Metode neglatke optimizacije u teoriji portfelja

Lehman Pavasović, Katarina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Katarina Lehman Pavasović

METODE NEGLATKE OPTIMIZACIJE U TEORIJI PORTFELJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc.
Marko Vrdoljak

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mami, tati, Kruni i Filipu

Zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku na podršci, savjetima i vremenu uloženom u mentoriranje ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Mjerenje rizika ima značajnu ulogu u optimizaciji pod uvjetima neizvjesnosti (npr. pandemija koronavirusa), a pogotovo u suočavanju s gubicima koji mogu nastati u financijskoj ili osiguravateljskoj industriji. Gubitak može biti prikazan kao funkcija $z = f(x, y)$ vektora odluke $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ koji označava ono što generalno možemo zvati portfeljem, i vektora $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ koji predstavlja buduće vrijednosti niza varijabli kao što su kamatna stopa ili podaci o vremenu. Kada je y slučajni vektor s poznatom distribucijom, z je slučajna varijabla čija distribucija ovisi o izboru od x. Svaki optimizacijski problem koji uključuje gubitak z u smislu izbora x, mora uzeti u obzir ne samo očekivane vrijednosti, nego i *rizičnost* od x.

U upravljanju financijskim rizikom najčešće se koriste mjere rizika *negativne strane* koje imaju za cilj izračunati i kvantificirati *najgori* gubitak koji može proizaći iz neizvjesnosti u razlici između očekivanih i stvarnih povrata u slučajevima kada se tržišni uvjeti pogoršaju. Najpoznatija mjera *negativne strane* je Value-at-Risk (VaR), koja unatoč širokoj upotrebi ima nekoliko značajnih nedostataka. Naime, nije stabilna i pogodna za rad kada distribucija gubitaka nije normalna, a isto tako nije ni *koherentna* mjera rizika. Još jedan ozbiljan nedostatak mjere Value-at-Risk je taj što ne omogućuje kontrolu opsega gubitaka koji mogu biti ostvareni iznad iznosa naznačenog praga pa ne postoji mogućnost razlikovanja situacija u kojima se gubici mogu smatrati samo malo lošijima, od onih gdje bi gubici mogli biti poražavajući. Mjera rizika koja ima puno *poželjnija* svojstva u mnogim aspektima je mjera Conditional Value-at-Risk (CVaR). Održava konzistentnost s mjerom Value-at-Risk, dajući iste rezultate u uvjetima kada su gubici normalno distribuirani. Najvažnija prednost mjere Conditional Value-at-Risk je ta što se može izraziti minimizacijskom formulom koja se lako uključuje u probleme optimizacije, čuvajući pritom svojstva početne funkcije cilja poput konveksnosti.

U ovome radu dajemo pregled osnovnih pojmova u teoriji portfelja te promatramo optimizaciju portfelja u kontekstu mjere rizika Conditional Value-at-Risk. Budući da izraz za CVaR sadrži funkciju $x^+ = \max(0, x)$, radi se o problemu neglatke optimizacije.

Problemu možemo pristupiti na dva načina:

1. Uvesti pomoćne varijable i dodatne uvjete te time problem svesti na problem glatke optimizacije.

2. Direktno riješiti problem metodom neglatke optimizacije.

U radu predstavljamo oba pristupa, ali fokus stavljamo na drugi pristup. U završnome dijelu rada uvodimo osnovne pojmove neglatke analize i prikazujemo diskretnu gradijentnu metodu za pronalaženje optimalnog portfelja.

Poglavlje 1

Teorija portfelja

U ovome poglavlju dajemo pregled teorije koja je vezana uz povrate portfelja, njihove distribucije, učinkovitost i rizičnost pojedinih ulaganja. Promatramo ograničenja volatilnosti kao mjere rizika te upoznajemo mjere rizika *negativne strane*, uz poseban naglasak na mjeru Conditional Value-at-Risk.

1.1 Imovine i portfelji

Financijska imovina, koja se nekada još naziva i financijski instrument, je nematerijalna imovina koja se temelji na budućim novčanim tokovima. Osnovna podjela financijske imovine je podjela na rizičnu i nerizičnu imovinu. Primjer rizične imovine je dionica jer njena cijena neprestano fluktuira, uglavnom na nepredvidiv način. Stoga ulaganje u dionice nosi određeni rizik. S druge strane, nerizičnom imovinom smatra se financijski instrument koji donosi siguran i predvidiv povrat. Najjednostavniji primjer takve imovine je novac u banci uložen uz fiksnu kamatnu stopu. Financijskom imovinom najčešće se trguje na financijskim tržištima, a osim dionica i novca, neke vrste imovine su:

- obveznice (npr. državna obveznica, korporativna obveznica)
- izvedenice (npr. opcije, swap ugovori, forward ugovori)
- fondovi (npr. hedge fondovi)

Definicija 1.1.1. *Portfelj je vektor $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, gdje ϕ^i predstavlja broj jedinica i-te financijske imovine koju investitor posjeduje u trenutku $t \geq 0$.*

1.2 Povrati

Povrat je zarada financijske imovine ili portfelja u određenom razdoblju. U skladu s time, gubitak unutar određenog razdoblja možemo definirati kao negativan povrat za isti period. Povrati i gubici često se izražavaju u postotcima. Uobičajeno je pravilo da veći rizik donosi veći potencijal za viši povrat, ali isto tako i za viši gubitak.

Definicija 1.2.1. *Povrat R_t u periodu t je:*

$$R_t = \frac{P_t - P_0}{P_0},$$

gdje je

- *P_t cijena imovine na kraju promatranog perioda, i*
- *P_0 cijena imovine na početku promatranog perioda.*

Iskazan u obliku logaritma, povrat može biti zapisan kao:

$$R_{t(log)} = log(\frac{P_t}{P_0}).$$

Očekivani povrat

Očekivani povrat iskazuje koliko veliki ili mali će u budućnosti biti povrat ili gubitak. Najbolji nepristrani procjenitelj za očekivani povrat $E(R)$ u uvjetima učinkovitoga tržišta je srednja vrijednost povijesnih povrata:

$$E(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} R_i,$$

gdje je R_i povrat u određenom vremenskom intervalu, a N broj vremenskih intervala (npr. dani trgovanja). Očekivani povrat za portfelj $E(R_p)$ je ponderirani prosjek povrata pojedinačnih imovina u portfelju i može biti izračunat kao:

$$E(R_p) = \omega_1 * R_1 + \ldots + \omega_N * R_N,$$

pri čemu su su $\omega_1, \ldots, \omega_N$ težine imovina u portfelju, a $R_1, \ldots, R_N$ očekivani povrati različitih imovina.

Primjer 1.2.2. *Pretpostavimo da imamo jednostavan portfelj koji se sastoji samo od dvije vrste imovine. Prva imovina neka je državna obveznica s udjelom od 70%, a druga dionica i njen udio u portfelju iznosi 30%. Ako očekujemo da će povrat obveznice biti 5%, a povrat dionice 15%, tada je očekivani povrat našega portfelja 8%.*

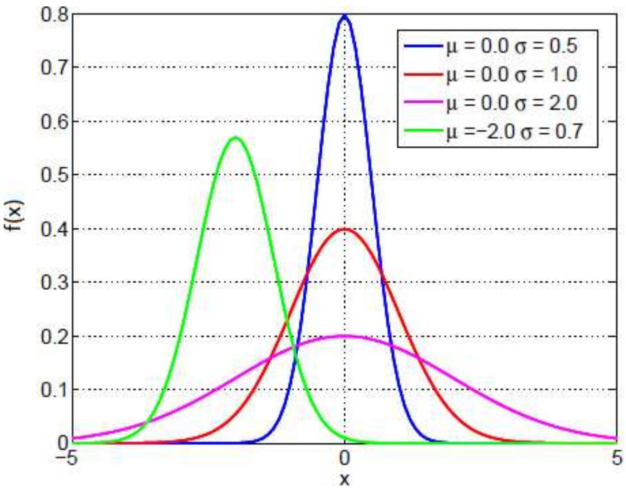
$$E(R_p) = (0.7) \times (0.05) + (0.3) \times (0.15) = 0.08$$

Očekivani povrat ne jamči stopu povrata, ali se uobičajeno koristi u prognoziranju budućih vrijednosti portfelja i pruža mjeru stvarnih povrata.

Distribucija povrata

Definicija 1.2.3. *Neprekidna slučajna varijabla X je normalna slučajna varijabla s parametrima μ i σ ako ima funkciju gustoće:*

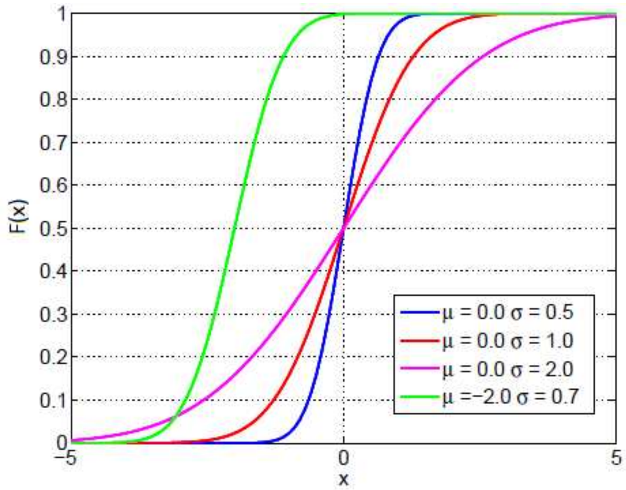
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



Slika 1.1: Funkcija gustoće normalne distribucije za različite parametre μ i σ.

Kumulativna funkcija distribucije normalne slučajne varijable je integral:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$



Slika 1.2: Kumulativna funkcija normalne distribucije za različite parametre μ i σ.

Neke empirijske studije stvarnih stanja na financijskim tržištima pokazuju kako normalna distribucija u modeliranju povrata imovine i portfelja nije dobra pretpostavka. Jedna takva studija koja sadrži i podatke s hrvatskog tržišta može se naći u [14]. Uočavaju se mnoge distribucije povrata koje odstupaju od normalne. Za takve distribucije je karakteristično da imaju koeficijent nagnutosti različit od 0 i koeficijent spljoštenosti različit od 3.

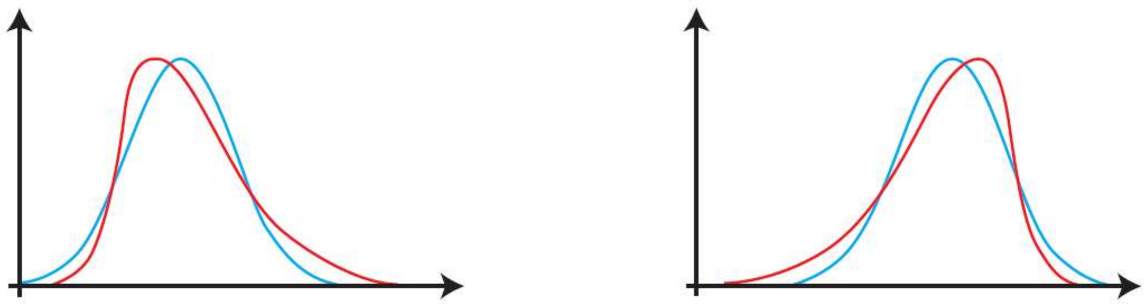
Definicija 1.2.4. *(Koeficijent nagnutosti) Koeficijent nagnutosti slučajne varijable X definira se kao:*

$$\text{skew}\,(X) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right].$$

Definicija 1.2.5. *(Koeficijent spljoštenosti) Koeficijent spljoštenosti slučajne varijable X definira se kao:*

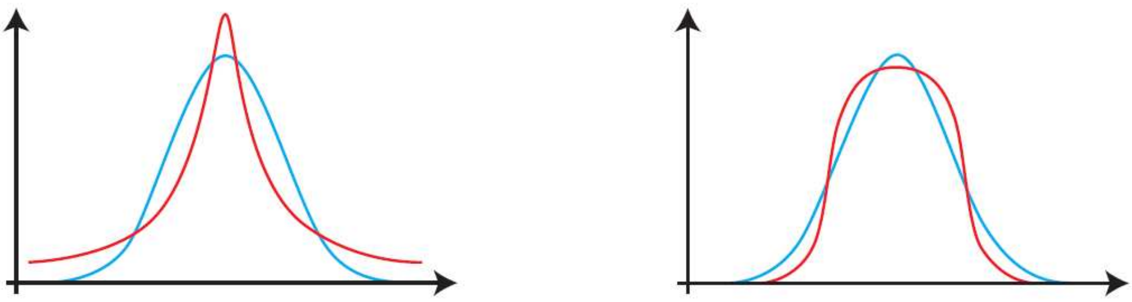
$$\text{kurt}\,(X) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right].$$

Koeficijent nagnutosti pokazuje koliko neka distribucija odstupa od simetričnosti. Koeficijent nagnutosti 0 znači da je distribucija od X simetrična oko očekivane vrijednosti μ. Opći izgled krivulja distribucija s pozitivnim i negativnim koeficijentom nagnutosti u odnosu na simetričnu funkciju gustoće može se vidjeti na Slici 1.3.



Slika 1.3: Distribucije s pozitivnim (lijevi graf) i negativnim (desni graf) koeficijentom nagnutosti (crvene krivulje) u odnosu na normalnu distribuciju (plave krivulje).

Koeficijent spljoštenosti izražava šiljastost krivulje distribucije i pokazuje je li vjerojatnost ekstremnih događaja veća no što bi na to ukazivala normalna distribucija. Koeficijent spljoštenosti normalne distribucije iznosi 3. Ako je koeficijent spljoštenosti veći od 3, onda se radi o leptokurtičnoj distribuciji koja je šiljastija, s višim i užim vrhom, te ukazuje na veću vjerojatnost ekstremnih događaja. S druge strane, koeficijent spljoštenosti manji od 3 označava platokurtične distribucije. Što je krivulja plosnatija, to je vjerojatnost ekstremnih događaja manja.



Slika 1.4: Leptokurtična (lijevo) i platokurtična (desno) distribucija (crvene krivulje) uspoređene s normalnom distribucijom (plave krivulje).

1.3 Rizik

Trgovanje imovinom čiji su budući povrati neizvjesni nužno uključuje rizik za ulagače. Zbog toga je upravljanje rizikom jedna od glavnih zadaća za sudionike financijskih tržišta. Matematička analiza mjera rizika igra fundamentalnu ulogu u teoriji portfelja gdje je cilj pronaći portfelj koji maksimizira očekivani povrat uz prihvatljivi rizik.

Koherentne mjere rizika

Neka su X i Y slučajne varijable koje predstavljaju gubitak, c $\in \mathbb{R}$ skalar koji predstavlja gubitak i ρ realna funkcija rizika slučajne varijable.

Definicija 1.3.1. *(Monotonost) Mjera rizika ρ je monotona ako za sve X, Y:*

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y). \tag{1.1}$$

Definicija 1.3.2. *(Translacijska invarijantnost) Mjera rizika ρ je translacijski invarijantna ako za sve X, c:*

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c. \tag{1.2}$$

Definicija 1.3.3. *(Subaditivnost) Mjera rizika ρ je subaditivna ako za sve X, Y:*

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y). \tag{1.3}$$

Definicija 1.3.4. *(Pozitivna homogenost) Mjera rizika ρ je pozitivno homogena ako za sve X, $\lambda \geq 0$:*

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X). \tag{1.4}$$

Kažemo da je mjera rizika **koherentna** ako zadovoljava (1.1)-(1.4).

Intuitivno, zahtjev za monotonost govori da veći gubici znače veći rizik. Translacijska invarijantnost kazuje kako povećanje (ili smanjenje) gubitka povećava (ili smanjuje) rizik za isti iznos. Subaditivnost je zahtjev da diverzifikacija donosi smanjenje rizika, dok monotonost označava da se, ako veličinu portfelja povećamo λ puta, rizik također poveća λ puta.

Volatilnost

Volatilnost je jednostavna mjera rizika kojom se računaju varijacije u vrijednosti imovine ili portfelja. Veća volatilnost znači veće razlike u cijenama tijekom određenog perioda. Procjena za volatilnost σ dana je sa:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(R_i - \mu)^2},$$

gdje su R_i povrati, N broj povrata, a μ očekivani povrat.

Najveća prednost mjerenja rizika pomoću volatilnosti je lagani izračun. Međutim, takva mjera ima značajan nedostatak jer varijanca jednako tretira povrate i gubitke. To znači da je idealna isključivo za povrate koji imaju normalnu distribuciju, što u stvarnosti nije čest slučaj.

Mjere rizika *negativne strane*

Mjere rizika *negativne strane* objašnjavaju najgori mogući scenarij za ulaganje i pokazuju koliko investitor može izgubiti, ne uzimajući pritom u obzir potencijalni profit. Primjeri takvih mjera su Value-at-Risk i Conditional Value-at-Risk.

Value-at-Risk je mjera rizika koja predstavlja najgori gubitak (najveći negativni povrat) koji neće biti prekoračen uz određenu razinu pouzdanosti. To nas dovodi do sljedeće matematičke definicije:

Definicija 1.3.5. *(Value-at-Risk) Neka je X slučajna varijabla koja predstavlja gubitak. Uz dani parametar $0 < \beta < 1$, β-razina rizičnosti od X je:*

$$VaR_\beta := \min\{\alpha : P(X \leq \alpha) \geq \beta\}. \tag{1.5}$$

Mjera Value-at-Risk ima nekoliko ekvivalentnih interpretacija:

- $VaR_\beta(X)$ je *najmanji* gubitak koji neće biti prekoračen s vjerojatnošću β.
- $VaR_\beta(X)$ je β-kvantil kumulativne funkcije distribucije od X.
- $VaR_\beta(X)$ je *najmanji* gubitak u $(1-\beta) \times 100\%$ najgorih slučaja.
- $VaR_\beta(X)$ je *najveći* gubitak u $\beta \times 100\%$ najboljih slučaja.

Conditional Value-at-Risk, koji se ponekad još naziva i očekivani manjak, predstavlja očekivani gubitak, uz uvjet da je gubitak jednak ili veći od VaR na određenoj razini pouzdanosti.

Definicija 1.3.6. *(Conditional Value-at-Risk u neprekidnom slučaju) Neka je X slučajna varijabla koja predstavlja gubitak. Uz dani parametar* $0 < \beta < 1$, *β-uvjetna razina rizičnosti od X je:*

$$CVaR_\beta := \mathbb{E}[X \mid X \geq VaR_\beta(X)].$$

Primjer 1.3.7. *Neka su A i B dvije investicije čiji su gubici prikazani u tablici* (1.6). *Imamo tri različita scenarija ξ_1, ξ_2, ξ_3, od kojih se svaki događa s vjerojatnošću $p(\xi_i)$.*

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
$p(\xi_i)$	0.04	0.04	0.92
A	1000	0	0
B	0	1000	0

(1.6)

Koristeći (1.5) *za izračun vrijednosti VaR na razini pouzdanosti od 95% za investicije u A, B, i A+B dobivamo:*

$$\begin{aligned} VaR_{0.95}(A) &= \min\{\alpha : P(A \leq \alpha) \geq 0.95\} = 0 \quad (P(A \leq 0) = 0.96), \\ VaR_{0.95}(B) &= \min\{\alpha : P(B \leq \alpha) \geq 0.95\} = 0 \quad (P(B \leq 0) = 0.96), \text{i} \\ VaR_{0.95}(A + B) &= \min\{\alpha : P(A + B \leq \alpha) \geq 0.95\} = 1000. \end{aligned}$$

Uočimo da $VaR_{0.95}(A + B) \nleq VaR_{0.95}(A) + VaR_{0.95}(B)$. Dakle, VaR nije subaditivna prema (1.3) pa nije niti koherentna mjera rizika. S druge strane, Acerbi i Tasche dokazali su u [1] da je CVaR koherentna mjera rizika.

Analizirajući CVaR u širem kontekstu, CVaR možemo izvesti iz *generaliziranog β-repa distribucije* slučajne varijable X (koja predstavlja gubitak). Neka je $F_X(z)$ kumulativna funkcija distribucije od X, tj. $F_X(z) = P(X \leq z)$. Tada je *generalizirani β-rep distribucije* od X definiran sa:

$$F_X^\beta(z) := \begin{cases} 0, & \text{kada je } z < VaR_\beta(X) \\ \frac{F_X(z)-\beta}{1-\beta}, & \text{kada je } z \geq VaR_\beta(X) \end{cases}. \tag{1.7}$$

Ako je X^β slučajna varijabla čija je kumulativna funkcija distribucije F_X^β (jednadžba (1.7)), tada je CVaR definiran kao:

$$CVaR_\beta(X) := \mathbb{E}[X^\beta],$$

što vodi do definicije 1.3.6 u neprekidnom slučaju ($CVaR_\beta := \mathbb{E}[X \mid X \geq VaR_\beta(X)]$), međutim ova je definicija različita za diskretni slučaj. Za diskretne distribucije gubitaka ili one koje nisu neprekidne, Rockafellar i Uryasev predlažu izračunati CVaR kao težinski prosjek, koji se još zove i *Formula konveksne kombinacije.* Da bismo primijenili formulu konveksne kombinacije, trebamo $\mathrm{VaR}_\beta(X)$ i $\mathrm{CVaR}^+_\beta(X)$, gdje je $\mathrm{CVaR}^+_\beta(X)$ očekivani gubitak *strogo* veći od $\mathrm{VaR}_\beta(X)$, odnosno:

$$CVaR^+_\beta := \mathbb{E}[X \mid X > VaR_\beta(X)].$$

Propozicija 1.3.8. *(CVaR kao težinski prosjek / Formula konveksne kombinacije) Neka je Ψ kumulativna vjerojatnost od $VaR_\beta(X)$, tj. $\Psi = F_X(VaR_\beta(X))$ i definiramo λ kao:*

$$\lambda := \frac{\Psi - \beta}{1 - \beta},$$

za sve $0 \leq \beta < 1$. Tada imamo:

$$CVaR_\beta(X) = \lambda VaR_\beta(X) + (1 - \lambda) CVaR^+_\beta(X). \tag{1.8}$$

Ako se vratimo na primjer 1.3.7, zajedno s (1.8) imamo:

$$\begin{aligned}
CVaR_{0.95}(A) &= 800 \quad (\lambda = 0.2, CVaR^+_{0.95}(A) = 1000),\\
CVaR_{0.95}(B) &= 800 \quad (\lambda = 0.2, CVaR^+_{0.95}(B) = 1000), \text{i}\\
CVaR_{0.95}(A + B) &= 1000 \quad (\lambda = 1, CVaR^+_{0.95}(A + B) = 0).
\end{aligned}$$

Sada možemo uočiti kako je prisutna subaditivnost za CVaR. Naime, $CVaR_{0.95}(A+B) = 1000 \leq CVaR_{0.95}(A) + CVaR_{0.95}(B) = 1600$.

Propozicija 1.3.8 je valjana za sve distribucije gubitaka, uključujući i one neprekidne. Iz propozicije 1.3.8 slijedi da CVaR_β dominira VaR_β, tj. $\mathrm{CVaR}_\beta \geq \mathrm{VaR}_\beta$. Još jedan važan rezultat koji treba naglasiti je taj da je reprezentacija mjere CVaR formulom (1.8) prilično iznenađujuća. Naime, ranije smo pokazali da VaR nije koherentna mjera, a također nije niti CVaR^+. Međutim, obje ove nekoherentne mjere rizika kombinirane su u Formuli konveksne kombinacije za dobivanje mjere CVaR, koja je koherentna i stoga ima mnogo *poželjnija* svojstva.

Kako bismo osigurali bolje razumijevanje Formule konveksne kombinacije, prikazujemo kako se ova formula koristi na primjeru diskretne distribucije gubitaka.

Primjer 1.3.9. *Gubici y_i s odgovarajućim vjerojatnostima prikazani su u tablici* (1.9).

i	1	2	3	4	5	6
y_i	100	200	400	800	900	1000
$P(Y = y_i)$	0.1	0.2	0.5	0.18	0.01	0.01

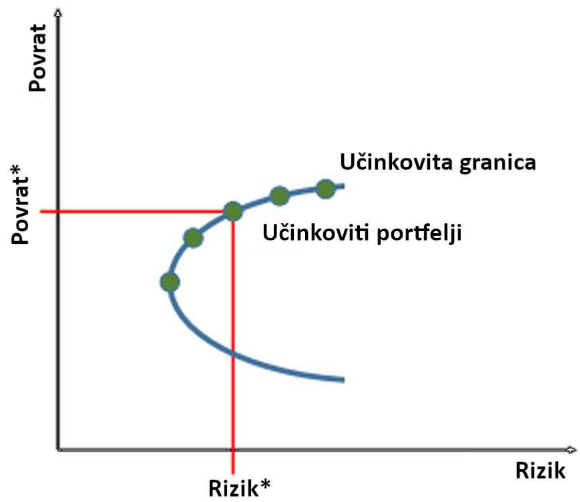
(1.9)

Pretpostavimo da želimo naći 95% CVaR. Kako vrijedi $F_Y(400) = P(Y \leq 400) = 0.8$ *i* $F_Y(800) = P(Y \leq 800) = 0.98$*, slijedi da je* $VaR_{0.95}(Y) = \min\{\alpha : P(Y \leq \alpha) \geq 0.95\} = 800$ *i* $\lambda = \frac{0.98-0.95}{1-0.95} = \frac{3}{5}$*. Također,* $CVaR^{+}_{0.95}(Y)$ *može biti izračunat kao* $\frac{1}{2} \times 900 + \frac{1}{2} \times 1000 = 950$*. Stoga, kada primijenimo jednadžbu* (1.8) *dobivamo:*

$$CVaR_{0.95}(Y) = \frac{3}{5} \times 800 + \frac{2}{5} \times 950 = 860. \tag{1.10}$$

1.4 Učinkoviti portfelji

Kažemo da je portfelj učinkovit ako daje najveći mogući očekivani povrat za određeni rizik. Za formiranje učinkovitih portfelja, potrebno je definirati neke pretpostavke o investitorima i njihovom ponašanju. Prva pretpostavka je da investitori nisu skloni riziku, odnosno da će izabrati portfelj s najmanjim rizikom kada na raspolaganju imaju nekoliko portfelja koji nose isti očekivani povrat, ali različit rizik. S druge strane, ulagači koji nisu skloni riziku odabrat će portfelj s najvišim povratom kada trebaju izabrati između skupa portfelja s istim rizikom, ali različitim očekivanim prinosima. To znači da učinkoviti portfelji leže na učinkovitoj granici koja je prikazana na Slici 1.5.



Slika 1.5: Učinkoviti portfelji (zelene točke) s pripadajućim rizikom (*Rizik**) i povratom (*Povrat**).

Od svih učinkovitih portfelja, kažemo da je optimalan onaj kojeg ulagač najviše preferira.

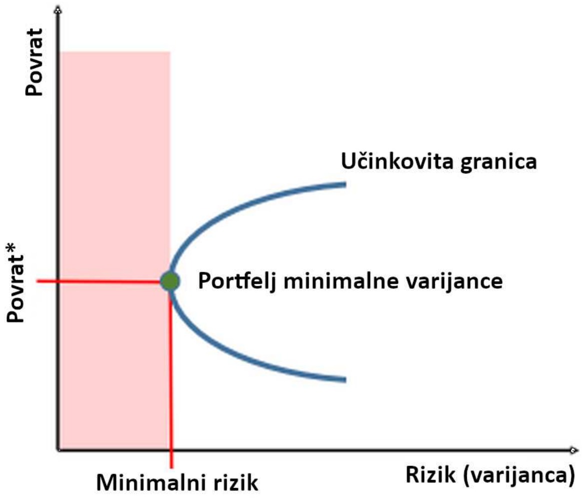
Poglavlje 2

Optimizacija portfelja pomoću mjere Conditional Value-at-Risk

U prvom poglavlju pokazali smo prednosti mjere rizika CVaR u odnosu na druge mjere rizika, od kojih su najvažnije koherentnost i *dobro ponašanje* u situacijama kada gubici nisu simetrično distribuirani (npr. nemaju normalnu distribuciju). U ovome poglavlju dajemo uvod u optimizaciju portfelja, prezentirajući prvi model koji je razvijen u cilju poboljšavanja donošenja odluka ulagača kada formiraju portfelj investicija. Radi se o Markowitzevom modelu, poznatom kao modelu optimizacije srednje vrijednosti i varijance. Nakon toga, prikazujemo CVaR model kojeg su razvili Rockafellar i Uryasev te način na koji možemo transformirati problem tako da bude pogodan za rješavanje metodama linearnog programiranja. Direktna neglatka metoda prikazuje se u trećem poglavlju.

2.1 Markowitzev model optimizacije

Optimizacija srednje vrijednosti i varijance (*Mean-Variance Optimization)* je optimizacijski pristup u teoriji portfelja kojeg je uveo Harry Markowitz 1952. godine. Njega smatramo začetnikom moderne teorije portfelja, a prije nego što je uveo novi pristup ulagači su uglavnom donosili odluke na temelju vlastitih uvjerenja. Markowitz se usredotočio na rizik, uspostavio volatilnost kao glavnu mjeru rizika i pokazao da se diverzifikacijom može smanjiti rizik portfelja. Ipak, iako se koncept diverzifikacije pokazao učinkovitim za reduciranje rizika, kako se broj imovina u portfelju povećava, tako se smanjuje učinak diverzifikacije. Zbog toga diverzifikacija može smanjiti rizik samo do određene mjere. Markowitz je pokazao i kako formirati financijske portfelje koji su učinkoviti. Među takvim portfeljima, onaj s najmanjim rizikom naziva se portfelj minimalne varijance (Slika 2.1).



Slika 2.1: Portfelj minimalne varijance (zelena točka) s pripadajućim rizikom (*Minimalni rizik*) i povratom (*Povrat**).

Definicija 2.1.1. *Portfelj minimalne varijance je portfelj koji se može formirati rješavanjem sljedeće zadaće:*

$$\min_w w^T \Sigma w$$
$$\text{uz } w^T x \leq -R$$
$$w \in S,$$

gdje je Σ *kovarijacijska matrica slučajnog vektora gubitaka* L, $x = \mathbb{E}[L]$ *i* $S = \{w \in \mathbb{R}^n : \sum w_i = 1\}$ *skup dopustivih portfelja.*

Prednost korištenja Markowitzevog modela u odnosu na donošenje odluka isključivo na temelju očekivanja je činjenica da je teško procijeniti očekivane povrate portfelja i da pogreške u procjeni mogu dovesti do neoptimalnog izbora portfelja. Ako pretpostavimo da su očekivani povrati svih imovina u portfelju jednaki, onda se imovine razlikuju samo prema rizičnosti. Uz takvu pretpostavku o očekivanim povratima i uz pretpostavku da je varijanca odgovarajuća mjera rizika, Markowitzev model je vrlo učinkovita metoda jer ovisi samo o kovarijacijskoj matrici portfelja koja može biti precizno procijenjena. Prednost Markowitzevog modela je i ta što je lako razumljiv i jednostavno se koristi. Međutim, model se temelji na volatilnosti koja ima značajan nedostatak (vidjeti stranicu 9).

2.2 Optimizacija očekivanog manjka

Promatramo model kojeg su utemeljili Rockafellar i Uryasev, a koji optimizira portfelj minimiziranjem mjere CVaR ili postavljanjem uvjeta na CVaR pod kojima portfelj može biti optimiziran. Pretpostavljamo da imamo portfelj od n financijskih instrumenata koji je opisan relativnim težinama tih instrumenata $w \in \mathbb{R}^n$, $\sum w_i = 1$.

Neka $L(w, x)$ označava funkciju gubitka povezanog s vektorom odluke $w \in W \subset \mathbb{R}^n$ (težine portfelja) i slučajnim vektorom $x \in \mathbb{R}^m$ (budući povrati imovina u portfelju). Kada x ima distribuciju s gustoćom $p(x)$, tada je vjerojatnost da gubitak $L(w, x)$ ne prelazi prag α dana sa:

$$\Psi(w, \alpha) = \int_{L(w,x) \leq \alpha} p(x) dx, \tag{2.1}$$

gdje je Ψ, kao funkcija od α za fiksni w, kumulativna funkcija distribucije za gubitak povezan s w. Ψ je neopadajuća s obzirom na α i neprekidna zdesna, ali ne nužno slijeva zbog mogućnosti skokova. Radi jednostavnosti, pretpostavljamo da su vjerojatnosne distribucije takve da se ne pojavljuju skokovi, odnosno da je Ψ neprekidna s obzirom na α. VaR i CVaR vrijednosti mogu biti označene redom kao $\alpha_\beta(w)$ i $\phi_\beta(w)$ i dane sa:

$$\alpha_\beta(w) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : \Psi(w, \alpha) \geq \beta\} \tag{2.2}$$

i

$$\phi_\beta(w) = (1 - \beta)^{-1} \int_{L(w,x) \geq \ \alpha_\beta(w)} L(w, x) p(x) dx. \tag{2.3}$$

To znači da je CVaR integral gubitaka $L(w, x)$ koji su veći ili jednaki od vrijednosti VaR ($\alpha_\beta(w)$) podijeljen s $(1 - \beta)$, gdje je β razina pouzdanosti (npr. 95%).
Promatramo sljedeći optimizacijski problem: pronaći optimalne težine w takve da je rizik povezan s izborom portfelja minimalan. Dopustiv skup je:

$$S = \{w \in \mathbb{R}^n : w_i \geq 0, \sum w_i = 1\},$$

međutim, uobičajeno je postaviti i dodatne restrikcije: na primjer, uzeti u obzir portfelje čiji očekivani povrat nije manji od neke vrijednosti R, odnosno $L(w, E(x)) \leq -R$.

CVaR funkciju iz jednadžbe (2.3) teško je koristiti jer uključuje VaR funkciju (2.2). Ako za optimizaciju koristimo $\phi_\beta(w)$, najprije moramo izračunati VaR. Zbog toga se na prvi pogled može činiti kako je teže riješiti optimizacijski problem korištenjem mjere CVaR nego VaR. Međutim, postoji prečac u računanju mjere CVaR. Rockafellar i Uryasev [16] izveli su pomoćnu funkciju za CVaR koja je definirana na sljedeći način:

$$F_\beta(w,\alpha) = \alpha + (1-\beta)^{-1} \int_{x\in\mathbb{R}^m} [L(w,x)-\alpha]^+ p(x)dx,$$
$$\text{gdje}$$
$$[t]^+ = \begin{cases} t, & \text{kada je } t > 0 \\ 0, & \text{kada je } t \leq 0 \end{cases}. \tag{2.4}$$

Napomenimo kako izostavljamo indeks β u α_β radi jednostavnosti notacije.

Rockafellar i Uryasev pokazali su da minimizacija funkcije $F_\beta(w,\alpha)$ daje isti rezultat kao i rješavanje $\phi_\beta(w)$:

$$\phi_\beta(w) = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\beta(w,\alpha). \tag{2.5}$$

β-VaR u odnosu na F_β može biti prikazan kao:

$$\alpha_\beta(w) = \text{donja granica od arg} \min_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\beta(w,\alpha). \tag{2.6}$$

Glavna prednost funkcije $F_\beta(w,\alpha)$ u (2.4) je ta što osim težina portfelja mora biti optimiziran i nivo kvantila α. To znači da primjenjujući optimizacijski pristup pomoću mjere CVaR dobivamo kao pozadinski učinak i izračun mjere VaR. Rockafellar i Uryasev pokazali su da minimizacija CVaR najčešće dovodi do skoro optimalne mjere VaR jer VaR nikada ne prelazi CVaR. Stoga portfelji s niskim rizikom u smislu mjere CVaR također moraju imati nizak VaR. Dodatno, radi se o konveksnoj funkciji kada je $L(w,x)$ konveksna što znatno olakšava optimizaciju. To je u oštrom kontrastu s optimizacijom portfelja s obzirom na VaR, kada imamo funkciju cilja koja nije konveksna i uključuje mnogo lokalnih minimuma. Prema gore navedenom, problem minimizacije mjere CVaR povezan s izborom $w \in S$ ekvivalentan je minimizaciji $F_\beta(w,\alpha)$ s obzirom na sve $(w,\alpha) \in S \times \mathbb{R}$:

$$\min_w \phi_\beta(w) = \min_{\alpha,w} F_\beta(w,\alpha).$$

2.3 Postavljanje zadaće

Evaluacija funkcije cilja F_β uključuje višedimenzionalan integral na R^m koji možemo izračunati koristeći Monte-Carlo metodu. Zato aproksimiramo integral uzorkovanjem vjerojatnosne distribucije od x prema njenoj gustoći $p(x)$. Uzorkovanjem generiramo kolekciju od q vektora $x_1,\dots,x_q \in \mathbb{R}^m$ koje nazivamo scenariji. F_β je dana aproksimacijskom formulom kao:

$$\hat{F}_\beta(w,\alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{i=1}^{q} [t_i - \alpha]^+, \tag{2.7}$$

gdje $t_i = L(w, x_i)$ predstavlja gubitak portfelja povezan sa scenarijem i. $\hat{F}_\beta$ je konveksna i po dijelovima linearna s obzirom na α. Konveksna je i s obzirom na w, dokle god je $L(w, x)$ konveksna funkcija (u (2.7) pretpostavljamo da jest konveksna). Za linearne portfelje, $\hat{F}_\beta$ je konveksna i po dijelovima linearna s obzirom na w. Možemo formulirati dva problema.

Problem A: Izračun od CVaR i VaR za fiksirane portfelje

$$\begin{gathered} \min_{\alpha} \ \hat{F}_\beta(w, \alpha) \\ \text{uz } w \text{ fiksan.} \end{gathered} \tag{2.8}$$

Problem B: Izračun optimalnog portfelja

$$\begin{gathered} \min_{\alpha, w} \ \hat{F}_\beta(w, \alpha) \\ \text{uz } w \in S \cap D, \end{gathered} \tag{2.9}$$

gdje je dopustiv skup presjek jediničnog simpleksa S i kompaktnog podskupa D koji predstavlja posebne zahtjeve investitora, kao npr. portfelj s očekivanim povratom barem R, odnosno:

$$D = \{w \in S : L(w, E(x)) \leq -R\}.$$

Kao specijalan slučaj možemo promatrati linearni portfelj s funkcijom gubitka $L(w, x) = -w^t x$. U tom slučaju Problem A i Problem B mogu biti preoblikovani u probleme linearnog programiranja. Minimizacija funkcije cilja $\hat{F}_\beta$ nije sama po sebi linearni problem jer (2.7) sadrži izraz $[-w^t x_i - \alpha]^+$ koji osigurava da u razmatranje ulaze jedino gubici koji su jednaki ili premašuju VaR. Da bismo postavili zadaću u oblik pogodan za rješavanje metodama linearnog programiranja, moramo uvesti pomoćne varijable $\epsilon_i, i = 1, \ldots, q$ i neke dodatne linearne uvjete kako bismo održali konzistentnost s početnom zadaćom.

Problem A': Izračun od CVaR i VaR za fiksirane portfelje

$$\begin{gathered} \min_{\alpha, \epsilon} \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{i=1}^{q} \epsilon_i \\ \text{uz } \alpha + \epsilon_i \geq t_i = L(w, x_i), \ i = 1, \ldots, q, \\ \epsilon_i \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}, \\ w \text{ fiksan.} \end{gathered} \tag{2.10}$$

Problem B': Izračun optimalnog linearnog portfelja

$$
\begin{aligned}
&\min_{\alpha,w,\epsilon} \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{i=1}^{q} \epsilon_i \\
&\text{uz } \alpha + \epsilon_i + \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \geq 0, \ i = 1, \ldots, q, \\
&w \in S \cap D, \\
&\epsilon_i \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Ovdje x_{ij} označava j-tu komponentu vektora x_i.

Objasnimo uvjet $\alpha + \epsilon_i + \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \geq 0$. Ako je $-w^t x_i - \alpha$ negativna vrijednost (gubitak je manji od VaR), vrijedi da je $[-w^t x_i - \alpha]^+ = 0$. Tada je $w^t x_i + \alpha$ pozitivna vrijednost i ϵ_i može biti 0 jer je uvjet već ispunjen. U drugome slučaju, gdje je $-w^t x_i - \alpha$ pozitivna vrijednost, vrijedi $[-w^t x_i - \alpha]^+ = -w^t x_i - \alpha$. Ovdje ϵ_i ne smije biti manji od $-w^t x_i - \alpha$ kako bi promatrani uvjet bio zadovoljen. Imamo dva pristupa koja možemo primijeniti u rješavanju problema A i B. Prvi pristup je riješiti problem direktno, koristeći metode neglatke optimizacije. Drugi pristup je transformacijom doći do problema A' i B' te zatim primijeniti metode linearnog programiranja.

2.4 Linearno programiranje

Promotrimo osnovni koncept linearnog programiranja koji koristimo kada (2.9) transformiramo u (2.11) na način koji smo ranije opisali.

Linearno programiranje bavi se problemima optimizacije u kojima je funkcija cilja linearna funkcija, a uvjeti jednakosti i nejednakosti su također linearni. Presjek linearnih uvjeta formira poliedarski skup. Minimizacijski problem u standardnoj formi glasi:

$$
\begin{aligned}
&\min f^T x \\
&Ax \leq b \\
&x \geq 0,
\end{aligned}
$$

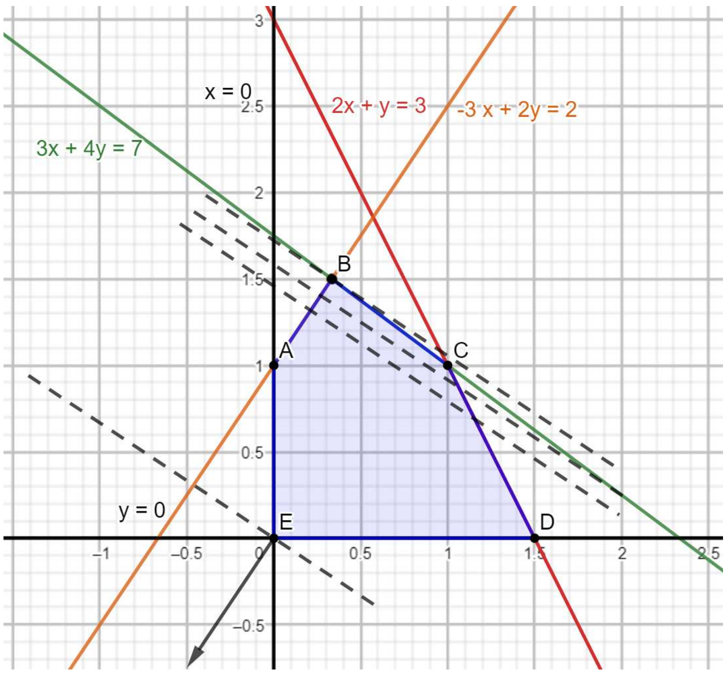
gdje je x vektor varijabli koje želimo optimizirati, f i b su vektori s poznatim vrijednostima, A je matrica s poznatim koeficijentima. Nejednakosti $Ax \leq b$ i $x \geq 0$ su ograničenja koja određuju poliedarski skup (dopustivi skup) na kojemu optimiziramo funkciju cilja. Prikažimo jedan jednostavan primjer:

Primjer 2.4.1. *Neka je $x = (x_1, x_2)$. Želimo pronaći x koji rješava sljedeći problem:*

$$\begin{aligned} \min f^T x &= (-2\ \ -3)(x_1\ x_2)^T = -2x_1 - 3x_2 \\ Ax &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = b \\ x &\geq 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 &\to min \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 7 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$



Slika 2.2: Dopustivi skup iz Primjera 2.4.1 (prikazan plavim sjenčanjem).

Dopustivi skup je presjek svih osjenčanih područja koja smo dobili promatranjem postavljenih uvjeta. Nakon što smo odredili dopustivi skup, moramo odrediti gradijent funkcije *cilja: ∇f=(-2, -3). Nivo skupovi su pravci s normalom ∇f (na Slici 2.2 označeni isprekidanim linijama). Budući da gradijent pokazuje smjer rasta, a mi tražimo minimum, želimo pronaći onaj nivo skup koji je najudaljeniji od nivo skupa koji sadrži ishodište i ima presjek s dopustivim skupom. Vidimo da traženi nivo skup siječe dopustivi skup u točki B te zaključujemo da je B optimalna točka, odnosno rješenje promatrane zadaće. Koordinate točke B dobivamo na način da pronađemo sjecište pravaca na kojima ona leži.*

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ -3x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_1, x_2) = (\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$$

Za kraj uvrstimo optimalnu točku u funkciju cilja kako bismo odredili minimum i dobijemo:

$$\min f(x) = f(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}) = -2 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{31}{6}.$$

U primjeru 2.4.1 koristili smo geometrijski pristup. Zadaća linearnog programiranja algebarski se može riješiti simpleks metodom ili metodom unutarnje točke.

Poglavlje 3

Pristup neglatke optimizacije

U mnogim je slučajevima *skupo* koristiti linearno programiranje prilikom rješavanja Problema (2.9). Primjerice, u situacijama kada promatramo puno scenarija moramo uvesti veliki broj pomoćnih varijabli i dodatnih uvjeta. To značajno usporava pronalaženje rješenja i smanjuje učinkovitost. Stoga nam je cilj prikazati direktnu primjenu metode neglatke optimizacije za rješavanje Problema (2.9) te navesti prednosti takvog pristupa. Da bismo bili u stanju prikazati direktno rješavanje problema pomoću metode neglatke optimizacije, najprije uvodimo neke osnovne pojmove i odgovarajuće teorijske rezultate. Činjenica da je funkcija cilja (2.7) koju želimo minimizirati konveksna funkcija, uvelike pojednostavljuje problem.

3.1 Neglatka konveksna analiza

Definicija 3.1.1. *Kažemo da je funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konveksna ako vrijedi:*

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)(\forall \alpha \in [0, 1]) \;\; f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y).$$

Definicija 3.1.2. *Funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je lokalno Lipschitz neprekidna s konstantom* L *u točki* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *ako postoji* $\epsilon > 0$ *takav da vrijedi:*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|_2 \;\; \text{za sve } x, y \in B(x_0, \epsilon).$$

Kažemo da je funkcija f lokalno Lipschitz neprekidna ako je lokalno Lipschitz neprekidna u svakoj točki domene.

Teorem 3.1.3. *Neka je* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija. Tada je* f *lokalno Lipschitz neprekidna.*

Dokaz. Vidi str. 8-10 u [13]. □

Pokažimo sada da konveksne funkcije posjeduju obilježje koje ih čini *bliskima* s diferencijabilnim funkcijama.

Definicija 3.1.4. *Neka je $x \in \mathbb{R}^n$. Kažemo da je funkcija f diferencijabilna u smjeru vektora v u točki x ako postoji sljedeći limes:*

$$f'(x, v) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha}.$$

Vrijednost f'(x,v) nazivamo derivacija funkcije f u točki x u smjeru v.

Teorem 3.1.5. *Konveksna funkcija je diferencijabilna u svakom smjeru, u svakoj unutarnjoj točki domene.*

Dokaz. Vidi str. 122 i 123 u [15]. □

Subgradijentne metode

Razmatramo bezuvjetni problem nelinearnog programiranja u obliku:

$$\min f(x),$$

gdje je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nediferencijabilna konveksna funkcija. Ovdje ne možemo koristiti uvjete optimalnosti koji se temelje na gradijentu jer u ovome slučaju gradijent nije definiran. Ipak, pojam gradijenta možemo generalizirati na sljedeći način:

Definicija 3.1.6. *Subdiferencijal funkcije f u točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je skup:*

$$\partial f(x_0) = \{s \in \mathbb{R}^n : s^T(x - x_0) \le f(x) - f(x_0), \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

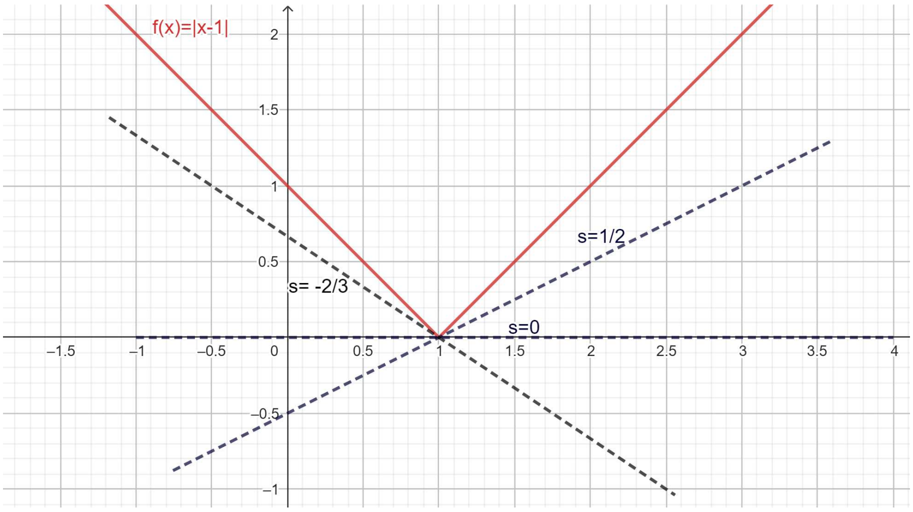
Svaki element $s \in \partial f(x_0)$ zovemo subgradijent funkcije f u točki x_0.

Kada je funkcija f diferencijabilna, subgradijent je jednak gradijentu. Kada f nije diferencijabilna u točki x_0, tada uobičajeno postoji mnogo subgradijenata u x_0.

Primjer 3.1.7. *Pogledajmo konveksnu funkciju jedne varijable:*

$$f(x) = \max\{1 - x, x - 1\} = |x - 1|.$$

Kao što je vidljivo na Slici 3.1, ova funkcija nije diferencijabilna u točki $x = 1$ i lako se provjeri da je bilo koji vektor s koji zadovoljava $-1 \le s \le 1$ subgradijent od f u točki $x = 1$, odnosno $\partial f(1) = [-1, 1]$. Neki subgradijenti i linearne aproksimacije koje oni definiraju prikazani su na Slici 3.1.



Slika 3.1: Funkcija $f(x) = |x - 1|$.

Uočimo da svaki subgradijent funkcije u točki definira *tangentu* na funkciju koja uvijek ostaje ispod grafa funkcije - to je svojstvo na kojem se zasniva definicija subgradijenata konveksne funkcije.

Teorem 3.1.8. *(Uvjet optimalnosti) Neka je f nediferencijabilna konveksna funkcija. Funkcija f postiže minimum u točki x^* ako i samo ako $0 \in \partial f(x^*)$.*

Dokaz.
$\Leftarrow$ Neka je $0 \in \partial f(x^*)$. Tada vrijedi $f(x) \geq f(x^*) + 0^T(x - x^*) = f(x^*)$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ Ako je $f(x) \geq f(x^*)$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$, onda je $0 \in \partial f(x^*)$ prema definiciji 3.1.6. □

U primjeru 3.1.7, $0 \in \partial f(1)$ pa f postiže minimum u $x^* = 1$.

Prije nego što prijeđemo na opis subgradijentne metode, navedimo još rezultat koji povezuje pojmove subdiferencijala i derivacije u smjeru.

Teorem 3.1.9. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:*

(1) $f'(x, v) = \max\{s^T v : s \in \partial f(x)\}$ za sve $v \in \mathbb{R}^n$,

(2) $\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n : f'(x, v) \geq s^T v$ za sve $v \in \mathbb{R}^n\}$.

Dokaz. Vidi str. 14 i 15 u [13]. □

Sada možemo dati uvjet optimalnosti na temelju derivacije u smjeru u točki x^*. Iz Teorema 3.1.9 jasno je da konveksna funkcija f postiže minimum u točki x^* ako i samo ako $f'(x^*, v) \geq 0$.

Kada smo geometrijskim pristupom rješavali problem u Primjeru 2.4.1, koristili smo činjenicu da gradijent pokazuje smjer najbržeg rasta, odnosno da suprotan smjer pokazuje smjer najstrmijeg silaska. Metoda najstrmijeg silaska može se proširiti na nediferencijabilne konveksne funkcije tako da izračunamo bilo koji smjer subgradijenta i koristimo suprotan smjer za sljedeći korak. Za razliku od gradijenata, subgradijenti ne pokazuju uvijek smjer rasta funkcije. Ipak, može se jamčiti konvergencija do optimalne točke tako da se izabere korak odgovarajuće veličine. Generalizirana subgradijentna metoda može se opisati kako slijedi:

1. **Inicijalizacija**: Kreni od bilo koje točke x^0. Postavi $i = 0$.

2. **Iteracija *i***: Izračunaj subgradijent s^i od f u točki x^i. Ako je s^i jednak 0 ili blizu 0, stop. Inače, postavi $x^{i+1} = x^i - \alpha_i s^i$, gdje je α_i veličina koraka, i napravi sljedeću iteraciju.

3.2 Diskretna gradijentna metoda

Vratimo se na Problem (2.9). To je problem neglatke optimizacije s linearnim uvjetima jednakosti i nejednakosti. Pokazat ćemo kako riješiti ovakvu zadaću diskretnom gradijentnom metodom. Da bismo mogli upotrijebiti navedenu metodu, prvo trebamo zadaću koja sadrži skup linearnih uvjeta preoblikovati u bezuvjetnu zadaću optimizacije.

Promatramo sljedeći problem minimizacije s linearnim uvjetima:

$$\min f(x) \tag{3.1}$$

$$\text{uz } x \in X = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay = b\}, \tag{3.2}$$

pri čemu pretpostavljamo da je funkcija cilja f konveksna i općenito neglatka, A $m \times n$ matrica, $b \in \mathbb{R}^m$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavljamo da je rang matrice A jednak m i da je $m < n$. U tom slučaju možemo riješiti sustav linearnih jednadžbi (3.2). Kako je $m < n$, možemo podijeliti varijable $x_1, \ldots, x_n$ u dva dijela: $x = (x_B, x_N)$ gdje $x_B \in \mathbb{R}^{n-m}$, $x_N \in \mathbb{R}^m$. Prikažimo matricu A kao:

$$A = (A_1, A_2),$$

gdje je A_1 $m \times (n - m)$ matrica koja sadrži stupce originalne matrice koji odgovaraju varijablama x_B, a A_2 $m \times m$ matrica koja sadrži stupce povezane s varijablama x_N i A_2 nije singularna. Sada sustav (3.2) može biti zapisan u sljedećem obliku:

$$A_1 x_B + A_2 x_N = b.$$

Lako slijedi rješenje ovog sustava s obzirom na nebazične varijable x_N:

$$x_N = A_2^{-1}(b - A_1 x_B).$$

Dodatno, x_N možemo zapisati kao:

$$x_N = Bx_B + b^1,$$

gdje je:

$$b^1 = A_2^{-1} b, B = -A_2^{-1} A_1.$$

Funkcija cilja može biti preoblikovana u:

$$f(x) = f(x_B, x_N) = f(x_B, Bx_B + b^1).$$

Definiramo sljedeću funkciju:

$$h(y) = f(y, By + b^1),\ \ y \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Definicija 3.2.1. *Za konveksnu funkciju $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kažemo da je pravilna ako vrijedi: $f(x) < +\infty$ za neki $x \in D$ i $f(x) > -\infty$ za svaki $x \in D$.*

Propozicija 3.2.2. *Neka je f pravilna konveksna funkcija na $\mathbb{R}^n$. Tada je h pravilna konveksna funkcija na $\mathbb{R}^{n-m}$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} h(\alpha y + (1-\alpha)z) &= f(\alpha y + (1-\alpha)z, B(\alpha y + (1-\alpha)z) + b^1) \\ &= f(\alpha y + (1-\alpha)z, \alpha(By + b^1) + (1-\alpha)(Bz + b^1)). \end{aligned}$$

Označimo:

$$x^1 = (y, By + b^1) \in \mathbb{R}^n,\ \ x^2 = (z, Bz + b^1) \in \mathbb{R}^n.$$

Sada imamo:

$$(\alpha y + (1-\alpha)z, \alpha(By + b^1) + (1-\alpha)(Bz + b^1)) = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2,$$

pa zbog konveksnosti funkcije f slijedi:

$$\begin{aligned} h(\alpha y + (1-\alpha)z) &= f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \\ &\leq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2) \\ &= \alpha f(y, By + b^1) + (1-\alpha)f(z, Bz + b^1) \\ &= \alpha h(y) + (1-\alpha)h(z). \end{aligned}$$

Činjenica da je h pravilna je trivijalna. □

Uzmimo bilo koji $x \in X$. Jasno je da se konus dopustivih smjerova u točki $x \in X$ može prikazati kako slijedi:

$$K(x) = \{g \in \mathbb{R}^n : Ag = 0\}.$$

Razmatramo sljedeći minimizacijski problem:

$$\text{minimizirati } h(y) \text{ uz } y \in \mathbb{R}^{n-m}. \tag{3.3}$$

Propozicija 3.2.3.
1) Neka je $x^* \in X$ rješenje (3.1)-(3.2). *Tada postoji $y^* \in \mathbb{R}^{n-m}$ takav da $x^* = (y^*, By^* + b^1)$ i y^* je rješenje od* (3.3).
2) Neka je $y^* \in \mathbb{R}^{n-m}$ rješenje (3.3). *Tada je $x^* = (y^*, By^* + b^1)$ rješenje* (3.1)-(3.2).

Dokaz.
1) Budući da je f pravilna konveksna funkcija, to je diferencijabilna u svakom smjeru. Pokazali smo da je i h pravilna konveksna funkcija pa je također i h diferencijabilna u svakom smjeru na $\mathbb{R}^{n-m}$ i za svaki $y, e \in \mathbb{R}^{n-m}, e \neq 0$:

$$\begin{aligned} h'(y,e) &= \lim_{\alpha \to +0} \frac{h(y+\alpha e) - h(y)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(y+\alpha e, B(y+\alpha e) + b^1) - f(y, By + b^1)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(y+\alpha e, By + b^1 + \alpha Be) - f(y, By + b^1)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Označimo:

$$x = (y, By + b^1),\ \ g = (e, Be) \in \mathbb{R}^n.$$

Tada:

$$\begin{aligned} h'(y,e) &= \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x+\alpha g) - f(x)}{\alpha} \\ &= f'(x,g). \end{aligned}$$

Neka je $x^* \in X$ rješenje (3.1)-(3.2) i neka je $y^* = x_B^* \in \mathbb{R}^{n-m}$ vektor baznih varijabli. Jasno je da je $x^* = (y^*, By^* + b^1)$. Iz nužnog i dovoljnog uvjeta za minimum slijedi da:

$$f'(x^*, g) \geq 0 \text{ za sve } g \in K(x).$$

Uzmimo bilo koji smjer $e \in \mathbb{R}^{n-m}$. Tada je $g = (e, Be) \in K(x)$ za bilo koji $x \in X$.
Doista, budući da je:

$$\begin{aligned} Ag &= (A_1, A_2)(e, Be)^T \\ &= (A_1 e + A_2(Be)) \\ &= (A_1 e + A_2(-A_2^{-1} A_1 e)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

to je $g \in K(x)$. Tako za svaki smjer $e \in \mathbb{R}^{n-m}$ u točki y^* imamo:

$$h'(y^*, e) = f'(x^*, (e, Be)) \geq 0.$$

Kako je h konveksna funkcija, y^* je rješenje od (3.3).

2) Neka je y^* rješenje od (3.3). Jasno je da $x^* = (y^*, By^* + b^1) \in X$. Prvo moramo dokazati da za svaki $g \in K(x)$ postoji $e \in \mathbb{R}^{n-m}$ takav da je $g = (e, Be)$. Kako je $g \in K(x)$, slijedi $Ag = 0$. Označimo s $g_B \in \mathbb{R}^{n-m}$ vektor koji sadrži bazične varijable, a s $g_N \in \mathbb{R}^m$ vektor koji sadrži nebazične varijable. Tada imamo:

$$(A_1, A_2)(g_B, g_N)^T = 0,$$

i zbog toga:

$$g_N = -A_2^{-1} A_1 g_B = B g_B.$$

Neka je $e = g_B$. Tada:

$$g = (e, Be).$$

Iz nužnog i dovoljnog uvjeta za minimum slijedi:

$$h'(y^*, e) \geq 0 \text{ za bilo koji } e \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Za bilo koji $g \in K(x^*)$ postoji $e \in \mathbb{R}^{n-m}$ takav da vrijedi:

$$f'(x^*, g) = h'(y^*, e) \geq 0.$$

Budući da je f konveksna funkcija, to je x^* rješenje (3.1)-(3.2). □

Ovime smo pokazali da problem (3.1)-(3.2) može biti reduciran na bezuvjetni minimizacijski problem (3.3). To je neglatki konveksni optimizacijski problem, stoga za njegovo rješavanje možemo primijeniti diskretnu gradijentnu metodu.

Definicija diskretnog gradijenta

Neka je ρ lokalno Lipschitz neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^n$. Neka je:

$$S_1 = \{g \in \mathbb{R}^n : \|g\| = 1\},\ G = \{e \in \mathbb{R}^n : e = (e_1, \ldots, e_n), |e_j| = 1, j = 1, \ldots, n\},$$

$$P = \{z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : z(\lambda) > 0, \lambda > 0, \lambda^{-1} z(\lambda) \downarrow 0, \text{ako } \lambda \downarrow 0\},$$

$$I(g, \alpha) = \{i \in \{1, \ldots, n\} : |g_i| \geq \alpha\},$$

gdje je $\alpha \in (0, n^{-1/2}]$ fiksan broj.

S_1 je jedinična sfera, G je skup vrhova jedinične hiperkocke na $\mathbb{R}^n$ i P je skup univarijantnih pozitivnih infinitezimalnih funkcija.

Odaberimo proizvoljni $x \in \mathbb{R}^n, g \in S_1, i \in I(g, \alpha)$ i definirajmo točku:

$$x_i^0 = x + \lambda g.$$

Neka je $e(\beta) = (\beta e_1, \beta^2 e_2, \ldots, \beta^n e_n)$, gdje je $e \in G, \beta \in (0, 1]$. Definiramo niz od n točaka na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
x_i^1 &= x_i^0 + (h_1, 0, \ldots, 0)\\
x_i^2 &= x_i^1 + (0, h_2, 0, \ldots, 0)\\
x_i^3 &= x_i^2 + (0, 0, h_3, 0, \ldots, 0)\\
&\ldots\\
x_i^{i-1} &= x_i^{i-2} + (0, \ldots, 0, h_{i-1}, 0, \ldots, 0)\\
x_i^{i+1} &= x_i^{i-1} + (0, \ldots, 0, 0, 0, h_{i+1}, 0, \ldots, 0)\\
x_i^{i+2} &= x_i^{i+1} + (0, \ldots, 0, 0, 0, 0, h_{i+2}, 0, \ldots, 0)\\
&\ldots\\
x_i^n &= x_i^{n-1} + (0, \ldots, 0, h_n),
\end{aligned}$$

gdje je $h_j = -z(\lambda)e_j(\beta), e_j(\beta) = \beta^j e_j, z \in P.$

Definicija 3.2.4. *Diskretni gradijent funkcije ρ u točki $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor $\Gamma^i(x, g, e, z, \lambda, \beta) = (\Gamma_1^i, \ldots, \Gamma_n^i) \in \mathbb{R}^n, g \in S_1, i \in I(g, \alpha)$, sa sljedećim koordinatama:*

$$\Gamma_j^i = [z(\lambda)e_j(\beta)]^{-1}\left[\rho(x_i^{j-1}) - \rho(x_i^j)\right],\ j = 1, \ldots n, j \neq i,$$

$$\Gamma_i^i = (\lambda g_i)^{-1}\left[\rho(x_i^n) - \rho(x) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \Gamma_j^i(\lambda g_j - z(\lambda)e_j(\beta))\right].$$

Napomena 3.2.5. *Iz definicije 3.2.4 slijedi da za računanje diskretnog gradijenta $\Gamma^i(x, g, e, z, \lambda, \beta)$, $i \in I(g, \alpha)$ definiramo niz točaka:*

$$x_i^0, \ldots, x_i^{i-1}, x_i^{i+1}, \ldots, x_i^n.$$

Računanje diskretnog gradijenta uključuje evaluaciju funkcije cilja ρ u svakoj točki ovog niza.

Napomena 3.2.6. *Diskretni gradijent je definiran s obzirom na dani smjer $g \in S_1$. Možemo vidjeti da prilikom računanja jednog diskretnog gradijenta moramo izračunati $(n + 1)$ vrijednosti funkcije ρ: u točki x i u točkama $x_i^0, \ldots, x_i^{i-1}, x_i^{i+1}, \ldots, x_i^n, i \in I(g, \alpha)$. Da bismo izračunali još jedan diskretni gradijent u istoj točki x s obzirom na drugi smjer $g^1 \in S_1$ trebamo izračunati ovu funkciju n puta, jer smo već izračunali ρ u točki x.*

Računanje smjera silaska

Promatramo sljedeći bezuvjetni minimizacijski problem:

$$\text{minimizirati } \rho(x) \text{ uz } x \in \mathbb{R}^n,$$

uz pretpostavku da je ρ Lipschitz neprekidna.

U suštini diskretne gradijentne metode leži računanje smjera silaska funkcije cilja ρ. Zbog toga, prije nego što prikažemo algoritam same metode prikazujemo algoritam za računanje navedenog smjera.

Neka je $z \in P, \lambda > 0, \beta \in (0, 1]$, broj $c \in (0, 1)$ i neka je dana tolerancija $\delta > 0$.

Algoritam 1: **Računanje smjera silaska**

Ulazni podaci: Točka $x \in \mathbb{R}^n$, funkcija cilja ρ.

Korak 1. Izaberi bilo koji $g^1 \in S_1, e \in G, i \in I(g^1, \alpha)$ i izračunaj diskretni gradijent $v^1 = \Gamma^i(x, g^1, e, z, \lambda, \beta)$. Postavi $\overline{D}_1(x) = \{v^1\}$ i $k = 1$.

Korak 2. Izračunaj vektor $||w^k||^2 = \min\{||w||^2 : w \in \overline{D}_k(x)\}$. Ako je:

$$||w^k|| \leq \delta,$$

onda stop. Inače, idi na Korak 3.

Korak 3. Izračunaj smjer pretraživanja prema $g^{k+1} = -||w^k||^{-1} w^k$.

Korak 4. Ako je:

$$\rho(x + \lambda g^{k+1}) - \rho(x) \leq -c\lambda ||w^k||,$$

onda stop. Inače, idi na Korak 5.

Korak 5. Izračunaj diskretni gradijent:

$$v^{k+1} = \Gamma^i(x, g^{k+1}, e, z, \lambda, \beta), i \in I(g^{k+1}, \alpha),$$

konstruiraj skup $\overline{D}_{k+1}(x) = \text{co}\,\{\overline{D}_k(x) \bigcup \{v^{k+1}\}\}$, postavi $k = k + 1$ i idi na Korak 2.

Pojasnimo *Algoritam 1*. U Koraku 1 računamo prvi diskretni gradijent s obzirom na početni smjer $g^1 \in \mathbb{R}^n$. U Koraku 2 računamo udaljenost između konveksne ljuske $\overline{D}_k$

svih izračunatih diskretnih gradijenata i ishodišta. Ovaj problem možemo riješiti koristeći Wolfeov algoritam koji je numerički vrlo učinkovit. Ako je udaljenost manja od tolerancije $\delta > 0$, prihvaćamo točku x kao aproksimaciju stacionarne točke (Korak 2), inače računamo drugi smjer traženja u Koraku 3. U Koraku 4 provjeravamo radi li se o smjeru silaska. Ako da, onda se algoritam zaustavlja, u protivnom računamo novi diskretni gradijent s obzirom na taj smjer u Koraku 5 i ažuriramo skup $\overline{D}_k$. U svakoj iteraciji k poboljšavamo aproksimaciju $\overline{D}_k$ subdiferencijala funkcije ρ. Dokazano je da se *Algoritam 1* zaustavlja (vidi [2]).

Minimizacijski algoritam

Sada imamo sve što nam je potrebno za opis algoritma diskretne gradijentne metode. Za sljedeće nizove vrijedi: $\delta_k > 0, z_k \in P, \lambda_k > 0, \beta_k \in (0,1], \delta_k \to +0, z_k \to +0, \lambda_k \to +0, \beta_k \to +0, k \to +\infty$ i neka su brojevi $c_1 \in (0,1)$ i $c_2 \in (0, c_1]$ zadani.

Algoritam 2: **Diskretna gradijentna metoda**

Korak 1. Izaberi bilo koju početnu točku $x^0 \in \mathbb{R}^n$ i postavi $k = 0$.

Korak 2. Postavi $s = 0$ i $x^k_s = x^k$.

Korak 3. Primijeni *Algoritam 1* za računanje smjera silaska u $x = x_k, \delta = \delta_k, \lambda = \lambda_k, \beta = \beta_k, c = c_1$. Ovaj se algoritam zaustavlja nakon konačno mnogo iteracija $l > 0$. Kao rezultat dobivamo skup $\overline{D}_l(x^k_s)$ i element v^k_s takav da vrijedi:

$$||v^k_s||^2 = \min\{||v||^2 : v \in \overline{D}_l(x^k_s)\}.$$

Nadalje, vrijedi ili $||v^k_s|| \leq \delta_k$, ili za smjer traženja $g^k_s = -||v^k_s||^{-1} v^k_s$ vrijedi:

$$\rho(x^k_s + \lambda_k g^k_s) - \rho(x^k_s) \leq -c_1 \lambda_k ||v^k_s||.$$

Korak 4. Ako je:

$$||v^k_s|| \leq \delta_k,$$

onda postavi $x^{k+1} = x^k_s, k = k + 1$ i idi na Korak 2. Inače, idi na Korak 5.

Korak 5. Konstruiraj sljedeću iteraciju $x^k_{s+1} = x^k_s + \sigma_s g^k_s$, gdje je σ_s definiran kako slijedi:

$$\sigma_s = \arg\max\{\sigma \geq 0 : \rho(x^k_s + \sigma g^k_s) - \rho(x^k_s) \leq -c_2 \sigma ||v^k_s||\}.$$

Korak 6. Postavi $s = s + 1$ i idi na Korak 3.

Za točku $x^0 \in \mathbb{R}^n$ promatramo skup $M(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) \leq \rho(x^0)\}$. Pretpostavimo da je ρ konveksna funkcija. Označimo s $\partial\rho(x)$ subdiferencijal funkcije ρ.

Teorem 3.2.7. *Pretpostavimo da je skup $M(x^0)$ ograničen za početne točke $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Tada svako gomilište niza $\{x^k\}$ pripada skupu $X^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \in \partial\rho(x)\}$.*

Beliakov i Bagirov [4] proveli su istraživanje u kojemu su usporedili razne metode za računanje mjere CVaR i pronalazak optimalnog portfelja. Rezultati istraživanja pokazali su da korištenje diskretne gradijentne metode značajno povećava učinkovitost rješenja u odnosu na pristup gdje najprije transformiramo problem te potom primijenimo metode linearnog programiranja. Neke od glavnih prednosti direktnog korištenja metode neglatke optimizacije su: kraće vrijeme računanja, veća preciznost (korištenje većeg broja scenarija) te mogućnost pronalaženja optimalnog portfelja i u slučaju kada portfelj nije linearan. Poboljšanja se najbolje uočavaju u situacijama kada želimo optimizirati portfelje umjerene veličine, a promatramo veliki broj scenarija.

Bibliografija

[1] C. Acerbi i D. Tasche, *On the coherence of expected shortfall*, Journal of Banking & Finance **26** (2002), 1487–1503.

[2] A. M. Bagirov, *Minimization Methods for One Class of Nonsmooth Functions and Calculation of Semi-Equilibrium Prices*, str. 147–175, Springer US, Boston, MA, 1999, ISBN 978-1-4613-3285-5, `https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3285-5_8`.

[3] A. M. Bagirov, B. Karasözen i M. Sezer, *Discrete Gradient Method: Derivative-Free Method for Nonsmooth Optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications **137** (2008), 317–334.

[4] G. Beliakov i A. Bagirov, *Non-smooth optimization methods for computation of the conditional value-at-risk and portfolio optimization*, Optimization **55** (2006), 459–479.

[5] G. Cornuejols i R. Tutuncu, *Optimization Methods in Finance*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 2006.

[6] D. Drusvyatskiy, *Convex Analysis and Nonsmooth Optimization*, University of Washington, Seattle, 2020.

[7] S. Horvat i P. Brčić, *Uvod u optimizaciju - Bilješke s predavanja i vježbi*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2019.

[8] M. Huzak i S. Slijepčević, *Statistika - Statistički modeli 1, Prezentacije za predavanja*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2021.

[9] J. Kisiala, *Conditional Value-at-Risk: Theory and Applications*, 2015, `https://arxiv.org/abs/1511.00140`.

[10] P. Krokhmal, S. Uryasev i J. Palmquist, *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints*, Journal of Risk **4** (2001), 43–68.

[11] M. Kull, *Portfolio Optimization for Constrained Shortfall Risk: Implementation and IT Architecture Considerations*, Master thesis, ETH Zurich, 2014.

[12] Jiajin Li, Anthony Man Cho So i Wing Kin Ma, *Understanding Notions of Stationarity in Non-Smooth Optimization*, 2020, `https://arxiv.org/abs/2006.14901`.

[13] M.M. Mäkelä i P. Neittaanmäki, *Nonsmooth optimization*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, 1992.

[14] A. Naumoski, S. Gaber i V. Gaber-Naumoska, *Empirical Distribution of Stock Returns of Southeast European Emerging Markets*, UTMS Journal of Economics **8** (2017), 67–77.

[15] Y. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*, Kluwer Academic Publishers, 2004, ISBN 1-4020-7553-7.

[16] S. Uryasev i R. T. Rockafellar, *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk **2** (2000), 21–41.

[17] ______, *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, Journal of Banking & Finance **26** (2002), 1443–1471.

[18] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 1*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2021.

Sažetak

Cilj ovog rada bio je prikazati primjenu neglatke optimizacije u teoriji portfelja. Najprije smo dali pregled teorije koja je vezana uz povrate portfelja, njihove distribucije, učinkovitost i rizičnost. Nakon toga smo prikazali najpoznatije mjere rizika koje se koriste u optimizaciji portfelja te sugerirali korištenje mjere CVaR jer je koherentna i može se koristiti u situacijama kada gubici nisu normalno distribuirani. U drugome poglavlju prikazali smo model optimizacije portfelja u kontekstu mjere rizika CVaR. Budući da izraz za CVaR sadrži funkciju $x^+ = \max(0, x)$, to je problem neglatke optimizacije. Rješavanju problema moguće je pristupiti na dva načina: transformirati zadaću u problem linearnog programiranja ili direktno riješiti zadaću pogodnom metodom neglatke optimizacije. U radu smo predstavili oba načina, uz poseban naglasak na direktnu primjenu diskretne gradijentne metode. Takav pristup daje učinkovitije rješenje, pogotovo u situacijama kada želimo pronaći optimalne portfelje, a promatramo veliki broj scenarija.

Summary

The aim of this thesis was to show application of non-smooth optimization in portfolio theory. First we gave an overview on theory which is related to portfolio returns, distribution of returns, efficiency and riskiness. After that we introduced the most popular risk measures in portfolio optimization and suggested use of CVaR because it is coherent and it can be used even if distribution of returns is not normal. In the second chapter we described portfolio optimization model in the context of CVaR measure. Since expression for CVaR contains a function $x^+ = \max(0, x)$, it is a non-smooth optimization problem. To solve this problem, one could use two ways: transform the problem into a linear programming model or directly solve the problem using an appropriate non-smooth method. In this thesis we introduced both ways, with special emphasis on direct application of discrete gradient method. Such approach gives a more efficient solution, especially when we want to find optimal solution for portfolios with large number of scenarios.

Životopis

Rođena sam 08. lipnja 1997. godine u Zagrebu.

Osnovnu školu završila sam u Splitu. Od 2012. do 2016. godine pohađala sam Treću gimnaziju u Splitu (MIOC). Po završetku gimnazijskog obrazovanja upisala sam preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2020. stekla sam titulu sveučilišne prvostupnice matematike te sam iste godine upisala diplomski studij Financijske i poslovne matematike, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tijekom 2021./2022. godine, u sklopu programa STEMfemme, pohađala sam praksu u A1 Hrvatska.