Modeli rizika u aktuarstvu

Lovrić, Tea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tea Lovrić

MODELI RIZIKA U AKTUARSTVU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Miljenko Huzak

Zagreb, studeni 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu bavit ćemo se opisivanjem modela rizika u aktuarstvu. Kako bi osiguravatelj mogao upravljati svojim kapitalom potrebno je znati koje su mu obveze, tj. koliku štetu, koja proizlazi iz polica osiguranja, mora platiti osiguranicima. Proučavat ćemo individualni i kolektivni model rizika. Oba modela nastojat će opisati ukupni iznos zahtjeva S (tj. skupnu štetu) koja proizlazi iz danog portfelja polica osiguranja u nekom fiksnom vremenskom periodu. Diplomski rad sastojat će se od 2 poglavlja.

Prvo poglavlje će se baviti kolektivnim modelom rizika. Promatrat ćemo portfelj polica osiguranja koji ćemo gledati kao jednu cjelinu koja stvara slučajni broj N zahtjeva u određenom vremenskom periodu. Ukupni iznos svih N zahtjeva ćemo označiti sa S te će cilj biti pronaći funkciju distribucije slučajne varijable S. Nakon uvoda o prikladnim distribucijama za N te općenito o složenim distribucijama promotrit ćemo Panjerovu rekurziju. To je algoritam za izračunavanje raspodjele vjerojatnosti neke složene slučajne varijable. Na kraju poglavlja ćemo pokazati kako se funkcija distribucije od S može aproksimirati pomoću prilagodbe momenata translatirane gama slučajne varijable te normalne slučajne varijable.

U drugom poglavlju ćemo opisati individualni model rizika. Pretpostavit ćemo da se portfelj sastoji od n polica, a iznos zahtjeva koji proizlazi iz police k ćemo označiti sa X_k. Ukupni iznos zahtjeva S će biti suma svih X_k-ova. Kao i u prvom poglavlju želimo pronaći funkciju distribucije ukupnog iznosa zahtjeva S. Pretpostavljajući da su rizici X_k (tj. zahtjevi po pojedinoj polici) u portfelju nezavisne slučajne varijable koristit ćemo konvoluciju kako bi izračunali distribuciju njihove sume. Kako to u praksi često nije praktično uvest ćemo De Prilovu rekurzivnu formulu, a potom i pokazati jednu aproksimativnu metodu za računanje distribucije od S. Na kraju poglavlja ćemo pokazati kako se ukupni zahtjevi S mogu aproksimirati složenom Poissonovom distribucijom.

Oba poglavlja će pomoću primjera nastojati približiti prethodno prikazane teoretske rezultate.

Poglavlje 1

Kolektivni modeli rizika

Pretpostavimo da imamo portfelj polica osiguranja te da promatramo koliko zahtjeva i u kojem iznosu će biti podneseno od strane osiguranika u nekom fiksnom vremenskom razdoblju. Na početku tog razdoblja osiguravatelj ne zna koliko zahtjeva će biti podneseno te u slučaju podnošenja koliko će iznositi šteta. Iz tog razloga potrebno je konstruirati model koji će uzeti u obzir ta dva izvora varijabilnosti. Ime kolektivni model rizika dolazi od toga što promatramo rizik (ukupnu štetu) kao cjelinu. Preciznije, brojimo zahtjeve koji proizlaze iz čitavog portfelja polica osiguranja, a ne iz individualnih polica.

1.1 Model

Definiramo slučajnu varijablu S kao ukupni iznos zahtjeva koji proizlaze iz danog portfelja polica, a s N označavamo slučajnu varijablu koja predstavlja broj zahtjeva u nekom vremenskom periodu. Također, s X_i označimo iznos i-tog zahtjeva. Tada varijablu S možemo zapisati kao

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Uz dogovor da vrijedi da je $S = 0$ ako je $N = 0$ (ako je broj zahtjeva jednak nuli onda je i iznos ukupne količine zahtjeva jednak nuli). Kroz ovo poglavlje pretpostavljamo da su individualni iznosi zahtjeva X_i nenegativne slučajne varijable s pozitivnim očekivanjem. Također, druge dvije važne pretpostavke su da je $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli te da je slučajna varijabla N nezavisna od niza $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Riječima, ove pretpostavke kažu da iznos bilo kojeg zahtjeva ne ovisi o iznosu bilo kojeg drugog zahtjeva te da broj zahtjeva nema utjecaja na njihov iznos.

1.1.1 Distribucija od S

Neka $G(x) = \mathbb{P}(S \leqslant x)$ označava distribuciju agregatnih zahtjeva S, $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)$ distribuciju pojedinih iznosa zahtjeva te neka su $p_n = \mathbb{P}(N = n)$ takvi da je niz $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ funkcija vjerojatnosti za broj zahtjeva N.
Funkciju distribucije od S možemo izvesti ako primijetimo da se događaj $\{S \leqslant x\}$ dogodi ako se podnese n zahtjeva te suma njihovih iznosa nije veća od x. To znači da događaj $\{S \leqslant x\}$ možemo prikazati kao uniju disjunktnih događaja:

$$\{S \leqslant x\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \leqslant x,\ N = n\}.$$

Sada funkciju G možemo zapisati kao

$$G(x) = \mathbb{P}(S \leqslant x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leqslant x,\ N = n).$$

Vrijedi

$$\mathbb{P}(S \leqslant x, N = n) = \mathbb{P}(S \leqslant x \,|\, N = n)\mathbb{P}(N = n)$$

te

$$\mathbb{P}(S \leqslant x \,|\, N = n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right) = F^{n*}(x)$$

gdje je $F^{n*}(x)$ n-struka konvolucija distribucije $F(x)$. Uočimo da je $F^{1*}(x)$ upravo jednako $F(x)$, dok se $F^{0*}(x)$ definira kao 1 za sve nenegativne vrijednosti od x te 0 inače. Iz navedenog slijedi da je, za sve $x \geqslant 0$,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{n*}(x). \tag{1.1}$$

Problem sa formulom (1.1) je taj da konvolucija $F^{n*}(x)$ ne postoji u zatvorenoj formi za mnoge distribucije pojedinih iznosa zahtjeva X_i koje su od praktičnog interesa, kao što su to npr. Paretova ili log-normalna distribucija. Također, čak i ako postoji zatvorena forma i dalje ju je vrlo često teško i nepraktično računati.
Uz pretpostavku da varijable X_i poprimaju vrijednosti u skupu prirodnih brojeva te imaju funkciju gustoće f, funkciju gustoće od S možemo reprezentirati nizom $\{g_x\}_{x=0}^{\infty}$ za koji vrijedi da je $g_0 = p_0$ te

$$g_x = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_x^{n*} \quad \text{za } x = 1, 2, 3, \dots \tag{1.2}$$

gdje je $f_x^{n*} = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = x)$. Formula (1.2) je također nepraktična za računanje, no uz određene distribucije od N vrijednosti od g_x se mogu izračunati rekurzivno za $x = 1, 2, 3, \dots$ koristeći početnu vrijednost g_0. U poglavlju 1.3 ćemo reći nešto više o tome.

1.1.2 Momenti od S

Momenti i funkcije izvodnice momenata od S se mogu izračunati koristeći uvjetno očekivanje. Znamo da za bilo koje dvije slučajne varijable Y i Z, za koje postoji očekivanje odnosno varijanca, vrijede sljedeće dvije formule:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y\,|\,Z]] \tag{1.3}$$

te

$$\mathbb{V}ar[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{V}ar[Y\,|\,Z]] + \mathbb{V}ar[\mathbb{E}[Y\,|\,Z]]. \tag{1.4}$$

Iz jednadžbe (1.3) odmah slijedi da je

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S\,|\,N]].$$

Sa $\mu_k = \mathbb{E}[X_1^k]$ označimo momente od X_1 za $k = 1, 2, 3, \ldots$. Tada je

$$\mathbb{E}[S\,|\,N = n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n\mu_1.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} E[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S\,|\,N] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[S\,|\,N = n]\mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu_1 \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mu_1 \mathbb{E}[N]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ovaj rezultat nam govori da je očekivanje iznosa ukupnih zahtjeva jednako umnošku očekivanja broja zahtjeva te iznosa svakog od zahtjeva.

Sada računamo varijancu varijable S. Koristeći činjenicu da su $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezavisne slučajne varijable slijedi,

$$\mathbb{V}ar[S\,|\,N = n] = \mathbb{V}ar\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar[X_i] = n(\mu_2 - \mu_1^2).$$

Zbog toga vrijedi $\mathbb{V}ar[S\,|\,N] = N(\mu_2 - \mu_1^2)$. Koristeći formulu (1.4) dobivamo izraz za varijancu od S:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar[S] &= \mathbb{E}[\mathbb{V}ar[S\,|\,N]] + \mathbb{V}ar[\mathbb{E}[S\,|\,N]] \\ &= \mathbb{E}[N(\mu_2 - \mu_1^2)] + \mathbb{V}ar[N\mu_1] \\ &= \mathbb{E}[N](\mu_2 - \mu_1^2) + \mathbb{V}ar[N]\mu_1^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Iako formula (1.6) nema logičnu interpretaciju kao formula očekivanja (1.5) iz nje se svejedno može vidjeti da ona ovisi i o distribuciji od N, ali i o distribuciji od X_i.

Na isti način možemo dobiti i funkciju izvodnicu momenata od S:

$$M_S(t) = \mathbb{E}\left[e^{tS}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{tS} \mid N\right]\right].$$

Koristeći činjenicu da je niz slučajnih varijabli $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezavisan i jednako distribuiran slijedi:

$$\mathbb{E}\left[e^{tS} \mid N = n\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{t \sum_{i=1}^{n} X_i\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_i}] = M_X(t)^n.$$

gdje smo s M_X označili funkciju izvodnicu momenata od X_1. Sada je

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathbb{E}[M_X(t)^N] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\log\, M_X(t)^N\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{N\, \log\, M_X(t)\right\}\right] \\ &= M_N[\log\, M_X(t)]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Dakle, M_S je izražen u terminima M_N i M_X.

Ako je X_1 diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$ i s funkcijom izvodnicom vjerojatnosti P_X, onda isti argumenti kao i ranije dovode do jednadžbe:

$$P_S(r) = P_N[P_X(r)]. \tag{1.8}$$

gdje su P_S i P_N funkcije izvodnice vjerojatnosti za S i N.

Napomena 1.1.1. *Kroz čitavu prethodnu diskusiju o distribuciji i momentima slučajne varijable S pretpostavljali smo da sve veličine u formulama koje smo izveli postoje. Ako se dogodi da to ipak nije slučaj, npr. ne postoji očekivanje slučajne varijable N, tada ne postoji niti očekivanje varijable S.*

Primjer 1.1.2. ***(Složena distribucija sa zatvorenom formom funkcije distribucije)***
Neka je $N \sim G(p)$ geometrijska slučajna varijabla s parametrom $p \in (0,1)$ te neka su varijable $X_i \sim Exp(1)$ za $i = 1, 2, 3, \ldots$ eksponencijalne s parametrom 1.
Označimo sa $q = 1 - p$ te prvo računamo funkciju izvodnicu momenata od S.
Za $qe^t < 1$, odnosno $t < -\log\, q$ imamo:

$$M_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} p q^n = \frac{p}{1 - qe^t}. \tag{1.9}$$

Kako su individualni iznosi zahtjeva X_i eksponencijalno distribuirani s parametrom 1 vrijedi da je njihova funkcija izvodnica momenata jednaka

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Zbog toga i jednakosti (1.7) slijedi:

$$M_S(t) = M_N(\log\ M_X(t)) = \frac{p}{1 - qM_x(t)} = p + q\frac{p}{p-t}. \tag{1.10}$$

Vidimo da se funkcija izvodnica momenata od S može prikazati kao konveksna kombinacija funkcije izvodnice konstante 0 *i varijable s eksponencijalnom razdiobom s parametrom p. Kako znamo da funkcija izvodnica momenata jedinstveno određuje distribuciju iz jednadžbe (1.10) možemo zaključiti da je funkcija distribucije od S jednaka*

$$F(x) = p + q(1 - e^{-px}) = 1 - qe^{-px}, \quad \text{za sve } x \geqslant 0. \tag{1.11}$$

To je distribucija koja ima korak veličine p u 0*, a inače je eksponencijalna. Ovaj primjer je jedinstven po tome što predstavlja jedinu netrivijalnu složenu distribuciju koja ima zatvorenu formu za funkciju distribucije.*

1.2 Složene distribucije

U ovom poglavlju razmotrit ćemo različite složene distribucije kojima modeliramo ukupni iznos zahtjeva S. Prikazat ćemo najprikladnije te najčešće korištene distribucije broja zahtjeva N, a zatim i pogledati kako se u odnosu na to mijenja složena distribucija od S.

1.2.1 Složena Poissonova distribucija

Prvo ćemo promatrati slučaj u kojem broj zahtjeva N ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ, tj. $N \sim Poi(\lambda)$. Poznato je da tada vrijedi:

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{V}ar[N] = \lambda,$$
$$M_N(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}.$$

Pomoću formula iz sekcije 1.1 te prethodne dvije formule vrlo lako možemo doći do formula za očekivanje, varijancu te funkciju izvodnicu momenata od S. Iz jednadžbe (1.5) slijedi:

$$\mathbb{E}[S] = \mu_1\lambda, \tag{1.12}$$

iz (1.6)

$$\mathbb{V}ar[S] = \mu_2\lambda \tag{1.13}$$

te iz formule (1.7) slijedi

$$M_S(t) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\}. \tag{1.14}$$

Zadnja stvar koja nam je od interesa je koeficijent asimetrije

$$\gamma_S = \frac{\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3]}{\mathbb{V}ar[S]^{\frac{3}{2}}} \tag{1.15}$$

koji nam govori je li distribucija od S simetrična. Prvi korak je izračunati treći centralni moment od S, tj. $\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3]$. Kako bi to napravili upotrijebit ćemo funkciju izvodnicu kumulanata $\log M_S(t)$ od S,

$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = \mathbb{E}[(S - \mu_1\lambda)^3] = \frac{d^3}{dt^3}\log M_S(t)\bigg|_{t=0} = \lambda \frac{d^3}{dt^3}\log M_X(t)\bigg|_{t=0} = \lambda\mu_3$$

gdje treća jednakost proizlazi iz (1.14). Sada slijedi da je koeficijent asimetrije od S $\gamma_S = \lambda\mu_3/(\lambda\mu_2)^{3/2}$. Ta formula pokazuje da je distribucija od S pozitivno asimetrična jer je treći moment μ_3 od X_i nenegativan kako je i sama varijabla X_i nenegativna. Također, kada parametar $\lambda \to \infty$ onda γ_S teži u 0 što znači da je za velike vrijednosti od λ distribucija od S vrlo blizu simetričnoj distribuciji.

Primjer 1.2.1. *Neka S ima složenu Poissonovu distribuciju takvu da je broj zahtjeva $N \sim Pois(100)$, a varijable individualnog iznosa zahtjeva X_i neka imaju Paretovu distribuciju s parametrima $\alpha = 4$ i $\beta = 1500$, tj. $X_i \sim Pareto(4, 1500)$. Izračunajmo očekivanje, varijancu te koeficijent asimetrije složene slučajne varijable S.*
Znamo da za $X \sim Pareto(\alpha,\beta)$ vrijedi da je $\mathbb{E}[X] = \beta/(\alpha-1)$, $\mathbb{E}[X^2] = 2\beta^2/((\alpha-1)(\alpha-2))$ te $\mathbb{E}[X^3] = 6\beta^3/((\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3))$. Stoga, pomoću ranije izvedenih formula za složenu Poissonovu distribuciju slijedi:

$$\mathbb{E}[S] = 100 \cdot \frac{1500}{3} = 50\,000,$$

$$\mathbb{V}ar[S] = 100 \cdot \frac{2 \cdot 1500^2}{6} = 7.5 \cdot 10^7$$

te

$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = 100 \cdot 1500^3 = 1.5^3 \cdot 10^{11}$$

što dovodi do

$$\gamma_S = \frac{1.5^3 \cdot 10^{11}}{(7.5 \cdot 10^7)^{\frac{3}{2}}} = 0.5196.$$

Jedno vrlo važno svojstvo složene Poissonove distribucije je da je zbroj nezavisnih složenih Poissonovih slučajnih varijabli također složena Poissonova slučajna varijabla. U sljedećem teoremu tu činjenicu zapisujemo formalno.

Teorem 1.2.2. *Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ nezavisne složene Poissonove slučajne varijable s parametrima λ_i te distribucijama zahtjeva F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada $S = \sum_{i=1}^n S_i$ ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrima $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ i $\mathcal{F} = \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^n \lambda_i F_i$.*

Dokaz. Kako bi dokazali ovu tvrdnju koristit ćemo funkciju izvodnicu momenata od S. Pri tome imamo na umu da vrijedi:

$$\mathbb{E}[\exp\{tS\}] = \mathbb{E}[\exp\{t(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)\}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\exp(tS_i)]$$

jer su varijable $S_1, S_2, \ldots, S_n$ međusobno nezavisne. Označimo sa M_i funkciju izvodnicu momenata slučajne varijable čija je funkcija distribucije jednaka F_i. Tada, jer S_i ima složenu Poissonovu distribuciju, vrijedi:

$$\mathbb{E}[\exp\{tS_i\}] = \exp\{\lambda_i(M_i(t) - 1)\}$$

te stoga

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp\{tS\}] &= \prod_{i=1}^n \exp\{\lambda_i(M_i(t) - 1)\} \\
&= \exp\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i(M_i(t) - 1)\right\} \\
&= \exp\left\{\Lambda\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i M_i(t)}{\Lambda} - 1\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Slijedi da slučajna varijabla S ima složenu Poissonovu distribuciju zbog jedinstvenosti funkcije izvodnice momenata i činjenice da slučajna varijabla s distribucijom $\mathcal{F}$ ima funkciju izvodnicu momenata jednaku

$$M_{\mathcal{F}}(t) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)dx = \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^\infty e^{tx} f_i(x)dx = \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^n \lambda_i M_i(t)$$

gdje je f_i gustoća distribucije F_i. □

Primjer 1.2.3. *Neka S_1 ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda_1 = 10$ i distribucijom individualnog iznosa zahtjeva $F_1(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$. Varijabla S_2 neka također*

ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda_2 = 15$ *te distribucijom individualnog iznosa zahtjeva* $F_2(x) = 1 - e^{-x}(1 + x)$, $x \geqslant 0$. *Uz pretpostavku da su* S_1 *i* S_2 *nezavisne, želimo pronaći distribuciju zbroja* $S_1 + S_2$.
Kako varijable S_1 *i* S_2 *zadovoljavaju sve uvjete teorema 1.2.2 možemo zaključiti da varijabla* $S_1 + S_2$ *ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrom* $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 10 + 15 = 25$.
Također, distribucija individualnog iznosa zahtjeva je

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{\lambda_1}{\Lambda}F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\Lambda}F_2(x)\\ &= \frac{2}{5}(1 - e^{-x}) + \frac{3}{5}\left(1 - e^{-x}(1 + x)\right)\\ &= 1 - e^{-x}(1 + \frac{3}{5}x).\end{aligned}$$

Primjer 1.2.4. *Neka polica A ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrom* $\lambda_A = 2$ *te neka individualni zahtjevi iznose* 1 *s vjerojatnošću* 0.6*, a* 2 *s vjerojatnošću* 0.4*. Polica B neka također ima složenu Poissonovu distribuciju, ali s parametrom* $\lambda_B = 1$*. Individualni zahtjevi za policu B neka iznose* 1 *s vjerojatnošću* 0.7*, a* 3 *s vjerojatnošću* 0.3*. Zahtjevi koji proizlaze iz tih dviju polica su nezavisni.*
Želimo odrediti vjerojatnost da je ukupni iznos zahtjeva koji proizlaze iz polica A i B jednak 2.
Koristeći teorem 1.2.2 ukupni iznos zahtjeva $S = S_A + S_B$ *također ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrom* $\Lambda = \lambda_A + \lambda_B = 2 + 1 = 3$. *Funkciju gustoće* f_{X_i} *individualnih zahtjeva* X_i *možemo izračunati na sljedeći način:*

$$\begin{aligned}f_{X_i}(1) &= \frac{\lambda_A}{\Lambda}\cdot 0.6 + \frac{\lambda_B}{\Lambda}\cdot 0.7 = \frac{2}{3}\cdot 0.6 + \frac{1}{3}\cdot 0.7 = 0.6333,\\ f_{X_i}(2) &= \frac{\lambda_A}{\Lambda}\cdot 0.4 + \frac{\lambda_B}{\Lambda}\cdot 0 = \frac{2}{3}\cdot 0.4 + \frac{1}{3}\cdot 0 = 0.2667,\\ f_{X_i}(3) &= \frac{\lambda_A}{\Lambda}\cdot 0 + \frac{\lambda_B}{\Lambda}\cdot 0.3 = \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0.3 = 0.1.\end{aligned}$$

Sada, zbog nezavisnosti od N *i* X_i *te nezavisnosti individualnih zahtjeva* X_i *međusobno, slijedi,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = 2) &= \mathbb{P}(N = 1, X_1 = 2) + \mathbb{P}(N = 2, X_1 = 1, X_2 = 1)\\ &= \frac{3^1}{1!}e^{-3}0.2667 + \frac{3^2}{2!}e^{-3}0.6333^2\\ &= 2.605e^{-3} = 0.1297.\end{aligned}$$

Traženu vjerojatnost možemo izračunati i bez korištenja teorema 1.2.2 tako da svaku policu gledamo posebno. Za policu A vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_A = 0) &= \frac{2^0}{0!}e^{-2} = e^{-2},\\
\mathbb{P}(S_A = 1) &= \frac{2^1}{1!}e^{-2}0.6 = 1.2e^{-2},\\
\mathbb{P}(S_A = 2) &= \frac{2^1}{1!}e^{-2}0.4 + \frac{2^2}{2!}e^{-2}0.6^2 = 1.52e^{-2}.
\end{aligned}$$

Slično, za policu B je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_B = 0) &= \frac{1^0}{0!}e^{-1} = e^{-1},\\
\mathbb{P}(S_B = 1) &= \frac{1^1}{1!}e^{-1}0.7 = 0.7e^{-1},\\
\mathbb{P}(S_B = 2) &= \frac{1^2}{2!}e^{-1}0.7^2 = 0.245e^{-1}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_A + S_B = 2) &= \mathbb{P}(S_A = 0, S_B = 2) + \mathbb{P}(S_A = 1, S_B = 1) + \mathbb{P}(S_A = 2, S_B = 0)\\
&= e^{-2}(0.245e^{-1}) + 1.2e^{-2}(0.7e^{-1}) + 1.52e^{-2}(e^{-1})\\
&= 2.605e^{-3} = 0.1297.
\end{aligned}$$

1.2.2 Složena binomna distribucija

Zamislimo policu grupnog osiguranja života koja pokriva n života. Pretpostavimo da za sve osigurane živote vrijedi da imaju isti intenzitet smrtnosti te da su nezavisni u odnosu na smrtnost. U takvom slučaju dobar izbor distribucije za broj zahtjeva N je binomna distribucija, $N \sim B(n, p)$ za neke $n \in \mathbb{N}$ te $p \in (0, 1)$. Poznato je da vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] &= np\\
\mathbb{V}ar[N] &= np(1-p)\\
M_N(t) &= (pe^t + 1 - p)^n.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Važno je primijetiti da kada biramo binomnu distribuciju za broj zahtjeva da onda postoji gornja ograda n. Pomoću formula iz sekcije 1.1 te formula (1.16) možemo izračunati izraze za očekivanje, varijancu te funkciju izvodnicu momenata za slučajnu varijablu S koja sada ima složenu binomnu distribuciju.

$$\mathbb{E}[S] = np\mu_1 \tag{1.17}$$

$$\mathbb{V}ar[S] = np(\mu_2 - \mu_1^2) + np(1-p)\mu_1^2 = np\mu_2 - np^2\mu_1^2 \tag{1.18}$$

Iz formule (1.7) dobivamo:

$$M_S(t) = (pM_X(t) + 1 - p)^n. \tag{1.19}$$

Koeficijent asimetrije ponovno računamo po formuli (1.15). Kako bi izračunali treći centralni moment, kao i ranije, koristimo funkciju izvodnicu kumulanata i nakon malo računanja dobivamo:

$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = \mathbb{E}[(S - np\mu_1)^3] = \frac{d^3}{dt^3}\log M_S(t)\bigg|_{t=0} = np\mu_3 - 3np^2\mu_2\mu_1 + 2nq^3\mu_1^3.$$

Slijedi da je koeficijent smjera γ_S dan formulom:

$$\gamma_S = \frac{np\mu_3 - 3np^2\mu_2\mu_1 + 2nq^3\mu_1^3}{(np\mu_2 - np^2\mu_1^2)^{3/2}}.$$

Za razliku od složene Poissonove distribucije složena binomna distrbucija može biti negativno asimetrična. Jedan takav slučaj je kada su svi iznosi šteta jednaki B. Tada je $S = BN$ i vrijedi da je treći centralni moment od S jednak:

$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = B^3\mathbb{E}[(N - \mathbb{E}[N])^3].$$

Iz toga slijedi da je S negativno asimetrična ako je $p > 0.5$ jer je tada binomna distrbucija negativno asimetrična.

1.2.3 Složena negativna binomna distribucija

Još jedan čest primjer distribucije broja zahtjeva N je negativna binomna distribucija. Ta distribucija je alternativa Poissonovoj, a jedina prednost koju ima pred Poissonovom distribucijom je ta da joj je varijanca veća od očekivanja. To znači da se može bolje prilagoditi podacima kod kojih također vrijedi da je varijanca uzorka veća od očekivanja uzorka. Za N negativno binomno distribuiranu, tj. $N \sim NB(k, p)$ vrijedi:

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{k+n-1}{n} p^k q^n \quad \text{za } n = 0, 1, 2, \ldots$$

pri čemu je parametar $k > 0$ te je $p + q = 1$ i $0 < p < 1$. Specijalan slučaj $k = 1$ vodi na geometrijsku distribuciju. Vrijede sljedeće formule:

$$\mathbb{E}[N] = \frac{kq}{p}, \tag{1.20}$$

$$\mathbb{V}ar[N] = \frac{kq}{p^2}, \tag{1.21}$$

$$M_N(t) = p^k(1 - qe^t)^{-k}. \tag{1.22}$$

U ovom slučaju slučajna varijabla S ima složenu negativnu binomnu distribuciju, a iz formula (1.20), (1.21) i (1.22) te formula iz sekcije 1.1 dobivamo slijedeće izraze:

$$\mathbb{E}[S] = \frac{kq}{p}\mu_1, \tag{1.23}$$

$$\mathbb{V}ar[S] = \frac{kq}{p}\mu_2 + \frac{kq^2}{p^2}\mu_1^2, \tag{1.24}$$

$$M_S(t) = \frac{p^k}{(1 - qM_X(t))^k}. \tag{1.25}$$

Kao i za prethodne distribucije treći centralni moment od S tražimo pomoću funkcije izvodnice kumulanata:

$$\mathbb{E}[(S - \mathbb{E}[S])^3] = \mathbb{E}[(S - kq\mu_1/p)^3] = \frac{d^3}{dt^3}\log M_S(t)\bigg|_{t=0} = \frac{3kq^2\mu_1\mu_2}{p^2} + \frac{2kq^3\mu_1^3}{p^3} + \frac{kq\mu_3}{p}.$$

Uvrštavanjem u formulu (1.15) dobivamo koeficijent asimetrije γ_S. Kako su parametri distribucije k i p pozitivni, a isto vrijedi i za momente distribucije individualnih iznosa zahtjeva X_i dobivamo da je složena negativno binomna distribucija uvijek pozitivno asimetrična.

1.3 Panjerova rekurzija

Harry Panjer je u svom radu iz 1981. godine predstavio kako možemo rekurzivno računati vjerojatnosti g_x iz formule (1.2), odnosno vrijednosti gustoće agregatnih zahtjeva S uz pretpostavku da individualni iznosi $X_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ poprimaju vrijednosti u skupu $\mathbb{N}_0$ te da broj zahtjeva N pripada $(a, b, 0)$ klasi distribucija.

1.3.1 Klasa distribucija $(a, b, 0)$

Distribucija broja zahtjeva N pripada $(a, b, 0)$ klasi distribucija ako se funkcija vjerojatnosti $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ može izračunati rekurzivno pomoću iduće formule:

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)p_{n-1} \quad \text{za } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.26}$$

gdje su a i b konstantni. Izraz '0' u $(a, b, 0)$ dolazi od toga da je početna vrijednost rekurzije jednaka p_0. Pretpostavljamo da je p_0 strogo veće od 0.
Postoje točno tri netrivijalne distribucije u $(a, b, 0)$ klasi distribucija koje se mogu izvesti promatranjem mogućih vrijednosti parametara a i b. Te distribucije su:

1) Poissonova,

2) negativna binomna,

3) binomna.

U tablici 1.1 zapisane su vrijednosti parametara a i b u ovisnosti o parametrima Poissonove, negativno binomne i binomne distribucije.

	$Poi(\lambda)$	$NB(k,p)$	$B(k,p)$
a	0	$1-p$	$-p/(1-p)$
b	λ	$(1-p)(k-1)$	$(k+1)p/(1-p)$

Tablica 1.1: Vrijednosti a i b

Izvedimo funkciju izvodnicu vjerojatnosti od N čija funkcija distribucije pripada $(a,b,0)$ klasi. Vrijedi:

$$P_N(r) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n p_n.$$

Deriviranjem prethodne jednakosti i uvrštavanjem formule (1.26) dobivamo:

$$\begin{aligned}
P'_n(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}\left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} \\
&= a\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} p_{n-1} + b\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} p_{n-1} = \underbrace{a\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} p_{n-1}}_{(*)} + bP_N(r).
\end{aligned}$$

Koristeći trivijalni identitet $n = n + 1 - 1$, $(*)$ postaje:

$$\begin{aligned}
(*) &= a\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)r^{n-1} p_{n-1} + a\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} p_{n-1} \\
&= ar\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)r^{n-2} p_{n-1} + aP_N(r) \\
&= arP'_N(r) + aP_N(r).
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi jednadžba

$$P'_N(r) = arP'_N(r) + (a+b)P_N(r). \tag{1.27}$$

1.3.2 Rekurzivna formula

Panjerova rekurzivna formula je jedan od najvažnijih rezultata u teoriji rizika. Ona nam dopušta računanje funkcije vjerojatnosti agregatnih zahtjeva u slučaju da distribucija broja zahtjeva pripada $(a, b, 0)$ klasi distribucija te kada individualni iznosi zahtjeva imaju diskretnu funkciju vjerojatnosti $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$. U izvodu formule ćemo dopustiti $f_0 > 0$ iako zahtjev iznosa nula u praksi uopće ne bi bio zabilježen kao zahtjev.
Kako pretpostavljamo da individualni zahtjevi imaju vrijednosti u skupu $\mathbb{N}_0$, onda to isto vrijedi i za varijablu S. Nadalje, $S = 0$ ako je $N = 0$ ili ako je $N = n$ i $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$. Suma $\sum_{i=1}^{n} X_i$ je jednaka nuli samo ako je svaki $X_i = 0$, a zbog nezavisnosti slijedi

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\right) = f_0^n.$$

Iz navedenog i definicije distribucije od S u sekciji 1.1 dobivamo početnu vrijednost rekurzije:

$$g_0 = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_0^n = P_N(f_0) \tag{1.28}$$

Jednadžbom (1.8) je dana funkcija izvodnica vjerojatnosti od S, kada nju deriviramo po r dobivamo:

$$P_S'(r) = P_N'[P_X(r)]P_X'(r). \tag{1.29}$$

Formulu (1.27) ubacimo u (1.29) s time da argument r u (1.27) zamijenimo s argumentom $P_X(r)$:

$$P_S'(r) = [aP_X(r)P_N'[P_X(r)] + (a + b)P_N[P_X(r)]]\, P_X'(r).$$

Zatim, koristeći (1.8) i (1.29) dobivamo:

$$P_S'(r) = aP_X(r)P_S'(r) + (a + b)P_S(r)P_X'(r). \tag{1.30}$$

Po definiciji, funkcije izvodnice vjerojatnosti P_S i P_X možemo zapisati u obliku sume

$$P_S(r) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j \quad \text{i} \quad P_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k,$$

deriviranjem gornjih izraza dolazimo do:

$$P_S'(r) = \sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1} g_j \quad \text{i} \quad P_X'(r) = \sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1} f_k.$$

Ubacivanjem gornjih izraza u jednadžbu (1.30) i množenjem sa r dobivamo sljedeći izraz:

$$\sum_{j=0}^{\infty} jr^j g_j = a\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jr^j g_j\right) + (a+b)\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} kr^k f_k\right). \tag{1.31}$$

Kako bi dobili formulu za g_x, $x = 1, 2, 3, \dots$ iz jednadžbe (1.31), potrebno je izjednačiti koeficijente uz potencije od r s lijeve i desne strane. Na lijevoj strani jednadžbe imamo da je koeficijent uz r^x jednak xg_x. Na desnoj strani jednadžbe koeficijente uz r^x za prvi produkt dobivamo množenjem izraza uz r^k u prvoj sumi za izrazom uz r^{x-k} u drugoj sumi i to činimo za sve $k = 0, 1, \dots, x$. Dakle, koeficijent uz r^x u prvom produktu suma je jednak

$$a\sum_{k=0}^{x} f_k(x-k)g_{x-k}.$$

Za drugi produkt suma sličnim postupkom dobivamo da je koeficijent uz r^x jednak

$$(a+b)\sum_{k=0}^{x} kf_k g_{x-k}.$$

Izjednačavanjem slijedi,

$$\begin{aligned} xg_x &= a\sum_{k=0}^{x} f_k(x-k)g_{x-k} + (a+b)\sum_{k=0}^{x} kf_k g_{x-k} \\ &= af_0 x g_x + a\sum_{k=1}^{x} f_k(x-k)g_{x-k} + (a+b)\sum_{k=1}^{x} kf_k g_{x-k}, \end{aligned}$$

prebacivanjem svega uz g_x na lijevu stranu i dijeljenjem s $(1 - af_0)x$ dobivamo

$$g_x = \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{x}\left(a + \frac{bk}{x}\right) f_k g_{x-k}. \tag{1.32}$$

Formula (1.32) je Panjerova rekurzivna formula. Ona izražava vrijednost g_x pomoću vrijednosti $g_0, g_1, \dots, g_{x-1}$. Prednost te formule u odnosu na formulu (1.2) je ta da ovdje ne trebamo računati konvolucije te je stoga pomoću nje efikasnije odrediti vrijednost g_x. Pomoću iduća dva primjera pokažimo kako koristiti prethodno izvedenu formulu.

Primjer 1.3.1. *Neka broj zahtjeva N ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda = 2$ te neka vrijedi da individualni zahtjevi imaju funkciju vjerojatnosti jednaku $f_j = 0.6(0.4^{j-1})$ za $j = 1, 2, 3, \dots$. Izračunajmo vrijednosti od g_x za $x = 0, 1, 2, 3$.*

Kako vrijedi da je $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = 1$ *imamo da je* $f_0 = 0$*, a zbog toga i* $g_0 = p_0$*. Nadalje, iz tablice 1.1 vidimo da je* $a = 0$ *i* $b = 2$*. Sada formulu (1.32) možemo zapisati u obliku:*

$$g_x = \frac{2}{x} \sum_{k=1}^{x} k f_k g_{x-k}.$$

Uvrštavanjem dobivamo,

$$\begin{aligned} g_0 &= p_0 = \mathbb{P}(N = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2} = 0.1353 \\ g_1 &= 2 f_1 g_0 = 0.1624 \\ g_2 &= f_1 g_1 + 2 f_2 g_0 = 0.1624 \\ g_3 &= \frac{2}{3}(f_1 g_2 + 2 f_2 g_1 + 3 f_3 g_0) = 0.1429. \end{aligned}$$

Primjer 1.3.2. *Neka ukupni iznos zahtjeva* S *ima složenu binomnu distribuciju gdje su parametri binomne distribucije jednaki* $k = 10$ *i* $p = 0.6$*. Iznosi individualnih zahtjeva imaju sljedeću funkciju vjerojatnosti:*

$$f_1 = 0.4, \quad f_2 = 0.35, \quad f_3 = 0.25.$$

Želimo izračunati vjerojatnost da ukupni iznos zahtjeva bude barem 5*, tj. tražimo vrijednost* $\mathbb{P}(S \geqslant 5)$*. Znamo da vrijedi*

$$\mathbb{P}(S \geqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(S < 5) = 1 - \mathbb{P}(S \leqslant 4) = 1 - \sum_{x=0}^{4} \mathbb{P}(S = x) = 1 - \sum_{x=0}^{4} g_x.$$

Koristimo Panjerovu rekurzivnu formulu. Kako je broj zahtjeva N *binomno distribuiran s parametrima* $k = 10$ *i* $p = 0.6$ *iz tablice 1.1 slijedi da je* $a = -1.5$*, a* $b = 16.5$*. Početna vrijednost* $g_0 = p_0 = \mathbb{P}(N = 0) = 0.4^{10}$*. Formula (1.32) poprima oblik:*

$$g_x = \sum_{s=1}^{x} \left(-1.5 + 16.5 \frac{s}{x}\right) f_s g_{x-s}.$$

U tablici 1.2 su ispisane vrijednosti za g_x *za* $x = 1, 2, 3, 4$ *koje su dobivene uvrštavanjem u gornju formulu. Koristeći sve izračunate vrijednosti dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka:*

$$\mathbb{P}(S \geqslant 5) = 1 - \sum_{x=0}^{4} g_x = 1 - 0.0224 = 0.9776.$$

x	1	2	3	4
g_x	0.0006	0.0022	0.0061	0.0134

Tablica 1.2: Vrijednosti od g_x

Panjerova rekurzivna formula nam omogućava računanje funkcije vjerojatnosti agregatnih zahtjeva S. Općenito, ne postoji rekurzivna formula za funkciju distribucije od S. Iznimka je slučaj u kojem varijabla broja zahtjeva N ima geometrijsku distribuciju s parametrom $p \in (0, 1]$ i vjerojatnostima $p_n = pq^n$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$. Takva geometrijska distribucija je slučaj negativne binomne distribucije s parametrima $k = 1$ i $p = p$. Iz tablice 1.1 očitavamo da je vrijednost parametra $a = q$, a parametra $b = 0$. Prema tome, formula (1.32) u tom slučaju glasi:

$$g_x = \frac{q}{1 - qf_0} \sum_{s=1}^{x} f_s g_{x-s}.$$

Za $y = 1, 2, 3, \ldots$ funkcija distribucije od S je jednaka:

$$\begin{aligned} G(y) &= \sum_{x=0}^{y} g_x = g_0 + \sum_{x=1}^{y} \frac{q}{1 - qf_0} \sum_{s=1}^{x} f_s g_{x-s} \\ &= g_0 + \frac{q}{1 - qf_0} \sum_{s=1}^{y} f_s \sum_{x=s}^{y} g_{x-s} \\ &= g_0 + \frac{q}{1 - qf_0} \sum_{s=1}^{y} F_s G(y - s). \end{aligned}$$

Dakle, u ovom posebnom slučaju funkcija distribucije od S, kao i funkcija vjerojatnosti od S, može biti izračunata rekurzivno.

Napomena 1.3.3. ***(Proširenja Panjerove rekurzivne formule)***
Panjerovu rekurzivnu formulu smo izveli za posebnu klasu distribucija, tzv. $(a, b, 0)$ *klasu. Valja napomenuti da se slična formula može izvesti za još neke klase distribucija. Navest ćemo* $(a, b, 1)$ *te Schröterovu klasu distribucija.*

1) $(a, b, 1)$ ***klasa distribucija***
Distribucija broja zahtjeva pripada $(a, b, 1)$ *klasi ako se njena funkcija vjerojatnosti* $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ *može izračunati pomoću formule*

$$q_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) q_{n-1} \quad \text{za } n = 2, 3, 4, \ldots, \tag{1.33}$$

gdje su a i b konstante. Ova klasa se razlikuje od $(a, b, 0)$ klase po tome što je početna vrijednost rekurzije q_1, za koju pretpostavljamo da je strogo veća od 0. Izraz '1' u $(a, b, 1)$ ukazuje na to da je q_1 početna vrijednost rekurzije. Rekurzivna formula je ista za obje klase. Članove $(a, b, 1)$ klase možemo konstruirati modificirajući masu vjerojatnosti u 0 kod distribucija klase $(a, b, 0)$. Postoje dva načina na koja se to može napraviti, jedan je skraćivanje nule (eng. zero truncation), a drugi je modificiranje nule (eng. zero modification).

2) ***Schröterova klasa distribucija***
Distribucija pripada Schröterovoj klasi ako se njena funkcija vjerojatnosti može izračunati rekurzivno pomoću formule

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} + \frac{c}{n} p_{n-2} \quad za\ n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.34}$$

gdje su a i b konstante, a p_{-1} definiramo kao 0. Za ovakvu klasu distribucija moguće je izvesti rekurzivnu formulu sličnu formuli (1.32), no s jednom bitnom manom. Ta mana je da za računanje vjerojatnosti g_x rekurzivna formula za ovu klasu distribuciju zahtjeva računanje vrijednosti od $\{f_j^{2*}\}_{j=1}^{x}$. Dakle, u ovom slučaju nije izbjegnuto računanje konvolucija kao u slučaju klasa $(a, b, 0)$ i $(a, b, 1)$.

Više detalja o ovim dvjema klasama distribucija i izvodu rekurzivnih formula za njih može se naći u [2].

1.3.3 Diskretizacijske metode

Da bismo izveli rekurzivnu formulu za vjerojatnosnu funkciju od S morali smo pretpostaviti da individualni iznosi zahtjeva poprimaju isključivo nenegativne cjelobrojne vrijednosti, tj. da su oni diskretne slučajne varijable. U praksi se iznosi individualnih zahtjeva najčešće modeliraju neprekidnim distribucijama kao što su to Paretova ili log-normalna distribucija. Kako bismo mogli primijeniti rekurzivnu formulu u takvim slučajevima potrebno je neprekidnu distribuciju zamijeniti prikladnom diskretnom distribucijom na skupu $\mathbb{N}_0$. Taj postupak se zove diskretizacija distribucije.
Postoji više načina na koje se neprekidna distribucija F, s $F(0) = 0$ može diskretizirati. Jedan način je izjednačavanje vjerojatnosti. Diskretna distribucija s funkcijom vjerojatnosti $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ može se definirati kao

$$h_j = F(j) - F(j-1). \tag{1.35}$$

Obrazloženje za ovaj način aproksimacije leži u tome da su za $x = 0, 1, 2, \ldots$ vrijednosti funkcija distribucija jednake u cjelobrojnim vrijednostima, odnosno vrijedi

$$H(x) = \sum_{j=1}^{x} h_j = F(x), \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

Tada, za $x > 0$ koji nisu cjelobrojni, vrijedi da je $H(x) < F(x)$, tj. H je donja međa za F. Analogno, možemo definirati distribuciju $\tilde{H}$, koja je gornja međa za F, tako da definiramo funkciju vjerojatnosti $\{\tilde{h}_j\}_{j=1}^{\infty}$ sa $\tilde{h}_0 = F(1)$ i

$$\tilde{h}_j = F(j+1) - F(j) \quad \text{za } j = 1, 2, 3, \dots .$$

Zbog toga vrijedi

$$\tilde{H}(x) = \sum_{j=0}^{x} \tilde{h}_j = F(x+1), \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

Dakle, $H(x) \leqslant F(x) \leqslant \tilde{H}(x)$ za sve $x \geqslant 0$. Alternativni pristup diskretizaciji je izjednačavanje momenata diskretne i neprekidne razdiobe definiranjem vjerojatnosne funkcije $\{\hat{h}_j\}_{j=0}^{\infty}$ koja ima funkciju distribucije $\hat{H}$ jednaku

$$\hat{H}(x) = \sum_{j=0}^{x} \hat{h}_j = \int_x^{x+1} F(y)dy \quad \text{za } x = 0, 1, 2, \dots .$$

Tada, ako je $X \sim F$ i $Y \sim \hat{H}$ onda je

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x=0}^{\infty}(1 - \hat{H}(x)) = \sum_{x=0}^{\infty} \int_x^{x+1} (1 - F(y))dy = \int_0^{\infty} (1 - F(y))dy = \mathbb{E}[X].$$

Dakle, u ovom slučaju diskretizacijski postupak čuva očekivanje.

1.4 Aproksimacije distribucije iznosa zahtjeva S

Do sada smo vidjeli da se funkcija distribucije ukupnog iznosa zahtjeva S može egzaktno izračunati pomoću konvolucije ili rekurzivno pomoću Panjerove formule. No, problem kod oba ta pristupa je da mogu biti dosta vremenski zahtjevna za računalo. Također, Panjerova formula se može koristiti u slučaju da su nam poznate ili da se bar mogu dobro procijeniti distribucije od N i X_i, a kada to ne možemo formula postaje beskorisna. Stoga, aproksimacija funkcije distribucije od S može biti uvelike korisna. Predstavit ćemo dvije metode aproksimacije od kojih obje mogu vrlo lako biti implementirane pomoću računala.

1.4.1 Normalna aproksimacija

Ideja normalne aproksimacije je u suštini vrlo jednostavna: ako znamo ili možemo procijeniti očekivanje i varijancu varijable S tada distribuciju od S možemo aproksimirati normalnom distribucijom s istim očekivanjem i varijancom. Po centralnom graničnom teoremu, ako sumiramo velik broj jednako distribuiranih slučajnih varijabli, njihova suma bi trebala približno biti normalno distribuirana. Naša suma, tj. varijabla S je slučajna suma, no ipak je razumno očekivati da ako imamo velik broj zahtjeva N, da će suma S konvergirati prema normalnoj distribuciji. U nastavku navodimo centralni granični teorem i teorem kojim pokazujemo kako za specijalan slučaj u kojem je S složena Poissonova slučajna varijabla vrijedi taj granični teorem.

Teorem 1.4.1. ***(Centralni granični teorem)***
Ako su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem μ i konačnom varijancom $\sigma^2 > 0$ tada vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right] = \Phi(x). \tag{1.36}$$

Dokaz. Dokaz teorema može se naći u [4]. □

Teorem 1.4.2. *Neka je S složena Poissonova slučajna varijabla s parametrom λ i funkcijom distribucije F individualnih iznosa zahtjeva, za koju vrijedi da ima konačnu ne-nula varijancu. Tada, uz oznake $\mathbb{E}[S] = \mu$ i $\mathbb{V}ar[S] = \sigma^2$, vrijedi:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{S-\mu}{\sigma} \leq x\right] = \Phi(x). \tag{1.37}$$

Dokaz. Ako je $N_1, N_2, \ldots$ niz nezavisnih Poissonovih varijabli s parametrom 1 te ako su $X_{ij}, i = 1, 2, 3, \ldots, j = 1, 2, 3, \ldots$ nezavisne slučajne varijable s funkcijom distribucije F, tada za cjelobrojni λ vrijedi:

$$S \sim \sum_{j=1}^{\lambda}\sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}, \quad \text{jer je} \quad \sum_{j=1}^{\lambda} N_j \sim N. \tag{1.38}$$

Kako je u formuli (1.38) S prikazan kao suma λ nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli možemo direktno primijeniti teorem 1.4.1. Primijetimo kako cjelobrojni λ nije smanjenje općenitosti jer za velike λ njegov decimalni dio neće imati utjecaj na zaključak teorema. □

Sljedećim primjerom ćemo pokazati kako parametar λ kod složene Poissonove distribucije utječe na točnost aproksimacije.

Primjer 1.4.3. *Neka je S složena Poissonova slučajna varijabla s parametrom λ te neka su individualni iznosi zahtjeva log-normalno distribuirani s očekivanjem* 1 *i varijancom* 1.5. *Koristeći normalnu aproksimaciju želimo pronaći x takav da je vjerojatnost da je S manja od tog x jednaka* 0.95. *Neka je u slučaju (a) $\lambda = 10$, a u slučaju (b) $\lambda = 100$.*

Pomoću formula izvedenih u sekciji (1.2) dobivamo da je $\mathbb{E}[S] = \mu_1\lambda = \lambda$ *te* $\mathbb{V}ar[S] = \mu_2\lambda = (1+1.5)\lambda = 2.5\lambda$. *Stoga,*

$$\mathbb{P}(S \leqslant x) \approx \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{x-\lambda}{\sqrt{2.5\lambda}}\right)$$

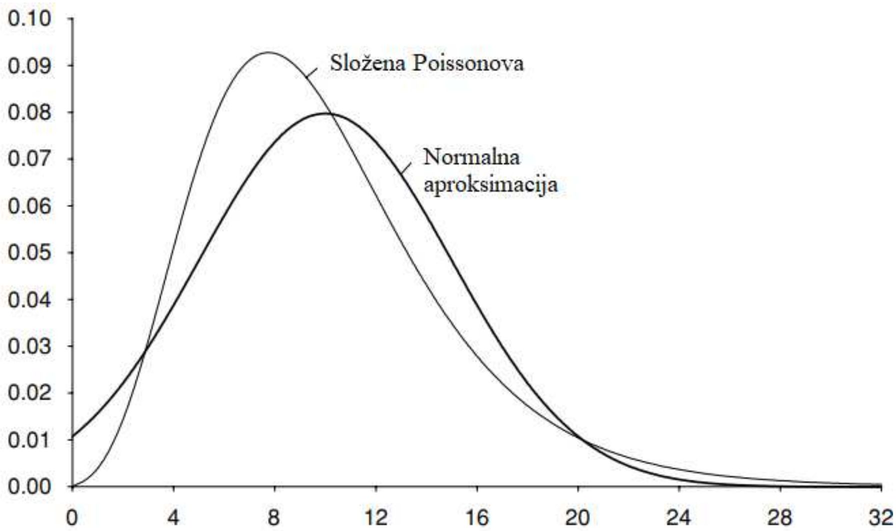
gdje je Z standardna normalna slučajna varijabla. Pomoću tabličnih vrijednosti za normalnu distribuciju možemo vidjeti da je $\mathbb{P}(Z \leqslant 1.65) = 0.95$ *pa slijedi:*

$$\frac{x-\lambda}{\sqrt{2.5\lambda}} = 1.65 \Rightarrow x = \lambda + 1.65\sqrt{2.5\lambda}.$$

Traženi x je tada:

(a) $\lambda = 10 \Rightarrow x = 18.23$

(b) $\lambda = 100 \Rightarrow x = 126.$

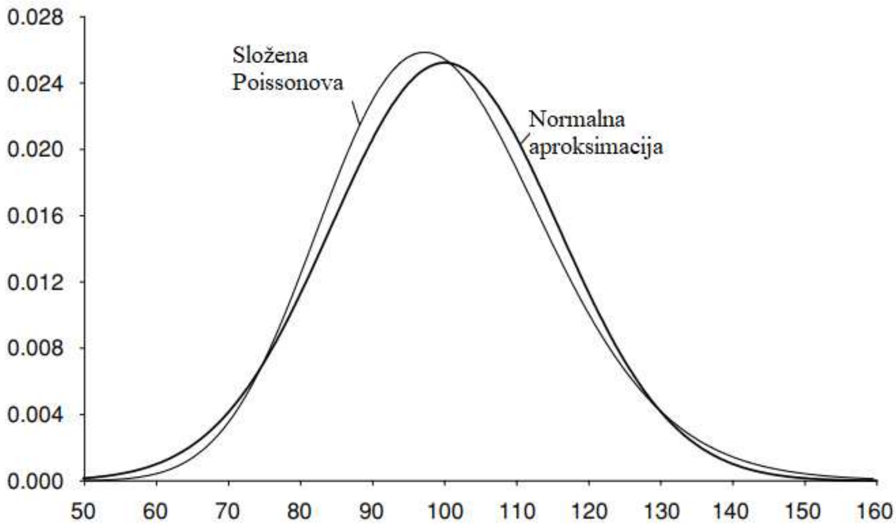


Slika 1.1: $\lambda = 10$

Na slikama[1] 1.1 i 1.2 su prikazane funkcije gustoće složene Poissonove distribucije te normalne distribucije s očekivanjem λ i varijancom 2.5λ kojom smo aproksimirali distribuciju od S. Možemo uočiti kako na slici 1.1 gdje je $\lambda = 10$ aproksimacija nije dobra. Prvo, prava distribucija od S je izrazito pozitivno asimetrična dok je normalna distrbucija,

[1] Slike 1.1 i 1.2 su preuzete iz [2].

kao i uvijek, simetrična. Drugo, kod normalne aproksimacije s grafa možemo očitati kako je vjerojatnost da je $S < 0$ strogo veća od 0 što nije istina za pravu distribuciju od S. Za drugi slučaj, u kojem je $\lambda = 100$ aproksimacija je puno točnija. Na slici 1.2 i dalje možemo uočiti da je aproksimativna distribucija od S pozitivno asimetrična, no puno manje nego u prvom slučaju. Također, aproksimativna vrijednost vjerojatnosti $\mathbb{P}(S < 0)$ je sada puno bliže 0. Problem kod oba slučaja je da normalna aproksimacija procjenjuje vjerojatnosti $\mathbb{P}(S > x)$ za velike vrijednosti x premalima, a to su dosta često vjerojatnosti koje su od značajnog interesa osiguravateljima.



Slika 1.2: $\lambda = 100$

1.4.2 Translatirana gama aproksimacija

Normalna aproksimacija je temeljena samo na prva dva momenta varijable S, stoga ne može dobro predočiti asimetričnost njene prave distribucije. Translatirana gama distribucija uzima u obzir prva tri momenta od S te tako nastoji bolje prikazati njenu pravu distribuciju. Ideja je aproksimirati distribuciju od S slučajnom varijablom $Y + k$ gdje je $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ gama slučajna varijabla s parametrima α i β, a k je neka konstanta. Parametre α, β i k nalazimo izjednačavanjem očekivanja, varijance i koeficijenta asimetričnosti varijable S i $Y + k$. Iako nemamo neku teoretsku podlogu za aproksimaciju translatiranom gama distribucijom, očekujemo da će ona ipak biti bolja od normalne aproksimacije zbog izjednačavanja prva tri momenta. Koeficijent asimetrije gama slučajne varijable s parametrima α i β je jednak $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$, a translacijom za k se taj koeficijent ne mijenja. Dakle, parametre

α, β i k nalazimo iz sljedećih formula:

$$\mathbb{E}[S] = \frac{\alpha}{\beta} + k, \tag{1.39}$$

$$\mathbb{V}ar[S] = \frac{\alpha}{\beta^2}, \tag{1.40}$$

$$\gamma_S = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}. \tag{1.41}$$

Primjer 1.4.4. *Pretpostavimo da varijabla S ima istu složenu Poissonovu distribuciju kao u primjeru 1.4.3. Koristeći translatiranu gama aproksimaciju želimo pronaći x takav da je vjerojatnost da je S manja od tog x jednaka* 0.95. *Ponovno uzimamo u obzir dva slučaja: (a) $\lambda = 10$ i (b) $\lambda = 100$.*
Prvo moramo izračunati parametre aproksimativne distribucije, a za to nam treba treći moment log-normalne distribucije. Znamo da se momenti log-normalne distribucije računaju kao $\mu_n = \exp\{n\mu + 1/2n^2\sigma^2\}$ gdje su μ i σ parametri odgovarajuće normalne distribucije. Kako je

$$\mu_1 = 1 = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}$$

i

$$\mu_2 = 2.5 = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\}$$

slijedi da je $\mu = -0.4581$, a $\sigma = 0.9572$. Dakle,

$$\mu_3 = \exp\{3\mu + 9\sigma^2/2\} = 15.625.$$

Iz jednadžbe (1.41) imamo:

$$\frac{\lambda\mu_3}{(\lambda\mu_2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{4\lambda\mu_2^3}{\mu_3^2}.$$

Nadalje, iz (1.40) slijedi,

$$\lambda\mu_2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2\mu_2}{\mu_3}.$$

Konačno, jednadžba (1.39) daje:

$$\lambda\mu_1 = \frac{\alpha}{\beta} + k$$

što vodi do izraza:

$$k = \lambda\mu_1 - \frac{\alpha}{\beta} = \lambda\left(\mu_1 - \frac{2\mu_2^2}{\mu_3}\right).$$

Uvrštavanjem dobivamo da za slučaj:

(a) $\lambda = 10$ *je* $\alpha = 2.56$, $\beta = 0.32$, *a* $k = 2$. *Izjednačavajući* $S = Y + k$ *gdje je* $Y \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ *imamo*

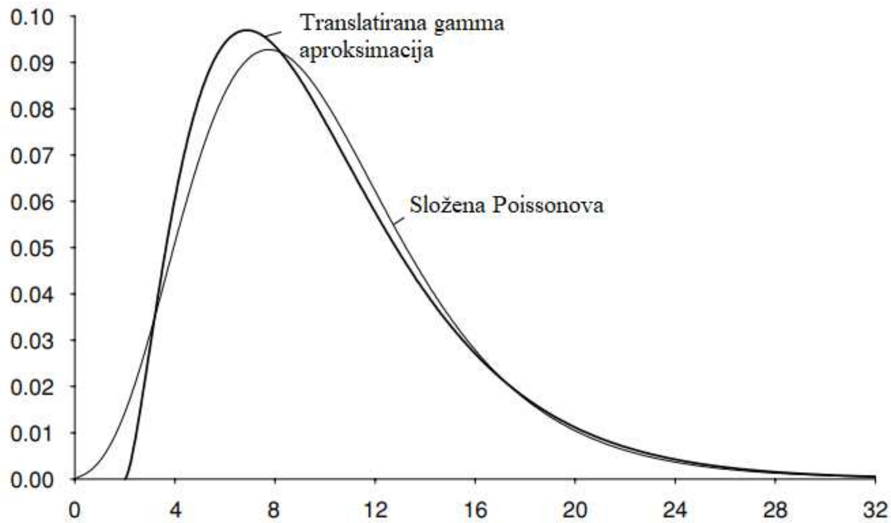
$$\mathbb{P}(S \leqslant x) \approx \mathbb{P}(Y \leqslant x - k).$$

Koristeći software poput R*-a možemo lako pronaći inverz gama funkcije distribucije te dobiti da je* $\mathbb{P}(Y \leqslant 17.59) = 0.95$, *stoga je traženi x jednak* $17.59 + k$, *odnosno* 19.59.
Slično, za slučaj

(b) $\lambda = 100$ *je* $\alpha = 25.6$, $\beta = 3.2$, *a* $k = 20$. *Sada za* $Y \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ *vrijedi:*

$$\mathbb{P}(Y \leqslant x + k) = \mathbb{P}(Y \leqslant 107.7) = 0.95.$$

Traženi x je jednak 127.7.

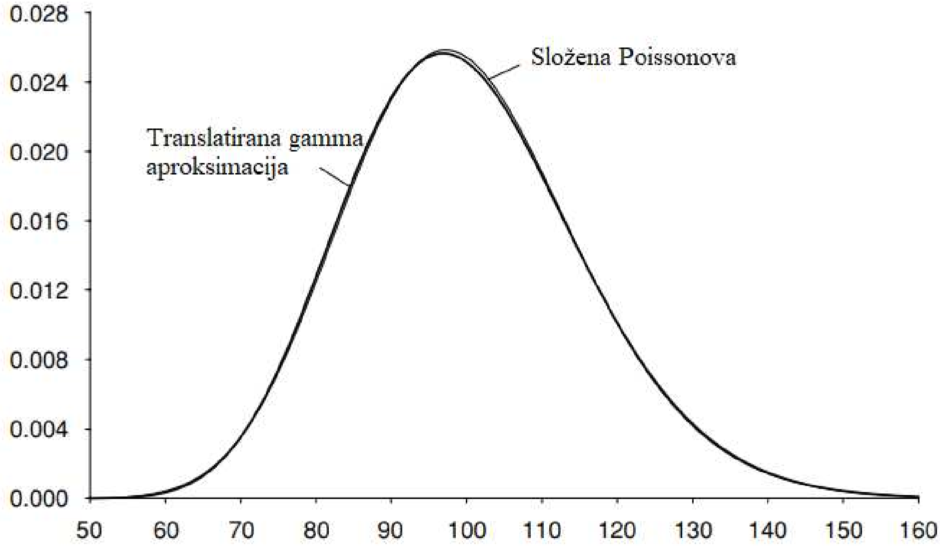


Slika 1.3: $\lambda = 10$

Na slikama[2] 1.3 i 1.4 su prikazane gustoće složene Poissonove distribucije te translatirane gama distribucije u slučaju kad je $\lambda = 10$, odnosno kad je $\lambda = 100$. Primijetimo kako na slici 1.3 gustoće imaju vrlo sličan oblik te da je aproksimativna gustoća iznad egzaktne za velike vrijednosti na x-osi što je suprotno u odnosu na normalnu aproksimaciju. Na slici 1.4 možemo uočiti kako je za slučaj $\lambda = 100$ aproksimacija vrlo dobra te se uvelike poklapa s egzaktnom gustoćom varijable S.

Velika prednost translatirane gama aproksimacije u odnosu na normalnu aproksimaciju je taj da uzima u obzir asimetričnost distribucije od S koja se često javlja u praksi. Mana je da trebamo jedan podatak više za njezino provođenje. Također, treba istaknuti da je u

[2]Slike 1.3 i 1.4 su preuzete iz [2].



Slika 1.4: $\lambda = 100$

primjeru 1.4.4 u oba slučaja k pozitivan, ali to nije uvijek slučaj. Zbog toga translatirana gama aproksimacija može dovesti do toga da vrijednosti od $\mathbb{P}(S < 0)$ nisu jednake 0 kao što bi trebale biti. Uz prethodne opaske, translatirana gama aproksimacija je vrlo jednostavan i dobar način za procjenu distribucije ukupnog iznosa zahtjeva S.

Poglavlje 2

Individualni modeli rizika

U individualnom modelu rizika želimo pronaći distribuciju agregatnih zahtjeva S koji proizlaze iz danog portfelja polica osiguranja u nekom fiksnom vremenskom razdoblju. Za razliku od kolektivnog modela rizika, kojeg smo proučavali u prethodnom poglavlju, kod individualnog modela ukupni iznos zahtjeva promatramo kao sumu iznosa zahtjeva po individualnim policama koje čine portfelj.

2.1 Model

Pretpostavit ćemo da portfelj ima n polica, a s X_i, $i = 1, \ldots, n$ ćemo označiti rizik (plaćanje) po polici i. Kao i ranije, slučajnu varijablu koja označava ukupni iznos zahtjeva označavamo sa S te je ona jednaka

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{2.1}$$

Pretpostavljamo da su rizici X_i nezavisne, ali ne nužno i jednako distribuirane slučajne varijable.
Na formulu (2.1) možemo gledati kao na sumu svih gubitaka koji su proizašli iz n osiguravajućih polica. Individualni model rizika je originalno bio razvijen za životno osiguranje u kojem je vjerojatnost smrti unutar godinu dana jednaka q_i te fiksna naknada isplaćena za smrt osobe i jednaka b_i. U tom slučaju, distribucija rizika X_i za i-tu policu je jednaka:

$$g_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - q_i, & x = 0, \\ q_i, & x = b_i. \end{cases}$$

Kako su varijable X_i nezavisne lako slijedi:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{n} b_i q_i$$

i

$$\mathbb{V}ar[S] = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 q_i(1 - q_i).$$

Također, lako se dobije da je funkcija izvodnica vjerojatnosti ukupnog iznosa zahtjeva jednaka

$$P_S(z) = \prod_{i=1}^{n}(1 - q_i + q_i z^{b_i}).$$

Individualni model rizika se može i generalizirati. Neka je $X_i = I_i B_i$, gdje su $I_1, I_2, \ldots, I_n$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nezavisne slučajne varijable. Slučajna varijabla I_i je indikatorska varijabla koja poprima vrijednost 1 s vjerojatnošću q_i, a vrijednost 0 s vjerojatnošću $1 - q_i$. Ona označava je li i-ta polica proizvela zahtjev za štetu. Slučajna varijabla B_i ima funkciju distribucije F_i takvu da je $F_i(0) = 0$ te joj je očekivanje jednako μ_i, a varijanca σ_i^2. Ona reprezentira iznos štete (tj. plaćanja) koje je proizvela i-ta polica, a pod uvjetom da je zahtjev podnesen. Kod životnog osiguranja je B_i jednostavno fiksni iznos b_i, tj. B_i je degenerativna slučajna varijabla. Kako broj zahtjeva po i-toj polici I_i možemo modelirati s Bernoullijevom slučajnom varijablom s parametrom q_i odmah slijedi da X_i ima složenu binomnu distribuciju. Pomoću formula (1.17), (1.18) i (1.19) te činjenice da su varijable X_i nezavisne dobivamo formule za očekivanje, varijancu i funkciju izvodnicu momenata varijable S:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i \\ \mathbb{V}ar[S] &= \sum_{i=1}^{n}(q_i\sigma_i^2 + q_i(1 - q_i)\mu_i^2) \qquad (2.2) \\ M_S(z) &= \prod_{i=1}^{n}[1 - q_i + q_i M_{B_j}(z)]. \end{aligned}$$

Primjer 2.1.1. *Promotrimo ugovor o grupnom životnom osiguranju s naknadom za smrt uzrokovanu nesretnim slučajem. Pretpostavimo da je za sve članove tog osiguranja vjerojatnost smrti u sljedećoj godini jednaka* 0.01 *i da je uzrok* 30% *smrti nesretni slučaj. Za 50 zaposlenika naknada za prirodnu smrt je* 50 000 *dok je za smrt nastalu zbog nesreće naknada* 100 000*. Za preostalih 25 zaposlenika su naknade jednake* 75 000 *i* 100 000*, respektivno. Modelirajmo ovakav ugovor pomoću individualnog modela rizika te odredimo očekivanje i varijancu ukupnog iznosa zahtjeva S.*

Za sve zaposlenike vrijedi da je vjerojatnost smrti jednaka $q_i = 0.01$. Kod 50 zaposlenika varijabla B_i ima vrijednost 50 000 *s vjerojatnošću* 0.7*, a vrijednost* 100 000 *s* *vjerojatnošću* 0.3. *Za njih vrijedi da je* $\mu_i = 65\,000$ *te* $\sigma_i^2 = 525\,000\,000$. *Kod preostalih 25 zaposlenika varijabla* B_i *poprima vrijednost* 75 000 *s vjerojatnošću* 0.7 *ili vrijednost* 150 000 *s vjerojatnošću* 0.3. *U tom slučaju je očekivanje jednako* $\mu_i = 97\,500$, *a varijanca je* $\sigma_i^2 = 1\,181\,250\,000$. *Uvrštavanjem u (2.2) dobivamo:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= 50 \cdot 0.01 \cdot 65\,000 + 25 \cdot 0.01 \cdot 97\,500\\ &= 56\,875\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[S] &= 50 \cdot 0.01 \cdot 525\,000\,000 + 50 \cdot 0.01 \cdot 0.99 \cdot 65\,000^2\\ &\quad + 25 \cdot 0.01 \cdot 1\,181\,250\,000 + 25 \cdot 0.01 \cdot 0.99 \cdot 97\,500^2\\ &= 5\,001\,984\,375.\end{aligned}$$

Primjer 2.1.2. *Tablica 2.1 (preuzeta iz [2]) prikazuje strukturu jednog portfelja polica životnog osiguranja u kojem su pojedinci neovisni u odnosu na stopu smrtnosti.*

Grupa i	Stopa smrtnosti q_i	Osigurana suma b_i	Broj pojedinaca n_i
1	0.001	1	100
2	0.002	1	300
3	0.002	2	200

Tablica 2.1: Podaci o portfelju

Izračunajmo očekivanje i varijancu ukupnog iznosa zahtjeva S. *Police unutar ovog portfelja imaju fiksni iznos naknade* b_i, *a pojedinci unutar iste kategorije imaju jednako očekivanje iznosa rizika. Dakle, očekivanje od* S *je jednako:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \sum_{i=1}^{3} n_i b_i q_i\\ &= 100 \cdot 0.001 \cdot 1 + 300 \cdot 0.002 \cdot 1 + 200 \cdot 0.002 \cdot 2\\ &= 1.5.\end{aligned}$$

Slično, varijanca je jednaka:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[S] &= \sum_{i=1}^{3} n_i b_i^2 q_i (1 - q_i)\\ &= 100 \cdot 1 \cdot 0.001 \cdot 0.999 + 300 \cdot 1 \cdot 0.002 \cdot 0.998 + 200 \cdot 4 \cdot 0.002 \cdot 0.998\\ &= 2.2955\end{aligned}$$

Pretpostavka da je broj zahtjeva po polici jednak 0 ili 1 je neprikladna za većinu oblika neživotnog osiguranja, no vrlo dobro predstavlja situaciju u životnom osiguranju koju smo ranije opisali. Stoga, u ostatku poglavlja koristimo terminologiju životnog osiguranja. Stopu smrtnosti za vlasnika police i ćemo označavati s q_i. Naknada će biti fiksnog iznosa b_i pa će μ_i predstavljati sumu osiguranu policom i, a $\sigma_i^2 = 0$ za svaki i. Također, pretpostavka nezavisnosti će implicirati da imamo n različitih osoba u portfelju. Cilj je pronaći formulu za funkciju distribucije agregatnih zahtjeva S s prethodnim pretpostavkama. Tehnike koje ćemo prikazati se mogu proširiti i na slučajeve kada imamo slučajne naknade B_i.

Napomena 2.1.3. *Distribucija od S se može pronaći korištenjem konvolucije distribucija od $\{X_i\}_{i=1}^n$. U praksi je često broj polica n velik pa je računanje konvolucije mukotrpan posao. Iz tog razloga češće koristimo neke druge metode koje ćemo prikazati u sljedećim sekcijama.*

2.2 De Prilova rekurzija

U aktuarskoj literaturi postoji nekoliko različitih rekurzivnih metoda za računanje distribucije agregatnog iznosa zahtjeva S u individualnom modelu. Neke od njih su egzaktne metode dok se druge koriste aproksimacijom. Jedna od poznatijih egzaktnih metoda je De Prilova rekurzivna formula.

Kako bi izveli De Prilovu formulu potrebno je podijeliti portfelj osiguravajućih polica na temelju dvije kategorije: stopa smrtnosti i iznos osigurane sume. Pretpostavljamo da je iznos osigurane sume prirodan broj između 1 i I, a da je stopa smrtnosti jednaka jednoj od J različitih stopa. Označimo s n_{ij} broj polica čija je osigurana suma jednaka i te je stopa smrtnosti imatelja police jednaka q_j. Neka je g_x vjerojatnost da varijabla S poprimi vrijednost $x = 0, 1, 2, \ldots$. Za policu kojoj je iznos osigurane sume jednak i, a stopa smrtnosti imatelja police jednaka q_j funkcija izvodnica vjerojatnosti je jednaka:

$$P_{ij}(r) = 1 - q_j + q_j r^i.$$

Zbog nezavisnosti polica vrijedi:

$$P_S(r) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} (1 - q_j + q_j r^i)^{n_{ij}} = \sum_{x=0}^{\infty} r^x g_x.$$

Prethodnu jednadžbu logaritmiramo:

$$\log P_S(r) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \log(1 - q_j + q_j r^i). \tag{2.3}$$

Kako bi dobili formulu za g_x prvo ćemo izvesti identitet koji povezuje funkciju izvodnicu vjerojatnosti P_S i njenu derivaciju, a zatim ćemo taj identitet izraziti u terminima potencija od r. Tako ćemo, izjednačavanjem koeficijenata uz potencije od r, dobiti formulu za g_x. Prvo, deriviramo jednadžbu (2.3),

$$\frac{d}{dr}\log P_S(r) = \frac{P_S'(r)}{P_S(r)} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\frac{q_j i r^{i-1}}{1-q_j+q_j r^i},$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}
rP_S'(r) &= P_S(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} i \frac{q_j r^i}{1-q_j+q_j r^i} \\
&= P_S(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} i \frac{q_j r^i}{1-q_j}\left(1+\frac{q_j r^i}{1-q_j}\right)^{-1} \\
&= P_S(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} i \frac{q_j r^i}{1-q_j}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{q_j r^i}{1-q_j}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost vrijedi ako je zadovoljen uvjet

$$\left|\frac{q_j r^i}{1-q_j}\right| < 1 \text{ za sve } i, j.$$

Prethodni uvjet ne ograničava u većini slučajeva u praksi jer su vrijednosti stopa smrtnosti q_j vrlo male. Dakle, imamo identitet:

$$rP_S'(r) = P_S(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} i \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{q_j}{1-q_j}\right)^{k} r^{ik}. \tag{2.4}$$

Definiramo

$$h(i,k) = \begin{cases} i(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}(q_j/(1-q_j))^k, & \text{za } i = 1,2,\ldots,I \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te sada (2.4) možemo zapisati kao

$$rP_S'(r) = P_S(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{\infty} r^{ik} h(i,k). \tag{2.5}$$

Kada napišemo $P_S(r)$ i $P'_S(r)$ kao sume, jednadžba (2.5) postaje

$$\sum_{x=1}^{\infty} xr^x g_x = \sum_{x=0}^{\infty} r^x g_x \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{\infty} r^{ik} h(i,k). \tag{2.6}$$

Za $x = 1, 2, 3, \ldots$ koeficijenti uz r^x na lijevoj strani (2.6) su jednaki xg_x, dok su na desnoj strani jednaki sumi svih $g_{x-ik}h(i,k)$ takvih da za i i k vrijedi da je $1 \leqslant ik \leqslant x$. Dakle, dobivamo jednakost

$$xg_x = \sum_{i=1}^{x} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} g_{x-ik} h(i,k),$$

odnosno

$$g_x = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} g_{x-ik} h(i,k).$$

Konačni oblik De Prilove rekurzije dobivamo kad uzmemo u obzir da smo $h(i,k)$ definirali s 0 za $i > I$:

$$g_x = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{\min\{x,I\}} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} g_{x-ik} h(i,k) \quad \text{za } x = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.7}$$

Početna vrijednost rekurzije je

$$g_0 = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} (1 - q_j)^{n_{ij}} \tag{2.8}$$

jer kad je $S = 0$ nemamo niti jedan zahtjev po niti jednoj polici, tj. nitko od imatelja polica nije doživio smrt.

Za velike portfelje s mnogo polica računanje vjerojatnosti pomoću De Prilove formule može biti zahtjevno. S ciljem smanjenja vremena računanja moguće je odbaciti male vrijednosti od $h(i,k)$. U praksi su često vrijednosti stopa smrtnosti male, a posljedično i vrijednosti od $h(i,k)$.

2.3 Kornyina metoda

U slučajevima kada nije potrebno znati egzaktnu vrijednost distribucije agregatnih zahtjeva S možemo ju računati pomoću neke od aproksimativnih metoda. Jednu od poznatijih metoda predstavio je matematičar P. S. Kornya u svom radu iz 1983. godine. Kako bi prezentirali ovu metodu (po uzoru na [2]) zadržat ćemo pretpostavke o modelu iz prethodne sekcije.

Ako uvedemo novu oznaku $p_j = 1 - q_j$, funkciju izvodnicu vjerojatnosti od S možemo zapisati kao:

$$P_S(r) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} (p_j + q_j r^i)^{n_{ij}}.$$

Izraz $p_j + q_j r^i$ zapišimo na sljedeći način, koristeći činjenicu da je $p_j + q_j = 1$:

$$p_j + q_j r^i = \frac{p_j + q_j r^i}{p_j} p_j = \left(1 + \frac{q_j}{p_j} r^i\right)\left(\frac{1}{p_j}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{q_j}{p_j} r^i\right)\left(1 + \frac{q_j}{p_j}\right)^{-1}.$$

Sada $P_S(r)$ zapisujemo kao:

$$P_S(r) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} \left(1 + \frac{q_j}{p_j} r^i\right)^{n_{ij}} \left(1 + \frac{q_j}{p_j}\right)^{-n_{ij}}.$$

Od sada pretpostavljamo da je $q_j < 1/2$ za sve j iz čega proizlazi da je $\left|q_j r^i / p_j\right| < 1$ i

$$\begin{aligned}
\log P_S(r) &= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left[\log\left(1 + \frac{q_j}{p_j} r^i\right) - \log\left(1 + \frac{q_j}{p_j}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left[\left(\frac{q_j}{p_j} r^i\right)^k - \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left[\left(\frac{q_j}{p_j} r^i\right)^k - \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\right].
\end{aligned}$$

Definirajmo $Q_S = \log P_S$ i

$$S_k(r) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left[\left(\frac{q_j}{p_j} r^i\right)^k - \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k\right].$$

Tada je

$$Q_S(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} S_k(r).$$

Uz to definiramo i

$$Q_K(r) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1}}{k} S_k(r),$$

tj. izraz Q_K sadrži prvih K sumanada od Q_S. Kao i kod De Prilove rekurzije i ovdje želimo izjednačavanjem koeficijenata uz r^x dobiti izraz za g_x. Ovom metodom to činimo aproksimativno, koristeći prvih K elemenata izraza Q_S, odnosno $\log P_S$. Znamo da vrijedi

$$P_S(r) = \exp Q_S(r) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x g_x$$

te definiramo

$$P_K(r) = \exp Q_K(r) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x g_x^{(K)}. \tag{2.9}$$

Želimo pronaći vrijednosti od $g_x^{(K)}$ i koristiti sumu $\sum_{x=0}^{y} |g_x^{(K)}|$ za aproksimaciju sume $\sum_{x=0}^{y} g_x$. Koristimo apsolutne vrijednosti od $g_x^{(K)}$ jer ne znamo jesu li sve vrijednosti $g_x^{(K)}$ pozitivne. Kako bi pronašli $g_x^{(K)}$ zapišimo $Q_K(r)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} Q_K(r) &= \sum_{x=0}^{\infty} r^x b_x^{(K)} \\ &= \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left[\left(\frac{q_j}{p_j} r^i \right)^k - \left(\frac{q_j}{p_j} \right)^k \right]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Izraz za koeficijente $b_x^{(K)}$ za $x = 0, 1, 2, , \ldots$ dobivamo izjednačavanjem potencija od r u jednadžbi (2.10). Za $x = 0$ imamo

$$b_0^{(K)} = \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left(\frac{q_j}{p_j} \right)^k.$$

Kako bi pronašli koeficijente uz r^x za $x = 1, 2, 3, \ldots$ trebamo promotriti u kojim slučajevima je produkt ik jednak x da možemo sumirati članove oblika

$$\frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left(\frac{q_j}{p_j} \right)^k$$

po određenim vrijednostima od k.
Razmotrimo što sve utječe na odabir parametra k.

- Produkt ik mora biti jednak x pa slijedi da k mora dijeliti x.
- **(donja granica)** Kako bi odredili donju granicu sumacije prisjetimo se da broj i reprezentira iznos osigurane sume te da ona može biti najviše I. Zbog toga, ako vrijedi $ik = x$ i $i \leqslant I$ onda $x \leqslant kI$, tj. $k \geqslant x/I$. To znači da će donja granica sumacije biti najmanji cijeli broj koji je veći ili jednak od x/I, a koji uz to dijeli x. Na primjer, ako je $x = 10$ i $I = 6$ tada su jedine mogućnosti za k jednake $2, 5$ i 10.

- **(gornja granica)** Gornja granica sumacije će biti manji od brojeva x i K. Također, primijetimo da ako je gornja granica K da ćemo imati nešto dodati sumi za $k = K$ samo ako je K i djelitelj od x. Na primjer, ako opet postavimo da je $x = 10$, a $I = 6$ te stavimo da je $K = 6$, tada će gornja granica sumacije biti 5, a ne 6 jer 6 ne dijeli $x = 10$.

Imajući na umu sve prethodne ograde na k nalazimo da je

$$b_x^{(K)} = \sum_{\lceil x/I \rceil,\ k|x}^{\min\{K,x\}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{j=1}^{J} n_{x/k,j} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k. \tag{2.11}$$

U slučaju da je $x \leqslant I$ donja granica sumacije je 1. Sada kada smo izveli formulu za koeficijente $b_x^{(K)}$ za $x = 0, 1, 2, \ldots$, možemo iskoristiti njihove vrijednosti za izračunavanje koeficijenata $g_x^{(K)}$ za $x = 0, 1, 2, \ldots$. U tu svrhu derivirajmo jednadžbu (2.9) i zapišimo ju u formi sume:

$$\begin{aligned} P_K'(r) &= Q_K'(r) P_K(r), \\ \sum_{x=1}^{\infty} x r^{x-1} g_x^{(K)} &= \sum_{x=1}^{\infty} x r^{x-1} b_x^{(K)} \sum_{y=0}^{\infty} r^y g_y^{(K)}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz r^x na lijevoj i desnoj strani dobivamo rekurzivnu formulu:

$$g_x^{(K)} = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{x} j b_j^{(K)} g_{x-j}^{(K)}, \quad \text{za } x = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.12}$$

Uočimo, u jednadžbi (2.11) je donja granica sumacije veća od gornje u slučaju da je $x > IK$, stoga je $b_x^{(K)} = 0$ za $x > IK$. Sada možemo zapisati konačnu rekurziju:

$$g_x^{(K)} = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{\min\{x,IK\}} j b_j^{(K)} g_{x-j}^{(K)}, \quad \text{za } x = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.13}$$

Još preostaje odrediti početnu vrijednost $g_0^{(K)}$. Ona je jednaka $g_0^{(K)} = \exp b_0^{(K)}$ jer vrijedi:

$$P_K(0) = g_0^{(K)} = \exp Q_K(0) = \exp b_0^{(K)}.$$

Kornyina metoda nam daje aproksimaciju distribucije agregatnih zahtjeva S. Parametar K određuje kolika će biti preciznost te aproksimacije, a u praksi se pokazalo da vrijednost $K = 4$ daje vrlo dobre rezultate. Ova metoda je laka za primjenu te nije toliko dugotrajna u usporedbi s De Prilovom formulom koju smo prethodno izveli.

2.4 Složena Poissonova aproksimacija

U prethodnoj sekciji smo pokazali jedan način aproksimacije funkcije distribucije agregatnih zahtjeva S. Sada ćemo pokazati još jedan, u praksi popularan, način: složena Poissonova aproksimacija. Pomoću nje ćemo individualni model zamijeniti kolektivnim modelom rizika te tako olakšati pronalazak funkcije distribucije od S.

Računanje distribucije agregatnih zahtjeva S pomoću individualnog modela rizika je računski dosta zahtjevno pa se često koristi aproksimacija složenom Poissonovom distribucijom. Ona dopušta računanje distribucije od S koristeći jednostavnu rekurziju koju smo vidjeli u poglavlju 1. Za ovaj tip aproksimacije napuštamo pretpostavku o fiksnom iznosu zahtjeva te zato više ne možemo klasificirati imatelje polica po stopi smrtnosti i iznosu osigurane sume.
U opisu individualnog modela rizika smo zaključili da rizici $X_i = I_i B_i$ imaju složenu binomnu distribuciju G_i za sve $i = 1, 2, \dots, n$. Iz toga slijedi da je distribucija od S, koju možemo označiti s G, zbroj složenih binomnih distribucija. Ne postoji jednostavna reprezentacija konvolucije složenih binomnih distribucija G_i. Ideja ove aproksimacije je aproksimirati funkcije G_i sa složenom Poissonovom funkcijom distribucije. Tada bi aproksimativna funkcija distribucije od S isto tako bila složena Poissonova po teoremu 1.2.2.
Dakle, umjesto originalnog individualnog modela

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} I_i B_i \quad \text{gdje je } I_i \sim B(1, q_i), \tag{2.14}$$

promatramo funkciju distribucije sljedeće aproksimativne slučajne varijable $\tilde{S}$:

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \text{gdje je } Y_i = N_i B_i = \sum_{j=1}^{N_i} B_i \quad \text{i} \quad N_i \sim Poi(\lambda_i). \tag{2.15}$$

Sada $\tilde{S}$ po teoremu 1.2.2 ima složenu Poissonovu distribuciju s parametrima $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ i $\mathcal{P} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ gdje su P_i funkcije distribucije od Y_i za $i = 1, 2, \dots, n$.
Postoji više načina na koje možemo odabrati parametar λ_i Poissonove distribucije. Prvi način je da postavimo da je $\lambda_i = q_i$ za svaki $i = 1, 2, \dots, n$. Za tako odabran parametar λ_i očekivani broj zahtjeva je isti za egzaktnu i aproksimativnu distribuciju agregatnih zahtjeva. Alternativni način je izjednačiti vjerojatnost da neće biti podnesen niti jedan zahtjev. Za egzaktnu, tj. binomnu distribuciju je to vrijednost $1 - q_i$, dok je za aproksimativnu, odnosno Poissonovu $\exp(-\lambda_i)$. Izjednačavanjem tih dviju vrijednosti dobivamo da je parametar $\lambda_i = -\ln(1 - q_i)$. U praksi nije bitno koju metodu odaberemo jer su razlike vrlo male ako odaberemo male vrijednosti stopa smrtnosti. Nadalje, obje metode daju vrlo dobru aproksimaciju binomne distribucije s parametrima 1 i q_i u slučaju kad su vrijednosti od q_i

male. Vjerojatnost da imamo više od jednog zahtjeva nije jednaka 0 za svaku od aproksimativnih Poissonovih distribucija, no dovoljno je blizu 0 da ju možemo zanemariti.
Ako pretpostavimo da su iznosi naknada fiksni i jednaki b_i za $i = 1, 2, \ldots, n$, onda lako možemo zaključiti da su očekivanja od S i $\tilde{S}$ jednaka:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{n} q_i b_i = \mathbb{E}[\tilde{S}]. \tag{2.16}$$

Za varijance modela vrijedi sljedeće:

$$\mathbb{V}ar[\tilde{S}] = \sum_{i=1}^{n} q_i b_i^2, \quad \mathbb{V}ar[S] = \sum_{i=1}^{n} q_i(1-q_i) b_i^2 = \mathbb{V}ar[\tilde{S}] - \sum_{i=1}^{n} (q_i b_i)^2. \tag{2.17}$$

Iz gornjih jednadžbi možemo vidjeti da ako S aproksimiramo tako da izjednačavamo očekivani broj zahtjeva, da tada aproksimativni model ima veću varijancu u odnosu na egzaktni model. Kako bi ilustrirali ovaj tip aproksimacije navest ćemo dva primjera.

Primjer 2.4.1. *Grupna polica osiguranja pruža naknadu za smrt u roku godinu dana zaposlenicima neke tvrtke. Za potrebe osiguranja zaposlenici su podijeljeni u dvije grupe na temelju broja godina radnog iskustva. Smatra se da su pojedinci nezavisni s obzirom na stopu smrtnosti. Tablica 2.2 (preuzeta iz [2]) pokazuje broj zaposlenika u svakoj kategoriji, naknadu i stopu smrtnosti.*

Kategorija	Broj polica	Iznos naknade	Stopa smrtnosti
A	225	60	$0.95q$
B	300	45	q

Tablica 2.2: Podaci o grupnoj polici osiguranja

Za početak, pronađimo egzaktne izraze, u terminima od q, za očekivanje i varijancu agregatnih zahtjeva opisane grupne police osiguranja.
Za zaposlenike u kategoriji A vrijedi da imaju fiksnu naknadu u iznosu od 60 *te da im je stopa smrtnosti jednaka* $0.95q$. *S druge strane, zaposlenici u kategoriji B u slučaju smrti dobivaju fiksnu naknadu* 40 *te im je stopa smrtnosti jednaka q. Pomoću formula (2.2) dobivamo:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= 225 \cdot 60 \cdot 0.95q + 300 \cdot 45 \cdot q \\
&= 26\,325q \\
\mathbb{V}ar[S] &= 225 \cdot 60^2 \cdot 0.95q(1-0.95q) + 300 \cdot 45^2 \cdot q(1-q) \\
&= 1\,377\,000q - 1\,338\,525q^2.
\end{aligned}$$

Sljedeće, želimo aproksimirati ukupan iznos svih zahtjeva S složenom Poissonovom distribucijom. To činimo tako da za parametar Poissonove distribucije svake police uzmemo njenu očekivanu vrijednost, odnosno stopu smrtnosti. Tako dobivamo da je parametar Poissonove distribucije za kategoriju A jednak $0.95q$*, a za kategoriju B jednak q. Ukupni parametar* Λ *aproksimativne složene Poissonove distribucije je jednak zbroju parametara po svim pojedincima unutar grupne police osiguranja, tj.*

$$\Lambda = 225 \cdot 0.95q + 300q = 513.75q.$$

Sada želimo izračunati očekivanje i varijancu aproksimacije $\tilde{S}$ *te ih usporediti s egzaktnim vrijednostima. Kako su naknade fiksne možemo koristiti formule (2.16) i (2.17). Dakle, slijedi:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{S}] &= 225 \cdot 0.95q \cdot 60 + 300 \cdot q \cdot 60 \\ &= 26\,325q, \\ \mathbb{V}ar[\tilde{S}] &= 225 \cdot 0.95q \cdot 60^2 + 300 \cdot q \cdot 45^2 \\ &= 1\,377\,000q.\end{aligned}$$

Očekivanje aproksimacije je jednako egzaktnom očekivanju dok je varijanca aproksimacije $\tilde{S}$ *veća za* $1\,338\,525q^2$.

Primjer 2.4.2. *Osiguravajuće društvo ima portfelj nezavisnih jednogodišnjih životnih polica. Struktura portfelja je prikazana u tablici 2.3 (preuzeta iz [5]). Aktuar je aproksimirao*

Razred	Broj polica	Iznos naknade	Stopa smrtnosti
1	500	x	0.01
2	500	$2x$	0.02

Tablica 2.3: Struktura portfelja

distribuciju zahtjeva individualnog modela koristeći složeni Poissonov model, u kojem je očekivani broj zahtjeva jednak očekivanom broju zahtjeva u egzaktnom modelu. Dakle, pomoću podataka iz tablice 2.3 dobivamo da je parametar Λ *jednak*

$$\Lambda = 500 \cdot 0.01 + 500 \cdot 0.02 = 15.$$

Odredimo vrijednost x tako da varijanca aproksimativnog modela $\tilde{S}$ *nije manja od* 4500. *Kako su naknade fiksne možemo koristiti formulu (2.17) te dobiti da je varijanca jednaka:*

$$\mathbb{V}ar[\tilde{S}] = 500 \cdot 0.01 \cdot x^2 + 500 \cdot 0.02 \cdot (2x)^2 = 45x^2.$$

Iz toga slijedi,

$$\mathbb{V}ar[\tilde{S}] \geqslant 4500 \Leftrightarrow 45x^2 \geqslant 4500 \Leftrightarrow x \geqslant 10.$$

Vrijednost x mora biti barem 10 *kako varijanca* $\mathbb{V}ar[\tilde{S}]$ *ne bi bila manja od* 4500.

Napomena 2.4.3. ***(Parametarska aproksimacija)***
Kod kolektivnog modela rizika smo pokazali kako ga parametarski možemo aproksimirati npr. normalnom slučajnom varijablom. Na isti način možemo aproksimirati i individualni model rizika izjednačavanjem prvih nekoliko momenata slučajne varijable S i slučajne varijable kojom aproksimiramo S. Kako bi ilustrirali parametarsku aproksimaciju na individualnom modelu navest ćemo primjer u kojem S aproksimiramo normalnom i log-normalnom slučajnom varijablom tako da izjednačavamo prva dva momenta.

Primjer 2.4.4. *Mala tvrtka koja se sastoji od 14 stalnih zaposlenika ima ugovor o grupnom životnom osiguranju. U tablici 2.4 (preuzeta iz [5]) su dani svi potrebni podaci o grupi zaposlenika. Izračunajmo očekivanje i varijancu ukupnog iznosa zahtjeva S na isti način*

Zaposlenik j	Starost	Iznos naknade b_j	Stopa smrtnosti q_j
1	20	15 000	0.00149
2	23	16 000	0.00142
3	27	20 000	0.00128
4	30	28 000	0.00122
5	31	31 000	0.00123
6	46	18 000	0.00353
7	47	26 000	0.00394
8	49	24 000	0.00484
9	64	60 000	0.02182
10	17	14 000	0.00050
11	22	17 000	0.00050
12	26	19 000	0.00054
13	37	30 000	0.00103
14	55	55 000	0.00479

Tablica 2.4: Podaci o zaposlenicima

kao i u prethodnom primjeru:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{j=1}^{14} b_j q_j = 2\,054.41,$$

$$\mathbb{V}ar[S] = \sum_{j=1}^{14} b_j^2 q_j (1 - q_j) = 1.02534 \cdot 10^8.$$

Sljedeće, želimo izračunati vjerojatnost da će ukupni iznos zahtjeva S biti 45% veći od očekivanog iznosa zahtjeva, odnosno vjerojatnost

$$\mathbb{P}(S > 1.45\mathbb{E}[S]) = \mathbb{P}(S > 1.45 \cdot 2\,054.41) = \mathbb{P}(S > 2\,978.89).$$

Koristeći normalnu aproksimaciju dobivamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > 2\,978.89) &= \mathbb{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}} > \frac{2\,978.89 - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathbb{V}ar[S]}}\right)\\ &\approx \mathbb{P}\left(Z > \frac{2\,978.89 - 2\,054.41}{\sqrt{1.02534 \cdot 10^8}}\right)\\ &= \mathbb{P}(Z > 0.0913) = 1 - \Phi(0.0913) = 0.46\end{aligned}$$

gdje je Z standardna normalna slučajna varijabla, a Φ njena funkcija distribucije. Istu vjerojatnost želimo izračunati pomoću log-normalne aproksimacije. Znamo da za varijablu X koja ima log-normalnu distribuciju s parametrima μ i σ vrijedi:

$$\mathbb{E}[X] = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) \quad \textit{te} \quad \mathbb{E}[X^2] = \exp(2\mu + 2\sigma^2).$$

Izjednačavanjem prvih dvaju momenata od X i S dobivamo jednadžbe:

$$\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 = \ln(\mathbb{E}[S]) = \ln 2\,054.41 = 7.6277$$

i

$$2\mu + 2\sigma^2 = \ln(\mathbb{V}ar[S] + (\mathbb{E}[S])^2) = 18.4861.$$

Iz njih nalazimo da je $\mu = 6.0124$, a $\sigma^2 = 3.2307$. Sada slijedi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > 2\,978.89) &= \mathbb{P}\left(\frac{\ln S - \mu}{\sigma} > \frac{\ln(2\,978.89) - \mu}{\sigma}\right)\\ &\approx \mathbb{P}\left(Z > \frac{\ln(2\,978.89) - 6.0124}{\sqrt{3.2307}}\right)\\ &= 1 - \Phi(1.1054) = 0.13\end{aligned}$$

gdje je Z standardna normalna slučajna varijabla, a Φ njena funkcija distribucije.

Bibliografija

[1] *Aktuarska matematika II*, `http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/am.pdf`, pristupljeno: 27.10.2022.

[2] D.C.M. Dickson, *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, 2016.

[3] M.B. Finan, *An Introductory Guide in the Construction of Actuarial Models*, `https://faculty.ksu.edu.sa/sites/default/files/actuarial_models.pdf`, pristupljeno: 27.10.2022.

[4] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene i M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*, Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[5] S.A. Klugman, H.H. Panjer i G.E. Willmot, *Loss Models: From Data to Decisions*, Wiley, 2019.

Sažetak

Ovaj diplomski rad bavi se opisivanjem modela rizika u aktuarstvu. Obrađuju se individualni i kolektivni model rizika. Oba modela opisuju ukupni iznos zahtjeva S (tj. skupnu štetu) koji proizlaze iz danog portfelja polica osiguranja u nekom fiksnom vremenskom periodu. U radu se, za oba modela, predstavljaju egzaktne i aproksimativne tehnike koje se koriste pri određivanju funkcije distribucije slučajne varijable S. Za kolektivni model se izvodi Panjerova rekurzivna formula za egzaktno računanje funkcije distribucije od S. Također, funkcija distribucije od S se aproksimira normalnom i translatiranom gama distribucijom. Za individualni model se izvodi De Prilova rekurzivna formula kao egzaktna metoda. Od aproksimativnih metoda je prikazana Kornyina metoda te aproksimacija složenom Poissonovom distribucijom.

Summary

This thesis introduces risk models in actuarial science. Models that are described are individual and collective risk models. Both models describe total claim amount S (i.e. total damage) that arises from a given portfolio of insurance policies in a fixed period of time. Thesis presents both exact and approximative techniques used to determine the distribution function of random variable S. For the collective model the Panjer's recursive formula is being developed for exact calculating of the distribution function of S. Also, the distribution function of S is approximated by normal and translated gamma distribution. For the individual model De Pril's recursive method is being developed as an exact method. Approximative methods that are shown are Kornya's method and compound Poisson approximation.

Životopis

Rođena sam 10.10.1998. u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Retkovec. 2013. godine upisujem II. gimnaziju u Zagrebu. Nakon završetka srednje škole 2017. godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon stečene titule prvostupnika, 2020. godine upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike pri istome fakultetu.