

Potencijalni centri trokuta

Kolanović, Lucija

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:176658>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-26**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Kolanović

POTENCIJALNI CENTRI TROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, studeni 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Mojem didu Nediljku

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	2
1 Definicija centra trokuta	3
1.1 Definicija trilinearnih koordinata i centra trokuta	3
1.2 Prvih 20 karakterističnih točaka trokuta	5
2 Elektrostatski centar	38
2.1 Elektrostatski potencijal	38
2.2 Geometrijska relacija	40
2.3 Kartezijeve koordinate	44
2.4 Trilinearne koordinate	46
3 Općeniti radijalni potencijalni centri	47
3.1 Izvod općenite formule	47
3.2 Iluminacijski centar	50
3.3 Pretraga radijalnih potencijalnih centara u enciklopediji ETC	53
Bibliografija	54

Uvod

Geometrija trokuta jedna je od najtrajnijih tema u matematici. U središtu njenog zanimanja su karakteristične točke, odnosno centri trokuta. Učenici se već u šestom razredu osnovne škole upoznaju s četiri karakteristične točke trokuta: središtem trokutu upisane kružnice, težištem, središtem trokutu opisane kružnice te ortocentrom. Neki od njih su se tijekom svog daljnjeg obrazovanja možda upoznali s još nekim centrima trokuta kao što su središte kružnice devet točaka, Lemoineova točka, Gergonneova točka ili Nagelova točka. Danas su pronađene brojne zanimljive točke vrijedne naziva *centar trokuta*. Američki matematičar Clark Kimberling je u web enciklopediji Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) nastojao obuhvatiti što više takvih točaka. Danas su u njoj opisane 52 122 točke, a navedeno je da će se u skorije vrijeme opisati njih još 19 878 pa će tako sadržavati ukupno 72 000 točaka. Enciklopedija omogućava i opciju pretraživanja na temelju numeričkih vrijednosti kod trokuta ABC čije su stranice duljina 6, 9 i 13. Prikladan je takav odabir nasumičnog trokuta jer se kod njega ne podudaraju nikoje karakteristične točke. Na temelju unesenih numeričkih vrijednosti se može utvrditi o kojem se centru trokuta radi, odnosno sadrži li enciklopedija taj centar.

U ovom se diplomskom radu proučavaju centri trokuta u tri poglavlja.

U prvom poglavlju definiran je pojam centra trokuta te pojam trilinearnih koordinata. Zatim je navedeno prvih 20 točaka koje sadrži enciklopedija Encyclopedia of Triangle Centers (ETC). Svaka od tih točaka je definirana, navedena su njena osnovna svojstva te trilinearne i baricentričke koordinate.

U drugom poglavlju se proučava centar elektrostatskog potencijala. Motivacija za proučavanje te točke bio je trokut kao kontinuirani izvor naboja koji je homogeno raspoređen preko cijelog trokuta. Centar elektrostatskog potencijala je točka ravnine u kojoj elektrostatski potencijal trokuta postiže svoju maksimalnu vrijednost. Proučavanjem navedene točke bavili su se Hrvoje Abraham i Vjekoslav Kovač te je ona uvrštena u enciklopediju ETC pod brojem $X(5626)$. U ovom radu su izvedene posebne geometrijske relacije koje ta točka zadovoljava te je pokazano da se ne očekuje da trilinearne koordinate te točke imaju eksplicitne algebarske izraze.

U trećem poglavlju izvedena je opća geometrijska relacija koju zadovoljavaju opći potencijali. Posebno se proučava iluminacijski centar. Japanskom znanstveniku Katsuyukiju

Shibati motivacija za njegovo proučavanje bio je sljedeći problem: „Na koje mjesto treba postaviti uličnu svjetiljku u parku trokutastog oblika na način da osvjetljenost parka bude maksimalna?” U radu je izvedena posebna geometrijska relacija koju zadovoljava iluminacijski centar. Na samom kraju rada korištena je opcija pretraživanja enciklopedije ETC za slučajeve nekoliko potencijalnih centara. Unesene su izračunate numeričke vrijednosti koordinata kako bi se provjerilo sadržava li enciklopedija određene točke ili ne.

Na kraju, želim se zahvaliti svima koji su mi bili potpora tijekom dosadašnjeg školovanja.

Hvala mentoru, izv. prof. dr. sc. Vjekoslavu Kovaču, na uloženom vremenu, trudu, savjetima, strpljenju, pomoći i vodstvu pri izradi ovog diplomskog rada. Hvala mojim roditeljima na bezuvjetnoj podršci, povjerenju i razumijevanju koje su mi iskazali tijekom studija. Hvala na svemu što ste mi pružili i što mi svakodnevno pružate. Hvala mom bratu, bakama, Danielu, cijeloj obitelji i svim prijateljima na podršci, motivaciji i nezaboravnim trenucima. Na poslijetku, hvala Bogu koji je bio izvor snage i mira na mom putu prema diplomi.

Poglavlje 1

Definicija centra trokuta

Američki matematičar Clark Kimberling je proučavao svojstva koja neku točku čine posebnom te tako vrijednom naziva karakteristična točka, odnosno centar trokuta. Svoje je proučavanje sistematizirao u enciklopediji Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) [2] koja danas sadrži 72 000 točaka. U ovom ćemo poglavlju nakon definicije karakteristične točke i trilinearnih koordinata navesti prvih 20 točaka iz te enciklopedije. Mnoge od tih točaka obrađene su u klasičnim knjigama iz euklidske geometrije, poput [3], dok sama enciklopedija može (npr. učenicima) poslužiti za vježbu samostalnog otkrivanja matematičkih koncepata i teorema, vidjeti rad [6].

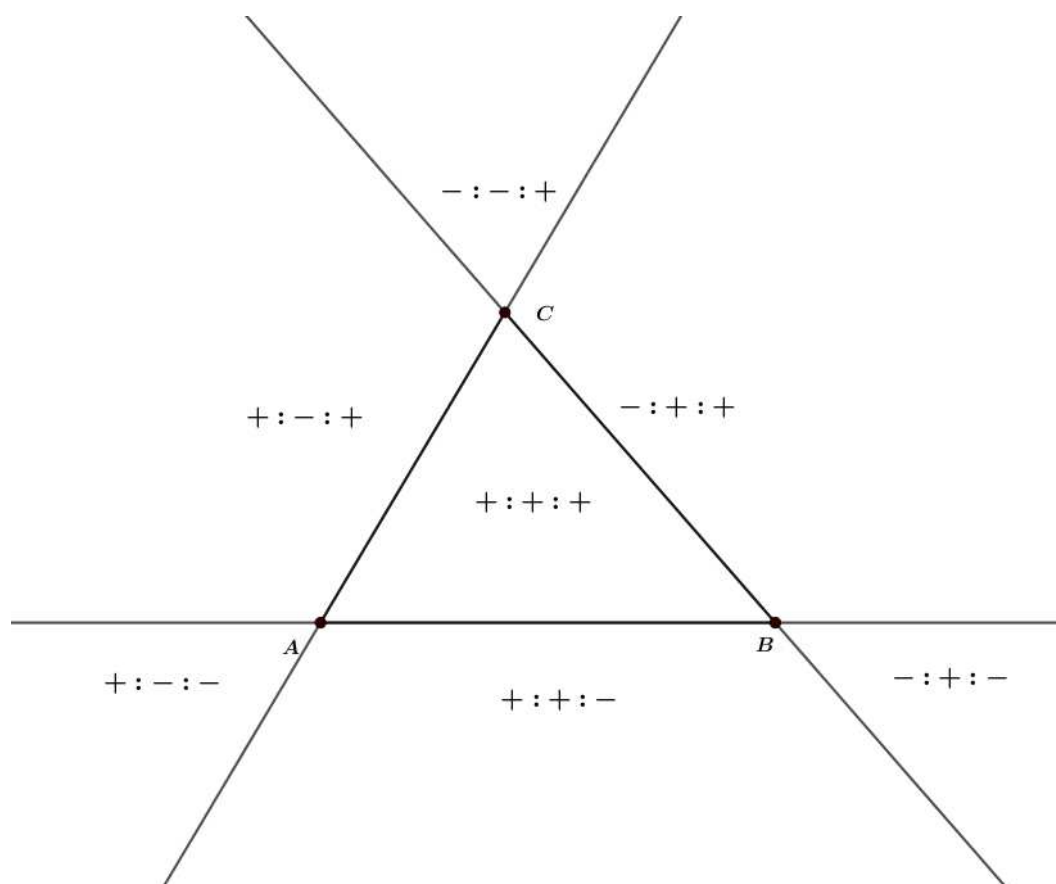
1.1 Definicija trilinearnih koordinata i centra trokuta

Definicija 1.1.1. *Neka je u ravnini trokuta ABC dana točka P i neka su d_a , d_b , d_c redom njezine orijentirane udaljenosti od pravaca BC, CA, AB. Udaljenost d_a je pozitivna ukoliko se točke P i A nalaze s iste strane pravca BC, negativna ukoliko se nalaze sa suprotnih strana, a jednaka 0 ako točka P pripada pravcu BC. Trilinearne koordinate točke P predstavlja trojka (t_a, t_b, t_c) ako postoji $k \neq 0$ takav da je $t_a = kd_a$, $t_b = kd_b$, $t_c = kd_c$. Trilinearne koordinate točke P su jednoznačno određene do na skalarni višekratnik pa ih stoga pišemo kao $t_a : t_b : t_c$.*

Definicija 1.1.2. *Neka je u ravnini trokuta ABC dana točka P. Za točku P kažemo da je karakteristična točka trokuta ukoliko su njene trilinearne koordinate oblika*

$$f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b),$$

pri čemu je f neka funkcija koja je definirana na skupu svih mogućih trojki (a, b, c) duljina stranica trokuta te ima sljedeća svojstva:



Slika 1: Predznaci koordinata

- 1) Za svaki $k > 0$ i za svaku trojku (a, b, c) iz domene, postoji realan broj p takav da je $f(ka, kb, kc) = k^p f(a, b, c)$. Odnosno, f je homogena stupnja p .
- 2) Za svaku trojku (a, b, c) iz domene vrijedi da je $f(a, c, b) = f(a, b, c)$. Za ovo svojstvo možemo reći da je svojstvo svojevrsne parcijalne simetrije.
- 3) Funkcija f nije jednaka konstanti 0.

Bitno je naglasiti da različite funkcije f mogu određivati isti centar trokuta P . Upravo zbog toga se obično bira funkcija f koja je dana što jednostavnijom formulom.

Valja napomenuti još i da su tako zvane baricentričke koordinate točke P dane formulom $ad_a : bd_b : cd_c$. Stoga je lako pretvoriti baricentričke koordinate u trilinearne i obrnuto.

1.2 Prvih 20 karakterističnih točaka trokuta

Navest ćemo prvih 20 karakterističnih točaka koje sadrži enciklopedija Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) [2]. One su označene s $X(1) - X(20)$.

$X(1)$ = Središte trokutu upisane kružnice

Definicija 1.2.1. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Kružnicu koja dira svaku od stranica danog trokuta ABC s unutarnje strane nazivamo tom trokutu upisanom kružnicom.*

Središte $X(1)$ kružnice upisane trokutu ABC je točka koja je jednako udaljena od svih stranica trokuta. Geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od dviju zraka je simetrala kuta koji čine te dvije zrake. Prema tome, središte $X(1)$ trokutu upisane kružnice se nalazi u sjecištu simetrala unutarnjih kutova trokuta.

Propozicija 1.2.2. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Središte trokutu upisane kružnice $X(1)$ je sjecište simetrala unutarnjih kutova tog trokuta.*

Udaljenost točke $X(1)$ od stranica trokuta jednaka je radijusu kružnice upisane trokutu koji je dan s

$$r = \frac{2P(ABC)}{a + b + c},$$

pri čemu je $P(ABC)$ površina danog trokuta, a a , b , c duljine njegovih stranica. Lako se vidi da su trilinearne koordinate te točke

$$1 : 1 : 1,$$

a baricentričke

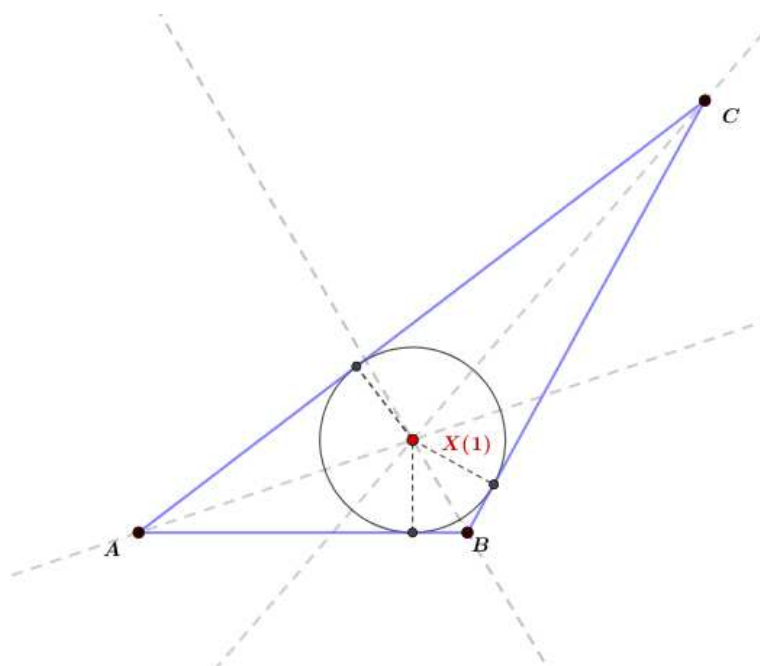
$$a : b : c.$$

$X(2)$ = Težište

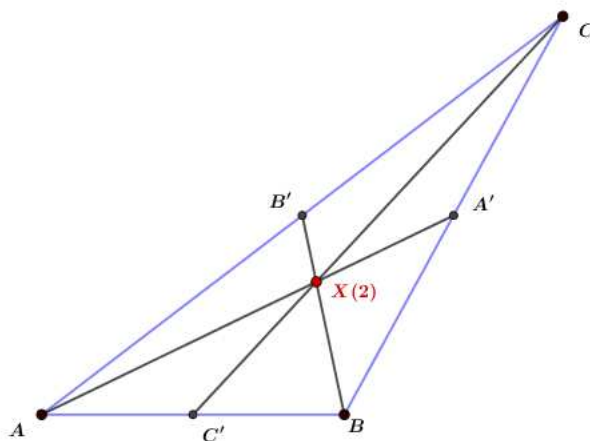
Definicija 1.2.3. *Neka je dan trokut ABC u ravnini. Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.*

Definicija 1.2.4. *Neka je dan trokut ABC u ravnini. Točka u kojoj se sijeku sve tri težišnice trokuta naziva se težište trokuta.*

Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $2 : 1$. Udaljenost težišta do pojedinog vrha iznosi $\frac{2}{3}$ duljine odgovarajuće težišnice, a udaljenost težišta do polovišta nasuprotne stranice iznosi $\frac{1}{3}$ duljine odgovarajuće težišnice.



Slika 2: Središte trokutu upisane kružnice



Slika 3: Težište trokuta

Teorem 1.2.5. Za udaljenosti d_a , d_b , d_c težišta T trokuta ABC od stranica \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} vrijedi

$$a : b : c = \frac{1}{d_a} : \frac{1}{d_b} : \frac{1}{d_c},$$

odnosno

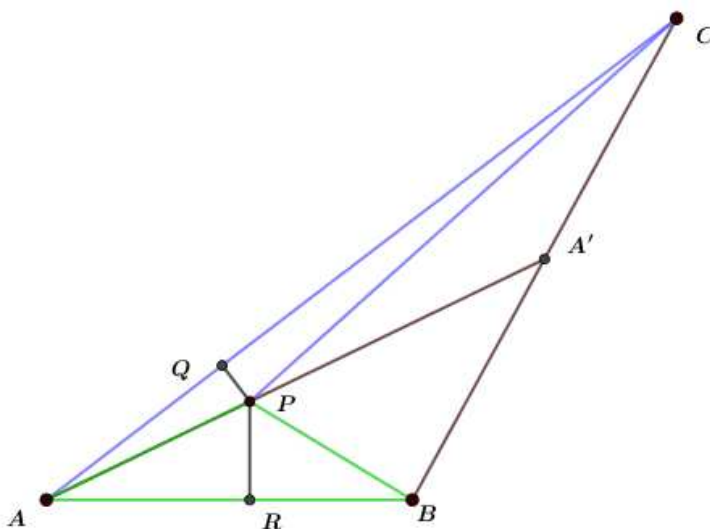
$$a \cdot d_a = b \cdot d_b = c \cdot d_c.$$

Dokaz. Neka su A' , B' , C' redom polovišta stranica \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} .

S obzirom da težišnica $\overline{AA'}$ prolazi polovištem A' stranice $a = \overline{BC}$ uočavamo da su površine trokuta ABA' i ACA' jednake. Dakle,

$$P(\triangle ABA') = P(\triangle ACA').$$

Odaberimo proizvoljnu točku P na težišnici $\overline{AA'}$ te iz nje spustimo okomice PQ i PR na stranice \overline{AC} i \overline{AB} . Uočavamo da vrijedi



Slika 4: Trokuti ABP i ACP unutar trokuta ABC

$$P(\triangle ABP) = P(\triangle ACP).$$

Površine trokuta ABP i ACP su jednake jer su to trokuti sa zajedničkom stranicom \overline{AP} , a vrhovi B i C su jednako udaljeni od pravca \overline{AP} . Odatle slijedi

$$|AP| \cdot |PR| = |AC| \cdot |PQ|$$

ili

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|PQ|}{|PR|}.$$

To posebno vrijedi i za težište T pa iz ove jednakosti dobivamo

$$\frac{c}{b} = \frac{d_b}{d_c}$$

ili

$$c : b = \frac{1}{d_c} : \frac{1}{d_b}.$$

Za preostale dvije težišnice tvrdnja slijedi na analogan način. \square

Na temelju prethodnog teorema 1.2.5 se lako vidi da su trilinearne koordinate težišta dane s

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

a baricentričke s

$$1 : 1 : 1.$$

X(3) = Središte trokutu opisane kružnice

Definicija 1.2.6. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Kružnicu koja prolazi vrhovima trokuta ABC nazivamo tom trokutu opisanom kružnicom.*

Središte $X(3)$ kružnice opisane trokutu ABC je točka koja je jednako udaljena od svih vrhova. Geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od dvije dane točke A_1 i A_2 je simetrala dužine $\overline{A_1A_2}$. Prema tome, središte $X(3)$ trokutu opisane kružnice se nalazi u sjecištu simetrala stranica trokuta.

Propozicija 1.2.7. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Središte trokutu opisane kružnice $X(3)$ je sjecište simetrala stranica tog trokuta.*

Udaljenost točke $X(3)$ od vrhova trokuta jednaka je radijusu kružnice opisane trokutu koji je dan s

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

ili

$$R = \frac{abc}{4P},$$

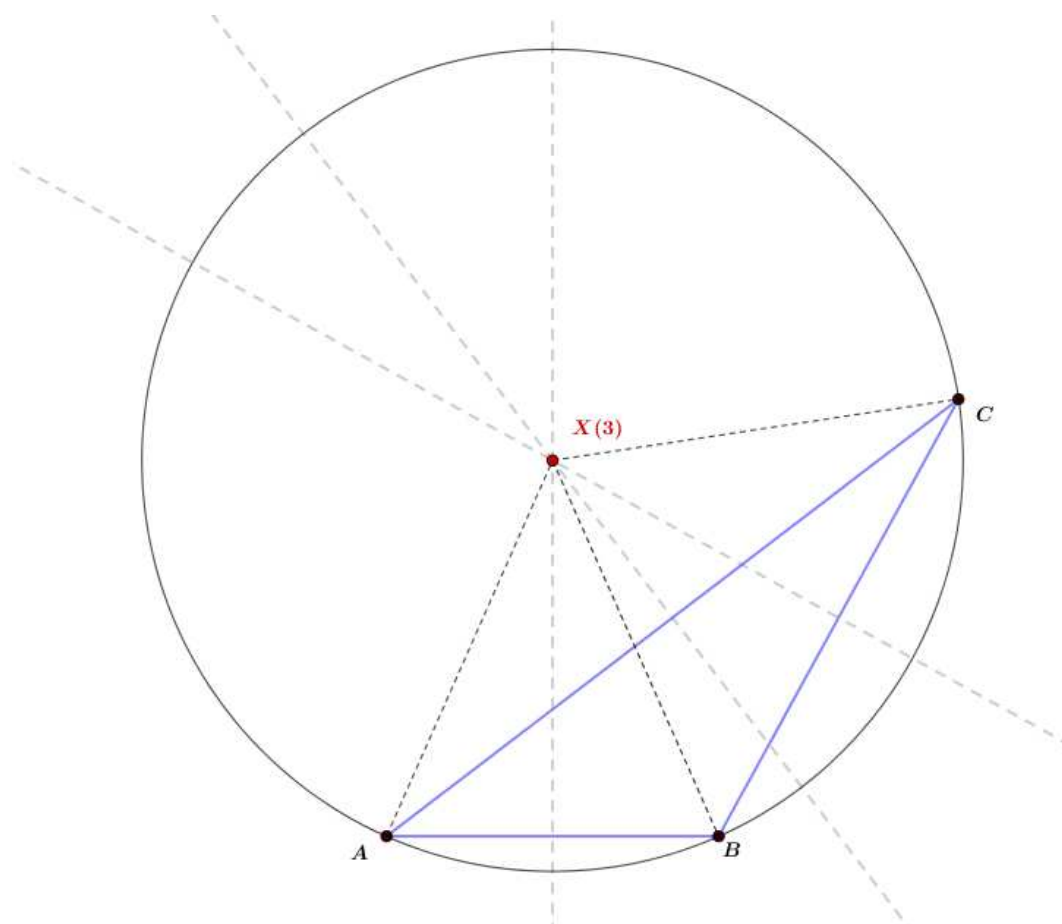
pri čemu je P površina danog trokuta, a , b , c duljine njegovih stranica, a α , β , γ mjere njegovih unutarnjih kutova.

Trilinearne koordinate središta trokutu opisane kružnice dane su s

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma,$$

a baricentričke s

$$\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$



Slika 5: Središte trokutu opisane kružnice

X(4) = Ortocentar

Definicija 1.2.8. Neka je u ravnini dan trokut ABC . Okomice spuštene iz vrha trokuta na nasuprotne stranice nazivamo visinama trokuta ABC .

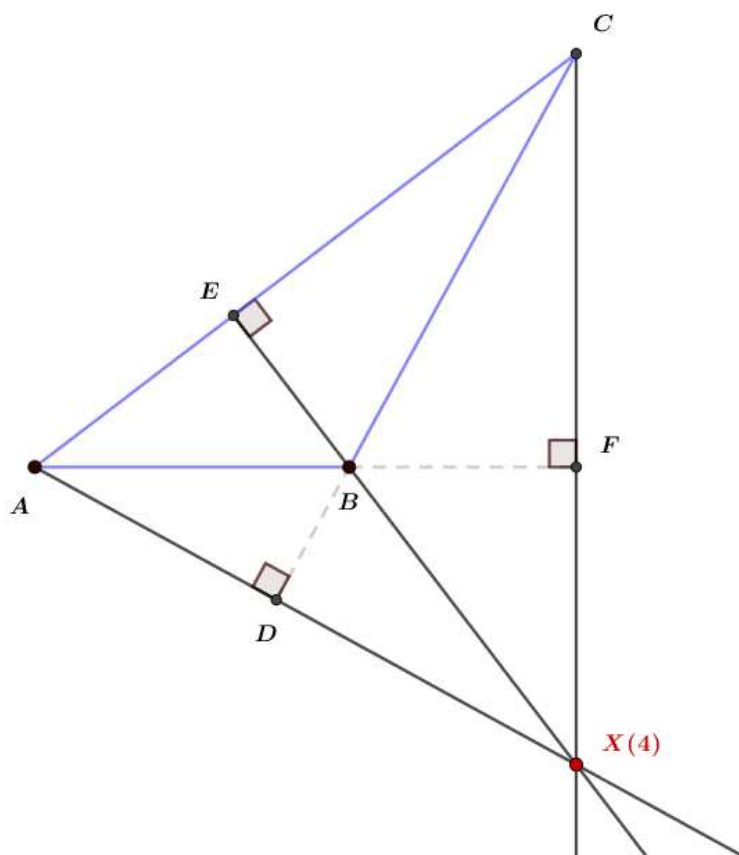
Definicija 1.2.9. Neka je u ravnini dan trokut ABC . Nožišta njegovih visina na stranice \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} ćemo označiti redom s D , E , F . Sjecište H visina $h_a = \overline{AD}$, $h_b = \overline{BE}$, $h_c = \overline{CF}$ nazivamo ortocentrom trokuta.

Trilinearne koordinate ortocentra dane su s

$$\frac{1}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma},$$

a baricentričke s

$$\tan \alpha : \tan \beta : \tan \gamma.$$



Slika 6: Ortocentar

X(5) = Središte kružnice devet točaka

Teorem 1.2.10. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Neka su točke A', B', C' redom polovišta stranica \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} trokuta, točke A'', B'', C'' redom polovišta dužina \overline{AH} , \overline{BH} , \overline{CH} , gdje je H ortocentar, a točke D, E, F nožišta visina redom na stranicama \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} . Spomenutih devet točaka leži na istoj kružnici.*

Navedenu kružnicu nazivamo kružnica devet točaka (Eulerova kružnica, Feuerbachova kružnica).

Dokaz. S obzirom da je $\overline{A'B'}$ srednjica trokuta ABC , vrijedi da je $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$ i $A'B' \parallel AB$. Kako je $\overline{A''B''}$ srednjica trokuta ABH vrijedi $|A''B''| = \frac{1}{2}|AB|$ i $DE \parallel AB$. Slijedi $|A'B'| = |A''B''|$ i $A'B' \parallel A''B''$. Prema tome, četverokut $A'B'A''B''$ je paralelogram pa se $\overline{A'A''}$ i $\overline{B'B''}$ međusobno raspolavljaju. Označimo sa S njihov presjek.

S obzirom da je $\overline{A''B'}$ srednjica trokuta AHC , vrijedi $A''B' \parallel CH$ pa je $A''B' \perp AB$ te je stoga $A''B' \perp A''B''$. Dakle, $\angle B'A''B'' = 90^\circ$. Prema tome, četverokut $A'B'A''B''$ je pravokutnik pa mu možemo opisati kružnicu. Tu kružnicu ćemo označiti s $k = \left(S, \frac{1}{2}|A'A''|\right)$.

Analogno se pokaže i da je četverokut $A'C'A''C''$ pravokutnik te mu možemo opisati kružnicu $k = \left(S, \frac{1}{2}|A'A''|\right)$.

Trokut $A'A''D$ je pravokutan trokut s hipotenuzom $\overline{A'A''}$. Kružnica opisana tom trokutu je kružnica $k = \left(S, \frac{1}{2}|A'A''|\right)$. To znači da točka D pripada kružnici k . Analogno se pokaže i da točke E i F također pripadaju kružnici k . \square

Trilinearne koordinate središta kružnice devet točaka dane su s

$$\cos(\beta - \gamma) : \cos(\gamma - \alpha) : \cos(\alpha - \beta),$$

a baricentričke s

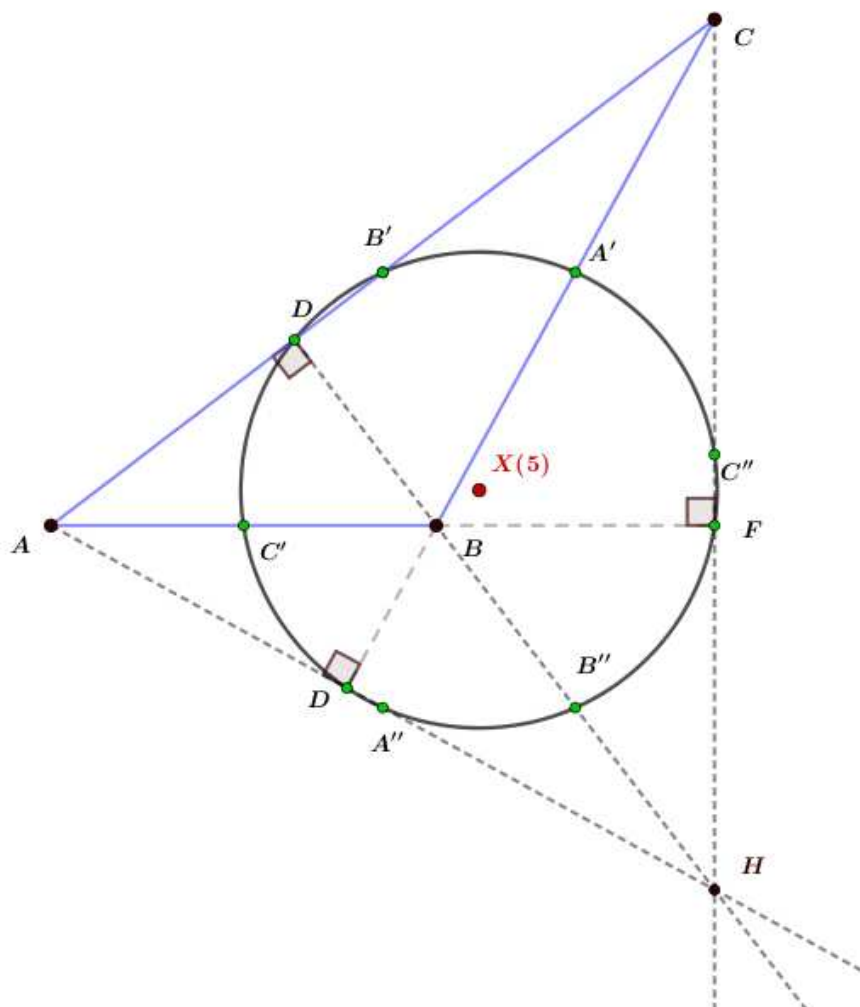
$$a \cos(\beta - \gamma) : b \cos(\gamma - \alpha) : c \cos(\alpha - \beta).$$

X(6) = Lemoineova točka

Za definiranje Lemoineove točke potrebno je najprije definirati antiparalele i simedijane.

Definicija 1.2.11. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Neka je B_1 točka na stranici \overline{AC} , a A_1 točka na stranici \overline{BC} . Ako za takve točke vrijedi $\angle CA_1B_1 = \alpha$, tada dužinu $\overline{A_1B_1}$ zovemo antiparalelom stranice \overline{AB} trokuta ABC .*

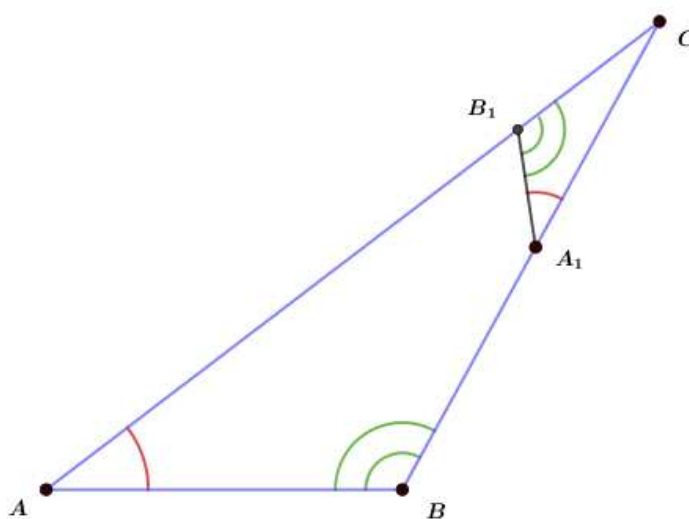
Definicija 1.2.12. *Polovišta svih antiparalela neke stranice danog trokuta leže na jednom pravcu. Taj pravac prolazi trećim vrhom trokuta i zove se simedijana danog trokuta.*



Slika 7: Središte kružnice devet točaka

Teorem 1.2.13. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Simedijane danog trokuta ABC sijeku se u jednoj točki koju nazivamo Lemoineova točka.*

Lemoineova točka je dobila naziv po francuskom matematičaru Emileu Michelu Hyacintheu Lemoineu, koji se bavio proučavanjem pravaca koji prolaze polovištem antiparalela i njihovim sjecištem. Za dokaz o postojanju Lemoineove točke potrebna su nam sljedeća dva teorema.


 Slika 8: $\overline{A_1B_1}$ je antiparalela stranice \overline{AB}

Teorem 1.2.14. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Dužina $\overline{B_1C_1}$ je antiparalela stranice BC ako i samo ako su točke B, C, B_1, C_1 konciklične.*

Dokaz. Dužina $\overline{B_1C_1}$ je antiparalela stranice BC trokuta ABC što znači da je $\angle AB_1C_1 = \beta$. Prema tome, $\angle CB_1C_1 = 180^\circ - \beta$. Također, vrijedi i $\angle B_1C_1B = 180^\circ - \gamma$. Uočavamo da je četverokut BCB_1C_1 tetivan i zaključujemo da su točke B, C, B_1, C_1 konciklične.

S druge strane, pretpostavimo da su točke B, C, B_1, C_1 konciklične. Tada zaključujemo da je četverokut BCB_1C_1 tetivan. Prema tome vrijedi da je $\angle CB_1C_1 = 180^\circ - \beta$. To znači da je $\angle AB_1C_1 = \beta$ pa je $\overline{B_1C_1}$ antiparalela stranice BC trokuta ABC . \square

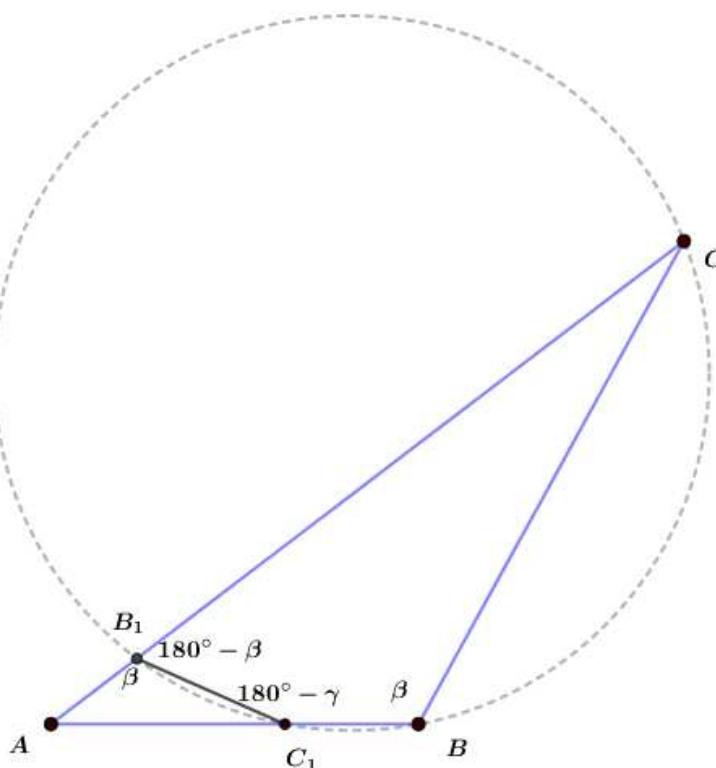
Teorem 1.2.15. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Neka su stranice trokuta PQR tangente kružnice opisane trokutu ABC koje prolaze kroz vrhove tog trokuta. Pravci AP, BQ, CR raspolavljaju antiparalele stranica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ i sijeku se u točki K .*

Za dokaz ovog teorema nam je potreban i Cevin teorem čiji ćemo iskaz navesti.

Teorem 1.2.16. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Neka su D, E, F točke koje pripadaju stranicama $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ trokuta ABC . Pravci AD, BE, CF sijeku se u jednoj točki ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Dokaz teorema 1.2.15. Neka je \overline{MN} antiparalela stranice \overline{BC} koja prolazi točkom P . Prema prethodnom teoremu 1.2.14, ona je paralelna s tangentom kružnice opisane trokutu ABC u točki A pa vrijedi $MN \parallel RQ$.



Slika 9: $\overline{B_1C_1}$ je antiparalela stranice \overline{BC} ako i samo ako su točke B, C, B_1, C_1 konciklične

Vrijedi $\angle PMB = \angle RAB$. S obzirom da je $|AR| = |RB|$, vrijedi $\angle RAB = \angle RBA = \angle MBP$. Slijedi $|PM| = |PB|$ te analogno $|PN| = |PC|$.

S obzirom da je $|PB| = |PC|$, zaključujemo da je P polovište od \overline{MN} . Kako AP siječe paralelu MN u polovištu P , prema prethodnom teoremu 1.2.14 siječe i sve ostale antiparalele stranice \overline{BC} u njihovim polovištima.

Na analogan način dobivamo i da BQ siječe sve antiparalele stranice \overline{AC} u njihovim polovištima te da CR siječe sve antiparalele stranice \overline{AB} u njihovim polovištima.

Uočimo da vrijedi

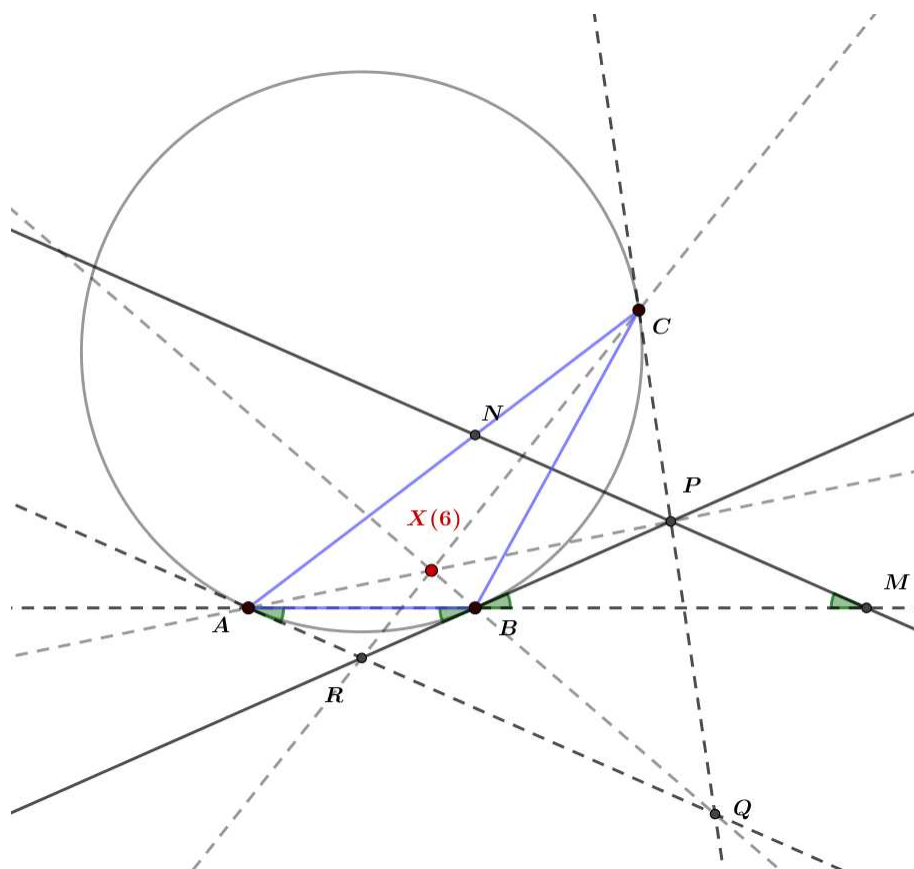
$$|BP| = |PC|, |CQ| = |QA|, |AR| = |RB|,$$

pa je

$$|PC| \cdot |QA| \cdot |RB| = |CQ| \cdot |AR| \cdot |BP|$$

što možemo zapisati i u obliku

$$\frac{|PC|}{|QC|} \cdot \frac{|QA|}{|RA|} \cdot \frac{|RB|}{|PB|} = 1.$$



Slika 10: Pravci AP, BQ, CR se sijeku u jednoj točki

Prema Cevinovom teoremu 1.2.16 slijedi da se pravci AP, BQ, CR sijeku u jednoj točki. \square

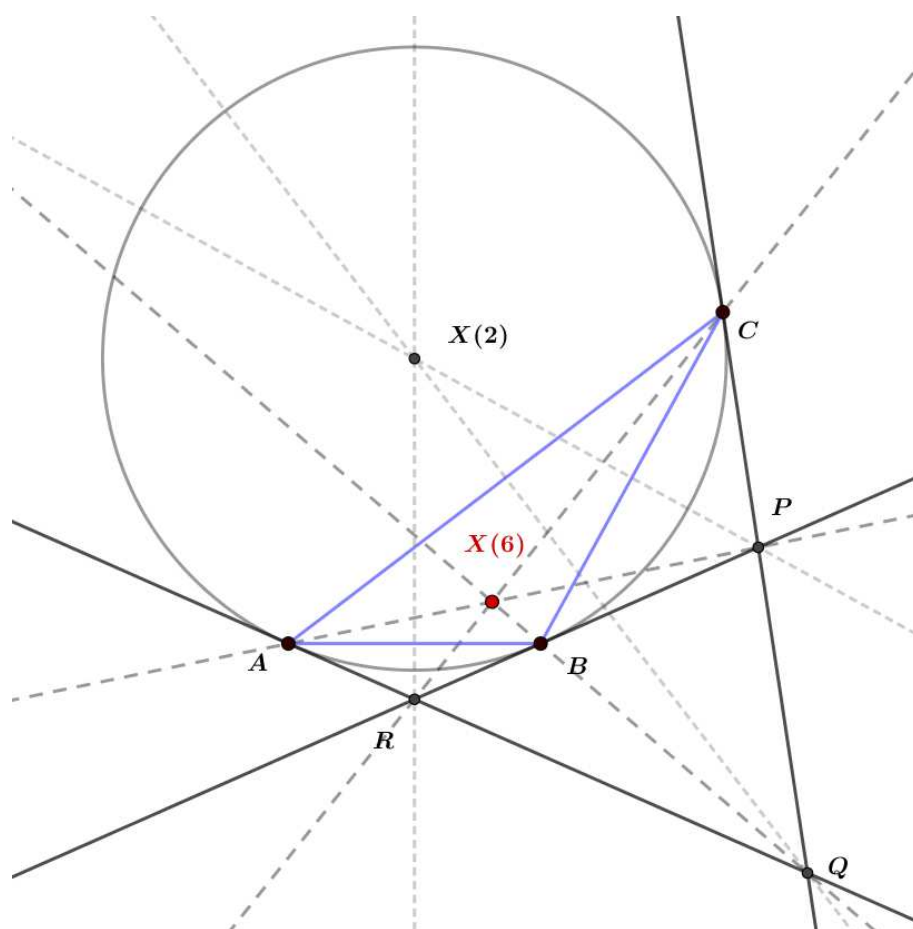
Pravci iz prethodnog teorema 1.2.15 su simedijane trokuta ABC , a točka u kojoj se sijeku je Lemoineova točka.

Trilinearne koordinate Lemoineove točke su dane s

$$a : b : c,$$

a baricentričke s

$$a^2 : b^2 : c^2.$$



Slika 11: Lemoineova točka

X(7) = Gergonneova točka

Za definiranje Gergonneove točke potreban nam je sljedeći teorem:

Teorem 1.2.17. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Neka su s X, Y, Z označena dirališta upisane kružnice s odgovarajućim stranicama danog trokuta. Vrijedi:*

$$|AZ| + |BC| = |BX| + |AC| = |CY| + |AB| = s,$$

$$|AY| = |AZ| = s - a,$$

$$|BX| = |BZ| = s - b,$$

$$|CY| = |CX| = s - c,$$

pri čemu su a, b, c duljine stranica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$, a $s = \frac{a + b + c}{2}$ poluopseg.

Teorem 1.2.18. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Pravci koji spajaju vrhove trokuta A, B, C s diralištima X, Y, Z upisane kružnice sa suprotnim stranicama sijeku se u jednoj točki $X(7)$. Tu točku zovemo Gergonneova točka.*

Gergonneova točka je dobila naziv prema francuskom astronomu i matematičaru Josephu Diazu Geogonneu.

Dokaz. Pema prethodnom teoremu vrijedi $|AY| = |AZ|$, $|BX| = |BZ|$, $|CX| = |CY|$. To možemo zapisati kao

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1$$

pa prema Cevinovom teoremu 1.2.16 slijedi da se pravci AX, BY, CZ sijeku u jednoj točki. Ta točka je Gergonneova točka. \square

Trilinearne koordinate Gergonneove točke su dane s

$$\frac{bc}{b+c-a} : \frac{ca}{c+a-b} : \frac{ab}{a+b-c},$$

a baricentričke s

$$\frac{1}{b+c-a} : \frac{1}{c+a-b} : \frac{1}{a+b-c}.$$

X(8) = Nagelova točka

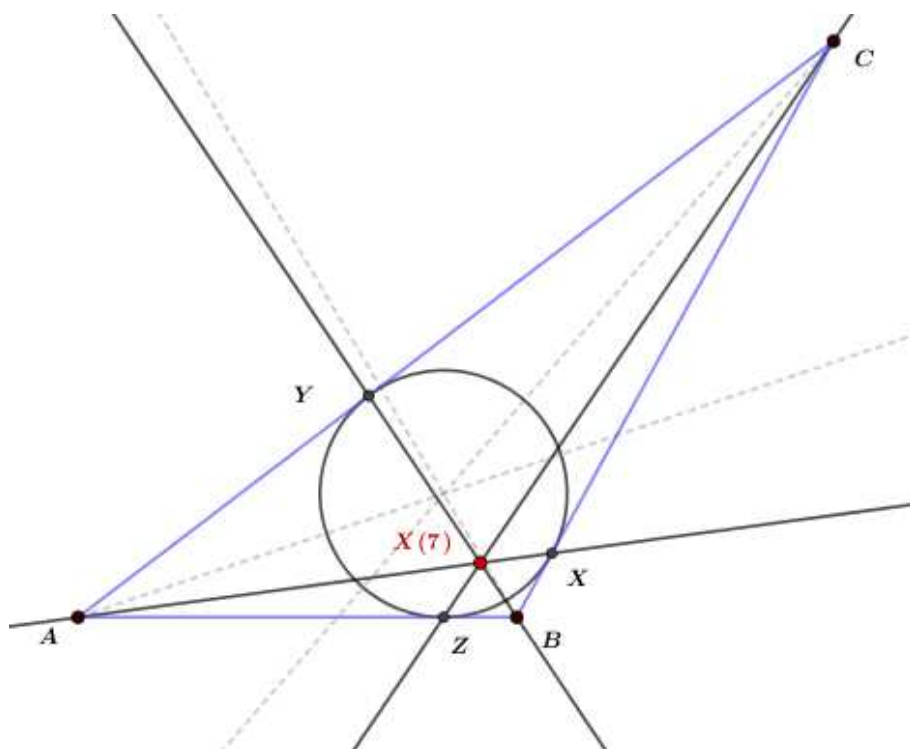
Za definiranje Nagelove točke potrebno je najprije definirati pojam pripisane kružnice.

Definicija 1.2.19. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Kružnicu k_a koja s vanjske strane dira stranicu \overline{BC} i produženja ostalih dviju stranica \overline{AC} i \overline{AB} nazivamo pripisanom kružnicom uz stranicu \overline{BC} .*

Na analogan način se definiraju i pripisane kružnice uz stranice \overline{AC} i \overline{AB} .

Teorem 1.2.20. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Neka su X_a, Y_a, Z_a dirališta pripisane kružnice k_a sa stranicama $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ trokuta, X_b, Y_b, Z_b dirališta pripisane kružnice k_b s odgovarajućim stranicama trokuta, a X_c, Y_c, Z_c dirališta pripisane kružnice k_c s odgovarajućim stranicama trokuta. Dužine $\overline{AX}_a, \overline{BX}_b, \overline{CX}_c$ sijeku se u jednoj točki N . Točku N nazivamo Nagelovom točkom.*

Nagelova je točka dobila ime prema njemačkom matematičaru Christianu Heinrichu von Nagelu. Za dokaz teorema o Nagelovoj točki potreban nam je sljedeći teorem:



Slika 12: Gergonneova točka

Teorem 1.2.21. *Neka je u ravni dan trokut ABC . Neka su točke X_a, Y_a, Z_a dirališta pripisane kružnice k_a s odgovarajućim stranicama trokuta. Vrijedi sljedeće:*

$$|AZ_a| = |AB| + |BX_a| = |CA| + |CX_a| = s,$$

$$|AY_a| = |AZ_a| = s,$$

$$|BX_a| = |BZ_a| = s - c,$$

$$|CX_a| = |CY_a| = s - b,$$

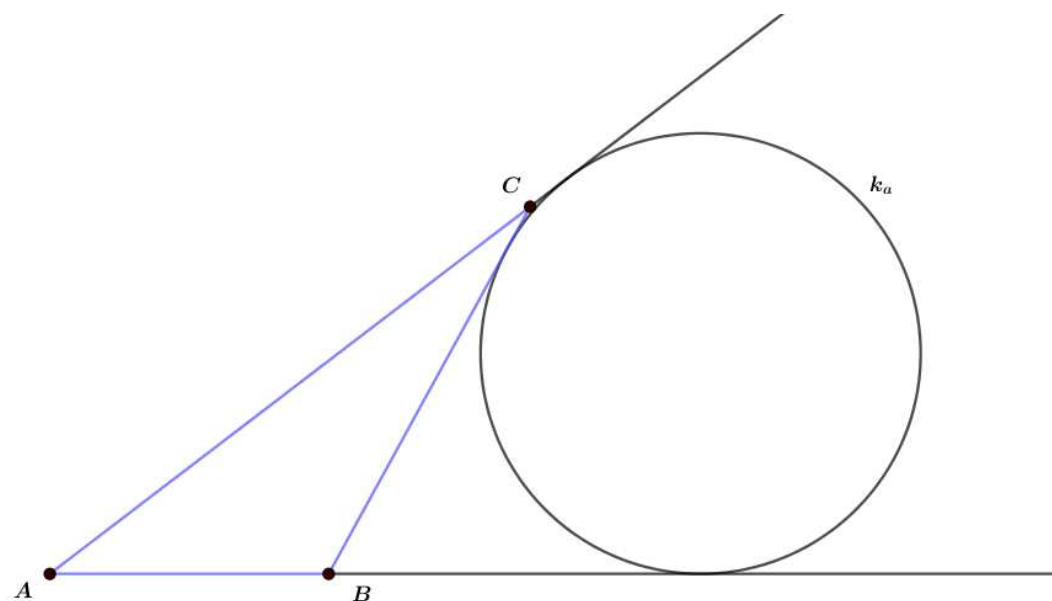
pri čemu su a, b, c duljine stranica $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$, a $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg.

Dokaz. Prema prethodnom teoremu 1.2.17 vrijedi:

$$|BZ_c| = s - a,$$

$$|CY_b| = s - a,$$

$$|AZ_c| = s - b,$$


 Slika 13: Pripisana kružnica uz stranicu \overline{BC}

$$|CX_a| = s - b,$$

$$|AY_b| = s - c,$$

$$|BX_a| = s - c.$$

Uvrštavamo:

$$\frac{BX_a}{CX_a} \cdot \frac{CY_b}{AY_b} \cdot \frac{AZ_c}{BZ_c} = \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1.$$

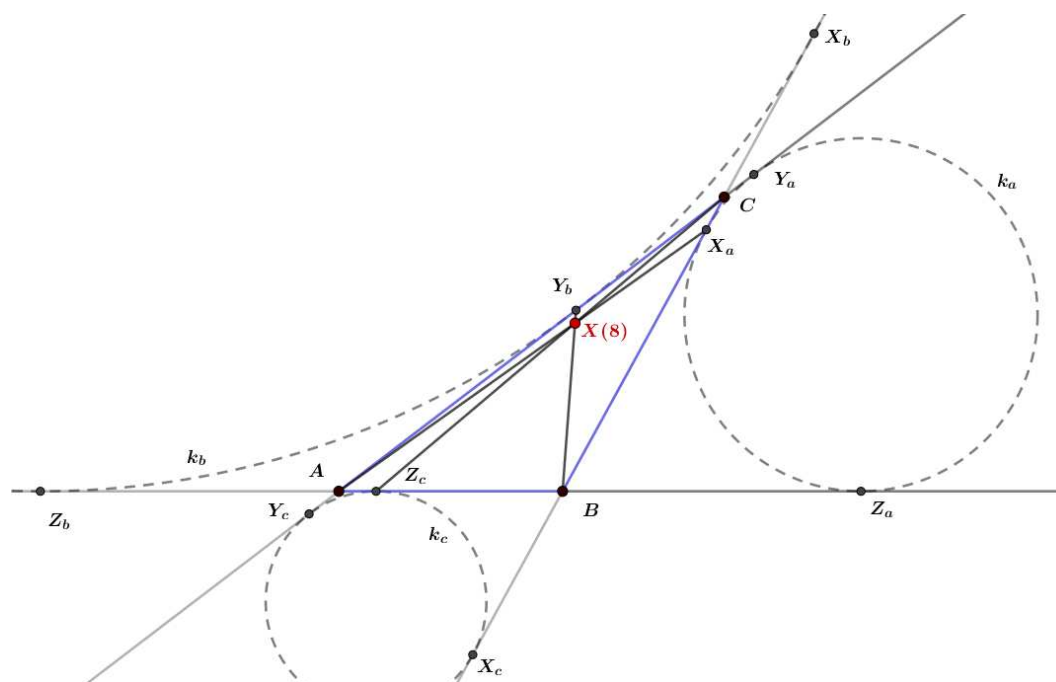
Prema Cevinovom teoremu 1.2.16, dužine $\overline{AX_a}$, $\overline{BY_b}$, $\overline{CZ_c}$ prolaze jednom točkom. Ta točka je Nagelova točka. \square

Trilinearne koordinate Nagelove točke su dane s

$$\frac{b+c-a}{a} : \frac{c+a-b}{b} : \frac{a+b-c}{c},$$

a baricentričke s

$$(b+c-a) : (c+a-b) : (a+b-c).$$



Slika 14: Nagelova točka

X(9) = Mittenpunkt

Definicija 1.2.22. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Neka su k_a , k_b , k_c pripisane kružnice uz stranice \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} . Označimo redom njihova središta s D , E , F . Točka Mittenpunkt je Lemoineova točka trokuta DEF .*

Trilinearne koordinate točke Mittenpunkt su dane s

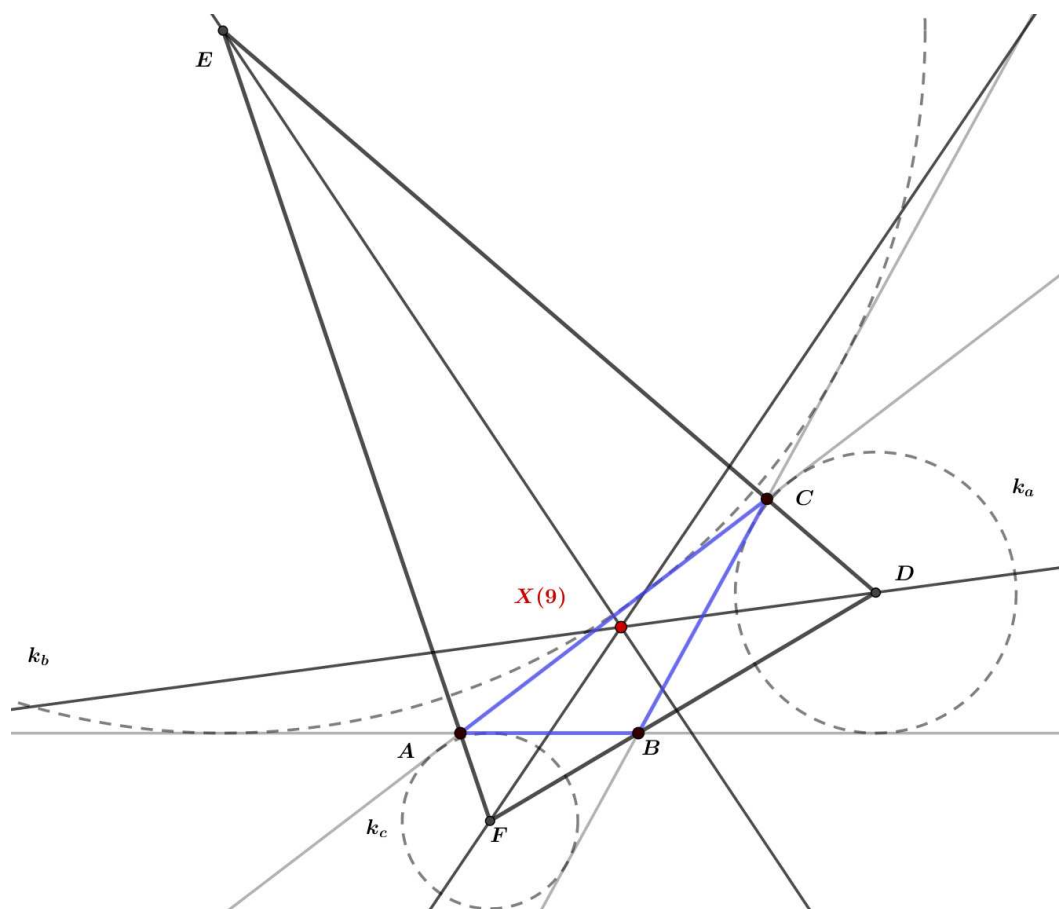
$$(b + c - a) : (c + a - b) : (a + b - c),$$

a baricentričke s

$$a(b + c - a) : b(c + a - b) : c(a + b - c).$$

X(10) = Spiekerov centar

Za definiranje Spiekerovog centra potrebno je naprije definirati pojam medijalnog trokuta.



Slika 15: Mittenpunkt

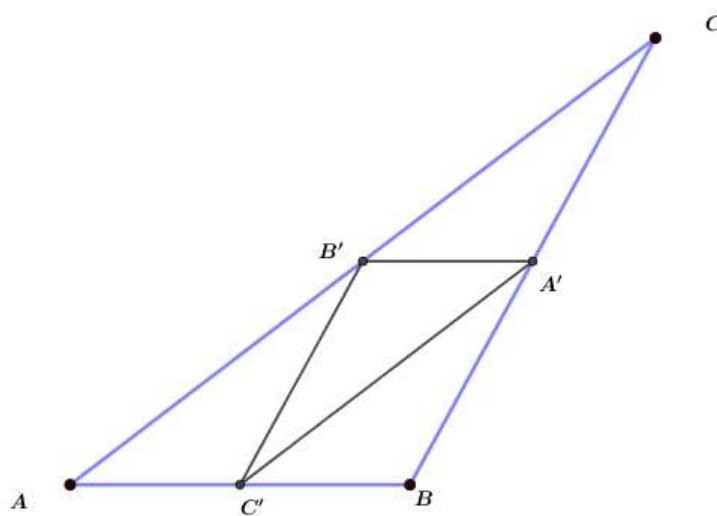
Definicija 1.2.23. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Neka su točke A' , B' , C' redom polovišta stranica \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} trokuta ABC . Trokut $A'B'C'$ naziva se medijalnim trokutom trokuta ABC .*

Definicija 1.2.24. *Neka je u ravnini dan trokut ABC i neka je $A'B'C'$ njegov medijalni trokut. Središte kružnice upisane medijalnom trokutu naziva se Spiekerov centar.*

Spiekerov centar trokuta ABC je centar mase homogenog žičanog okvira u obliku trokuta ABC . Ta je točka naziv dobila prema njemačkom matematičaru Theodoru Spiekeru.

Trilinearne koordinate Spiekerovog centra dane su s

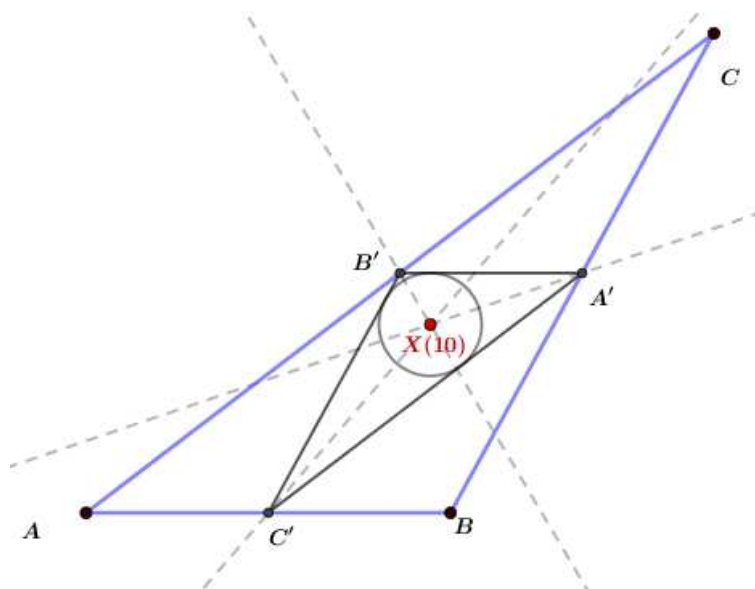
$$bc(b + c) : ca(c + a) : ab(a + b),$$



Slika 16: Medijalni trokut $A'B'C'$ trokuta ABC

a baricentričke s

$$(b + c) : (c + a) : (a + b).$$



Slika 17: Spiekerov centar

X(11) = Feuerbachova točka

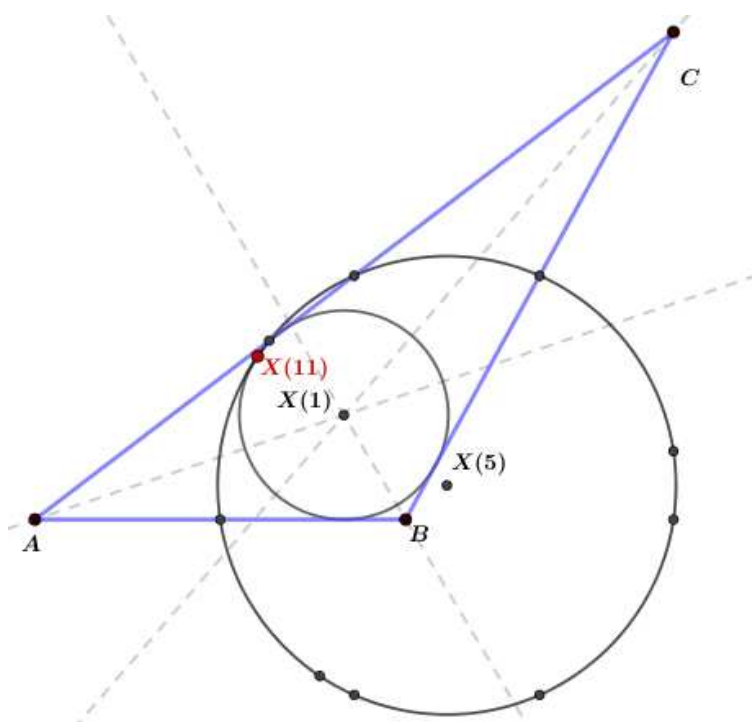
Definicija 1.2.25. Neka je u ravnini dan trokut ABC . Točka u kojoj se dodiruju kružnica upisana trokutu ABC i kružnica devet točaka naziva se Feuerbachovom točkom.

Trilinearne koordinate Feuerbachove točke dane su s

$$(1 - \cos(\beta - \gamma)) : (1 - \cos(\gamma - \alpha)) : (1 - \cos(\alpha - \beta)),$$

a baricentričke s

$$a(1 - \cos(\beta - \gamma)) : b(1 - \cos(\gamma - \alpha)) : c(1 - \cos(\alpha - \beta)).$$

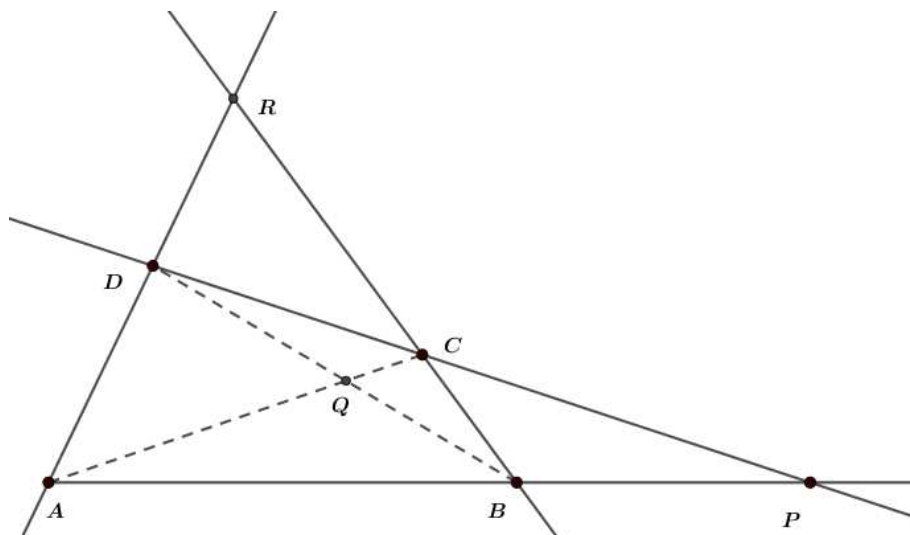


Slika 18: Feuerbachova točka

X(12) = Točka koja je harmonički konjugirana točki X(11) s obzirom na točke X(1) i X(5)

Definicija 1.2.26. Dio ravnine koji se sastoji od četiri točke A, B, C, D , od kojih po tri nisu kolinearne, te svih šest dužina parova tih točaka nazivamo potpunim četverovrhom.

Sjecišta P , Q , R parova suprotnih stranica nazivamo dijagonalnim točkama potpunog četverovrha.



Slika 19: Četverovrh $ABCD$ i njegove dijagonalne točke P , Q , R

Definicija 1.2.27. Za točku D kažemo da je harmonički konjugirana točki C obzirom na par točaka A , B , u oznaci $H(AB, CD)$, ako su:

1) A i B vrhovi potpunog četverovrha, točka C je dijagonalna točka tog četverovrha na pravcu AB , a točka D je sjecište pravca AB i spojnice ostalih dviju dijagonalnih točaka

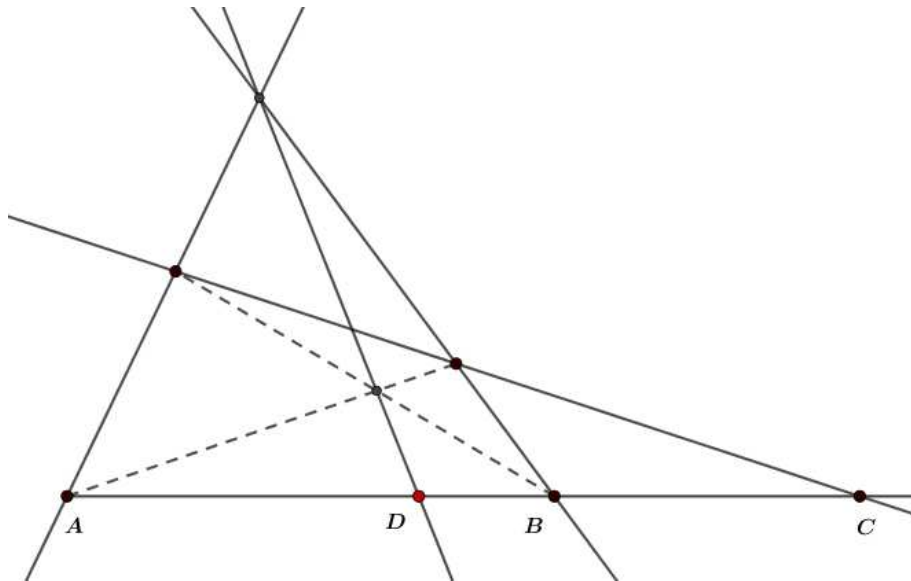
ili

2) A i B su dvije dijagonalne točke potpunog četverovrha, a C i D sjecišta pravca AB s onim dvjema suprotnim stranicama tog četverovrha koje prolaze trećom dijagonalnom točkom.

Definicija 1.2.28. Neka je u ravnini dan trokut ABC . Točka $X(12)$ je harmonički konjugirana Feuerbachovoj točki s obzirom na središte trokutu upisane kružnice i središte kružnice devet točaka.

Trilinearne koordinate točke $X(12)$ dane su s

$$(1 + \cos(\beta - \gamma)) : (1 + \cos(\gamma - \alpha)) : (1 + \cos(\alpha - \beta)),$$



Slika 20: Točka D je harmonički konjugirana točki C s obzirom na par točaka A i B

a baricentričke s

$$a(1 + \cos(\beta - \gamma)) : b(1 + \cos(\gamma - \alpha)) : c(1 + \cos(\alpha - \beta)).$$

X(13) = Prvi izogonični centar (Fermatova točka, Torricellijeva točka)

Teorem 1.2.29. *Neka je u ravnini dan trokut ABC . Nad svakom stranicom danog trokuta konstruiramo jednakostranične trokute izvana ABC_1 , BCA_1 , ACB_1 . Pravci AA_1 , BB_1 , CC_1 prolaze jednom točkom $X(13)$ i vrijedi $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$. Ta se točka naziva Fermatovom točkom.*

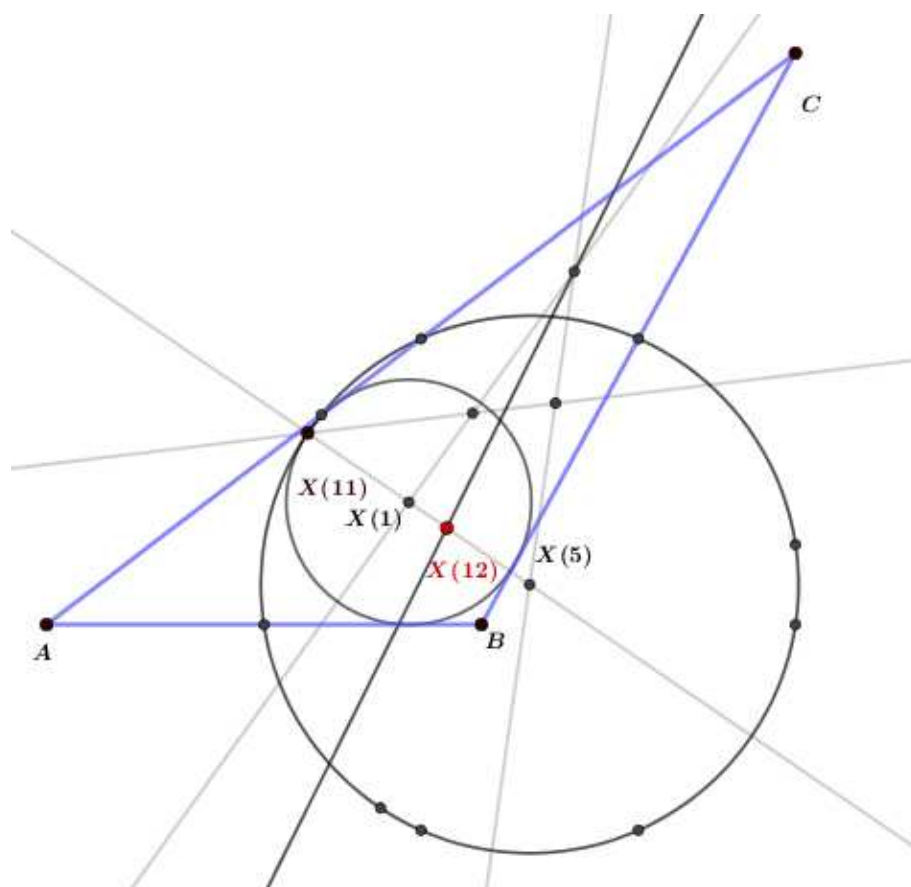
Dokaz. Neka je dan trokut ABC kojemu su nad svakom stranicom konstruirani jednakostranični trokuti ABC_1 , BCA_1 , ACB_1 .

Neka se pravci BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki $X(13)$.

S obzirom da vrijedi $|AB| = |AC_1|$, $|AC| = |AB_1|$ te $\angle BAB_1 = \angle CAC_1 = \alpha + 60^\circ$ zaključujemo da je $\triangle BAB_1 \cong \triangle C_1AC$. Prema tome, $|BB_1| = |CC_1|$.

Analogno zaključujemo i da je $|CC_1| = |AA_1|$.

Spojimo sad $X(13)$ s točkama A i A_1 . S obzirom na sukladnost trokuta BAB_1 i C_1AC , slijedi $\angle X(13)BA = \angle X(13)C_1A$ pa zaključujemo da su točke A , $X(13)$, B , C_1 konciklične. Prema tome, $\angle AX(13)B = 120^\circ$.



Slika 21: Točka $X(12)$ koja je harmonički konjugirana točki $X(11)$ s obzirom na točke $X(1)$ i $X(5)$

Na analogan način slijedi da točka $X(13)$ pripada kružnicama opisanim trokutima ACB_1 i BCA_1 . Slijedi $\angle AX(13)C = \angle BX(13)C = 120^\circ$.

S obzirom da su točke B , $X(13)$, C , A_1 konciklične, slijedi da je $\angle A_1X(13)C = 60^\circ$ pa su prema tome točke A , $X(13)$, A_1 kolinearne. \square

Točka $X(13)$ je naziv dobila prema francuskom matematičaru Pierreu de Fermatu. Međutim, ona se ponekad naziva i Torricellijevom točkom prema talijanskom matematičaru Evaneglistu Torricelliju. Razlog tome je taj što je Fermat zatražio od Torricellija da dokaže kako je zbroj udaljenosti od vrhova do točke $X(13)$ minimalan u slučaju trokuta čiji su svi kutovi manji od 120° . Toricelli je problem riješio koristeći kružnice opisane trokutima ABC_1 , BCA_1 , ACB_1 . Te se kružnice sijeku upravo u točki $X(13)$, a nazivaju se Torricellijevim kružnicama.

Toricellijeva, odnosno Fermatova, točka naziva još i prvim izogoničnim centrom trokuta. Njene su trilinearne koordinate dane s

$$\frac{1}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right)},$$

a baricentričke s

$$\begin{aligned} & \left(a^4 - 2(b^2 - c^2)^2 + a^2(b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} \cdot P(\triangle ABC))\right) : \\ & \left(b^4 - 2(c^2 - a^2)^2 + b^2(c^2 + a^2 + 4\sqrt{3} \cdot P(\triangle ABC))\right) : \\ & \left(c^4 - 2(a^2 - b^2)^2 + c^2(a^2 + b^2 + 4\sqrt{3} \cdot P(\triangle ABC))\right). \end{aligned}$$

X(14) = Drugi izogonični centar

Teorem 1.2.30. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Konstruiramo jednakostranične trokute ABC_2 , BCA_2 , ACB_2 iznutra na stranice trokuta ABC. Pravci AA_2 , BB_2 , CC_2 prolaze jednom točkom X(14) i vrijedi $|AA_2| = |BB_2| = |CC_2|$. Ta se točka naziva drugom izogoničnom točkom trokuta ABC.*

Dokaz se provodi analogno kao i dokaz za prvi izogonični centar.

Trilinearne koordinate drugog izogoničnog centra dane su s

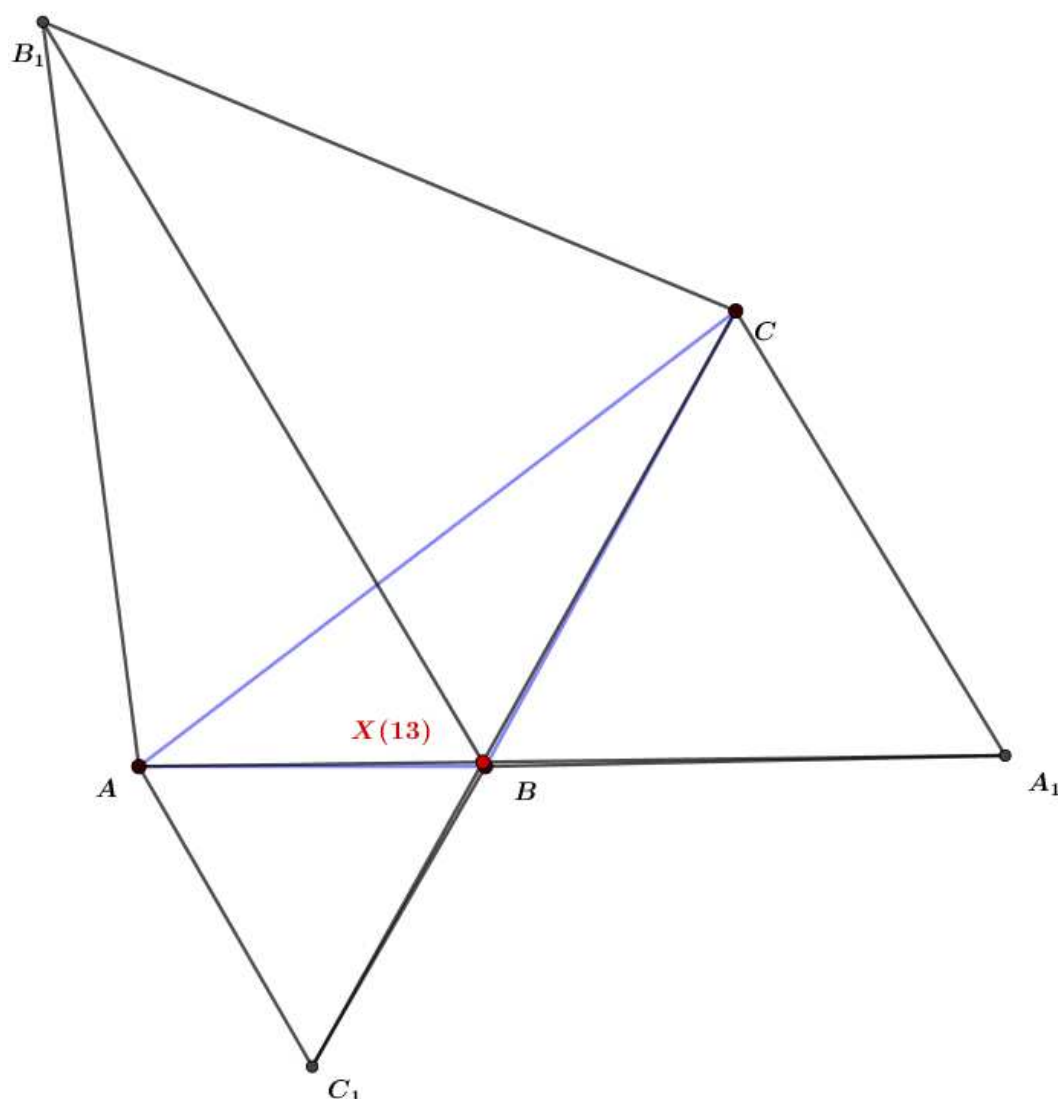
$$\frac{1}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right)},$$

a baricentričke s

$$\begin{aligned} & \left(a^4 - 2(b^2 - c^2)^2 + a^2(b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} \cdot P(\triangle ABC))\right) : \\ & \left(b^4 - 2(c^2 - a^2)^2 + b^2(c^2 + a^2 + 4\sqrt{3} \cdot P(\triangle ABC))\right) : \\ & \left(c^4 - 2(a^2 - b^2)^2 + c^2(a^2 + b^2 + 4\sqrt{3} \cdot P(\triangle ABC))\right). \end{aligned}$$

X(15) = Prva izodinamična točka

Definicija 1.2.31. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Neka je točka U sjecište simetrale kuta α i pravca BC, a točka V sjecište simetrale vanjskog kuta α' s pravcem BC. Kružnica čiji je promjer \overline{UV} naziva se α -Apolonijeva kružnica.*



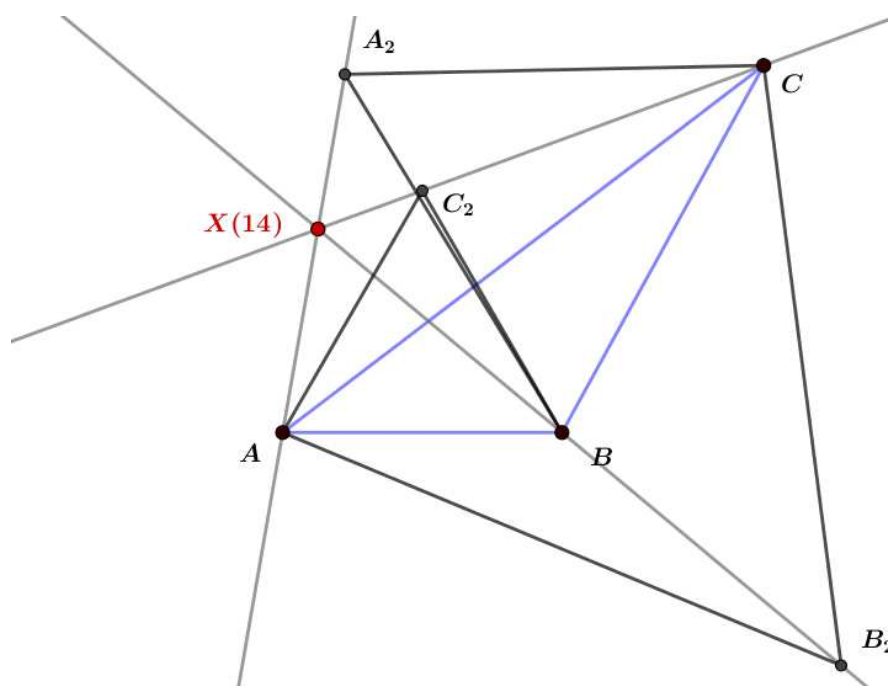
Slika 22: Prvi izogonični centar (Fermatova točka, Torricellijeva točka)

Na analogan način se definiraju β -Apolonijeva kružnica i γ -Apolonijeva kružnica.

Definicija 1.2.32. *Neka je u ravnini dan trokut ABC i pripadajuće α , β i γ -Apolonijeve kružnice. Te tri kružnice sijeku se u točki koju nazivamo prva izodonamična točka.*

Trilinearne koordinate prve izodonamične točke dane su s

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right),$$



Slika 23: Drugi izogonični centar

a baricentričke s

$$a \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) : b \sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) : c \sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right).$$

X(16) = Druga izodinamična točka

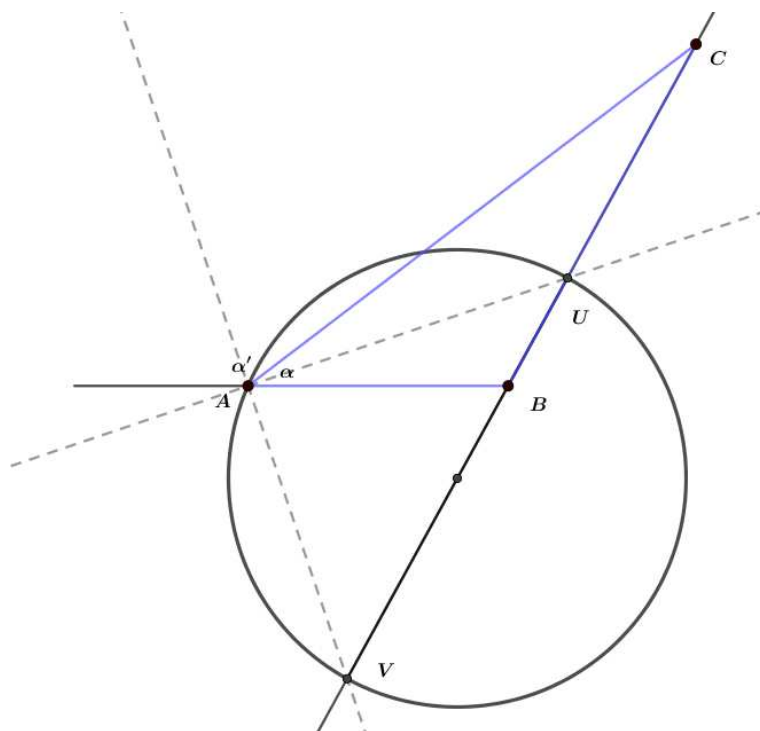
Definicija 1.2.33. Neka je u ravnini dan trokut ABC i pripadajuće α , β i γ -Apolonijeve kružnice. Te tri kružnice sijeku se u dvije točke. Drugu točku nazivamo druga izodinamična točka.

Trilinearne koordinate druge izodinamične točke su dane s

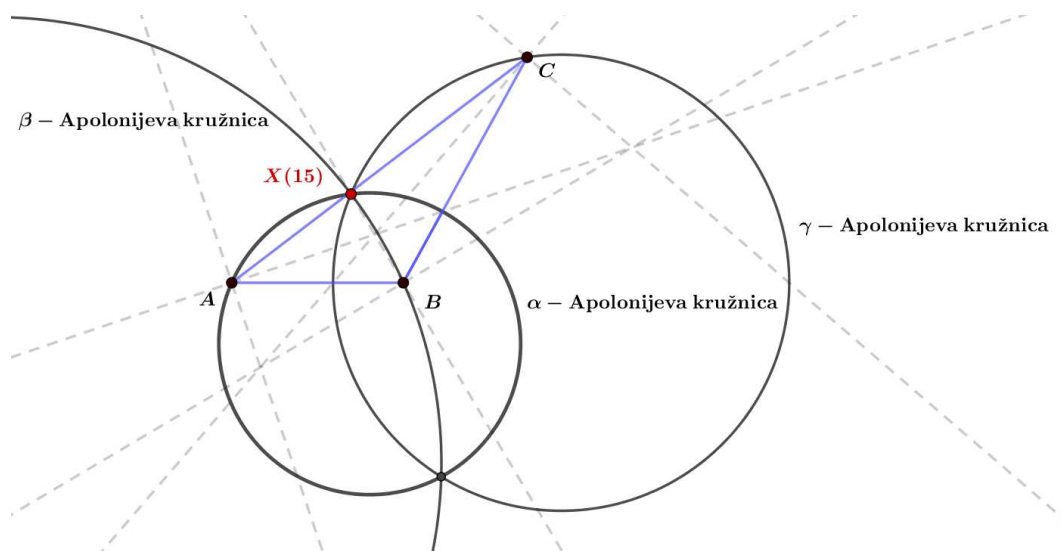
$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right),$$

a baricentričke s

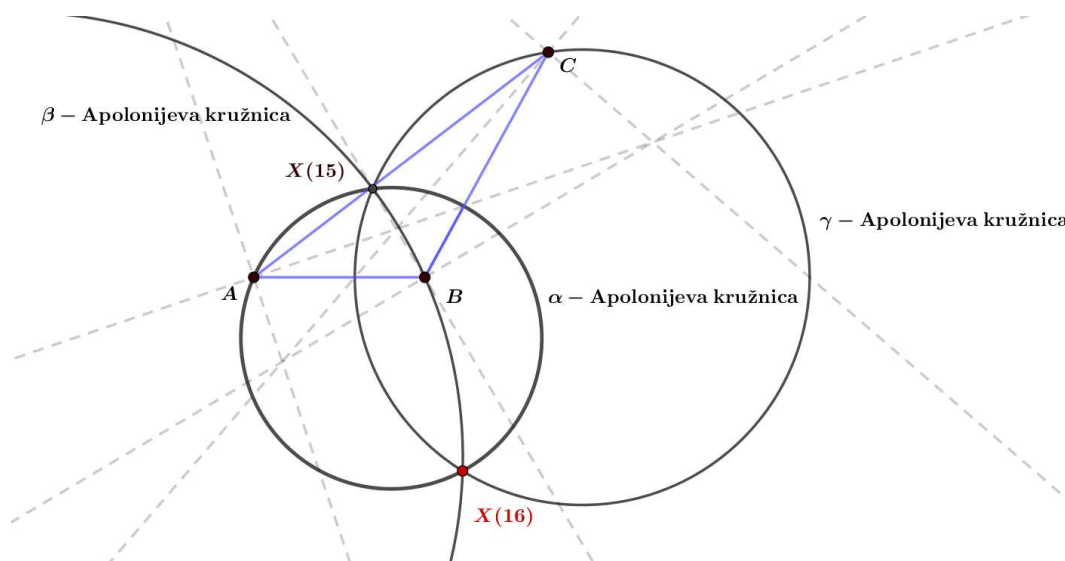
$$a \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) : b \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) : c \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right).$$



Slika 24: α -Apolonijeva kružnica



Slika 25: Prva izodinamična točka



Slika 26: Druga izodinamična točka

X(17) = Prva Napoleonova točka

Definicija 1.2.34. Neka je u ravnini dan trokut ABC . Neka su BCA_1 , ACB_1 , ABC_1 jednakostranični trokuti konstruirani izvana nad stranicama trokuta ABC . Neka su točke N_a , N_b , N_c redom težišta konstruiranih jednakostraničnih trokuta. Trokut N_a, N_b, N_c naziva se vanjski Napoleonov trokut.

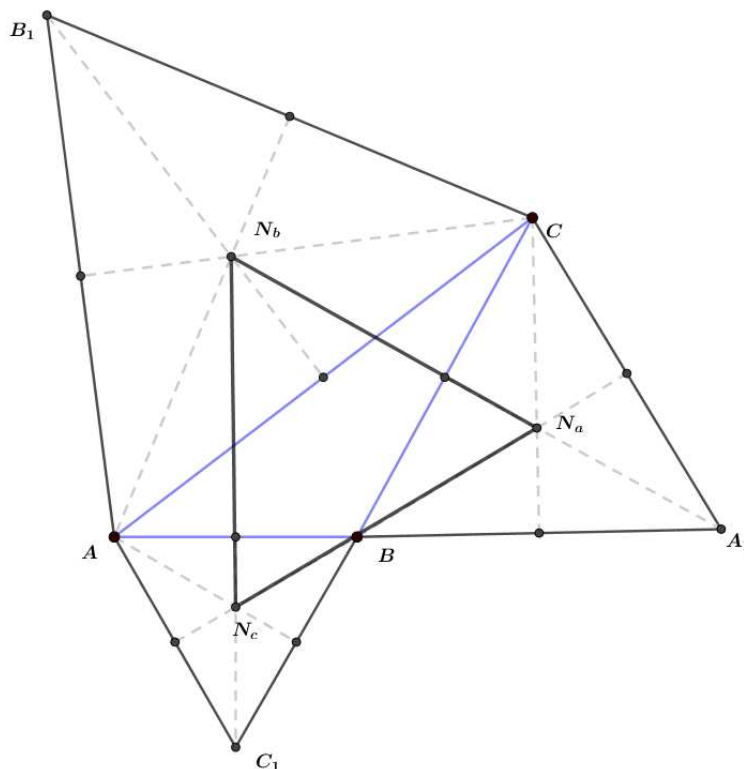
Definicija 1.2.35. Neka je u ravnini dan trokut ABC i neka je N_a , N_b , N_c njegov vanjski Napoleonov trokut. Pravci AN_a , BN_b , CN_c sijeku se u jednoj točki. Tu točku nazivamo prvom Napoleonovom točkom trokuta ABC .

Trilinearne koordinate prve Napoleonove točke dane su s

$$\frac{1}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{6}\right)},$$

a baricentričke su dane s

$$\frac{a}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} : \frac{b}{\sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)} : \frac{c}{\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{6}\right)}.$$



Slika 27: Vanjski Napoleonov trokut $N_a N_b N_c$

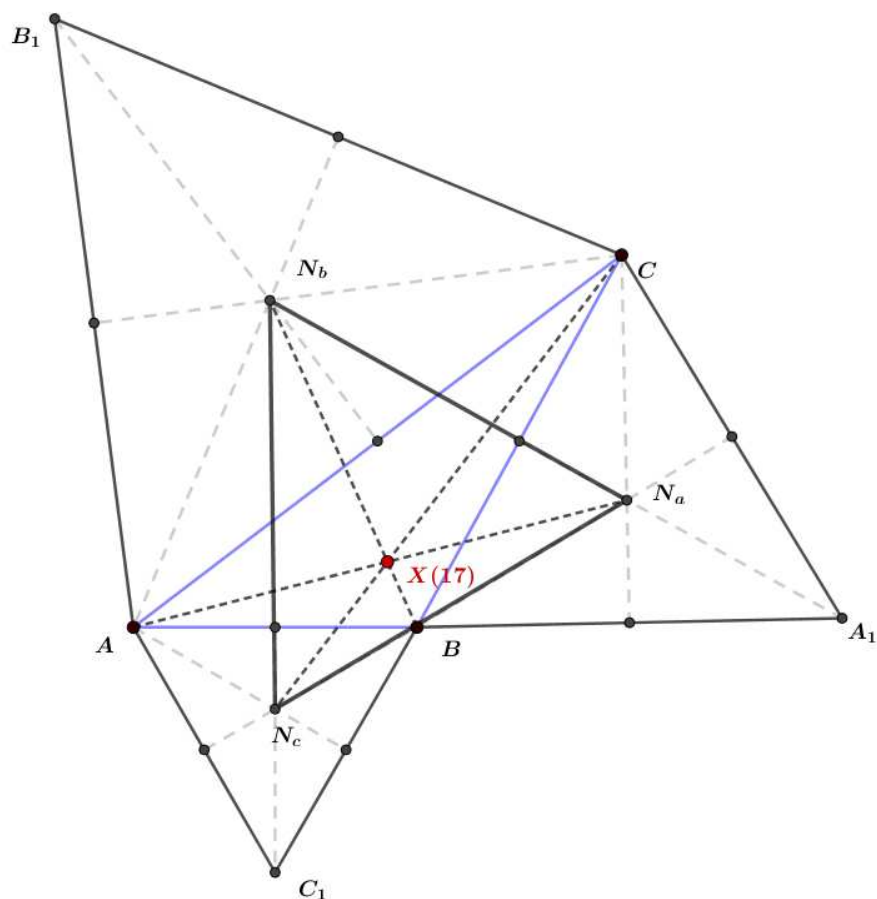
X(18) = Druga Napoleonova točka

Definicija 1.2.36. Neka je u ravnini dan trokut ABC . Neka su BCA_2 , ACB_2 , ABC_2 jednakostranični trokuti konstruirani nad odgovarajućim stranicama na unutrašnju stranu trokuta ABC . Neka su točke N_{au} , N_{bu} , N_{cu} redom težišta konstruiranih jednakostraničnih trokuta. Trokut $N_{au}N_{bu}N_{cu}$ naziva se unutarnji Napoleonov trokut.

Definicija 1.2.37. Neka je u ravnini dan trokut ABC i neka je $N_{au}N_{bu}N_{cu}$ njegov vanjski Napoleonov trokut. Pravci AN_{au} , BN_{bu} , CN_{cu} sijeku se u jednoj točki. Tu točku nazivamo drugom Napoleonovom točkom trokuta ABC .

Trilinearne koordinate druge Napoleonove točke dane su s

$$\frac{1}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)} : \frac{1}{\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)},$$



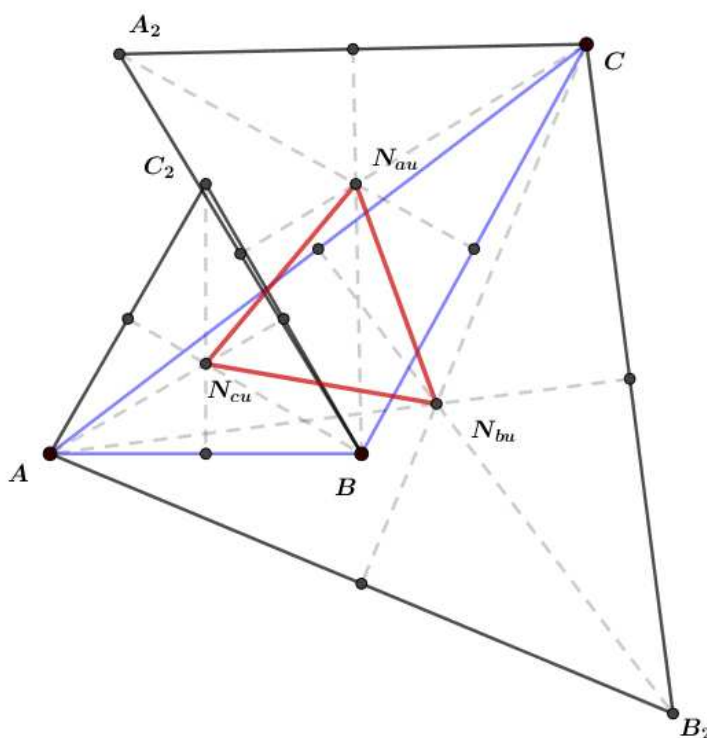
Slika 28: Prva Napoleonova točka

a baricentričke su dane s

$$\frac{a}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} : \frac{b}{\sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right)} : \frac{c}{\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

X(19) = Clawsonova točka

Definicija 1.2.38. *Neka je u ravnini dan trokut ABC. Označimo s D, E, F redom nožišta visina na stranice \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} trokuta ABC. Zajedničke tangente trokutu pripisanih kružnica sijeku se u točkama T_1 , T_2 , T_3 koje se nalaze redom nasuprot vrhova A, B, C. Pravci T_1D , T_2E , T_3F sijeku se u jednoj točki koju nazivamo Clawsonova točka.*



Slika 29: Unutarnji Napoleonov trokut $N_{au}N_{bu}N_{cu}$

Clawsonova točka je dobila naziv prema matematičaru Johnu Clawsonu koji ju je proučavao.

Trilinearne koordinate Clawsonove točke dane su s

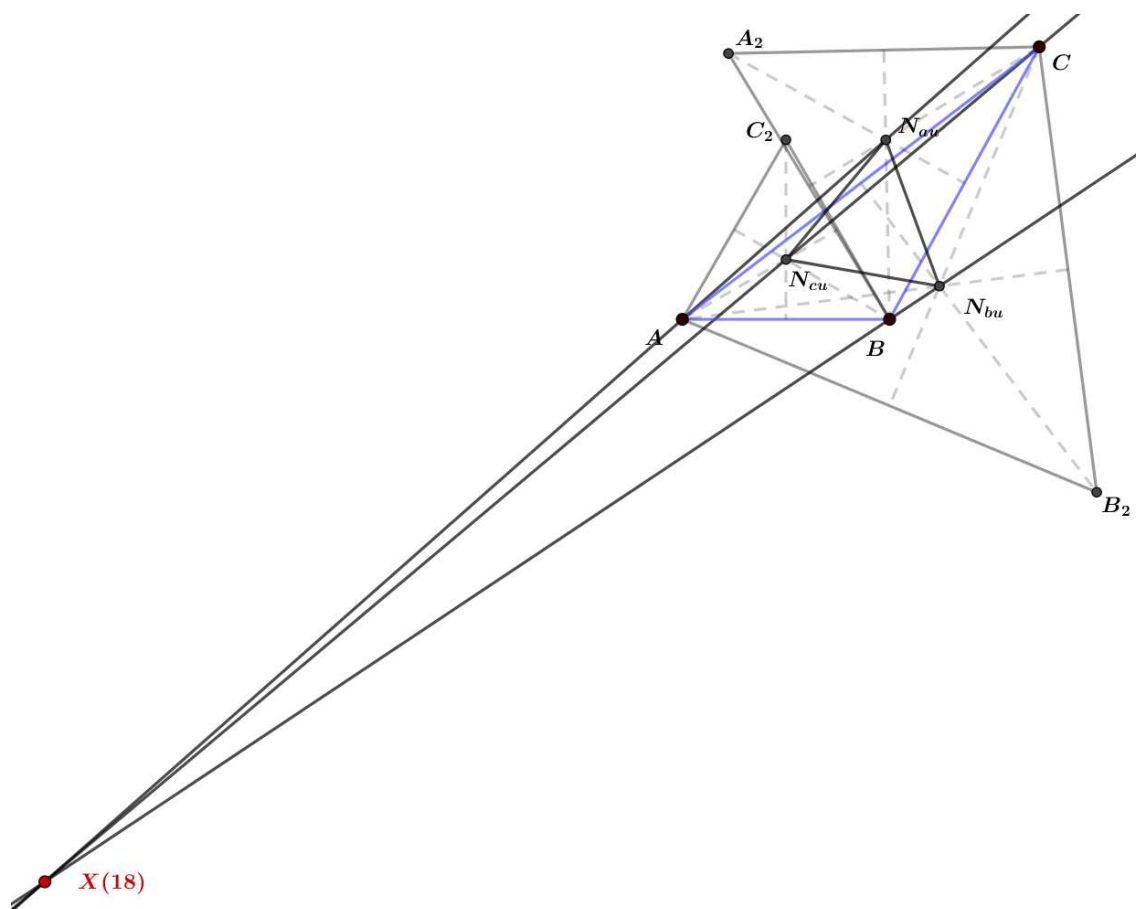
$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma,$$

a baricentričke s

$$a \operatorname{tg} \alpha : b \operatorname{tg} \beta : c \operatorname{tg} \gamma.$$

X(20) = De Longchampsova točka

Definicija 1.2.39. Neka je u ravnini dan trokut ABC . Označimo s $X(3)$ središte tom trokutu opisane kružnice, a s $X(4)$ njegov ortocentar. De Longchampsova točka, u oznaci $X(20)$ je točka koja je centralnosimetrična ortocentru obzirom na središte trokutu opisane kružnice.



Slika 30: Druga Napoleonova točka

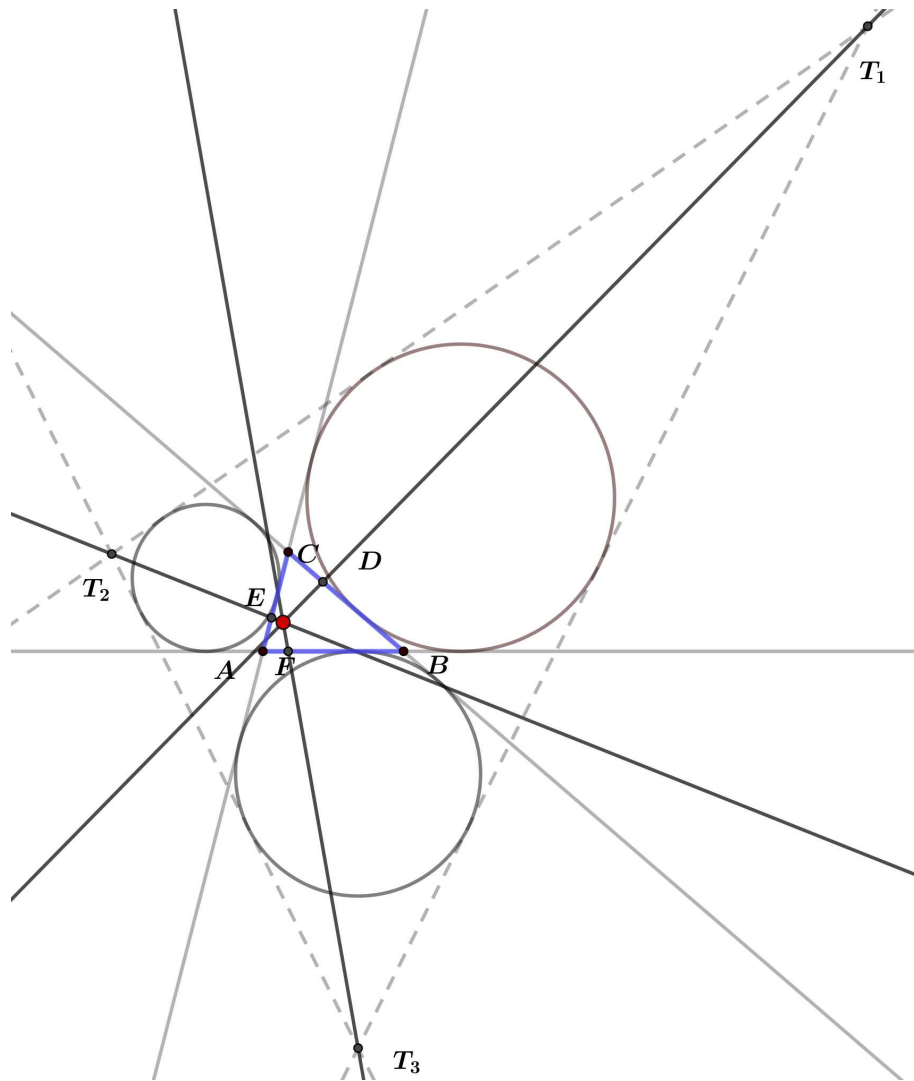
De Longchampsova točka je dobila naziv prema francuskom matematičaru Gastonu Albertu Gohiereu de Longchampsu.

Njene trilinearne koordinate su dane s

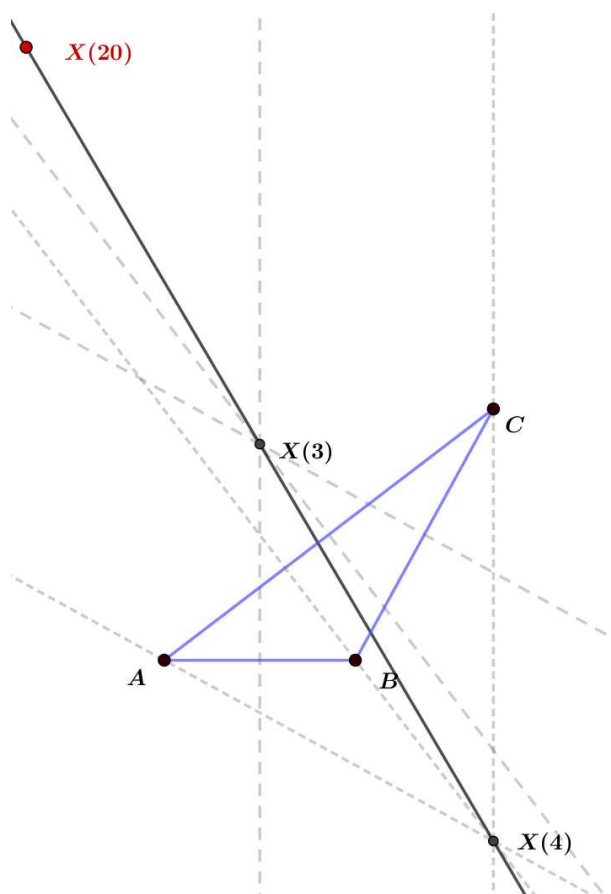
$$(\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \gamma) : (\cos \beta - \cos \gamma \cdot \cos \alpha) : (\cos \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \beta),$$

a baricentričke s

$$(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha) : (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) : (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma).$$



Slika 31: Clawsonova točka



Slika 32: De Longchampsova točka

Poglavlje 2

Elektrostatski centar

2.1 Elektrostatski potencijal

Problem pronalaska elektrostatskog centra trokuta potaknut je praktičnim pitanjem iz fizike koje je na kraju dovelo do zanimljive povezanosti tog problema s geometrijom.

Pretpostavimo da je ravninski trokut T kontinuirani izvor naboja koji je homogeno raspoređen po njegovoj površini. Dakle, preko cijelog trokuta. Postavlja se pitanje u kojoj točki ravnine će elektrostatski potencijal trokuta T postići svoju maksimalnu vrijednost.

Upravo su se tim problemom bavili Hrvoje Abraham i Vjekoslav Kovač u radu [1]. Njihova je točka maksimalnog elektrostatskog potencijala uvrštena u enciklopediju ETC [2] pod oznakom X(5626) gdje je nazvana centrom elektrostatskog potencijala.

Prema Coulombovom zakonu izvor u točki Q čiji je naboj q u nekoj točki udaljenoj za r jedinica generira potencijal dan s

$$V(r) = \frac{kq}{r},$$

pri čemu je konstanta k za nas nebitna.

Prema principu superpozicije, potencijal cijelog trokuta T je definiran kao

$$V(P) = \iint_T \frac{dA(Q)}{|PQ|} \quad (2.1)$$

za svaku točku P ravnine. Ovdje A označava površinu područja, tj. dvodimenzionalnu Lebesgueovu mjeru, Q je varijabla integracije, a $|PQ|$ je udaljenost između točaka P i Q . Pritom zanemarujemo multiplikativnu konstantu te gustoću naboja.

U Kartezijevom koordinatnom sustavu formulu (2.1) zapisujemo kao

$$V(x, y) = \iint_T \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}}. \quad (2.2)$$

Funkcija V je dobro definirana na cijeloj ravnini. Iz same formule nije odmah jasno da unutar trokuta T postoji točka P_{\max} u kojoj V postiže svoj maksimum i da je ta točka jedinstvena za svaki trokut. Cilj je pronaći takvu točku za proizvoljno dani trokut.

Točka maksimalnog potencijala je ujedno i točka u kojoj se elektrostatsko polje E koje generira trokut T stabilizira. Ono je jednostavno definirano kao

$$\vec{E} = -\nabla V, \quad (2.3)$$

za svaku točku u kojoj je potencijal diferencijabilan. Uzimajući u obzir točku izvora dobivamo poznatu formulu

$$\vec{E} = \frac{kq\vec{r}}{r^3}, \quad (2.4)$$

gdje je \vec{r} udaljenost od točke izvora do točke u kojoj se računa elektrostatsko polje. Prema principu superpozicije dobivamo sljedeći odgovarajući izraz

$$\vec{E}(P) = \iint_T \frac{\vec{QP}}{|PQ|^3} dA(Q) = - \iint_T \frac{\vec{PQ}}{|PQ|^3} dA(Q) \quad (2.5)$$

ili koordinatnu formulu uz standardne jedinične vektore \vec{i} i \vec{j} :

$$\vec{E}(x, y) = - \iint_T \frac{(x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j}}{\left((x' - x)^2 + (y' - y)^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx' dy'. \quad (2.6)$$

Dvostruki integral u formuli (2.6) nije apsolutno konvergentan osim ako točka $P(x, y)$ ne leži izvan trokuta T . Da bismo to objasnili, pretpostavimo da je P točka unutar trokuta te da se unutar trokuta nalazi i mali krug $D_\varepsilon(P)$ čiji je radijus ε . Integracijom po krugu te promjenom u polarni koordinatni sustav sa središtem P dobivamo:

$$\iint_{D_\varepsilon(P)} \frac{|\vec{PQ}|}{|PQ|^3} dA(Q) = \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^3} r dr d\varphi = +\infty \quad (2.7)$$

jer $\int_0^\varepsilon \frac{dr}{r}$ divergira. Da bismo dobili valjanu formulu za \vec{E} koja vrijedi za točke P unutar trokuta treba uočiti da se izrazi $\frac{\vec{PQ}}{|PQ|^3}$ za točke $Q \in D_\varepsilon(P)$ poništavaju. Stoga,

$$\vec{E}(P) = - \iint_{T \setminus D_\varepsilon(P)} \frac{\vec{PQ}}{|PQ|^3} dA(Q) \quad (2.8)$$

treba vrijediti za P unutar trokuta i za dovoljno mali $\varepsilon > 0$. Doista, kad $\varepsilon \rightarrow 0$ dobivamo izraz koji se naziva glavna vrijednost integrala:

$$\vec{E}(P) = -\text{p.v.} \iint_T \frac{\vec{PQ}}{|PQ|^3} dA(Q). \quad (2.9)$$

Problem nastaje ako se točka nalazi na rubu trokuta jer tada izraz $\vec{E}(P)$ ne konvergira. Stoga je potencijal u takvim točkama konačan, ali ne i diferencijabilan.

2.2 Geometrijska relacija

Pretpostavimo da je P stacionarna točka unutar pozitivno orijentiranog trokuta $T = \triangle ABC$, odnosno da odgovarajuće vektorsko polje \vec{E} nestaje u P . Znamo da se točka P treba podudarati s točkom maksimuma funkcije V , ali ćemo radije koristiti uvjet $\vec{E}(P) = 0$ kako bismo potvrdili njenu jedinstvenost i našli elementarnu geometrijsku relaciju koja ju određuje.

Označimo udaljenost točke P od vrhova trokuta A, B, C redom s

$$r_A = |PA|, \quad r_B = |PB|, \quad r_C = |PC|$$

te uvedimo odgovarajuće oznake za kutove

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \angle BAP, & \alpha_2 &= \angle PAC, \\ \beta_1 &= \angle CBP, & \beta_2 &= \angle PBA, \\ \gamma_1 &= \angle ACP, & \gamma_2 &= \angle PCB. \end{aligned}$$

Za stranice i unutarnje kutove trokuta koristimo standardne oznake

$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|, \quad \alpha = \angle BAC, \quad \beta = \angle CBA, \quad \gamma = \angle ACB.$$

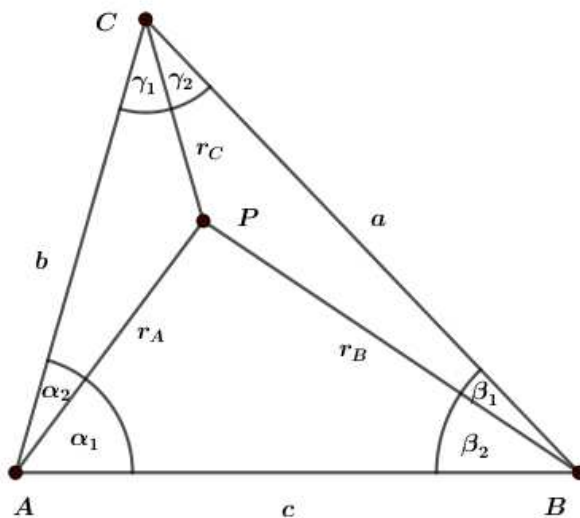
Sljedeći teorem nam daje dvije relacije koje nam omogućuju određivanje položaja točke P u ravnini.

Teorem 2.2.1. *Ako je P točka unutar $\triangle ABC$ takva da je $\vec{E}(P) = 0$, onda vrijedi*

$$\left(\frac{r_B + r_C - a}{r_B + r_C + a} \right)^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{r_C + r_A - b}{r_C + r_A + b} \right)^{\frac{1}{b}} = \left(\frac{r_A + r_B - c}{r_A + r_B + c} \right)^{\frac{1}{c}} \quad (2.10)$$

i

$$\left(\text{tg} \frac{\beta_1}{2} \text{tg} \frac{\gamma_2}{2} \right)^{\frac{1}{\sin \alpha}} = \left(\text{tg} \frac{\gamma_1}{2} \text{tg} \frac{\alpha_2}{2} \right)^{\frac{1}{\sin \beta}} = \left(\text{tg} \frac{\alpha_1}{2} \text{tg} \frac{\beta_2}{2} \right)^{\frac{1}{\sin \gamma}}. \quad (2.11)$$


 Slika 33: Trokut ABC i točka P unutar trokuta

Dokaz. Neka je točka P ishodište polarnog koordinatnog sustava. Označimo s M_φ sjecište polarne zrake određene kutom $\varphi \in [0, 2\pi]$ s rubom $\triangle ABC$. Nadalje, označimo $R(\varphi) = |PM_\varphi|$. Za dovoljno mali $\varepsilon > 0$, formula (2.8) postaje

$$\begin{aligned} \vec{E}(P) &= - \int_{\varepsilon}^{R(\varphi)} \int_0^{2\pi} \frac{r(\cos \varphi) \vec{i} + r(\sin \varphi) \vec{j}}{r^3} r dr d\varphi \\ &= - \int_0^{2\pi} (\log R(\varphi) - \log \varepsilon) \left((\cos \varphi) \vec{i} + (\sin \varphi) \vec{j} \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Zatim koristeći $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$ dobivamo

$$\vec{E}(P) = - \int_0^{2\pi} \log R(\varphi) \left((\cos \varphi) \vec{i} + (\sin \varphi) \vec{j} \right) d\varphi. \quad (2.12)$$

Za ostatak dokaza koristit ćemo prikaz u kompleksnoj ravnini. Koristeći $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ uvjet $\vec{E}(P) = 0$ postaje

$$\int_0^{2\pi} \log R(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi = 0. \quad (2.13)$$

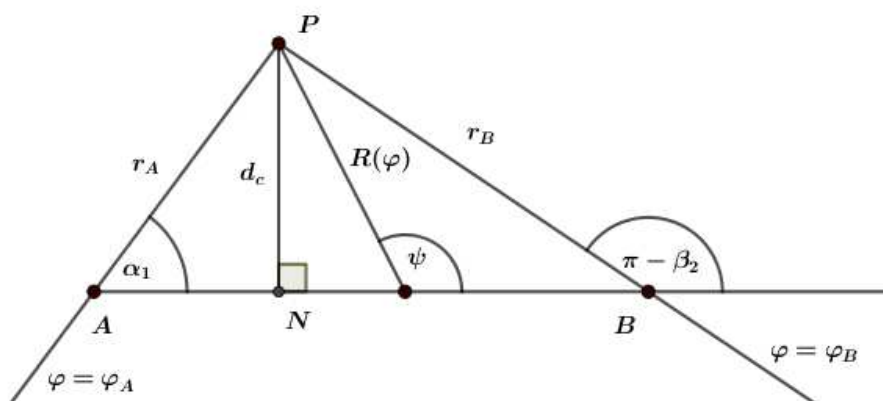
Preostaje nam izraziti $\log R(\varphi)$. Neka vrhovi A, B, C imaju kompleksne koordinate

$$r_A e^{i\varphi_A}, r_B e^{i\varphi_B}, r_C e^{i\varphi_C}$$

i neka su vektori \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BA} prikazani sljedećim kompleksnim brojevima

$$ae^{i\theta_a}, be^{i\theta_b}, ce^{i\theta_c}.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da M_φ leži na stranici \overline{AB} trokuta ABC što je ekvivalentno $\varphi_A < \varphi < \varphi_B$, pri čemu eventualno treba namjestiti kutove dodavanjem odgovarajućih višekratnika od 2π . Označimo s d_c udaljenost točke P do stranice \overline{AB} , a s ψ kut $\angle BM_\varphi P$.



Slika 34: $\varphi_A < \varphi < \varphi_B$

Uočimo da je $\psi = \varphi - \varphi_A + \alpha_1$, a $R(\varphi) = \frac{d_c}{\sin \psi}$, odnosno

$$\log R(\varphi) = \log d_c - \log \sin \psi.$$

Uzevši u obzir da je $\psi \in [\alpha_1, \pi - \beta_2]$ dobivamo

$$\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \log R(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi = \log d_c \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} e^{i\varphi} d\varphi - \int_{\alpha_1}^{\pi - \beta_2} (\log \sin \psi) e^{i(\psi + \varphi_A - \alpha_1)} d\psi.$$

Koristeći formulu

$$\int_{\eta}^{\vartheta} e^{i\varphi} d\varphi = (-ie^{i\varphi}) \Big|_{\varphi=\eta}^{\varphi=\vartheta} \quad (2.14)$$

i parcijalnu integraciju dobivamo

$$\int_{\eta}^{\vartheta} (\log \sin \psi) \cos \psi d\psi = ((\log \sin \psi - 1) \sin \psi) \Big|_{\psi=\eta}^{\psi=\vartheta} \quad (2.15)$$

i

$$\int_{\eta}^{\vartheta} (\log \sin \psi) \sin \psi d\psi = \left(-(\log \sin \psi - 1) \cos \psi + \log \tan \frac{\psi}{2} \right) \Big|_{\psi=\eta}^{\psi=\vartheta} \quad (2.16)$$

 za kutove $0 < \eta < \vartheta < \pi$. Kombinacijom slijedi

$$\int_{\eta}^{\vartheta} (\log \sin \psi) e^{i\psi} d\psi = \left(-(\log \sin \psi - 1)e^{i\psi} + i \log \tan \frac{\psi}{2} \right) \Big|_{\psi=\eta}^{\psi=\vartheta}. \quad (2.17)$$

Iz (2.14) i (2.17) slijedi

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \log R(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi &= -\log d_c e^{i\varphi_B} + i \log d_c e^{i\varphi_A} \\ &+ i e^{i(\varphi_A - \alpha_1 + \pi - \beta_2)} (\log \sin \beta_2 - 1) - i e^{i\varphi_A} (\log \sin \alpha_1 - 1) \\ &- i e^{i(\varphi_A - \alpha_1)} \log \tan \frac{\pi - \beta_2}{2} + i e^{i(\varphi_A - \alpha_1)} \log \tan \frac{\alpha_1}{2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nakon što primijenimo $r_A = \frac{d_c}{\sin \alpha_1}$, $r_B = \frac{d_c}{\sin \beta_2}$, $\varphi_A - \alpha_1 + \pi - \beta_2 = \varphi_B$, $\varphi_A - \alpha_1 = \theta_C$, slijedi

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \log R(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi &= -i e^{i\varphi_B} (\log r_B - 1) + i e^{i\varphi_A} (\log r_A - 1) \\ &+ i e^{i\theta_C} (\log \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} - \log \operatorname{ctg} \frac{\beta_2}{2}). \end{aligned}$$

Zbrajanjem ove i dviju analognih relacija te primjenom (2.13) slijedi

$$e^{i\theta_C} \log \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \right) + e^{i\theta_A} \log \left(\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} \right) + e^{i\theta_B} \log \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \right) = 0$$

što možemo izraziti koristeći vektore

$$\frac{\log \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \right)}{c} \overrightarrow{BA} + \frac{\log \left(\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} \right)}{a} \overrightarrow{CB} + \frac{\log \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \right)}{b} \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$\frac{1}{c} \log \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \right) = \frac{1}{a} \log \left(\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_2}{2} \right) = \frac{1}{b} \log \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \right). \quad (2.19)$$

Da bismo pokazali da vrijedi (2.19) naprosto primijenimo $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ te linearnu nezavisnost vektora \overrightarrow{BA} i \overrightarrow{CB} . Primjenom sinusovog poučka i pravila za logaritme dokaz (2.11) je završen.

Da bismo izveli (2.10) primjenjujemo trigonometrijske funkcije polovičnog kuta, poučak o kosinusu te faktorizaciju:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1 - \cos \alpha_1}{1 + \cos \alpha_1} = \frac{\frac{1 - (r_A^2 + c^2 - r_B^2)}{2r_{AC}}}{\frac{1 + (r_A^2 + c^2 - r_B^2)}{2r_{AC}}} = \frac{(r_A + r_B - c)(r_B - r_A + c)}{(r_A + r_B + c)(r_A - r_B + c)}.$$

Množenjem s $\operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}$ i korjenovanjem slijedi

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} = \frac{r_A + r_B - c}{r_A + r_B + c}$$

pa (2.19) postaje

$$\frac{1}{c} \log \left(\frac{r_A + r_B - c}{r_A + r_B + c} \right) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{r_B + r_C - a}{r_B + r_C + a} \right) = \frac{1}{b} \log \left(\frac{r_C + r_A - b}{r_C + r_A + b} \right). \quad (2.20)$$

Primjenom pravila za logaritme slijedi (2.10). \square

2.3 Kartezijeve koordinate

U ovom se poglavlju bavimo određivanjem koordinata točke P obzirom na dane koordinate vrhova trokuta. Polazimo od jednakosti (2.10), odnosno njene logaritamske verzije (2.20). Uočimo da su izrazi u jednakosti manji od 0 pa ćemo uzeti u obzir njihovu negativnost. Nadalje, jednakosti ćemo pomnožiti s poluopsegom $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ trokuta ABC i njihovu zajedničku vrijednost označiti s λ :

$$-\frac{s}{a} \log \left(\frac{r_B + r_C - a}{r_B + r_C + a} \right) = -\frac{s}{b} \log \left(\frac{r_C + r_A - b}{r_C + r_A + b} \right) = -\frac{s}{c} \log \left(\frac{r_A + r_B - c}{r_A + r_B + c} \right) = \lambda. \quad (2.21)$$

Koncentrirat ćemo se samo na jednu od jednakosti te ćemo je zapisati u sljedećem obliku

$$\frac{r_B + r_C - a}{r_B + r_C + a} = e^{-\frac{a\lambda}{s}}.$$

Onda je

$$r_B + r_C = a \frac{1 + e^{-\frac{a\lambda}{s}}}{1 - e^{-\frac{a\lambda}{s}}} = a \frac{e^{\frac{a\lambda}{2s}} + e^{-\frac{a\lambda}{2s}}}{e^{\frac{a\lambda}{2s}} - e^{-\frac{a\lambda}{2s}}} = a \operatorname{cth} \frac{a\lambda}{2s}.$$

Na analogan način dobivamo

$$r_C + r_A = b \operatorname{cth} \frac{b\lambda}{2s}, \quad r_A + r_B = c \operatorname{cth} \frac{c\lambda}{2s}.$$

Označimo sada s

$$u = a \operatorname{cth} \frac{a\lambda}{2s}, \quad v = b \operatorname{cth} \frac{b\lambda}{2s}, \quad w = c \operatorname{cth} \frac{c\lambda}{2s}. \quad (2.22)$$

Slijedi

$$r_A = \frac{1}{2}(v + w - u), \quad r_B = \frac{1}{2}(w + u - v), \quad r_C = \frac{1}{2}(u + v - w). \quad (2.23)$$

Udaljenost r_A , r_B , r_C nisu nezavisne. Njihovu relaciju možemo izvesti iz

$$P(\triangle PBC) + P(\triangle PCA) + P(\triangle PAB) = P(\triangle ABC)$$

koristeći Heronovu formulu

$$\begin{aligned} & \sqrt{s_a(s_a - a)(s_a - r_B)(s_a - r_C)} + \sqrt{s_b(s_b - b)(s_b - r_C)(s_b - r_A)} \\ & + \sqrt{s_c(s_c - c)(s_c - r_A)(s_c - r_B)} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \end{aligned}$$

pri čemu su s_a, s_b, s_c, s poluopsezi trokuta PBC, PCA, PAB, ABC . Uvrštavanjem (2.23), množenjem s 4 i pojednostavljivanjem slijedi

$$\begin{aligned} & \sqrt{(u^2 - a^2)(a^2 - (v - w)^2)} + \sqrt{(v^2 - b^2)(b^2 - (w - u)^2)} \\ & + \sqrt{(w^2 - c^2)(c^2 - (u - v)^2)} = \sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Jednadžba (2.24) je nelinearna jednadžba za λ pri čemu su r_A, r_B, r_C određeni s (2.22) i (2.23).

Preostaje za objasniti kako izraziti koordinate točke $P(x_P, y_P)$ pomoću njene udaljenosti od točaka $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$. Primjenom formule za euklidsku udaljenost u Kartezijevom koordinatnom sustavu dobivamo sustav kvadratnih jednadžbi

$$\begin{aligned} (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 &= r_A^2, \\ (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 &= r_B^2, \\ (x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 &= r_C^2. \end{aligned}$$

Oduzimanjem treće jednadžbe od prve dvije dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 2(x_C - x_A)x_P + 2(y_C - y_A)y_P &= x_C^2 - x_A^2 + y_C^2 - y_A^2 + v(w - u), \\ 2(x_C - x_B)x_P + 2(y_C - y_B)y_P &= x_C^2 - x_B^2 + y_C^2 - y_B^2 + u(w - v), \end{aligned}$$

čijim rješavanjem slijedi

$$x_P = \frac{(x_A^2 + y_A^2 - vw)(y_B - y_C) + (x_B^2 + y_B^2 - wu)(y_C - y_A) + (x_C^2 + y_C^2 - uv)(y_A - y_B)}{2x_A(y_B - y_C) + 2x_B(y_C - y_A) + 2x_C(y_A - y_B)}, \quad (2.25)$$

$$y_P = \frac{(x_A^2 + y_A^2 - vw)(x_B - x_C) + (x_B^2 + y_B^2 - wu)(x_C - x_A) + (x_C^2 + y_C^2 - uv)(x_A - x_B)}{2y_A(x_B - x_C) + 2y_B(x_C - x_A) + 2y_C(x_A - x_B)}. \quad (2.26)$$

Na taj način dolazimo do sljedećeg teorema:

Teorem 2.3.1. *Pretpostavimo da se točka P nalazi unutar $\triangle ABC$ te da vrijedi $\vec{E}(P) = 0$. Njene Kartezijeve koordinate su dane s (2.25) i (2.26) pri čemu je $u = a \coth \frac{a\lambda}{2s}$, $b = b \coth \frac{b\lambda}{2s}$, $c = c \coth \frac{c\lambda}{2s}$, a λ je rješenje jednadžbe (2.24).*

2.4 Trilinearne koordinate

U ovom se poglavlju bavimo trilinearnim koordinatama točke P_{\max} . Uočimo da prema definiciji 1.1.1 slijedi

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{\frac{P(\triangle ABC)}{a}}{\frac{P(\triangle ABC)}{b}} = \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{u}{a}\right)^2 - 1\right)(a^2 - (v-w)^2)}}{\sqrt{\left(\left(\frac{v}{b}\right)^2 - 1\right)(b^2 - (w-u)^2)}}$$

pa je prema tome dobar odabir funkcije f

$$f(a, b, c) = \sqrt{\left(\operatorname{cth}^2 \frac{a\lambda_{\max}}{a+b+c} - 1\right) \left(a^2 - \left(b \operatorname{cth} \frac{b\lambda_{\max}}{a+b+c} - c \operatorname{cth} \frac{c\lambda_{\max}}{a+b+c}\right)^2\right)},$$

pri čemu je λ_{\max} jedinstveno pozitivno rješenje od (2.24). Važno je za primijetiti i da λ_{\max} ostaje nepromijenjena ukoliko skaliramo trokut skalarom t .

Trilinearne koordinate za P_{\max} su implicitne jer λ_{\max} nije eksplicitno zadan. Stoga se ne očekuje da trilinearne koordinate imaju eksplicitne algebarske izraze.

Poglavlje 3

Općeniti radijalni potencijalni centri

3.1 Izvod općenite formule

U ovom se poglavlju razmatra konvolucija radijalno simetrične funkcije i karakteristične funkcije trokuta te se opisuju točke ekstrema konvolucije na geometrijski način kao što je prikazano u članku [4].

Neka je T trokut u kompleksnoj ravnini te neka je $\text{Int}(T)$ njegova unutrašnjost. Neka je $\phi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija koja određuje opći potencijal točkastog izvora. Ukupni potencijal izvora definiramo kao

$$V_{\phi,T}(w) := \iint_T \phi(|w-z|)dA(z), \quad (3.1)$$

za svaki $w \in \text{Int}(T)$, pri čemu je dA dvodimenzionalna Lebesgueova mjera, a $|w-z|$ euklidska udaljenost između točaka w i z . Navedeni integral ne mora konvergirati pa definiramo potencijal do na aditivnu konstantu. Stoga, fiksiramo točku $w_0 \in \text{Int}(T)$ i za svaku točku $x \in \text{Int}(T)$ definiramo

$$V_{\phi,T}(w) := V_{\phi,T}(w_0) + \iint_{T \setminus D_\varepsilon(w)} \phi(|w-z|)dA(z) - \iint_{T \setminus D_\varepsilon(w_0)} \phi(|w-z|)dA(z), \quad (3.2)$$

pri čemu je $\varepsilon > 0$ dovoljno mali (ovisan o w i w_0) takav da su krugovi $D_\varepsilon(w)$ i $D_\varepsilon(w_0)$ sadržani u $\text{Int}(T)$. Zanimaju nas točke ekstrema funkcije $V_{\phi,T}$, odnosno elementarne geometrijske relacije koje te točke zadovoljavaju.

Gradijentno polje potencijala je dano s

$$\vec{E}_{\phi,T}(w) = -(\nabla V_{\phi,T})(w) = \iint_{T \setminus D_\varepsilon(w)} \phi'(|z-w|) \frac{z-w}{|z-w|} dA(z), \quad (3.3)$$

za svaki $w \in \text{Int}(T)$ i za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ za koji je krug $D_\varepsilon(w)$ sadržan unutar trokuta T . Cilj je pronaći $w \in \text{Int}(T)$ takav da je $\vec{E}_{\phi,T}(w) = 0$. Pretpostavimo da je ta točka

upravo ishodište koordinatnog sustava, odnosno da je $\vec{E}_{\phi,T}(0) = 0$. Prelaskom na polarne koordinate slijedi:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{T \setminus D_\varepsilon(0)} \phi'(|z|) \frac{z}{|z|} dA(z) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\varphi)} \phi'(r) \frac{r e^{i\varphi}}{r} r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (\Phi(R(\varphi)) - \Phi(\varepsilon)) e^{i\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ovdje Φ označava primitivnu funkciju od $r \mapsto \phi'(r)r$, odnosno

$$\Phi'(r) = \phi'(r)r, \quad (3.5)$$

dok $R(\varphi)$ označava duljinu odsječka zrake određene kutom φ od ishodišta 0 do ruba trokuta T . Dakle, dobivamo jednakost

$$\int_0^{2\pi} \Phi(R(\varphi)) e^{i\varphi} d\varphi = 0. \quad (3.6)$$

Izvest ćemo geometrijsku relaciju koju zadovoljavaju točke ekstrema koristeći istu notaciju kao u dokazu teorema 2.2.1 te računajući s općim ϕ i Φ . Primjenom $R(\varphi) = \frac{d_c}{\sin \psi}$ te $\varphi = \psi + \varphi_A - \alpha_1$ dobivamo

$$\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \Phi(R(\varphi)) e^{i\varphi} d\varphi = \int_{\alpha_1}^{\pi-\beta_2} \Phi\left(\frac{d_c}{\sin \psi}\right) e^{i(\psi+\varphi_A-\alpha_1)} d\psi. \quad (3.7)$$

Zatim parcijalnom integracijom te primjenom (3.5), $r_A = \frac{d_c}{\sin \alpha_1}$, $r_B = \frac{d_c}{\sin(\pi-\beta_2)}$ izraz (3.7) postaje

$$-ie^{i\varphi_B} \Phi(r_B) + ie^{i\varphi_A} \Phi(r_A) + \int_{\alpha_1}^{\pi-\beta_2} \phi'\left(\frac{d_c}{\sin \psi}\right) \frac{d_c}{\sin \psi} \frac{-d_c \cos \psi}{\sin^2 \psi} ie^{i(\psi+\varphi_A-\alpha_1)} d\psi. \quad (3.8)$$

Posljednji integral možemo zapisati, koristeći $\vec{BA} = ce^{i\theta_c}$ i $\varphi_A - \alpha_1 = \theta_c$, kao

$$\int_{\alpha_1}^{\pi-\beta_2} \left(\frac{d}{d\psi} \phi\left(\frac{d_c}{\sin \psi}\right) \right) d_c e^{i\theta_c} (-1 + i \operatorname{ctg} \psi) d\psi. \quad (3.9)$$

Primjenom parcijalne integracije te

$$d_c e^{i\theta_c} (-1 + i \operatorname{ctg} \alpha_1) = ir_A e^{i\varphi_A}, \quad d_c e^{i\theta_c} (-1 + i \operatorname{ctg}(\pi - \beta_2)) = ir_B e^{i\varphi_B}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
 \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \Phi(R(\varphi)) e^{i\varphi} d\varphi &= -ie^{i\varphi_B} \Phi(r_B) + ie^{i\varphi_A} \Phi(r_A) \\
 &+ i\phi(r_B)r_B e^{i\varphi_B} - i\phi(r_A)r_A e^{i\varphi_A} \\
 &+ i \left(\int_{\alpha_1}^{\pi-\beta_2} \phi \left(\frac{d_c}{\sin \psi} \right) \frac{d_c}{\sin^2 \psi} d\psi \right) e^{i\theta_c}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Zbrajanjem ove i dviju analognih relacija slijedi

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{a} \left(\int_{\beta_1}^{\pi-\gamma_2} \phi \left(\frac{d_a}{\sin \psi} \right) \frac{d_a}{\sin^2 \psi} d\psi \right) \vec{CB} \\
 &+ \frac{1}{b} \left(\int_{\gamma_1}^{\pi-\alpha_2} \phi \left(\frac{d_b}{\sin \psi} \right) \frac{d_b}{\sin^2 \psi} d\psi \right) \vec{AC} \\
 &+ \frac{1}{c} \left(\int_{\alpha_1}^{\pi-\beta_2} \phi \left(\frac{d_c}{\sin \psi} \right) \frac{d_c}{\sin^2 \psi} d\psi \right) \vec{BA} = \vec{0}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz vektore \vec{BA} , \vec{CB} , \vec{AC} slijedi

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{a} \int_{\beta_1}^{\pi-\gamma_2} \phi \left(\frac{d_a}{\sin \psi} \right) \frac{d_a}{\sin^2 \psi} d\psi \\
 &= \frac{1}{b} \int_{\gamma_1}^{\pi-\alpha_2} \phi \left(\frac{d_b}{\sin \psi} \right) \frac{d_b}{\sin^2 \psi} d\psi \\
 &= \frac{1}{c} \int_{\alpha_1}^{\pi-\beta_2} \phi \left(\frac{d_c}{\sin \psi} \right) \frac{d_c}{\sin^2 \psi} d\psi.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Relacija (3.12) je opća geometrijska relacija koju zadovoljava točka ekstrema, iako nije sasvim jasno određuje li jednoznačno točku.

Ako je $\phi(r) = r^p$, za cijeli broj $p \neq 0$ ili $\phi(r) = \log r$, onda su gornji integrali elementarni te vode prema elementarnim geometrijskim relacijama.

U slučaju $\phi(r) = r^p$, $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ točku minimuma ili maksimuma ukupnog poopćenog potencijala $V_{\phi,T}$ određenog trokutom T zovemo radijalni potencijalni centar trokuta T reda p . U slučaju $\phi(r) = \log r$ kažemo da je riječ o radijalnom potencijalnom centru trokuta T reda 0.

Teoremom 2.2.1 iz prethodnog poglavlja zapravo smo bili dokazali sljedeće:

Teorem 3.1.1. *Ako je točka P radijalni potencijalni centar trokuta T reda -1 , onda za nju vrijedi*

$$\left(\frac{|PA| + |PB| - |AB|}{|PA| + |PB| + |AB|} \right)^{\frac{1}{|AB|}} = \left(\frac{|PB| + |PC| - |BC|}{|PB| + |PC| + |BC|} \right)^{\frac{1}{|BC|}} = \left(\frac{|PC| + |PA| - |CA|}{|PC| + |PA| + |CA|} \right)^{\frac{1}{|CA|}}.$$

U idućem odjeljku dokazat ćemo sljedeći rezultat, elegantni posebni slučaj općenite formule (3.12).

Teorem 3.1.2. *Ako je točka P radijalni potencijalni centar trokuta T reda -2 , onda za nju vrijedi*

$$\frac{\angle BPC}{P(\triangle BCP)} = \frac{\angle CPA}{P(\triangle CAP)} = \frac{\angle APB}{P(\triangle ABP)}.$$

Za $\phi(r) = r^2$ dobivamo težište koje zadovoljava

$$P(\triangle BCP) = P(\triangle CAP) = P(\triangle ABP).$$

Za $\phi(r) = r^{-1}$ dobivamo točku elektrostatskog potencijala, a za $\phi(r) = r^{-2}$ iluminacijski centar.

3.2 Iluminacijski centar

Slučaj $p = -2$ radijalnog potencijalnog centra, definiranog u prethodnom odjeljku, je vrlo zanimljiv.

PISA (Programme for International Student Assessment), najveće svjetsko istraživanje u obrazovanju, je u svojem testu iz 2003. godine postavilo sljedeći problem: „Gradsko vijeće je odlučilo postaviti uličnu svjetiljku u malom parku u obliku trokuta na način da osvjetljava cijeli park. Na koje mjesto svjetiljka treba biti postavljena?”

Taj se problem može riješiti organizacijom prema matematičkim konceptima. Park se može prikazati kao trokut, a osvjetljenje kao krug čije je središte postavljena ulična svjetiljka. Tom transformacijom na matematički jezik problem se svodi na traženje središta trokutu opisane kružnice. S obzirom da je središte trokutu opisane kružnice sjecište simetrala stranica trokuta, konstruiraju se dvije simetrale stranice trokuta, a točka njihovog presjeka je traženo središte kružnice. Važno je i razmisliti o smislenosti rješenja. Primjerice, ako je jedan od unutarnjih kutova trokuta tupi, tada se središte kružnice opisane trokutu nalazi izvan trokuta. Prema tome, mjesto ulične svjetiljke bi bilo izvan parka što ne zadovoljava uvjet postavljenog problema.

S obzirom da se prema PISA problem pretvara u traženje središta trokutu opisane kružnice, to znači da su sva tri kuta trokuta jednako osvjetljena. Međutim, uočeno je da nikakav ozbiljan problem ne predstavlja ako bi neki kut bio više osvjetljen od drugog. Upravo je to bila motivacija japanskom znanstveniku Katsuyukiju Shibati za promatranje navedenog problema sa stajališta minimuma i maksimuma izvjesnih fizikalnih veličina.

Shibata je u članku [5] razmatrao problem pronalaska mjesta na koje bi se postavila ulična svjetiljka u parku trokutastog oblika na način da osvjetljenost parka bude maksimalna. Također, pri tome su i bitni kriteriji da svjetiljka bude postavljena na mjesto na

kojem će gubitak električne energije i, ako je moguće, trošak općinske uprave na potrošnju električne energije biti minimalizirani.

Metoda pronalaska rješenja tog problema koja zadovoljava postavljene kriterije je sljedeća:

- 1) definiranje svjetline točke na udaljenosti r do točke u kojoj je postavljena ulična svjetiljka,
- 2) integriranje svjetline svih točaka u parku,
- 3) računanje parcijalnih derivacija integrirane vrijednosti kako bismo saznali točke maksimuma funkcija.

Svjetlina točke na udaljenosti r do točke u kojoj je postavljena ulična svjetiljka definira se kao maksimalna svjetlina koju osoba koja stoji na toj točki može primiti od izvora svjetlosti. Ta je svjetlina izražena s $\frac{c}{r^2}$, pri čemu je c pozitivna konstanta koja ne ovisi o r . Konstantna vrijednost c izražava snagu izvora svjetlosti. Uzmimo proizvoljno mali $\varepsilon > 0$. Integrirajmo $\frac{c}{r^2}$ preko trokuta izvan kruga radijusa ε oko točke u kojoj je postavljena ulična svjetiljka.

Shibata je tako problem preformulirao u pronalazak točke maksimuma funkcije potencijala V_{-2} te je traženu točku nazvao iluminacijskim centrom trokuta T . Dokažimo teorem 3.1.2 tj. da je geometrijska karakterizacija točke iluminacijskog centra P unutar trokuta ABC dana sa

$$\frac{\angle PBC}{P(\triangle BPC)} = \frac{\angle CPA}{P(\triangle CPA)} = \frac{\angle APB}{P(\triangle APB)}. \quad (3.13)$$

Svaka stacionarna točka P unutar trokuta funkcije V_{-2} mora zadovoljiti relaciju (3.6), koja radi

$$\phi(r) = r^{-2}, \quad \Phi'(r) = -2r^{-2}, \quad \Phi(r) = 2r^{-1}$$

postaje

$$\int_0^{2\pi} R(\varphi)^{-1} e^{i\varphi} d\varphi = 0. \quad (3.14)$$

Alternativno, do relacije (3.14) možemo doći direktno, baš kao i u prethodnom poglavlju. Potencijal cijelog trokuta T je definiran kao

$$V = \iint_T \frac{d\lambda(Q)}{|PQ|^2}.$$

Gradijentno polje gornjeg potencijala je dano s

$$\vec{E}(P) = \iint_T -2 \cdot \frac{\vec{PQ}}{|PQ|^4} d\lambda(Q).$$

Cilj nam je pronaći točku P za koju je $\vec{E}(P) = 0$. Neka je točka P ishodište polarnog koordinatnog sustava. Označimo s M_φ sjecište polarne zrake određene kutom $\varphi \in [0, 2\pi]$ s rubom $\triangle ABC$. Nadalje, označimo $R(\varphi) = |PM_\varphi|$. Za dovoljno mali $\varepsilon > 0$ slijedi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\varepsilon^{R(\varphi)} \int_0^{2\pi} -2 \frac{r(\cos \varphi) \vec{i} + r(\sin \varphi) \vec{j}}{r^4} r dr d\varphi \\ &= \int_\varepsilon^{R(\varphi)} \int_0^{2\pi} -2 \frac{(\cos \varphi) \vec{i} + (\sin \varphi) \vec{j}}{r^2} dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-2}{R(\varphi)} - \frac{-2}{\varepsilon} \right) \left((\cos \varphi) \vec{i} + (\sin \varphi) \vec{j} \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} -2R(\varphi)^{-1} e^{i\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Dijeljenjem s -2 slijedi (3.14). Koristeći istu notaciju kao i u dokazu teorema 2.2.1 slijedi

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} R(\varphi)^{-1} e^{i\varphi} d\varphi &= \int_{\alpha_1}^{\pi-\beta_2} \frac{\sin \psi}{d_c} e^{i(\psi+\varphi_A-\alpha_1)} d\psi \\ &= -\frac{ie^{i\varphi_B}}{4r_B} + \frac{ie^{i\varphi_A}}{4r_A} + \frac{e^{i\varphi_B} \operatorname{ctg} \beta_2}{4r_B} + \frac{e^{i\varphi_A} \operatorname{ctg} \alpha_1}{4r_A} - \frac{\angle APB}{2id_c} e^{i\theta_c}. \end{aligned}$$

Zatim prema (3.14) slijedi

$$\begin{aligned} &\frac{e^{i\varphi_A} (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2)}{4r_A} + \frac{e^{i\varphi_B} (\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2)}{4r_B} + \frac{e^{i\varphi_C} (\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \gamma_2)}{4r_C} \\ &- \frac{\angle BPC}{2id_a} e^{i\theta_a} - \frac{\angle CPA}{2id_b} e^{i\theta_b} - \frac{\angle APB}{2id_c} e^{i\theta_c} = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Zbroj prva tri člana u izrazu (3.15) je jednak 0 za svaku točku P pa slijedi

$$\frac{\angle BPC}{d_a} e^{i\theta_a} + \frac{\angle CPA}{d_b} e^{i\theta_b} + \frac{\angle APB}{d_c} e^{i\theta_c} = 0,$$

odnosno

$$\frac{\angle BPC}{P(\triangle BPC)} \vec{CB} + \frac{\angle CPA}{P(\triangle CPA)} \vec{AC} + \frac{\angle APB}{P(\triangle APB)} \vec{BA} = \vec{0}.$$

Odatle lako slijedi (3.13), a time i teorem 3.1.2.

3.3 Pretraga radijalnih potencijalnih centara u enciklopediji ETC

Neka je dan trokut ABC čije su koordinate $A\left(0, \frac{8\sqrt{35}}{13}\right)$, $B\left(-\frac{107}{13}, 0\right)$, $C\left(\frac{62}{13}, 0\right)$. Dužine njegovih stranica \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} su redom 13, 6, 9. Korištena je pretraga u enciklopediji ETC [2] kako bi se utvrdilo sadrži li enciklopedija koordinate potencijalnih centara za $\phi(r) = r^p$, za različite cjelobrojne vrijednosti p . Izračunata y -koordinata pojedinog centra predstavlja udaljenost centra do pravca BC , odnosno udaljenost d_a . Enciklopedija ETC sadrži tablicu „Search 13, 6, 9” u kojoj se nalaze vrijednosti d_a za sve točke koje su u njoj opisane. Na taj način možemo utvrditi o kojem se poznatom centru trokuta radi, odnosno sadrži li uopće enciklopedija pojedinu točku. Sve numeričke vrijednosti izračunate su programskim paketom Mathematica na temelju općenite relacije (3.12) iz prethodnog poglavlja; izostavljamo te detalje.

Za $p = -1$ izračunata približna vrijednost ordinate je

$$y = 1.49846838637306996754131646095907522462117200790094144337504530.$$

Pretraživanjem u enciklopediji ETC pronađeno je da je riječ o točki $X(5626)$, što je centar elektrostatskog potencijala.

Za $p = -2$ izračunata približna vrijednost ordinate je

$$y = 1.54206156284014763412350576930996598069970485377415307399182620.$$

Pretraživanjem u tablici uočeno je da enciklopedija ETC ne sadrži tu točku.

Za $p = -3$ izračunata vrijednost ordinate je

$$y = 1.57124177400156746581393408801954762622826094177770395461519812.$$

Pretraživanjem u tablici uočeno je da enciklopedija ETC ne sadrži tu točku.

Postupak je ponovljen za sve cjelobrojne $p \in [-4, -12]$ te je pretragom tablice ustanovljeno da enciklopedija ETC ne sadrži nijednu od tih točaka. Napravljena je pretraga i za pozitivne cjelobrojne vrijednosti $p \in [1, 10] \setminus \{2\}$ te je također ustanovljeno da enciklopedija ne sadrži odgovarajuće centre.

Za $p = 2$ izračunata približna vrijednost ordinate je

$$y = 1.21355482730248534206509298288443426634164127811165955341122454.$$

Pretraživanjem u enciklopediji ETC pronađeno je da je riječ o točki $X(2)$, što je težište.

Bibliografija

- [1] Hrvoje Abraham i Vjekoslav Kovač. From electrostatic potentials to yet another triangle center. *Forum Geometricorum*, (15):73–89, 2015.
- [2] Clark Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers — ETC. Dostupno na: <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html> (pristupljeno: 10.10.2022.).
- [3] Dominik Palman. *Trokut i kružnica*. Element, Zagreb, 1994.
- [4] Shigehiro Sakata. Euclidan geometric description of radial centers of a triangle. *Colloquium Mathematicum*, (2):1–3,12–14, 2022.
- [5] Katsuyuki Shibata. Where should a streetlight be installed in a triangular-shaped park? *Objection to the Programme for International Student Assessment (PISA)*.
- [6] Željka Čačić i Vjekoslav Kovač. Otkrivanje karakterističnih točaka trokuta korištenjem enciklopedije ETC. *Poučak*, (17):24–33, 2017.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavani su potencijalni centri trokuta. Opisano je prvih 20 centara trokuta koje sadrži enciklopedija ETC. Zatim je opisana točka elektrostatskog potencijala te su izvedene zanimljive geometrijske relacije koje ona zadovoljava. Izvedena je i opća geometrijska relacija koju zadovoljavaju opći potencijali te je provedena specifikacija za iluminacijski centar. Na kraju je, na temelju izračunatih numeričkih podataka, korištena opcija pretraživanja enciklopedije ETC kako bi se utvrdilo sadrži li ona određene centre trokuta.

Summary

In this thesis, the potential triangle centers are presented. The first 20 centers of the triangle contained in the encyclopedia ETC are described. Next, the center of electrostatic potential is described and the geometric relations that it satisfies were derived. General geometric relations which are satisfied by general potentials are also deduced. The specification to the illumination center is implemented. Finally, based on calculated numerical data, the option of searching the encyclopedia ETC is used to determine whether it contains particular triangle centers.

Životopis

Rođena sam 7. prosinca 1997. u Zadru gdje sam završila svoje osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. Nakon završene Osnovne škole Šimuna Kožičića Benje, 2012. godine upisujem Gimnaziju Franje Petrića, opći smjer. Potom upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno- matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija 2020. godine postajem prvostupnica edukacije matematike te iste godine obrazovanje nastavljam na diplomskom studiju Matematike, nastavnički smjer, na Sveučilištu u Zagrebu.