Neke primjene varijacijskog računa u ekonomiji

Brozović, Nika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nika Brozović

NEKE PRIMJENE VARIJACIJSKOG RAČUNA U EKONOMIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, studeni, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Na ovoj velikoj životnoj prekretnici, želim iskazati zahvalnost svojoj obitelji na podršci koju su mi pružili tijekom obrazovanja, prijateljima i kolegama koji su učinili studentske dane ljepšima i jednostavnijima, mentoru koji me vodio kroz stvaranje ovoga rada i mojoj najvećoj ljubavi i podršci, Z.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Varijacijski račun **2**
1.1 Motivacijski primjer . . . 2
1.2 Euler-Lagrangeova jednadžba . . . 6
1.3 Legendreov uvjet . . . 11

2 Posebni slučajevi rubnih uvjeta **16**
2.1 Slobodni horizontalno transverzalni uvjeti . . . 16
2.2 Dodatno ograničenje na dopustivu funkciju . . . 22
2.3 Autonomni problemi neograničeni odozgo i putevi najbržeg prilaska . . . 26

3 Odabrane primjene varijacijskog računa u ekonomiji **30**
3.1 Optimalna potrošnja pojedinca . . . 30
3.2 Projekt istraživanja i razvoja . . . 33
3.3 Plan proizvodnje . . . 35
3.4 Maksimizacija profita i ljudski kapital . . . 37

Bibliografija **39**

Uvod

U ekonomiji se fokus često stavlja na pronalaženje optimalnih modela poslovanja koji će, primjerice, odrediti stopu proizvodnje koja omogućuje maksimalni profit ili minimalne troškove rada, ili pak stopu potrošnje koja maksimizira korisnosti pojedinca. Budući da se teorija varijacijskog računa bavi upravo problemima egzistencije i određivanja funkcija koje zadanom funkcionalu daju maksimalnu (odnosno minimalnu) vrijednost, za nju se može naći pogodna primjena upravo u prethodno navedenim problemima. Problematika je srodna onoj određivanja ekstrema realnih funkcija na konačnodimenzionalnom prostoru, uz odgovarajuće dodatne tehničke zahtjeve (npr. pojam parcijalnih derivacija u ovoj općenitosti nema smisla). Razvoj varijacijskog računa dobiva zamah u 17. stoljeću. U to je vrijeme značajno ime Sir Isaac Newton. Bitan primjer u razvoju teorije je problem brahistokrone. Više o samom problemu i začetku varijacijskog računa može se pronaći u [1]. Primjene u ekonomiji počinju dvadesetih godina 20. stoljeća. Istaknuta imena su primjerice Evans, Roos, Hotelling i Ramsey.

U radu se obrađuju osnovni pojmovi i rezultati klasične teorije varijacijskog računa te njihove primjene u nekoliko problema ekonomske prirode te se uglavnom prati izvor [4].

U prvom poglavlju dan je motivacijski primjer za uvođenje navedene teorije te su predstavljeni osnovni rezultati o nužnim i dovoljnim uvjetima da funkcija $\bar{x} \in C^1([a, b])$, uz zadane rubne uvjete $x(t_0) = x_0$ i $x(t_1) = x_1$, maksimizira funkcional:

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right) \, dt.$$

U drugom poglavlju obrađuju se posebni slučajevi gore navedenog problema, kada je primjerice jedan od rubnih uvjeta slobodan ili je pak na traženu funkciju x dano dodatno ograničenje.

Na kraju se u trećem poglavlju uvodi nekoliko primjera iz ekonomije gdje obrađeni rezultati varijacijskog računa pronalaze primjenu.

Poglavlje 1

Varijacijski račun

1.1 Motivacijski primjer

U ovome poglavlju predstavit ćemo osnovne rezultate klasične teorije varijacijskog računa, uglavnom prateći [4], a čitatelja upućujemo i na reference [6] i [2] koje su se također u manjoj mjeri koristile u pisanju ovog rada.

Primjer 1.1.1. *Pretpostavimo da neka tvrtka mora isporučiti B jedinica proizvoda do trenutka T. Potrebno je odrediti raspored proizvodnje takav da se ispoštuje rok isporuke uz minimalne troškove i uvjet da jedinični trošak proizvodnje raste linearno s jediničnom stopom proizvodnje te da je jedinična cijena držanja inventara konstantna.*

Označimo s $x(t)$ količinu inventara proizvedenu do trenutka t. Neka je $x(0) = 0$ te, po uvjetima narudžbe, mora vrijediti $x(T) = B$. Za svaki t, $0 \leq t \leq T$, količina inventara $x(t)$ jednaka je kumuliranoj količini proizvodnje do trenutka t, a stopa promjene količine inventara jednaka je stopi proizvodnje $dx/dt = x'(t)$.
Izrazimo ukupni trošak tvrtke u trenutku t:

$$\left[c_1 x'(t)\right] x'(t) + c_2 x(t) = c_1 \left[x'(t)\right]^2 + c_2 x(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.1}$$

gdje su c_1 i c_2 pozitivne konstante koje predstavljaju jediničnu cijenu proizvodnje i jediničnu cijenu držanja inventara.
Cilj je odrediti stopu proizvodnje $x'(t)$ i količinu inventara $x(t)$ za $0 \leq t \leq T$ tako da je x rješenje sljedeće minimizacijske zadaće (minimalni trošak):

$$min \int_0^T \left[c_1 (x'(t))^2 + c_2 x(t)\right] dt, \tag{1.2}$$

uz rubne uvjete:

$$x(0) = 0,\ x(T) = B, \tag{1.3}$$

te prirodan fizikalan uvjet $x'(t) \geq 0\,, 0 \leq t \leq T$, *koji znači da količina inventara ne može opadati.*

Pokažimo kako se problem može riješiti prije uvođenja teorije varijacijskog računa u slučaju kada tvrtka nema troška držanja inventara, odnosno $c_2 = 0$. *Naime, minimizirati* (1.2) *je tada ekvivalentno s minimiziranjem* $c_1 \int_0^T (x'(t))^2 dt$ *za* $c_1 > 0$. *Sada bez smanjenja općenistosti možemo pretpostaviti da vrijedi* $c_1 = 1$. *Dakle, rješavamo sljedeći problem:*

$$min \int_0^T (x'(t))^2\, dt \tag{1.4}$$

uz uvjete:

$$x(0) = 0,\ x(T) = B,\ x'(t) \geq 0,\ t \in [0, T]\,. \tag{1.5}$$

Kako bismo dobili ideju o mogućem rješenju, promotrimo njegovu diskretnu aproksimaciju i njezino rješenje. Podijelimo dakle interval $[0, T]$ *na* $n \in N$ *dijelova jednake duljine* $k = T/n$ *i aproksimirajmo funkciju* $x(t)$ *tako da po dijelovima linearno interpoliramo (uz* $y_i = x(t_i)$*), gdje je* $t_i = ik$*) vrhove (0,0), (k,* y_1*), (2k,* y_2*), ... , (T, B). Stopa promjene inventara* $x'(t)$ *u tom se slučaju može aproksimirati s* $\Delta x/\Delta t = (y_i - y_{i-1})/k$. *Dakle, tražimo* y_i, *za* $i = 1, \ldots, n-1$, *takve da vrijedi:*

$$min \sum_{i=1}^{n} \left[(y_i - y_{i-1})/k\right]^2 k \tag{1.6}$$

uz uvjete:

$$y_0 = 0,\ y_n = B. \tag{1.7}$$

Kako smo se sveli na konačnodimenzionalan slučaj, nužan uvjet za ispunjavanje (1.6) *dobivamo izjednačavanjem parcijalne derivacije od* (1.6) *po svakom* y_i *s nulom. Time dobivamo*

$$(y_i - y_{i-1})/k = (y_{i+1} - y_i)/k,\ \ i = 1, \ldots, n-1, \tag{1.8}$$

odnosno, sukcesivne razlike su jednake:

$$y_i - y_{i-1} = y_{i+1} - y_i,\ \ i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.9}$$

Dakle, promjena količine inventara (stopa proizvodnje) ista je u svakom intervalu duljine k, što sugerira da je rast količine inventara linearan. Preciznije, iz (1.7) *i* (1.9) *slijedi*

$y_i = i\frac{B}{n}, i = 0, 1 \ldots n$. *Time smo za rješenje dobili rastući niz, što je u skladu s uvjetom* $x' \geq 0$ *(vidi* (1.5)*).*

Formalno, izraz (1.4) *dobije se iz* (1.6) *ako pustimo* $k \to 0$ *(ili ekvivalentno* $n \to 0$*). Račun za diskretni slučaj daje naslutiti kako rješenje analognog problema u neprekidnom vremenu također uključuje proizvodnju s konstantnom stopom rasta i linearan porast količine inventara, odnosno sljedeće rješenje:*

$$x(t) = tB/T, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.10}$$

Za ovo rješenje vrijedi uvjet $x'(t) \geq 0$ *iz* (1.5) *budući da je* $x'(t) = B/T \geq 0$*, kao i rubni uvjeti. Potrebno je dokazati da ne postoji drugo rješenje koje zadovoljava navedene uvjete, a uz to omogućava manji ukupni trošak za tvrtku.*

Pretpostavimo da je z *funkcija koja zadovoljava* $z(0) = 0, z(T) = B$ *te definirajmo*

$$h(t) = z(t) - x(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.11}$$

kao razliku između usporedne funkcije z *i kandidata za rješenje* $x(t) = tB/T$ *za* $0 \leq t \leq T$*. Budući da* z *i* x *postižu iste vrijednosti u* $t = 0$ *i* $t = T$*, vrijedi*

$$h(0) = 0, \; h(T) = 0. \tag{1.12}$$

Iz definicije od h *vrijedi* $z(t) = tB/T + h(t)$, $0 \leq t \leq T$*, pa je* $z'(t) = B/T + h'(t)$ *i možemo izračunati razliku u ukupnom trošku tvrtke pri korištenju plana* z *i plana* x*.*

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\{[z'(t)]^2 - [x'(t)]^2\right\} dt &= \int_0^T \left\{[B/T + h'(t)]^2 - [B/T]^2\right\} dt \\
&= 2(B/T) \int_0^T h'(t)\, dt + \int_0^T [h'(t)]^2\, dt \\
&= 2(B/T)\, [h(T) - h(0)] + \int_0^T [h'(t)]^2\, dt \\
&= \int_0^T [h'(t)]^2\, dt \geq 0,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

pri čemu smo u trećoj jednakosti koristili Newton-Leibnizovu formulu, a u posljednjoj svojstvo (1.12).

Dakle, možemo zaključiti kako bi za promatranu tvrtku bilo koji plan proizvodnje donosio jednak ili veći ukupni trošak od plana $x(t) = tB/T$, $0 \leq t \leq T$*. Dakle, taj je plan proizvodnje optimalan. Štoviše, iz* (1.13) *nije teško vidjeti da je* x *jedinstveni optimalni plan među dovoljno glatkim (barem klase* C^1*) planovima. Naime, ako je* z *optimalan plan,* *iz* $\int_0^T (z'(t))^2 dt = \int_0^T (x'(t))^2 dt$ *i* (1.13) *slijedi* $\int_0^T (h'(t))^2 dt = 0$. *Budući da smo pretpostavili da je* z *barem klase* C^1, h' *je neprekidna, onda iz prethodnoga slijedi* $h' = 0$, *tj.* $z = x + c$, *za neku realnu konstantu* $c \in \mathbb{R}$. *Iz rubnih uvjeta nužno slijedi* $c = 0$, *tj.* $x = z$.

U nastavku rada upoznat ćemo se s elegantijim načinom pristupa ovakvom i sličnim problemima.

1.2 Euler-Lagrangeova jednadžba

Kao što smo mogli naslutiti u motivacijskom primjeru, glavni objekt kojim ćemo se baviti bit će sljedeći funkcional:

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right)\, dt, \tag{1.14}$$

pri čemu je funkcija $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna u svoja 3 argumenta t, x i x', te neka još ima neprekidne parcijalne derivacije po navedenim argumentima. Funkcija x definirana je na intervalu $[a,b]$.

Zapišimo osnovni problem varijacijskog računa. Cilj je maksimizirati gore navedeni funkcional (1.14). Dakle, tražimo

$$max_x\ I(x) = max \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right)\, dt, \tag{1.15}$$

uz rubne uvjete:

$$x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = x_1. \tag{1.16}$$

Definicija 1.2.1. *Funkcija $x \in C^1([a,b])$ je dopustiva za gore definirani problem ako zadovoljava rubne uvjete* (1.16)*.*

Definicija 1.2.2. *Dopustiva funkcija $\bar{x}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je maksimizator funkcionala* (1.14) *ako za svaku drugu dopustivu funkciju $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vrijedi $I(\bar{x}) \geq I(x)$.*

Pretpostavimo da dopustiva funkcija $\bar{x}$ maksimizira funkcional (1.14). Prisjetimo se najprije konačnodimenzionalnog slučaja. Maksimizator $\bar{x}$ neke funckije $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je njezina stacionarna točka i zadovoljava $\nabla G(\bar{x}) = 0$. U ovom slučaju maksimizator problema definiranog s (1.15) i (1.16) zadovoljava sljedeće:

Teorem 1.2.3. *Ako je dopustiva funkcija $\bar{x}$ rješenje problema* (1.15)*, ona zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu:*

$$\frac{d}{dt}\left(F_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))\right) = F_x(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)),\ t_0 \leq t \leq t_1, \tag{1.17}$$

pri čemu su F_x i $F_{x'}$ parcijalne derivacije funkcije F po njenom drugom i trećem argumentu.

Dokaz. Neka je $\bar{x}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dopustiva funkcija koja maksimizira funkcional (1.14). Pretpostavimo da je $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neka druga dopustiva funkcija. Definiramo funkciju $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kao razliku između vrijednosti funkcija x i $\bar{x}$ u svakom t:

$$h(t) := x(t) - \bar{x}(t). \tag{1.18}$$

Budući da su x i $\bar{x}$ dopustive funkcije, odnosno zadovoljavaju rubne uvjete (1.16), za funkciju h vrijedi:

$$h(t_0) = h(t_1) = 0. \tag{1.19}$$

Za svaku realnu konstantu a, funkcija $y(t) = \bar{x}(t) + ah(t)$ će također biti dopustiva, jer je neprekidno derivabilna (kao linearna kombinacija neprekidno derivabilnih funkcija) i zadovoljava rubne uvjete (1.16) (jer je h na rubovima jednaka nuli).

Izračunajmo vrijednost funkcionala (1.14) u $y(t)$ uz fiksirane funkcije $\bar{x}$ i h. Dobivamo funkciju u parametru a:

$$\begin{aligned} g(a) &= \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, y(t), y'(t)\right) \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, \bar{x}(t) + ah(t), \bar{x}'(t) + ah'(t)\right) \, dt. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Budući da $\bar{x}$ maksimizira funkcional (1.14), funkcija g mora poprimiti maksimum u $a = 0$, što onda znači da mora vrijediti $g'(0) = 0$ (nužan uvjet za lokalni ekstrem realne funkcije realne varijable).

Primijenimo najprije lančano pravilo na podintegralni izraz u (1.20).

$$\frac{d}{da}\left(F(t, \bar{x}(t) + ah(t), \bar{x}'(t) + ah'(t))\right) = F_x h(t) + F_{x'} h'(t) \tag{1.21}$$

Pri tome su parcijalne derivacije funkcije F evaluirane u argumentima $(t, \bar{x}(t) + ah(t), \bar{x}'(t) + ah'(t))$. Primjenom Leibnizovog pravila za diferenciranje pod integralom, računamo $g'(a)$ i izražavamo rezultat za $a = 0$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} g'(0) = & \int_{t_0}^{t_1} \left[F_x(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))h(t) + F_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))h'(t)\right] \, dt \\ = & \ 0. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Napomena 1.2.4. *Izraz $F_x h + F_{x'} h'$ u formuli* (1.22) *nazivamo prvom varijacijom.*

Uvjet $g'(0) = 0$ nužno slijedi jer je po pretpostavci teorema $\bar{x}$ optimalno rješenje. Budući da je h proizvoljno odabrana dopustiva funkcija, desna strana jednadžbe (1.22) mora biti jednaka 0 za bilo koji izbor h.

Uz pretpostavku da je funkcija $t \mapsto F_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))$ neprekidno derivabilna, izraz (1.22) možemo prikazati u pogodnijoj formi primjenom parcijalne integracije. U tu svrhu, neka je za $\int udv = uv - \int vdu$, $F_{x'} = u$ i $h'(t)dt = dv$, odnosno:

$$\int_{t_0}^{t_1} F_{x'} h' dt = F_{x'} h|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h(t)(dF_{x'}/dt)\, dt. \tag{1.23}$$

Ako se prisjetimo (1.18), dobivamo:

$$\int_{t_0}^{t_1} [F_x(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) - dF_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))/dt]\, h(t)\, dt = 0. \tag{1.24}$$

Jednadžba (1.24) mora vrijediti ako $\bar{x}$ maksimizira (1.14) i to za svaku neprekidno derivabilnu funkciju h koja zadovoljava (1.18). Time, primjenom leme 1.2.5 (dane niže) konačno slijedi:

$$F_x(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) = dF_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))/dt, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{1.25}$$

□

Lema 1.2.5. *Neka je $g\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Ako vrijedi*

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t)h(t)\, dt = 0 \tag{1.26}$$

za svaku neprekidno derivabilnu funkciju $h\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava

$$h(t_0) = 0, h(t_1) = 0, \tag{1.27}$$

tada je $g(t) = 0$, za $t_0 \leq t \leq t_1$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $g(\bar{t}) > 0$ za neki $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ (analogno se dokazuje u slučaju $g(t) < 0$). Budući da je g neprekidna, postoji okolina točke $\bar{t}$ na kojoj je g strogo pozitivna. Označimo tu okolinu s $\langle a, b\rangle \subseteq [t_0, t_1]$ (dopuštamo $a = \bar{t}$ ili $b = \bar{t}$ ako je $\bar{t}$ rubna točka segmenta). Neka je funkcija h dana s

$$h(t) = \begin{cases} (t-a)^2(t-b)^2, & a \leq t \leq b, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Lako se provjeri da funkcija h zadovoljava (1.27) te da je neprekidno derivabilna. Provjerom pretpostavke (1.26) za ovako definiranu funkciju h dolazimo u kontradikciju čime je lema dokazana:

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t)h(t)\,dt = \int_a^b g(t)(t-a)(t-b)\,dt > 0.$$

□

Napomena 1.2.6. *U dokazu teorema 1.2.3. pretpostavili smo da postoji derivacija funkcije $t \mapsto F_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))$. Ta se pretpostavka može izbjeći prilagođavanjem leme 1.2.5. Preciznije, u tom slučaju bismo koristili naredne dvije leme, čiji se dokazi mogu naći u [4, odjeljak 1.3].*

Lema 1.2.7. *Neka je $g \in C([t_0, t_1])$. Ako vrijedi*

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t)h'(t)\,dt = 0 \tag{1.28}$$

za svaku neprekidno derivabilnu funkciju $h\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava

$$h(t_0) = 0, h(t_1) = 0, \tag{1.29}$$

tada je g konstantna funkcija na $[t_0, t_1]$.

Lema 1.2.8. *Neka su $g, f \in C([t_0, t_1])$. Ako vrijedi*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[g(t)h(t) + f(t)h'(t)\right]\,dt = 0 \tag{1.30}$$

za svaku neprekidno derivabilnu funkciju $h\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava

$$h(t_0) = 0, h(t_1) = 0, \tag{1.31}$$

tada je f diferencijabilna i $f'(t) = g(t)$ za $t_0 \le t \le t_1$.

Definicija 1.2.9. *Funkciju $\bar{x}$ koja rješava Euler-Lagrangeovu jednadžbu nazivamo ekstremalom.*

Sada se možemo vratiti na motivacijski primjer i pokazati rješenje primjenom teorema 1.2.3.

Primjer 1.2.10. *Prisjetimo se, tražimo plan proizvodnje i kumulacije inventara uz minimalni trošak:*

$$min \int_0^T \left[c_1(x'(t))^2 + c_2 x(t)\right]\,dt \tag{1.32}$$

uz uvjete:

$$x(0) = 0,\ x(T) = B,\ x'(t) \geq 0, \tag{1.33}$$

gdje su c_1 *i* c_2 *nenegativne konstante. Rješavanjem Euler-Lagrangeove jednadžbe doći ćemo do ekstremale i provjerom njene druge derivacije uvjeriti se da zaista minimizira ukupni trošak tvrtke. Pretpostavimo da optimalno rješenje zadovoljava* $x'(t) \geq 0$. *Izračunamo* $F_x = c_2$ *i* $F_{x'} = 2c_1x'$ *iz čega slijedi Euler-Lagrangeova jednadžba:*

$$2c_1x''(t) = c_2, \tag{1.34}$$

odnosno,

$$x''(t) = c_2/2c_1. \tag{1.35}$$

Integriranjem dobivamo:

$$x(t) = c_2t^2/4c_1 + k_1t + k_2. \tag{1.36}$$

Konstante k_1 *i* k_2 *dobijemo iz rubnih uvjeta:*

$$k_1 = B/T - c_2T/4c_1,\ k_2 = 0, \tag{1.37}$$

iz čega slijedi konačan oblik tražene ekstremale:

$$x(t) = c_2t(t-T)/4c_1 + Bt/T,\ \ 0 \leq t \leq T. \tag{1.38}$$

Zbog nenegativnosti konstanti c_1 *i* c_2*, iz Euler-Lagrangeove jednadžbe* (1.35) *odmah slijedi i* $x''(t) > 0$*, što znači da je* x' *rastuća funkcija. Vrijedit će* $x'(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$*, ako i samo ako* $x'(0) = k_1 \geq 0$*, odnosno ako i samo ako*

$$B \geq c_2T^2/4c_1. \tag{1.39}$$

Dakle, (1.38) *je jedini kandidat za optimalno rješenje u slučaju da je zahtjevana ukupna količina proizvodnje dovoljno velika u odnosu na raspoloživi vremenski period T, te ako je jedinična cijena skladištenja* c_2 *dovoljno mala u odnosu na jediničnu cijenu proizvodnje* c_1. *U slučaju da nije ispunjen uvjet* (1.39)*, početak prozvodnje se odgađa u optimalnom planu. Pokazati da je s* (1.38) *zaista dano optimalno rješenje odgađamo do idućeg odjeljka, gdje ćemo izvesti dovoljan uvjet uz koji je ekstremala i maksimizator funkcionala. Alternativno, optimalnost u ovom primjeru se može pokazati direktnim računom kao u Primjeru 1.1.1.*

1.3 Legendreov uvjet

Do sada smo utvrdili kako su ekstremale analogon stacionarnih točaka (odnosno rješenja jednadžbe $f'(\bar{x}) = 0$) u slučaju realne funkcije realne varijable. No, kao i u tom slučaju, taj uvjet nije dovoljan kako bi se utvrdilo da je $\bar{x}$ točka u kojoj navedena funkcija postiže maksimum. Ako dodatno stacionarna točka $\bar{x} \in \mathbb{R}$ zadovoljava $f''(\bar{x}) \leq 0$, tada je ona lokalni maksimum, a bit će i globalni maksimum uz neke dodatne uvjete na f.

Prisjetimo se funkcije g iz (1.20). Analogon druge derivacije funkcije je druga varijacija, koju dobijemo tako da dva puta deriviramo fukciju g i dobiveno evaluiramo u nuli. Prisjetimo se, $y = \bar{x}(t) + ah(t)$ (vidi dokaz teorema 1.2.3.). Sada imamo

$$\begin{aligned}
g''(a) &= \frac{d^2}{da^2}\left[\int_{t_0}^{t_1} [F(t, x, x')]\, dt\right] \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2}{\partial a^2} [F(t, x, x')]\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{\partial}{\partial a} F(t, x, x')\right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial a} [F_x h + F_{x'} h']\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} h\left[F_{xx} h + h' F_{xx'}\right] + h'\left[h F_{xx'} + h' F_{x'x'}\right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[h^2 F_{xx} + 2hh' F_{xx'} + h'^2 F_{x'x'}\right] dt.
\end{aligned}$$

Za $a = 0$ vrijedi $y = \bar{x}$, pa dobivamo:

$$g''(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[h^2 F_{xx}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) + 2hh' F_{xx'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) + (h')^2 F_{x'x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))\right] dt. \tag{1.40}$$

Naravno, gornje ima smisla samo u slučaju kada je F klase C^2.

Ako funkcija $\bar{x}$ maksimizira funkcional (1.14), nužno je da druga varijacija bude manja ili jednaka nuli, što će sigurno biti ispunjeno u slučaju da je F konkavna u (x, x'). Kako bismo se uvjerili, promotrimo izraz pod integralom u formuli (1.40) i uočimo kako je to zapravo kvadratna forma u h i h'. Naime,

$$h^2 F_{xx} + 2hh' F_{xx'} + (h')^2 F_{x'x'} = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xx'} \\ F_{xx'} & F_{x'x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ h' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ h' \end{bmatrix}$$

Dakle, dovoljan uvjet za $g'(0) \leq 0$ je dan s uvjetom da je za svaki $t \in [t_0, t_1]$ Hesseova matrica preslikavanja $(x, x') \mapsto F(t, x, x')$ negativno semi-definitna. Nadalje, za funkcije klase C^2, posljednje je ekvivalentno svojstvu da je za svaki $t \in [t_0, t_1]$ preslikavanje

$(x, x') \mapsto F(t, x, x')$ konkavno, tj. za svaki $t \in [t_0, t_1]$, $(x_1, x_1'), (x_2, x_2') \in \mathbb{R}^2$ i $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$F(t, \lambda x_1 + (1 - \lambda x_2), \lambda x_1' + (1 - \lambda) x_2') \geq \lambda F(t, x_1, x_1') + (1 - \lambda) F(t, x_2, x_2').$$

Teorem 1.3.1. *Ako je za svaki $t \in [t_0, t_1]$ funkcija $(x, x') \mapsto F(t, x, x')$ konkavna, svaka esktremala funkcionala* (1.14) *je i maksimizator funkcionala.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\bar{x}$ rješenje Euler-Lagrangeove jednadžbe za problem (1.15), x neka dopustiva funkcija te da je F konkavna u (x, x'). Radi jednostavnosti, uvodimo sljedeću notaciju:

$$F[y] = F(t, y(t), y'(t)). \tag{1.41}$$

Neka je još $h(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, odnosno $h'(t) = x'(t) - \bar{x}'(t)$.

Budući da je F konkavna, slijedi:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (F[x] - F[\bar{x}])\, dt &\leq \int_{t_0}^{t_1} \left[(x - \bar{x}) F_x[\bar{x}] + (x' - \bar{x}') F[\bar{x}] \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (h F_x[x] + h' F_{x'}[x])\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} h (F_x - dF_{x'}^{*}/dt)\, dt \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Nejednakost u prvom redu slijedi iz karakterizacije konkavnosti za C^1 funkcije (vidi [2, teorem 1.50]) i napomene 1.3.3. Zadnja jednakost je nula jer $\bar{x}$ po pretpostavci zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu, a predzadnja jednakost slijedi iz parcijalne integracije.

Iz (1.42) vidimo da niti jedna dopustiva funkcija x ne daje veću vijednost promatranog funkcionala, stoga možemo zaključiti kako $\bar{x}$ maksimizira funkcional (1.14) uz dane rubne uvjete. □

Teorem 1.3.2. *Funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ je konveksna ako i samo ako vrijedi $F(x) \geq F(y) + \nabla F(y) \cdot (x - y)$, za svaki $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

Napomena 1.3.3. *Teorem 1.3.2. možemo primijeniti i kako bismo dobili karakterizaciju konkavnosti funkcije F. Potrebno je uočiti da je F konkavna ako i samo ako je $-F$ konveksna i izraziti nejednakost iz teorema za funkciju $-F$, odakle slijedi prva nejednakost u* (1.42).

Napomena 1.3.4. *U slučaju kada se traži minimizator funkcionala* (1.14)*, u teoremu 1.3.1. potrebna je konkavnost funkcije $-F$ (odnosno konveksnost funkcije F).*

Primjer 1.3.5. *Vratimo se na motivacijski primjer i pokažimo korištenjem prethodnog teorema da je dobivena ekstremala* (1.38) *uz uvjet* (1.39) *uistinu i minimizator zadanog funkcionala. Prema prethodnoj napomeni, potrebno je samo pokazati da je $(x(t), x'(t)) \mapsto -c_1(x'(t))^2 - c_2x(t)$ konkavna. Pogledajmo u tu svrhu Hesseovu matricu tog preslikavanja:*

$$H = \begin{bmatrix} -2c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Budući da je matrica negativno semi-definitna, gornje preslikavanje je konkavno i spomenuta ekstremala je uistinu optimalno rješenje.

Teorem 1.3.1 daje dovoljan uvjet da ekstremala bude maksimizator. Sljedeći rezultat daje nužan uvjet (u slučaju dovoljno glatke podintegralne funkcije F).

Propozicija 1.3.6. *Neka je F klase C^3. Funkcija $\bar{x} \in C^2([t_0, t_1])$ koja maksimizira funkcional* (1.14) *mora zadovoljavati Euler-Lagrangeovu jednadžbu i sljedeću nejednakost:*

$$F_{x'x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) \leq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{1.43}$$

Napomena 1.3.7. *Uvjet* (1.43) *nazivamo Legendreov uvjet.*

Dokaz. Prisjetimo se funkcije g iz dokaza prethodnog teorema. Budući da je $\bar{x}$ maksimizator funkcionala (1.14), zaključujemo da funkcija g u točki 0 ima (lokalni) maksimum. Iz toga slijedi da je nužno $g'(0) = 0$ ($\bar{x}$ ekstremala) i

$$g''(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[F_{xx}h^2 + 2F_{xx'}hh' + F_{x'x'}(h')^2\right] dt \leq 0.$$

Promotrimo posebno srednji sumand pod integralom i primijenimo na njega parcijalnu integraciju. Uz $u = F_{xx'}$ i $dv = 2hh'dt$ dobivamo da vrijedi $du = (dF_{xx'}/dt)\, dt$ i $v = h^2$, iz čega zbog uvjeta $h(t_0) = 0$ i $h(t_1) = 0$ slijedi:

$$\int_{t_0}^{t_1} 2F_{xx'}hh'\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} h^2 \frac{d}{dt} F_{xx'}\, dt. \tag{1.44}$$

Uvrštavanjem dobivenog u prethodnu nejednakost dobivamo:

$$g''(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[(F_{xx} - dF_{xx'}/dt)\, h^2 + F_{x'x'}h'^2\right] dt \leq 0. \tag{1.45}$$

Sada možemo primjenom leme 1.3.8., dane nakon dokaza, doći do Legendreovog uvjeta. Naime, u skladu s lemom definiramo:

$$\begin{aligned} P(t) &= F_{x'x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)), \\ Q(t) &= F_{xx}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) - dF_{xx'}/dt\,(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)). \end{aligned}$$

P i Q su dobro definirane funkcije jedne realne varijable. Nadalje, kako je $\bar{x}$ klase C^2, a F klase C^3, očito su i P i Q barem neprekidne na $[t_0, t_1]$. Budući da je $\bar{x}$ fiksirana, parcijalne derivacije funkcije F su funkcije samo u argumentu t. Iz leme slijedi da nepozitivnost izraza (1.46) povlači da za svaki t iz $[t_0, t_1]$ mora vrijediti $P(t) \leq 0$, odnosno:

$$P(t) = F_{x'x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) \leq 0.$$

□

Lema 1.3.8. *Neka su P i Q neprekidne funkcije definirane na $[t_0, t_1]$ te neka je dan funkcional*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ P(t)\,[h'(t)]^2 + Q(t)\,[h(t)]^2 \right\} dt \tag{1.46}$$

definiran za sve neprekidno derivabilne funkcije h definirane na intervalu $[t_0, t_1]$ za koje vrijedi $h(t_0) = 0$ i $h(t_1) = 0$. Ako vrijedi da je (1.46) nepozitivan za sve takve funkcije h, tada nužno slijedi da je $P(t) \leq 0$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka za neke $s \in [t_0, t_1]$ i $b > 0$ vrijedi $P(s) = 2b > 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $s \in \langle t_0, t_1 \rangle$ (ako je $s = t_0$ ili $s = t_1$, po neprekidnosti funkcije P postoji $\bar{s} \in \langle t_0, t_1 \rangle$ s istim svojstvom). Budući da je P neprekidna, postoji interval oko s na kojem P postiže vrijednost veću od b, odnosno, postoji $c > 0$ takav da:

$$\begin{aligned} t_0 \leq s - c < s < s + c \leq t_1, \\ P(t) > b, \;\; s - c \leq t \leq s + c. \end{aligned}$$

Konstruirajući sljedeću funkciju za koju će (1.46) imati pozitivnu vrijednost dokazujemo lemu. Neka je $h \in C^2[t_0, t_1]$ definirana s:

$$h(t) = \begin{cases} \sin^2 \pi \frac{t-s}{c}, & \text{za } s - c \leq t \leq s + c \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada za $\Theta = \frac{\pi(t-s)}{c}$ vrijedi

$$h'(t) = \frac{\pi}{c} 2 \sin\Theta \cos\Theta = \frac{\pi}{c} \sin 2\Theta.$$

Ovako definirana funkcija h zadovoljava sve pretpostavke leme. Računamo:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[P(h')^2 + Qh^2\right] dt = \int_{s-c}^{s+c} P(\pi/c)^2 \sin^2 2\Theta \, dt + \int_{s-c}^{s+c} Q \sin^4 \Theta \, dt.$$

Budući da je $P(t) > b$ za $s - c \leq t \leq s + c$, dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_{s-c}^{s+c} P(\pi/c)^2 \sin^2 2\Theta \, dt &\geq b(\pi/c)^2 \int_{s-c}^{s+c} \sin^2\left(\frac{2\pi(b-s)}{c}\right) dt \\ &= (b\pi/2c) \int_{-2\pi}^{2\pi} \sin^2 u \, du \\ &= b\pi^2/c,\end{aligned}$$

pri čemu smo u integralu u drugom koraku koristili zamjenu varijabli $u = \frac{2\pi(t-s)}{c}$. Zbog toga što je Q neprekidna na segmentu $[s - c, s + c]$, postoji $M > 0$ takav da je $-M \leq Q(t) \leq M$ za $s - c \leq t \leq s + c$:

$$\int_{s-c}^{s+c} Q \sin^4 \Theta \, dt \geq \int_{s-c}^{s+c} -M \, dt = -2cM.$$

Iz prethodne dvije nejednadžbe dobivamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[P(h')^2 + Qh^2\right] dt \geq b\pi^2/c - 2cM.$$

Uočimo, ukoliko odaberemo dovoljno malen c takav da je $b\pi^2/2M > c^2$, vrijedi da je desna strana gornje nejednakosti pozitivna, čime je lema dokazana. □

Dakle, činjenica da F često neće biti konkavna u (x, x') neće nužno predstavljati problem pri maksimizaciji funkcionala (1.14). Bit će dovoljno da u ekstremali $\bar{x}$ bude lokalno konkavna u svojem argumentu x', odnosno konkavna kao funkcija od x'.

Poglavlje 2

Posebni slučajevi rubnih uvjeta

2.1 Slobodni horizontalno transverzalni uvjeti

Promotrimo sljedeći problem:

$$\begin{aligned} max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x'(t))\, dt, \\ x(t_0) = x_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pretpostavimo najprije da nam je poznat t_1, no ne i $x(t_1)$. Za razliku od osnovnog slučaja gdje nam je i ta vrijednost zadana, sada ne tražimo funkciju koja na optimalan način „spaja" dvije točke u ravnini, već onu neprekidnu funkciju koja spaja početnu točku i zadani vertikalni pravac.

Propozicija 2.1.1. *Funkcija $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ koja maksimizira problem* (2.1) *nužno zadovoljava uvjet $x(t_0) = x_0$, Euler-Lagrangeovu jednadžbu te uvjet:*

$$F_{x'}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1)) = 0. \tag{2.2}$$

Napomena 2.1.2. *Uvjet* (2.2) *iz prethodnog teorema nazivamo uvjet transverzalnosti.*

Dokaz. Neka je $\bar{x}$ optimalno rješenje problema (2.1). Promotrimo familiju dopustivih funkcija oblika $\bar{x} + ah$, gdje je h fiksirana neprekidno derivabilna funkcija na $[t_0, t_1]$ takva da $h(t_0) = 0$, a a realan parametar. Primijetimo da je $\bar{x} + ah$ dopustiva funkcija (klase je C^1 i zadovoljava rubni uvjet). Vrijednost od (2.1) tada ovisi o parametru a. Promotrimo već poznatu funkciju g u parametru a:

$$g(a) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, \bar{x}(t) + ah(t), \bar{x}'(t) + ah'(t)\right)\, dt \tag{2.3}$$

koja maksimum postiže u 0 budući da smo pretpostavili kako je $\bar{x}$ optimalno rješenje, odnosno vrijedi

$$g'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[F_x(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))h(t) + F_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))h'(t) \right] dt = 0. \tag{2.4}$$

Gornje vrijedi za sve funkcije $h \in C^1([t_0, t_1])$ takve da $h(t_0) = 0$. Posebno, gornje vrijedi za sve $h \in C^1([t_0, t_1])$ takve da $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Sada, kao u dokazu teorema 1.2.3 zaključujemo da je preslikavanje $t \mapsto F_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))$ klase C^1 i da vrijedi Euler-Lagrangeova jednadžba

$$F_x(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) = dF_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{2.5}$$

Vratimo se sada u relaciju (2.4) za proizvoljnu dopustivu funkciju h (tj. nije nužno $h(t_1) = 0$). Kako sada znamo da je $t \mapsto F_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))$ klase C^1, možemo primijeniti parcijalnu integraciju u drugom sumandu:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} F_{x'}h' \, dt &= F_{x'}h|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (hdF_{x'}/dt) \, dt \\ &= F_{x'}h|_{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (hdF_{x'}/dt) \, dt, \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdje $F_{x'}h|_{t_1}$ označava umnožak navedenih funkcija izračunat u $(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1))$. Uvrstimo dobiveno natrag u (2.4) i dobivamo:

$$F_{x'}h|_{t_1} = 0, \tag{2.7}$$

pri čemu smo iskoristili da $\bar{x}$ zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu. Budući da postoji dopustiva funkcija h za koju $h(t_1) \neq 0$ (npr. $h(t) = t - t_0$), iz gornjeg slijedi

$$F_{x'}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1)) = 0, \tag{2.8}$$

odnosno, mora vrijediti uvjet transverzalnosti. □

Pretpostavimo sada da nam je u problemu (2.1) nepoznat i t_1. Tada optimalno rješenje zadovoljava sljedeće:

Propozicija 2.1.3. *Ako je $\bar{x} \in C^1([t_0, t_1])$ optimalno rješenje problema* (2.1) *pri čemu t_1 i $x(t_1)$ nisu određeni, tada $\bar{x}$ nužno zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu te uvjete transverzalnosti*

$$\begin{aligned} F_{x'}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1)) &= 0, \\ F(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1)) &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dokaz. Neka su $\bar{x}$ i t_1 optimalni te x neka dopustiva funkcija, definirana na ne nužno istom intervalu kao $\bar{x}$. Recimo da je x definirana na intervalu $[t_0, t_1 + \delta t_1]$, gdje je δt_1 mali broj neodređenog predznaka. Znamo da su $\bar{x}$ i x obje neprekidno derivabilne funkcije i zadovoljavaju početni uvjet, $\bar{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$. Budući da im domene nisu nužno identične, ovisno o predznaku δt_1, jednu od funkcija možemo proširiti na domenu druge. Primjerice, u slučaju da vrijedi $\delta t_1 > 0$, funkciju $\bar{x}$ proširujemo tako da bude definirana na cijelom intervalu $[t_0, t_1 + \delta t_1]$. To možemo učiniti tako da na $[t_1, t_1 + \delta t_1]$ $\bar{x}$ nastavlja po svojoj tangenti u t_1:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(t_1) + \bar{x}'(t_1)(t - t_1), \quad t_1 \leq t \leq t_1 + \delta t_1. \tag{2.10}$$

Dakle, u ostatku dokaza bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da vrijedi $\delta t_1 \geq 0$. Definirajmo još funkciju $h\colon [t_0, t_1 + \delta t_1] \to \mathbb{R}$ kao razliku funkcije x i proširene funkcije $\bar{x}$:

$$x(t) = \bar{x}(t) + h(t). \tag{2.11}$$

Zbog početnog uvjeta koji funkcije x i $\bar{x}$ zadovoljavaju, vrijedi $h(t_0) = 0$. Definirajmo funkciju g kao i prije:

$$g(a) = \int_{t_0}^{t_1 + a\delta t_1} F\left(t, \bar{x}(t) + ah(t), \bar{x}'(t) + ah'(t)\right) dt. \tag{2.12}$$

Budući da je po pretpostavci $\bar{x}$ optimalno rješenje početnog problema, mora vrijediti $g'(0) = 0$. Primjenom formule za deriviranje funkcija zadanih integralom (vidi Teorem 11.1 i pripadni korolar u [3]) dobivamo:

$$g'(0) = F(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1))\, \delta t_1 + \int_{t_0}^{t_1} (F_x h + F_{x'} h')\, dt = 0. \tag{2.13}$$

S obzirom da imamo slobodu izbora funkcije x, pretpostavimo najprije da je $\delta t_1 = 0$. Time smo dobili identičnu situaciju relaciji (2.4) iz dokaza prethodne propozicije. Dakle, dobivamo i isti rezultat. Preostalo je evaluirati relaciju $F(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1))\delta t_1 = 0$. Budući da je δt_1 proizvoljan, odnosno nije općenitno jednak 0, iz gornjeg nužno slijedi $F(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1)) = 0$, što je posljednji uvjet koji smo trebali izvesti. □

Napomena 2.1.4. *Ako je u problemu* (2.1) *krajnji uvjet određen preko neke derivabilne funkcije, odnosno* $R(t_1) = x_1$*, može se pokazati (ako uočimo da vrijedi* $R'(t_1) = \delta x_1 / \delta t_1$*), da optimalno rješenje, uz Euler-Lagrangeovu jednadžbu, mora zadovoljavati još sljedeći uvjet:*

$$\left(F + (R' - x')F_{x'}\right)\big|_{t_1} = 0. \tag{2.14}$$

Naime, parcijalnom integracijom drugog sumanda u (2.13) *uz primjenu* $h(t_0) = 0$ *dobije se*

$$\begin{aligned} g'(0) &= F(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1))\,\delta t_1 + F_{x'}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1))h(t_1) \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} (F_x(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) - dF_{x'}/dt(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)))\,dt = 0. \end{aligned}$$

Neka je δx_1 *razlika između vrijednosti funkcija* x *i* $\bar{x}$ *na njima pripadnim krajnjim rubovima, dakle:*

$$\delta x_1 = x(t_1 + \delta t_1) - \bar{x}(t_1).$$

Ako $x(t_1 + \delta t_1)$ *aproksimiramo pravcem s odsječkom na y-osi* $x(t_1)$ *i nagibom* $\bar{x}(t_1)$ *, dobijemo da apsoksimativno vrijedi:*

$$\begin{aligned} \delta x_1 &\approx x(t_1) - \bar{x}(t_1) + \bar{x}(t_1)\delta t_1 \\ &= h(t_1) + \bar{x}/(t_1)\delta(t_1) \end{aligned}$$

što možemo preurediti do

$$h(t_1) \approx \delta x_1 - \bar{x}'(t_1)\delta t_1.$$

Nakon uvrštavanja u izraz za $g'(0)$ *dobijemo prvu varijaciju od* (2.1)*:*

$$\int_{t_0}^{t_1} (F_x - dF_{x'}/dt)h\,dt + F_{x'}|_{t_1}\delta x_1 + (F - x'F_{x'})|_{t_1}\delta t_1 = 0.$$

Budući da je moguće da funkcija x *ima isto definiranu domenu kao i* $\bar{x}$*, odnosno da je* $\delta t_1 = 0$*, a shodno tome i* $\delta x_1 = 0$*, sljedeće mora vrijediti za sve dopustive funkcije* h *takve da* $h(t_0) = h(t_1) = 0$*:*

$$\int_{t_0}^{t_1} (F_x - dF_{x'}/dt)h\,dt = 0.$$

Dakle, nužno je da je zadovoljena Euler-Lagrangeova jednadžba:

$$F_x - dF_{x'}/dt = 0.$$

Ako sada to saznanje primijenimo na gore dobivenu prvu varijaciju, dobivamo:

$$F_{x'}|_{t_1}\delta x_1 + (F - x'F_{x'})|_{t_1}\delta t_1 = 0.$$

Uvrstimo li u zadnju jednakost $R'(t_1) = \delta x_1/\delta t_1$*, slijedi upravo tvrdnja napomene.*

Napomena 2.1.5. *Vrijednost koju želimo maksimizirati može ovisiti i o krajnjoj točki* (t_1, x_1)*, primjerice, ako nagrada za obavljanje zadatka može ovisiti o brzini kojom je on odrađen. U tom slučaju cilj nam je maksimizirati*

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')\,dt + G(t_1, x_1) \tag{2.15}$$

uz zadan početni uvjet

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.16}$$

Neka su $\bar{x}$ *i* x *kao u dokazu prethodne propozicije,* $\bar{x}$ *optimalno rješenje na isti način prošireno na* $[t_1, t_1 + \delta t_1]$*, te* h *dopustiva funkcija definirana s*

$$h(t) = x(t) + \bar{x}(t), \quad t_0 \leq t \leq max\,\{t_1, t_1 + \delta t_1\}\,. \tag{2.17}$$

Izrazimo vrijednost funkcionala (2.15) *u funkciji* $\bar{x} + ah$ *na* $[t_0, t_1 + \delta t_1]$.

$$\begin{aligned} g(a) = &\int_{t_0}^{t_1 + a\delta t_1} F\left(t, \bar{x}(t) + ah(t), \bar{x}'(t) + ah'(t)\right)\,dt \\ &+ G(t_1 + a\delta t_1, x_1 + a\delta x_1). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Budući da je $\bar{x}$ *optimalno rješenje, Leibnizovo pravilo daje*

$$g'(0) = \int_{t_0}^{t_1} (F_x h + F_{x'} h')\,dt + (F\delta t_1 + G_t \delta t_1 + G_x \delta x_1)|_{t_1} = 0. \tag{2.19}$$

Parcijalna integracija i uvjet $h(t_0) = 0$ *daju*

$$\int_{t_0}^{t_1} (F_x - dF_{x'}/dt)h\,dt + (F_{x'} h + F\delta t_1 + G_t \delta t_1 + G_x \delta x_1)|_{t_1} = 0. \tag{2.20}$$

Zadnja jednakost mora vrijediti za svaku dopustivu funkciju h*, posebno za onu koja ima istu domenu kao* $\bar{x}$*, odnosno onu za koju* $\delta t_1 = \delta x_1 = h(t_1) = 0$*, iz čega slijedi da* $\bar{x}$ *mora zadovoljavati Euler-Lagrangeovu jednadžbu za* $t_0 \leq t \leq t_1$*. Ta činjenica i aproksimacija* $h(t_1) \approx \delta x_1 - \bar{x}'(t_1)\delta t_1$ *daju:*

$$(F - \bar{x}' F_{x'} + G_t)\,\delta t_1 + (F_{x'} + G_x)\,\delta x_1 = 0. \tag{2.21}$$

Iz (2.21) *lako možemo dobiti uvjete transverzalnosti za promatrani problem. U slučaju da nije dan* t_1*, ali* x_1 *jest zadan, onda je* $\delta x_1 = 0$*, a* δt_1 *može biti bilo koji broj, stoga mora vrijediti*

$$(F - \bar{x}' F_{x'} + G_t)\,|_{t_1} = 0. \tag{2.22}$$

Ako je pak zadan t_1*, a vrijednost* $x(t_1)$ *je slobodna,* δx_1 *može biti bilo koji broj pa mora vrijediti*

$$(F_{x'} + G_x)|_{t_1} = 0. \tag{2.23}$$

Ilustrirajmo vezu ovog problema s onim iz prethodne napomene. Ako želimo da vrijedi $R(t_1) = x_1$, ima smisla za funkciju G uzeti $G(t, x) = -M(R(t) - x)^2$, za veliki broj $M > 0$. Njen maksimum se očito postiže bar za $x = R(t)$, a broj M služi da još jače penalizira ako se ne nalazimo u tom maksimumu. Iz (2.33) slijedi $F_{x'}(t_1, \bar{x}(t_1), \bar{x}'(t_1)) = -2M(R(t_1) - x_1)$. S druge strane je $G_t(t_1, x_1) = -2M(R(t_1) - x_1)R'(t_1) = F_{x'}|_{t_1} R'(t_1)$, pa uvrštavanjem u (2.22) dobivamo upravo (2.14).

Napomena 2.1.6. *Za potrebe sljedećeg izvoda trebat će nam pojam prve varijacije funkcionala zadanog integralom. Označimo $J = \max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')\, dt$ i pretpostavimo da tražimo $\max (J)$ uz zadan početni uvjet $x(t_0) = x_0$. Neka je $\bar{x}$ traženi maksimizator i F^* vrijednost funkcije F u optimalnom rješenju $\bar{x}$, tj. $F^* = F(\cdot, \bar{x}(\cdot), \bar{x}'(\cdot))$, te J^* pripadna maksimalna vrijednost promatranog funkcionala, dakle tražena maksimalna vrijednost. Neka je još x neka druga dopustiva funkcija koja je „blizu” $\bar{x}$ zadana na $[t_0, t_1 + \delta t_1]$ i usporedimo vrijednost J^* i J.*

$$\begin{aligned} J - J^* &= \int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} F(t, x, x')\, dt - \int_{t_0}^{t_1} F(t, \bar{x}, \bar{x}')\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} F(t, x, x')\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[F(t, x, x') - F(t, \bar{x}, \bar{x}')\right]\, dt. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Budući da je δt_1 mala vrijednost i x „blizu” $\bar{x}$, prvi integral nakon druge jednakosti u (2.24) *možemo aproksimirati s:*

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} F(t_1, x(t_1), x'(t_1))\, dt = F^*(t_1)\delta t_1, \tag{2.25}$$

pri čemu smo koristili da je x „blizu” $\bar{x}$.

Integrand drugog sumanda u (2.24) *možemo razviti po Taylorovom teoremu oko točke $(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))$, uz $h(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, iz čega slijedi*

$$J - J^* \approx F^*(t_1)\, \delta t_1 + \int_{t_0}^{t_1} \left(hF_x^* + h'F_{x'}^*\right)\, dt, \tag{2.26}$$

gdje smo zanemarili članove višeg reda po h. Sada od linearnih članova slijedi prva varijacija od J:

$$\delta J = F^*(t_1)\, \delta t_1 + \int_{t_0}^{t_1} \left(hF_x^* + h'F_{x'}^*\right)\, dt \tag{2.27}$$

(usporedi s (2.13)*). U slučaju da nam nisu zadane rubne koordinate (t_0, x_0) ili (t_1, x_1), prva varijacija (nakon parcijalne integracije) glasi (radi jednostavnost izostavlja se *):*

$$
\begin{aligned}
\delta J = (F - x' F_{x'})|_{t_1} \delta t_1 + F_{x'}|_{t_1} \delta x_1 - (F - x' F_{x'})|_{t_0} \delta t_0 \\
- F_{x'}|_{t_0} \delta x_0 + \int_{t_0}^{t_1} (F_x - dF_{x'}/dt) h \, dt.
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Primjer 2.1.7. *Pogledajmo radi naredne napomene sljedeću funkciju. Neka je F zadana s $F(t, x, x') = ((x')^2 - 1)^2$. Očito uvijek vrijedi $\int_0^1 F(t, x(t), x'(t))\, dt \geq 0$, a za $\bar{x} = 1$ je vrijednost jedanaka 0. Može se pokazati da se vrijednost 0 ne može postići u prostoru C^1 (pogledati [2], poglavlje 2.2).*

Napomena 2.1.8. *Svi prethodni rezultati izvedeni su za glatka (barem C^1) rješenja, ali se i u slučajevima po dijelovima glatkih funkcija može pokazati da će, uz Euler-Lagrangeovu jednadžbu, nužno vrijediti sljedeći uvjeti transverzalnosti koji su slične strukture kao u prethodnim napomenama. Neka je t_2 točka u kojoj takva funkcija nije derivabilna. Može se pokazati da optimalno rješenje $\bar{x}$ u toj i svakoj takvoj točki mora zadovoljavati:*

$$
\begin{aligned}
F_{x'}|_{t_2^-} &= F_{x'}|_{t_2^+} \\
(F - \bar{x}' F_{x'})|_{t_2^-} &= (F - \bar{x}' F_{x'})|_{t_2^+}
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

2.2 Dodatno ograničenje na dopustivu funkciju

Pretpostavimo da želimo pronaći maksimum od

$$
\int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x'(t))\, dt \tag{2.30}
$$

uz rubne uvjete

$$
x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{2.31}
$$

te dodatni uvjet na dopustivu funkciju x

$$
R(t) \geq x(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \tag{2.32}
$$

pri čemu je R neka neprekidna funkcija definirana na $[t_0, t_1]$. Može se dogoditi da rješenje $\bar{x}$ pripadne Euler-Lagrangeove jednadžbe koje zadovoljava pripadni Lagrangeov uvjet zadovoljava i uvjet (2.32) te je u tome slučaju problem riješen. No, isto tako je moguće da na nekom intervalu $\bar{x}$ ne zadovoljava dodatni uvjet (2.32). Moguća ideja za rješenje je postaviti na takvim intervalima $\bar{x}(t) = R(t)$, no to nije nužno optimalno, što ćemo i pokazati.

Pretpostavimo da ekstremala zadovoljava sve dane uvjete na intervalu $[t_0, t_2]$ te da za uvjet (2.32) vrijedi jednakost na intervalu $[t_2, t_3]$, pri čemu vrijedi $t_0 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_1$.

U tom slučaju su rubni uvjeti za Euler-Lagrangeovu jednadžbu na intervalu $[t_0, t_2]$ dani s $x(t_0) = x_0$ i $x(t_2) = R(t_2) =: x_2$ te optimalna putanja nastavlja od t_2 do t_3 prateći $x(t) = R(t)$, a na intervalu $[t_3, t_1]$ analogno kao na početnom intervalu, rubni uvjeti za Euler-Lagrangeovu jednandžbu dani su s $x(t_3) = R(t_3) =: x_3$ te $x(t_1) = x_1$.

Potrebno je odrediti t_2 i t_3. Prikazat ćemo postupak za t_2, a postupak za t_3 slijedi analogno.

Prikažimo najprije (2.30) kao sumu:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x'(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_2} F(t, x(t), x'(t))\, dt + \int_{t_2}^{t_1} F(t, x(t), x'(t))\, dt. \tag{2.33}$$

Ako je $\bar{x}$ optimalno rješenje za (2.30), onda je $\bar{x}$ optimalno rješenje za potprobleme zadane integralima iz gornje sume s rubnim uvjetima određenim analogno kao u gornjem komentaru (u suprotnom bi se ukupna suma mogla povećati korištenjem „optimalnijeg" rješenja za neki od 2 potproblema). Odnosno, restrikcija funkcije $\bar{x}$ na $[t_0, t_2]$ optimalna je za

$$\begin{gathered} \int_{t_0}^{t_2} F(t, x(t), x'(t))\, dt \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_2) = x_2,\ R(t) \geq x(t), \end{gathered} \tag{2.34}$$

dok je njena restrikcija na $[t_2, t_1]$ optimalna za

$$\begin{gathered} \int_{t_2}^{t_1} F(t, x(t), x'(t))\, dt \\ x(t_2) = x_2,\ x(t_1) = x_1,\ R(t) \geq x(t). \end{gathered} \tag{2.35}$$

Neka za optimalno rješenje $\bar{x}$ vrijedi $\bar{x}(t) < R(t)$, za $t < t_2$, a u točki t_2 postiže se jednakost, odnosno u točki t_2 x dostiže R.

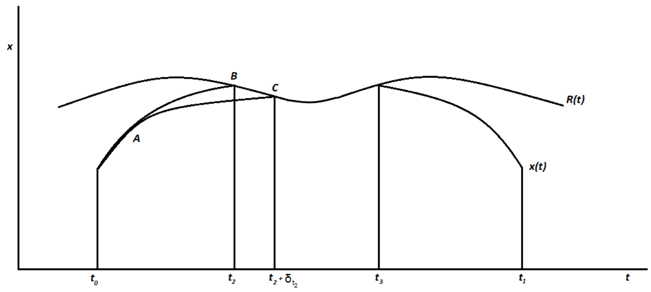
Pretpostavimo sad da se ipak jednakost postiže u točki $t_2 + \delta t_2$ i pogledajmo koje promjene slijede iz toga.

Na skici 2.1 vidimo da Euler-Lagrangeova jednadžba mora vrijediti do točke C, umjesto do točke B, što znači da se rubna točka t_2 u (2.30) mijenja u $t_2 + \delta t_2$ te od nje do t_3 vrijedi jednakost $R(t) = x(t)$.

Promjena također utječe na vrijednost (2.34) i (2.35).

Primijenimo (2.28) za t_0 i t_2. Integralni dio iznosi 0 budući da optimalno rješenje mora zadovoljavati Euler-Lagrangeovu jednadžbu. Početne koordinate nisu promijenjene, stoga vrijedi $\delta t_0 = 0$ i $\delta x_0 = 0$. Promjena u (2.34) postoji zbog varijabilnog desnog (konačnog) ruba, pa je promjena jednaka

$$F_{x'} \delta x_2 + (F - x' F_{x'}) \delta t_2. \tag{2.36}$$



Slika 2.1: Skica uz dokaz (preuzeto iz [4])

Zbog definicije točaka B i C, za δt_2 i δx_2 mora vrijediti

$$R'(t_2)\delta t_2 = \delta x_2, \tag{2.37}$$

što s prethodnim daje linearni dio promjene u (2.34) uz δt_2:

$$(F + F_{x'}(R' - x'))\delta t_2. \tag{2.38}$$

Mijenja se i vrijednost (2.35). Budući da put od B do C prati putanju funkcije R, promjena u (2.35) je iznosa

$$\int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} F(t, R(t), R'(t))\, dt \approx F(t_2, R(t_2), R'(t_2))\, \delta t_2. \tag{2.39}$$

Oduzimanjem (2.39) od (2.38) dobivamo konačan iznos promjene u (2.30):

$$[F(t, x, x') + F_{x'}(t, x, x')(R' - x') - F(t, R, R')]|_{t_2}\, \delta t_2. \tag{2.40}$$

Budući da δt_2 može biti bilo kojeg predznaka, u slučaju da nije moguće poboljšati rješenje, koeficijent koji ga množi u (2.40) mora iznositi 0, odnosno u t_2 mora vrijediti:

$$F(t_2, x_2, x'(t_2)) - F(t_2, x_2, R'(t_2)) + F_{x'}(t_2, x_2, x'(t_2))(R'(t_2) - x'(t_2)) = 0, \tag{2.41}$$

pri čemu je $x'(t_2)$ derivacija slijeva, odnosno stopa promjene ekstremale dok se približava t_2 i $R(t_2) = x_2$.

Optimalno rješenje $\bar{x}$ i t_2 moraju zadovoljavati jednakost (2.41). Fiksirajmo $\bar{x}(t_2)$ i t_2. U tom slučaju $F(t_2, \bar{x}(t_2), y) =: f(y)$ možemo promatrati kao funkciju jedne varijable y, čime dobivamo:

$$f(\bar{x}') - f(R') + f'(\bar{x}')(R' - \bar{x}') = 0, \tag{2.42}$$

pri čemu je skraćeno zapisano $\bar{x}' = \bar{x}'(t_2)$ i $R' = R'(t_2)$. Za potrebe nastavka uvodimo lemu koja je posljedica teorema srednje vrijednosti realne funkcije realne varijable.

Lema 2.2.1. *Neka je f dva puta neprekidno derivabilna realna funkcija realne varijable definirana na segmentu* $[a, b]$. *Ako vrijedi* $f(b) - f(a) = f'(a)(b - a)$*, tada je ili* $a = b$ *ili* $f''(r) = 0$ *za neki r takav da* $a < r < b$.

Dokaz. Za $a = b$, tvrdnja odmah slijedi. Pretpostavimo da vrijedi $a < b$. Tada po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji c takav da $a < c < b$ za koji vrijedi

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Ukoliko primijenimo pretpostavku leme, dobivamo:

$$\left[f'(a) - f'(c)\right](b - a) = 0.$$

Iz ovoga nužno slijedi $f'(a) = f'(c)$, pa primjenom Rolleovog teorema srednje vrijednosti za f' dobivamo da postoji $r \in \langle a, c\rangle$ takav da je $(f')'(r) = 0$, odnosno $f''(r) = 0$. Za $a > b$ tvrdnja slijedi analogno. □

Dakle, iz navedene leme slijedi da je ili $x' = R'$ ili $f''(r) = 0$ za neki r izmedu $x'(t_2)$ i $R'(t_2)$, odnosno, to znači da vrijedi jedno od:

(1) $F_{x'x'}(t_2, \bar{x}(t_2), r) = 0$ za neki r između $\bar{x}'(t_2)$ i $R'(t_2)$

(2) $R'(t_2) = \bar{x}'(t_2)$ gdje su t_2 i $\bar{x}$ optimalni.

Budući da je x' nagib ekstremale, a R' nagib funkcije ograničenja, ekstremala je tangenta funkcije ograničenja u svim točkama prijelaza ako je svugdje zadovoljeno $F_{x'x'} \neq 0$.

Dakle, za optimalno rješenje $\bar{x}$ na svakom intervalu gdje je $R(t) > \bar{x}(t)$ mora biti zadovoljena Euler-Lagrangeova jednadžba, a na ostalima $\bar{x}(t) = R(t)$. Rubni uvjeti koji određuju konstante integracije (za t_0 koja označava vrijeme prelaska iz prvog u drugi tip intervala) dani su s: $R(t_0) = \bar{x}(t_0)$ i $R'(t_0) = \bar{x}'(t_0)$ (uz uvjet $F_{x'x'} \neq 0$).

2.3 Autonomni problemi neograničeni odozgo i putevi najbržeg prilaska

Pretpostavimo da je zadan problem maksimizacije funkcionala sljedećeg oblika:

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-rt} F(x(t), x'(t))\, dt \tag{2.43}$$

uz zadan početni uvjet $x(0) = x_0$.

Napomena 2.3.1. *Za problem oblika* (1.14) *koji ne ovisi eksplicitno o t kažemo da je autonoman. No, u ekonomiji bi se i sam problem* (2.43) *smatrao autonomnim jer se ovisnost o vremenu t očitava samo u faktoru diskontiranja e^{-rt}.*

Inspiraciju za pronalaženje rješenja problema u kojem vrijeme nije odozgo ograničeno pronalazimo u činjenici da, budući da problem u okviru vremena ovisi samo o navedenom faktoru diskontiranja, ima smisla pretpostaviti kako rješenje x teži prema nekom stacionarnom stanju x_s, odnosno stanju za koje vrijedi $x' = x'' = 0$. Ukoliko podintegralnu funkciju označimo s G, odnosno $G(t, x(t), x'(t)) = e^{-rt}F(x(t), x'(t))$, analogno kao prije može se pokazati da vrijedi Euler-Lagrangeova jednadžba. Iz $G_{x'} = e^{-rt}F_{x'}$, $G_x = e^{-rt}F_x$ i $\frac{d}{dt}G_{x'} = -re^{-rt}F_{x'} + e^{-rt}x'F_{x'x} + e^{-rt}x''F_{x'x'}$ uvrštavanjem u $\frac{d}{dt}G_{x'} = G_x$ dobivamo:

$$F_x = -rF_{x'} + F_{x'x}x' + F_{x'x'}x''. \tag{2.44}$$

Budući da su prva i druga derivacija stacionarnog stanja konstante jednake nuli, slijedi da ono zadovoljava

$$F_x(x_s, 0) + rF_{x'}(x_s, 0) = 0. \tag{2.45}$$

Za krajnji rubni uvjet u problemu (2.43) zato se uglavnom uzima

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_s. \tag{2.46}$$

Pretpostavimo sada da je problem specifičnog oblika

$$\int_{0}^{\infty} e^{-rt} \left[M(x) + N(x)x'\right] dt \tag{2.47}$$

uz uvjete

$$x(0) = x_0,\ A(x) \le x' \le B(x). \tag{2.48}$$

U tom slučaju Euler-Lagrangeova jednadžba glasi

$$e^{-rt}(M' + N'x') = \frac{d}{dt}(e^{-rt}N) = -re^{-rt}N + e^{-rt}N'x'. \tag{2.49}$$

Nakon sređivanja dobivamo:

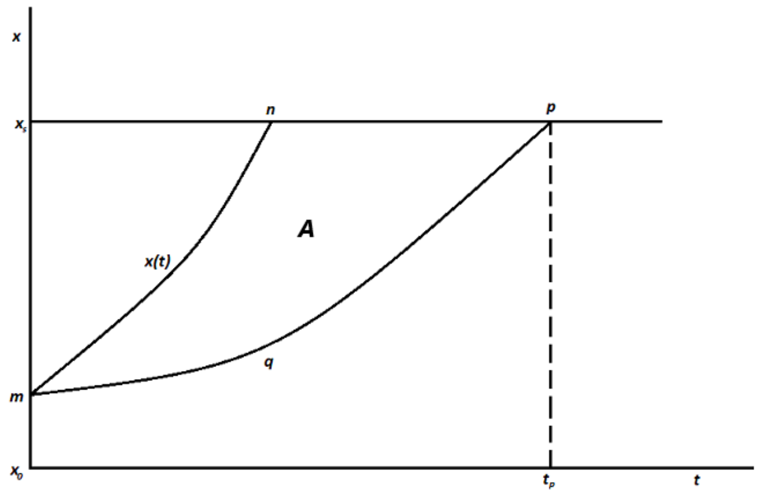
$$M'(x) + rN(x) = 0, \tag{2.50}$$

što nije diferencijalna jednadžba, već obična algebarska jednadžba u varijabli x. Pretpostavimo da ona ima jedinstveno rješenje x_s. To je onda kandidat za maksimum. No, ono je dopustivo samo ako $x_s = x_0$. Optimalno bi rješenje u tom slučaju bilo „što brže” doći iz x_0 u x_s te tamo ostati. Takvo rješenje nazivamo *putem najbržeg prilaska*, odnosno MRAP (iz eng. *most rapid approach path*). Optimalnost takvog rješenja može se dokazati. Zapišimo najprije (2.47) kao krivuljni integral.

$$\int_0^\infty e^{-rt}\left[M(x) + N(x)x'\right] dt = \int_C e^{-rt}M\,dt + e^{-rt}N dx \tag{2.51}$$

pri čemu je C krivulja $x = x(t)$, $t \geq 0$.

Neka je x funkcija koja „najbrže” dolazi do x_s te neka je y neka druga dopustiva funkcija (koja malo „sporije” dolazi do x_s, u vremenu koje ćemo označiti s t_p).



Slika 2.2: Skica uz dokaz (preuzeto iz [4])

Dakle, za $t > t_p$, vrijedi $x(t) = y(t)$. Stoga je dovoljno pokazati da na intervalu $[0, t_p]$ funkcija x daje veću vrijednost od y u integralu (2.47), odnosno da je pozitivan sljedeći izraz:

$$\int_0^{t_p} e^{-rt}\left[M(x) + N(x)x'\right] dt - \int_0^{t_p} e^{-rt}\left[M(y) + N(y)y'\right] dt. \tag{2.52}$$

Svaki od ovih integrala opet možemo prikazati kao krivuljni, pa time (2.52) postaje

$$\int_{mnp} e^{-rt}M\,dt + e^{-rt}Ndx - \int_{mqp} e^{-rt}M\,dt + e^{-rt}Ndx, \tag{2.53}$$

pri čemu je s *mnp* označen idealni put rješenja x, a sa *mqp* put od y (vidi sliku 2.2). Obrnemo li orijentaciju optimalne putanje (prvi integral u gornjoj formuli), slijedi:

$$\begin{aligned} &-\int_{pnm} e^{-rt}M\,dt + e^{-rt}Ndx - \int_{mqp} e^{-rt}M\,dt + e^{-rt}Ndx \\ &= -\int_{pnmqp} e^{-rt}M\,dt + e^{-rt}Ndx. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dobili smo krivuljni integral po zatvorenoj krivulji orijentiranoj tako da je područje koje ona zatvara s lijeve strane krećući se po njoj zadanom orijentacijom (vidi sliku 2.2). Stoga, možemo na (2.51) primijeniti Greenov teorem i dobiti da je taj izraz jednak

$$\int_A\int e^{-rt}\left[M'(x) + rN(x)\right]\,dxdt, \tag{2.55}$$

pri čemu A označava dio ravnine omeđene krivuljom *mqpnm*.

Ako definiramo $S(x) = \int_{x_0}^{x} N(y)\,dy$, tada je $N(x) = S'(x)$, pa (2.47) možemo zapisati kao

$$\int_0^\infty e^{-rt}\left[M(x) + S'(x)x'\right]\,dt. \tag{2.56}$$

Parcijalna integracija uz $u = e^{-rt}$ i $dv = S'(x)x'dt$ daje

$$\int_0^\infty e^{-rt}\left[M(x) + rS(x)\right]\,dt, \tag{2.57}$$

pri čemu smo koristili da je $S(x(0)) = S(x_0) = 0$ i činjenicu da $\lim_{t\to\infty} e^{-rt} = 0$.

Prisjetimo se da smo x_s zadali kao jedinstveno rješenje jednadžbe (2.50), odnosno $x_s$je jedinstvena vrijednost koja maksimizira $M(x) + rS(x)$ i zadovoljava $M'(x) + rS'(x) = M'(x) + rN(x) = 0$.

Ako pretpostavimo da vrijedi

$$\begin{aligned} M'(x) + rN(x) > 0,\ \ x < x_s \\ M'(x) + rN(x) < 0,\ \ x > x_s, \end{aligned} \tag{2.58}$$

onda je integral (2.55) pozitivan te je pozitivan i izraz (2.52).

U slučaju da (2.50) ima više rješenja, tada je optimalno rješenje MRAP do nekog od lokalnih maksimuma od $M(x) + rS(x)$, a njegov odabir ovisit će o usporedbi vrijednosti ovisno o odabiru lokalnog maksimuma i početnom stanju x_0.

Poglavlje 3

Odabrane primjene varijacijskog računa u ekonomiji

3.1 Optimalna potrošnja pojedinca

Primjer 3.1.1. *(a) Promotrimo situaciju u kojoj želimo za pojedinca odrediti stopu potrošnje $C(t)$ za svaki trenutak t koja će maksimizirati njegovu diskontiranu korisnost u periodu poznate duljine T. Korisnost od potrošnje $U(C(t))$ za svaki trenutak t je poznata rastuća i konkavna funkcija, dakle vrijedi $U' > 0$ i $U'' < 0$. Buduća korisnost diskontirana je po stopi r.*
Dakle, cilj nam je pronaći

$$max \int_0^T e^{-rt} U(C(t))\, dt. \tag{3.1}$$

Ovdje smo ograničeni tokom novca. Primanja pojedinca sastoje se od vanjski određene nadnice $w(t)$ i primanja od kamata iK od svoje kapitalne imovine $K(t)$ koja se može dati u posudbu ili posuditi po stopi i (u tom je slučaju $K < 0$) te se može kupiti ili prodati u svakom trenutku t. Dakle, ukupni prihod od kamata i nadnica razlaže se na potrošnju i investicije:

$$iK(t) + w(t) = C(t) + K'(t). \tag{3.2}$$

Pretpostavljamo da su nam dani krajnji uvjeti za kapitalna držanja:

$$K(0) = K_0,\ \ K(T) = K_T. \tag{3.3}$$

Primijetimo kako se sada ovaj problem može svesti na problem varijacijskog računa u jednoj funkciji, $K(t)$. Uvrštavanjem jednadžbe (3.2) u početni problem (3.1) dobivamo sljedeći izraz:

$$max \int_0^T e^{-rt} U(iK(t) + w(t) - K'(t))\, dt. \tag{3.4}$$

Kako bismo problem riješili korištenjem Euler-Lagrangeove jednadžbe, označimo s F funkciju pod integralom. Optimalan plan potrošnje mora zadovoljavati poznati izraz:

$$F_K = \frac{dF_{K'}}{dt}. \tag{3.5}$$

Nakon što izračunamo potrebne parcijalne derivacije funkcije F, dobivamo konačni oblik Euler-Lagrangeove jednadžbe:

$$\frac{d}{dt}\left(-e^{-rt}U^{'}(C(t))\right) = e^{-rt}U'(C(t))i. \tag{3.6}$$

U svrhu interpretacije, integrirajmo (3.6) *kroz mali vremenski period i preuredimo:*

$$e^{-rt}U^{'}(C(t)) = \int_t^{t+\Delta} e^{-rs}U^{'}(C(s))i\,ds + e^{-r(t+\Delta)}U^{'}(C(t+\Delta)). \tag{3.7}$$

Iz formule (3.7) *vidljivo je kako pojedinac ne može povećati korisnost od potrošnje promjenom vremena potrošnje. Lijeva strana izraza, odnosno granična diskontirana korisnost od potrošnje u trenutku t, mora biti jednaka desnoj, odnosno graničnoj korisnosti ostvarenom odgađanjem potrošnje do trenutka $t + \Delta$. Direktnim računom iz jednadžbe* (3.6) *dobivamo sljedeći pojednostavljeni izraz:*

$$\frac{-U^{''}C^{'}}{U^{'}} = i - r. \tag{3.8}$$

Budući da je po pretpostavci U rastuća konkavna funkcija, vrijedi $-U^{''}/U^{'} > 0$. Dakle, za optimalni plan potrošnje vrijedi $dC/dt > 0$ ako i samo ako $i > r$, odnosno raste u slučaju da je kamatna stopa i veća od stope diskontiranja r. Tada se strpljivom pojedincu isplati odreći dijela trenutne potrošnje i pustiti da kamata na financijsku imovinu poraste kako bi u budućnosti mogao imati koristi od veće potrošnje. Budući da nije poznat konkretni oblik funkcije korisnosti U, pretpostavimo primjerice da vrijedi $U(C) = \ln C$, $w(t) = 0$ za $0 \leq t \leq T$ te $K_T = 0$. Prilagodimo formulu (3.8) *novim pretpostavkama i dobivamo sljedeće:*

$$\frac{C^{'}}{C} = i - r. \tag{3.9}$$

Rješavanjem ove jednostavne diferencijalne jednadžbe dobivamo:

$$C(t) = C_0 e^{(i-r)t}. \tag{3.10}$$

Uvrstimo (3.10) *u* (3.2)*:*

$$K' - iK = -C = -C_0 e^{(i-r)t}. \tag{3.11}$$

Rješavanjem ove jednadžbe uz korištenje graničnih uvjeta $K(0) = K_0$ i $K(T) = 0$ dobivamo konačni oblik funkcije K:

$$K(t) = e^{it}K_0[1 - (1 - e^{-rt})/(1 - e^{-rT})]. \tag{3.12}$$

Na kraju iskoristimo dobiveno kako bismo dobili optimalan plan potrošnje za svaki trenutak t u zadanom periodu:

$$C(t) = rK_0 e^{(i-r)t}/(1 - e^{-rT}). \tag{3.13}$$

(b) Pogledajmo sada poopćenje primjera iz (a) u smislu da se ne ograničavamo na određeni vremenski period. Cilj je odrediti odnos funkcije koristnosti i potrošnje pojedinca. Životni vijek nam je nepoznat, ali pretpostavimo da je T neka gornja granica (primjerice 140 godina). Neka je $F(t)$ *vjerojatnost smrti do trenutka t te* $F^{'}(t)$ *pripadna funkcija gustoće. Po pretpostavci, za T vrijedi* $F(T) = 1$*. Vjerojatnost da će pojedinac doživjeti barem trenutak t, jednaka je* $1 - F(t)$ *odnosno* $\int_t^T F^{'}(s)\,ds$ *.*

Pretpostavimo također da pojedinac nema korist samo od potrošnje, već i od ostavštine za svoje nasljednike, što izražavamo kroz funkciju korisnosti od ostavštine, $W(K)$*, koja je neprekidno derivabilna, nenegativna i rastuća. Neka je još* $a(t)$ *diskontna stopa percepcije korisnosti ostavštine za pojedinca neodređenih svojstava, budući da u različitim periodima života on može davati veću ili manju važnost ostavljanju veće količine nasljedstva svojim potomcima.*

U slučaju smrti u trenutku t, korisnost cijeloga životnog vijeka sastojat će se od toka korisnosti od potrošnje do trenutka t diskontiranog po stopi r te od korisnosti od ostavštine diskontirane po spomenutoj stopi $a(t)$*. Dakle, cilj je pojedinca maksimizirati navedeno, odnosno:*

$$max \int_0^T F^{'}(t) \left[\int_0^t e^{-rs} U(C(s))\,ds + a(t)W(K(t)) \right] dt. \tag{3.14}$$

Navedeni problem podliježe ograničenju budžeta (3.2) *iz slučaja (a) te početnom uvjetu* $K(0) = K_0$*. U svrhu lakše interpretacije, primjenom parcijalne integracije (uz* $F^{'}\,dt = dv$*) na izraz* (3.14) *dobivamo sljedeće:*

$$max \int_0^T \left(e^{-rt} U(C(t))[1 - F(t)] + a(t)W(K(t))F^{'}(t) \right) dt. \tag{3.15}$$

Dakle, u slučaju da poživi bar do trenutka t (za što je vjerojatnost $1 - F(t)$*), dobiva korist od potrošnje* $U(C(t))$*, a u slučaju smrti u trenutku t (za što je vjerojatnost* $F^{'}(t)$*) dobiva i korist od ostavštine.*

Označimo s G podintegralnu funkciju u (3.15)*. U tom slučaju, Euler-Lagrangeova jednadžba glasi:*

$$G_K = \frac{dG_{K'}}{dt}. \tag{3.16}$$

Koristeći ograničenje (3.2)*, računamo potrebne parcijalne derivacije funkcije G:*

$$\begin{aligned} G_K &= e^{-rt} U^{'}(C)\, i\,(1 - F) + a\, W^{'}(K)\, F^{'}, \\ G_{K'} &= -e^{-rt} U^{'}(C)(1 - F). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Nakon pojednostavljenja, uz uvjetnu vjerojatnost umiranja u trenutku t u slučaju doživljenja do tog trenutka $m(t) = F^{'}(t)/[1 - F(t)]$, *Euler-Lagrangeova jednadžba poprima sljedeći oblik:*

$$C^{'}(t) = -(i - r)U^{'}(C)/U^{''}(C) + m\left(U^{'}(C) - e^{rt}aW^{'}(K)\right)/U^{''}(C). \tag{3.18}$$

Ukoliko usporedimo jednadžbu (3.18) *s jednadžbom* (3.8) *iz slučaja (a), vidimo da se razlika u optimalnoj stopi promjene potrošnje u slučaju (a) i u slučaju (b) očituje u drugom sumandu u formuli* (3.18).

U posebnom slučaju kada pojedinac ne daje važnost ostavštini, osnosno $a(t) = 0$, *dobivamo:*

$$C'(t) = -(i - r - m)U'(C)/U''(C). \tag{3.19}$$

Ovdje se vidi kako nepoznat životni vijek ima isti učinak kao i porast diskontne stope r, *odnosno, za svaki* t, *diskontna stopa ima vrijednost* $r + F'(t)/[1 - F(t)] = r + m$. *Budući da je* T *određen, a* $K(T)$ *slobodan, mora vrijediti uvjet transverzalnosti:*

$$F_{K'}(T) = -e^{-rT}U^{'}(C(T))\,[1 - F(T)] = 0. \tag{3.20}$$

No tu dalje više ništa ne možemo zaključiti jer je $1 - F(T) = 0$ *po pretpostavci.*

3.2 Projekt istraživanja i razvoja

Primjer 3.2.1. *Promotrimo projekt odjela istraživanja i razvoja u neko poduzeću za koji vrijedi da pri bržem trošenju sredstava dolazi do smanjenja povrata (brza potrošnja može biti u slučaju plaćanja prekovremenih sati i manje produktivnih faktora). Neka je* $x(t)$ *stopa potrošnje sredstava u trenutku* t *i* $z(t)$ *ukupni napor posvećen projektu do trenutka* t. *Relacija koja povezuje navedene funkcije glasi:*

$$z'(t) = x^{1/2}(t). \tag{3.21}$$

Neka je ukupni napor uložen da se projekt dovrši jednak A. *Rubni uvjeti glase:*

$$z(0) = 0,\ z(T) = A, \tag{3.22}$$

gdje T *označava (neodređeno) vrijeme potrebno da se projekt dovede kraju. Pretpostavimo još kako se pri dovršetku projekta ostvaruje nagrada u vrijednosti* R *(to može primjerice biti patent na izum ili diskontirani novčani tok profita od izuma). Vrijednost projekta u trenutku* $t = 0$ *uz diskontnu stopu* r *jednaka je profitu umanjenom za trošak razvoja, odnosno:*

$$e^{-rT}R - \int_0^T e^{-rt}x(t)\,dt. \tag{3.23}$$

Dakle, cilj je maksimizirati (3.23) *uz uvjet* (3.21) *te rubne uvjete* (3.22) . *Iskoristimo* (3.21) *i napišimo maksimizacijski problem u pogodnijem obliku:*

$$max\, e^{-rT} R - \int_0^T e^{-rt} \, [z'(t)]^2 \, dt. \tag{3.24}$$

Uz rubne uvjete i transverzalni uvjet (budući da je T slobodan, vidi Napomenu 2.1.5.), potrebno je riješiti Euler-Lagrangeovu jednadžbu:

$$z'(t) = c\, e^{rt}. \tag{3.25}$$

Nakon integriranja i uvrštavanja početnog uvjeta dobivamo

$$z(t) = c\, e^{rt}/r - c/r. \tag{3.26}$$

Uvjet transverzalnosti također mora biti zadovoljen:

$$z'(T) = (rR)^{1/2}, \tag{3.27}$$

odnosno, mora vrijediti:

$$ce^{rT} = (rR)^{1/2}. \tag{3.28}$$

Ukoliko označimo $z(T) = A$, mora vrijediti:

$$A = c\, e^{rT}/r - c/r = (e^{rT} - 1)c/r. \tag{3.29}$$

Riješimo sustav 2 jednadžbe (3.28) *i* (3.29) *u dvjema nepoznanicama c i T:*

$$c = (rR)^{1/2} - rA, \tag{3.30}$$

$$T = -r^{-1} ln\left(1 - A(r/R)^{1/2}\right). \tag{3.31}$$

Izraz (3.31) *nam govori (očekivano) kako optimalno trajanje projekta T raste s porastom ukupnog potrebnog uloženog napora A i pada što je nagrada R veća. Uočimo, budući da je funkcija ln definirana samo za pozitivne brojeve,* (3.31) *ima smisla jedino za*

$$rA^2 < R. \tag{3.32}$$

Ovaj uvjet ugrubo znači da je potrebno da količina uloženog napora bude relativno malena u odnosu na nagradu R. U slučaju da nije zadovoljen, nema smisla pokretati takav projekt. Uvrstimo (3.30) *i* (3.31) *u izraz za funkciju z* (3.26) *i dobivamo optimalnu putanju efektivnog napora uloženog u projekt u slučaju da je zadovoljen uvjet* (3.32)*:*

$$z(t) = \left[(R/r)^{1/2} - A\right](e^{rt} - 1), \quad 0 \le t \le T. \tag{3.33}$$

Sada imamo sve što nam treba kako bismo dobili izraz za optimalan plan potrošnje. Iz (3.21) *i* (3.33)*, ako vrijedi* (3.32)*, dobivamo:*

$$x(t) = \left[(rR)^{1/2} - rA\right]^2 e^{2rt}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.34}$$

gdje je T zadan u (3.31)*. Inače,*

$$x(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.35}$$

Uočimo kako je optimalna količina potrošnje veća čim je nagrada R veća, a porastom količine potrebnog uloženog napora A manja.

3.3 Plan proizvodnje

Primjer 3.3.1. *Pretpostavimo da neko postrojenje mora ispuniti zadanu cikličku stopu isporuka $S'(t)$, $0 \leq t \leq T$ oblika $S'(t) = \alpha + \beta \cos \theta t$, kut θ takav da $2\pi/\theta$ predstavlja period od 1 godine. Tada je sa $S(t) = \alpha t + \beta/\theta \sin t\theta$ dana ukupna količina isporuka od 0 do t. Neka još vrijedi sljedeće: inventar (količina zaliha, odnosno razlika količine proizvodnje i količine isporuka) mora uvijek biti nenegativan, cijena proizvodnje je proporcionalna kvadratu stope proizvodnje te cijena držanja zaliha prati neku linearnu funckiju. Cilj nam je pronaći plan proizvodnje koji će ispoštovati raspored isporuka uz minimalne troškove.*

Neka je $x(t)$ kumulativna količina proizvodnje u trenutku t. Tada je $x'(t)$ stopa proizvodnje u tretnutku t. Količinu zaliha u trenutku t dobijemo tako da od ukupne proizvodnje u trenutku t oduzmemo ukupne isporuke do trenutka t. Zapišimo problem:

$$min \int_0^T \left\{c_1 \left[x'(t)\right]^2 + c_2 \left[x(t) - S(t)\right]\right\} dt. \tag{3.36}$$

Mora vrijediti:

$$\begin{aligned} x(t) \geq S(t), 0 \leq t \leq T, \\ x(0) = x_0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Optimalni plan proizvodnje sadržavat će intervale kada za x vrijedi Euler-Lagrangeova jednadžba te intervale kada vrijedi $x(t) = S(t)$ (vidi poglavlje 2.2).U potonjem slučaju trenutna proizvodnja jednaka je trenutnim isporukama, odnosno količina zaliha se ne mijenja. Odredimo najprije kako količina proizvodnje izgleda na intervalima na kojima zadovoljava Euler-Lagrangeovu jednadžbu. Označimo s F podintegralnu funkciju u (3.36) *i izrazimo Euler-Lagrangeovu jednadžbu:*

$$F_x = \frac{dF_{x'}}{dt}. \tag{3.38}$$

Ekstremala problema koju dobijemo glasi:

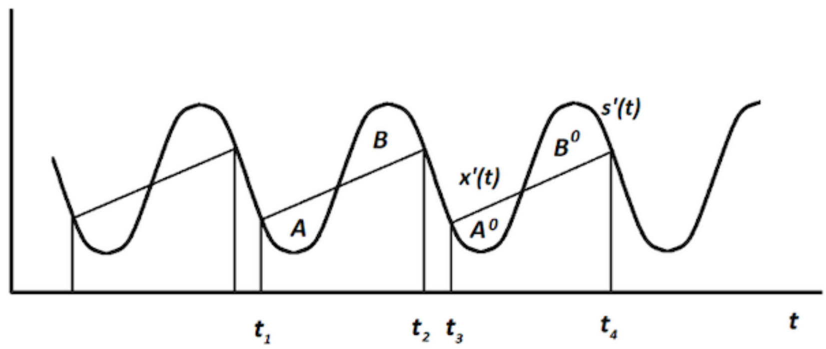
$$x(t) = c_2 t^2 / 4c_1 + k_1 t + k_2. \tag{3.39}$$

Pretpostavimo da optimalan plan proizvodnje prati (3.39) *za* $t_1 \leq t \leq t_2$. *Budući da optimalan plan mora biti neprekidna funkcija, ograničenje* $x \geq S$ *se ostvaruje na rubovima intervala i vrijedi* $F_{x'x'} = 2c_1 \neq 0$. *Time po odjeljku 2.2 znamo da su* t_1, t_2, k_1 *i* k_2 *određeni jednadžbama:*

$$\begin{aligned} x(t_1) &= S(t_1), \\ x'(t_1) &= S'(t_1), \\ x(t_2) &= S(t_2), \\ x'(t_2) &= S'(t_2). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Budući da nam je funkcija S *poznata (zadana), za svaki ovakav interval možemo naći* t_1, t_2, k_1 *i* k_2. *Da bismo otprilike skicirali situaciju, potrebno nam je još:*

$$x'(t) = \frac{c_2}{2c_1} t + k_1. \tag{3.41}$$



Slika 3.1: Skica primjera, preuzeto iz [4]

Uočimo da na slobodnim intervalima (onima gdje za x *vrijedi Euler-Lagrangeova jednadžba) stopa porasta proizvodnje iznosi* $c_2/2c_1$. *U početnom dijelu slobodnog intervala, npr.* $\langle t_1, t_2 \rangle$, *stopa proizvodnje nadmašuje stopu isporuke te se u tom periodu količina zaliha povećava. Vrhunac svakog ovakvog intervala ostvaruje se kada je* $x' = S'$. *Prema kraju intervala, stopa isporuke nadmašuje stopu proizvodnje i količina inventara se smanjuje jer* *se njome nadomješta navedeni manjak robe. Površina na skici označena s A odgovara površini označenoj s B, analogno površina A^0 odgovara površini B^0. Na kraju slobodnoga intervala, primjerice t_2, inventar je na nuli. Za $t_2 \leq t \leq t_3$ proizvodnja u potpunosti zadovoljava potrebe plana isporuke.*

Iz skice je također vidljivo kako se optimalno rješenje ne sastoji samo od dijelova jedne ekstremale spojenih rubnim segmentima, jer bi se takvo rješenje sastojalo od dijelova jednog jedinstvenog pravca, $x'(t) = c_2 t/c_1 + k_1$. Vidimo da se rješenje na skici sastoji od više različitih pravaca istog nagiba, ali različitog odsječka na y-osi.

Znatiželjnog čitatelja upućujemo na [5], gdje je primjer dalje proširen.

3.4 Maksimizacija profita i ljudski kapital

Primjer 3.4.1. *Neka je K „ljudski kapital" zaposlenika neke tvrtke, odnosno vrijednost njima pripadnih profesionalnih vještina, znanja i iskustva u industriji. Tvrtka od ljudskog kapitala ima zaradu $P(K)$, koju možemo zapisati kao $P(K) = pf(K)$, gdje je p broj radnika, a $f(K)$ profit koji tvrtka ima od pojedinog zaposlenika.*

Za funkcije f i P pretpostavimo da su dva puta diferencijabilne, rastuće (bar na malim dijelovima domene) i konkavne. Ljudski kapital gubi vrijednost konstantnom brzinom b, odnosno $K' = I - bK$, gdje je I količina investicije u ljudski kapital, a b stopa zaboravljanja. Neka je cijena investicije u ljudski kapital $c(I)$, gdje je c rastuća konveksna funkcija.

(a) Cilj nam je maksimizirati diskontirani tok profita na fiksnom periodu planiranja $0 \leq t \leq T$:

$$max \int_0^T e^{-rt} \left[p(t) f(K(t)) - c(t)(K'(t) + bK(t)) \right] dt \tag{3.42}$$

uz uvjet

$$K(0) = K_0, \; K(T) = K_T. \tag{3.43}$$

Ako s F označimo podintegralnu funkciju, sad već standardni postupak navodi nas da izračunamo

$$F_K = e^{-rt} \left[pf'(K) - cb \right], \tag{3.44}$$

te

$$F_{K'} = -e^{-rt} c. \tag{3.45}$$

Euler-Lagrangeova jednadžba za ovaj problem glasi:

$$e^{-rt} \left[p(t) f'(K(t)) - c(t)b \right] = d \left[-e^{-rt} c(t) \right] / dt, \tag{3.46}$$

odnosno,

$$e^{-rt} \left[p(t) f'(K(t)) - c(t)b \right] = e^{-rt} \left[rc(t) - c'(t) \right], \tag{3.47}$$

iz čega slijedi jednadžba za optimalni ljudski kapital $K^*(t)$*:*

$$p(t)f'(K^*(t)) = (r+b)c(t) - c'(t). \tag{3.48}$$

(b) Promotrimo sada sličan maksimizacijski problem, ali takav da vrijeme nije odozgo ograničeno:

$$max \int_0^\infty e^{-rt}\left[pf(K) - c(K' + bK)\right] dt, \tag{3.49}$$

uz uvjet $K(0) = K_0$*, ali u ovom slučaju je c konstantna cijena investicije za konstantan broj radnika p. Optimalno rješenje je dano kao MRAP (vidi odjeljak 2.3) do:*

$$pf'(K_s) = (r+b)c. \tag{3.50}$$

Ukoliko je K' *neograničena i za optimalno rješenje vrijedi* $K_s \geq K_0$*, iz* K_0 *se u* K_s *može doći odmah skokom u K. Ako je* K' *ograničeno, MRAP se sastoji od biranja najveće moguće* K' *do postizanja razine* K_s*. Ukoliko je pak* $K_s < K_0$*, rješenje je ne ulagati (*$K' + bK = 0$*) dok K ne padne do razine* K_s*.*

Bibliografija

[1] K. Burazin i U. Radojčić, *Uvod u varijacijski račun i njegova povijest*, Osječki matematički list 16 (2016), 111–133, https://hrcak.srce.hr/file/264999, (pristupljeno: 23.10.2022.).

[2] B. Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, 2004.

[3] I. Gogić, P. Pandžić i J. Tambača, *Integrali funkcija više varijabli*, 2019, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/int/pred/p_o11.pdf, (pristupljeno: 1.11.2022.).

[4] M. I. Kamien i N. L. Schwartz, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, Second Edition*, North-Holland, 1991.

[5] W. H. Locke Anderson, *Production Scheduling, Intermediate Goods, and Labor Productivity*, (1970), https://www.jstor.org/stable/1807862, (pristupljeno: 22.8.2022.).

[6] B. Muha, *Varijacijski račun i primjene*, 2017, https://web.math.pmf.unizg.hr/~borism/VarRacun.pdf, (pristupljeno: 20.8.2022.).

Sažetak

Primarni je cilj ovoga rada prikazati osnovne rezultate klasične teorije varijacijskog računa i pripadajuće primjene u problemima ekonomske prirode kroz nekoliko primjera. Navedeni su dovoljni i nužni uvjeti da funkcija $\bar{x} \in C^1([a,b])$, uz zadane rubne uvjete $x(t_0) = x_0$ i $x(t_1) = x_1$ bude maksimizator funkcionala:

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right) \, dt,$$

pri čemu je funkcija $F\colon [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna u svoja 3 argumenta t, x i x', i po njima ima neprekidne parcijalne derivacije. Dan je i dodatni uvjet koji maksimizator mora zadovoljavati u slučaju kada je neki od rubnih uvjeta slobodan. Također je dan način za pronalaženje maksimizatora gore navedenog funkcionala u slučaju da je funkcija x ograničena s $R(t) \geq x(t), t_0 \leq t \leq t_1$, pri čemu je R neprekidna funkcija definirana na $[t_0, t_1]$. Predstavljen je još autonomni problem neograničen odozgo te pronalaženje njegovog rješenja metodom najbržeg prilaska. Na kraju su navedeni rezultati primijenjeni na nekoliko problema iz ekonomskog područja, kao na primjer pronalaženje plana proizvodnje koji prati zadani raspored isporuka i minimizira troškove.

Summary

The primary focus of this thesis is to present some of the basic concepts of the classical theory of the calculus of variations and their applications in economics through several examples. Sufficient and necessary conditions are given so that the function $\bar{x} \in C^1([a, b])$, with given boundary conditions, $x(t_0) = x_0$ i $x(t_1) = x_1$, maximizes the following functional:

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), x'(t)\right)\, dt,$$

where $F\colon [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous (and has continuous partial derivatives) in its 3 arguments t, x and x'. An additional condition is given that the maximizing function must satisfy when one of the boundary conditions is free. We have also shown a way to find the maximizing function of the above functional in the case when function x is bounded by $R(t) \geq x(t), t_0 \leq t \leq t_1$, where R is a continuous function defined on $[t_0, t_1]$. An infinite horizon autonomous problem is also presented, as well as finding its solution using the most rapid approach method. Finally, the stated results are applied to several problems in economics, such as finding a production plan that follows a given delivery schedule and minimizes costs.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu 21. siječnja 1998. Osnovnu školu završavam 2012. te nakon toga upisujem zagrebačku XV. Gimnaziju koju završavam 2016. Iste godine upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji završavam 2019. te upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika. Od listopada 2021. radila sam kao student u Privrednoj Banci Zagreb u sektoru Rizika do kraja ožujka 2022., kada počinjem raditi kao konzultant za poslovnu inteligenciju u domaćoj tvrtci Koios Savjetovanja d.o.o.