$. Tada prema Urysohnovoj lemi postoji nenul neprekidna funkcija $f : \Omega(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ koja se poništava na $\varphi'(\Omega(\mathbb{B}))$. Prema Komutativnom Gelfand-Naimark teoremu je $f = \hat{a}$ za neki $a \in \mathbb{A}$. Stoga je za $\tau \in \Omega(\mathbb{B})$

$$\tau(\varphi(a)) = \hat{a}(\tau \circ \varphi) = f(\tau \circ \varphi) = 0.$$

Kako to vrijedi za svaki karakter na $\Omega(\mathbb{B})$ slijedi $\varphi(a) = 0$ pa mora biti $a = 0$ zbog injektivnosti od φ. Slijedi $f \equiv 0$ što je kontradikcija. Dakle, $\varphi'(\Omega(\mathbb{B})) = \Omega(\mathbb{A})$. Sada za $a \in \mathbb{A}$ imamo

$$\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\tau \in \Omega(\mathbb{A})} |\tau(a)| = \sup_{\tau \in \Omega(\mathbb{B})} |\tau(\varphi(a))| = \|\varphi(a)\|,$$

tj. φ je izometrija. □

Općenito je slika *-homomorfizma između *-algebri i sama za sebe *-algebra. Htjeli bismo analognu stvar zaključiti za C*-algebre. Ono što je problematično je što ne znamo automatski da je slika *-homomorfizma zatvorena te je upravo taj zaključak ključan u dokazu sljedećeg teorema.

Teorem 2.4.7. *Ako je $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *-homomorfizam između* C**-algebri, tada je $\varphi(\mathbb{A})$* C*-*podalgebra od $\mathbb{B}$.*

Dokaz. Prisjetimo se da je $\mathrm{Ker}(\varphi)$ zatvoren ideal u $\mathbb{A}$. Prema Korolaru 2.4.5 $\mathbb{A}/\mathrm{Ker}(\varphi)$ je C*-algebra. Preslikavanje

$$\mathbb{A}/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathbb{B},\ a + \mathrm{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(a)$$

je injektivan *-homomorfizam C*-algebri te je stoga izometrija. Njegova slika $\varphi(\mathbb{A})$ je nužno potpun te stoga zatvoren u $\mathbb{B}$. Slijedi da je $\varphi(\mathbb{A})$ C*-podalgebra od $\mathbb{B}$. □

Poglavlje 3

Teorija reprezentacija C*-algebri

Kao u svakoj teoriji reprezentacija, cilj nam je apstraktne algebarske strukture *reprezentirati* kao linearne transformacije vektorskih prostora. U slučaju C*-algebre, za prostor kojim ćemo ih reprezentirati prirodno uzimamo $B(\mathcal{H})$ gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Glavni rezultat koji ćemo pokazati u ovom poglavlju je Gelfand-Naimarkov teorem koji govori da svaka C*-algebra ima vjernu reprezentaciju.

3.1 Reprezentacije

Definicija 3.1.1. ***Reprezentacija*** C*-*algebre* $\mathbb{A}$ *je uređen par* $(\mathcal{H}, \pi)$ *gdje je* $\mathcal{H}$ *Hilbertov prostor, a* $\pi : \mathbb{A} \to B(\mathcal{H})$ **-homomorfizam. Kažemo da je reprezentacija* $(\mathcal{H}, \pi)$ ***vjerna*** *ako je* π *injekcija.*

Za dvije reprezentacije $(\mathcal{H}, \pi)$ *i* $(\mathcal{K}, \sigma)$ *kažemo da su* ***ekvivalentne*** *ako postoji unitarni operator* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *takav da* $\sigma(a) = U\pi(a)U^*,\ \forall a \in \mathbb{A}$*. Pišemo* $(\mathcal{H}, \pi) \sim (\mathcal{K}, \sigma)$*.*

Ponekad ćemo samo preslikavanje π zvati reprezentacijom, dok će tada Hilbertov prostor biti podrazumijevan. Nadalje, da je uvjet $\sigma(a) = U\pi(a)U^*$ ekvivalentan uvjetu $U\pi(a) = \sigma(a)U$ za neki unitaran operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$.

Prisjetimo se da je $B(\mathcal{H})$ C*-algebra zajedno s operatorskom normom te involucijom danom adjunigranjem operatora, tj. za $A \in B(\mathcal{H})$, $A^* \in B(\mathcal{H})$ je jedinstveni operator sa svojstvom

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle,\ \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ reprezentacija C*-algebre $\mathbb{A}$. Za zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ kažemo da je π-*invarijantan* ako vrijedi $\pi(a)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K},\ \forall a \in \mathbb{A}$. U tom slučaju možemo definirati

$$\pi_{\mathcal{K}}(a) = \pi(a)|_{\mathcal{K}},\ \forall a \in \mathbb{A}$$

reprezentaciju $\pi_{\mathcal{K}}$ od $\mathbb{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{K}$ koju zovemo **subreprezentacija** od π.

Propozicija 3.1.2. *Neka je $\mathbb{A}$ C*-algebra i $(\mathcal{H},\pi)$ reprezentacija od $\mathbb{A}$. Zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ od $\mathcal{H}$ je π-invarijantan ako i samo ako je $\mathcal{K}^\perp$ π-invarijantan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{K}$ π-invarijantan. Trebamo vidjeti $\pi(a)\mathcal{K}^\perp \subseteq \mathcal{K}^\perp$ za proizvoljan $a \in \mathbb{A}$. Zaista, neka su $\xi \in \mathcal{K}^\perp$ i $\eta \in \mathcal{K}$. Tada

$$\langle \pi(a)\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \pi(a)^*\eta\rangle = \langle \xi, \pi(a^*)\eta\rangle = 0$$

jer je $\pi(a^*)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.

Obratni smjer sada slijedi iz činjenice da je $(\mathcal{K}^\perp)^\perp = \mathcal{K}$. □

Definicija 3.1.3. *Za reprezentaciju $(\mathcal{H},\pi)$ C*-algebre $\mathbb{A}$ kažemo da je* ***nedegenerirana*** *ako je $\xi = 0$ jedini $\xi \in \mathcal{H}$ koji zadovoljava $\pi(a)\xi = 0,\ \forall a \in \mathbb{A}$. U protivnom, kažemo da je reprezentacija* ***degenerirana****.*

Iz definicije je jasno da je svaka podreprezentacija nedegenerirane reprezentacije opet nedegenerirana.

S $[\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]$ označavamo linearnu ljusku skupa $\pi(\mathbb{A})\mathcal{H} = \{\pi(a)\xi : a \in \mathbb{A},\ \xi \in \mathcal{H}\}$. Imamo sljedeću karakterizaciju nedegeneriranosti.

Propozicija 3.1.4. *Reprezentacija $(\mathcal{H},\pi)$ C*-algebre $\mathbb{A}$ je nedegenerirana ako i samo ako je $[\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]$ gust u $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Zatvarač $\overline{[\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]}$ je očito π-invarijantan. Tada je i $(\overline{[\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]})^\perp = [\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]^\perp$ π-invarijantan. Sada za $\eta \in \mathcal{H}$ imamo

$$\begin{aligned} \eta \in [\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]^\perp &\iff \langle \pi(a)\xi, \eta\rangle = 0,\ \forall \xi \in \mathcal{H},\ \forall a \in \mathbb{A} \\ &\iff \langle \xi, \pi(a^*)\eta\rangle = 0,\ \forall \xi \in \mathcal{H},\ \forall a \in \mathbb{A} \\ &\iff \pi(a^*)\eta = 0,\ \forall a \in \mathbb{A} \\ &\iff \pi(a)\eta = 0,\ \forall a \in \mathbb{A}. \end{aligned}$$

Sada ako je π nedegenerirana imamo $[\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]^\perp = \{0\}$ pa prelazeći na ortogonalne komplemente dobivamo $\overline{[\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]} = \mathcal{H}$.

Obratno, ako je $[\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]$ gust u $\mathcal{H}$ imamo $[\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]^\perp = \{0\}$ pa iz gornjih ekvivalencija vrijedi implikacija

$$\pi(a)\eta = 0,\ \forall a \in \mathbb{A} \implies \eta = 0.$$

□

Za svaku reprezentaciju $[\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}]$ je π-invarijantan i to je prostor na kojem reprezentacija "živi". Dakle, reći da je reprezentacija nedegenerirana je reći da reprezentacija "živi" na cijelom prostoru $\mathcal{H}$, a ne u samo u nekom dijelu.

U slučaju unitalne C*-algebre imamo sljedeći jednostavan kriterij za nedegeneriranost.

Propozicija 3.1.5. *Reprezentacija $(\mathcal{H}, \pi)$ unitalne* C*-*algebre $\mathbb{A}$ je nedegenerirana ako i samo ako je π unitalni homomorfizam.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\pi(1) \neq 1$. Tada je $\pi \equiv 0$ (vidi dokaz Propozicije 1.3.2.) pa je jasno π degenerirana.

Obratno, neka je π degenerirana, tj. postoji $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$ takav da $\pi(a)\xi = 0$, $\forall a \in \mathbb{A}$. Kad bi $\pi(1) = 1$ onda bi $\xi = 0$ što je kontradikcija s izborom od ξ. Dakle, π nije unitalni homomorfizam. $\square$

Prirodno se postavlja pitanje može li se reprezentacija proširiti sa C*-podalgebre na cijelu C*-algebru $\mathbb{A}$. Odgovor je općenito ne. Naime, promotrimo C*-algebru $M_n(\mathbb{C})$ te neka je $\mathbb{B}$ podalgebra svih dijagonalnih matrica iz $M_n(\mathbb{C})$. Definirajmo $\pi : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ s $\pi(\text{diag}(a_1, ..., a_n)) = a_1$. Lako se provjeri da je π zaista reprezentacija. Kad bismo mogli proširiti π do reprezentacija $\tilde{\pi}$ od $M_n(\mathbb{C})$ onda bi $\text{Ker}(\tilde{\pi})$ bio netrivijalan ideal od $M_n(\mathbb{C})$ što je nemoguće jer je poznato da je $M_n(\mathbb{C})$ prosta algebra (vidi [5]). No, ako počinjemo s reprezentacijom na idealu, stvar je drugačija.

Teorem 3.1.6. *Neka je I zatvoren ideal u* C*-*algebri $\mathbb{A}$ i $(\mathcal{H}, \pi)$ nedegenerirana reprezentacija* C*-*algebre I. Postoji jedinstveno proširenje od π do reprezentacije $(\mathcal{H}, \tilde{\pi})$ od $\mathbb{A}$. Nadalje, ako su π i σ ekvivalentne nedegenerirane reprezentacije od I onda su i njihova proširenja $\tilde{\pi}$ i $\tilde{\sigma}$ ekvivalentne reprezentacije od $\mathbb{A}$.*

Dokaz. Neka su $b_1, ..., b_n \in I$ i $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada za proizvoljan $a \in \mathbb{A}$ tvrdimo da vrijedi

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \pi(ab_i)\xi_i \right\| \leq \|a\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi(b_i)\xi_i \right\|. \tag{$\triangle$}$$

Uzmimo $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aproksimativnu jedinicu za I. Tada imamo

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n}\pi(ab_i)\xi_i\right\| &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\left\|\sum_{i=1}^{n}\pi(ae_\lambda b_i)\xi_i\right\| \\ &= \lim_{\lambda\in\Lambda}\left\|\pi(ae_\lambda)\sum_{i=1}^{n}\pi(b_i)\xi_i\right\| \\ &\le \lim_{\lambda\in\Lambda}\|\pi(ae_\lambda)\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\pi(b_i)\xi_i\right\| \\ &\le \|a\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\pi(b_i)\xi_i\right\|\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili činjenicu $\|\pi\| \le 1$.

Definirajmo $\mathcal{H}_0 = [\pi(I)\mathcal{H}]$. Primijetimo da iz $(\triangle)$ imamo sljedeću implikaciju

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(b_i)\xi_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{n}\pi(ab_i)\xi_i = 0.$$

Zbog toga je za $a \in \mathbb{A}$ dobro definirano preslikavanje $\tilde{\pi}(a) : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ dano s

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(b_i)\xi_i \mapsto \sum_{i=1}^{n}\pi(ab_i)\xi_i.$$

$(\triangle)$ nam također govori da je $\tilde{\pi}(a)$ ograničen operator na $\mathcal{H}_0$. Kako je π nedegenerirana, $\mathcal{H}_0$ je gust u $\mathcal{H}$ pa se $\tilde{\pi}(a)$ proširuje do ograničenog operatora na $\mathcal{H}$. To proširenje označimo isto s $\tilde{\pi}(a)$.

Sada je rutinska provjera vidjeti da je $\pi : a \mapsto \tilde{\pi}(a)$ reprezentacija od $\mathbb{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$.

Što se tiče jedinstvenosti, pretpostavimo da je σ neka druga reprezentacija od $\mathbb{A}$ na $\mathcal{H}$ koja proširuje π. Tada za $a \in \mathbb{A}, b \in I$ i $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\sigma(a)\pi(b)\xi = \sigma(a)\sigma(b)\xi = \sigma(ab)\xi = \pi(ab)\xi = \pi(a)\pi(b)\xi = \tilde{\pi}(a)\pi(b)\xi.$$

Pošto vektori oblika $\pi(b)\xi,\ b \in I, \xi \in \mathcal{H}$ razapinju gust potprostor od $\mathcal{H}$ slijedi $\sigma = \tilde{\pi}$.

Ako je $\pi \sim \sigma$ onda postoji unitaran operator U takav da $\sigma(b) = U\pi(b)U^*,\ \forall b \in I$. Tada

$$\begin{aligned}U\tilde{\pi}(a)U^*\sigma(b)\xi &= U\tilde{\pi}(a)U^*U\pi(b)\xi \\ &= U\tilde{\pi}(a)\pi(b)\xi \\ &= U\pi(ab)U^*\xi \\ &= \sigma(ab)\xi \\ &= \tilde{\sigma}(a)\sigma(b)\xi.\end{aligned}$$

Ponovno, kako vektori oblika $\sigma(b)\xi,\ b \in I, \xi \in \mathcal{H}$ razapinju gust potprostor od $\mathcal{H}$ slijedi $\tilde{\sigma}(a) = U\tilde{\pi}(a)U^*,\ \forall a \in \mathbb{A}$, tj. $\tilde{\sigma} \sim \tilde{\pi}$. □

Sada ćemo opisati jednu općenitu konstrukciju, direktnu sumu reprezentacija. Ta konstrukcija je sveprisutna i od neizmjerne važnosti. Kako ćemo vidjeti, upravo se koristeći nju dobiva vjerna reprezentacija proizvoljne C*-algebre.

Primjer 3.1.7. *Neka je $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ familija Hilbertovih prostora. Tada definiramo*

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i = \{(x_i)_{i\in I} \in \textstyle\prod_{i\in I} \mathcal{H}_i : \sum\limits_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty\}.$$

Naravno, da bi spomenuta suma bila konačna najviše prebrojivo mnogo x_i može biti različito od nule. Zbrajanje i množenje skalarom vektora definiramo po komponentama. Nadalje, definiramo

$$\langle (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle.$$

Lako se vidi da na taj način na $\bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{H}_i$ dobivamo strukturu Hilbertovog prostora.
Neka je $T_i \in B(\mathcal{H}_i)$, $i \in I$ takvi da $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\| < \infty$. Definiramo $\bigoplus\limits_{i\in I} T_i : \bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{H}_i \to \bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{H}_i$ s

$$\bigoplus_{i\in I} T_i (x_i)_{i\in I} = (T_i x_i)_{i\in I}.$$

Pokažimo da je $\bigoplus\limits_{i\in I} T_i \in B(\bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{H}_i)$. Za $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{H}_i$ imamo

$$\|\bigoplus_{i\in I} T_i (x_i)_{i\in I}\|^2 = \|(T_i x_i)_{i\in I}\|^2 = \sum_{i\in I} \|T_i x_i\|^2 \leq (\sup_{i\in I} \|T_i\|)^2 \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 \leq (\sup_{i\in I} \|T_i\|)^2 \|(x_i)_{i\in I}\|^2.$$

Slijedi $\bigoplus\limits_{i\in I} T_i \in B(\bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{H}_i)$ i $\|\bigoplus\limits_{i\in I} T_i\| \leq \sup\limits_{i\in I} \|T_i\|$.
Tvrdimo još da je $(\bigoplus\limits_{i\in I} T_i)^* = \bigoplus\limits_{i\in I} T_i^*$. Zaista, za $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I} \in \bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{H}_i$ imamo

$$\langle (x_i)_{i\in I}, \bigoplus_{i\in I} T_i^* (y_i)_{i\in I}\rangle = \langle (x_i)_{i\in I}, (T_i^* y_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, T_i^* y_i\rangle = \sum_{i\in I} \langle T_i x_i, y_i\rangle = \langle (T_i x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle = \langle \bigoplus_{i\in I} T_i (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle.$$

Slijedi $(\bigoplus\limits_{i\in I} T_i)^* = \bigoplus\limits_{i\in I} T_i^*$.

Ako je $(\mathcal{H}_i, \pi_i)_{i\in I}$ familija reprezentacija C*-algebre onda reprezentaciju $(\bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{H}_i, \bigoplus\limits_{i\in I} \pi_i)$ zovemo **direktna suma** reprezentacija $(\mathcal{H}_i, \pi_i)_{i\in I}$. Primijetimo da je direktna suma dobro definirana jer zbog Teorema 2.1.18. imamo $\sup\limits_{i\in I} \|\pi_i\| \leq 1 < \infty$.

Promotrimo sljedeću situaciju. Ako je $(\mathcal{H}, \pi)$ reprezentacija i $\mathcal{K}$ zatvoren, π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, tada je i $\mathcal{K}^\perp$ π-invarijantan te $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$. Nadalje, ako stavimo

$\pi_1(a) = \pi(a)|_{\mathcal{K}}$ i $\pi_2(a) = \pi(a)|_{\mathcal{K}^\perp}$ vrijedi $(\mathcal{H}, \pi) \sim (\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp, \pi_1 \oplus \pi_2)$.

Zapravo je dovoljno ograničiti se na proučavanje nedegeneriranih reprezentacija, kao što sljedeće pokazuje.

Teorem 3.1.8. *Svaka reprezentacija* C*-*algebre je direktna suma nedegenerirane reprezentacije i nulreprezentacije.*

Dokaz. Neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ reprezentacije C*-algebre $\mathbb{A}$ i neka je $\mathcal{K} = \overline{\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}}$. Tada je $\mathcal{K}$ zatvoren, π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ i očito je $\pi|_{\mathcal{K}}$ nedegenerirana. Prema Propoziciji 3.1.2. je $\mathcal{K}^\perp$ π-invarijantan. Jasno je da $\pi|_{\mathcal{K}^\perp} = 0$ i da je $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. □

Posebno zanimljiva klasa reprezentacija jest ona cikličkih. Sada ćemo ih definirati dok će se njihova važnost vidjeti u nastavku.

Definicija 3.1.9. *Neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ reprezentacija* C*-*algebre $\mathbb{A}$. Kažemo da je vektor $\xi \in \mathcal{H}$ **ciklički** ako je $\pi(\mathbb{A})\xi$ gust u $\mathcal{H}$. Kažemo još da je reprezentacija **ciklička** ako za nju postoji ciklički vektor te tada $\mathcal{H}$ zovemo **ciklički prostor**.*

Primijetimo da je svaka ciklička reprezentacija nedegenerirana. Zaista, neka je $\xi \in H$ ciklički vektor. Ako je $\pi(a)\eta = 0, \ \forall a \in \mathbb{A}$ imamo

$$\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \pi(a^*)\eta \rangle = \langle \xi, 0 \rangle = 0.$$

Sada iz gustoće od $\pi(\mathbb{A})\xi$ u H slijedi $\eta = 0$.

Daljnja redukcija se sastoji u tome da nedgeneriranu reprezentaciju zapišemo kao sumu cikličkih potprostora. Za to će nam trebati iduća lema.

Lema 3.1.10. *Neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ nedegenerirana reprezentacije* C*-*algebre $\mathbb{A}$. Tada je $\xi \in \overline{\pi(\mathbb{A})\xi}, \ \forall \xi \in \mathcal{H}$.*

Dokaz. Neka je P ortogonalni projektor na $\overline{\pi(\mathbb{A})}$ i uzmimo $T \in \pi(\mathbb{A})$. Tada je $PTP = TP$ te adjungiranjem slijedi $PT^*P = PT^*$. Pošto je $\pi(\mathbb{A})$ samoadjungirana vrijedi

$$PT = PTP = TP,$$

tj. P komutira s $\pi(\mathbb{A})$. Neka je $\xi = \xi_1 + \xi_2$ ortogonalni rastav s obzirom na potprostor $\overline{\pi(\mathbb{A})}$ (tj. $\xi_1 = P\xi$ i $\xi_2 = (I - P)\xi$). Sada je

$$T\xi_1 = TP\xi = PT\xi = T\xi$$

pa je $T\xi_2 = 0$ za sve $T \in \pi(\mathbb{A})$. Sada iz nedegeneriranosti od π slijedi $\xi_2 = 0$, tj. $\xi = \xi_1 \in \overline{\pi(\mathbb{A})}$. □

Teorem 3.1.11. *Neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ nedegenerirana reprezentacija* C*-*algebre $\mathbb{A}$. Tada je ona direktna suma cikličkih reprezentacija od $\mathbb{A}$.*

Dokaz. Za $\xi \in \mathcal{H}$ neka je $\mathcal{H}_\xi = \overline{\pi(\mathbb{A})\xi}$. Nadalje, neka je $\mathcal{P}$ skup svih podskupova Λ od $\mathcal{H}$ takvi da je $\mathcal{H}_\xi \neq \{0\}$ te da su $\mathcal{H}_\xi$ i $\mathcal{H}_\eta$ ortogonalni za sve $\xi, \eta \in \Lambda$. Direktnom primjenom Zornove leme dobivamo maksimalan element od $\mathcal{P}$, označimo ga s Λ. Ako je $\eta \in (\bigcup\limits_{\xi\in\Lambda} \mathcal{H}_\xi)^\perp$ onda za proizovljni $\xi \in \Lambda$ imamo

$$\langle \pi(a)\eta, \pi(b)\xi \rangle = \langle \eta, \pi(a^*b)\xi \rangle = 0, \ \forall a, b \in \mathbb{A}$$

iz čega slijedi da su $\mathcal{H}_\eta$ i $\mathcal{H}_\xi$ ortogonalni. Prema prethodnoj lemi imamo $\eta \in \mathcal{H}_\eta$. Sada iz maksimalnosti od Λ slijedi $\eta = 0$. Stoga je $\mathcal{H}$ ortogonalna suma Hilbertovih prostora $(\mathcal{H}_\xi)_{\xi\in\Lambda}$. Ti su prostori očito π-invarijantni i reprezentacija dane restrikcijom

$$\pi_\xi : \mathbb{A} \to B(\mathcal{H}_\xi), \ a \mapsto \pi(a)|_{\mathcal{H}_\xi}$$

ima ξ kao ciklički vektor. Konačno, π je direktna suma reprezentacija $(\pi_\xi)_{\xi\in\Lambda}$. □

Definicija 3.1.12. *Za reprezentaciju $(\mathcal{H}, \pi)$ C*-algebre $\mathbb{A}$ kažemo da je* ***ireducibilna*** *ako su jedini zatvoreni, π-invarijantni potprostori od $\mathcal{H}$ trivijalni, tj. upravo $\mathcal{H}$ i $\{0\}$. U protivnom, kažemo da je reprezentacija* ***reducibilna****.*

Primijetimo da ako su dvije reprezentacije ekvivalentne da tada ireducibilnost jedne implicira ireducibilnost druge. Također, jasno je da je svaka reprezentacija na jednodimenzionalnom prostoru ireducibilna.

Propozicija 3.1.13. *Nedegenerirana reprezentacija $(\mathcal{H}, \pi)$ C*-algebre $\mathbb{A}$ je ireducibilna ako i samo ako je za svaki $\xi \in \mathcal{H}, \ \xi \neq 0$ potprostor $\pi(\mathbb{A})\xi$ gust u $\mathcal{H}$ (tj. svaki $\xi \neq 0$ je ciklički).*

Dokaz. Neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ ireducibilna i uzmimo $\xi \in \mathcal{H}, \ \xi \neq 0$. Tada je očito $\pi(\mathbb{A})\xi$ π-invarijantan, a njegov zatvarač $\overline{\pi(\mathbb{A})\xi}$ zatvoren π-invarijantan potprostor. Ako je $\overline{\pi(\mathbb{A})\xi} = \{0\}$ reprezentacija je degenerirana. Stoga, $\overline{\pi(\mathbb{A})\xi} = \mathcal{H}$, tj. ξ je ciklički vektor za $(\mathcal{H}, \pi)$.

Obratno, neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ nedegenerirana ali reducibilna reprezentacija. Neka je $\mathcal{K}$ netrivijalan, zatvoren, π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Ako uzmemo $\xi \in \mathcal{K}, \ \xi \neq 0$ tada je $\pi(\mathbb{A})\xi \subseteq \mathcal{K}$ pa stoga ne može biti gust u $\mathcal{H}$ (jer bi inače $\mathcal{K} = \mathcal{H}$). Dakle, našli smo nenul vektor koji nije ciklički. □

Ono što je praktično (i očekivano) je da svojstvo ireducibilnosti reprezentacije ostaje sačuvano kad promatramo njezinu restrikciju na ideale.

Teorem 3.1.14. *Neka je I ideal u C*-algebri $\mathbb{A}$. Ako je π ireducibilna reprezentacija od $\mathbb{A}$ i $\pi(I) \neq \{0\}$ onda je i $\pi|_I$ ireducibilna reprezentacija C*-algebre I. Nadalje, ako za ireducibilne reprezentacije π i σ od $\mathbb{A}$ vrijedi $\pi(I) \neq \{0\}$ i $\sigma(I) \neq \{0\}$ te vrijedi da su $\pi|_I$ i $\sigma|_J$ ekvivalentne, onda su i π i σ ekvivalentne.*

Dokaz. Što se tiče prve tvrdnje, prema prošloj propoziciji dovoljno je dokazati da je za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$ potprostor $\pi(I)\xi$ gust u $\mathcal{H}$. Uzmimo $a, \in \mathbb{A}, b \in I$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Tada je $\pi(a)\pi(b)\xi = \pi(ab)\xi \in \pi(I)\xi$ jer je I ideal. To pokazuje da je $\overline{\pi(I)\xi}$ zatvoren π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Zbog ireducibilnosti od π slijedi $\overline{\pi(I)\xi} = \mathcal{H}$ ili $\overline{\pi(I)\xi} = \{0\}$. Ako je $\overline{\pi(I)\xi} = \{0\}$ imamo $\pi(b)\xi = 0$, $\forall b \in I$. Tada

$$\langle \pi(b)\xi, \eta \rangle = 0,\ \forall b \in I,\ \forall \eta \in \mathcal{H} \implies \langle \xi, \pi(b)\eta \rangle = 0,\ \forall b \in I,\ \forall \eta \in \mathcal{H} \implies \xi \in [\pi(I)\mathcal{H}]^{\perp}.$$

Dakle, $[\pi(I)\mathcal{H}]^{\perp} \neq \{0\}$. Kako je taj prostor π-invarijantan slijedi $[\pi(I)\mathcal{H}]^{\perp} = \mathcal{H}$. Slijedi $\pi(J) = \{0\}$, tj. kontradikcija. Dakle, $\pi|_I$ je ireducibilna reprezentacija od I.

Druga tvrdnja slijedi odmah iz druge tvrdnje Teorema 3.1.6. jer su π i σ redom proširenja od $\pi|_I$ i $\sigma|_I$. □

Propozicija 3.1.15. *Reprezentacija* $(\mathcal{H}, \pi)$ C*-*algebre* $\mathbb{A}$ *je ireducibilna ako i samo ako nijedan netrivijalan ortogonalan projektor ne komutira sa svim* $\pi(a)$, $a \in \mathbb{A}$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $(\mathcal{H}, \pi)$ reducibilna, tj. postoji netrivijalan, zatvoren, π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Označimo ga s $\mathcal{K}$ i promotrimo $P_{\mathcal{K}}$ ortogonalan projektor na $\mathcal{K}$. Vrijedi $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^{\perp}$. Uzmimo proizvoljan $a \in \mathbb{A}$ te $\xi \in \mathcal{H}$ napišimo kao $\xi = \eta + \zeta$, $\eta \in \mathcal{K}$, $\zeta \in \mathcal{K}^{\perp}$.

$$\pi(a)P_{\mathcal{K}}\xi = \pi(a)(P_{\mathcal{K}}\eta + P_{\mathcal{K}}\zeta) = \pi(a)\eta.$$

Iz Propozicije 3.1.2. imamo da je $\mathcal{K}^{\perp}$ također π-invarijantan, posebno $\pi(a)\zeta \in \mathcal{K}^{\perp}$. Stoga

$$P_{\mathcal{K}}\pi(a)\xi = P_{\mathcal{K}}(a)(\pi(a)\eta + \pi(a)\zeta) = \pi(a)\eta.$$

Dakle, $P_{\mathcal{K}}\pi(a) = \pi(a)P_{\mathcal{K}}$, $\forall a \in \mathbb{A}$.

Obratno, pretpostavimo da postoji ortogonalni projektor P (recimo na zatvoren potprostor $\mathcal{K}$) koji komutira sa svima $\pi(a)$, $a \in \mathbb{A}$. Tvrdimo da je $\mathcal{K}$ π-invarijantan potprostor. Zaista, za $\xi \in \mathcal{K}$ imamo

$$\pi(a)\xi = \pi(a)P\xi = P\pi(a)\xi \in \mathcal{K}$$

jer $R(P) \subseteq \mathcal{K}$. Dakle, $\pi(\mathbb{A})\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, tj. $(\mathcal{H}, \pi)$ je reducibilna. □

Radi lakšeg izražavanja i notacije uvedimo sljedeću definiciju. Neka je $S \subseteq B(\mathcal{H})$ skup ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru. Definiramo **komutant**, u oznaci S', kao skup svih operatora iz $B(\mathcal{H})$ koji komutiraju sa svim operatorima iz S. Sljedeći teorem je poboljšanje prethodne propozicije.

Teorem 3.1.16. *Reprezentacija* $(\mathcal{H}, \pi)$ C*-*algebre* $\mathbb{A}$ *je ireducibilna ako i samo ako je* $\pi(\mathbb{A})' = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Dokaz. Prvo pretpostavimo da $(\mathcal{H}, \pi)$ nije ireducibilna. Tada prema prethodnoj propoziciji postoji netrivijalan ortogonalan projektor iz komutanta $\pi(\mathbb{A})'$ koji očito nije oblika λI za neki $\lambda \in \mathbb{C}$.

Obratno, neka postoji neki neskalarni operator $T \in \pi(\mathbb{A})'$. Tada je i T^* iz komutanta od $\pi(\mathbb{A})$. Stoga su i realni i imaginarni dio od T su iz komutanta od $\pi(\mathbb{A})$. Barem jedan od njih je neskalaran pa možemo zaključiti da postoji neskalarni hermitski operator A iz komutanta od $\pi(\mathbb{A})$.

Tvrdimo da $\sigma(A)$ sadrži barem dvije točke. Zaista, pretpostavimo da je $\sigma(A) = \{\lambda\}$. Tada je $B := A - \lambda I$ normalan operator i vrijedi $\sigma(B) = \{0\}$. Kako je $\mathbb{B}$ normalan, vrijedi $r(B) = \|B\|$ (Korolar 2.2.11.), tj. $\|B\| = 0$. Dakle, $A = \lambda I$ pa je A skalaran što je kontradikcija s izborom od A.

Sada možemo izabrati dvije nenul (realne) funkcije $f, g \in C(\sigma(A))$ takve da $fg = 0$. Kako je $f \neq 0$ slijedi $f(A) \neq 0$. Nadalje, $f(A) \in \mathrm{C}^*(A) \subseteq \pi(A)'$. Promotrimo $\overline{f(A)\mathcal{H}}$. Očito je to nenul zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$. Tvrdimo da je i π invarijantan. Zaista, za $a \in \mathbb{A}$ i $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\pi(a)f(A)\xi = f(A)\pi(a)\xi \in f(A)\mathcal{H}.$$

Ostaje vidjeti da je $\overline{f(A)\mathcal{H}}$ pravi potprostor od $\mathcal{H}$. Analogno kao i za f, $g(A) \neq 0$ i $g(A)\mathcal{H}$ je nenul, zatvoren, π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$. Tvrdimo da je njemu $f(A) = 0$. Zaista, za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$f(A)g(A)\xi = (fg)(A)\xi = 0$$

gdje smo koristili svojstva neprekidnog funkcionalnog računa (Teorem 2.2.14.). Kad bi $\overline{f(A)\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ imali bismo $g(A) = 0$ što je kontradikcija. Dakle, našli smo pravi, zatvoren, π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, tj. π je reducibilna. □

3.2 GNS konstrukcija i Gelfand-Naimark teorem

Nakon što smo vidjeli razna svojstva reprezentacija, glavni problem s kojim se susrećemo jest taj da u ovom trenutku ne znamo postoje li one uopće (osim trivijalne). Svrha ove točke je pokazati kako se od određenih linearnih funkcionala mogu konstruirati reprezentacije te da takvi funkcionali uvijek postoje (pa posljedično i reprezentacije). Konačno, dokazujemo centralni teorem ove točke, Gelfand-Naimarkov teorem.

U ovoj točki će $\mathbb{A}$ označavati unitalnu C*-*algebru.*

Definicija 3.2.1. *Za linearni funkcional f na $\mathbb{A}$ kažemo da je* ***pozitivan*** *ako je*

$$f(a^*a) \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{A}.$$

Zbog Teorema 2.3.11. ekvivalentno smo mogli definirati pozitivnost funkcionala s uvjetom $f(a) \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{A}^+$.

Primjer 3.2.2. *Neka je dana reprezentacija $(\mathcal{H}, \pi)$ i $\xi \in \mathcal{H}$. Tada $f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$ definira linearni funkcional na $\mathbb{A}$.*

$$f(a^*a) = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)^*\pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle \geq 0.$$

Dakle, f je pozitivan linearan funkcional. Pokazat ćemo da su svi pozitivni linearni funkcionali ovog oblika.

Prikazati ćemo vrlo korisnu takozvanu GNS konstrukciju gdje za dani pozitivni funkcional f konstruiramo $(\mathcal{H}, \pi)$ i ξ takve da je f oblika kao gore. Zatim ćemo karakterizirati one funkcionale koji induciraju ireducibilne reprezentacije.

Sa svakim linearnim funkcionalom f na $\mathbb{A}$ asocirana je seskvilinearna forma $[\cdot, \cdot]_f : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ definirana s $[a, b]_f = f(b^*a)$. Ako je f pozitivan, tada je $[a, a]_f \geq 0$, tj. $[\cdot, \cdot]_f$ pozitivno semidefinitan te stoga za njega vrijedi CSB nejednakost koja u terminama f glasi

$$|f(b^*a)|^2 \leq f(a^*a)f(b^*b), \ \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Primijetimo da u definiciji nismo tražili da su pozitivni linearni funkcionali ograničeni. No, to zapravo imamo automatski.

Propozicija 3.2.3. *Svaki pozitivan linearan funkcional f na $\mathbb{A}$ je ograničen i $\|f\| = f(1)$.*

Dokaz. Neka je f pozitivan linearan funkcional na unitalnoj C*-algebri $\mathbb{A}$ i $a \in \mathbb{A}, \ \|a\| \leq 1$. Tada

$$|f(a)|^2 = |f(1^*a)|^2 \leq f(a^*a)f(1^*1) = f(a^*a)f(1).$$

Ako pokažemo da je $f(a^*a) \leq f(1)$ imamo da je f ograničen i da je $\|f\| \leq f(1)$. Ekvivalentno, pokažimo $f(1 - a^*a) \geq 0$. Kako je $\|a^*a\| = \|a\|^2 \leq 1$ za pozitivan element a^*a vrijedi $\sigma(a^*a) \subseteq [0, 1]$. Slijedi $\sigma(1 - a^*a) \subseteq [0, 1]$. Dakle, $1 - a^*a \in \mathbb{A}^+$ pa slijedi $f(1 - a^*a) \geq 0$. Time je dokazano $\|f\| \leq f(1)$. Obratna nejednakost slijedi iz

$$f(1) = |f(1)| \leq \|f\| \, \|1\| = \|f\|.$$

□

U slučaju ograničenog linearnog funkcionala, uvjet $\|f\| = f(1)$ je čak i dovoljan za pozitivnost.

Propozicija 3.2.4. *Neka je f ograničen linearan funkcional na $\mathbb{A}$ takav da $\|f\| = f(1)$. Tada je f pozitivan.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je $f(a) \in \mathbb{R}, \ \forall a \in \mathbb{A}_h$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\|a\| \leq 1$. Fiksirajmo takav a i stavimo $f(a) = \alpha + i\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ako je slučajno $\beta \leq 0$ promotrimo $-a$ umjesto a da bi postigli $\beta \geq 0$. Sada za proizvoljan $r > 0$ imamo

$$\|r1 - ia\|^2 = \|(r1 - ia)^*(r1 - ia)\| = \|(r1 + ia)(r1 - ia)\| \leq \|r^2 1\| + \|a\|^2 = r^2 + \|a\|^2 \leq r^2 + 1. \quad (\triangle)$$

Kako je $f(1) = \|f\|$ vrijedi

$$f(r1 - ia) = rf(1) - if(a) = r\|f\| + \beta - i\alpha$$

te stoga

$$|f(r1 - ia)|^2 = (r\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2.$$

Sada iz prethodnog i $(\triangle)$ slijedi

$$(r\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2 = |f(r1 - ix)|^2 \leq \|f\|^2 \ \|r1 - ix\|^2 \leq (r^2 + 1)\|f\|^2.$$

Raspisivajući dobivamo

$$r^2\|f\|^2 + 2r\beta\|f\| + \beta^2 + \alpha^2 \leq r^2\|f\|^2 + \|f\|^2 \implies 2r\beta\|f\| + \alpha^2 + \beta^2 \leq \|f\|^2.$$

Kako to vrijedi za svaki $r > 0$ zaključujemo da mora biti $\beta = 0$. Dakle, $f(a) = \alpha \in \mathbb{R}$.

Trebamo pokazati $f(a) \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{A}^+$. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji $a \in \mathbb{A}^+$ takav da $f(a) \ngeq 0$. Pošto je $\mathbb{A}^+ \subseteq \mathbb{A}_h$ iz dokazanog slijedi $f(a) < 0$. Definirajmo $g = \frac{f}{\|f\|}$ i da je $\|g\| = g(1) = 1$. Neka je $b = a - \frac{1}{2}\|a\|1$. Vrijedi $g(a) < 0$ te zbog pozitivnosti od a imamo $\sigma(a) \subseteq [0, \|a\|]$ iz čega slijedi $\sigma(b) \subseteq [-\frac{1}{2}\|a\|, \frac{1}{2}\|a\|]$. b je hermitski pa $\sigma(b) = r(b)$. Zato je $\|b\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$. Jer je $\|g\| = 1$ imamo

$$|g(b)| \leq \|g\| \ \|b\| = \|b\| \leq \tfrac{1}{2}\|a\|.$$

S druge strane, kako je $g(1) = 1$ i $g(a) < 0$ vrijedi

$$g(b) = g(a) - \tfrac{1}{2}\|a\|g(1) < -\tfrac{1}{2}\|a\|$$

iz čega slijedi $|g(b)| > \frac{1}{2}\|a\|$. Kontradikcija. Dakle, f je pozitivan. □

Ključan korak u GNS konstrukciji omogućava činjenica da su pozitivni funkcionali usuglašeni sa *-strukturom na C*-algebri. To je upravo sadržaj sljedeće leme.

Lema 3.2.5. *Neka je f pozitivan linearan funkcional na $\mathbb{A}$. Tada f čuva involuciju, tj.*

$$f(a^*) = \overline{f(a)}, \ \forall a \in \mathbb{A}.$$

Također, vrijedi da je $[\cdot, \cdot]_f$ hermitski, tj.

$$\overline{[a, b]_f} = [b, a]_f, \ \forall a, b \in \mathbb{A}.$$

Dokaz. Za proizvoljne $a, b \in \mathbb{A}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$0 \leq f((\lambda a + b)^*(\lambda a + b)) = |\lambda|^2 f(a^*a) + \overline{\lambda} f(a^*b) + \lambda f(b^*a) + f(b^*b).$$

Prvi i zadnji član su nenegativni pa kako je ukupna suma sva četiri člana nenegativna, suma drugog i trećeg člana mora biti realna.
Neka je $f(a) = x + iy$ i $f(a^*) = c + id$. Za $b = 1,\ \lambda = i$ imamo da je suma $\overline{i} f(a^*)$ i $if(a)$ realna. Imamo

$$\overline{i} f(a^*) = \overline{i}(c + id) = d - ic$$
$$if(a) = i(x + iy) = -y + ix$$

iz čega slijedi $x = c$. Slično, za $b = 1,\ \lambda = 1$ slijedi $y = -d$. Dakle, realni dio od $f(a)$ je jednak realnom dijelu od $f(a^*)$, dok je imaginarni dio od $f(a)$ suprotan imaginarom dijelu od $f(a^*)$. To upravo znači $f(a^*) = \overline{f(a)}$.

Prema upravo dokazanome imamo

$$[b, a]_f = f(a^*b) = f((b^*a)^*) = \overline{f(b^*a)} = \overline{[a, b]}_f.$$

□

Teorem 3.2.6. ***(Gelfand-Naimark-Segal[14])*** *Neka je f pozitivan linearan funkcional na $\mathbb{A}$. Tada postoji ciklička reprezentacija $(\mathcal{H}, \pi)$ od $\mathbb{A}$ s cikličkim vektorom $\xi \in \mathcal{H}$ takva da je*

$$f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle,\ \forall a \in \mathbb{A}.$$

Dokaz. Kao i prije, imamo $[\cdot, \cdot]_f$ seskvilinearan, pozitivno semidefinitan, hermitski funkcional na $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ dan s $[a, b]_f = f(b^*a)$. Za $a \in \mathbb{A}$ definiramo $\pi_0(a) \in B(\mathbb{A})$ kao množenje slijeva s a, tj. $\pi_0(a)b = ab,\ b \in \mathbb{A}$. Sada za $a, b, c \in \mathbb{A}$ imamo

$$[\pi_0(a)b, c]_f = [ab, c]_f = f(c^*ab) = f((a^*c)^*b) = [b, a^*c]_f = [b, \pi_0(a^*)c]_f.$$

Neka je sada $c \in \mathbb{A}$ takav da $[c, c]_f = 0$. Sada za proizvoljni $a \in \mathbb{A}$ iz CSB nejednakosti imamo

$$0 \leq |[a, c]_f|^2 \leq [a, a]_f [c, c]_f = 0 \implies [a, c]_f = 0.$$

Dakle,

$$[c, c]_f = 0 \implies [a, c]_f = 0,\ \forall a \in \mathbb{A}. \qquad (\triangle)$$

Definirajmo sada $N = \{c \in \mathbb{A} : [c, c]_f = 0\} = \{c \in \mathbb{A} : f(c^*c) = 0\}$. Sada iz $(\triangle)$ lako zaključujemo da je N potprostor od $\mathbb{A}$. Pokažimo sada da je N $\pi_0(a)$-invarijantan za svaki $a \in \mathbb{A}$. Uzmimo $c \in N$. Koristeći $[\pi_0(a)b, c]_f = [b, \pi_0(a^*)c]_f$ imamo za proizvoljan $a \in \mathbb{A}$

$$[\pi_0(a)c, \pi_0(a)c]_f = [c, \pi_0(a^*)\pi_0(a)c]_f = [c, a^*ac] = 0$$

[14]Irving Segal, 1918-1998, američki matematičar

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili ($\triangle$) i činjenicu da je $[\cdot,\cdot]_f$ hermitski. Time je pokazano da je N π-invarijantan.

To nam omogućuje da za $a \in \mathbb{A}$ definiramo linearni operator

$$\pi(a) : \mathbb{A}/N \to \mathbb{A}/N,\ \pi(a)(b+N) = \pi_0(a)b + N = ab + N,\ y \in \mathbb{A}.$$

Također, na kvocijentu $\mathbb{A}/N$ možemo zadati skalarni produkt kao

$$\langle a+N, b+N\rangle = [a,b]_f,\ a,b \in \mathbb{A}.$$

Zaista, jedino što treba provjeriti je da $\langle a+N, a+N\rangle = 0$ implicira $a+N = 0$. No, to je zapravo posljedica definicija jer tada imamo $0 = \langle a+N, a+N\rangle = [a,a]_f$, tj. $a \in N$ ili drugim riječima $a+N = 0$.

Lako se vidi da je

$$\pi : \mathbb{A} \to L(\mathbb{A}/N),\ a \mapsto \pi(a)$$

linearno preslikavanje u algebru linearnih operatora na $\mathbb{A}/N$. Nadalje, ono je i homomorfizam algebri jer

$$\pi(ab)(c+N) = abc + N = \pi(a)(bc+N) = \pi(a)\pi(b)(c+N).$$

Također, vrijedi

$$\langle \pi(a)\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \pi(a^*)\eta\rangle,\ \xi,\eta \in \mathbb{A}/N,\ a \in \mathbb{A}.$$

Zaista, ako je $\xi = b+N,\ \eta = c+N$ imamo

$$\langle \pi(a)(b+N), c+N\rangle = \langle \pi_0(a)b+N, c+N\rangle = [\pi_0(a)b, c]_f = [b, \pi_0(a^*)c]_f =$$
$$\langle b+N, \pi_0(a^*)c+N\rangle = \langle b+N, \pi(a^*)(c+N)\rangle.$$

Pokažimo sada je da je svaki $\pi(a),\ a \in \mathbb{A}$ ograničen operator na unitarnom prostoru $\mathbb{A}/N$. Za $a \in \mathbb{A}$ i svaki $\eta = b+N \in \mathbb{A}/N$ imamo

$$\|\pi(a)\eta\|^2 = \langle ab+N, ab+N\rangle = [ab,ab]_f = f(b^*a^*ab).$$

Sada za fiksni $b \in \mathbb{A}$ definiramo linearan funkcional g_b na $\mathbb{A}$ formulom $g_b(a) = f(b^*ab)$ dok iz pozitivnosti od f slijedi

$$g_b(a^*a) = f(b^*a^*ab) = f((ab)^*(ab)) \geq 0.$$

Dakle, g_b je pozitivan linearan funkcional pa iz Propozicije 3.2.3. slijedi $\|g_b\| = g_b(1) = f(b^*b)$. Sada za $a \in \mathbb{A}$ i $\eta = b+N \in \mathbb{A}/N$ imamo

$$\|\pi(a)\eta\|^2 = f(b^*a^*ab) = g_b(a^*a) \leq f(b^*b)\|a^*a\| = [b,b]_f\|a\|^2 = \langle \eta,\eta\rangle\|x\|^2 = \|\eta\|^2\|a\|^2.$$

Time je dokazano da je $\pi(a) \in B(\mathbb{A}/N)$ i $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$.

Neka je sada $\mathcal{H}$ upotpunjenje unitarnog prostora $\mathbb{A}/N$ (vidi Dodatak, Teorem A.0.11.). Kako su svi operatori $\pi(a)$ ograničeni, svaki od njih se može proširiti do ograničenog operatora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Zbog jednostavnosti, za fiksni $a \in \mathbb{A}$ to proširenje označimo isto s $\pi(a)$. Preslikavanje

$$\pi : \mathbb{A} \to B(\mathcal{H}),\ a \mapsto \pi(a)$$

je homomorfizam algebri s $\mathbb{A}$ u $B(\mathcal{H})$. Nadalje, relacija

$$\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \pi(a^*)\eta \rangle,\ \forall \xi, \eta \in \mathcal{H},\ \forall\ a \in \mathbb{A}$$

nam daje $\pi(a^*) = \pi(a)^*$. Sveukupno, π je reprezentacija od $\mathbb{A}$. Konačno, za vektor $\xi = 1 + N \in \mathcal{H}$ i proizvoljni $a \in \mathbb{A}$ imamo

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)(1 + N), 1 + N \rangle = \langle a + N, 1 + N \rangle = [a, 1]_f = f(1^*a) = f(a)\ .$$

Dakle, pozitivni funkcional f smo prikazali u obliku $f(a) = \langle \pi(a)\eta, \eta \rangle$, gdje je π reprezentacija od $\mathbb{A}$ na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ te $\xi \in \mathcal{H}$. Primijetimo da uvijek možemo postići da je reprezentacija π ciklička i ξ pripadni ciklički vektor. Zaista, ako nije tako, $\mathcal{H}$ možemo zamijeniti s $\mathcal{K} = \overline{\pi(A)\xi}$ što je ciklički, zatvoren, π-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$, dok π možemo zamijeniti s njezinom cikličkom subreprezentacijom $\pi_{\mathcal{K}}$. Naravno, vrijedi $f(a) = \langle \pi_{\mathcal{K}}(a)\xi, \xi \rangle$, $\forall a \in \mathbb{A}$. □

Definicija 3.2.7. *Pozitivan linearan funkcional norme* 1 *na* $\mathbb{A}$ *zovemo* ***stanje****. Skup svih stanja na* $\mathbb{A}$ *označavati ćemo sa* $S(\mathbb{A})$*.*

Ako je C*-algebra unitalna, primijetimo da smo zbog Propozicije 3.2.3. stanja mogli definirati kao pozitivne linearne funkcionale takve da $f(1) = 1$.

Primjer 3.2.8. *Svaki nenul *-homomorfizam* $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$ *je stanje. Zaista, koristeći Propoziciju 2.1.21. imamo*

$$\varphi(a^*a) = \varphi(a)^*\varphi(a) = \overline{\varphi(a)}\varphi(a) = |\varphi(a)|^2 \geq 0,$$

Nadalje, iz Teorema 1.3.6. slijedi da je $\|\varphi\| = 1$*.*

Propozicija 3.2.9. $S(\mathbb{A})$ *je konveksan podskup od* $\mathbb{A}'$*.*

Dokaz. $S(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}'$ zbog Propozicije 3.2.3. Trebamo dokazati

$$f, g \in S(\mathbb{A}),\ t \in [0, 1] \implies tf + (1 - t)g \in S(\mathbb{A}).$$

Neka je $a \in \mathbb{A}$ proizvoljan. Tada imamo

$$(tf + (1 - t)g)(a^*a) = tf(a^*a) + (1 - t)g(a^*a) \geq 0$$
$$\|tf + (1 - t)g)\| = t\|f\| + (1 - t)\|g\| = t + 1 - t = 1.$$

Dakle, $tf + (1 - tg) \in S(\mathbb{A})$. □

Ekstremne točke konveksnog skupa $S(\mathbb{A})$ zovemo **čista stanja**. Drugim riječima, $f \in S(\mathbb{A})$ je čisto stanje ako i samo ako za sve $g, h \in S(\mathbb{A})$ takve da vrijedi $f = tg + (1 - t)h$ za $t \in \langle 0, 1\rangle$, nužno slijedi $g = h = f$. Skup svih čistih stanja na $\mathbb{A}$ označavamo s $PS(\mathbb{A})$.

Sada možemo opisati važnu vezu između čistih stanja i ireducibilnih reprezentacija.

Teorem 3.2.10. *Neka je $(\mathcal{H}, \pi)$ ciklička reprezentacija od $\mathbb{A}$ te $\xi \in \mathcal{H}$ pripadni jedinični ciklički vektor. Definiramo stanje f na $\mathbb{A}$ s $f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle$. Tada je $(\mathcal{H}, \pi)$ ireducibilna ako i samo ako je stanje f čisto.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(\mathcal{H}, \pi)$ ireducibilna i uzmimo $g, h \in S(\mathbb{A})$ te $t \in \langle 0, 1\rangle$ takve da vrijedi $f = tg + (1 - t)h$. Na gustom potprostoru $\pi(\mathbb{A})\xi$ od $\mathcal{H}$ definiramo seskvilinearan hermitski funkcional $[\cdot, \cdot]$ s

$$[\pi(a)\xi, \pi(b)\xi] = tg(b^*a), \ \ a, b \in \mathbb{A}.$$

Vrijedi

$$0 \leq tg(a^*a) = f(x^*x) - (1 - t)h(x^*x) \leq f(a^*a)$$

te stoga

$$0 \leq [\pi(a)\xi, \pi(a)\xi] \leq \|\pi(a)\xi\|^2.$$

Dakle, $[\cdot, \cdot]$ je hermitska, ograničena, seskvilinearna forma na $\mathcal{H}$ (po neprekidnosti ga proširimo do $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$). Rieszov[15] teorem (vidi Dodatak, Teorem A.0.12.) implicira da postoji hermitski $A \in B(\mathcal{H})$ takav da $[\eta, \xi] = \langle \eta, A\xi\rangle$, $\forall \eta, \xi \in \pi(\mathbb{A})\xi$. Stoga imamo

$$tg(c^*b) = [\pi(b)\xi, \pi(c)\xi] = \langle \pi(b)\xi, A\pi(c)\xi\rangle, \ \forall b, c \in \mathbb{A}.$$

Sada za proizvoljne $a, b, c \in \mathbb{A}$ imamo

$$\begin{aligned}
\langle \pi(b)\xi, A\pi(a)\pi(c)\xi\rangle &= \langle \pi(b)\xi, A\pi(ac)\xi\rangle = [\pi(b)\xi, \pi(ac)\xi] \\
&= tg((ac)^*b) = tg(c^*a^*b^*) \\
&= [\pi(a^*b)\xi, \pi(c)\xi] = \langle \pi(a^*b)\xi, A\pi(c)\xi\rangle \\
&= \langle \pi(a)^*\pi(b)\xi, A\pi(c)\xi\rangle = \langle \pi(b)\xi, \pi(a)A\pi(c)\xi.
\end{aligned}$$

Konačno, iz gustoće od $\pi(\mathbb{A})\xi$ u $\mathcal{H}$ imamo

$$\langle \eta, A\pi(a)\xi\rangle = \langle \eta, \pi(a)A\xi\rangle, \ \forall \eta, \xi \in \mathcal{H}$$

iz čega slijedi $A\pi(a) = \pi(a)A$, $\forall a \in \mathbb{A}$. Pokazali smo da A komutira sa svim $\pi(a)$ pa kako je $(\mathcal{H}, \pi)$ ireducibilna prema Teoremu 3.1.16. slijedi $A = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Primijetimo da je zapravo $\lambda \in \mathbb{R}$ jer je A hermitski. Stoga, za $a \in \mathbb{A}$ imamo

[15]Frigyes Riesz , 1880-1956, mađarski matematičar

$$tg(a) = \langle \pi(a)\xi, A\xi \rangle = \lambda \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \lambda f(a).$$

Posebno, za $a = 1$ zbog $f(1) = g(1) = 1$ dobivamo $t = \lambda$, tj. $g = f$. Sada je

$$h = \tfrac{1}{1-t}(f - tg) = \tfrac{1}{1-t}(f - tf) = f.$$

Time smo pokazali da je f čisto stanje.

Obratno, neka je f čisto stanje. Uzmimo $P \in B(\mathcal{H})$ ortogonalni projektor koji komutira sa svim $\pi(a)$, $a \in \mathbb{A}$. Treba pokazati da je $P = 0$ ili $P = I$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $P \neq 0, I$. Pokažimo da je tada $P\xi \neq 0$. Zaista, kada bi bilo $P\xi = 0$ za svaki $a \in \mathbb{A}$ imali bismo $P\pi(a)\xi = \pi(a)P\xi = 0$ što bi impliciralo $P = 0$ zbog gustoće $\pi(\mathbb{A})\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$. Analogno, $(I - P)\xi \neq 0$ jer bi inače bilo $P = I$. Neka je sada $\eta = P\xi$ i $\zeta = (I - P)\xi$. Tada su η i ζ međusobno okomiti nenul vektori takvi da $\xi = \eta + \zeta$. Slijedi $1 = \|\eta\|^2 + \|\zeta\|^2$. Sada za realni broj $t = \|\eta\|^2$ imamo $t \in \langle 0, 1\rangle$. Definirajmo linearne funkcionale na $\mathbb{A}$

$$g(a) = \tfrac{1}{t}\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle, \ \ h(a) = \tfrac{1}{1-t}\langle \pi(a)\xi, \zeta \rangle.$$

Kako je $P = P^*$ i $P\eta = \eta$, za $a \in \mathbb{A}$ imamo

$$g(a) = \tfrac{1}{t}\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle = \tfrac{1}{t}\langle \pi(a)\xi, P\eta \rangle = \tfrac{1}{t}\langle P\pi(a)\xi, \eta \rangle = \tfrac{1}{t}\langle \pi(a)P\xi, \eta \rangle = \tfrac{1}{t}\langle \pi(a)\eta, \eta \rangle$$

iz čega lagano slijedi da je g pozitivan funkcional. Doista,

$$g(a^*a) = \tfrac{1}{t}\langle \pi(a^*a)\eta, \eta \rangle = \tfrac{1}{t}\langle \pi(a)\eta, \pi(a)\eta \rangle \geq 0.$$

Nadalje,

$$g(1) = \tfrac{1}{t}\langle \pi(1)\xi, \eta \rangle = \tfrac{1}{t}\langle \xi, P\eta \rangle = \tfrac{1}{t}\langle P\xi, \eta \rangle = \tfrac{1}{t}\langle \eta, \eta \rangle = 1.$$

Time smo pokazali da je g stanje. Analogno, iz $(I - P)^* = I - P$ i $(I - P)\zeta = \zeta$ dobivamo

$$h(a) = \tfrac{1}{1-t}\langle \pi(a)\zeta, \zeta \rangle, \ \ h(1) = 1$$

tj. i h je stanje. Sada imamo

$$tg(a) + (1 - t)h(a) = \langle \pi(a)\xi, \eta \rangle + \langle \pi(a)\xi, \zeta \rangle = \langle \pi(a)\xi, \eta + \zeta \rangle = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = f(a).$$

Jer je f čisto stanje slijedi $g = h = f$. Stoga je za $a \in \mathbb{A}$

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = f(a) = g(a) = \tfrac{1}{t}\langle \pi(a)\xi, \eta \rangle = \tfrac{1}{t}\langle \pi(a)\xi, P\xi \rangle$$

iz čega slijedi

$$\langle \pi(a)\xi, (P - tI)\xi \rangle = 0, \ \ \forall a \in \mathbb{A}.$$

Iz gustoće od $\pi(\mathbb{A})\xi$ u $\mathcal{H}$ slijedi $(P - tI)\xi = 0$ pa za proizvoljni $a \in \mathbb{A}$

$$(P - tI)\pi(a)\xi = \pi(a)(P - tI)\xi = 0.$$

Opet nam gustoća $\pi(\mathbb{A})\xi$ u $\mathcal{H}$ daje $P - tI = 0$, tj. $P = tI$. No, to je nemoguće jer za $t \in \langle 0, 1\rangle$, tI nije idempotentan. Kontradikcija. Dakle, $P = 0$ ili $P = I$ su jedini ortogonalni projektori iz komutanta od $\pi(\mathbb{A})$ iz čega zaključujemo da je π ireducibilna. □

Sljedeći zadatak nam je pokazati da proizvoljna C*-algebra ima zadovoljavajuće mnogo reprezentacija. Sada s GNS konstrukcijom pri ruci znamo da se problem svodi na egzistenciju pozitivnih funkcionala.

Teorem 3.2.11. *Neka je a hermitski element unitalne* C*-*algebre* $\mathbb{A}$. *Tada postoji stanje f na* $\mathbb{A}$ *takvo da je* $|f(a)| = \|a\|$.

Dokaz. Neka je $\mathbb{B} = C^*(a)$. Prema Propoziciji 2.2.12. znamo da je $\Omega(\mathbb{B})$ homeomorfan s $\sigma(a)$ preko homeomorfizma $\hat{a} : \varphi \mapsto \varphi(a)$. Također, $\sigma(a)$ je kompaktan podskup od $\mathbb{R}$. Izaberimo $\varphi_0 \in \Omega(\mathbb{B})$ takav da $|\hat{a}(\varphi_0)| = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda|$, tj. $|\varphi_0(a)| = \|a\|$. Jer je $\mathbb{B}$ unitalna, prema Teoremu 1.3.6. imamo $\|\varphi_0\| = 1$. Također, znamo da je svaki karakter unitalan te stoga $\varphi(1) = 1$. Dakle, $\|\varphi_0\| = \varphi_0(1) = 1$ pa nam Propozicija 3.2.4. daje, φ_0 stanje.

Primjenom Hahn[16]-Banachovog teorema (vidi Dodatak, Teorem A.0.2.), postoji $f \in \mathbb{A}'$ takav da je $f|_{\mathbb{B}} = \varphi_0$ i $\|f\| = 1$. Dakle, $\|f\| = 1 = \varphi_0(1) = f(1)$. Ponovno koristeći Propoziciju 3.2.4., f je pozitivan. Kako je $f(1) = \varphi_0(1)$, f je stanje. Također, $|f(a)| = \|a\|$ jer $f|_{\mathbb{B}} = \varphi_0$. □

Korolar 3.2.12. *Za svaki element* $a \neq 0$ *unitalne C*-algebre* $\mathbb{A}$ *postoji stanje f na* $\mathbb{A}$ *takvo da vrijedi* $f(a^*a) > 0$.

Dosadašnji rezultati u ovoj točki odnosili su na unitalne C*-algebre. Naravno, analogni rezultati za neunitalne C*-algebre mogu se dokazati iz dokazanog prelaskom na unitizaciju pa ćemo to smatrati učinjenim.

Sada smo spremi za glavni teorem ovog poglavlja.

Teorem 3.2.13. ***(Gelfand-Naimark)*** *Svaka C*-algebra je izometrički izomorfna nekoj C*-podalgebri od* $B(\mathcal{H})$ *gdje je* $\mathcal{H}$ *Hilbertov prostor.*

Dokaz. Ono što treba vidjeti je da postoji izometrička reprezentacija od $\mathbb{A}$. Naravno, možemo pretpostaviti da je $\mathbb{A}$ unitalna. Za svaki $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, koristeći prethodni korolar, izaberimo stanje f_a takvo da vrijedi $f_a(a^*a) > 0$. Koristeći GNS konstrukciju (Teorem 3.2.6.) postoji ciklička reprezentacija $(\mathcal{H}_a, \pi_a)$ s cikličkim vektorom $\xi_a \in \mathcal{H}$ takvi da vrijedi

$$f_a(b) = \langle \pi_a(b)\xi_a, \xi_a\rangle, \ \forall b \in \mathbb{A}.$$

[16]Hans Hahn, 1879-1934, austrijski matematičar i filozof

Neka je $\mathcal{H} = \bigoplus_{a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}} \mathcal{H}_a$ te definiramo $\pi : \mathbb{A} \to B(\mathcal{H})$ s $\pi(a) = \bigoplus_{a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}} \pi_a(a)$.

Pokažimo da je $(\mathcal{H}, \pi)$ vjerna reprezentacija. Neka je $a \neq 0$. Tada je $f_a(a^*a) > 0$ te stoga imamo

$$0 < f_a(a^*a) = \langle \pi_a(a^*a)\xi_a, \xi_a \rangle = \langle \pi_a(a)^*\pi_a(a)\xi_a, \xi_a \rangle = \|\pi_a(a)\xi_a\|^2.$$

Dakle, $\pi_a(a)\xi_a \neq 0$ pa je $\pi_a(a) \neq 0$. Slijedi $\pi(a) \neq 0$. Time smo pokazali da je π injekcija.

Prema Teoremu 2.4.6. π je izometrija sa $\mathbb{A}$ u $B(\mathcal{H})$. Dakle, $\mathbb{A}$ je izometrički izomorfna nekoj C*-podalgebri od $B(\mathcal{H})$. □

Važnost prethodnog rezultata ne može se dovoljno naglasiti, ali učinimo to još jednom. *Svaka* apstraktna C*-algebra može se vjerno (izometrički čak) realizirati kao C*-(pod)algebra ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru, objektima o kojima znamo relativno mnogo ali u svakom slučaju objektima koje si možemo vjerno predočiti.

Koliko god ovaj rezultat teorijski bio značajan, ima praktičnih nedostataka. Primijetimo da prostor na kojem je reprezentacija definirana ekstremno velik. Također, primijetimo da smo pokazali egzistenciju reprezentacije, ali ne i onih ireducibilnih. Prema Teoremu 3.2.10. to pitanje možemo svesti na egzistenciju čistih stanja. Za to nam je potreban idući teorem iz funkcionalne analiza kojeg navodimo bez dokaza.

Teorem 3.2.14. *(**Krein**[17]**-Milman**[18]) Svaki neprazan konveksan podskup Δ duala X' normiranog prostora X, koji je kompaktan u odnosu na w*-topologiju od X', ima barem jednu ekstremnu točku.*

Teorem 3.2.15. *Neka je a hermitski element unitalne C*-algebre $\mathbb{A}$. Tada postoji čisto stanje takvo da je $|f(a)| = \|a\|$.*

Dokaz. Usporedimo ovaj rezultat s Teoremom 3.2.11. Jedina razlika je što tu tvrdimo da možemo postići da je f čisto stanje. Dakle, pozivanjem na Teorem 3.2.11. imamo stanje f takvo da je $|f(a)| = \|a\|$. Neka je

$$\Delta = \{g \in S(\mathbb{A}) : g(a) = f(a)\}.$$

Δ je zatvoren podskup jedinične sfere u prostoru $\mathbb{A}'$ s obzirom na w*-topologiju. Zbog Banach-Alaoglu teorema, Δ je w*-kompaktan. Nadalje, lako se vidi da je Δ konveksan. Zbog Krein-Milman znamo da postoji $g \in \Delta$ ekstremna točka skupa Δ. Teorem će biti dokazan ako pokažemo da je tada g ujedno i ekstremna točka $S(\mathbb{A})$. U tu svrhu uzmimo $h,\ l \in S(\mathbb{A})$ i $t \in \langle 0, 1 \rangle$ takvi da

$$g = th + (1-t)l.$$

[17] Mark Krein, 1907-1989, sovjetski matematičar

[18] David Milman, 1912-1982, sovjetsko-izraelski matematičar

Jer su h i l stanja imamo $\|h\| = \|l\| = 1$ pa slijedi

$$|h(a)| \leq \|a\| = |f(a)| \text{ i } |l(a)| \leq \|a\| = |f(a)|.$$

□

Korolar 3.2.16. *Za svaki nenul element $a \in \mathbb{A}$ unitalne C*-algebre postoji ireducibilna reprezentacija $(\mathcal{H}, \pi)$ od $\mathbb{A}$ i jedinični vektor $\xi \in \mathcal{H}$ takvi da vrijedi $\|\pi(a)\xi\| = \|a\| > 0$.*

Dokaz. Primjenimo prethodni teorem na hermitski element a^*a. Dakle, postoji čisto stanje f na $\mathbb{A}$ takvo da $|f(a^*a)| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Primjenom GNS-konstrukcije dobivamo reprezentaciju $(\mathcal{H}, \pi)$ i jedinični vektor $\xi \in \mathcal{H}$ tako da vrijedi

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi \rangle = f(a^*a) = \|a\|^2.$$

Dakle, $\|\pi(a)\xi\| = \|a\| > 0$. Prema Teoremu 3.2.10., jer je f čisto, imamo da je π ireducibilna. □

Na kraju ćemo još komentirati kako eventualno možemo smanjiti "veličinu" reprezentacije koja se javlja u dokazu Gelfand-Naimark teorema.

Za $F \subseteq S(\mathbb{A})$ ćemo reći da je **vjeran** ako za $a \in \mathbb{A}^+$ takav da $f(a) = 0$ za svaki $f \in F$ nužno slijedi $a = 0$. Teoremi 3.2.11. i 3.2.15. nam govore da su $S(\mathbb{A})$ i $PS(\mathbb{A})$ vjerni.

Za $f \in S(\mathbb{A})$ neka je $(\mathcal{H}_f, \pi_f)$ odgovarajuća reprezentacija dobivena GNS-konstrukcijom sa cikličkim vektorom ξ_f. Nadalje, za $F \subseteq S(\mathbb{A})$ neka je

$$\mathcal{H}_F = \bigoplus_{f \in F} \mathcal{H}_f \text{ i } \pi_F = \bigoplus_{f \in F} \pi_f.$$

Teorem 3.2.17. *Neka je $\mathbb{A}$ C*-algebra i $F \subseteq S(\mathbb{A})$ vjerna familija stanja na $\mathbb{A}$. Tada je $(\mathcal{H}_F, \pi_F)$ vjerna reprezentacija od $\mathbb{A}$.*

Dokaz. Treba samo provjeriti injektivnost od π_F. Neka je $a \in \mathbb{A}$ takav da $\pi_F(a) = 0$. Tada je $\pi_f(a) = 0,\ \forall f \in F$. Tada je također

$$f(a^*a) = \langle \pi_f(a^*a)\xi_f, \xi_f \rangle = \langle \pi_f(a)\xi_f, \pi_f(a)\xi_f \rangle = 0,\ \forall f \in F.$$

Slijedi $a^*a = 0$ pa $a = 0$. Dakle, π_F je vjerna. □

Poglavlje 4

Kompaktni operatori

Kompaktni operatori čine važnu klasu ograničenih operatora. Njihova svojstva slična su onim operatora na konačnodimenzionalnim prostorima te kao takvi, kao što ćemo vidjeti, imaju relativno jednostavnu strukturu.

Teorija kompaktnih operatora razvila se iz proučavanja integralnih jednadžbi te tzv. integralni operatori daju konkretne primjere kompaktnih operatora. Metoda aproksimacije operatorima konačnog ranga (koji su kompaktni) je standardna u rješavanju takvih jednadžbi pa stoga čine klasu posebno zanimljivih kompaktnih operatora.

Od sada ćemo s $N(A)$ i $R(A)$ redom označavati jezgru i sliku operatora A.

4.1 Kompaktni operatori na normiranim prostorima

Prije same definicije kompaktnog operatora prisjetimo se nekih topoloških činjenica. Općenita definicija kompaktnosti u topološkom prostoru se u slučaju normiranog prostora X svodi na sljedeće: $S \subseteq X$ je kompaktan ako i samo ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji je limes u S.

Također, vrijedi da je svaki kompaktan podskup normiranog prostora zatvoren i ograničen. Za skup S u topološkom prostoru X kažemo da je **relativno kompaktan** ako je njegov zatvarač $\overline{S}$ kompaktan skup u X. Ako je X normiran prostor, vrijedi:

$$S \text{ je relativno kompaktan} \iff \text{svaki niz u } S \text{ ima podniz koji konvergira u } X.$$

Ako je dodatno X Banachov, prethodnim uvjetima su ekvivalentna iduća dva:

$$\text{Svaki niz u } S \text{ ima Cauchyev podniz} \iff \text{Za svaki } \epsilon > 0 \text{ postoje } x_1, ..., x_n \in S,\ n \in \mathbb{N}$$
$$\text{takvi da je } S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \epsilon) \text{ (kažemo da S ima konačnu } \epsilon\text{-mrežu).}$$

Definicija 4.1.1. *Neka su X i Y normirani prostori te $A : X \to Y$ linearan operator. Kažemo da je A* **kompaktan operator** *ako je skup $A(\overline{K}(0,1))$ relativno kompaktan skup u Y. Skup svih kompaktnih operatora s X u Y označavamo s $K(X,Y)$ te ako je $X = Y$ pišemo $K(X)$.*

Prisjetimo se da je u normiranom prostoru svaki kompaktan skup ograničen i zatvoren, ali obrat općenito ne vrijedi. Naime, niti u jednom beskonačnodimenzionalnom normiranom prostoru skupovi $\overline{K}(0,1)$, $K(0,1)$ te $S(0,1)$ nisu relativno kompaktni skupovi (vidi [2]). Dakle, vrijedi sljedeća karakterizacija konačnodimenzionalnih prostora.

Teorem 4.1.2. *Normiran prostor je konačnodimenzionalan ako i samo ako je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan.*

Sada ćemo dati najavljeni primjer kompaktnog operatora, tzv. *integralnog operatora*.

Primjer 4.1.3. *Neka je $I = [0,1]$ te $X = C(I)$. Tada je $(X, \|\cdot\|_\infty)$ Banachov prostor. Sada za $k \in C(I^2)$, definiramo $u \in B(X)$ kao*

$$u(f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt, \ \ f \in X, s \in I.$$

Pokažimo prvo $u(f) \in X$. Vrijedi

$$\begin{aligned} |u(f)(s) - u(f)(s')| &= \left| \int_0^1 (k(s,t) - k(s',t)f(t))dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |k(s,t) - k(s',t)||f(t)|dt \\ &\leq \sup_{t\in I} |k(s,t) - k(s',t)|\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Nadalje, k je uniformno neprekidna jer je I^2 kompaktan. Stoga za $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $\max\{|s - s'|, |t - t'|\} < \delta \implies |k(s,t) - k(s',t')| < \epsilon$. Stoga

$$|s - s'| < \delta \implies |u(f)(s) - u(f)(s')| \leq \epsilon\|f\|_\infty. \qquad (\triangle)$$

Dakle, $u(f) \in X$. Zapravo vrijedi i više. Ako sa S označimo jediničnu zatvorenu kuglu u X, familija $u(S)$ je ekvikontinuirana. Zaista, za dani $s \in I$ neka su $\epsilon > 0$ i $f \in S$ proizvoljni. Iz $(\triangle)$ slijedi da postoji $\delta > 0$ takav da

$$|s - s'| < \delta \implies |u(f)(s) - u(f)(s')| \leq \epsilon.$$

Nadalje, familija $u(S)$ je po točkama ograničena, tj. za $s \in I$ je $\sup_{f\in S} |u(f)(s)| < \infty$ pošto

$$|u(f)(s)| \leq \int_0^1 |k(s,t)f(t)|dt \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Vidimo da su zadovoljeni svi uvjeti Arzelà[19]*-Ascolijevog*[20] *teorema (vidi Dodatak, Teorem A.0.13.) pa možemo zaključiti da je skup $u(S)$ relativno kompaktan, tj. $u \in K(X)$.*

U nastavku ove točke ćemo dokazati razna svojstva kompaktnih operatora te na kraju pokazati da oni čine C*-podalgebru od $B(\mathcal{H})$ za $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor.

Propozicija 4.1.4. *Svaki kompaktan operator je ograničen.*

Dokaz. Neka je $A : X \to Y$ kompaktan operator. Dakle, skup $\{Ax : x \in X, \ \|x\| \leq 1\}$ je relativno kompaktan pa stoga i ograničen. Neka je $M > 0$ takav da $\|Ax\| \leq M, \ \forall x \in X, \ \|x\| \leq 1$. Neka je $x \in X, \ x \neq 0$ proizvoljan. Tada je $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ pa imamo

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A(\tfrac{x}{\|x\|})\right\| \leq M \implies \|Ax\| \leq M\|x\|$$

što očito vrijedi i za $x = 0$. Dakle, $K(X, Y) \subseteq B(X, Y)$. □

Sljedeća propozicija karakterizira kompaktne operatore pomoću nizova što je korisno za dokazivanje raznih njihovih svojstava.

Propozicija 4.1.5. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Tada je A kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz (x_n) u X niz (Ax_n) ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je A kompaktan operator te (x_n) prozivoljan ograničen niz u X. Uzmimo $M > 0$ takav da $\|x_n\| \leq M$. Promotrimo niz $\left(\frac{x_n}{M}\right)$. Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\left\|\frac{x_n}{M}\right\| = \frac{\|x_n\|}{M} \leq 1$. Slijedi $\left(\frac{Ax_n}{M}\right) \subseteq A(\overline{K}(0, 1))$ pa iz kompaktnosti operatora A slijedi da niz (Ax_n) ima konvergentan podniz.

Obratno, neka vrijedi da za svaki ograničen niz (x_n) u X niz (Ax_n) ima konvergentan podniz. Dovoljno je dokazati da svaki niz u $A(\overline{K}(0, 1))$ ima konvergentan podniz što je očito iz dane pretpostavke. □

Idući korolar slijedi jednostavnom upotrebom nizovnog kriterija iz prethodne propozicije.

Korolar 4.1.6. *$K(X, Y)$ je potprostor od $B(X, Y)$, a $K(X)$ je ideal u $B(X)$.*

Propozicija 4.1.7. *Neka su X i Y normirani prostori.*

1. *Ako je* $\dim X < \infty$ *ili* $\dim Y < \infty$*, tada je $K(X, Y) = B(X, Y)$.*

2. *$I \in K(X)$ ako i samo ako je* $\dim X < \infty$.

3. *Ako je* $\dim X = \infty$*, onda je svaki operator $A \in K(X)$ singularan.*

[19]Cesare Arzelà, 1847-1912, talijanski matematičar

[20]Giulio Acoli, 1843-1896, židovsko-tallijanski matematičar

Dokaz. 1. Ako je $\dim X < \infty$ i (x_n) ograničen niz u X, onda on ima konvergentan podniz $(x_{p(n)})$, a tada je za $A \in B(X,Y)$ i $(Ax_{p(n)})$ konvergentan zbog neprekidnosti od A. Iz Propozicije 4.1.5. slijedi $A \in K(X,Y)$. Ako je $\dim Y < \infty$ onda je svaki ograničen skup relativno kompaktan pa za $A \in B(X,Y)$ imamo da je $A(\overline{K}(0,1))$ relativno kompaktan, tj. $A \in K(X,Y)$.

2. Zbog Teorema 4.1.2. imamo: $I \in K(X) \iff \overline{K}(0,1)$ kompaktan $\iff \dim X < \infty$.

3. Kad bi imali $A \in K(X)$ regularan onda bi $I = A^{-1}A \in K(X)$ jer je $K(X)$ ideal u $B(X)$, a prema prethodnome to moguće samo ako $\dim X < \infty$.

□

Propozicija 4.1.8. *Neka je X normiran, a Y Banachov prostor. Tada je $K(X,Y)$ zatvoren u $B(X,Y)$.*

Dokaz. Neka je (A_n) niz u $K(X,Y)$ i $A \in B(X,Y)$ takav da $A_n \to A$. Dovoljno je dokazati da za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoje $y_1, ..., y_n \in Y$ takvi da $A(\overline{K}(0,1)) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} K(y_i, \epsilon)$. Neka je $\epsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ takav da $\|A - A_n\| < \frac{\epsilon}{3}$. Kako je A_n kompaktan, skup $A_n(\overline{K}(0,1))$ je relativno kompaktan u Banachovom prostoru Y, pa možemo naći $x_1, ..., x_m$, $m \in \mathbb{N}$ takve da vrijedi $A_n(\overline{K}(0,1)) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} K(Ax_i, \frac{\epsilon}{3})$. Tvrdimo da je $A(\overline{K}(0,1)) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} K(Ax_i, \epsilon)$. Zaista, za $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ nađimo $j \in \{1, ..., m\}$ takav da $\|A_n x - A_n x_j\| < \frac{\epsilon}{3}$. Tada je

$$\|Ax - Ax_j\| \leq \|Ax - A_n x\| + \|A_n x - A_n x_j\| + \|A_n x_j - Ax_j\| < \epsilon.$$

□

Definicija 4.1.9. *Neka su X i Y normirani prostori. Za $A \in B(X,Y)$ kažemo da je operator **konačnog ranga** ako* $\dim(R(A)) < \infty$. *Skup svih operatora konačnog ranga označavamo s $F(X,Y)$.*

Jasno je da $F(X,Y) \subseteq K(X,Y)$ jer je u konačnodimenzionalnom prostoru skup kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen. Također, ovdje nije slučaj kao kod kompaktnih operatora da bismo eventualno mogli tražiti samo konačnost ranga i nekako zaključiti ograničenost jer čak postoje i linearni funkcionalni koji su neograničeni.

Nije teško vidjeti da ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $A \in F(\mathcal{H})$ da je on nužno oblika $Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle y_i$ za neke $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathcal{H}$ i $n \in \mathbb{N}$ (vidi [2]).

Štoviše, ako je kodomena Hilbertov prostor, svaki kompaktan operator možemo dobiti kao limes operatora konačnog ranga u operatorskoj normi.

Teorem 4.1.10. *Neka je X normiran, a $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada je $K(X,\mathcal{H}) = \overline{F(X,\mathcal{H})}$.*

Dokaz. Kako je $F(X,Y) \subseteq K(X,Y)$ i $K(X,Y)$ zatvoren imamo $\overline{F(X,\mathcal{H})} \subseteq K(X,\mathcal{H})$. Uzmimo sada $A \in K(X,\mathcal{H})$ i prozivoljan $\epsilon > 0$. Jer je $\mathcal{H}$ potpun, a $A(\overline{K}(0,1))$ relativno kompaktan, postoji konačna ϵ-mreža $\{y_1,...,y_n\}$ za $A(\overline{K}(0,1))$. Neka je $M = \text{span}\{y_1,...,y_n\}$ te $P \in B(\mathcal{H})$ ortogonalni projektor na M (vidi Dodatak, Teorem A.0.14.). Definirajmo $B = PA$. Jasno je da $B \in F(\mathcal{H})$ te je Bx optimalna aproksimacija (u smislu norme) vektora Ax vektorima iz M, za $x \in X$. Kako je $A(\overline{K}(0,1)) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(y_i,\epsilon)$, za $x \in \overline{K}(0,1)$ izaberimo $j \in \{1,...,n\}$ takav da $\|Ax - y_j\| < \epsilon$. Tada je $\|Ax - Bx\| \leq \|Ax - y_j\| < \epsilon$. Slijedi $\|A - B\| \leq \epsilon$. □

Teorem 4.1.11. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $A \in B(\mathcal{H})$. Tada vrijedi $A \in K(\mathcal{H})$ ako i samo ako je $A^*A \in K(\mathcal{H})$.*

Dokaz. Ako je A kompaktan onda je i A^*A kompaktan jer je $K(\mathcal{H})$ ideal u $B(\mathcal{H})$. Obratno, pretpostavimo da je A^*A kompaktan i uzmimo (x_n) proizvoljan niz u $\overline{K}(0,1)$. Iz kompaknosti od A^*A slijedi da postoji podniz $(x_{p(n)})$ takav da $(A^*Ax_{p(n)})$ konvergira u $\mathcal{H}$. Vrijedi

$$\|Ax_{p(n)} - Ax_{p(m)}\|^2 = \langle A^*A(x_{p(n)} - x_{p(m)}), x_{p(n)} - x_{p(m)}\rangle \leq$$
$$\|A^*A(x_{p(n)} - x_{p(m)})\| \, \|x_{p(n)} - x_{p(m)}\| \leq 2\|A^*A(x_{p(n)} - x_{p(m)})\|$$

iz čega slijedi da je niz (Ax_n) Cauchyjev pa i konvergentan. □

Korolar 4.1.12. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostora i $A \in B(\mathcal{H})$. Tada je $A \in K(\mathcal{H})$ ako i samo ako $A^* \in K(\mathcal{H})$*

Dokaz. Jer je $K(\mathcal{H})$ ideal u $B(\mathcal{H})$ imamo $AA^* \in K(\mathcal{H})$. Iz prethodnog teorema slijedi $A^* \in K(\mathcal{H})$ (jer $AA^* = (A^*)^*A^*$). Obrat slijedi iz upravo dokazane tvrdnje primjenjene na A^*. □

Sada možemo zaključiti da je $K(\mathcal{H})$ C*-podalgebra od $B(\mathcal{H})$. Naime, prema prethodnom korolaru ona je samoadjungirana, dok smo u Propoziciji 4.1.8. pokazali da je zatvorena. Alternativno, to smo isto mogli zaključiti u trenutku kad smo dokazali da je $K(\mathcal{H})$ zatvoren ideal u $B(\mathcal{H})$ primjenom Teorema 2.4.4.

4.2 C*-algebre kompaktnih operatora

U ovoj točki će $\mathcal{H}$ označavati Hilbertov prostor.
U prethodnoj točki smo pokazali da je $K(\mathcal{H})$ C*-podalgebra od $B(\mathcal{H})$. Sada ćemo promotriti *-podalgebre od $K(\mathcal{H})$ te tako dobiti dodatne informacije o algebarskoj strukturi od $K(\mathcal{H})$.

Za *-podalgebru $\mathbb{A}$ od $K(\mathcal{H})$ sa $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ ćemo označavati skup svih ortogonalnih projektora u $\mathbb{A}$, tj.

$$\mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{P \in \mathbb{A} : P = P^2 = P^*\}.$$

Ispostavlja se da je ovaka definicija ekvivalentna onoj ortogonalnog projektora iz Rieszovog teorema (vidi Dodatak, Teorem A.0.15.).

Kako je $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ kompaktan te vrijedi $P|_{R(P)} = I_{R(P)}$ iz Propozicije 4.1.7. slijedi da $R(P)$ konačnodimenzionalan. Dakle, svaki $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ je operator konačnog ranga.

Skup $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ možemo parcijalno urediti na sljedeći način:

$$Q \leq P \iff QP = PQ = Q.$$

Primijetimo da je dovoljno tražiti $QP = Q$ jer tada adjungiranjem slijedi $PQ = Q$.

Propozicija 4.2.1. *Za $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ vrijedi $Q \leq P$ ako i samo ako $R(Q) \subseteq R(P)$.*

Dokaz. Ako je $Q \leq P$ za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo $Q\xi = PQ\xi$ pa $R(Q) \subseteq R(P)$. Obratno, ako je $R(Q) \subseteq R(P)$ onda je $Q = PQ$ jer znamo da P djeluje kao identiteta na svojoj slici, tj. $Q \leq P$. □

Definicija 4.2.2. *Za projektor $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ kažemo da je* ***minimalan*** *ako je on minimalan element parcijalno uređenog skupa $\mathcal{P}(\mathbb{A}) \setminus \{0\}$, tj. ako vrijedi $P \neq 0$ i*

$$Q \in \mathcal{P}(\mathbb{A}),\ Q \leq P \implies Q = P \text{ ili } Q = 0.$$

Za projektore $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ kažemo da su ***ortogonalni*** *i pišemo $P \perp Q$ ako vrijedi $PQ = 0$.*

Primijetimo da je biti ortogonalan simetrična relacija jer iz $PQ = 0$ adjungiranjem odmah slijedi $QP = 0$.

Imamo sljedeću karakterizaciju minimalnosti ortogonalnog projektora, koja će se pokazati od iznimne važnosti za razumijevanje strukture algebre kompaktnih operatora.

Lema 4.2.3. *Neka je $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $P \neq 0$. Tada je P minimalan ako i samo ako vrijedi $P\mathbb{A}P = \mathbb{C}P$, tj. $\{PAP : A \in \mathbb{A}\} = \{\lambda P : \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

Dokaz. Neka vrijedi $P\mathbb{A}P = \mathbb{C}P$. Uzmimo $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ takav da $Q \leq P$. Treba pokazati $Q = P$ ili $Q = 0$. Imamo $QP = Q$ pa množenjem slijeva s P slijedi $PQP = PQ$. No, kako je $PQ = Q$ dobivamo $PQP = Q$. Slijedi da postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da $Q = \lambda P$. Tada

$$\lambda P = Q = Q^2 = \lambda^2 P^2 = \lambda^2 P.$$

Jer je $P \neq 0$ slijedi $\lambda^2 = \lambda$ pa $\lambda \in \{0, 1\}$, tj. $Q = P$ ili $Q = 0$.

Neka je sada $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \setminus \{0\}$ minimalan projektor. Uzmimo $T \in \mathbb{A}$ hermitski. Tada je PTP hermitski operator konačnog ranga (jer je P konačnog ranga). Dakle, imamo da je $PTP|_{R(P)} : R(P) \to R(P)$ hermitski operator na konačnodimenzionalnom prostoru. Stoga, prema teoremu o dijagonalizaciji hermitskog operatora na konačnodimenzionalnom prostoru (vidi Dodatak, Teorem A.0.16.) slijedi da $R(P)$ ortogonalna suma svojstvenih potprostora od $PTP|_{R(P)}$. Dakle, ako je $PTP \neq 0$ te $\sigma(PTP|_{R(P)}) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ gdje $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$, vrijedi

$$R(P) = \bigoplus_{i=0}^{n} V_i,\ V_0 = N(PTP) \cap R(P),\ V_i = \{\xi \in \mathcal{H} : PTP\xi = \lambda_i \xi\},\ i \in \{1, ..., n\}.$$

Označimo sa $Q_i,\ i \in \{1, ..., n\}$ ortogonalni projektor sa $\mathcal{H}$ na V_i, tj. projektor duž potprostora

$$V_i^{\perp} = N(P) \oplus V_0 \oplus V_1 \oplus ... \oplus V_{i-1} \oplus V_{i+1} \oplus ... \oplus V_n.$$

Tvrdimo da je sada

$$PTP = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + ... + \lambda_n Q_n. \tag{$\triangle$}$$

Vrijedi $\mathcal{H} = R(P) \oplus R(P)^{\perp} = R(P) \oplus N(P^*) = R(P) \oplus N(P)$ gdje smo iskoristili $\overline{R(P)} = (N(P^*))^{\perp}$ te činjenicu da je $R(P)$ zatvoren (jer je konačnodimenzionalan). Sada $\xi \in \mathcal{H}$ možemo napisati u obliku $\xi = x + y,\ x \in R(P),\ y \in N(P)$. Tada je očito $PTP\xi = PTPx$. Sada iskoristimo rastav od $R(P)$. Dakle, postoje $v_0 \in N(PTP) \cap R(P)$ i $v_i \in V_i,\ i \in \{1, ..., n\}$ takvi da $x = v_0 + v_1 + ... + v_n$. Stoga, imamo

$$PTP\xi = PTPx = PTP(v_0 + v_1 + ... + v_n) = PTPv_1 + ... + PTPv_n = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = \lambda_1 Qv_1 + ... + \lambda_1 Qv_n = (\lambda_1 Q_1 + ... + \lambda_n Q_n)(v_1 + ... + v_n) = (\lambda_1 Q_1 + ... + \lambda_n Q_n)(x) = (\lambda_1 Q_1 + ... + \lambda_n Q_n)\xi$$

iz čega slijedi ($\triangle$).

Sada tvrdimo da je $Q_i = p_i(PTP),\ i \in \{1, ..., n\}$, gdje je p_i polinom bez konstantnog člana.

Iz ($\triangle$) slijedi

$$(PTP)^k = \lambda_1^k Q_1 + \lambda_2^k Q_2 + ... + \lambda_n^k Q_n,\ k \in \{1, ..., n\}.$$

To je posljedica idempotentnosti od Q_i te činjenice da su Q_i i Q_j ortogonalni za $i \neq j$. Matrično zapisano imamo

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \dots \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1^n & \dots \lambda_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PTP \\ (PTP)^2 \\ \vdots \\ (PTP)^n \end{bmatrix} =: B$$

Matrica sustava je Vandermondeova[21] matrica čija je determinanta 0 ako i samo ako postoje $i, j \in \{1, .., n\}$, $i \neq j$ takvi da $\lambda_i = \lambda_j$. Po izboru znamo da to nije slučaj pa je matrica sustava regularna. Dakle, radi se o Cramerovom[22] sustavu te je stoga njegovo rješenje dano s $Q_i = \frac{D_i}{D}$ gdje je D determinanta matrice sustava, a D_i determinanta matrice čiji je i-ti stupac B, a ostali isti kao u matrici sustava. Sada Laplaceovim[23] razvojem D_i (npr. po prvom retku) dobivamo traženu polinomijalnu ovisnost $Q_i = p_i(PTP)$, $i \in \{1, ..., n\}$. Također, jasno je da p_i nema konstantnog člana.

Iz upravo dokazanog i ($\triangle$) slijedi $Q_i \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$. Vrijedi $R(Q_i) = V_i \subseteq R(P)$ pa iz Propozicije 4.2.1. slijedi $Q_i \leq P$, $i \in \{1, ..., n\}$. Sada iz minimalnosti od P slijedi $Q_i = P$ ili $Q_i = 0$, $i \in \{1, ..., n\}$. Jer su Q_i međusobno ortogonalni i $V_i \neq \{0\}$ mora biti $n = 1$ i $Q_1 = P$, tj. vrijedi $PTP = \lambda_1 P$.

Sada dokaz možemo završiti s primjedbom da je svaki operator $T \in \mathbb{A}$ oblika $T_1 + iT_2$ gdje su T_1, $T_2 \in \mathbb{A}$ hermitski te zato vrijedi $PTP = PT_1P + iPT_2P = \lambda_1 P + i\lambda_2 P = \lambda PTP$, za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. □

Propozicija 4.2.4. *Svaki $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, $P \neq 0$ je konačna suma međusobno ortogonalnih minimalnih projektora u $\mathbb{A}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ nije minimalan u $\mathbb{A}$. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $\dim(R(P))$. Primijetimo ako je $\dim(R(P)) = 1$ onda je P nužno minimalan jer za $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \setminus \{0\}$ takav da $Q \leq P$ slijedi $R(Q) \subseteq R(P)$. Tada je $R(Q) = R(P)$ pa i $Q = P$.

Neka je sada $\dim(R(P)) = 2$ i neka je $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ takav da $Q \neq 0$, $Q \neq P$ i $Q \leq P$. Promotrimo $P - Q \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \setminus \{0\}$. Imamo

$$Q(P - Q) = QP - Q^2 = Q - Q = 0,$$

tj. $Q \perp P - Q$ i naravno vrijedi $P = Q + (P - Q)$. Iz $Q \perp P - Q$ lagano slijedi $R(P) \perp R(P - Q)$ pa je nužno

$$2 = \dim(R(P)) = \dim(R(Q)) + \dim(R(P - Q)).$$

Dakle, $\dim(R(Q)) = \dim(R(P - Q)) = 1$ pa su oni minimalni projektori.

Pretpostavimo da sad tvrdnja vrijedi za sve projektore čija je slika dimenzije manje od $\dim(R(P))$. Ponovno, promotrimo rastav $P = Q + (P - Q)$ za neki $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{A}) \setminus \{0\}$ takav da $Q \leq P$. Kao i u bazi indukcije, slijedi $\dim(R(Q)), \dim(R(P - Q)) < \dim(R(P))$ pa sad tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije primjenjene na nenul projektore Q i $P - Q$. □

Definicija 4.2.5. *Za podalgebru $\mathbb{A}$ od $B(\mathcal{H})$ kažemo da je* ***ireducibilna*** *ako ne postoji zatvoren, netrivijalan, $\mathbb{A}$-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$.*

[21] Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735-1796, francuski matematičar, glazbenik i kemičar

[22] Gabriel Cramer, 1704-1752, ženevski matematičar

[23] Pierre-Simon Laplace, 1749-1827, francuski matematičar

Jezikom teorije reprezentacija mogli bismo reći da je podalgebra $\mathbb{A}$ od $B(\mathcal{H})$ ireducibilna ako je njezina identična reprezentacija $\mathrm{id} : \mathbb{A} \to B(\mathcal{H}),\ A \mapsto A$ ireducibilna.

U iduća tri teorema ćemo vidjeti kako je algebra $K(\mathcal{H})$ poprilično jednostavna u smislu njezine *-algebarske strukture.

Teorem 4.2.6. *Jedina nenul, zatvorena, ireducibilna *-podalgebra od $K(\mathcal{H})$ jest $K(\mathcal{H})$.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{A} \neq \{0\}$ zatvorena, ireducibilna *-podalgebra od $K(\mathcal{H})$. Tvrdimo prvo da postoji $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ takav da $\dim(R(P)) = 1$. Kako je svaki projektor suma minimalnih projektora (Propozicija 4.2.4.) dovoljno je dokazati da je $\dim(R(P)) = 1$ za svaki minimalni projektor P u $\mathbb{A}$.

Neka je $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ minimalan projektor u $\mathbb{A}$ i uzmimo $\xi \in R(P),\ \xi \neq 0$. Promotrimo $\overline{\mathbb{A}\xi} = \overline{\{A\xi : A \in \mathbb{A}\}}$. Kako je $\xi = P\xi$ vrijedi $\xi \in \overline{\mathbb{A}\xi}$, tj. $\overline{\mathbb{A}\xi} \neq \{0\}$. Očito je $\overline{\mathbb{A}\xi}$ $\mathbb{A}$-invarijantan pa iz ireducibilnosti od $\mathbb{A}$ slijedi $\overline{\mathbb{A}\xi} = \mathcal{H}$. Drugim riječima, $\mathbb{A}\xi$ je gust u $\mathcal{H}$ iz čega slijedi $(\mathbb{A}\xi)^\perp = \{0\}$.

Uzmimo sada $\eta \in R(P)$ takav da $\eta \perp \xi$. Neka je $T \in \mathbb{A}$. Prema Lemi 4.2.3. je $PTP = \lambda P$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Računamo,

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle P\eta, TP\xi \rangle = \langle \eta, PTP\xi \rangle = \langle \eta, \lambda\xi \rangle = \overline{\lambda}\langle \eta, \xi \rangle = 0.$$

Pošto to vrijedi za svaki $T \in \mathbb{A}$, dobivamo $\eta \perp \mathbb{A}\xi$, dakle $\eta = 0$. Kako je $R(P) = \mathbb{C}\xi \oplus (\mathbb{C}\xi)^\perp$ slijedi $\eta \in \mathbb{C}\xi$, tj. $R(P) = \mathbb{C}\xi$ pa $\dim(R(P)) = 1$. Dakle, postoji $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ takav da $\dim(R(P)) = 1$.

Sljedeće što želimo pokazati je da $\mathbb{A}$ sadrži sve ortogonalne projektore na $\mathcal{H}$ ranga 1. Zaista, neka je Q ortogonalni projektor na $\mathcal{H}$ ranga 1 i $q \in R(P)$, $\|q\| = 1$. Tvrdimo da je tada $Q\xi = \langle \xi, q \rangle q$. Zaista, znamo da je $Q\xi \in R(Q)$ pa je $Q\xi = \lambda q$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Odredimo λ. Znamo da je $\xi = Q\xi + (\xi - Q\xi)$ te $\langle \xi - Q\xi, Q\xi \rangle = 0$. Dakle,

$$0 = \langle \xi - Q\xi, Q\xi \rangle = \langle \xi - \lambda q, \lambda q \rangle = \lambda(\langle \xi, q \rangle - \lambda) \implies \lambda \in \{0, \langle \xi, q \rangle\}.$$

Ako je $\lambda = 0$ onda je $Q = 0$ što je kontradikcija s $\dim(R(Q)) = 1$. Dakle, $Q\xi = \langle \xi, q \rangle \xi$.

Neka je $P \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$ ranga 1 i $p \in R(P)$, $\|p\| = 1$. Dakle, $P\xi = \langle \xi, p \rangle p$. Prema prvom dijelu dokaza je $\mathbb{A}p$ gust u $\mathcal{H}$ pa postoji niz (T_n) u $\mathbb{A}$ takav da $T_n p \to q$. Bez smanjena općenitosti možemo uzeti da je $\|T_n p\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zaista, prvo možemo uzeti da su svi $T_n p \neq 0$, a potom T_n zamijeniti s $\frac{T_n}{\|T_n p\|}$. Tada $T_n P T_n^* \in \mathbb{A}$ te za $\xi \in \mathcal{H}$ imamo

$$\begin{aligned}
\|T_n P T_n^* \xi - Q\xi\| &= \|T_n \langle T_n^* \xi, p \rangle p - \langle \xi, q \rangle q\| \\
&= \|\langle \xi, T_n p \rangle T_n p - \langle \xi, q \rangle q\| \\
&= \|\langle \xi, T_n p \rangle (T_n p - q) + \langle \xi, T_n p - q \rangle q\| \\
&\leq \|\xi\|\,\|T_n p\|\,\|T_n p - q\| + \|\xi\|\,\|T_n p - q\|\,\|q\| \\
&= 2\|\xi\|\,\|T_n p - q\|.
\end{aligned}$$

Iz proizvoljnosti od $\xi \in \mathcal{H}$ slijedi

$$\|T_n P T_n^* - Q\| \leq 2\|T_n p - q\| \to 0 \implies T_n P T_n^* \to Q.$$

Sada iz zatvorenosti od $\mathbb{A}$ slijedi $Q \in \mathbb{A}$.

Iz dokazanog slijedi da $\mathbb{A}$ sadrži sve ortogonalne projektore na $\mathcal{H}$ konačnog ranga. Nadalje, iz teorema o dijagonalizaciji hermitskih operatora na konačnodimenzionalnom prostoru slijedi da $\mathbb{A}$ sadrže sve operatore konačnog ranga na $\mathcal{H}$. Prema Teoremu 4.1.10. je $K(\mathcal{H}) = \overline{F(\mathcal{H})}$ pa je stoga $K(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{A}$. Sveukupno, $\mathbb{A} = K(\mathcal{H})$. □

Korolar 4.2.7. *$K(\mathcal{H})$ ne sadrži netrivijalne, zatvorene ideale.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{A} \neq \{0\}$ zatvoren ideal od $K(\mathcal{H})$. Tada je za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$ prostor $\overline{\mathbb{A}\xi}$ je zatvoren potprostor od $\mathcal{H}$, različit od $\{0\}$ te koji je $K(\mathcal{H})$-invarijantan. Zaista, za $T \in K(\mathcal{H})$ je $T\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$ pa i $T\mathbb{A}\xi \subseteq \mathbb{A}\xi$. Konačno, zbog neprekidnosti od T slijedi $T\overline{\mathbb{A}\xi} \subseteq \overline{\mathbb{A}\xi}$. Posebno, $\overline{\mathbb{A}\xi}$ je invarijantan na svaki projektor ranga 1. Stoga, za proizvoljan $\xi \in \mathcal{H}$ možemo promotriti P_ξ ortogonalni projektor na potprostora razapet s ξ. Očito je P_ξ ranga 1 i $P_\xi\overline{\mathbb{A}\xi} \subseteq \overline{\mathbb{A}\xi}$. Stoga je $\xi = P_\xi\xi \in \overline{\mathbb{A}\xi}$. Dakle, slijedi $\overline{\mathbb{A}\xi} = \mathcal{H}$, tj. $\mathbb{A}\xi$ je gust u $\mathcal{H}$ za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$. Time je pokazano da u $\mathcal{H}$ nema netrivijalnih, zatvorenih $\mathbb{A}$-potprostora, tj. $\mathbb{A}$ je ireducibilna. Sada iz prethodnog teorema slijedi $\mathbb{A} = K(\mathcal{H})$. □

Korolar 4.2.8. *Ako zatvorena, ireducibilna *-podalgebra $\mathbb{A}$ od $B(\mathcal{H})$ sadrži barem jedan kompaktan operator na $\mathcal{H}$, onda ih sadrži sve, tj. $K(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{A}$.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{B} = \mathbb{A} \cap K(\mathcal{H}) \neq \{0\}$. Tada je $\mathbb{B}$ zatvoren ideal u algebri $\mathbb{A}$ (jer je $K(\mathcal{H})$ ideal u $B(\mathcal{H})$). Tvrdimo da je za svaki $\xi \in \mathcal{H}, \xi \neq 0$ potprostor $\mathbb{B}\xi$ gust u $\mathcal{H}$. Zaista, za $T \in \mathbb{A}$ je $T\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}$ pa $T\mathbb{B}\xi \subseteq \mathbb{B}\xi$ pa zbog neprekidnosti od T je $\overline{\mathbb{B}\xi}$ nenul, zatvoren, $\mathbb{A}$-invarijantan potprostor od $\mathcal{H}$ pa slijedi $\overline{\mathbb{B}\xi} = \mathcal{H}$. Slijedi da u $\mathcal{H}$ ne postoji netrivijalan, zatvoren, $\mathbb{B}$-invarijantan potprostor pa iz Teorema 4.2.6. slijedi $\mathbb{B} = K(\mathcal{H})$, tj. $K(\mathcal{H}) \subseteq \mathbb{A}$. □

4.3 Reprezentacije C*-algebri kompaktnih operatora

U prethodnoj točki smo proučavali zatvorene *-podalgebre od $K(\mathcal{H})$ gdje je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Zbog zatvorenosti, one su ujedno i C*-algebre. Sada ćemo pobliže proučiti reprezentacije C*-algebri kompaktnih operatora i uspješno ih klasificirati. Nakon toga, cilj nam je dokazati strukturrni teorem za C*-algebre kompaktnih operatora, što će biti i posljednji rezultat ovog rada.

Definicija 4.3.1. *Za* C*-*podalgebru $\mathbb{A}$ od $B(\mathcal{H})$ kažemo da je* ***nedegenerirana*** *ako je njezina identična reprezentacija nedegenerirana, tj. ako je span $\mathbb{A}\mathcal{H} = span\{A\xi : A \in \mathbb{A}, \xi \in \mathcal{H}\}$ gust u $\mathcal{H}$ (ekvivalentno, iz $A\xi$, $\forall A \in \mathbb{A}$ slijedi $\xi = 0$).*

U idućoj propoziciji možemo vidjeti kako generirati ireducibilne podalgebre C*-algebri kompaktnih operatora.

Propozicija 4.3.2. *Neka je* $\mathbb{A}$ C*-*podalgebra od* $K(\mathcal{H})$ *i* $P \in \mathbb{A}$ *minimalni projektor. Ako je* $\xi \in R(\mathcal{H})$ *jedinični vektor i* $\mathcal{H}_0 := \overline{\mathbb{A}\xi}$ *tada je* $\mathbb{A}|_{\mathcal{H}_0}$ *ireducibilna i* $\mathbb{A}|_{\mathcal{H}_0} = K(\mathcal{H}_0)$.

Dokaz. Preslikavanje $A \mapsto A|_{\mathcal{H}_0}$ je *-homomorfizam s $\mathbb{A}$ u $K(\mathcal{H}_0)$ čija je slika $\mathbb{A}|_{\mathcal{H}_0}$. Prema Teoremu 4.2.7. $\mathbb{A}_{\mathcal{H}_0}$ je C*-podalgebra od $K(\mathcal{H})$. Zbog Teorema 4.2.6. dokaz će biti gotov ako pokažemo da je $\mathbb{A}|_{\mathcal{H}_0}$ ireducibilna. U tu svrhu uzmimo proizvoljan $R \in (\mathbb{A}|_{\mathcal{H}_0})'$. Prema Teoremu 3.1.16. dovoljno je pokazati da je R skalarni operator.

Zamijenom R s $R - \langle R\xi, \xi\rangle I$ možemo pretpostaviti da je $\langle R\xi, \xi\rangle = 0$ te stoga tvrdimo da je $R = 0$. Kako je $P \in \mathbb{A}$ minimalan projektor iz Leme 4.2.3. slijedi da za proizvoljne $S, T \in \mathbb{A}$ imamo $PT^*SP = \lambda P$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Računamo:

$$\langle RS\xi, T\xi\rangle = \langle RSP\xi, TP\xi\rangle = \langle PT^*RSP\xi, \xi\rangle = \langle RPT^*SP\xi, \xi\rangle = \lambda\langle RP\xi, \xi\rangle = \lambda\langle R\xi, \xi\rangle = 0.$$

Slijedi $R = 0$ iz gustoće $\mathbb{A}\xi$ u $\mathcal{H}_0$. □

Sada ćemo dokazati teorem koji govori kako izgledaju sve nedegenerirane reprezentacije C*-algebre kompaktnih operatora. Iako naravno zanimljiv i sam za sebe, upravo je on ključan za dokaz strukturnog teorema za C*-algebre kompaktnih operatora.

Prije samog dokaza komentirajmo zašto sve linearne kombinacije minimalnih projektora u C*-podalgebri $\mathbb{A}$ od $K(\mathcal{H})$ čine gust potprostor od $\mathbb{A}$. Naime, ako je $T \in F(\mathcal{H})$ uzmimo $\eta_1, ..., \eta_n$ ortonormiranu bazu za $R(T)$ gdje je $n = \dim(R(T))$. Tada je $\mathrm{Im}T = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}\eta_i$. Označimo s P_i ortogonalni projektor na $\mathbb{C}\eta_i$ (svaki P_i je jasno minimalan jer je ranga 1). Tada je za proizvoljni $\xi \in \mathcal{H}$, $T\xi = \sum_{i=1}^{n} P_i\xi$. Vidimo da smo zapisali T kao linearnu kombinaciju minimalnih projektora pa možemo zaključiti da sve njihove linearne kombinacije čine gust potprostor od $\mathbb{A}$ zbog Teorema 4.1.10.

Teorem 4.3.3. *Neka je* $\mathbb{A}$ C*-*podalgebra* C*-*algebre kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$ *i* $(\mathcal{K}, \pi)$ *nedegenerirana reprezentacija od* $\mathbb{A}$. *Tada postoji familija* $(\mathcal{K}_i, \pi_i)_{i\in I}$ *međusobno ortogonalnih ireducibilnih subreprezentacija od* π *takva da*

$$\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i.$$

Štoviše, svaka π_i *je ekvivalentna subreprezentaciji od* $\mathrm{id} : \mathbb{A} \to B(\mathcal{H})$.

Dokaz. Sve linearne kombinacije minimalnih projektora u $\mathbb{A}$ čine gust potprostor od $\mathbb{A}$. Tada postoji minimalni projektor $P \in \mathbb{A}$ takav da $\pi(P) \neq 0$. Zaista, kada bi $\pi(P) = 0$ za svaki minimalni projektor P u $\mathbb{A}$ onda bi zbog gustoće bilo $\pi(\mathbb{A}) = \{0\}$, tj. reprezentacija je degenerirana.

Iz Leme 4.2.3. slijedi da postoji linearan funkcional f takav da $PAP = f(A)P,\ \forall A \in \mathbb{A}$. Izaberimo η jedinični vektor u $R(\pi(P))$ i ξ jedinični vektor u $R(P)$. Tada je $\mathcal{K}_\eta := \overline{\pi(\mathbb{A})\eta}$ zatvoren π-invarijantan potprostor od $\mathcal{K}$. Ono što ćemo pokazati je da je subreprezentacija $\pi_{\mathcal{K}_\eta}$ ekvivalentna subreprezentaciji identične reprezentacije na zatvorenom id-invarijantnom potprostoru $\mathcal{H}_0 := \overline{\mathbb{A}\xi}$. Za $A \in \mathbb{A}$ imamo

$$\|\pi(A)\eta\|^2 = \|\pi(A)\pi(P)\eta\|^2 = \|\pi(AP)\eta\|^2 = \langle \pi(AP)\eta, \pi(AP)\eta\rangle = \langle \pi(PA^*AP)\eta, \eta\rangle = \\ f(A^*A)\langle \pi(P)\eta, \eta\rangle = f(A^*A) = \langle f(A^*A)\xi, \xi\rangle = \langle PA^*AP\xi, \xi\rangle = \langle AP\xi, AP\xi\rangle = \|A\xi\|^2.$$

Gornji račun pokazuje da je operator $U : A\xi \mapsto \pi(A)\eta$ linearna izometrija s $\mathbb{A}\xi$ na $\pi(\mathbb{A})\eta$. Možemo ga po neprekidnosti proširiti od izometričkog izomorfizma sa $\mathcal{H}_0$ na $\mathcal{K}_\eta$ te to proširenje isto označimo sa U. Sada za $A, B \in \mathbb{A}$ imamo

$$\pi_{\mathcal{K}_\eta}(B)U(A\xi) = \pi(B)U(A\xi) = \pi(B)\pi(A)\eta = \pi(BA)\eta = U(BA\xi) = U(\mathrm{id}_{\mathcal{H}_0}(B)A\xi).$$

Dakle, restrikcije operatora $\pi_{\mathcal{K}_\eta}(B)U$ i $U\mathrm{id}_{\mathcal{H}_0}(B)$ na potprostor $\mathbb{A}\xi$ se podudaraju pa iz gustoće i neprekidnosti slijedi da se podudaraju i na $\mathcal{H}_0$, tj. $\pi_{\mathcal{K}_\eta}(B)U = U\mathrm{id}_{\mathcal{H}_0}(B)$. Kako to vrijedi za svaki $B \in \mathbb{A}$ slijedi $(\mathcal{K}_\eta, \pi_{\mathcal{K}_\eta}) \sim (\mathcal{H}_0, \mathrm{id}_{\mathcal{H}_0})$.

Pokazali smo da $\mathcal{K}$ sadrži potprostor $\mathcal{K}_\eta$ takav da je restrikcija od $\pi(\mathbb{A})$ na $\mathcal{K}_\eta$ ireducibilna reprezentacija koji je ekvivalentna subreprezentaciji od identične reprezentacije. Izaberimo maksimalnu familiju (koristeći Zornovu lemu) $(\mathcal{K}_\eta)_{\eta\in\Lambda}$ s tim svojstvom. Tada je suma potprostora $(\mathcal{K}_\eta)_{\eta\in\Lambda}$ gusta u $\mathcal{K}$ jer bi inače imali $0 \neq \xi \in (\bigcup_{\eta\in\Lambda} \mathcal{K}_\eta)^\perp$ pa bi $\bigcup_{\eta\in\Lambda} \mathcal{K}_\eta \cup \mathcal{K}_\xi \supsetneqq \bigcup_{\eta\in\Lambda} \mathcal{K}_\eta$. Neka je π_η restrikcija od π na $\mathcal{K}_\eta$, $\eta \in \Lambda$. Tako smo dobili dekompoziciju $\pi = \bigoplus_{\eta\in\Lambda} \pi_\eta$ gdje je svaka π_η ekvivalentna ireducibilnoj subreprezentaciji identitete. □

Ako je $(\mathcal{K}, \pi)$ reprezentacija C*-algebre $\mathbb{A}$ i n pozitivni kardinalni broj, definiramo $\mathcal{K}^{(n)}$ kao ortogonalnu sumu n kopija prostora $\mathcal{K}$. Drugim riječima, za neki skup I takav da $|I| = n$ je $\mathcal{K}^{(n)} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{K}_i$ gdje je $\mathcal{K}_i = \mathcal{K},\ \forall i \in I$. Sada na $\mathcal{K}^{(n)}$ definiramo reprezentaciju $n \cdot \pi$ na sljedeći način:

$$(n \cdot \pi)(A)(\xi_i)_{i\in I} = (\pi(A)\xi_i)_{i\in I}.$$

$n \cdot \pi$ zovemo **multipl reprezentacije** π.

Sada smo u stanju opisati sve reprezentacije C*-algebre kompaktnih operatora.

Korolar 4.3.4. *Svaka nedegenerirana reprezentacija od $K(\mathcal{H})$ je ekvivalentna multiplu identične reprezentacije.*

Dokaz. Kako je identična reprezentacija ireducibilna, jedino je ona sama sebi (nenul) subreprezentacija. Stoga ako je $(\mathcal{K}, \pi)$ nedegenerirana reprezentacija od $K(\mathcal{H})$, Teorem 4.3.3. implicira da je $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ gdje je $\pi \sim$ id, $\forall i \in I$. Stoga za $i \in I$ postoji unitarni operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}$ takvi da $A = U_i^* \pi_i(A) U_i$, $\forall A \in K(\mathcal{H})$. Sada stavimo $n = |I|$ i imamo

$$n \cdot \mathrm{id}(A) = U^* \pi(A) U$$

gdje je $U = \bigoplus_{i \in I} U_i : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H} \to \mathcal{K}$. □

Korolar 4.3.5. *Svaka ireducibilna reprezentacija od $K(\mathcal{H})$ je ekvivalentna identičnoj reprezentaciji.*

Sada primjenjujući teoriju reprezentacija možemo pokazati da su *-izomorfizmi između algebri ograničenih operatora na Hilbertovim prostorima svi esencijalno jednaki. Naime, pokazat ćemo da su svi *-izomorfizmi *unitarno ekvivalentni* identiteti, a međusobno unitarno ekvivalentni izomorfizmi su, u sve praktične svrhe, jednaki. U slučaju algebri kompaktnih operatora možemo čak dokazati nešto jaču tvrdnju.

Teorem 4.3.6. *Neka je $\varphi : K(\mathcal{H}) \to K(\mathcal{K})$ surjektivni *-homomorfizam. Tada postoji unitaran operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da $\varphi(A) = UAU^*$, $\forall A \in K(\mathcal{H})$.*
*Neka je $\psi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ *-izomorfizam. Tada postoji unitaran operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da je $\varphi(B) = UBU^*$, $\forall B \in B(\mathcal{H})$.*

Dokaz. Jasno je da je $\varphi : K(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K}) \supseteq K(\mathcal{K})$ reprezentacija. Tvrdimo da je ona ireducibilna. Prema Propoziciji 3.1.13. dovoljno je vidjeti da za svaki $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \neq 0$ vrijedi $\overline{\varphi(K(\mathcal{H}))\xi} = \mathcal{K}$. Dakle, treba vidjeti $\overline{K(\mathcal{K})\xi} = \mathcal{K}$. Primijetimo da za proizvoljni $\zeta \in \mathcal{K}$ postoji $A \in K(\mathcal{K})$ takav da $A\xi = \zeta$. Zaista, za dani $\zeta \in \mathcal{K}$ možemo definirati

$$A : \mathcal{K} \to \mathcal{K},\ Ax = \frac{1}{\|\xi\|^2}\langle x, \xi \rangle \zeta.$$

Očito je tada $A\xi = \zeta$. Također, A je konačnog ranga pa je i kompaktan. Time smo dokazali $\overline{K(\mathcal{K})\xi} = \mathcal{K}$, dakle φ je ireducibilna reprezentacija.

Prema Korolaru 4.3.5. φ je ekvivalentna identičnoj reprezentaciji, tj. postoji unitaran operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da $\varphi(A) = UAU^*$, $\forall A \in K(\mathcal{H})$.

Analogno, zaključujemo da je ψ ireducibilna reprezentacija C*-algebre $B(\mathcal{H})$ koja je ujedno i vjerna. Pošto je $K(\mathcal{H})$ zatvoren ideal u $B(\mathcal{H})$, prema Teoremu 3.1.14. $\psi|_{K(\mathcal{H})}$ je ireducibilna reprezentacija od $K(\mathcal{H})$. Sada Korolar 4.3.5. povlači da postoji unitaran operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ takav da $\psi|_{K(\mathcal{H})}(A) = UAU^*$, $\forall A \in K(\mathcal{H})$. Napokon, zadnja tvrdnja Teorema 3.1.14. povlači da je $\psi(B) = UBU^*$, $\forall B \in B(\mathcal{H})$. □

Sada ćemo rezultat Teorema 4.3.3. primjeniti na samu identičnu reprezentaciju i tako dobiti potpun opis C*-algebri kompaktnih operatora. Za to će nam biti potrebna iduća lema.

Lema 4.3.7. *Svaki idempotentan kompaktan operator na Hilbertovom prostoru je konačnog ranga.*

Dokaz. Neka je $T \in K(\mathcal{H})$ idempotentan. $T^2 = T$ pa T djeluje kao identiteta na $R(T)$, tj. $T|_{R(T)} = I_{R(T)}$. Sada druga tvrdnja Propozicije 4.1.7. povlači $\dim(R(T)) < \infty$, tj. T je konačnog ranga. □

Neka je k pozitivan kardinalan broj i I skup takav da $|I| = k$. Analogno kako smo definirali multipl reprezentacija, za $A \in B(\mathcal{H})$ s $A^{(k)}$ označujemo operator na $\mathcal{H}^{(k)}$ definiran s $A^{(k)}(\xi_i)_{i\in I} = (A\xi_i)_{i\in I}$. Nadalje, $\cong$ označuje izometričku izomorfnost prostora, tj. izometričku *-izomorfnost algebri.

Teorem 4.3.8. *Neka je* $\mathbb{A}$ C*-*podalgebra* C*-*algebre kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$. *Tada postoje međusobno ortogonalni Hilbertovi prostori* $\mathcal{H}_i$ *dimenzije* $n_i, i \in I$ *i* $k_i \in \mathbb{N}_0$ *takvi da*

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_0 \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i^{(k_i)} \quad i \quad \mathbb{A} \cong 0 \oplus \bigoplus_{i\in I} K(\mathcal{H}_i)^{(k_i)}$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{H}_0 = \mathrm{Ker}(\mathbb{A})$ i označimo sa π identičnu reprezentaciju $\mathbb{A} \to B(\mathcal{H})$. Prema Teoremu 4.3.3. (sada je reprezentacija nedegenerirana) $\mathcal{H}_0^{\perp}$ može se dekomponirati kao ortogonalna suma π-invarijantnih potprostora $\mathcal{K}_j$ takvih da su restrikcije od π_j na $\mathcal{K}_j$ ireducibilne. Prema Teoremu 4.2.6. imamo $\pi_j(\mathbb{A}) = K(\mathcal{K}_j)$. Skup svih reprezentacija π_j particioniramo u klase ekvivalencije $\{\pi_j : j \in S_i\}$. Neka je $\mathcal{H}_i$ Hilbertov prostor dimenzije $n_i := \dim(\mathcal{K}_j)$ za $j \in S_i$ te $k_i = |S_i|$. Sada je jasno da je

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_0 \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i^{(k_i)} \quad \text{i} \quad \mathrm{id} \cong 0 \oplus \bigoplus_{i\in I} \pi_i^{(k_i)}.$$

pa kada promotrimo $\mathrm{id}(\mathbb{A})$ imamo i

$$\mathbb{A} \cong 0 \oplus \bigoplus_{i\in I} K(\mathcal{H}_i)^{(k_i)}.$$

Primijetimo da se projektor ranga 1 preslikava u projekciju ranga k_i. Kako je ta projekcija kompaktna slijedi da je $k_i < \infty$, $\forall i \in I$. Naime, svaki kompaktan projektor je konačnog ranga prema prethodnoj lemi. □

Time smo potpuno opisali strukturu C*-algebri kompaktnih operatora na Hilbertovom prostoru. Riječima, svaka C*-(pod)algebra kompaktnih operatora je direktna suma C*-algebri kompaktnih operatora na "manjim" Hilbertovim prostorima. Dakle, mogli bismo reći da su u nekom smislu C*-algebre kompaktnih operatora elementarne što i sugerira činjenica da su kompaktni operatori analogni operatorima na konačnodimenzionalnim prostorima u beskonačnodimenzionalnom okruženju. Naime, može se pokazati da je svaka konačnodimenzionalna C*-algebra izomorfna direktnoj sumi matričnih algebri. Zapravo je i to posljedica prethodnog teorema jer se svaka konačnodimenzionalna C*-algebra može *-izomorfno reprezentirati kao C*-algebra koja djeluje na konačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru (što je naravno jedna C*-algebra kompaktnih operatora).

Dodatak A

Dodatak A

U ovom poglavlju dati ćemo precizne iskaze te, za neke, dokaze teorema koje smo koristili kroz rad koji nisu u najužem smislu pripadali samoj tematici, ali su svakako bili važni za razne rezultate.

Teorem A.0.1. *(**Zornova lema**) Ako je S neprazan, parcijalno uređen skup u kojem svaki lanac ima gornju među, onda S ima maksimalan element.*

Poznati rezultat teorije skupove jest ekvivalencija Zornove leme i aksioma izbora. Dakle, u ovom radu se bitno oslanjamo na aksiom izbora.

Teorem A.0.2. *(**Hahn-Banachov teorem za normirane prostore**) Neka je X normiran prostor i $Y \leq X$ pravi potprostor od X. Za svaki ograničen linearan funkcional $f_0 \in Y'$ postoji ograničen linearan funkcional $f \in X'$ takav da je $f|_Y = f_0$ i $\|f\| = \|f_0\|$.*

Korolar A.0.3. *Neka je X normiran prostor i $x \in X$. Ako vrijedi $f(x) = 0, \ \forall f \in X'$ onda je $x = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $x \neq 0$. Stavimo $M = \text{span}\{x\}$ i definirajmo

$$f_0 : M \to \mathbb{C}, \ f_0(\lambda x) = \lambda.$$

Očito je $f_0 \in M'$ te $f_0(x) \neq 0$. Prema Hahn-Banachovom teoremu f_0 možemo proširiti do $f \in X'$ te jasno tada vrijedi $f(x) \neq 0$. □

Teorem A.0.4. *(**Banach-Steinhaus princip uniformne ograničenosti**) Neka je X Banachov prostor, Y normiran prostor te neka je $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$. Ako za svaki $x \in X$ vrijedi $\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty$ tada je i $\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty$.*

Korolar A.0.5. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$. Tada je $\sup_{x \in S} \|x\| < \infty$ ako i samo ako za svaki $f \in X'$ vrijedi $\sup_{x \in S} |f(x)| < \infty$.*

Dokaz. Jedan je smjer je očit.

Obratno, neka za svaki $f \in X'$ vrijedi $\sup_{x \in S} |f(x)| < \infty$. To još možemo zapisati kao da za svaki $f \in X'$ vrijedi $\sup_{x \in S} |\hat{x}(f)| < \infty$. Sada možemo primjeniti Banach-Steinhausov princip uniformne ograničenosti na skup $\hat{S} \subseteq X''$. Naime, domena je sad X' što je uvijek Banachov prostor. Slijedi $\sup_{\hat{x} \in \hat{S}} \|\hat{x}\| < \infty$ tj. $\sup_{x \in S} \|x\| < \infty$. □

Teorem A.0.6. ***(Jednotočkovna kompaktifikacija)*** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $Y = X \cup \{\infty\}$ gdje je $\infty \notin X$. Definiramo*

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \cup \{\{\infty\} \cup U : U \in \mathcal{T} \text{ t.d. je } X \setminus U \text{ kompaktan u } (X, \mathcal{T})\}.$$

Tada je $\mathcal{S}$ topologija na Y. Za $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je ***jednotočkovna kompaktifikacija*** *od $(X, \mathcal{T})$. Nadalje, $(Y, \mathcal{S})$ je kompaktan prostor te vrijedi*

$$(Y, \mathcal{S}) \text{ je Hausdorffov} \iff (X, \mathcal{T}) \text{ je LCH prostor.}$$

Također je $(X, \mathcal{T})$ potprostor od $(Y, \mathcal{S})$. Ako je $f \in C(Y, \mathbb{R})$ takva da $f(\infty) = 0$ onda je $f|_X \in C_0(X, \mathbb{R})$.

Teorem A.0.7. ***(Urysohnova lema)*** *Topološki prostor X je normalan ako i samo ako za svaka dva neprazna, disjunktna zatvorena podskupa A i B od X postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$ takva da $f(A) = \{0\}$ i $f(B) = \{1\}$.*

Propozicija A.0.8. *Neka je X LCH prostor. Ako je $K \subseteq U \subseteq X$ gdje je K kompaktan i U otvoren, onda postoji otvoren podskup V od X s kompaktnim zatvaračem takav da vrijedi $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Dokaz. Neka je $X' = X \cup \{\infty\}$ jednotočkovna kompaktifikacija od X. Kako je K kompaktan podskup Hausdorffovog prostora X', on je zatvoren. Zbog normalnost od X' postoji otvoren podskup V od X' takav $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Primijetimo da se zatvarač od V u X' podudara s zatvaračem od V u X pošto je $\overline{V}^{X'} \subseteq X$ i $\overline{V}^{X} = \overline{V}^{X'} \cap X$. Kako je $\overline{V}$ zatvoren u X', on je kompaktan i jer je V otvoren u X' i $V \subseteq X$, V je otvoren u X. Stoga V ima željena svojstva. □

Teorem A.0.9. *Neka je X LCH prostor i K kompaktan podskup od X. Tada postoji neprekidna funkcija kompaktnog nosača, $0 \leq f \leq 1$, takva da $f|_K \equiv 1$.*

Dokaz. Neka je $X' = X \cup \{\infty\}$ jednotočkovna kompaktifikacija od X. Prema prethodnoj propoziciji, postoji otvoren podskup V od X s kompaktnim zatvaračem takav da $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X$. Tada su K i $X' \setminus V$ dva disjunktna, zatvorena podskupa normalnog prostora X'. Urysohnova lema povlači da postoji $g \in C(X')$ takva da $0 \leq g \leq 1$, $g|_K \equiv 1$ i $g|_{X' \setminus K} \equiv 0$. Neka je $f = g|_X$. Tada je $f \in C(X)$, $0 \leq f \leq 1$ i $f|_K \equiv 1$. Nadalje, $\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subseteq \overline{V}$. Slijedi $\mathrm{supp} f \subseteq \overline{V}$ pa je $\mathrm{supp} f$ kompaktan kao zatvoren podskup kompaktnog skupa u Hausdorffovom prostoru. □

Definicija A.0.10. ***Upotpunjenje*** *normiranog prostora X je uređen par (Y, φ) pri čemu je Y Banachov prostor, a $\varphi : X \to Y$ linearna izometrija takva da je $\overline{\mathrm{Im}(\varphi)} = Y$.*

Teorem A.0.11. *Neka je X normiran prostor. Tada postoji upotpunjenje od X. Ako je X unitaran, njegovo upotpunjenje je Hilbertov prostor. Nadalje, ako su (Y_1, φ_1) i (Y_2, φ_2) dva upotpunjenja od X onda postoji jedinstveni izometrički izomorfizam $\psi : Y_1 \to Y_2$ takav da $\psi\varphi_1 = \varphi_2$.*

Teorem A.0.12. ***(Rieszov teorem o reprezentaciji ograničene seskvilinearne forme)*** *Ako je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ograničena seskvilinearna forma onda postoji jedinstven $T \in B(\mathcal{H})$ takav da $F(\xi, \eta) = \langle T\xi, \eta \rangle$, $\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$.*

Teorem A.0.13. ***(Arzelà–Ascoli)*** *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor. Familija neprekidnih funkcija $F \subseteq C(X)$ je relativno kompaktna ako i samo ako je F ekvikontinuirana i po točkama ograničena.*

Teorem A.0.14. ***(Rieszov teorem o projekciji)*** *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i $\mathcal{K} \leq \mathcal{H}$ nenul zatvoren potprostor. Svaki vektor $\xi \in \mathcal{H}$ dopušta jedinstven prikaz u obliku $\xi = \eta + \zeta$ gdje je $\eta \in \mathcal{K}$ i $\zeta \in \mathcal{K}^{\perp}$. Preslikavanje $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definirano s $P\xi = \eta$ je ograničen hermitski linearan operator za kojeg vrijedi $P^2 = P$ i $\|P\| = 1$. Nadalje, $P\xi$ je najbolja aproksimacija od ξ, u smislu norme, vektorima iz $\mathcal{K}$. Operator P zovemo ortogonalni projektor na $\mathcal{K}$.*

Teorem A.0.15. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostore i $P \in B(\mathcal{H})$. Tada je P ortogonalan projektor na neki zatvoren potprostor $\mathcal{K}$ ako i samo ako $P = P^2 = P^*$.*

Dokaz. Jedan smjer je dan Rieszovim teoremom o projekciji, dok za drugi uzmimo $P \in B(\mathcal{H})$ takav da $P = P^2 = P^*$. Neka je $\mathcal{K} = R(P)$. Općenito je $\mathcal{H} = N(P) \oplus \overline{R(P^*)}$, a kako je P hermitski imamo $\mathcal{H} = N(P) \oplus \overline{R(P)}$. Tvrdimo da je $R(P) = N(I - P)$. Naime, vrijedi $(I - P)\xi = 0 \iff P\xi = \xi$, tj. $\xi \in R(P)$. Obratno, ako je $\xi \in R(P)$ uzmimo $\eta \in \mathcal{H}$ takav da $\eta = P\xi$. Tada $P\xi = P^2\eta = P\eta = \xi$ pa je $\xi \in N(I - P)$. Time smo pokazali da je $R(P) = N(I - P)$ pa posebno slijedi da je $R(P)$ zatvoren, tj. imamo rastav $\mathcal{H} = N(P) \oplus R(P)$.

Neka je sada $\xi \in \mathcal{H}$ i uzmimo njegov jedinstveni rastav $\xi = \eta + \zeta$, $\eta \in N(P)$, $\zeta \in R(P)$. Tada je $P\xi = P\zeta = \zeta = P_{\mathcal{K}}\zeta = P_{\mathcal{K}}\xi$, tj. $P = P_{\mathcal{K}}$ gdje smo s $P_{\mathcal{K}}$ označili ortogonalan projektor na zatvoren potprostor $\mathcal{K}$. □

Teorem A.0.16. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora od A. Dakle, svojstveni potprostori su međusobno okomiti i operator je u spomenutoj bazi dijagonalizabilan.*

Bibliografija

[1] W. Arveson, *An Invitation to* C*-*Algebras*, Springer New York, NY, 1976

[2] D. Bakić *Normirani prostori*, PMF-MO, Zagreb, 2022, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/predavanja/np-2122.pdf`

[3] K. R. Davidson, C*-*algebras by Examples*, American Mathmetical Society, Providence, RI, 1996

[4] I. Gogić, *Odabrana poglavlja teorije operatorskih algebri*, PMF-MO, Zagreb, 2016, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilja/OPTOA.pdf`

[5] P. A. Grillet, *Abstract algebra*, Springer New York, NY, 2007

[6] H. Kraljević *Operatorske algebre*, PMF-MO, Zagreb, 2011, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/Op_alg.pdf`

[7] G. J. Murphy C*-*algebras and Operator Theory*, Academic Press, San Diego, CA, 1990

Sažetak

Cilj ovog rada bio je prezentirati osnovnu teoriju C*-algebri s naglaskom na C*-algebre kompaktnih operatora. Nakon što se obrade glavni rezultati teorije Banachovih algebri, započinjemo s promatranjem jedne posebne klase Banachovih algebri, tzv. C*-algebri koje su po definiciji Banachove *-algebre čiji svaki element zadovoljava $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Dokazan je Komutativni Gelfand-Naimarkov teorem koji ukratko kaže da svaku komutativnu C*-algebru možemo realizirati kao algebru neprekidnih funkcija na nekom lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru koje iščezavaju u beskonačnosti. Nakon toga se razvija teorija reprezentacija C*-algebri što kulminira poznatim (nekomutativnim) Gelfand-Naimark teoremom koji kaže da se svaka C*-algebra može realizirati kao zatvorena, samoadjunigrana podalgebra algebre ograničenih operatora na nekom Hilbertovom prostoru. Nakon toga, naglasak je stavljen na analizu C*-algebri kompaktnih operatora, gdje u potpunosti opisujemo reprezentacije C*-algebri kompaktnih operatora te pomoću tog opisa dolazimo do njihovog strukturnog teorema.

Summary

The goal of this thesis was to present the basic theory of C*-algebras with emphasis on C*-algebras of compact operators. After the main results in the theory of Banach algebras are covered, we proceed with the study of so called C*-algebras, which are defined as complete *-algebras whose every element satisfies $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Commutative Gelfand-Naimark theorem is proven which, in short, states that every commutative C*-algebra can be realized as an algebra of continuous functions on some locally compact Hausdorff space which vanish at infinity. Next, we begin with the development of the representation theory of C*-algebras which culminates with the famous (noncommutative) Gelfand-Naimark theorem which states that every C*-algebra can be realized as a closed, self-adjoint, subalgebra of algebra of bounded operators on some Hilbert space. After that, the emphasis is given to the study of C*-algebras of compact operators, where we completely describe the representations of C*-algebras of compact operators and thus we deduce their structural theorem.

Životopis

Rođen sam 27.8.1997. u gradu Kodiak, AK, SAD. Nakon završene OŠ Matko Laginja u Zagrebu, 2012. upisujem zagrebačku XV. gimnaziju. Nakon položene mature 2016. upisujem preddiplomski studij *Matematika* na PMF-MO u Zagrebu. Potom, nakon završenog preddiplomskog studija, nastavljam obrazovanje na istom odsjeku upisivanjem diplomskog studija *Teorijska matematika*.