SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Jurin

HEATH-JARROW-MORTON (HJM) OKVIR

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, studeni 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U odnosu na ročnu strukturu kamatnih stopa, teorija nepostojanja arbitraže ima dvije namjene. Prva je određivanje cijene svih obveznica bez kupona različitih dospijeća preko konačnog broja osnovnih ekonomskih varijabli, tzv. varijabli stanja. Druga je određivanje cijene svih slučajnih zahtjeva osjetljivih na kamatnu stopu uzimajući cijene obveznica bez kupona kao zadane. Ovaj rad predstavlja opću teoriju i objedinjujući okvir za razumijevanje teorije arbitražnog određivanja cijena za sve postojeće modele arbitražnog određivanja cijena koji su specijalni slučajevi ovog modela. U ovom modelu, mi namećemo egzogenu stohastičku strukturu na *forward* kamatne stope, a ne na cijene obveznica bez kupona kao što je napravljeno u Hoovom i Leejevom modelu. Ova promjena perspektive olakšava matematičku analizu i također bi trebala olakšati empirijsku analizu modela. Doista, budući da je cijena obveznice bez kupona fiksni iznos pri dospijeću, njihove se volatilnosti moraju mijenjati tijekom vremena. Nasuprot tome, konstantna volatilnost *forward* kamatne stope je konzistentna s fiksnom vrijednošću obveznice bez kupona pri dospijeću. Model u ovom radu uzima kao zadanu početnu krivulju *forward* kamatne stope. Zatim specificiramo opći stohastički proces u neprekidnom vremenu i pratimo njegovo kretanje. Kako bismo osigurali da model ne dopušta arbitražu, koristimo karakterizaciju uvjeta za proces *forward* kamatne stope da postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Pod ovim uvjetima, tržište je potpuno. Rad je podijeljen u četiri poglavlja. U prvom poglavlju formuliramo temeljne postavke HJM pristupa te iznosimo formulu za kretanje cijene obveznice. U drugom poglavlju tražimo uvjet koji osigurava nepostojanje mogućnosti arbitraže za sve obveznice različitih dospijeća. U trećem poglavlju razmatramo Gaussovski HJM model, model u kojem pretpostavljamo da je volatilnost σ *forward* kamatne stope deterministička. Pokazat ćemo kako tržišne cijene rizika u potpunosti ispadaju iz arbitražnih vrijednosti izvedenica osjetljivih na kamatnu stopu. U četvrtom poglavlju ispitujemo opcije na obveznice bez kupona te iznosimo eksplicitnu formulu za arbitražnu cijenu *call* opcije na dionicu.

Poglavlje 1

Postavke HJM modela

Promatramo vremenski neprekidni model kamatnih stopa s intervalom trgovanja $[0, \tau]$ za $\tau > 0$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, čija je nezavisna varijabla cijela krivulja *forward* kamatne stope. Uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dan nam je i neopadajući niz σ-algebri sadržanih u $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$ za svaki $n \leq m$. Takvu familiju σ-algebri $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in [0, \tau]\}$ zovemo filtracija.

Definicija 1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te $(S, \mathcal{S})$ izmjeriv prostor. Za svaki $t \geq 0$ neka je $X_t : \Omega \to S$ funkcija izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$. Familija $X = (X_t : t \geq 0)$ zove se slučajni proces s neprekidnim vremenom i skupom stanja S.*

Definicija 1.2. *Slučajni zahtjev je slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da je*

$$0 \leq C < \infty \quad \mathbb{P} - g.s.$$

Definicija 1.3. *Slučajni proces $X = (X_t : t \in [0, \tau])$ je adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, \tau])$ ako je za svaki $t \in [0, \tau]$, slučajna varijabla X_t izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$.*

Definicija 1.4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $B = (B_t : t \geq 0)$ *je Brownovo gibanje ako vrijedi:*

(i) Putovi $t \mapsto B_t(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *(za g.s.* $\omega \in \Omega$*).*

(ii) $B_0 = 0$*.*

(iii) Za sve $m \in \mathbb{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ *su prirasti*

$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni.

(iv) Za sve $0 \leq s < t$ *je prirast* $B_t - B_s$ *normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom* $t - s$*.*

Definicija 1.5. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $B = (B_t : t \geq 0)$ *Brownovo gibanje na tom prostoru. Filtracija za Brownovo gibanje je familija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ σ*-algebri koja zadovoljava*

(i) Za sve $0 \leq s < t$*,* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$*, odnosno informacija kasnije ne može biti manja od informacije ranije.*

(ii) (Adaptiranost) Za svaki $t \geq 0$*,* B_t *je* $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva slučajna varijabla.*

(iii) (Nezavisnost budućih prirasta) Za sve $0 \leq s < t$*, prirast* $B_t - B_s$ *nezavisan je od* $\mathcal{F}_s$*.*

Neka je za fiksirano pozitivno vrijeme $\tau > 0$ $B = (B_t : t \in [0, \tau])$ Brownovo gibanje zajedno s Brownovskom filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, \tau])$ te neka je $H = (H_t : t \in [0, \tau])$ adaptiran slučajni proces s obzirom na $\mathbb{F}$.

Definicija 1.6. *Adaptiran slučajni proces* $H = (H_t : t \in [0, \tau])$ *zove se jednostavan proces ako je*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1})}(t), \tag{1.1}$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = \tau\}$ *intervala* $[0, \tau]$ *i omeđene slučajne varijable* ϕ_j*,* $j = 0, 1, ..., n-1$*, takve da je* ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$*-izmjeriva. S* $\mathcal{E}_\tau$ *označimo familiju svih adaptiranih jednostavnih slučajnih procesa na* $[0, \tau]$*.*

Definicija 1.7. *Za slučajni proces* $H \in \mathcal{E}_\tau$ *definiran s* (1.1) *definiramo slučajni proces* $I = (I_t : t \in [0, \tau])$ *s*

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j \left(B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t} \right). \tag{1.2}$$

Proces I zovemo Itôv integral jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B i označavamo ga s

$$I_t = \int_0^t H_s dB_s = (H \cdot B)_t \,. \tag{1.3}$$

Sada je cilj proširiti definiciju Itôvog integrala tako da definicija bude konzistentna. Za prostor općih integranada uzimamo familiju $\mathbb{F}$-adaptiranih slučajnih procesa $H = (H_t : t \in [0, \tau])$ koji zadovoljavaju sljedeći tehnički uvjet:

$$\mathbf{E} \int_0^\tau H_t^2 dt < \infty. \tag{1.4}$$

Ovu familiju procesa označavamo s $\mathcal{L}^2_{ad}$. $\mathcal{L}^2_{ad}$ je vektorski prostor sa skalarnim produktom

$$\langle H, K \rangle_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \mathbf{E}\left[\int_0^\tau H_t K_t dt\right], \quad H, K \in \mathcal{L}^2_{ad}.$$

Iduća lema govori nam kako proces $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ možemo aproksimirati nizom jednostavnih procesa $H^{(n)} \in \mathcal{E}_\tau$ i navodimo ju bez dokaza.

Lema 1.8. *Za slučajni proces $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ postoji niz $\left(H^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_\tau$ jednostavnih procesa takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} \|H^{(n)} - H\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \int_0^\tau |H_t^{(n)} - H_t|^2 dt = 0, \tag{1.5}$$

odnosno $H^{(n)} \stackrel{\mathcal{L}^2_{ad}}{\longrightarrow} H$, $n \to \infty$.

Definicija 1.9. *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ pridružena filtracija. Itôv proces je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds, \tag{1.6}$$

gdje je $X_0 \in \mathbb{R}$, a $H = (H_t : t \geq 0)$ i $V = (V_t : t \geq 0)$ su adaptirani proces td. $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i $\int_0^t |V_s| ds < \infty$ g.s. za sve $t \geq 0$.

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza. Za skicu dokaza pogledati [5, Teorem 2.21].

Teorem 1.10. *(Itôva formula za Itôv proces)*
Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ *Itôv proces dan formulom* (1.6) *i neka je* $f(t,x)$ *funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama* $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ *i* $f_{xx}(t,x)$. *Tada za svaki* $\tau > 0$,

$$\begin{aligned} f(\tau, X_\tau) &= f(0, X_0) + \int_0^\tau f_t(t, X_t)\,dt + \int_0^\tau f_x(t, X_t)\,dX_t \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\tau f_{xx}(t, X_t)\,d\langle X\rangle_t \\ &= f(0, X_0) + \int_0^\tau f_t(t, X_t)\,dt + \int_0^\tau f_x(t, X_t)\,H_t dB_t \\ &+ \int_0^\tau f_x(t, X_t)\,V_t dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau f_{xx}(t, X_t)\,H_t^2 dt \end{aligned}$$

Napomena 1.11. *Itôva formula jednostavnije se pamti u diferencijalnom obliku:*

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)\,dt + f_x(t, X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\,dX_t \cdot dX_t \tag{1.7}$$

Pristup Heatha, Jarrowa i Mortona modeliranju ročne strukture temelji se na egzogenoj specifikaciji promjene trenutnih neprekidnih *forward* kamatnih stopa $f(t,T)$. Za svako fiksno dospijeće $T \leq \tau$, promjena *forward* kamatne stope $f(t,T)$ dana je izrazom

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t, \tag{1.8}$$

gdje su α i σ adaptirani stohastički procesi s vrijednostima u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^d$ redom, a W je d-dimenzionalno standardno Brownovo gibanje s obzirom na temeljnu vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}$. Filtracija $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$ je po pretpostavci neprekidna zdesna i potpuna verzija prirodne filtracije od W.
Za svako fiksirano dospijeće T, početno stanje $f(0,T)$ određeno je pomoću trenutne vrijednosti neprekidne *forward* kamatne stope za budući trenutak T koji prevladava u trenutku 0.
Cijena obveznice bez kupona koja dospijeva u trenutku $T \leq \tau$, $B(t,T)$, može se izračunati korištenjem formule

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right), \quad \forall t \in [0,T], \tag{1.9}$$

pod uvjetom da integral s desne strane izraza (1.9) postoji $\mathbb{P}$-g.s.
Pretpostavljamo da se trguje u neprekidnom vremenu u intervalu $[0,\tau]$ za neko fiksirano vrijeme τ. U poziciji smo formulirati temeljne postavke HJM pristupa.

(HJM.1) Za svaki fiksirani $T \leq \tau$, promjena trenutačne *forward* kamatne stope $f(t,T)$ dana je izrazom

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(u,T)\,du + \int_0^t \sigma(u,T)\,dW_u, \quad \forall t \in (0,T], \tag{1.10}$$

za Borel-izmjerivu funkciju $f(0,\cdot) : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ i funkcije $\alpha : C\times\Omega \to \mathbb{R}$ i $\sigma : C\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ gdje je $C = \{(u,t) \mid \ 0 \leq u \leq t \leq \tau\}$.

Obično se koristi diferencijalni oblik od (1.10):

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t$$

(HJM.2) Za svako dospijeće T, $\alpha(\cdot,T)$ i $\sigma(\cdot,T)$ su adaptirani procesi takvi da vrijedi

$$\int_0^T |\alpha(u,T)|du + \int_0^T |\sigma(u,T)|^2 du < \infty, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Koeficijente α i σ možemo predstaviti kao funkcije *forward* kamatne stope, tako da

$$\alpha(u,T) = \alpha(u,T,f(t,T)), \quad \sigma(u,T) = \sigma(u,T,f(t,T))$$

Uvest ćemo i pojam štednog računa B_t, $t \in [0,\tau]$.
Za ovu svrhu, pretpostavimo da postoji izmjeriva verzija procesa $f(t,t)$, $t \in [0,\tau]$. Tada je prirodno zahtijevati da kratkoročna kamatna stopa zadovoljava $r_t = f(t,t)$ za svaki t.
Posljedično, štedni račun je jednak

$$B_t = \exp\left(\int_0^t f(u,u)\,du\right), \quad \forall t \in [0,\tau].$$

Sljedeća pomoćna lema bavi se promjenom procesa cijene obveznice, $B(t,T)$, s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}$. Uočimo da koeficijenti drifta i volatilnosti u promjeni procesa $B(t,T)$ se mogu izraziti pomoću koeficijenata α i σ, promjene *forward* kamatne stope i kratkoročne kamatne stope $f(t,t)$.

Prije nego iskažemo i dokažemo lemu, navest ćemo Fubinijev teorem i Fubinijev stohastički teorem koji se koriste u dokazu leme.

Teorem 1.12. *(Fubini)*
Neka je $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Pretpostavimo da je funkcija s $[c,d]$ u $\mathbb{R}$ dana s $y \mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[c,d]$ za svaki (fiksirani) $x \in [a,b]$. Tada je funkcija $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dana s

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

integrabilna na $[a,b]$, *i vrijedi*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Analogno,ako pretpostavimo da je funkcija s $[a,b]$ *u* $\mathbb{R}$ *dana sa* $x \mapsto f(x,y)$ *integrabilna na* $[a,b]$ *za svaki (fiksirani)* $y \in [c,d]$, *tada je funkcija* $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ *dana s*

$$h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

integrabilna na $[c,d]$, *i vrijedi*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_c^d h(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Definicija 1.13. *Neka je H Hilbertov prostor. Prostor* $L_2^0(H)$ *zovemo prostorom Hilbert-Schmidtovih operatora s H u H, odnosno prostor omeđenih linearnih operatora* $\Phi : H \to H$ *t.d. je*

$$\|\Phi\|^2_{L_2^0(H)} := \sum_{j\in\mathbb{N}} \|\Phi^j\|_H^2 < \infty, \tag{1.11}$$

gdje je $\Phi^j = \Phi\left(g_j\right)$, *a* $\{g_j : j \in \mathbb{N}\}$ *standardna ortonormirana baza u H.*

Teorem 1.14. *(Fubinijev stohastički teorem)*
Neka je $(E,\mathcal{E})$ *izmjeriv prostor, neka je* $\Phi : (t,\omega,x) \to \Phi_t(\omega,x)$ *izmjerivo preslikavanje sa* $\left(\mathbb{R}_+ \times \Omega \times E, \mathcal{P} \bigotimes \mathcal{E}\right)$ *u* $\left(L_2^0(H), \mathcal{B}\left(L_2^0(H)\right)\right)$ *i neka je* μ *konačna pozitivna mjera na E. Pretpostavimo da*

$$\int_E \int_0^T \|\Phi_t(x)\|^2_{L_2^0(H)} dt\mu(dx) < \infty \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Tada postoji $\mathcal{F}_T \bigotimes \mathcal{E}$ *izmjeriva verzija* $\xi(\omega,x)$ *stohastičkog integrala* $\int_0^T \Phi_t(x)\,dW_t$ *koja je* μ*-integrabilna* $\mathbb{P}$*-g.s. takva da*

$$\int_E \xi(x)\,\mu(dx) = \int_0^T \left(\int_E \Phi_t(x)\,\mu(dx)\right) dW_t, \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Lema 1.15. *Promjena cijene obveznice* $B(t,T)$ *određena je izrazom*

$$dB(t,T) = B(t,T)\left(a(t,T)\,dt + b(t,T)\,dW_t\right), \tag{1.12}$$

gdje su a i b zadani sljedećim formulama

$$a(t,T) = f(t,t) - \alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}|\sigma^*(t,T)|^2, \quad b(t,T) = -\sigma^*(t,T), \tag{1.13}$$

pri čemu je

$$\alpha^*(t,T) = \int_t^T \alpha(t,u)\,du, \quad \sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)\,du. \tag{1.14}$$

Dokaz. Označimo $I_t = \ln B(t,T)$. Prema formulama (1.9) i (1.10) imamo

$$I_t = -\int_t^T f(0,u)\,du - \int_t^T \int_0^t \alpha(v,u)\,dvdu - \int_t^T \int_0^t \sigma(v,u)\,dW_v du.$$

Primjenom Fubinijevog standardnog i Fubinijevog stohastičkog teorema, dobivamo da vrijedi sljedeće:

$$I_t = -\int_t^T f(0,u)\,du - \int_0^t \int_t^T \alpha(v,u)\,dudv - \int_0^t \int_t^T \sigma(v,u)\,dudW_v$$

ili ekvivalentno

$$\begin{aligned} I_t = &-\int_0^T f(0,u)\,du - \int_0^t \int_v^T \alpha(v,u)\,dudv - \int_0^t \int_v^T \sigma(v,u)\,dudW_v \\ &+ \int_0^t f(0,u)\,du + \int_0^t \int_v^t \alpha(v,u)\,dudv + \int_0^t \int_v^t \sigma(v,u)\,dudW_v \end{aligned}$$

Posljedično,

$$I_t = I_0 + \int_0^t r_u du - \int_0^t \int_u^T \alpha(u,v)\,dvdu - \int_0^t \int_u^T \sigma(u,v)\,dvdW_u,$$

gdje smo koristili

$$r_u = f(u,u) = f(0,u) + \int_0^u \alpha(v,u)\,dv + \int_0^u \sigma(v,u)\,dW_v. \tag{1.15}$$

Korištenjem jednadžbi (1.14), dobivamo

$$I_t = I_0 + \int_0^t r_u du - \int_0^t \alpha^*(u,T)\,du - \int_0^t \sigma^*(u,T)\,dW_u. \tag{1.16}$$

Kako bismo provjerili da (1.12) vrijedi, dovoljno je primijeniti Itôvu formulu. □

Poglavlje 2

Odsustvo arbitraže

Definicija 2.1. *Portfelj ili strategija je* $\mathbb{F}$*-adaptirani slučajni proces* $\phi = \left(\left(\phi_t^0, \phi_t^1\right) : t \in [0, \tau]\right)$, *gdje je* ϕ_t^0 *količina novca (ili obveznica) u trenutku t, a* ϕ_t^1 *je količina dionica u trenutku t.*

Definicija 2.2. *Vrijednost portfelja u trenutku t dana je s*

$$V_t^\phi = \phi_t^0 R_t + \phi_t^1 S_t,$$

gdje je $R_t = e^{U_t}$, $U_t = \int_0^t r_s ds$, *a* $S = (S_t : t \in [0, \tau])$ *je* $\mathbb{F}$*-adaptirani slučajni proces koji predstavlja vrijednost dionice u trenutku t.*

Napomena 2.3. *(i) S* $\widetilde{V}^\phi$ *označavamo proces diskontiranih vrijednosti portfelja* ϕ*, odnosno*

$$\widetilde{V}^\phi = D_t V_t^\phi,$$

gdje je $D_t = e^{-\int_0^t r_s ds}$ *slučajni proces koji nazivamo proces diskontiranja.*
(ii) Diskontiranu vrijednost dionice označavat ćemo s $\tilde{S} = \left(\tilde{S}_t : t \in [0, \tau]\right)$*, gdje je* $\tilde{S}_t = D_t S_t$.

Definicija 2.4. *Kažemo da je portfelj* $\phi = \left(\left(\phi_t^0, \phi_t^1\right) : t \in [0, \tau]\right)$ *samofinancirajući ako je*

$$\int_0^\tau |\phi_t^0| dt + \int_0^\tau |\phi_t^1|^2 dt < \infty \quad \mathbb{P}\text{-g.s.} \tag{2.1}$$

te za sve $t \in [0, \tau]$

$$V_t^\phi = V_0^\phi + \int_0^t \phi_s^0 dR_s + \int_0^t \phi_s^1 dS_s \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Navest ćemo i jednu karakterizaciju samofinancirajućeg portfelja.

Propozicija 2.5. *Neka je ϕ adaptirani slučajni proces za koji vrijedi* (2.1). *Tada je ϕ samofinancirajući portfelj ako i samo ako je za svaki $t \in [0, \tau]$*

$$d\widetilde{V}_t^{\phi} = \phi_t^1 d\tilde{S}_t \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

Dokaz. Podsjetimo se prvo stohastičke diferencijalne jednadžbe za $\tilde{S}_t$. Korištenjem Itôve formule za produkt dobijemo

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= d\left(D_t S_t\right) = dD_t dS_t + D_t dS_t + dD_t dS_t \\ &= -r_t D_t S_t dt + D_t dS_t. \end{aligned}$$

Odredimo sada stohastičku diferencijalnu jednadžbu za $\widetilde{V}^{\phi} = \left(\widetilde{V}_t^{\phi} : t \in [0, \tau]\right)$,

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t^{\phi} &= d\left(D_t V_t^{\phi}\right) = dD_t V_t^{\phi} + D_t dV_t^{\phi} + dD_t \cdot dV_t^{\phi} \\ &= -r_t D_t \left(\phi_t^{\phi} R_t + \phi_t^1 S_t\right) dt + D_t dV_t^{\phi} + 0 \\ &= -r_t \phi_t^0 dt + \phi_t^1 d\tilde{S}_t - D_t \phi_t^1 dS_t + D_t dV_t^{\phi} \\ &= \phi_t^1 d\tilde{S}_t + D_t \left(dV_t^{\phi} - \phi_t^0 dR_t - \phi_t^1 dS_t\right), \end{aligned}$$

gdje smo u trećem redu koristili da je $D_t R_t = 1$. Slijedi

$$d\widetilde{V}_t^{\phi} = \phi_t^1 d\tilde{S}_t \iff dV_t^{\phi} = \phi_t^0 dR_t + \phi_t^1 dS_t.$$

□

Želimo odrediti samofinancirajuću strategiju ϕ takvu da $V_\tau^{\phi} = C$ i $V_t^{\phi} \geq 0 \quad \mathbb{P}$-g.s. Ako takav portfelj postoji, kažemo da je slučajni zahtjev C dostižan.

Definicija 2.6. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.*

Definicija 2.7. *Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F}_\tau)$ je ekvivalentna martingalna mjera za $\mathbb{P}$ ako je $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_\tau}$ i $\tilde{S} = \left(\tilde{S}_t : t \in [0, \tau]\right)$ je P^*-martingal.*

Teorem 2.8. *(2. fundamentalni teorem određivanja cijena). Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Tada je tržište potpuno ako i samo ako postoji jedinstvena martingalna mjera za $\mathbb{P}$.*

U sadašnjem okruženju, beskonačno mnogo obveznica s različitim rokovima dospijeća dostupno je za trgovanje. Pretpostavit ćemo, međutim, da svaki određeni portfelj uključuje ulaganja u proizvoljan, ali konačan, broj obveznica.
Za svaku kolekciju dospijeća $0 < T_1 < T_2 < ... < T_k = \tau$, s $\mathcal{T}$ označavamo vektor $(T_1, ..., T_k)$.

Zgodno je proširiti k-dimenzionalni proces $B(\cdot,\mathcal{T}) = (B(\cdot,T_1),...,B(\cdot,T_k))$ na vremenski interval $[0,\tau]$ postavljanjem $B(t,T) = 0$ za svaki $t \in (T,\tau]$ i svako dospijeće $0 < T < \tau$.
Pod strategijom trgovanja obveznicama podrazumijevamo par $(\phi,\mathcal{T})$, gdje je ϕ predvidiv k-dimenzionalni stohastički proces za kojeg vrijedi $\phi^i_t = 0$ za svaki $t \in (T_i,\tau]$ i svaki $i = 1,...,k$.
Za strategiju trgovanja obveznicama kažemo da je samofinancirajuća ako vrijednost portfelja $V(\phi)$, koja je jednaka

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot B(t,\mathcal{T}) = \sum_{i=1}^{k} \phi^i_t B(t,T_i)$$

zadovoljava

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u dB(u,\mathcal{T}) = V_0(\phi) + \sum_{i=1}^{k} \int_0^t \phi^i_u dB(u,T_i),$$

za svaki $t \in [0,\tau]$.

Definicija 2.9. *Samofinancirajući portfelj ϕ je arbitraža ako je*

$$V^\phi_0 = 0, V^\phi_t \geq 0, \mathbb{P}\text{-}g.s.\ za\ sve\ t \in [0,\tau]\ \ i\ \mathbb{P}\left(T^\phi_\tau > 0\right) > 0.$$

Iduću propoziciju iskazujemo i dokazujemo te je ona ujedno i dokaz jedne implikacije teorema kojeg navodimo bez dokaza nakon nje.

Propozicija 2.10. *Ako na $(\Omega,\mathcal{F}_\tau)$ postoji ekvivalentna martingalna mjera P^*, tada tržište ne dopušta arbitražu.*

Dokaz. Neka je ϕ samofinancirajući portfelj takav da je $V^\phi_t \geq 0$ $\mathbb{P}$-g.s. za sve $t \in [0,\tau]$ i $P\left(V^\phi_\tau > 0\right) > 0$. Kako je P^* ekvivalentna s P, slijedi da je za sve $t \in [0,\tau]$,

$$P^*\left(V^\phi_t \geq 0\right) = 1 \text{ i } P^*\left(V^\phi_\tau > 0\right) > 0. \tag{2.2}$$

Po propoziciji 2.5 slijedi da je $\tilde{V}^\phi_t$ Itôv integral u odnosu na $\tilde{S}_t$,

$$d\tilde{V}^\phi_t = \phi^1_t d\tilde{S}_t.$$

Kako je $\tilde{S}$ $\mathbb{P}^*$-martingal, slijedi da je i $\tilde{V}^\phi$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Stoga je

$$V^\phi_0 = \tilde{V}^\phi_0 = \mathbf{E}^*\left[\tilde{V}^\phi_\tau\right] > 0$$

pa ϕ nije arbitraža. Time smo pokazali da tržište ne dopušta arbitraže. □

Teorem 2.11. *(1. fundamentalni teorem određivanja cijene imovine). Tržište ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Iskazat ćemo još i Girsanovljev teorem jer će nam biti potreban za narednu diskusiju.

Teorem 2.12. *(Girsanovljev teorem). Neka je $B = (B_t : 0 \leq t \leq \tau)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq \tau)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Za adaptirani slučajni proces $\Theta = (\Theta_t : 0 \leq t \leq \tau)$ takav da je*

$$\mathbf{E}\left[\int_0^\tau \Theta_s^2 \, ds\right] < \infty,$$

definiramo

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \Theta_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2 \, du\right\}, \quad Z = Z_\tau$$

$$B_t^* = B_t + \int_0^t \Theta_u \, du.$$

Ako vrijedi

$$\mathbf{E}\int_0^\tau \Theta_u^2 Z_u^2 du < \infty,$$

tada je slučajni proces $B^* = \left(B_t^* : 0 \leq t \leq \tau\right)$ Brownovo gibanje obzirom na vjerojatnost P^* definiranu formulom

$$P^*(A) = \int_A Z(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbf{E}[1_A Z], \quad A \in \mathcal{F},$$

gdje je Z nenegativna slučajna varijabla takva da je $\mathbf{E}Z = 1$.

Kako bismo osigurali da je model tržišta obveznicama bez arbitraže, moramo ispitati postojanje martingalne mjere.
Pretpostavimo, jednostavnosti radi, da je koeficijent σ u (1.10) ograničen. Tražimo uvjet koji osigurava nepostojanje mogućnosti arbitraže za sve obveznice različitih dospijeća.
Uvedimo pomoćni proces F_B definiran formulom:

$$F_B(t, T, \tau) = \frac{B(t, T)}{B(t, \tau)}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Korištenjem izraza (1.12) dobivamo sljedeće:

$$dF_B(t, T, \tau) = F_B(t, T, \tau)\left(\tilde{a}(t, T)\, dt + \left(b(t, T) - b(t, \tau)\right) dW_t\right), \tag{2.3}$$

gdje je za svaki $t \in [0, T]$

$$\tilde{a}(t, T) = a(t, T) - a(t, \tau) - b(t, \tau) \cdot \left(b(t, T) - b(t, \tau)\right).$$

Definicija 2.13. *Funkcija $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ zove se vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ ako vrijedi $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ za sve $n \geq 0$.*
Za slučajni proces $X = (X_n)_{n\geq 0}$ možemo definirati i proces zaustavljen u vremenu T, $X^T = \left(X_n^T\right)_{n\geq 0}$ kao

$$X_n^T = X_{n\wedge T} = X_n 1_{\{n<T\}} + X_T 1_{\{n\geq T\}}.$$

Definicija 2.14. *Za slučajni proces kažemo da je càdlàg ako g.s. ima puteve koji su neprekidni zdesna i imaju limese slijeva.*

Definicija 2.15. *Funkcija $f : [0,t] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna zdesna je funkcija ograničene varijacije ako je*

$$V_f^1(t) = \sup \sum_{j=1}^{k} |f\left(t_j\right) - f\left(t_{j-1}\right)| < \infty,$$

gdje se supremum uzima po svim $k \in \mathbb{N}$ i svim particijama

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{k-1} \leq t_k = t$$

segmenta $[0,t]$. Ako je gornji supremum beskonačan, kažemo da je f funkcija neograničene varijacije.

Definicija 2.16. *Neka je $A = (A_t)_{t\geq 0}$ càdlàg proces. Kažemo da je A proces konačne varijacije ako su putevi od A g.s. ograničene varijacije na svakom kompaktnom podskupu od $\mathbb{R}_+$.*

Definicija 2.17. *Adaptirani, càdlàg proces X je lokalni martingal ako postoji niz vremena zaustavljanja $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ *g.s. raste, tj.* $\mathbb{P}(T_n < T_{n+1}) = 1$ *za svaki* $n \geq 0$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ *g.s.,*

(iii) zaustavljeni proces $X^{T_n} = (X_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ *je martingal (s obzirom na filtraciju* $\left(\mathcal{F}_{t\wedge T_n}\right)_{t\geq 0}$*) za svaki* $n \geq 0$.

Definicija 2.18. *Neka je $(X_t)_{t\geq 0}$ slučajni proces adaptiran s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. $(X_t)_{t\geq 0}$ je semimartingal ako ga možemo rastaviti kao*

$$X_t = M_t + A_t, \text{ za svaki } t \geq 0,$$

gdje je $(M_t)_{t\geq 0}$ lokalni martingal, a $(A_t)_{t\geq 0}$ je proces konačne varijacije.

Definicija 2.19. *Difuzijski proces rješenje je stohastičke diferencijalne jednadžbe vođene Brownovim gibanjem. To je neprekidni Markovljev proces s g.s. neprekidnim putovima.*

Razmotrimo realni semimartingal U, definiran na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s $U_0 = U_{0-} = 0$. Označavamo s $\mathcal{E}(U)$ *Doléans-Dade* eksponencijal od U; odnosno jedinstveno rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$d\mathcal{E}_t(U) = \mathcal{E}_{t-}(U)\ dU_t, \tag{2.4}$$

s $\mathcal{E}_0(U) = 1$. Definirajmo kvadratnu varijaciju od U postavljanjem

$$[U]_t = U_t^2 - 2\int_0^t U_{u-}\ dU_u, \forall t \in [0, \tau].$$

Rješenje jednadžbe (2.4) dano je pomoću

$$\mathcal{E}_t(U) = \exp\left(U_t - \frac{1}{2}[U]_t^c\right)\prod_{u\leq t}(1 + \Delta_u U)\exp(-\Delta_u U),$$

gdje je $\Delta_u U = U_u - U_{u-}$ i $[U]^c$ je po dijelovima neprekidni dio od $[U]$.
Pretpostavimo da

$$\Delta_t U > -1 \text{ i } \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathcal{E}_\tau(U)) = 1.$$

Tada je $\mathcal{E}(U)$ strogo pozitivan, uniformno integrabilan martingal s obzirom na $\mathbb{P}$.
Znamo da svaka vjerojatnosna mjera $\hat{\mathbb{P}}$ ekvivalentna vjerojatnosnoj mjeri $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathcal{F}_\tau)$ zadovoljava

$$\frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_\tau\left(\int_0^\cdot h_u dW_u\right) = \exp\left(\int_0^\tau h_u \cdot dW_u - \frac{1}{2}\int_0^\tau |h_u|^2 du\right), \quad \mathbb{P}\text{-g.s.} \tag{2.5}$$

za neki predvidivi d-dimenzionalni slučajni proces $h = (h_t : t \in (0, \tau))$. Za više detalja vidi [1, §8.2].
Fiksirajmo dospijeće T. Lako vidimo iz Girsanovljevog teorema i (2.3) da je $F_B(t, T, \tau)$ martingal s obzirom na mjeru $\widehat{\mathbb{P}}$, pod uvjetom da za svaki $t \in [0, T]$ vrijedi

$$a(t, T) - a(t, \tau) = (b(t, \tau) - h_t) \cdot (b(t, T) - b(t, \tau)). \tag{2.6}$$

Kako bi se isključile mogućnosti arbitraže između svih obveznica s različitim rokovima dospijeća, dovoljno je pretpostaviti da se martingalna mjera $\widehat{\mathbb{P}}$ može izabrati istovremeno za sve rokove dospijeća. Sljedeća dva uvjeta su stoga dovoljni uvjeti za nepostojanje arbitraže za sve obveznice. U nastavku ćemo pokazati i da su ta dva dovoljna uvjeta ekvivalentna. Kao i obično, ograničavamo pozornost na klasu prihvatljivih strategija trgovanja.

Uvjet (M.1) Postoji d-dimenzionalni adaptirani proces $h = (h_t : t \in (0, \tau))$ takav da je

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left\{\mathcal{E}_\tau\left(\int_0^{\cdot} h_u \cdot dW_u\right)\right\} = 1.$$

Nadalje, za svaki $T \leq \tau$ zadovoljena je jednakost (2.4), što se primjenom (1.13) svodi na

$$\int_T^\tau \alpha(t, u)\, du + \frac{1}{2}\left|\int_T^\tau \sigma(t, u)\, du\right|^2 + h_t \cdot \int_T^\tau \sigma(t, u)\, du = 0, \text{ za svaki } t \leq T \leq \tau.$$

Parcijalnim deriviranjem po T, dobivamo

$$\alpha(t, T) + \sigma(t, T) \cdot \left(h_t + \int_T^\tau \sigma(t, u)\, du\right) = 0, \tag{2.7}$$

za svaki $0 \leq t \leq T \leq \tau$.
Za svaki proces h koji zadovoljava uvjet (M.1), vjerojatnosna mjera $\widehat{\mathbb{P}}$ dana izrazom (2.3) će se kasnije interpretirati kao *forward* martingalna mjera za vrijeme τ.
Navodimo i sljedeći uvjet nepostojanja arbitraže.

Uvjet (M.2) Postoji adaptirani d-dimenzionalni proces $\lambda = (\lambda_t : t \in (0, \tau])$ takav da

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left\{\mathcal{E}_\tau\left(\int_0^{\cdot} \lambda_u dW_u\right)\right\} = 1$$

i, za svako dospijeće $T \leq \tau$, imamo

$$\alpha^*(t, T) = \frac{1}{2}|\sigma^*(t, T)|^2 - \sigma^*(t, T) \cdot \lambda_t, \quad \forall t \leq T.$$

Diferenciranje posljednje jednakosti s obzirom na T daje jednakost

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)\left(\sigma^*(t, T) - \lambda_t\right), \quad \forall t \in [0, T], \tag{2.8}$$

koja vrijedi za sve $T \leq \tau$.
Vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$ koja zadovoljava

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_\tau\left(\int_0^{\cdot} \lambda_u dW_u\right) \quad \mathbb{P}\text{-g.s.}$$

za neki proces λ koji zadovoljava uvjet (M.2) zovemo *spot* martingalna mjera za HJM model i, u ovom kontekstu, proces λ povezan je s premijom za rizik.
Definirajmo $\mathbb{P}^*$-Brownovo gibanje W^* s

$$W_t^* = W_t - \int_0^t \lambda_u du, \quad \forall t \in [0, T].$$

Sljedeći rezultat iz [1, §11.2.1] bavi se dinamikom cijena obveznica i kamatnih stopa s obzirom na *spot* martingalnu mjeru.

Korolar 2.20. *Za svako fiksirano dospijeće $T \leq \tau$, dinamika cijene obveznice $B(t,T)$ s obzirom na martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ dana je pomoću*

$$dB(t,T) = B(t,T)\left(r_t dt - \sigma^*(t,T) \cdot dW_t^*\right), \tag{2.9}$$

a forward kamatna stopa zadovoljava

$$df(t,T) = \sigma(t,T) \cdot \sigma^*(t,T)\, dt + \sigma(t,T) \cdot dW_t^*. \tag{2.10}$$

Konačno, kratkoročna kamatna stopa $r_t = f(t,t)$ dana je izrazom

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma(u,t) \cdot \sigma^*(u,t)\, du + \int_0^t \sigma(u,t)\, dW_u^*, \tag{2.11}$$

što slijedi kombiniranjem izraza

$$r_u = f(u,u) = f(0,u) + \int_0^u \alpha(v,u)\ dv + \int_0^u \sigma(v,u) \cdot dW_v$$

i

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\left(\sigma^*(t,T) - \lambda_t\right), \quad \forall t \in [0,T]$$

i uz pretpostavku da je volatilnost cijene obveznice $B(t,T)$ deterministička dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija s obzirom na dan dospijeća T.

Iz (2.10) slijedi da očekivanje buduće kratkoročne kamatne stope s obzirom na *spot* martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ nije jednako trenutnoj vrijednosti trenutačne *forward* kamatne stope $f(0,T)$; to jest, općenito vrijedi $f(0,T) \neq \mathbf{E}_{\mathbb{P}^*}(r_t)$.
Uskoro ćemo vidjeti da je $f(0,T)$ jednako očekivanju od r_t s obzirom na *forward* martingalnu mjeru za vrijeme T.
Korištenjem (2.7), dobivamo da relativna cijena obveznice $Z^*(t,T) = \frac{B(t,T)}{B_t}$ zadovoljava

$$dZ^*(t,T) = -Z^*(t,T)\,\sigma^*(t,T) \cdot dW_t^*, \tag{2.12}$$

gdje smo s B_t označili vrijednost štednog računa definiranog na str.6. Korištenjem relacije $Z^*(t,T) = \frac{B(t,T)}{B_t}$ i (2.12), dobivamo sljedeće:

$$Z^*(t,T) = B(0,T)\exp\left(-\int_0^t \sigma^*(u,T)\, dW_u^* - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma^*(u,T)|^2 du\right)$$

ili ekvivalentno

$$\ln B(t,T) = \ln B(0,T) + \int_0^t \left(r_u - \frac{1}{2}|\sigma^*(u,T)|^2\right) du - \int_0^t \sigma^*(u,T)\, dW_u^*.$$

Napomena 2.21. *Moguće je ići i obrnutim putem, odnosno, pretpostaviti apriori da je dinamika od* $B(t,T)$ *s obzirom na martingalnu mjeru* $\mathbb{P}^*$ *dana pomoću*

$$dB(t,T) = B(t,T)\left(r_t dt + b(t,T)\, dW_t^*\right),$$

gdje je $r = (r_t : t \in [0,\tau])$ *proces kratkoročne stope, a koeficijent volatilnosti* b *je diferencijabilan s obzirom na dospijeće* T*.*
Tada vrijedi

$$\ln B(t,T) = \ln B(0,T) + \int_0^t \left(r_u - \frac{1}{2}|b(u,T)|^2\right) du + \int_0^t b(u,T)\, dW_u^*.$$

Objasnit ćemo vezu između $\ln B(t,T)$ *i* $f(t,T)$*. Korištenjem* (2.9) *i* (1.14) *imamo sljedeće:*

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + b(t,T)\, dW_t^* = a(t,T)\, dt + b(t,T)\, dW_t^*. \tag{2.13}$$

Nadalje, korištenjem (1.13), (1.14) *i* (2.13) *možemo izvesti sljedeće:*

$$a(t,T) = r_t$$
$$a(t,T) = f(t,t) - \int_t^T \alpha(t,u)\, du + \frac{1}{2}|b(t,T)|^2.$$

Izjednačavanjem desnih strana jednadžbi dobijemo

$$r_t = f(t,t) - \int_t^T \alpha(t,u)\, du + \frac{1}{2}|b(t,T)|^2,$$

a budući da je $r_t = f(t,t)$*, zaključujemo da vrijedi*

$$\int_t^T \alpha(t,T) = \frac{1}{2}|b(t,T)|^2.$$

Deriviranjem po T*, dobijemo*

$$\alpha(t,T) = \frac{1}{2}\frac{\partial k}{\partial T},$$

gdje je $k(t,T) = |b(t,T)|^2$*. Nadalje, deriviranjem druge jednadžbe iz* (1.14) *po* T *te korištenjem druge jednadžbe iz* (1.13)*, dobivamo da vrijedi sljedeća jednakost:*

$$\sigma(t,T) = -\frac{\partial b}{\partial T}(t,T).$$

Konačno, dobivamo da je dinamika forward kamatne stope s obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$ *jednaka*

$$f(t,T) = f(0,T) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial k(u,T)}{\partial T} du + \int_0^t \frac{\partial b(u,T)}{\partial T} dW_u^* \tag{2.14}$$

Lema 2.22. *Uz određene tehničke pretpostavke, uvjeti (M.*1*) i (M.*2*) su ekvivalentni.*

Dokaz. Skicirat ćemo dokaz. Pretpostavimo da vrijedi uvjet (M.1). Definirajmo proces λ kao

$$\lambda_t = h_t - b(t,\tau) = h_t + \int_t^\tau \sigma(t,u)\,du, \quad \forall t \in [0,\tau],$$

i provjerimo da je za takav proces uvjet (2.6) zadovoljen. Doista, za desnu stranu izraza (2.6), dobivamo

$$\sigma(t,T)\cdot(\sigma^*(t,T)-\lambda_t) = -\sigma(t,T)\cdot\left(h_t + \int_T^\tau \sigma(t,u)\,du\right) = \alpha(t,T),$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (2.5).
Obratno, za dani proces λ koji zadovoljava (2.6), definiramo proces h kao

$$h_t = \lambda_t + b(t,\tau), \quad \forall t \in [0,\tau].$$

Tada proces h zadovoljava izraz (2.5), budući da vrijedi

$$\sigma(t,T)\cdot\left(h_t + \int_T^\tau \sigma(t,u)\,du\right) = \sigma(t,T)\cdot(\lambda_t - \sigma^*(t,T)) = -\alpha(t,T),$$

gdje zadnja jednakost slijedi is izraza (2.6). □

Od sada nadalje pretpostavljamo da vrijedi sljedeća pretpostavka.

(HJM.3) Uvjet nepostojanja arbitraže (M.1) (ili ekvivalentno (M.2)) je zadovoljen.

Ne pretpostavljamo da je martingalna mjera za tržište obveznicama jedinstvena, sve dok nam nije bitno da je model koji promatramo potpun. Podsjetimo se da ako tržišni model ne dopušta arbitražu, svako dostižno potraživanje ionako dopušta jedinstvenu arbitražnu cijenu (jedinstveno je određena replicirajućom strategijom) bez obzira je li tržišni model potpun ili ne.
Na primjer, u Gaussovskom HJM modelu, neki slučajni zahtjevi kao što su opcije na obveznicu ili na dionicu su dostižni, sa replicirajućom strategijom danom izrazom u zatvorenoj formi.
Može se tvrditi s praktičnog stajališta, da je mogućnost eksplicitne replikacije većine tipičnih slučajnih zahtjeva važnija značajka modela od njegova teorijske potpunosti.

Napomena 2.23. *Kao što smo spomenuli ranije, čini se vjerojatnim da bi σ mogao ovisiti eksplicitno o forward kamatnoj stopi. To odgovara sljedećoj dinamici forward kamatne stope*

$$df(t,T) = \alpha(t,T,f(t,\cdot))\,dt + \sigma(t,T,f(t,T))\,dW_t, \tag{2.15}$$

gdje je deterministička funkcija $\sigma : C \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regularna tako da stohastička diferencijalna jednadžba (2.12)*(s koeficijentom drifta α danim izrazom* (2.14)*) dopušta jedinstveno rješenje za bilo koje fiksno dospijeće.*
Podsjetimo se da koeficijent drifta α, s obzirom na martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$, zadovoljava sljedeće

$$\alpha(t,T,f(t,\cdot)) = \sigma(t,T,f(t,T)) \int_t^T \sigma(t,u,f(t,u))\,du. \tag{2.16}$$

Posljedično, s obzirom na martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$, stohastička diferencijalna jednadžba (2.12) *može se napisati i na sljedeći način:*

$$df(t,T) = \sigma(t,T,f(t,T))\left(\int_t^T \sigma(t,u,f(t,u))\,du\,dt + dW_t^*\right). \tag{2.17}$$

Pretpostavimo, na primjer, da koeficijent σ zadovoljava

$$\sigma(t,T,f(t,T)) = \gamma f(t,T), \quad \forall t \in [0,T],$$

gdje je γ fiksirani d-dimenzionalni vektor.
Uz takvu pretpostavku, izraz (2.15) *postaje*

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t |\gamma|^2 f(u,T) \int_u^T f(u,v)\,dv\,du + \int_0^t f(u,T)\,\gamma dW_u^*,$$

za svaki trenutak dospijeća $T \in [0,\tau]$.
Budući da koeficijent drifta brzo raste kao funkcija forward kamatne stope, posljednja stohastička diferencijalna jednadžba ne dopušta globalno rješenje. Za detalje vidjeti [3].

Zanimljivo je primijetiti da pod nekim pretpostavkama regularnosti, proces kratkoročne kamatne stope određen HJM modelom trenutačnih *forward* kamatnih stopa prati neprekidan semimartingal ili čak difuzijski proces. Sljedeća propozicija može se smatrati prvim korakom u tom smjeru.

Propozicija 2.24. *Pretpostavimo da koeficijenti $\alpha(t,T)$ i $\sigma(t,T)$ i početna forward krivulja $f(0,T)$ su diferencijabilni s obzirom na dospijeće T, s ograničenim parcijalnim derivacijama $\alpha_T(t,T)$, $\sigma_T(t,T)$ i $f_T(0,T)$. Tada kratkoročna kamatna stopa r prati neprekidni* *semimartingal s obzirom na* $\mathbb{P}$. *Preciznije, za svaki* $t \in [0, \tau]$ *imamo*

$$r_t = r_0 + \int_0^t \zeta_u du + \int_0^t \sigma(u, u)\, dW_u, \tag{2.18}$$

gdje ζ *označava sljedeći proces*

$$\zeta_t = \alpha(t, t) + f_T(0, t) + \int_0^t \alpha_T(u, t)\, du + \int_0^t \sigma_T(u, t)\, dW_u.$$

Dokaz. Primijetimo prvo da r zadovoljava

$$r_t = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(u, t)\, du + \int_0^t \sigma(u, t)\, dW_u.$$

Primjenom stohastičkog Fubinijevog teorema na Itôv intergal, dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sigma(u, t)\, dW_u &= \int_0^t \sigma(u, u)\, dW_u + \int_0^t (\sigma(u, t) - \sigma(u, u))\, dW_u \\
&= \int_0^t \sigma(u, u)\, dW_u + \int_0^t \int_u^t \sigma_T(u, s)\, ds \cdot dW_u \\
&= \int_0^t \sigma(u, u)\, dW_u + \int_0^t \int_0^s \sigma_T(u, s)\, dW_u ds.
\end{aligned}$$

Nadalje,

$$\int_0^t \alpha(u, t)\, du = \int_0^t \alpha(u, u)\, du + \int_0^t \int_0^u \alpha_T(s, u)\, ds\, du$$

i konačno

$$f(0, t) = r_0 + \int_0^t f_T(0, u)\, du.$$

Kombiniranjem ovih formula, dobivamo izraz (2.16). □

Poglavlje 3

Gaussovski HJM model

U ovom odjeljku, pretpostavljamo da je volatilnost σ *forward* kamatne stope deterministička; takav slučaj nazivat ćemo Gaussovski HJM model. Ova se terminologija odnosi na činjenicu da *forward* kamatna stopa $f(t, T)$ i spot kamatna stopa r_t imaju normalnu razdiobu s obzirom na martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Naš cilj je pokazati da se arbitražna cijena bilo kojeg dostižnog zahtjeva osjetljivog na kamatnu stopu može procijeniti svakim od sljedećih postupaka:

1. Počinjemo s proizvoljnom dinamikom *forward* kamatne stope tako da je uvjet (M.1) (ili (M.2)) zadovoljen. Zatim pronalazimo martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ i primjenjujemo formulu za vrednovanje neutralnu na rizik.

2. Pretpostavljamo da je pripadna vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ zapravo *spot* (odnosno *forward*) martingalna mjera. Drugim riječima, pretpostavljamo da je uvjet (M.2) (odnosno (M.1)) zadovoljen s procesom λ (odnosno h) jednakim nuli.

Budući da oba postupka daju iste rezultate vrednovanja, zaključujemo da specifikacija premije za rizik nije relevantna u kontekstu arbitražnog vrednovanja izvedenica osjetljivih na kamatnu stopu u Gaussovskom HJM okviru. Drugačije rečeno, kada je koeficijent σ deterministički, možemo pretpostaviti, bez smanjenja općenitosti, da je

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)\,\sigma^*(t, T). \tag{3.1}$$

Primjetimo da kombiniranjem zadnje jednakosti s izrazom (1.13), dobivamo da je

$$\alpha(t, T) = f(t, t) = r_t.$$

Da bismo iskazali rezultat koji formalno opravdava gornja razmatranja, moramo uvesti neke dodatne oznake.

Neka je funkcija α_0 dana izrazom (2.6) s $\lambda = 0$, tj.

$$\alpha_0(t,T) = \sigma(t,T) \cdot \sigma^*(t,T) \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.2}$$

tako da

$$\alpha_0^*(t,T) = \int_t^T \alpha_0(u,T)\,du = \frac{1}{2}|\sigma^*(t,T)|^2$$

Konačno, označavamo s $B_0(t,T)$ cijenu obveznice određenu jednakošću

$$B_0(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f_0(t,u)\,du\right)$$

gdje je dinamika s obzirom na $\mathbb{P}$ trenutačne forward kamatne stope $f_0(t,T)$

$$f_0(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha_0(u,T)\,du + \int_0^t \sigma(u,T)\,dW_u.$$

Neka su

$$Z^*(t,\mathcal{T}) = \frac{B(t,\mathcal{T})}{B_t}, \quad Z_0^*(t,\mathcal{T}) = \frac{B_0(t,\mathcal{T})}{B_t},$$

gdje je $\mathcal{T} = (T_1, ..., T_k)$ bilo koja konačna kolekcija datuma dospijeća.

Propozicija 3.1. *Pretpostavimo da je koeficijent σ deterministički. Tada za svaki izbor $\mathcal{T}$ datuma dospijeća i spot martingalne mjere $\mathbb{P}^*$, razdioba procesa $Z^*(t,\mathcal{T})$, $t \in [0,T^*]$ s obzirom na martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ se poklapa s razdiobom procesa $Z_0^*(t,\mathcal{T})$, $t \in [0,T^*]$ s obzirom na martingalnu mjeru $\mathbb{P}$.*

Dokaz. Tvrdnja lako slijedi iz Girsanovljevog teorema. Doista, za svaki fiksirani $0 < T \leq T^*$ dinamika od $Z^*(t,T)$ s obzirom na *spot* martingalnu mjeru $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}^\lambda$ je

$$dZ^*(t,T) = -Z^*(t,T)\,\sigma^*(t,T) \cdot dW_t^\lambda, \tag{3.3}$$

gdje je W^λ standardno Brownovo gibanje s obzirom na $\mathbb{P}^\lambda$. S druge strane, s obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}$ imamo

$$dZ_0^*(t,T) = -Z_0^*(t,T)\,\sigma^*(t,T)\,dW_t. \tag{3.4}$$

Štoviše, za svaki $0 < T \leq T^*$

$$Z^*(0,T) = B(0,T) = e^{-\int_0^T f(0,u)du} = B_0(0,T) = Z_0^*(0,T).$$

Budući da je σ deterministički, tvrdnja lako slijedi iz (3.2)-(3.3). $\square$

Kako bi se pokazala neovisnost arbitražnog određivanja cijena tržišnih cijena rizika u nešto općenitijem okruženju, prikladno je koristiti štedni račun.
S obzirom na bilo koju martingalnu mjeru $\mathbb{P}$, imamo sljedeće:

$$df(t,T) = \sigma(t,T,f(t,T)) \cdot \left(\int_t^T \sigma(t,u,f(t,u))\,du\,dt + dW_t^* \right). \tag{3.5}$$

Pretpostavljamo da koeficijent σ zadovoljava pretpostavke regularnosti, tako da stohastička diferencijalna jednadžba (3.4) dopušta jedinstveno globalno rješenje. Budući da vrijedi

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du \right), \quad \forall t \in [0,T]$$

i

$$B_t = \exp\left(\int_0^t f(u,u)\,du \right), \quad \forall t \in [0,T^*],$$

jasno je da je zajednička vjerojatnosna distribucija procesa $B(\cdot,T)$ i B jedinstveno determinirana s obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Nadalje, iz toga slijedi da je arbitražna cijena $\Pi_t(X)$ bilo kojeg europskog slučajnog zahtjeva X koji ovisi o kratkoročnoj kamatnoj stopi i cijenama obveznice jednaka

$$\Pi_t(X) = B_t \mathbf{E}_{\mathbb{P}^*}\left(X B_T^{-1} | \mathcal{F}_t \right),$$

te je očito neovisna o tržišnim cijenama rizika. To ne znači da su tržišne cijene rizika potpuno zanemarene u HJM pristupu. One su još uvijek prisutne u specifikaciji stvarnih fluktuacija cijene obveznice. Međutim, za razliku od tradicionalnih modela kratkoročne kamatne stope, u kojima dinamika kratkoročne kamatne stope i procesa obveznica nisu zajednički specificirani, HJM metodologija pretpostavlja istovremeni utjecaj tržišnih cijena rizika na promjenu kratkoročne kamatne stope i na sve cijene obveznica. Posljedično u ovom slučaju, tržišne cijene rizika u potpunosti ispadaju iz arbitražnih vrijednosti izvedenica osjetljivih na kamatnu stopu.

Poglavlje 4

Europske *spot* opcije

Prvi korak prema eksplicitnom vrednovanju europskih opcija je primijetiti da sljedeća lema daje jednostavnu formulu koja izražava cijenu europske *call* opcije na imovinu $Z = (Z_t : t \in [0, \tau])$ kojom se trguje, u smislu procesa *forward* cijene $F_Z(t, T)$ i *forward* vjerojatnosne mjere.

Lema 4.1. *Arbitražna cijena dostižnog slučajnog zahtjeva X u vremenu T dana je formulom*

$$\Pi_t(X) = B(t, T)\, \mathbf{E}_{\mathbb{P}_T}(X|\mathcal{F}_t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.1}$$

Zaista, za svaki $t \in [0, T]$ imamo

$$\Pi_t\left((Z_T - K)^+\right) = B(t, T)\, \mathbf{E}_{\mathbb{P}_T}\left((F_Z(T, T) - K)^+ |\mathcal{F}_t\right), \tag{4.2}$$

budući da očito vrijedi da je $Z_T = F_Z(T, T)$.
Da bismo ocijenili uvjetno očekivanje na desnoj strani izraza (4.2), prvo moramo pronaći dinamiku, s obzirom na *forward* vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}_T$, *forward* cijene $F_Z(t, T)$. Sljedeću lemu navodimo bez dokaza.

Lema 4.2. *Za bilo koji fiksni $T > 0$, proces W^T dan formulom*

$$W_t^T = W_t^* - \int_0^t b(u, T)\, du, \quad \forall t \in [0, T], \tag{4.3}$$

je standardno d-dimenzionalno Brownovo gibanje s obzirom na forward vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}_T$. Proces forward cijene za dan dospijeća T obveznice bez kupona koja dospijeva u trenutku U zadovoljava

$$dF_B(t, U, T) = F_B(t, U, T)\,(b(t, U) - b(t, T)) \cdot dW_t^T, \tag{4.4}$$

te ovisi i o vrijednosti $F_B(T,U,T) = B(T,U)$. Forward cijena dionice S zadovoljava $F_S(T,T) = S_T$ i vrijedi

$$dF_S(t,T) = F_S(\sigma_t - b(t,T)) \cdot dW_t^T, \tag{4.5}$$

gdje je σ_t trenutna volatilnost cijene dionice.

Sljedeći rezultat, koji koristi HJM okvir, pokazuje da je hipoteza očekivanog prinosa do dospijeća zadovoljena za bilo koje fiksno dospijeće T s obzirom na odgovarajuću *forward* vjerojatnosnu mjeru. Ova značajka samo je podsjetnik na klasičnu hipotezu da je, za svako dospijeće T, trenutna *forward* kamatna stopa $f(0,T)$ nepristrana procjena, s obzirom na stvarnu vjerojatnost $\mathbb{P}$, buduće kratkoročne kamatne stope r_t.

Korolar 4.3. *Za svaki fiksni $T \in [0,\tau]$, forward kamatna stopa $f(0,T)$ jednaka je očekivanoj vrijednosti spot kamatne stope r_T s obzirom na forward vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}_T$.*

Dokaz. Primijetimo da, s obzirom na (2.9), imamo sljedeće:

$$r_T = f(0,T) + \int_0^T \sigma(t,T) \cdot (\sigma^*(t,T)\,dt + dW_t^*) = f(0,T) + \int_0^T \sigma(t,T) \cdot dW_t^T,$$

budući da je $\sigma^*(t,T) = -b(t,T)$. Posljedično, $\mathbf{E}_{\mathbb{P}_T}(r_T) = f(0,T)$. □

Opcije na obveznice

Sada ćemo ispitati opcije na obveznice bez kupona. Na dan dospijeća T, isplata europske *call* opcije na obveznicu bez kupona koja dospijeva u trenutku $U \geq T$ jednaka je

$$C_T = (B(T,U) - K)^+. \tag{4.6}$$

Budući da je $B(T,U) = F_B(T,U,T)$, isplata C_T se alternativno može iskazati i na sljedeći način:

$$C_T = (F_B(T,U,T) - K)^+ = F_B(T,U,T)\,1_D - K1_D,$$

gdje je

$$D = \{B(T,U) > K\} = \{F_B(T,U,T) > K\}$$

skup izvršenja opcije. Sljedeća propozicija daje izraz zatvorenog oblika za arbitražnu cijenu europske opcije na obveznicu. Radi jednostavnosti izlaganja, pretpostavljamo da su volatilnosti ograničene; međutim, ova pretpostavka može se i oslabiti.

Propozicija 4.4. *Pretpostavimo da su volatilnosti cijena obveznica $b(\cdot, T)$ i $b(\cdot, U)$ ograničene determinističke funkcije. Arbitražna cijena u trenutku $t \in [0, T]$ europske call opcije na obveznicu bez kupona s danom dospijeća T i cijenom izvršenja K, koja dospijeva u trenutku $U \geq T$, jednaka je*

$$C_t = B(t, U) N(h_1(B(t, U), t, T)) - KB(t, T) N(h_2(B(t, U), t, T)), \tag{4.7}$$

gdje je

$$h_{1,2}(b, t, T) = \frac{\ln\left(\frac{b}{K}\right) - \ln B(t, T) \pm \frac{1}{2} v_U^2(t, T)}{v_U(t, T)} \tag{4.8}$$

za $(b, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, T]$ i

$$v_U^2(t, T) = \int_t^T |b(u, U) - b(u, T)|^2 du, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.9}$$

Arbitražna cijena odgovarajuće europske put opcije na obveznicu bez kupona jednaka je

$$P_t = KB(t, T) N(-h_2(B(t, U), t, T)) - B(t, U) N(-h_1(B(t, U), t, T)).$$

Dokaz. S obzirom na opću formulu za vrednovanje europske opcije (4.2), jasno je da moramo procijeniti uvjetna očekivanja

$$C_t = B(t, T) \mathbf{E}_{\mathbb{P}_T}(F_B(T, U, T) 1_D | \mathcal{F}_t) - KB(t, T) \mathbb{P}_T(D | \mathcal{F}_t) = I_1 - I_2.$$

Iz Leme 4.2 znamo da je dinamika od $F_B(t, U, T)$ s obzirom na $\mathbb{P}_T$ dana formulom (4.4) pa je

$$F_B(T, U, T) = F_B(t, U, T) \exp\left(\int_t^T \gamma(u, U, T) \cdot dW_u^T - \frac{1}{2}\int_t^T |\gamma(u, U, T)|^2 du\right),$$

gdje je $\gamma(u, U, T) = b(u, U) - b(u, T)$. Ovo se može napisati na sljedeći način:

$$F_B(T, U, T) = F_B(t, U, T) \exp\left(\zeta(t, T) - \frac{1}{2} v_U^2(t, T)\right),$$

gdje je $F_B(t, U, T)$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriva i $\zeta(t, T) = \int_t^T \gamma(u, U, T) \cdot dW_u^T$ je, s obzirom na $\mathbb{P}_T$ normalna slučajna varijabla, nezavisna od $\mathcal{F}_t$, s očekivanjem 0 i varijancom $Var_{\mathbb{P}_T}(\zeta(t, T)) = v_U^2(t, T)$. Korištenjem svojstva uvjetnog očekivanja, dobivamo sljedeće:

$$\mathbb{P}_T\{D | \mathcal{F}_t\} = \mathbb{P}_T\{\zeta(t, T) < \ln\left(\frac{F}{K}\right) - \frac{1}{2} v_U^2(t, T)\},$$

gdje je $F = F_B(t,U,T)$, pa imamo

$$I_2 = KB(t,T)\,N\left(\frac{\ln\left(\frac{F_B(t,U,T)}{K}\right) - \frac{1}{2}v_U^2(t,T)}{v_U(t,T)}\right)$$

Kako bismo procijenili I_1, uvest ćemo pomoćnu vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_T \sim \mathbb{P}_T$ na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ postavljanjem

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T}{d\mathbb{P}_T} = \exp\left(\int_0^T \gamma(u,U,T)\cdot dW_u^T - \frac{1}{2}\int_0^T |\gamma(u,U,T)|^2 du\right) = \tilde{\eta}_T.$$

Korištenjem Girsanovljevog teorema, jasno je da je proces $\tilde{W}^T$, koji je jednak

$$\tilde{W}_t^T = W_t^T - \int_0^t \gamma(u,U,T)\,du, \quad \forall t \in [0,T],$$

standardno Brownovo gibanje s obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_T$. Također treba imati na umu da *forward* cijena $F_B(T,U,T)$ dopušta sljedeći prikaz s obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_T$

$$F_B(T,U,T) = F_B(t,U,T)\exp\left(\int_t^T \gamma(u,U,T)\cdot d\tilde{W}_u^T + \frac{1}{2}\int_t^T |\gamma(u,U,T)|^2 du\right)$$

tako da imamo sljedeće:

$$F_B(T,U,T) = F_B(t,U,T)\exp\left(\tilde{\zeta}(t,T) + \frac{1}{2}v_U^2(t,T)\right), \tag{4.10}$$

gdje smo označili $\tilde{\zeta}(t,T) = \int_t^T \gamma(u,U,T)\cdot d\tilde{W}_u^T$. Slučajna varijabla $\tilde{\zeta}(t,T)$, s obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_T$, je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 0 i varijancom $v_U^2(t,T)$; također je nezavisna od $\mathcal{F}_t$. Nadalje, ponovnim korištenjem Leme 4.2 dobivamo

$$I_1 = B(t,U)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}_T}\left\{1_D \exp\left(\int_t^T \gamma(u,U,T)\cdot dW_u^T - \frac{1}{2}\int_t^T |\gamma(u,U,T)|^2 du\right)\middle|\mathcal{F}_t\right\}$$

te

$$I_1 = B(t,T)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}_T}\left(\tilde{\eta}_T\tilde{\eta}_t^{-1}1_D|\mathcal{F}_t\right).$$

Zahvaljujući Bayesovom pravilu, nalazimo da $I_1 = B(t,U)\,\tilde{\mathbb{P}}_T\{D|\mathcal{F}_t\}$. Uzimajući u obzir (4.10), zaključujemo da

$$\tilde{\mathbb{P}}_T(D|\mathcal{F}_t) = \tilde{\mathbb{P}}_T\left(\tilde{\zeta}(t,T) \le \ln\left(\frac{F_B(t,U,T)}{K}\right) + \frac{1}{2}v_U^2(t,T)\right),$$

te

$$I_1 = B(t,U) N \left(\frac{\ln\left(\frac{F_B(t,U,T)}{K}\right) + \frac{1}{2} v_U^2(t,T)}{v_U(t,T)} \right).$$

Ovime je dovršen dokaz formule za vrednovanje (4.7). Formula koja daje cijenu *put* opcije može se uspostaviti na isti način. Alternativno, da bi se pronašla cijena europske *put* opcije na obveznicu bez kupona, može se kombinirati formula (4.7) s jednakošću koja se naziva *call-put* paritet:

$$C_t - P_t = Z_t - B(t,T) K \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.11}$$

□

Formulu (4.7) možemo izraziti i na sljedeći način:

$$C_t = B(t,T)\left(F_t N\left(\tilde{d}_1(F_t,t,T)\right) - K N\left(\tilde{d}_2(F_t,t,T)\right)\right), \tag{4.12}$$

gdje pišemo skraćeno F_t kao oznaku za *forward* cijenu $F_B(t,U,T)$ i

$$\tilde{d}_{1,2}(F,t,T) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) \pm v_U^2(t,T)}{v_U(t,T)} \tag{4.13}$$

za $(F,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,T]$ gdje je $v_U(t,T)$ dan s (4.9). Treba imati na umu da imamo sljedeće

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T}{d\mathbb{P}^*} = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_T}{d\mathbb{P}_T}\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}^*} = \exp\left(\int_0^T b(u,U)\cdot dW_u - \frac{1}{2}\int_0^T |b(u,U)|^2 du\right).$$

Stoga je očito da je pomoćna vjerojatnosna mjera $\tilde{\mathbb{P}}_T$ ustvari restrikcija *forward* vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}_U$ na $\mathcal{F}_T$. Budući da skup D pripada $\mathcal{F}_T$, imamo $\tilde{\mathbb{P}}_T(D|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}_U(D|\mathcal{F}_t)$. Formula (4.7) stoga dopušta sljedeći alternativni prikaz

$$C_t = B(t,U)\,\mathbb{P}_U(D|\mathcal{F}_t) - K B(t,T)\,\mathbb{P}_T(D|\mathcal{F}_t). \tag{4.14}$$

Opcije na dionice

Isplata po isteku *call* opcije na dionicu $S = (S_t : t \in [0,\tau])$ jednaka je $C_T = (S_T - K)^+$, gdje je T vrijeme dospijeća opcije, a K cijena izvršenja. Sljedeći rezultat, koji je izravna generalizacija Black-Scholesove formule, daje eksplicitnu formulu za arbitražnu cijenu *call* opcije na dionicu. Pretpostavljamo da je dinamika od S s obzirom na martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ jednaka

$$dS_t = S_t\left(r_t dt + \sigma_t \cdot dW_t^*\right),$$

gdje je $\sigma : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ deterministička funkcija.

Propozicija 4.5. *Pretpostavimo da su volatilnost cijene obveznice $b(\cdot, T)$ i volatilnost cijene dionice σ ograničene determinističke funkcije. Tada je arbitražna cijena europske call opcije na dionicu S, s danom dospijeća T i cijenom izvršenja K jednaka*

$$C_t = S_t N(h_1(S_t, t, T)) - KB(t, T) N(h_2(S_t, t, T)), \tag{4.15}$$

gdje je

$$h_{1,2}(s, t, T) = \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) - \ln B(t, T) \pm \frac{1}{2} v^2(t, T)}{v(t, T)} \tag{4.16}$$

za $(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, T]$ i

$$v^2(t, T) = \int_t^T |\sigma_u - b(u, T)|^2 du \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.17}$$

Primjer 4.6. *Ispitajmo poseban slučaj formule za određivanje cijene utvrđene u prethodnoj propoziciji. Neka je $W^* = \left(W^{1*}, W^{2*}\right)$ dvodimenzionalno standardno Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$. Pretpostavljamo da cijena obveznice $B(t, T)$, s obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$, zadovoljava sljedeću relaciju:*

$$dB(t, T) = B(t, T)\left(r_t dt + \hat{b}(t, T)\left(\rho, \sqrt{1-\rho^2}\right) \cdot dW_t^*\right),$$

gdje je $\hat{b}(\cdot, T) : [0, T] \to \mathbb{R}$ realna, ograničena, deterministička funkcija, a dinamika cijene dionice S dana je s

$$dS_t = S_t (r_t dt + (\hat{\sigma}(t), 0) \cdot dW_t^*)$$

za neku funkciju $\hat{\sigma} : [0, \tau) \to \mathbb{R}$. Uvedimo realne stohastičke procese $\hat{W}^1$ i $\hat{W}^2$ postavljenjem $\hat{W}_t^1 = W_t^{1*}$ i $\hat{W}_t^2 = \rho W_t^{1*} + \sqrt{1-\rho^2} W_t^{2*}$. Nije teško provjeriti da su $\hat{W}^1$ i $\hat{W}^2$ standardna jednodimenzionalna Brownova gibanja s obzirom na martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ i da je njihov skalarni produkt jednak $\langle \hat{W}^1, \hat{W}^2 \rangle_t = \rho t$ za $t \in [0, \tau]$. Očito je da vrijedi

$$dB(t, T) B(t, T)\left(r_t dt + \hat{b}(t, T) d\hat{W}_t^2\right) \tag{4.18}$$

i

$$dS_t = S_t\left(r_t dt + \hat{\sigma}(t) d\hat{W}_t^1\right). \tag{4.19}$$

Primjena Propozicije 4.5 daje sljedeći rezultat.

Korolar 4.7. *Pretpostavimo da su dinamika cijene obveznice i dinamika cijene dionice dane formulama* (4.18) *i* (4.19) *redom. Ako su koeficijenti volatilnosti* $\hat{b}$ *i* $\hat{\sigma}$ *determinističke funkcije, tada je arbitražna cijena europske call opcije na dionicu* S *dana pomoću* (4.15)-(4.16)*, gdje je*

$$v^2(t,T) = \int_t^T \left(\hat{\sigma}^2(u) - 2\rho\hat{\sigma}(u)\,\hat{b}(u,T) + \hat{b}^2(u,T)\right) du.$$

U poziciji smo formulirati rezultat koji obuhvaća oba gore proučena slučaja. Pretpostavlja se da je dinamika *spot* cijene Z imovine kojom se trguje dana izrazom

$$dZ_t = Z_t\left(r_t dt + \xi_t \cdot dW_t^*\right).$$

Bitno je pretpostaviti da je volatilnost $\xi_t - b(t,T)$ *forward* cijene od Z za dan dospijeća T deterministička.

Propozicija 4.8. *Arbitražna cijena europske call opcije na imovinu* Z*, s danom dospijeća* T *i cijenom izvršenja* K *je dana sljedećom formulom:*

$$C_t = B(t,T)\left(F_Z(t,T)\,N\left(\tilde{d}_1(F_Z(t,T),t,T)\right) - KN\left(\tilde{d}_2(F_Z(t,T),t,T)\right)\right),$$

gdje je

$$\tilde{d}_{1,2}(F,t,T) = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) \pm \frac{1}{2}v^2(t,T)}{v(t,T)}$$

za $(F,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,T]$ *i*

$$v^2(t,T) = \int_t^T |\xi_u - b(u,T)|^2 du \quad \forall t \in [0,T].$$

Neka P_t predstavlja cijenu europske *put* opcije na imovinu Z u trenutku $t \leq T$, čiji je dan dospijeća T, a cijena izvršenja K. Tada vrijedi sljedeći rezultat.

Korolar 4.9. *Vrijedi sljedeći put-call paritet:*

$$C_t - P_t = Z_t - B(t,T)\,K \quad \forall t \in [0,T].$$

Dokaz. Koristimo se metodom mjerenja unaprijed. Imamo sljedeće:

$$C_t - P_t = B(t,T)\,\mathbf{E}_{\mathbb{P}_T}\left(F_Z(T,U,T) - K|\mathcal{F}_t\right),$$

te dobivamo

$$C_t - P_t = B(t,T)\,F_Z(t,U,T) - B(t,T)\,K = Z_t - B(t,T)\,K$$

za svaki $t \in [0,T]$. □

Bibliografija

[1] D. Heath, R. Jarrow, A. Morton, *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation*, Econometrica, 60(1) 77-105, 1992.

[2] M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modeling*, Second Edition, Springer, 2005.

[3] K. R. Miltersen, An Arbitrage Theory of the Term Structure of Interest Rates, Ann. Appl. Probab, 4 (4) 953-967, 1994.

[4] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 1, nastavni materijali*, https://web.math.pmf.unizg.hr/ wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm1_p11_2.pdf, datum zadnjeg pristupanja 28.8.2022.

[5] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 2, nastavni materijali*, https://web.math.pmf.unizg.hr/ wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm2_p12.pdf, datum zadnjeg pristupanja 28.8.2022.

[6] Z. Vondraček, *Slučajni procesi, nastavni materijali*, https://web.math.pmf.unizg.hr/ vondra/sp22-predavanja.html datum zadnjeg pristupanja 28.8.2022.

[7] I. Gogić, P. Pandžić, J. Tambača, Integrali funkcija više varijabli, nastavni materijali, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/int/pred/predavanjaint_2020.pdf, datum zadnjeg pristupanja 28.8.2022.

[8] I.Velčić, Problemi za Heath-Jarrow-Mortonov model kamatnih stopa, magistarski rad, PMF-matematički odjel, Zagreb, 2004. http://bib.irb.hr/datoteka/151257.Emagist.pdf, datum zadnjeg pristupanja 28.8.2022.

[9] K. A. Škreb, Tehnika Bellmanovih funkcija za multilinearne martingalne ocjene, doktorska disertacija, PMF- matematički odsjek, Zagreb, 2017.

https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:494970,
datum zadnjeg pristupanja 15.10.2022.

[10] M. Štajduhar, Hilbertov prostor, diplomski rad, PMF-matematički odsjek, Zagreb, 2016.
https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:478477,
datum zadnjeg pristupanja 27.10.2022.

Sažetak

Ovaj rad predstavlja pregled metodologije za određivanje cijene slučajnih zahtjeva prema ročnoj strukturi kamatne stope. Uzimajući u obzir početnu krivulju *forward* kamatne stope i mehanizam koji opisuje kako ona fluktuira, razvijamo model arbitražnog određivanja cijena koji daje procjene vrijednosti slučajnih zahtjeva koji ne ovise eksplicitno o tržišnim cijenama rizika. U prvom poglavlju formulirali smo temeljne postavke HJM pristupa te smo pronašli formulu za promjenu cijene obveznice. U drugom poglavlju pronašli smo dva dovoljna uvjeta za nepostojanje mogućnosti arbitraže za sve obveznice različitih dospijeća te smo zaključili da su ta dva uvjeta ekvivalentna. U trećem poglavlju pretpostavili smo da je volatilnost σ *forward* kamatne stope deterministička funkcija te smo pokazali kako tržišne cijene rizika u potpunosti proizlaze iz arbitražnih vrijednosti izvedenica osjetljivih na kamatnu stopu. U četvrtom poglavlju dobili smo izraz zatvorenog oblika za arbitražnu cijenu europske opcije na obveznice uz pretpostavku da su volatilnosti ograničene. Također smo iskazali eksplicitnu formulu za arbitražnu cijenu *call* opcije na dionicu te dokazali da vrijedi formula za *put-call* paritet.

Summary

This thesis presents an overview of the methodology for pricing contingent claims on the term structure of interest rates. Given an initial forward rate curve and a mechanism which describes how it fluctuates, we develop an arbitrage pricing model which yields contingent claim valuations which do not explicitly depend on the market prices for risk. In the first chapter, we formulated the basic postulates of the HJM approach and we derived the formula for the dynamics of the bond price. In the second chapter, we present two sufficient conditions for the absence of arbitrage for all bonds of different maturities, and we conclude that these two conditions are equivalent. In the third chapter, we assumed that the volatility σ of the forward rate is a deterministic function and we showed that the market prices for risk are derived from arbitrage values of interest rate-sensitive derivatives. In the fourth chapter, we obtained a closed-form expression for the arbitrage price of a European bond option under the assumption that volatilities are bounded. We also presented an explicit formula for the arbitrage price of a call option on a stock and proved that the formula for the put-call parity is valid.

Životopis

Rođena sam 4. srpnja 1997. godine u Zadru. Nakon završetka Osnovne škole Zadarski otoci, upisujem Gimnaziju Franje Petrića u Zadru. Preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisujem 2016. godine, a 2020. godine upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike.