# Uvod u stohastičke parcijalne diferencijalne jednadžbe

**Poljak, Mate**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Mate Poljak

# UVOD U STOHASTIČKE PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, studeni, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

# Sadržaj

# Uvod

Cilj ovog rada je detaljnije upoznavanje sa stohastičkim diferencijalnim jednadžbama i njihovim primjenama u drugim granama matematike i ekonomije. Nekoliko je razloga za detaljnije učenje stohastičkih diferencijalnih jednadžbi. One imaju široku primjenu kako u drugim granama matematike tako i u poljima izvan matematike, te se njihova teorija još uvijek razvija i predstavlja zanimljivo istraživačko polje s još uvijek mnogo zanimljivih neodgovorenih pitanja.

Poanta je sljedeća: parcijalna diferencijalna jednadžba predstavlja matematički model problema iz stvarnoga svijeta, pri čemu koeficijenti jednadžbe ovise o samom modelu. Međutim, ponekad ne znamo točnu vrijednost koeficijenata pa se onda tomu pristupa tako da se kaže da su koeficijenti slučajne varijable ili naprosto u mjerenju imamo neku grešku (šum), što se modelira stohastičkim procesom.

U prvom poglavlju su ukratko nabrojani pojmovi i iskazi tvrdnji bez dokaza iz teorije vjerojatnosti koji će biti potrebni za daljnje čitanje i razumijevanje gradiva.

U drugom poglavlju uvodimo definiciju Brownovog gibanja (Wienerovog procesa) s nekim važnim svojstvima te komentiramo konstrukciju, tj. postojanje, takvog stohastičkog procesa.

U trećem poglavlju definiramo Itôv integral i njegova svojstva, najprije u jednoj, a zatim i u $n$ dimenzija. Uvodimo i Itôvu formulu te na primjerima pokazujemo njeno korištenje.

U četvrtom poglavlju definiramo stohastičku diferencijalnu jednadžbu te na primjerima pokazujemo kako pronaći rješenje takve jednadžbe. Dokazujemo i ključni teorem koji govori o egzistenciji i jedinstvenosti stohastičke diferencijalne jednadžbe. Poglavlje završavamo detaljnijim opisom formule za linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe i njenim korištenjem na nekoliko primjera.

U posljednjem petom poglavlju navodimo par primjena stohastičkih diferencijalnih jednadžbi kroz koje se neki ranije uvedeni pojmovi i rezultati proširuju da bi se riješili neki konkretni problemi iz matematike i ekonomije.

# Poglavlje 1

# Slučajne varijable i stohastički procesi

Za početak dajemo kratki pregled osnovnih pojmova iz teorije vjerojatnosti koji će nam biti potrebni za razumijevanje gradiva obrađenog u ovom radu. Za više detalja čitatelja upućujemo na [1].

Neka je $\Omega \neq \emptyset$ skup čije ćemo podskupove u daljnjem zvati „događajima“.

**Definicija 1.0.1.** *$\sigma$**-algebra** je familija $\mathcal{U}$ podskupova od $\Omega$ sa svojstvima:*

*(i)* $\emptyset, \Omega \in \mathcal{U}$,

*(ii) Ako je* $A \in \mathcal{U}$, *tada je i* $A^c \in \mathcal{U}$,

*(iii) Ako su* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}$, *tada su i*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{U}.$$

*Pritom, skup* $A^c := \Omega \setminus A$ *zovemo komplement skupa A.*

**Definicija 1.0.2.** *Neka je $\mathcal{U}$ $\sigma$-algebra podskupova od $\Omega$. **Vjerojatnost** je funkcija $P : \mathcal{U} \to [0, 1]$ sa svojstvima:*

*(i)* $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$,

*(ii) Ako su* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}$, *tada je*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

*(iii) Ako su $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{U}$ disjunktni skupovi, tada je*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

**Napomena 1.0.3.** *Primijetimo da je za prethodnu definiciju dovoljno zahtjevati da je $P(\Omega) = 1$ i $(iii)$. Naime, skupovi $\emptyset$ i $\emptyset$ su disjunktni (njihov presjek je opet $\emptyset$) pa po $(iii)$ imamo*

$$\begin{aligned} P(\emptyset) &= P(\emptyset \cup \emptyset) \\ &\overset{(iii)}{=} P(\emptyset) + P(\emptyset). \end{aligned}$$

*Oduzmemo li $P(\emptyset)$ s obje strane jednakosti dobivamo da je $P(\emptyset) = 0$. Tvrdnja $(ii)$ iz prethodne definicije slijedi iz $(iii)$ i činjenice da je $P$ nenegativna. Npr. u slučaju kada imamo samo dva skupa $A_1$ i $A_2$ imamo*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P\big(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)\big) \\ &= P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) \\ &\le P(A_1) + P(A_2) \end{aligned}$$

*gdje smo u posljednjoj nejednakosti iskoristili implikaciju*

$$A \subset B \implies P(A) \le P(B)$$

*što pak opet slijedi iz $(iii)$.*

**Definicija 1.0.4.** ***Vjerojatnosni prostor*** *je trojka $(\Omega, \mathcal{U}, P)$, gdje je $\Omega$ proizvoljan skup, $\mathcal{U}$ $\sigma$-algebra podskupova od $\Omega$, a $P$ vjerojatnost na $\mathcal{U}$.*

Vjerojatnosni prostor je matematički konstrukt koji nije direktno „vidljiv“ . Stoga uvodimo preslikavanje $\mathbf{X}$ s $\Omega$ u $\mathbb{R}^n$ čije vrijednosti možemo lakše koristiti.

**Definicija 1.0.5.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ vjerojatnosni prostor. Definiramo n-dimenzionalnu* ***slučajnu varijablu*** *kao preslikavanje*

$$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

*ako za svaki $B \in \mathcal{B}$ vrijedi*

$$\mathbf{X}^{-1}(B) \in \mathcal{U},$$

*pri čemu je $\mathcal{B}$ Borelova $\sigma$-algebra na $\mathbb{R}^n$. Ekvivalentno, kažemo da je slučajna varijabla* $\mathbf{X}$ ***$\mathcal{U}$-izmjeriva***.

**Definicija 1.0.6.** *Neka je* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *slučajna varijabla. Tada definiramo*

$$\mathcal{U}(\mathbf{X}) := \{\mathbf{X}^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\},$$

$\sigma$*-algebru generiranu slučajnom varijablom* $\mathbf{X}$.

Sada uvodimo slučajne varijable ovisne o vremenu.

**Definicija 1.0.7.** ***Stohastički proces*** *je familija* $\{\mathbf{X}(t) \mid t \geq 0\}$ *slučajnih varijabli.*

**Definicija 1.0.8.** *Neka je* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla. Tada definiramo*

$$X^+ := \max(X, 0),$$

*te*

$$X^- := \max(-X, 0),$$

*tako da je* $X = X^+ - X^-$.

**Definicija 1.0.9.** ***Očekivanje*** *(ili* ***srednja vrijednost****) slučajne varijable* $\mathbf{X}$ *definiramo kao*

$$E(\mathbf{X}) := \int_\Omega \mathbf{X}\, dP.$$

**Definicija 1.0.10.** ***Varijancu*** *slučajne varijable* $\mathbf{X}$ *definiramo kao*

$$V(\mathbf{X}) := \int_\Omega |\mathbf{X} - E(\mathbf{X})|^2\, dP,$$

*gdje* $|\cdot|$ *predstavlja Euklidsku normu.*

**Lema 1.0.11 (Čebiševljeva nejednakost).** *Za slučajnu varijablu* $\mathbf{X}$ *i proizvoljan* $1 \leq p < \infty$ *vrijedi*

$$P(|\mathbf{X}| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|\mathbf{X}|^p),$$

*za sve* $\lambda > 0$.

Neka su $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Tada pišemo

$$x \leq y,$$

ako je $x_i \leq y_i$, za $i = 1, \ldots, n$.

**Definicija 1.0.12.** *(i)* ***Funkcija distribucije*** *slučajne varijable* $\mathbf{X}$ *je funkcija* $F_\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ *definirana kao*

$$F_\mathbf{X}(x) := P(\mathbf{X} \leq x),$$

*za sve* $x \in \mathbb{R}^n$.

*(ii) Ako su* $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *slučajne varijable, tada njihovu* ***zajedničku funkciju distribucije*** $F_{\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_m} : (\mathbb{R}^n)^m \to [0,1]$ *definiramo kao*

$$F_{\mathbf{X}_1,\ldots\mathbf{X}_m}(x_1, \ldots, x_m) := P(\mathbf{X}_1 \leq x_1, \ldots, \mathbf{X}_m \leq x_m),$$

*za sve* $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$.

**Definicija 1.0.13.** *Neka je* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *slučajna varijabla i* $F = F_{\mathbf{X}}$ *njena funkcija distribucije. Ako postoji nenegativna, integrabilna funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *takva da je*

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \ldots, y_n)\, dy_n \ldots dy_1,$$

*tada funkciju* $f$ *nazivamo* ***gustoća*** *slučajne varijable* $\mathbf{X}$.

Tada slijedi da je

$$P(\mathbf{X} \in B) = \int_B f(x)\, dx \quad (\forall B \in \mathcal{B}).$$

Ova formula je važna jer je izraz na desnoj strani uobičajeni integral koji se često može eksplicitno izračunati.

**Primjer 1.0.14.** *Ako slučajna varijabla* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *ima gustoću*

$$f(x) = \frac{1}{\left((2\pi)^n \det C\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)\cdot C^{-1}(x-m)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

*za neki* $m \in \mathbb{R}^n$ *i neku pozitivno definitnu, simetričnu matricu* $C$*, kažemo da slučajna varijabla* $\mathbf{X}$ *ima* ***Gaussianovu*** *(ili* ***normalnu****) distribuciju, s očekivanjem* $m$ *i kovarijancom* $C$*. Tada pišemo*

$\mathbf{X}$ *je slučajna varijabla tipa* $N(m, C)$.

**Lema 1.0.15.** *Neka je* $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *slučajna varijabla i pretpostavimo da njena funkcija distribucije* $F = F_{\mathbf{X}}$ *ima gustoću* $f$*. Pretpostavimo i da je* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, te da je*

$$Y = g(\mathbf{X}),$$

*integrabilna. Tada je*

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx.$$

*Posebno,*

$$E(\mathbf{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} x f(x)\, dx$$

$$V(\mathbf{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - E(\mathbf{X})|^2 f(x)\, dx.$$

Stoga $E(\mathbf{X})$ i $V(\mathbf{X})$ možemo računati kao integrale nad $\mathbb{R}^n$, što je važno s obzirom na to da je već rečeno da vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ nije direktno „vidljiv“ , tj. sve što vidimo su vrijednosti koje $\mathbf{X}$ poprima nad $\mathbb{R}^n$.

**Definicija 1.0.16.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ vjerojatnosni prostor, te $A, B \in \mathcal{U}$ dva događaja takva da je $P(B) > 0$.* ***Uvjetna vjerojatnost*** *događaja A uz uvjet da se ostvario događaj B definirana je s*

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Definicija 1.0.17.** *Slučajne varijable $\mathbf{X}_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, su* ***nezavisne*** *ako za svaki $k \geq 2$ i svaku k-torku Borelovih skupova $B_1, \ldots, B_k \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$P(\mathbf{X}_1 \in B_1, \mathbf{X}_2 \in B_2, \ldots, \mathbf{X}_k \in B_k) = P(\mathbf{X}_1 \in B_1) P(\mathbf{X}_2 \in B_2) \cdots P(\mathbf{X}_k \in B_k).$$

**Teorem 1.0.18.** *Slučajne varijable $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_m : \Omega \to \mathbb{R}^n$ su nezavisne ako i samo ako je*

$$F_{\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_m}(x_1, \ldots, x_m) = F_{\mathbf{X}_1}(x_1) \cdots F_{\mathbf{X}_m}(x_m),$$

*za sve $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$. Ukoliko slučajne varijable imaju gustoće, gornja jednakost je ekvivalentna s*

$$f_{\mathbf{X}_1,\ldots\mathbf{X}_m}(x_1, \ldots x_m) = f_{\mathbf{X}_1}(x_1) \cdots f_{\mathbf{X}_m}(x_m),$$

*za sve $x_i \in \mathbb{R}^n$, gdje su funkcije $f_{\mathbf{X}_i}$ pripadne gustoće slučajnih varijabli.*

**Definicija 1.0.19.** *Neka je $X(\cdot)$ stohastički proces s realnim vrijednostima. Tada*

$$\mathcal{U}(t) := \mathcal{U}(X(s) \,|\, 0 \leq s \leq t),$$

*tj. $\sigma$-algebru generiranu slučajnom varijablom $X(s)$ za $0 \leq s \leq t$, nazivamo* ***povijest*** *procesa do (i uključivo) vremena $t \geq 0$.*

**Definicija 1.0.20.** *Neka je $X(\cdot)$ stohastički proces takav da je $E(|X(t)|) < \infty$ za svaki $t \geq 0$.*

*(i) Ukoliko je*

$$X(s) = E(X(t) \,|\, \mathcal{U}(s)) \quad g.s.,$$

*za svaki $t \geq s \geq 0$, tada kažemo da je $X(\cdot)$* ***martingala****.*

*(ii) Ukoliko je*

$$X(s) \leq E(X(t) \,|\, \mathcal{U}(s)) \quad g.s.,$$

*za svaki $t \geq s \geq 0$, tada kažemo da je $X(\cdot)$* ***submartingala****.*

Martingale su važne u teoriji vjerojatnosti pretežito jer zadovoljavaju sljedeću ocjenu.

**Teorem 1.0.21 (Nejednakost martingala).** *Neka je $X(\cdot)$ stohastički proces s neprekidnim putanjama uzoraka g.s.*

*(i) Ukoliko je $X(\cdot)$ submartingala, tada je*

$$P\left(\max_{0\le s\le t} X(s) \ge \lambda\right) \le \frac{1}{\lambda} E\left(X(t)^{+}\right),$$

*za sve $\lambda > 0$ i $t \ge 0$.*

*(ii) Ukoliko je $X(\cdot)$ martingala i $1 < p < \infty$, tada je*

$$E\left(\max_{0\le s\le t} |X(s)|^{p}\right) \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} E\left(|X(t)|^{p}\right),$$

*za sve $t \ge 0$.*

# Poglavlje 2

# Brownovo gibanje i „bijeli šum“

**Definicija 2.0.1.** *Stohastički proces $W(\cdot)$ s realnim vrijednostima se naziva jednodimenzionalno* ***Brownovo gibanje*** *ili jednodimenzionalni* ***Wienerov proces*** *ako vrijedi:*

*(i)* $W(0) = 0$ *gotovo svuda (g.s.),*

*(ii)* $W(t) - W(s)$ *je* $N(0, t-s)$ *za sve* $t \geq s \geq 0$,

*(iii) za sva vremena* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, *slučajne varijable* $W(t_1)$, $W(t_2) - W(t_1)$, $\ldots$, $W(t_n) - W(t_{n-1})$ *su nezavisne.*

Primijetimo da posebno vrijedi

$$\begin{aligned} E(W(t)) &= 0, \\ E\left(W^2(t)\right) &= V(W(t)) - E(W(t))^2 = t - 0 = t, \end{aligned}$$

za sve $t \geq 0$.

**Teorem 2.0.2.** *Neka je $W(\cdot)$ jednodimenzionalni Wienerov proces. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$, sve vremenske trenutke $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ i svaku funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\begin{aligned} Ef(W(t_1), \ldots, W(t_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} & f(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1, t_1 \,|\, 0)\, g(x_2, t_2 - t_1 \,|\, x_1) \\ & \ldots g(x_n, t_n - t_{n-1} \,|\, x_{n-1})\; dx_n \ldots dx_1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

*gdje je funkcija $g(x, t \,|\, y)$ definirana kao*

$$g(x, t \,|\, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}.$$

*Dokaz.* Neka su $X_i := W(t_i)$, $Y_1 = X_1$, te $Y_i := X_i - X_{i-1}$ za $i = 2, \ldots, n$. Definirajmo i funkciju $h$ kao

$$h(y_1, \ldots, y_n) := f(y_1, y_1 + y_2, \ldots, y_1 + \cdots y_n).$$

Tada je

$$Ef(W(t_1), \ldots, W(t_n)) = Eh(Y_1, \ldots, Y_n).$$

Iz definicije Brownovog gibanja slučajne varijable $Y_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$ su nezavisne slučajne varijable s normalnom razdiobom $N(0, t_i - t_{i-1})$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Stoga je

$$\begin{aligned} Ef(W(t_1), \ldots, W(t_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} & h(y_1, \ldots, y_n)\, g(y_1, t_1 \,|\, 0)\, g(y_2, t_2 - t_1 \,|\, 0) \\ & \cdots g(y_n, t_n - t_{n-1} \,|\, 0)\ dy_n \cdots dy_1. \end{aligned}$$

Uvođenjem zamjene varijabli $y_1 = x_1$, te $y_i = x_i - x_{i-1}$ za $i = 2, 3, \ldots, n$, te $x_0 = 0$ (Jacobian ovakve zamjene varijabli je 1) dobivamo

$$\begin{aligned} Ef(W(t_1), \ldots, W(t_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} & f(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1, t_1 \,|\, 0)\, g(x_2, t_2 - t_1 \,|\, x_1) \\ & \cdots g(x_n, t_n - t_{n-1} \,|\, x_{n-1})\ dx_n \cdots dx_1, \end{aligned}$$

što smo trebali i pokazati.

□

Jedno od pitanja koje si možemo postaviti je postoji li uopće Brownov proces i kako ga konstruirati da to pokažemo. U ovom radu se nećemo time baviti, međutim, može se pokazati da jednodimenzionalno Brownovo gibanje doista postoji te se za detalje čitatelja upućuje na [2, pogl. 3, str. 45-51].

Uvodimo sljedeću jednostavnu lemu koja će nam biti potrebna za kasnije račune i koja se također koristi pri samoj konstrukciji Brownovog procesa.

**Lema 2.0.3.** *Neka je $W(\cdot)$ jednodimenzionalno Brownovo gibanje. Tada je*

$$E(W(t)\,W(s)) = t \wedge s := min\{s, t\} \quad za\ t \geq 0,\ s \geq 0. \tag{2.2}$$

*Dokaz.* Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je $t \geq s \geq 0$. Tada je

$$\begin{aligned} E(W(t)\,W(s)) &= E\Big((W(s) + W(t) - W(s))\,W(s)\Big) \\ &= E\Big(W^2(s)\Big) + E\Big((W(t) - W(s))\,W(s)\Big) \\ &= E\Big(W^2(s)\Big) + E(W(t) - W(s))\,E(W(s)), \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili da su varijable $W(s)$ i $W(t) - W(s)$ nezavisne (prisjetimo se da je $t \geq s$). Konačno, koristeći da je $W(s)$ $N(0, s)$ varijabla, dobivamo

$$\begin{aligned} E\left(W(t) W(s)\right) &= s + 0 \\ &= s = t \wedge s. \end{aligned}$$

□

Prirodno je proširiti definiciju Brownovog gibanja tako da poprima vrijednosti i u $\mathbb{R}^n$.

**Definicija 2.0.4.** *Stohastički proces* $\mathbf{W}(\cdot) = \left(W^1(\cdot), \ldots, W^n(\cdot)\right)$ *s vrijednostima u* $\mathbb{R}^n$ *se naziva* ***Brownovo gibanje*** *ili* ***Wienerov proces*** *ukoliko vrijedi*

*(i) za svaki* $k = 1, \ldots, n$, $W^k(\cdot)$ *je jednodimenzionalno Brownovo gibanje*

*(ii)* $\sigma$*-algebre* $\mathcal{W}^k := \mathcal{U}\left(W^k(t) \mid t \geq 0\right)$ *su nezavisne za* $k = 1, \ldots, n$.

*Drugim riječima, za svake* $t, s \geq 0$ *i za svake* $k, l \in \{1, \ldots n\}$, $k \neq l$, *vrijedi da su varijable* $W^k(t)$ *i* $W^k(s)$ *nezavisne.*

S obzirom na uvjete iz gornje definicije $n$-dimenzionalno Brownovo gibanje možemo konstruirati na sljedeći način. Konstruiramo vjerojatnosni prostor, te na njemu $n$ nezavisnih 1-dimenzionalnih Brownovih gibanja $W^k(\cdot)$, $k = 1, \ldots, n$. Tada je

$$\mathbf{W}(\cdot) := \left(W^1(\cdot), \ldots, W^n(\cdot)\right)$$

jedno $n$-dimenzionalno Brownovo gibanje.

**Lema 2.0.5.** *Neka je* $\mathbf{W}(\cdot)$ $n$*-dimenzionalan Wienerov proces. Tada vrijedi*

*(i)* $E\left(W^k(t) W^l(s)\right) = (t \wedge s)\, \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, n,$

*(ii)* $E\left(\left(W^k(t) - W^k(s)\right)\left(W^l(t) - W^l(s)\right)\right) = (t - s)\, \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, n;\ t \geq s \geq 0.$

*Dokaz.* (i) Ako je $k \neq l$, zbog nezavisnosti vrijedi

$$E\left(W^k(t) W^l(s)\right) = \underbrace{E\left(W^k(t)\right)}_{=0} \underbrace{E\left(W^l(s)\right)}_{=0} = 0.$$

S druge strane, u slučaju $k = l$ koristimo Lemu 2.0.3, pa dobivamo

$$E\left(W^k(t) W^k(s)\right) = t \wedge s.$$

(ii) Ako je $k \neq l$ zbog nezavisnosti jednodimenzionalnih Wienerovih procesa te zbog toga što je proces $W^k(t) - W^k(s)$ varijabla tipa $N(0, t-s)$, za svaki $k = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$\begin{aligned} E\left(\left(W^k(t) - W^k(s)\right)\left(W^l(t) - W^l(s)\right)\right) &= \underbrace{E\left(W^k(t) - W^k(s)\right)}_{=0}\underbrace{E\left(W^l(t) - W^l(s)\right)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Za $k = l$ koristeći isti argument kao gore, slijedi

$$\begin{aligned} E\left(\left(W^k(t) - W^k(s)\right)\left(W^k(t) - W^k(s)\right)\right) &= E\left(\left(W^k(t) - W^k(s)\right)^2\right) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

□

**Teorem 2.0.6.** *(i) Ukoliko je $\mathbf{W}(\cdot)$ n-dimenzionalno Brownovo gibanje, tada je $\mathbf{W}(t)$ varijabla tipa $N(0, tI)$ za svaki vremenski trenutak $t > 0$. Stoga vrijedi*

$$P(\mathbf{W}(t) \in A) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\, dx,$$

*za svaki Borelov podskup $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

*(ii) Općenitije, za svaki $m \in \mathbb{N}$ i za svaku funkciju $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vrijedi*

$$\begin{aligned} Ef(\mathbf{W}(t_1), \ldots, \mathbf{W}(t_m)) = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} & f(x_1, \ldots, x_m)\, g(x_1, t_1 \,|\, 0)\, g(x_2, t_2 - t_1 \,|\, x_1) \\ & \cdots g(x_m, t_m - t_{m-1} \,|\, x_{m-1})\, dx_m \cdots dx_1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

*gdje je*

$$g(x, t \,|\, y) := \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}.$$

*Dokaz.* (i) Za svaki vremenski trenutak $t > 0$, slučajne varijable $W^1(t), \ldots, W^n(t)$ su nezavisne. Stoga za svaku točku $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, uz oznaku $f_{\mathbf{X}}$ za funkciju gustoće slučajne varijable $\mathbf{X}$, vrijedi

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{W}(t)}(x_1, \ldots, x_n) &= f_{W^1(t)}(x_1) \cdots f_{W^n(t)}(x_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x_1^2}{2t}} \cdots \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x_n^2}{2t}} \\ &= \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \\ &= g(x, t \,|\, 0). \end{aligned}$$

Po definiciji vrijedi da je

$$P(\mathbf{W}(t) \in A) = \int_A f_{\mathbf{W}(t)}(x_1, \ldots, x_n)\, dx, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Stoga konačno imamo

$$P(\mathbf{W}(t) \in A) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2t}}.$$

(ii) Formula (2.3) se dokaže analogno kao formula (2.1) u jednodimenzionalnom slučaju.

□

**Definicija 2.0.7.** *Ako je* $\mathbf{X}(\cdot)$ *stohastički proces, tada* $\sigma$*-algebru*

$$\mathcal{X}(s) := \mathcal{X}(\mathbf{X}(r) \,|\, 0 \le r \le s) = \bigcup_{r \in [0,s]} \left\{ (X(r))^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \right\}$$

*zovemo* **povijest** *procesa do uključivo trenutka s.*

Neformalno, $\mathcal{X}(s)$ možemo promatrati kao $\sigma$-algebru koja sadrži informacije dobivene promatranjem $\mathbf{X}(r)$ za sve vremenske trenutke $0 \le r \le s$.

**Definicija 2.0.8.** *Stohastički proces* $\mathbf{X}(\cdot)$ *s vrijednostima u* $\mathbb{R}^n$ *se naziva* ***Markovljev lanac*** *ukoliko vrijedi*

$$P(\mathbf{X}(t) \in B \,|\, \mathcal{X}(s)) = P(\mathbf{X}(t) \in B \,|\, \mathbf{X}(s)) \quad g.s.$$

*za sve* $0 \le s \le t$ *i za sve Borelove skupove* $B \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ova definicija govori da ako u nekom trenutku znamo vrijednost $\mathbf{X}(s)$, vjerojatnost budućih vrijednosti $\mathbf{X}(t)$ procesa možemo procijeniti kao da znamo cijelu povijest procesa. Proces jedino zna trenutnu vrijednost u trenutku $s$ i ne „pamti“ prethodne vrijednosti koje su se dogodile u prošlosti.

# Poglavlje 3

# Stohastički integrali i Itôva formula

## 3.1 Definicija i svojstva Itôvog integrala

Neka je $W(\cdot)$ 1-dimenzionalno Brownovo gibanje definirano na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. U nastavku ćemo s $\mathcal{W}(t)$ označavati **povijest** Brownovog gibanja definiranog u Definiciji 2.0.7.

**Definicija 3.1.1.** *$\sigma$-algebra $\mathcal{W}^+(t) := \mathcal{U}(W(s) - W(t) \mid s \geq t)$ je **budućnost** Brownovog gibanja nakon trenutka $t$.*

**Definicija 3.1.2.** *Familija $\sigma$-algebri $\mathcal{F}(\cdot) \subseteq \mathcal{U}$ je **nepredviđajuća** (s obzirom na $W(\cdot)$) ako vrijedi:*

*(a) $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s)$, $\quad t \geq s \geq 0$,*

*(b) $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{W}(t)$, $\quad t \geq 0$, te*

*(c) $\mathcal{F}(t)$ i $\mathcal{W}^+(t)$ su nezavisne za sve $t \geq 0$.*

*Tada se $\mathcal{F}(\cdot)$ još naziva **filtracija**.*

Neformalno, $\mathcal{F}(t)$ „sadrži sve informacije dostupne u trenutku $t$“ . Naš glavni primjer filtracije će biti $\mathcal{F}(t) := \mathcal{U}(W(s)\ (0 \leq s \leq t), X_0)$, gdje je $X_0$ slučajna varijabla nezavisna od $\mathcal{W}^+(0)$. To će biti predstavljeno u poglavlju 4, gdje će $X_0$ biti početni uvjet za stohastičku diferencijalnu jednadžbu.

**Definicija 3.1.3.** *Stohastički proces $G(\cdot)$ s realnim vrijednostima se naziva **nepredviđajući** (s obzirom na $\mathcal{F}(\cdot)$) ukoliko je $\mathcal{F}(t)$-izmjeriv za svaki vremenski trenutak $t \geq 0$.*

Ideja prethodne definicije je da za svaki $t \geq 0$, slučajna varijabla $G(t)$ ovisi samo o informaciji dostupnoj u $\sigma$-algebri $\mathcal{F}(t)$.

**Definicija 3.1.4.** *Stohastički proces $G(\cdot)$ je* ***progresivno izmjeriv*** *ukoliko je nepredviđajući i zajednički izmjerljiv, to jest, ukoliko je preslikavanje $(t, w) \to G_t(w)$ izmjerivo.*

Za progresivno izmjerive procese $G(\cdot)$ moći ćemo definirati i razumjeti stohastički integral $\int_0^T G\, dW$ u smislu jednostavnih, korisnih i elegantnih formula. Drugim riječima, s obzirom na to da u svakom vremenskom trenutku $G$ ovisi samo o prošlosti Brownovog gibanja vrijede neka lijepa svojstva koja ne bi vrijedila ukoliko bi $G$ ovisio o budućnosti Brownovog gibanja.

**Definicija 3.1.5.** *(i) $\mathbb{L}^2(0, T)$ je prostor svih realnih, progresivno izmjerivih stohastičkih procesa $G(\cdot)$ takvih da*

$$E\left(\int_0^T G^2\, dt\right) < \infty.$$

*(ii) $\mathbb{L}^1(0, T)$ je prostor svih realnih, progresivno izmjerivih stohastičkih procesa $F(\cdot)$ takvih da*

$$E\left(\int_0^T |F|\, dt\right) < \infty.$$

**Definicija 3.1.6.** *Proces $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ se naziva* ***stepenasti proces*** *ukoliko postoji particija $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$ i slučajne varijable $G_k$ takve da*

$$G(t) \equiv G_k \qquad za \quad t_k \le t < t_{k+1} \quad (k = 0, ..., m-1)\,.$$

$G_k$ je tada $\mathcal{F}(t_k)$-izmjeriva slučajna varijabla s obzirom na to da je $G$ nepredviđajući.

**Definicija 3.1.7.** *Neka je $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ stepenasti proces. Tada je*

$$\int_0^T G\, dW := \sum_{k=0}^{m-1} G_k \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)$$

*Itôv stohastički integral od $G$ na intervalu $(0, T)$.*

Primijetimo da je to slučajna varijabla.

**Lema 3.1.8 (Svojstva stohastičkih integrala za stepenaste procese).** *Za sve konstante $a$, $b \in \mathbb{R}$ i za sve stepenaste procese $G$, $H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ vrijedi:*

*(i)*

$$\int_0^T (aG + bH)\, dW = a\int_0^T G\, dW + b\int_0^T H\, dW,$$

*(ii)*

$$E\left(\int_0^T G\,dW\right) = 0,$$

*(iii)*

$$E\left(\left(\int_0^T G\,dW\right)^2\right) = E\left(\int_0^T G^2\,dt\right).$$

*Dokaz.* (i) Uzmimo zajedničku particiju $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$ za $G$ i $H$, te pretpostavimo da je $G(t) \equiv G_k$ i $H(t) \equiv H_k$ za $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ i $k = 0, \ldots, m-1$. Koristeći definiciju u prvom i posljednjem koraku dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^T (aG + bH)\;dW &= \sum_{k=0}^{m-1} (aG + bH)_k \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (aG_k + bH_k)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\\ &= a\sum_{k=0}^{m-1} G_k \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) + b\sum_{k=0}^{m-1} H_k\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\\ &= a\int_0^T G\,dW + b\int_0^T H\,dW,\end{aligned}$$

(ii) Pretpostavimo da je $G(t) \equiv G_k$ za $t_k \leq t < t_{k+1}$. Tada je

$$E\left(\int_0^T G\,dW\right) = \sum_{k=0}^{m-1} E\Big(G_k\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\Big).$$

Za svaki $k$, slučajna varijabla $G_k$ je $\mathcal{F}(t_k)$-izmjeriva, dok je $\mathcal{F}(t_k)$ nezavisna od $\mathcal{W}^+(t_k)$. S druge strane, $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ je $\mathcal{W}^+(t_k)$-izmjeriva, iz čega slijedi da je $G_k$ nezavisna od $W(t_{k+1}) - W(t_k)$. Stoga

$$E\Big(G_k\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\Big) = E(G_k)\underbrace{E\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)}_{=0},$$

pri čemu smo koristili da je za svaki $k = 0, 1, \ldots m$, $E(W(t_k)) = 0$ (Def 2.0.1 (*ii*)).

(iii) Nadalje,

$$E\left(\left(\int_0^T G\,dW\right)^2\right) = \sum_{k,j=1}^{m-1} E\Big(G_k G_j\Big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\Big)\Big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\Big)\Big).$$

Ukoliko je $j \neq k$, tada je $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ nezavisan od $G_k G_j \Big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\Big)$. Stoga je

$$\begin{aligned}
&E\left(G_k G_j \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right)\right) \\
&= \underbrace{E\left(G_k G_j \left(W(t_{k+1}) - W\left(t_j\right)\right)\right)}_{<\infty} \underbrace{E\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)}_{=0}.
\end{aligned}$$

Konačno imamo,

$$\begin{aligned}
E\left(\left(\int_0^T G\, dW\right)^2\right) &= \sum_{k=0}^{m-1} E\left(G_k^2 \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)^2\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} E\left(G_k^2\right) E\left(\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)^2\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} E\left(G_k^2\right) \Big( \underbrace{V\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)}_{=\, t_{k+1} - t_k} - \underbrace{E\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)}_{=\, 0} \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} E\left(G_k^2\right)(t_{k+1} - t_k) \\
&= E\left(\sum_{k=0}^{m-1} G_k^2 (t_{k+1} - t_k)\right) \\
&= E\left(\int_0^T G^2\, dt\right),
\end{aligned}$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti iskoristili definiciju Lebesgueovog integrala za stepenaste funckije.

□

**Teorem 3.1.9 (Svojstva Itôvog integrala).** *Za sve konstante $a$, $b \in \mathbb{R}$, te za sve $G$, $H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ vrijedi*

*(i)*
$$\int_0^T aG + bH\, dW = a \int_0^T G\, dW + b \int_0^T H\, dW,$$

*(ii)*

$$E\left(\int_0^T G\,dW\right) = 0,$$

*(iii)*

$$E\left(\left(\int_0^T G\,dW\right)^2\right) = E\left(\int_0^T G^2\,dt\right),$$

*(iv)*

$$E\left(\int_0^T G\,dW \int_0^T H\,dW\right) = E\left(\int_0^T GH\,dt\right).$$

Navedena svojstva Itôvog integrala se proširuju na $\mathbb{L}^2(0,T)$ tako da se koristi aproksimacija stepenastim funkcijama (kao kod Lebegueovog integrala). Detalji ovog postupka mogu se pronaći u [2, pogl. 4, str. 69].

## 3.2 Itôva formula

**Definicija 3.2.1.** *Pretpostavimo da je $X(\cdot)$ realni stohastički proces takav da*

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F\,dt + \int_s^r G\,dW,$$

*za neke $F \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ i za sve vremenske trenutke $0 \le s \le r \le T$. Tada kažemo da proces $X(\cdot)$ zadovoljava stohastički diferencijal*

$$dX = Fdt + GdW$$

*za sve $0 \le t \le T$.*

Ako promatramo deterministički slučaj, to jest, $X(t,w) = X(t)$ (stohastički proces ne ovisi o $w$), te ako je $X$ apsolutno neprekidan (ili $C^1$) proces, tada je

$$X(r) = X(s) + \int_s^r X'\,dt,$$

iz čega slijedi da je $G = 0$, te $F = X'$. U tom slučaju jednadžba glasi

$$dx = X'dt.$$

**Teorem 3.2.2 (Itôva formula / Lančano pravilo).** *Pretpostavimo da $X(\cdot)$ zadovoljava stohastički diferencijal*

$$dX = Fdt + GdW,$$

*za neke $F \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$. Neka je $u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ postoje i neprekidne su. Definirajmo*

$$Y(t) := u\left(X(t), t\right).$$

*Tada $Y$ zadovoljava stohastički diferencijal*

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2\right)dt + \frac{\partial u}{\partial x}GdW. \end{aligned}$$

U dokazu prethodnog teorema nećemo ulaziti, a detalji se mogu pronaći u [2, pogl. 4, str. 75-77].

Slijede dva primjera na kojima ilustriramo Itôvu formulu.

**Primjer 3.2.3.** *Neka su $X(\cdot) = W(\cdot)$, te $u(x) = x^m$. Tada je $dX = dW$ iz čega slijedi da je $F \equiv 0$ i $G \equiv 1$. Stoga primjenom Itôve formule slijedi*

$$d\left(W^m\right) = mW^{m-1}dW + \frac{1}{2}m(m-1)W^{m-2}dt.$$

*U specijalnom slučaju kada je $m = 2$ imamo*

$$d\left(W^2\right) = 2WdW + dt.$$

**Primjer 3.2.4.** *Ponovno uzmimo da je $X(\cdot) = W(\cdot)$, te ovaj put neka je $u(x,t) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$. Tada je ponovno $F \equiv 0$ i $G \equiv 1$, a primjenom Itôve formule dobivamo da je*

$$d\left(e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}}\right) = \left(-\frac{\lambda^2}{2}e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}} + \frac{\lambda^2}{2}e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}}\right)dt + \lambda e^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}}dW.$$

*Stoga je*

$$\begin{cases} dY = \lambda Y dW \\ Y(0) = 1 \end{cases}$$

**Teorem 3.2.5 (Itôvo produktno pravilo).** *Neka je*

$$\begin{cases} dX_1 = F_1 dt + G_1 dW \\ dX_2 = F_2 dt + G_2 dW \end{cases} \tag{3.1}$$

*za neke $F_i \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G_i \in \mathbb{L}^2(0,T)$ $\quad (i = 1,2)$. Tada je*

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt.$$

Integriramo li produktno pravilo dobivamo Itôvu po dijelovima integracijsku formulu

$$\int_s^r X_2\, dX_1 = X_1(r)\, X_2(r) - X_1(s)\, X_2(s) - \int_s^r X_1\, dX_2 - \int_s^r G_1 G_2\, dt.$$

Ako je $G_1$ ili $G_2$ jednako 0 dobivamo dobro znanu po dijelovima integracijsku formulu. Doista, pretpostavimo b.s.o. da je $G_1 = 0$. Tada imamo sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{cases} dX_1 = F_1 dt \\ dX_2 = F_2 dt + G_2 dW. \end{cases}$$

Iskoristimo li sada Itôvo produktno pravilo iz prethodnog teorema na ovaj sustav jednadžbi dobivamo

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2.$$

**Teorem 3.2.6 (Generalizirana Itôva formula).** *Pretpostavimo da je $dX^i = F^i dt + G^i dW$, za neke $F^i \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $G^i \in \mathbb{L}^2(0,T)$, za $i = 1,\dots,n$.*

*Ukoliko je $u : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ neprekidna, s neprekidnim parcijalnim derivacijama $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, (i,j = 1,\dots,n)$, tada*

$$d\left(u\left(X^1,\dots,X^n,t\right)\right) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} G^i G^j dt.$$

## 3.3 Itôv integral u $N$ dimenzija

**Napomena 3.3.1.** *Navodimo par notacija koje ćemo koristiti.*

*(i)* $\mathbf{W}(\cdot) = \left(W^1(\cdot), \dots W^m(\cdot)\right)$ *je m-dimenzionalno Brownovo gibanje.*

*(ii) Pretpostavljamo da je $\mathcal{F}(\cdot)$ familija nepredviđajućih $\sigma$-algebri, tj. da je*

*(a)* $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{F}(s)\ (\forall t \geq s \geq 0)$

*(b)* $\mathcal{F}(t) \supseteq \mathcal{W}(t) = \mathcal{U}(\mathbf{W}(s) \mid 0 \leq s \leq t)$

*(c)* $\mathcal{F}(t)$ *je nezavisna od* $\mathcal{W}^+(t) := \mathcal{U}(\mathbf{W}(s) - \mathbf{W}(t) \mid t \leq s < \infty)$.

**Definicija 3.3.2.** *(i) $\mathbb{M}^{n\times m}$ stohastički proces $\mathbf{G} = \left(G^{ij}\right)$ pripada prostoru $\mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$ ukoliko vrijedi*

$$G^{ij} \in \mathbb{L}^2(0,T) \quad (i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m).$$

*(ii)* $\mathbb{R}^n$ *stohastički proces* $\mathbf{F} = \left(F^1, F^2, \ldots, F^n\right)$ *pripada prostoru* $\mathbb{L}^1_n(0,T)$ *ukoliko vrijedi*

$$F^i \in \mathbb{L}^1(0,T) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

**Definicija 3.3.3.** *Neka je* $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$*. Tada je*

$$\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}$$

*slučajna varijabla s vrijednostima u* $\mathbb{R}^n$*, čija je i-ta komponenta dana s*

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T G^{ij}\, dW^j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Imajući u vidu prethodnu definiciju dokaz sljedeće leme slijedi iz Teorema 3.1.9.

**Lema 3.3.4.** *Neka je* $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$*. Tada je*

$$E\left(\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}\right) = 0,$$

*te*

$$E\left(\left|\int_0^T \mathbf{G}\, d\mathbf{W}\right|^2\right) = E\left(\int_0^T |\mathbf{G}|^2\, dt\right),$$

*gdje je* $|\mathbf{G}|^2 := \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \left|G^{ij}\right|^2$.

**Definicija 3.3.5.** *Ukoliko je* $\mathbf{X}(\cdot) = \left(X^1(\cdot), \ldots, X^n(\cdot)\right)$ *proces s vrijednostima u* $\mathbb{R}^n$ *takav da*

$$\mathbf{X}(r) = \mathbf{X}(s) + \int_r^s \mathbf{F}\, dt + \int_s^r \mathbf{G}\, d\mathbf{W}$$

*za neke* $\mathbf{F} \in \mathbb{L}^1_n(0,T)$*,* $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$ *i za sve* $0 \le s \le r \le T$*, tada kažemo da* $\mathbf{X}(\cdot)$ *zadovoljava stohastički diferencijal*

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}dt + \mathbf{G}d\mathbf{W}.$$

To znači da je

$$dX^i = F^i dt + \sum_{j=1}^m G^{ij}\, dW^j \quad i = 1, \ldots, n.$$

**Teorem 3.3.6** (**Itôva formula u** $N$ **dimenzija**). *Neka vrijedi* $d\mathbf{X} = \mathbf{F}dt + \mathbf{G}d\mathbf{W}$. *Neka je* $u : \mathbb{R}^n \times [0, T]$ *neprekidna funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $(i, j = 1, \ldots, n)$. *Tada je*

$$\begin{aligned} d\Big(u\left(\mathbf{X}\left(t\right), t\right)\Big) &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}dX^i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{l=1}^{m} G^{il}G^{jl}dt. \end{aligned}$$

Dokaz prethodnog teorema se može pronaći u [2, pogl. 4, str. 78-79].

# Poglavlje 4

# Stohastičke diferencijalne jednadžbe

## 4.1 Definicije i primjeri

Na početku ovog poglavlja navest ćemo notaciju koja će se koristiti kroz ovo poglavlje.

Neka je $\mathbf{W}(\cdot)$ $m$-dimenzionalno Brownovo gibanje i $\mathbf{X}_0$ $n$-dimenzionalna slučajna varijabla nezavisna od $\mathbf{W}(\cdot)$. Definiramo

$$\mathcal{F}(t) := \mathcal{U}\Big(\mathbf{X}_0, \mathbf{W}(s)\ (0 \leq s \leq t)\Big), \quad t \geq 0,$$

kao $\sigma$-algebru generiranu od $\mathbf{X}_0$ i povijesti Wienerovog procesa do uključivo vremena $t$.

Neka je $T > 0$, te

$$\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^n,$$
$$\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{M}^{n \times m},$$

dane funkcije. Komponente ovih funkcija označavamo s

$$\mathbf{b} = \Big(b^1, b^2, \ldots, b^n\Big), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b^{1\,1} & \ldots & b^{1\,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n\,1} & \ldots & b^{n\,m} \end{pmatrix}.$$

**Definicija 4.1.1.** *Kažemo da je stohastički proces $\mathbf{X}(\cdot)$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^n$ rješenje Itôve stohastičke diferencijalne zadaće*

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\, d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = X_0, \end{cases}$$

*za $0 \leq t \leq T$, ako vrijedi:*

*(i)* $\mathbf{X}(\cdot)$ *je postepeno izmjeriv proces s obzirom na* $\mathcal{F}(\cdot)$,

*(ii)* $\mathbf{F} := \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{L}^1_n(0, T)$,

*(iii)* $\mathbf{G} := \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0, T)$,

*(iv)* $\mathbf{X}(t) = X_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s)\, d\mathbf{W}$ *za g.s.* $0 \le t \le T$.

Slijedi par primjera linearnih stohastičkih diferencijalnih jednadžbi.

**Primjer 4.1.2.** *Neka su* $m = n = 1$ *i pretpostavimo da je* $g$ *neprekidna funckija. Tada je jedinstveno rješenje stohastičke diferencijalne zadaće*

$$\begin{cases} dX = gX\, dW \\ X(0) = 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

*slučajna varijabla*

$$X(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t g^2\, ds + \int_0^t g\, dW}$$

*za vremena* $0 \le t \le T$. *Da to pokažemo primijetimo da*

$$Y(t) := -\frac{1}{2}\int_0^t g^2\, ds + \int_0^t g\, dW$$

*zadovoljava*

$$dY = -\frac{1}{2}g^2 dt + g dW.$$

*Iskoristimo Itôvu lemu za* $u(x) = e^x$ *da dobijemo*

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial u}{\partial x} dY + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} g^2 dt \\ &= e^Y \left(-\frac{1}{2}g^2 dt + g dW + \frac{1}{2}g^2 dt\right) \\ &= gX dW. \end{aligned}$$

*U kasnijem odjeljku dokazujemo jedinstvenost ovoga rješenja.*

**Primjer 4.1.3.** *Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe*

$$\begin{cases} dB = -\frac{B}{1-t} dt + dW \quad (0 \le t \le 1) \\ B(0) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

*je*

$$B(t) = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\, dW \quad (0 \le t \le 1),$$

*što se može potvrditi direktim računom.*

*Naime,*

$$B(0) = (1-0)\underbrace{\int_0^0 \frac{1}{1-s}\, dW}_{=0} = 0,$$

*dok je*

$$\begin{aligned} dB &= -\left(\int_0^t \frac{1}{1-s}\, dW\right) dt + (1-t)\,\frac{1}{1-t} dW \\ &= -\frac{B}{1-t} dt + dW, \end{aligned}$$

*gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili pravilo produkta. Slučajnu varijablu $B(\cdot)$ zovemo „Brownov most" između trenutaka $0$ i $1$.*

**Primjer 4.1.4 (Langevinova jednadžba).** *Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe*

$$\begin{cases} dX = -bXdt + \sigma dW \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{4.3}$$

*koju još nazivamo* ***Langevinova jednadžba****, je*

$$X(t) = e^{-bt}X_0 + \sigma\int_0^t e^{-b(t-s)}\, dW, \quad t \ge 0,$$

*što se može pokazati direktnim računom.*

*Naime,*

$$X(0) = e^0 X_0 + \sigma\underbrace{\int_0^0 e^{bs}\, dW}_{=0} = X_0,$$

*te je*

$$\begin{aligned} dX &= -be^{-bt}X_0\, dt + \sigma e^0\, dW + \sigma\left(\int_0^t -be^{-b(t-s)}\, dW\right) dt \\ &= -bX\, dt + \sigma\, dW. \end{aligned}$$

*Primijetimo da pomoću Leme 3.1.8* $(ii)$ *slijedi*

$$E\left(X\left(t\right)\right)=e^{-bt}E\left(X_0\right),$$

*te*

$$\begin{aligned}E\left(X^2\left(t\right)\right)&=E\left(e^{-2bt}X_0^2+2\sigma e^{-bt}X_0\int_0^t e^{-b(t-s)}\,dW+\sigma^2\left(\int_0^t e^{-b(t-s)}\,dW\right)^2\right)\\&=e^{-2bt}E\left(X_0^2\right)+2\sigma e^{-bt}\underbrace{E\left(X_0\right)E\left(\int_0^t e^{-b(t-s)}\,dW\right)}_{(1)}\\&\quad+\underbrace{\sigma^2\int_0^t e^{-2b(t-s)}\,ds}_{(2)}\\&=e^{-2bt}E\left(X_0^2\right)+\frac{\sigma^2}{2b}\left(1-e^{-2bt}\right),\end{aligned}$$

*gdje smo za* (1) *iskoristili nezavisnost* $X_0$ *i* $W$*, te Lemu 3.1.8* $(ii)$ *(pa je član jednak* 0*), dok smo za* (2) *iskoristili Lemu 3.1.8* $(iii)$*.*

*Ukoliko sada iskoristimo relaciju*

$$V\left(X\left(t\right)\right)=E\left(X^2\left(t\right)\right)-E\left(X\left(t\right)\right)^2$$

*dobivamo da vrijedi*

$$\begin{aligned}V\left(X\left(t\right)\right)&=e^{-2bt}\left(E\left(X_0^2\right)-E\left(X_0\right)^2\right)+\frac{\sigma^2}{2b}\left(1-e^{-2bt}\right)\\&=e^{-2bt}V\left(X_0\right)+\frac{\sigma^2}{2b}\left(1-e^{-2bt}\right),\end{aligned}$$

*pretpostavljajući da je* $V\left(X_0\right)<\infty$*. Stoga za svaku početnu varijablu* $X_0$ *za koju je* $V\left(X_0\right)<\infty$*, na limesu* $t\to\infty$ *vrijedi*

$$\begin{cases}E\left(X\left(t\right)\right)\to 0\\V\left(X\left(t\right)\right)\to\frac{\sigma^2}{2b}.\end{cases}$$

*Iz eksplicitnog oblika rješenja vidimo da distribucija od* $X\left(t\right)$ *konvergira prema* $N\left(0,\frac{\sigma^2}{2b}\right)$ *kada* $t\to\infty$*. To znači da neovisno o početnoj distribuciji, rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe za velika vremena* $t$ *konvergira prema Gaussovoj distribuciji s varijancom* $\frac{\sigma^2}{2b}$ *koja predstavlja vezu izmedu slučajne sile* $\sigma\xi\left(\cdot\right)$ *i sile prigušenja* $-bX\left(\cdot\right)$*.*

## 4.2 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Na početku ovog poglavlja pokazat ćemo konstrukciju rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe u jednoj dimenziji.

Pretpostavimo da je $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klase $\mathbb{C}^1$, te da vrijedi $|b'| \leq L$ za neku konstantu $L$, te probajmo rješiti jednodimenzionalnu stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$\begin{cases} dX = b(X)\,dt + dW \\ X(0) = x, \end{cases}$$

za neki $x \in \mathbb{R}$.

Značenje ove stohastičke zadaće u smislu Itôvog integrala jest

$$X(t) = x + \int_0^t b(X)\ ds + W(t),$$

za sve $t \geq 0$, čime smo dobili implicitnu integralnu relaciju (osim za konstantnu funkciju $b$ kada je gornjom formulom eksplicitno dano rješenje). Stoga je ideja da konstruiramo niz slučajnih varijabli čiji će limes biti upravo maloprije navedeno rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (ideja je analogna dokazu postojanja i jedinstvenosti rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda koristeći Picardove iteracije; v. [4, pogl. 2]). Definirajmo $X^0(t) \equiv x$, te

$$X^{n+1}(t) := x + \int_0^t b(X^n)\ ds + W(t) \qquad (t \geq 0),$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, za $n \in \mathbb{N}_0$ i $t \geq 0$ definiramo

$$D^n(t) := \max_{0 \leq s \leq t} |X^{n+1}(s) - X^n(s)|,$$

te primijetimo da za dano neprekidno Brownovo gibanje vrijedi

$$D^0(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s b(x)\ dr + W(s) \right| \leq C,$$

za sva vremena $0 \leq t \leq T$, gdje konstanta $C$ ovisi o $\omega$.

Tvrdimo da za $n \in \mathbb{N}_0$ i $t \in [0, T]$ vrijedi

$$D^n(t) \leq C \frac{L^n}{n!} t^n.$$

Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom. Korak ($n = 0$) smo već pokazali, te pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n - 1$. Pokazujemo da tada nejednakost vrijedi i za $n$.

$$\begin{aligned}
D^n(t) &= \max_{0\le s\le t}\left|\int_0^s b\left(X^n(r)\right) - b\left(X^{n-1}(r)\right) dr\right| \\
&\le L\int_0^t D^{n-1}(s)\, ds \\
&\le L\int_0^t C\frac{L^{n-1}s^{n-1}}{(n-1)!}\, ds \quad \text{(po pretpostavci indukcije)} \\
&= C\frac{L^n t^n}{n!},
\end{aligned}$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti iskoristili Lagrangeov teorem srednje vrijednosti i $\left|b'\right| \le L$. Stoga za $m \ge n$ vrijedi

$$\max_{0\le t\le T}|X^m(t) - X^n(t)| \le C\sum_{k=n}^{\infty}\frac{L^k T^k}{k!} \to 0 \quad \text{kada } n\to\infty,$$

jer na desnoj strani imamo ostatak konvergentnog reda.

Zbog gornje konvergencije za skoro svaki $\omega$ imamo da $X^n(\cdot)$ konvergira uniformno za $0 \le t \le T$ prema procesu $X(\cdot)$. Ako u definiciji od $X^{n+1}(t)$ prijeđemo na limes upravo dobivamo rješenje koje je oblika kojeg smo otprije znali.

Sada prelazimo na rigorozni dokaz, prije kojega dajemo sljedeću pomoćnu lemu.

**Lema 4.2.1** (**Gronwallova lema**). *Neka su $\phi$ i $f$ nenegativne, neprekidne funkcije definirane za $0 \le t \le T$, te neka je $C_0 \ge 0$ neka konstanta. Ukoliko je*

$$\phi(t) \le C_0 + \int_0^t f\phi\, ds \quad \textit{za sve } 0\le t\le T,$$

*tada je*

$$\phi(t) \le C_0 e^{\int_0^t f\, ds} \quad \textit{za sve } 0\le t\le T.$$

*Dokaz.* Definirajmo $\Phi(t) := C_0 + \int_0^t f\phi\, ds$. Tada je $\Phi' = f\phi \le f\Phi$, te je

$$\left(e^{-\int_0^t f\,ds}\Phi\right)' = \left(\Phi' - f\Phi\right)e^{-\int_0^t f\,ds} \le (f\phi - f\phi)\, e^{-\int_0^t f\,ds} = 0.$$

Stoga je

$$\Phi(t)\, e^{-\int_0^t f\,ds} \le \Phi(0)\, e^{-\int_0^0 f\,ds} = C_0,$$

pa konačno imamo

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f\,ds}.$$

□

**Teorem 4.2.2 (Egzistencija i jedinstvenost).** *Pretpostavimo da su* $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *i* $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{M}^{m\times n}$ *neprekidne i da postoji* $L > 0$ *takav da za sve* $0 \leq t \leq T$ *i sve* $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi*

*(a)*

$$|\mathbf{b}(x,t) - \mathbf{b}(\hat{x},t)| \leq L|x - \hat{x}|,$$
$$|\mathbf{B}(x,t) - \mathbf{B}(\hat{x},t)| \leq L|x - \hat{x}|,$$

*i*

*(b)*

$$|\mathbf{b}(x,t)| \leq L(1 + |x|),$$
$$|\mathbf{B}(x,t)| \leq L(1 + |x|).$$

*Nadalje, neka je* $X_0$ *proizvoljna slučajna varijabla s vrijednostima u* $\mathbb{R}^n$ *takva da*

*(c)*

$$E\left(|X_0|^2\right) < \infty,$$

*te*

*(d)*

$$X_0 \text{ je nezavisna od } \mathcal{W}^+(0),$$

*gdje je* $\mathbf{W}(\cdot)$ *dano m-dimenzionalno Brownovo gibanje.*

*Tada postoji jedinstveno rješenje* $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$ *stohastičke diferencijalne jednadžbe*

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\,dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\,d\mathbf{W} & (0 \leq t \leq T) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \end{cases}$$

**Napomena 4.2.3.** *(i) Pod jedinstvenim rješenjem podrazumijevamo da ukoliko imamo dva skoro svuda neprekidna rješenja* $\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$ *jednadžbe (SDE) tada*

$$P\left(\mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}(t) \text{ za sve } 0 \leq t \leq T\right) = 1.$$

*(ii) Pretpostavka* (*a*) *govori da su funkcije* **b** *i* **B** *uniformno Lipschitz neprekidne u varijabli x. Primijetimo također da pretpostavka* (*b*) *slijedi iz pretpostavke* (*a*).

*(iii) Uz uvjet* (*b*) *(uvjet rasta) i obične diferencijalne jednadžbe imaju jedinstveno globalno rješenje, što je u skladu s ovim rezultatom (v. [4, pogl. 7]).*

*Dokaz.* (1) *Jedinstvenost*. Pretpostavimo da su $\mathbf{X}$ i $\hat{\mathbf{X}}$ dva rješenja od (SDE). Tada za sve $0 \le t \le T$,

$$\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{X}}, s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{X}}, s)\, d\mathbf{W}.$$

S obzirom da je $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, imamo

$$\begin{aligned} E\left(|\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)|^2\right) &\le 2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}\left(\hat{\mathbf{X}}, s\right) ds\right|^2\right) \\ &\quad + 2E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}\left(\hat{\mathbf{X}}, s\right) d\mathbf{W}\right|^2\right). \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost povlači da je

$$\left|\int_0^t \mathbf{f}\, ds\right|^2 \le t \int_0^t |\mathbf{f}|^2\, ds$$

za sve $t > 0$ i $\mathbf{f} : [0, t] \to \mathbb{R}^n$. Pomoću toga dobivamo

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}\left(\hat{\mathbf{X}}, s\right) ds\right|^2\right) &\le TE\left(\int_0^t \left|\mathbf{b}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{b}\left(\hat{\mathbf{X}}, s\right)\right|^2 ds\right) \\ &\le L^2 T \int_0^t E\left(|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}|^2\right) ds. \end{aligned}$$

Slično možemo ocijeniti i drugi sumand u sumi

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}\left(\hat{\mathbf{X}}, s\right) d\mathbf{W}\right|^2\right) &\le E\left(\int_0^t \left|\mathbf{B}(\mathbf{X}, s) - \mathbf{B}\left(\hat{\mathbf{X}}, s\right)\right|^2 ds\right) \\ &\le L^2 \int_0^t E\left(|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}|^2\right) ds, \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj nejednakosti primijenili Lemu 3.3.4. Stoga postoji konstanta $C > 0$ takva da

$$E\left(|\mathbf{X}(t)-\hat{\mathbf{X}}(t)|^2\right) \leq C\int_0^t E\left(|\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}\hat{(}s)|^2\right) ds,$$

za $0 \leq t \leq T$. Uz oznaku $\phi(t) := E\left(|\mathbf{X}(t)-\hat{\mathbf{X}}(t)|^2\right)$, prethodna nejednakost glasi

$$\phi(t) \leq C\int_0^t \phi(s)\, ds \quad \text{za sve } 0 \leq t \leq T.$$

Sada možemo primijeniti Gronwallovu lemu uz $C_0 = 0$ što daje $\phi \equiv 0$. Stoga je $\mathbf{X}(t) = \hat{\mathbf{X}}(t)$ gotovo svuda za svaki $0 \leq t \leq T$ pa je stoga $\mathbf{X}(r) = \hat{\mathbf{X}}(r)$ za sve racionalne $0 \leq r \leq T$, osim za eventualno neki skup mjere nula. S obzirom da su $\mathbf{X}$ i $\hat{\mathbf{X}}$ neprekidne gotovo svuda,

$$P\left(\max_{0\leq t\leq T}|\mathbf{X}(t)-\hat{\mathbf{X}}(t)| > 0\right) = 0.$$

(2) *Egzistencija*. Definirajmo

$$\begin{cases} \mathbf{X}^0(t) := \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}^{n+1}(t) := \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^n(s), s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s), s)\, d\mathbf{W}, \end{cases}$$

za $n \in \mathbb{N}_0$ i $0 \leq t \leq T$. Također definirajmo

$$d^n(t) := E\left(|\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2\right).$$

Tvrdimo da je za sve $n \in \mathbb{N}_0$ i $0 \leq t \leq T$

$$d^n(t) \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!},$$

pri čemu je $M$ neka konstanta ovisna o $L$,$T$ i $\mathbf{X}_0$. Doista, za $n = 0$ imamo

$$\begin{aligned} d^0(t) &= E\left(|\mathbf{X}^1(t) - \mathbf{X}^0(t)|^2\right) \\ &= E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}_0, s)\, ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}_0, s)\, d\mathbf{W}\right|^2\right) \\ &\leq 2E\left(\left|\int_0^t L(1+|\mathbf{X}_0|)\, ds\right|^2\right) + 2E\left(\int_0^t L^2(1+|\mathbf{X}_0|)^2\, ds\right) \\ &\leq tM, \end{aligned}$$

za neku dovoljno veliku konstantu $M$. Pritom smo u posljednjoj nejednakosti iskoristili pretpostavku da je $E\left(|X_0|^2\right) < \infty$. Time smo pokazali da gornja nejednakost vrijedi za $n = 0$.

Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za neki $n-1$. Tada je

$$\begin{aligned}
d^n(t) &= E\left(|\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2\right) \\
&= E\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^n, s) - \mathbf{b}\left(\mathbf{X}^{n-1}, s\right) ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n, s) - \mathbf{B}\left(\mathbf{X}^{n-1}, s\right) d\mathbf{W}\right|^2\right) \\
&\leq 2TL^2 E\left(\int_0^t |\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1}|^2 ds\right) + 2L^2 E\left(\int_0^t |\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1}|^2 ds\right) \\
&\leq 2L^2(1+T)\int_0^t \frac{M^n s^n}{n!} ds \quad \text{po pretpostavci indukcije} \\
&\leq \frac{M^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

pod uvjetom da smo odabrali $M \geq 2L^2(1+T)$. Time smo pokazali da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

(3) Primijetimo da je

$$\max_{0\leq t\leq T}|\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2 \leq 2TL^2 \int_0^T |\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1}|^2 ds + 2\max_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n, s) - \mathbf{B}\left(\mathbf{X}^{n-1}, s\right) d\mathbf{W}\right|^2.$$

Primijenimo li nejednakost martingala dobivamo

$$\begin{aligned}
E\left(\max_{0\leq t\leq T}|\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2\right) &\leq 2TL^2 \int_0^T E\left(|\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1}|^2\right) ds + 8L^2 \int_0^T E\left(|\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1}|^2\right) ds \\
&\leq C\frac{(MT)^n}{n!} \quad \text{po tvrdnji iz točke 2.}
\end{aligned}$$

(4) Primijenimo li sada Čebiševljevu nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
P\left(\max_{0\leq t\leq T}|\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)| > \frac{1}{2^n}\right) &\leq 2^{2n} E\left(\max_{0\leq t\leq T}|\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2\right) \\
&\leq 2^{2n}\frac{C(MT)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Zbog toga što je

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}\frac{(MT)^n}{n!} < \infty,$$

možemo primjeniti Borel-Cantellijevu lemu da dobijemo

$$P\left(\max_{0\le t\le T}\left|\mathbf{X}^{n+1}(t)-\mathbf{X}^{n}(t)\right|>\frac{1}{2^n}\text{ g.s.}\right)=0.$$

Stoga za gotovo svaki $\omega$ niz slučajnih varijabli $\mathbf{X}^n$ konvergira uniformno na $[0,T]$ prema procesu $\mathbf{X}(\cdot)$. Ukoliko sada prijeđemo na limes u definiciji od $\mathbf{X}^{n+1}(\cdot)$ dobivamo

$$\mathbf{X}(t)=X_0+\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X},s)\,ds+\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X},s)\,d\mathbf{W}\quad \text{za } 0\le t\le T.$$

To jest,

$$\begin{cases} d\mathbf{X}=\mathbf{b}(\mathbf{X},t)\,dt+\mathbf{B}(\mathbf{X},t)\,d\mathbf{W}\\ \mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0,\end{cases}$$

za vremenske trenutke $0\le t\le T$.

(5) Za kraj nam preostaje pokazati da je $\mathbf{X}(\cdot)\in\mathbb{L}^2_n(0,T)$. Primjetimo da je

$$\begin{aligned}E\left(\left|\mathbf{X}^{n+1}(t)\right|^2\right)&\le CE\left(|\mathbf{X}_0|^2\right)+CE\left(\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^n,s)\,ds\right|^2\right)+CE\left(\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n,s)\,d\mathbf{W}\right|^2\right)\\ &\le C\left(1+E\left(|\mathbf{X}_0|^2\right)\right)+C\int_0^t E\left(|\mathbf{X}^n|^2\right)ds,\end{aligned}$$

za neku konstantu $C$. Tada indukcijom vrijedi

$$E\left(\left|\mathbf{X}^{n+1}(t)\right|^2\right)\le\left[C+C^2+\cdots+C^{n+2}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]\left(1+E\left(|\mathbf{X}_0|^2\right)\right).$$

Iskoristimo li razvoj eksponencijalne funkcije u Taylorov red dobivamo

$$E\left(\left|\mathbf{X}^{n+1}(t)\right|^2\right)\le C\left(1+E\left(|\mathbf{X}_0|^2\right)\right)e^{Ct}.$$

Pustimo li sada $n\to\infty$ :

$$E\left(|\mathbf{X}(t)|^2\right)\le C\left(1+E\left(|\mathbf{X}_0|^2\right)\right)e^{Ct}\quad\text{za sve } 0\le t\le T,$$

te je stoga $\mathbf{X}\in\mathbb{L}^2_n(0,T)$.

□

## 4.3 Linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe

U ovom potpoglavlju konstruiramo eksplicitne formule za rješenje linearnih stohastičkih diferencijalnih jednadžbi.

**Definicija 4.3.1.** *Za stohastičku diferencijalnu jednadžbu*

$$d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X},t)\,dt + \mathbf{B}(\mathbf{X},t)\,d\mathbf{W}$$

*kažemo da je* ***linearna*** *ukoliko su koeficijenti* $\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{B}$ *oblika*

$$\mathbf{b}(x,t) \coloneqq \mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\,x,$$

*za neke* $\mathbf{c} : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{D} : [0,T] \to \mathbb{M}^{n\times n}$, *te*

$$\mathbf{B}(x,t) \coloneqq \mathbf{E}(t) + \mathbf{F}(t)\,x,$$

*za neke* $\mathbf{E} : [0,T] \to \mathbb{M}^{n\times m}$, $\mathbf{F} : [0,T] \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{M}^{n\times m})$.

**Definicija 4.3.2.** *Linearna stohastička diferencijalna jednadžba je* ***homogena*** *ukoliko je* $\mathbf{c} \equiv \mathbf{E} \equiv 0$ *za* $0 \le t \le T$, *te* ***linearna u užem smislu*** *ukoliko je* $\mathbf{F} \equiv 0$.

**Napomena 4.3.3.** *Ukoliko je*

$$\sup_{0\le t\le T} \{|\mathbf{c}(t)| + |\mathbf{D}(t)| + |\mathbf{E}(t)| + |\mathbf{F}(t)|\} < \infty,$$

*tada* $\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{B}$ *zadovoljavaju pretpostavke teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe. Stoga linearna jednadžba*

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X})\,dt + (\mathbf{E}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{X})\,d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

*ima jedinstveno rješenje uz uvjete da je* $E\left(|\mathbf{X}_0|^2\right) < \infty$, *te da je* $\mathbf{X}_0$ *nezavisna od* $\mathcal{W}^+(0)$.

**Teorem 4.3.4 (Formula za rješenje linearne jednadžbe u užem smislu).** *Pretpostavimo da je* $\mathbf{D}$ *konstanta. Tada je rješenje od*

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}\mathbf{X})\,dt + \mathbf{E}(t)\,d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

*dano sa*

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{D}t}\mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{D}(t-s)}\left(\mathbf{c}(s)\;ds + \mathbf{E}(s)\;d\mathbf{W}\right),$$

*gdje je*

$$e^{\mathbf{D}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^k t^k}{k!}.$$

*Općenitije, rješenje jednadžbe*

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X})\,dt + \mathbf{E}(t)\,d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

*je dano s*

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\left(\mathbf{X}_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1}\left(\mathbf{c}(s)\ ds + \mathbf{E}(s)\ d\mathbf{W}\right)\right),$$

*gdje je* $\Phi(\cdot)$ ***fundamentalna matrica*** *sustava običnih diferencijalnih jednadžbi*

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{D}(t)\,\Phi, \quad \Phi(0) = I.$$

*(Više detalja o fundamentalnim matricama se može pronaći u [4, pogl. 10, str. 61]).*

**Teorem 4.3.5** (**Formule za rješenja skalarnih linearnih jednadžbi**). *Pretpostavimo da je* $n = 1$*, te* $m \geq 1$ *proizvoljan. Tada je rješenje jednadžbe*

$$\begin{cases} dX = (c(t) + d(t)X)\,dt + \sum_{l=1}^{m}\left(e^l(t) + f^l(t)X\right)dW^l \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

*dano s*

$$X(t) = \Phi(t)\left(X_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1}\left(c(s) - \sum_{l=1}^{m} e^l(s)\,f^l(s)\right)ds\right) + \int_0^t \sum_{l=1}^{m} \Phi(s)^{-1}\,e^l(s)\ dW^l,$$

*gdje je*

$$\Phi(t) := \exp\left(\int_0^t d - \sum_{l=1}^{m} \frac{\left(f^l\right)^2}{2}\,ds + \int_0^t \sum_{l=1}^{m} f^l\,dW^l\right).$$

U nastavku ćemo prezentirati neke metode za rješavanje linearnih stohastičkih diferencijalnih jednadžbi. Izvest ćemo neke od formula definiranih u prethodnim razmatranjima ovog poglavlja.

**Primjer 4.3.6.** *Za početak promotrimo linearnu stohastičku diferencijalnu jednadžbu*

$$\begin{cases} dX = d(t)\,X dt + f(t)\,X dW \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

*za* $m = n = 1$. *Pokušat ćemo pronaći rješenje oblika*

$$X(t) = X_1(t)\,X_2(t),$$

*gdje je*

$$\begin{cases} dX_1 = f(t)\,X_1 dW \\ X_1(0) = X_0, \end{cases} \tag{4.4}$$

*te*

$$\begin{cases} dX_2 = A(t)\,dt + B(t)\,dW \\ X_2(0) = 1, \end{cases} \tag{4.5}$$

*gdje ćemo kasnije odabrati pogodne funkcije A i B. Tada je*

$$\begin{aligned} dX &= d(X_1 X_2) \\ &= X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + f(t)\,X_1 B(t)\,dt \\ &= f(t)\,X dW + \left(X_1 dX_2 + f(t)\,X_1 B(t)\,dt\right), \end{aligned}$$

*gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili* (4.4). *Sada moramo odabrati funkcije A i B tako da je*

$$dX_2 + f(t)\,B(t)\,dt = d(t)\,X_2 dt.$$

*Gornja jednakost će vrijediti ukoliko definiramo* $B \equiv 0$, *te* $A(t) = d(t)\,X_2(t)$. *Uvrstimo li to u* (4.5) *dobivamo*

$$\begin{cases} dX_2 = d(t)\,X_2 dt \\ X_2(0) = 1. \end{cases}$$

*Rješenje ove jednadžbe je* $X_2(t) = e^{\int_0^t d(s)\,ds}$. *S obzirom da je rješenje jednadžbe* (4.4)

$$X_1(t) = X_0 e^{\int_0^t f(s)\,dW - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\,ds},$$

*konačno dolazimo do zaključka da je*

$$X(t) = X_1(t)\,X_2(t) = X_0 e^{\int_0^t f(s)\,dW + \int_0^t d(s) - \frac{1}{2} f^2(s)\,ds},$$

*što je upravo jednako formuli koju smo maloprije definirali.*

**Primjer 4.3.7.** *Pogledajmo sada sljedeću jednadžbu*

$$\begin{cases} dX = (c(t) + d(t)X)\,dt + (e(t) + f(t)X)\,dW \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

*za $m = n = 1$. Ponovno kao u prethodnom primjeru pretpostavimo da je rješenje dano u obliku*

$$X(t) = X_1(t)\,X_2(t),$$

*gdje je*

$$\begin{cases} dX_1 = d(t)\,X_1 dt + f(t)\,X_1 dW \\ X_1(0) = 1, \end{cases}$$

*te*

$$\begin{cases} dX_2 = A(t)\,dt + B(t)\,dW \\ X_2(0) = X_0, \end{cases}$$

*gdje ćemo ponovno naknadno definirati funkcije $A$ i $B$. Tada je*

$$\begin{aligned} dX &= X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + f(t)\,X_1 B(t)\,dt \\ &= d(t)\,X dt + f(t)\,X dW + X_1\left(A(t)\,dt + B(t)\,dW\right) + f(t)\,X_1 B(t)\,dt. \end{aligned}$$

*Stoga zahtijevamo da je*

$$X_1\left(A(t)\,dt + B(t)\,dW\right) + f(t)\,X_1 B(t)\,dt = c(t)\,dt + e(t)\,dW,$$

*a ta jednakost će vrijediti ukoliko definiramo*

$$\begin{cases} A(t) := [c(t) - f(t)\,e(t)]\,(X_1(t))^{-1} \\ B(t) := e(t)\,(X_1(t))^{-1}. \end{cases}$$

*Primijetimo da je $X_1(t) = e^{\int_0^t f\,dW + \int_0^t d - \frac{1}{2}f^2\,ds}$, te je stoga $X_1(t) > 0$ gotovo svuda. Time imamo*

$$X_2(t) = X_0 + \int_0^t [c(s) - f(s)\,e(s)]\,(X_1(s))^{-1}\;ds + \int_0^t e(s)\,(X_1(s))^{-1}\;dW.$$

*Koristeći formule za $X_1(t)$ i $X_2(t)$ dobivamo*

$$\begin{aligned} X(t) &= X_1(t)\,X_2(t) \\ &= \exp\left(\int_0^t d(s) - \frac{1}{2}f^2(s)\;ds + \int_0^t f(s)\;dW\right) \\ &\times\left(X_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s d(r) - \frac{1}{2}f^2(r)\;dr - \int_0^s f(r)\;dW\right)(c(s) - c(s)\,f(s))\;ds\right. \\ &\left.+ \int_0^t \exp\left(-\int_0^s d(r) - \frac{1}{2}f^2(r)\;dr - \int_0^s f(r)\;dW\right)e(s)\;dW\right). \end{aligned}$$

# Poglavlje 5

# Primjene

Primjene obrađene u ovom poglavlju preuzete su iz [2, pogl. 6, str. 103-107]. Više detalja o poglavlju 5.2 se može pronaći u [3, pogl. 10], a o poglavlju 5.3 u [3, pogl. 12, str. 267-287].

## 5.1 Zaustavno vrijeme

Neka je $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ vjerojatnosni prostor, te $\mathcal{F}(\cdot)$ filtracija $\sigma$-algebri definirana u poglavlju 3.1.

**Definicija 5.1.1.** *Slučajna varijabla $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ se naziva* ***zaustavno vrijeme*** *filtracije $\mathcal{F}(\cdot)$ ukoliko vrijedi*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t) \quad \text{za sve } t \geq 0.$$

Ova definicija ustvari kaže da je skup događaja $\omega \in \Omega$ takvih da je $\tau(\omega) \leq t$ $\mathcal{F}(t)$-izmjeriv skup. Iz definicije se vidi da slučajna varijabla $\tau$ smije poprimiti vrijednost $+\infty$, te se lako vidi da je svaka konstantna varijabla $\tau \equiv t_0$ zaustavno vrijeme. Naime, ako je $t \leq t_0$, tada je $\{\tau \leq t\} = \emptyset \in \mathcal{F}(t)$, dok za $t \geq t_0$ vrijedi da je $\{\tau \leq t\} = \Omega \in \mathcal{F}(t)$.

**Teorem 5.1.2 (Svojstva zaustavnog vremena).** *Neka su $\tau_1$ i $\tau_2$ dva zaustavna vremena filtracije $\mathcal{F}(\cdot)$. Tada je*

*(i)* $\{\tau_1 < t\} \in \mathcal{F}(t)$*, te je stoga i* $\{\tau_1 = t\} \in \mathcal{F}(t)$ *za sva vremena* $t \geq 0$.

*(ii)* $\tau_1 \wedge \tau_2 := \min(\tau_1, \tau_2)$*, te* $\tau_1 \vee \tau_2 := \max(\tau_1, \tau_2)$ *su zaustavna vremena.*

*Dokaz.* Uočimo da je

$$\{\tau_1 < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{\tau_1 \leq t - 1/k\}}_{\in \mathcal{F}(t-1/k) \subseteq \mathcal{F}(t)}.$$

Pritom tvrdnja da je $\mathcal{F}(t - 1/k) \subseteq \mathcal{F}(t)$ slijedi direktno iz definicije filtracije $\mathcal{F}(\cdot)$. Stoga je $\{\tau_1 < t\} \in \mathcal{F}(t)$. A tada je i

$$\{\tau_1 = t\} = \underbrace{\{\tau_1 \leq t\}}_{\in \mathcal{F}(t)} \setminus \underbrace{\{\tau_1 < t\}}_{\in \mathcal{F}(t)} \in \mathcal{F}(t).$$

Također imamo da je

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}(t),$$

te

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cup \{\tau_2 \leq t\} \in \mathcal{F}(t).$$

□

**Primjer 5.1.3 (Pogađanje skupa).** *Pretpostavimo da je* $\mathbf{X}(\cdot)$ *rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe*

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(t, \mathbf{X})\,dt + \mathbf{B}(t, \mathbf{X})\,d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases}$$

*gdje* $\mathbf{b}$, $\mathbf{B}$ *i* $\mathbf{X}_0$ *zadovoljavaju pretpostavke Teorema 4.2.2.*

**Teorem 5.1.4.** *Neka je $E$ neprazan zatvoren ili otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada je*

$$\tau(\omega) := \inf\{t \geq 0 \mid (\mathbf{X}(t))(\omega) \in E\}, \quad \omega \in \Omega,$$

*zaustavno vrijeme. Pritom je $\tau = +\infty$ za one puteve $\mathbf{X}(\cdot)$ koji nikada ne pogađaju skup $E$.*

*Dokaz.* Fiksirajmo $t \geq 0$. Moramo pokazati da je $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$. Neka je $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ prebrojiv gust podskup od $[0, \infty)$. Za početak pretpostavimo da je $E = U$ otvoren skup. Tada događaj

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{t_i \leq t} \underbrace{\{\mathbf{X}(t_i) \in U\}}_{\in \mathcal{F}(t_i) \subseteq \mathcal{F}(t)}$$

pripada algebri $\mathcal{F}(t)$. Nadalje pretpostavljamo da je $E = C$ zatvoren skup. Definirajmo $d(x, C) := \operatorname{dist}(x, C)$, te otvorene skupove

$$U_n := \{x : d(x, C) < 1/n\}.$$

Tada događaj

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{t_i \leq t} \underbrace{\{\mathbf{X}(t_i) \in U_n\}}_{\in \mathcal{F}(t_i) \subseteq \mathcal{F}(t)},$$

također pripada algebri $\mathcal{F}(t)$. □

S druge strane, primijetimo da slučajna varijabla

$$\sigma := \sup\{t \geq 0 \mid \mathbf{X}(t) \in E\},$$

odnosno, zadnje vrijeme kada $\mathbf{X}(t)$ pogađa skup $E$, nije zaustavno vrijeme. Razlog je taj što događaj $\{\sigma \leq t\}$ ovisi o cijeloj budućnosti procesa, te zbog toga općenito neće biti $\mathcal{F}(t)$-izmjeriv. Podsjetimo se da $\mathcal{F}(t)$ sadrži informacije o povijesti procesa do i uključivo vremena $t$, ali ne sadrži informacije o budućnosti. Razlog za nazivlje „zaustavno vrijeme" dolazi iz toga što ponekad u primjeni želimo zaustaviti put $\mathbf{X}(\cdot)$ upravo u vremenu $\tau$ kada prvi put pogađa skup $E$.

**Definicija 5.1.5.** *Ukoliko je $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$, te $\tau$ zaustavno vrijeme takvo da je $0 \leq \tau \leq T$, tada definiramo*

$$\int_0^\tau G\,dW := \int_0^T \chi_{\{t\leq\tau\}} G\,dW.$$

**Lema 5.1.6 (Itôvi integrali sa zaustavnim vremenom).** *Ukoliko je $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$, te $0 \leq \tau \leq T$ zaustavno vrijeme, tada je*

*(i)*

$$E\left(\int_0^\tau G\,dW\right) = 0$$

*(ii)*

$$E\left(\left(\int_0^\tau G\,dW\right)^2\right) = E\left(\int_0^\tau G^2\,dt\right).$$

*Dokaz.* Vrijedi

$$E\left(\int_0^\tau G\,dW\right) = E\left(\int_0^T \underbrace{\chi_{\{t\leq\tau\}}G}_{\in\mathbb{L}^2(0,T)}\,dW\right) = 0,$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti iskoristili Lemu 3.3.4 (*i*). Stoga je

$$\begin{aligned} E\left(\left(\int_0^\tau G\,dW\right)^2\right) &= E\left(\left(\int_0^T \chi_{\{t\leq\tau\}}G\,dW\right)^2\right) \\ &= E\left(\int_0^T \left(\chi_{\{t\leq\tau\}}G\right)^2\,dt\right) \\ &= E\left(\int_0^\tau G^2\,dt\right), \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili Lemu 3.3.4 (*ii*). □

Slične formule vrijede za vektorske procese.

Neka je sada $\mathbf{W}(\cdot)$ $m$-dimenzionalno Brownovo gibanje. Prisjetimo se da ako je $d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t)\, dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\, d\mathbf{W}$, tada za svaku $C^2$ funkciju $u$ vrijedi

$$du(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\mathbf{X}^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{m} b^{ik} b^{jk} dt.$$

U integralnom obliku iz gornjeg slijedi da je

$$u(\mathbf{X}(t), t) - u(\mathbf{X}(0), 0) = \int_0^t \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds + \int_0^t Du \cdot \mathbf{B}\, d\mathbf{W}, \tag{5.1}$$

za diferencijalne operatore

$$Lu := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i}, \quad a^{ij} = \sum_{k=1}^{m} b^{ik} b^{jk},$$

te

$$Du \cdot \mathbf{B}\, d\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} b^{ik} dW^k.$$

Diferencijalni operator $L$ zovemo **generator**. S obzirom na to da formula (5.1) vrijedi za skoro svaki $\omega \in \Omega$ i svaki $0 \leq t \leq T$, možemo staviti da je $t = \tau$, gdje je $\tau$ zaustavno vrijeme, $0 \leq \tau \leq T$. Tada vrijedi

$$u(\mathbf{X}(\tau), t) - u(\mathbf{X}(0), 0) = \int_0^\tau \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds + \int_0^\tau Du \cdot \mathbf{B}\, d\mathbf{W}.$$

Uzimajući sada očekivanje gornjeg izraza dobivamo

$$E\Big(u(\mathbf{X}(\tau), \tau)\Big) - E\Big(u(\mathbf{X}(0), 0)\Big) = E\left( \int_0^\tau \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Lu \right) ds \right),$$

pri čemu smo koristili vektorsku inačicu prethodne leme.

Naravno, nama najzanimljiviji slučaj je kada je $\mathbf{X}(\cdot) = \mathbf{W}(\cdot)$, $n$-dimenzionalno Brownovo gibanje. U tom slučaju je $\mathbf{b} = 0$ i $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, pa je onda generator dan s

$$Lu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_j} =: \frac{1}{2} \Delta u.$$

Izraz $\Delta u$ se naziva **Laplacian** funkcije $u$.

## 5.2 Optimalno zaustavljanje

Neka je $U \subset \mathbb{R}^m$ ograničena, glatka domena. Pretpostavimo da $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}^{n\times m}$ zadovoljavaju uobičajene pretpostavke. Tada za svaki $x \in U$ stohastička diferencijalna jednadžba

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X})\,dt + \mathbf{B}(\mathbf{X})\,d\mathbf{W} \\ X_0 = x \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje. Neka je $\tau = \tau_x$ vrijeme pogađanja skupa $\partial U$. Neka je $\theta$ bilo koje vrijeme zaustavljanja s obzirom na $\mathcal{F}(\cdot)$, te za svaki takav $\theta$ definirajmo „**očekivani trošak**“ zaustavljanja $\mathbf{X}(\cdot)$ u trenutku $\theta \wedge \tau$ kao

$$J_x(\theta) = E\left(\int_0^{\theta\wedge\tau} f(\mathbf{X}(s))\,ds + g(\mathbf{X}(\theta\wedge\tau))\right).$$

Ideja ovakve definicije je da ako zaustavimo proces u trenutku $\theta < \tau$, tada je očekivani trošak dana upravo $g(\mathbf{X}(\theta))$. Ako pak ne zaustavimo proces prije nego što pogodi $\partial U$, to jest, $\theta \geq \tau$, tada je trošak $g(\mathbf{X}(\tau))$. Uz to, imamo i trošak po jedinici vremena $f$ u ovisnosti koliko dugo proces traje, to jest, do trenutka $\theta \wedge \tau$.

Ključno pitanje je sljedeće, postoji li optimalno vrijeme zaustavljanja $\theta^* = \theta_x^*$ za koje je

$$J_x(\theta^*) = \min_{\theta \text{ vrijeme zaustavljanja}} J_x(\theta),$$

te ako postoji kako pronaći $\theta^*$. Problem ćemo riješiti tako da ćemo usmjeriti pozornost na funkciju očekivanog troška, te definirati

$$u(x) := \inf_\theta J_x(\theta). \tag{5.2}$$

Cilj nam je opisati kako izgleda funkcija $u$ koja ovisi o $x \in U$. Primijetimo da je $u(x)$ minimalni očekivani trošak pod uvjetom da smo proces započeli u točki $x$. Ispostavit će se da jednom kada znamo kako izgleda funkcija $u$ možemo konstruirati optimalni $\theta^*$.

Pretpostavimo stoga da je funkcija $u$ definirana kao gore i da je dovoljno glatka da sav račun koji slijedi možemo provesti. Željeli bismo ispitati neka svojstva funkcije $u$. Za početak, primijetimo da u definiciji (5.2) možemo uzeti $\theta \equiv 0$. To znači da možemo odmah stati u početnom trenutku i dobiti da je trošak jednak $g(\mathbf{X}(0)) = g(x)$. Stoga je

$$u(x) \leq g(x) \quad \text{za svaku točku } x \in U. \tag{5.3}$$

Nadalje, $\tau \equiv 0$ ako je $x \in \partial U$, pa je stoga

$$u(x) = g(x) \quad \text{za svaku točku } x \in \partial U. \tag{5.4}$$

Uzmimo sada proizvoljnu točku $x \in U$ i fiksirajmo neki „mali“broj $\delta > 0$. Ako sada ne zaustavimo proces barem do trenutka $\delta$, novo stanje procesa u trenutku $\delta$ će biti $\mathbf{X}(\delta)$ prema stohastičkoj diferencijalnoj jednadžbi. Stoga, uzimajući u obzir da smo u točki $\mathbf{X}(\delta)$, najbolje što možemo postići u minimiziranju troška je

$$u(\mathbf{X}(\delta)).$$

Stoga, ako proces ne odlučimo zaustaviti do barem trenutka $\delta$ i ako pretpostavimo da do tog trenutka ne pogodimo skup $\partial U$, trošak će biti najmanje

$$E\left(\int_0^\delta f(\mathbf{X})\ ds + u(\mathbf{X}(\delta))\right).$$

S obzirom na to da smo funkciju $u(\cdot)$ upravo definirali kao infimum troška po svim vremenima zaustavljanja, imamo da je

$$\begin{aligned} u(x) &\leq E\left(\int_0^\delta f(\mathbf{X})\ ds + u(\mathbf{X}(\delta))\right) \\ &= E\left(\int_0^\delta f(\mathbf{X})\ ds\right) + E\Big(u(\mathbf{X}(\delta))\Big). \end{aligned}$$

Iskoristimo li sada Itôvu formulu dobivamo

$$E\Big(u(\mathbf{X}(\delta))\Big) = u(x) + E\left(\int_0^\delta Lu(\mathbf{X})\ ds\right),$$

gdje je

$$Lu = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad a^{ij} = \sum_{k=1}^{m} b^{ik} b^{jk}.$$

Uvrštavanjem tog izraza u gornju nejednakost dobivamo

$$0 \leq E\left(\int_0^\delta f(\mathbf{X}) + Lu(\mathbf{X})\ ds\right).$$

Podijelimo li posljednji izraz s $\delta$ i pustimo li u limes $\delta \to 0$ slijedi

$$0 \leq f(x) + Lu(x).$$

Ovu nejednakost možemo napisati i kao

$$Mu(x) \leq f(x), \quad x \in U, \tag{5.5}$$

uz definiranje $Mu := -Lu$. Primijetimo za kraj da ako u jednadžbi (5.3) vrijedi stroga nejednakost, to jest, ako je

$$u(x) < g(x) \quad \text{za neku točku } x \in U,$$

tada nije optimalno zaustaviti proces odmah u početnom trenutku. Stoga je poželjno pustiti proces da traje barem neko malo vrijeme $\delta$. U tom slučaju bi imali jednakost

$$Mu = f \quad \text{za one točke za koje je } u < g.$$

Konačno, kombiniranjem (5.3) - (5.5) dobivamo da funkcija $u$ zadovoljava

$$\begin{cases} \max\{Mu - f, u - g\} = 0 & \text{u } U \\ u = g & \text{na } \partial U \end{cases} \tag{5.6}$$

Te uvjete na funkciju $u$ nazivamo **uvjeti optimalnosti**.

Zaključak ove diskusije je da moramo pokazati dvije stvari. Najprije trebamo pokazati da postoji i to jedinstveno rješenje $u$ sustava jednadžbi (5.6) , te nakon toga da je ono upravo $\min_\theta J_x(\theta)$. Nakon što napokon imamo funkciju $u$ lako možemo odrediti $\theta^*$, to jest, optimalno vrijeme zaustavljanja.

**Teorem 5.2.1.** *Pretpostavimo da su $f$ i $g$ dane glatke funkcije. Tada postoji jedinstvena funkcija $u$ s ograničenim drugim derivacijama takva da je*

*(i)* $u \leq g$ *u* $U$,

*(ii)* $Mu \leq f$ *gotovo svugdje u* $U$,

*(iii)* $\max\{Mu - f, u - g\} = 0$ *gotovo svugdje u* $U$,

*(iv)* $u = g$ *na* $\partial U$.

*Općenito, funkcija* $u \notin C^2(U)$.

Sada ćemo pokazati da je rješenje sustava jednadžbi (5.6) doista rješenje problema minimalnog troška. Za početak definirajmo **skup zaustavljanja**

$$S := \{x \in U \mid u(x) = g(x)\},$$

i primijetimo da je to zatvoren skup. Za svaki $x \in \overline{U}$ definirajmo

$$\theta^* := \text{prvo vrijeme pogađanja skupa } S.$$

**Teorem 5.2.2.** *Neka je funkcija u rješenje sustava jednadžbi* (5.6). *Tada je*

$$u(x) = J_x(\theta^*) = \inf_{\theta} J_x(\theta)$$

*za sve* $x \in \overline{U}$.

Teorem kaže da najprije pomoću funkcije $u$ trebamo pronaći skup $S$, definirati $\theta^*$ kao gore i pokrenuti proces $\mathbf{X}(\cdot)$ dok se ne pogodi skup $S$ ili dok ne izađemo iz skupa $U$.

*Dokaz.* Definirajmo **skup nastavljanja**

$$C := U \setminus S = \{x \in U \mid u(x) < g(x)\}.$$

Na ovom skupu je $Mu = f$, te je $u = g$ na $\partial C$. S obzirom da je $\tau \wedge \theta^*$ vrijeme izlaska iz skupa $C$, za svaki $x \in C$ imamo

$$u(x) = E\left(\int_0^{\tau\wedge\theta^*} f(\mathbf{X}(s))\, ds + g\Big(\mathbf{X}(\theta^* \wedge \tau)\Big)\right) = J_x(\theta^*).$$

S druge strane, ukoliko je $x \in S$, $\tau \wedge \theta^* = 0$, pa je

$$u(x) = g(x) = J_x(\theta^*).$$

Stoga za svaki $x \in \overline{U}$ imamo da je $u(x) = J_x(\theta^*)$. Pretpostavimo sada da je $\theta$ bilo koje drugo vrijeme zaustavljanja. Moramo pokazati da je

$$u(x) = J_x(\theta^*) \leq J_x(\theta).$$

Po Itôvoj formuli imamo da je

$$u(x) = E\left(\int_0^{\tau\wedge\theta} Mu(\mathbf{X})\, ds + u(\mathbf{X}(\tau \wedge \theta))\right).$$

Međutim, znamo da je $Mu \leq f$ i $u \leq g$ na $\overline{U}$. Stoga je

$$u(x) = E\left(\int_0^{\tau\wedge\theta} f(\mathbf{X})\, ds + g(\mathbf{X}(\tau \wedge \theta))\right) = J_x(\theta).$$

S obzirom da je $u(x) = J_x(\theta^*)$ slijedi da je

$$u(x) = J_x(\theta^*) = \min_{\theta} J_x(\theta),$$

kao što smo trebali i pokazati. □

## 5.3 Određivanje cijena opcija

Neka je $S(t)$ vrijednost neke dionice u trenutku $t$ i pretpostavimo da je promjena vrijednosti od $S$ određena sljedećom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$\begin{cases} dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW \\ S(0) = s_0, \end{cases} \tag{5.7}$$

gdje je $\mu > 0$, $\sigma \neq 0$, te $s_0$ poznata početna vrijednost.

Proučit ćemo takozvanu „Europsku opciju“, to jest, pravo na kupnju jednog udjela dionice $S$ po cijeni $p$ u trenutku $T$. Broj $p$ se naziva **udarna cijena**, a $T > 0$ **udarno vrijeme**. Temeljno pitanje je, koja je pogodna cijena ove opcije u trenutku $t = 0$? Drugim riječima, koliko neka financijska tvrtka treba naplatiti korisniku kupnju opcije? (Naš cilj je pronaći cijenu za koju tvrtka niti ne gubi novac niti ne profitira.)

Radi jednostavnosti, nadalje ćemo pretpostaviti da je kamatna stopa bez rizika konstanta $r > 0$. To znači da recimo 1 kuna stavljena u banku u trenutku $t = 0$ postaje $e^{rT}$ u trenutku $t = T$. Ekvivalentno, 1 kuna u trenutku $t = T$ vrijedi „samo“ $e^{-rT}$ u trenutku $t = 0$.

Inicijalna pretpostavka za cijenu opcija bi mogla biti

$$e^{-rT} E\left((S(T) - p)^+\right). \tag{5.8}$$

Razlog je taj što ako je $S(t) < p$ opcija je beskorisna pa je njena vrijednost jednaka 0. Ako je pak $S(t) > p$, u tom trenutku možemo kupiti opciju za cijenu $p$, odmah je prodati po cijeni $S(t)$ i s time profitirati za $S(t) - p$. Ovo usrednjujemo po svim uzorcima i množimo s faktorom $e^{-rT}$ kako bismo došli do tražene početne cijene opcije.

Ipak, (5.8) nije točna vrijednost opcije. Osnovni faktor koji igra ulogu u određivanju cijena opcija je mogućnost profita bez rizika. Stoga želimo eliminirati rizik kao prodavaoc opcija što činimo „dupliciranjem“ opcije portfolijem koji se sastoji od obveznice bez rizika i navedene opcije.

Za $s \geq 0$ i $0 \leq t \leq T$ uvodimo nepoznatu **cjenovnu funkciju**

$$u(s,t), \tag{5.9}$$

koja označava pravu vrijednost opcije u trenutku $t$, ako je dano da je $S(t) = s$. Tada je $u(s_0, 0)$ cijena koju mi tražimo.

Naš je zadatak pronaći funkciju $u$. Za početak, primijetimo da u trenutku $T$ imamo

$$u(s,T) = (s-p)^+ = \max\{0, s-p\} \quad (s \geq 0). \tag{5.10}$$

Ako je pak $s = 0$, tada je $S(t) = 0$ za sva vremena $0 \leq t \leq T$, te je stoga

$$u(0,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \tag{5.11}$$

Preostaje vidjeti kako se funkcija $u$ ponaša za $s > 0$ i $0 \leq t \leq T$.

Definirajmo proces

$$C(t) := u(S(t), t) \quad (0 \leq t \leq T), \tag{5.12}$$

koji predstavlja trenutnu vrijednost opcije u trenutku $t$. Taj proces je slučajan s obzirom na to da je $S(t)$ slučajna varijabla. Pomoću Itôve formule i (5.7) dobivamo

$$dC = \left(u_t + \mu S u_s + \frac{\sigma^2}{2} S^2 u_{ss}\right) dt + \sigma S u_s dW. \tag{5.13}$$

Ključna ideja je konstruirati $C$ kao kombinaciju udjela dionice $S$ i obveznica $B$. Pritom pretpostavljamo da je $B$ investicija bez rizika koja raste uz kamatnu stopu $r$:

$$\begin{cases} dB = rBdt \\ B(0) = 1. \end{cases} \tag{5.14}$$

Posebno, to znači da je $B(t) = e^{rt}$. Cilj nam je pronaći procese $\phi$ i $\psi$ takve da je

$$C = \phi S + \psi B \quad (0 \leq t \leq T). \tag{5.15}$$

Ako uspijemo konstruirati procese $\phi$ i $\psi$ tako da je jednadžba (5.15) zadovoljena, tada smo uspjeli eliminirati sav rizik. Da se u to uvjerimo pretpostavimo da financijska tvrtka prodaje opciju opisanu gornjim računima. Tvrtka tada pristaje na rizik da u trenutku $T$ cijena opcije $S(T)$ premašuje $p$, te će stoga kupac biti na profitu. Međutim, ako je tvrtka konstruirala portfolio na način opisan u (5.15), profit takvog portfolia će upravo biti jednaki iznosu koji je potrebno isplatiti kupcu opcije. S druge strane, ako je opcija „beskorisna" u trenutku $T$ navedeni portfolio neće generirati profit.

Da ovo bude izvedivo, moramo pretpostaviti da je portfolio (5.15) samoodrživ. To znači da promjene u vrijednosti portfolia ovise samo o promjenama $S$ i $B$. Stoga zahtijevamo da je

$$dC = \phi dS + \psi dB \quad (0 \leq t \leq T). \tag{5.16}$$

**Napomena 5.3.1.** *Radi boljeg razumijevanja samoodrživog portfolia pretpostavimo da imamo model u kojem je vrijeme diskretno, te su vrijednosti opcije i obveznice u trenutcima $t_i$ dani sa $S_i$ i $B_i$ respektivno. Pritom je $\{t_i\}_{i=0}^N$ rastući niz vremena i pretpostavljamo da su vremenski koraci $t_{i+1} - t_i$ maleni. Portfolio se sada može prikazati kao niz uređenih parova $\{(\phi_i, \psi_i)\}_{i=0}^N$ koji prikazuju cijene opcije i obveznice u svakom vremenskom intervalu.*

*Sada, za dani vremenski interval $(t_i, t_{i+1})$, $C_i = \phi_i S_i + \psi_i B_i$ je vrijednost otvaranja portfolia, dok je $C_{i+1} = \phi_i S_{i+1} + \psi_i B_{i+1}$ vrijednost zatvaranja portfolia. Uvjet samoodrživosti znači da je razlika $C_{i+1} - C_i$ mora biti jednaka* 0. *To je ekvivalentno tome da je*

$$C_{i+1} - C_i = \phi_i (S_{i+1} - S_i) + \psi_i (B_{i+1} - B_i),$$

*čija neprekidna formulacija je upravo* (5.16).

Kombinirajući formule (5.13), (5.14) i (5.16) dobivamo jednakost

$$\left(u_t + \mu S u_s + \frac{\sigma^2}{2} S^2 u_{ss}\right) dt + \sigma S u_s dW = \phi \left(\mu S\, dt + \sigma S\, dW\right) + \psi r B dt. \tag{5.17}$$

Stoga, ako vrijedi (5.15), (5.17) mora vrijediti, te stoga moramo prikladno odabrati procese $\phi$ i $\psi$. Primijetimo da će članovi uz $dW$ biti jednaki s obje strane jednakosti (5.17) ako uzmemo

$$\phi(t) := u_s(S(t), t) \quad (0 \leq t \leq T). \tag{5.18}$$

Tada se (5.17) pojednostavljuje te dobivamo

$$\left(u_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 u_{ss}\right) dt = r\psi B dt.$$

Međutim, zbog (5.15) i (5.18) je $\phi B = C - \psi S = u - u_s S$, čime dobivamo

$$\left(u_t + rS u_s + \frac{\sigma^2}{2} u_{ss} - ru\right) dt = 0. \tag{5.19}$$

Stoga ako želimo da je (5.12) valjana definicija, zahtijevamo da funkcija $u = u(s, t)$ rješava sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u_t + rsu_s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 u_{ss} - ru = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \tag{5.20}$$

Primijetimo da se parametar $\mu$ ne pojavljuje u ovoj jednadžbi.

Ova diskusija nas dovodi to toga da ako želimo odrediti cijenu naše opcije moramo riješiti rubni problem

$$\begin{cases} u_t + rsu_s + \frac{\sigma^2}{2} s^2 u_{ss} - ru = 0 & (s > 0, 0 \leq t \leq T) \\ u = (s - p)^+ & (s > 0, t = T) \\ u = 0 & (s = 0, 0 \leq t \leq T). \end{cases}$$

Primijetimo da je u gornjem rubnom problemu upravo riječ o paraboličkoj jednadžbi na polupravcu ($s > 0$).

# Bibliografija

[1] P. Brémaud, *An Introduction to Probabilistic Modeling*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[2] L. C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, 2014.

[3] B. Øksendal, *Stochastic differential equations*, Springer, 2000.

[4] Z. Tutek i M. Vrdoljak, *Obične diferencijalne jednadžbe*, PMF-MO, 2019.

# Sažetak

U ovome radu upoznali smo se s pojmom stohastičkih diferencijalnih jednadžbi i njenim primjenama. Podsjetili smo se gradiva teorije vjerojatnosti potrebnog za razumijevanje ovog rada. Upoznali smo se s Brownovim gibanjem, stohastičkim procesom čija je „derivacija“ upravo „bijeli šum “ podataka koji se često pojavljuje prilikom modeliranja parcijalnim diferencijalnim jednadžbama nekog problema iz stvarnoga svijeta.

Kao osnovne pojmove za ovu tematiku uveli su se Itôv integral i Itôva formula. Opisano je kako izgledaju stohastičke diferencijalne jednadžbe, te je stavljen naglasak na egzistenciji i jedinstvenosti njihovog rješenja, te dokaz navedene tvrdnje.

Na samome kraju rada obrađeno je nekoliko primjena teorije gdje se prikazao jedan dio upotrebe stohastičkih diferencijalnih jednadžbi u rješavanju problema koji se pojavljuju u praksi.

# Summary

In this paper, we were introduced to the term stochastic differential equation and its applications. We have recalled the foundations of probability theory necessary for understanding this thesis. We were introduced to Brownian motion, a stochastic process whose ”derivative” is the ”white noise” of data that often appears in modeling real-world problems with partial differential equations.

The Itô integral and the Itô formula were introduced as basic concepts for this topic. It is described what stochastic differential equations look like and emphasis is placed on the existence and uniqueness of their solution, as well as the proof of the stated statement.

At the very end of the paper, several applications of the theory were discussed, where one part of the use of stochastic differential equations in solving problems arising from the real world was presented.

# Životopis

Rođen sam 4. studenog 1996. godine u Zagrebu. Osnovno sam obrazovanje završio u Osnovnoj školi Malešnica, a srednjoškolsko obrazovanje u Gimnaziji Lucijana Vranjanina, gdje sam stvorio zainteresiranost prema matematici i odlučio u tome smjeru nastaviti obrazovanje. Radi toga 2015. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon stjecanja prvostupničke diplome 2020. na istom odsjeku fakulteta upisujem Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika. Tijekom posljednje godine fakulteta zapošljavam se kao algoritamski inženjer u elektroničkoj kompaniji Xylon gdje naučeno znanje s fakulteta primjenjujem za rješavanje konkretnih matematičkih problema i tako skupljam iskustva za daljnje napredovanje u poslovnom svijetu.