Metoda ''podijeli pa vladaj'' za simetrični svojstveni problem

Tomić, Luka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Tomić

METODA PODIJELI PA VLADAJ ZA SIMETRIČNI SVOJSTVENI PROBLEM

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Nela Bosner

Zagreb, studeni, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Problem svojstvenih vrijednosti se pojavljuje u velikom broju grana znanosti i inžinjerstva. Rješavanje tog problema sastavni je dio dizajniranja zgrada, mostova i turbina - stvari koje bi trebale biti otporne na vibracije. Također, želimo li analizirati stabilnost električnih mreža ili toka fluida - moći ćemo to napraviti rješavanjem problema svojstvenih vrijednosti. Simetričan svojstveni problem je problem nalaženja ortogonalne matrice Q i dijagonalne matrice Λ tako da za danu simetričnu matricu A vrijedi $A = Q\Lambda Q^T$. Matricu Λ zovemo matricom svojstvenih vrijednosti, dok su stupci matrice Q svojstveni vektori. Metoda *Podijeli-pa-vladaj* se koristi za svojstvene probleme matrica velikih dimenzija zbog brzine i efikasnosti metode te lake paralelizacije. Ako su nam potrebne sve svojstvene vrijednosti i svi svojstveni vektori, metoda podijeli-pa-vladaj je najbrža metoda za pronaći ih. Ako su nam potrebne samo svojstvene vrijednosti, QR metoda je još uvijek najbrža. U najgorem slučaju podijeli-pa-vladaj zahtijeva $\mathcal{O}(n^3)$ operacija, no u praksi se pokazalo da je broj potrebnih operacija puno manji zbog deflacije. Mana ovog algoritma je zahtjevnost njegove implementacije na numerički stabilan način; postoji mnogo mjesta u implementaciji gdje se može pogriješiti. Čak i kad je prvi put otkrivena ova metoda 1981. godine [2], stabilna implementacija nije otkrivena sve do 1992. [5]. Temelj ove metode je rastavljanje tridijagonalne matrice na blok dijagonalnu matricu plus matricu ranga jedan te zatim rješavanje svojstvenog problema za matricu oblika dijagonalna plus matrica ranga jedan. Karakteristični polinom takve matrice je funkcija specifične strukture koju nazivamo sekularna funkcija. Ta funkcija ima svojstva zbog kojih možemo primjeniti Newtonovu metodu za traženje nultočaka uz malo modifikaciju interpolacijske funkcije. U radnji se opisuje izvod metode i neka njezina svojstva. Algoritam je implementiran u C++-u, testiran na nekoliko tipova matrica. U radu su navedeni rezultati o točnosti izračunatih svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora.

Zahvaljujem izv. prof. Neli Bosner na korisnim prijedlozima, savjetima i odgovorima prilikom izrade ovog diplomskog rada.

Poglavlje 1

Oznake, definicije i preliminarne činjenice

Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kažemo da je matrica dimenzije n. Matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je simetrična ako je jednaka svojoj transporniranoj matrici odnosno

$$A = A^T.$$

Definicija 1.0.1. *Polinom $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ zovemo karakteristični polinom matrice A . Rješenja jednažbe $p(\lambda) = 0$ su svojstvene vrijednost od A.*

Stupanj karakterističnog polinoma $p(\lambda)$ je n, dimenzija matrice A pa ima n nultočaka. Stoga A ima n svojstvenih vrijednosti.

Definicija 1.0.2. *Vektor $x \neq 0$ koji zadovoljava $Ax = \lambda x$ je (desni) svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ.*

Definicija 1.0.3. *Neka je S bilo koja nesingularna matrica. Tada su A i $B = S^{-1}AS$ međusobno slične matrice, a S zovemo matricom transformacije sličnosti.*

Teorem 1.0.4. *Neka je $B = S^{-1}AS$, tako da su A i B slične. Tada A i B imaju iste svojstvene vrijednosti, a x je (desni) svojstveni vektor od A akko je $S^{-1}x$ (desni) svojstveni vektor od B.*

Jedan od standardnih rezultata linearne algebre je da su sve svojstvene vrijednosti simetričnih matrica realne. Također, svojstveni vektori međusobno različitih svojstvenih vrijednosti su ortogonalni. Još jedan bitan rezultat kod teorije svojstvenih vrijednosti simetričnih matrica je sljedeći

Teorem 1.0.5. *Svaka simetrična matrica je slična dijagonalnoj matrici njezinih svojstvenih vrijednosti. Drugim riječima,*

$$M = M^T \implies M = QDQ^T,$$

gdje je Q ortogonalna matrica, a D dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti matrice M.

Svi dokazi prethodnih rezultata mogu se naći u [3].

U nastavku ovog odjeljka navodimo i opisujemo još neke rezultate koji će nam poslužiti prilikom izvoda metode *Podijeli-pa-vladaj*.

Teorem 1.0.6. ***Weylov***. *Neka su $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrične matrice. Neka su $\alpha_1 < ... < \alpha_n$ svojstvene vrijednosti od A te $\hat{\alpha}_1 < ... < \hat{\alpha}_n$ svojstvene vrijednosti od $\hat{A} := A + E$. Tada vrijedi $|\alpha_i - \hat{\alpha}_i| < ||E||_2, i = 1, ..., n$.*

Za dokaz pogledati [3, str. 198-201].

Givensova (ravninska) rotacija

Givensova (ravninska) rotacija $G(i, j, \vartheta)$ je definirana kao

$$G(i,j,\vartheta) := \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & ... & c & ... & s & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & ... & -s & ... & c & ... & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & i & & j & & \end{array} & \end{array} \tag{1.1}$$

gdje su $c = cos(\vartheta)$ i $s = sin(\vartheta)$. Množenjem slijeva sa $G(i, j, \vartheta)$ zapravo rotiramo oko ishodišta koordinatnu ravninu razapetu vektorima (i, j) obrnuto od smjera kazaljke na satu za ϑ radijana. Očito, po toj interpretaciji množenja slijeva sa $G(i, j, \vartheta)$, zaključujemo da je Givensova rotacija ortogonalna matrica. To se može lako i formalno provjeriti.

Ako je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{y} = G(i, j, \vartheta)^*\mathbf{x}$, tada vrijedi

$$y_k = \begin{cases} cx_i - sx_j, & k = i \\ sx_i + cx_j, & k = j \\ x_k, & k \neq i, j \end{cases}$$

Možemo namjestiti ϑ odnosno c i s tako da poništimo y_j

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{|x_i|^2 + |x_j|^2}}, \quad s = \frac{-x_j}{\sqrt{|x_i|^2 + |x_j|^2}} \tag{1.2}$$

Stoga, imamo jednostavan način[1] za poništiti *jedan određeni* element vektora koristeći Givensovu rotaciju.

1.1 Svođenje simetrične matrice na tridijagonalnu matricu

Metoda *Podijeli pa vladaj* kao takva radi na tridijagonalnim matricama, no pomoću nje možemo riješiti svojstveni problem za simetrične matrice tako da transformacijama sličnosti svedemo simetričnu matricu na tridijagonalnu. Postupak koji ćemo opisati je zapravo i općenitiji - raditi će se o postupku koji svodi bilo koju kvadratnu matricu na (gornju) **Hessenbergovu** matricu. Hessenbergova matrica je posebna vrsta kvadratnih matrica, moglo bi se reći da je "skoro" trokutasta :

Definicija 1.1.1. *Kvadratna matrica H je gornje Hessenbergova ako vrijedi $h_{ij} = 0$ za sve $i > j + 1$. Slično, kvadratna matrica H je donje Hessenbergova ako vrijedi $h_{ij} = 0$ za sve $j > i + 1$.*

Npr. sljedeća matrica je gornje Hessenbergova

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

a,

[1] Navedene formule za c i s implementirane kao što su i navedene mogu dovesti do nestabilnosti. Za stabilan način pogledati Algoritam 5.1.3 u [4]

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

donje Hessenbergova.

Ako je neka Hessenbergova matrica također i simetrična tada kažemo da se radi o **tridijagonalnoj** matrici. Tridijagonalna matrica je matrica koja ima elemente različite od nule samo na dijagonali te na superdijagonali (prvoj iznad dijagonale) i subdijagonali (prvoj ispod dijagonale). Tridijagonalna matrica je ujedno i gornje i donje Hessenbergova pa ćemo je prema tom svojstvu i definirati prateći definiciju Hessenbergovih matrica.

Definicija 1.1.2. *Kvadratna matrica T je tridijagonalna ako vrijedi $t_{ij} = 0$ za sve $i > j + 1$ ili $j > i + 1$.*

Npr. sljedeća matrica je tridijagonalna

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Slijedi opis postupka svođenja kvadratne matrice na Hessenbergovu matricu transformacijama sličnosti pomoću Householderovih reflektora.

Householderov reflektor

Definicija 1.1.3. *Matricu oblika*

$$P = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T, \quad ||\mathbf{u}|| = 1,$$

*zovemo **Householderov reflektor**.*

Lako se vidi da je Householderov reflektor hermitski i da vrijedi $P^2 = I$ odnosno da je unitaran. Primjetimo da je dovoljno zapamtiti samo vektor $\mathbf{u}$ za opis jednog Householderovog reflektora jer nam je to dovoljno da množimo vektor ili matricu sa njime

$$P\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(2\mathbf{u}^*\mathbf{x}).$$

Ovo množenje košta samo $4n$ operacija, gdje je n veličina vektora.

Ono što želimo učiniti sa *jednim* Householderovim reflektorom je transformirati *jedan određeni* vektor $\mathbf{x}$ u vektor koji je u smjeru vektora $\mathbf{e_1}$

$$P\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(2\mathbf{u}^*\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{e_1}.$$

Primjetimo da je P unitiran pa čuva normu, stoga je $\alpha = \rho||x||$, gdje je $\rho \in \mathbb{C}$ neki od korijena jedinice. Slijedi,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - \rho||\mathbf{x}||\mathbf{e_1}}{||\mathbf{x} - \rho||\mathbf{x}||\mathbf{e_1}||} = \frac{1}{||\mathbf{x} - \rho||\mathbf{x}||\mathbf{e_1}||} \begin{bmatrix} x_1 - \rho||\mathbf{x}|| \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Imamo slobodu izbora pri izboru parametra ρ, sve dok je $|\rho| = 1$. Neka je $x_1 = |x_1|e^{i\phi}$. Da izbjegnemo kraćenje stavljamo $\rho = -e^{i\phi}$ odnosno $\rho = -sign(x_1)$ ako je $x \in \mathbb{R}^n$. Ako je $x_1 = 0$, postavljamo ρ proizvoljno.

Svođenje na Hessenbergovu matricu

Sada ćemo pokazati kako iskoristiti Householderove reflektore da reduciramo bilo koju kvadratnu matricu na Hessenbergovu matricu. Generealnu ideju ćemo pokazati na 5×5 matrici. U prvom koraku gledamo prvi stupac bez prvog elementa i želimo ga pretvoriti u stupac koji ima samo prva dva elementa različita od nule[2],

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{P_1 *} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{* P_1} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = P_1^* A P_1.$$

Sa lijeve strane smo množili sa P_1 kako bi pretvorili prvi stupac u stupac koji ima samo prva dva elementa različita od nula, a sa desne strane kako bi imali transformaciju sličnosti (sjetimo se da su Householderovi reflektori Hermitiski odnosno $P^* = P$).

[2]U ovom trenutku, prirodno je pomisliti zašto ne pokušamo Householderovim reflektorom poništiti sve elemente osim prvog u stupcu tako da na kraju dobijemo gornje trokutastu matricu. Takvim postupkom bi zapravo dobili Schurovu formu matrice. Zaista, možemo množeći slijeva sa Householderovim reflektorm poništiti sve elemente osim prvog u prvom stupcu, ali želimo li imati transformaciju sličnosti moramo pomnožiti i zdesna sa tim istim Householderovim reflektorom, no u tom trenutku se naša ideja raspada jer množenjem zdesna opet dobivamo netrivijalne elemente u prvom stupcu.

Householderov reflektor iz prvog koraka P_1 ima oblik

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & I_4 - 2\mathbf{u_1}^*\mathbf{u_1} \end{bmatrix}.$$

Prvi redak i stupac u P_1 su e_1 jer ne diramo prvi redak od A. Householderov vektor $\mathbf{u_1}$ je određen tako da vrijedi

$$(I - 2\mathbf{u_1}\mathbf{u_1}^*) \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ a_{51} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Transformaciju nastavljamo na analogan način za sljedeće stupce,

$$P_1AP_1 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{P_2*/*P_2} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_3*/*P_3} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} = P_3P_2P_1A\underbrace{P_1P_2P_3}_{U}$$

Slijedi pseudokod algoritma za općenitu $n \times n$ matricu

U koraku 3 gornjeg algoritma Householderov reflektor P_k je generiran tako da vrijedi

$$(I - 2\mathbf{u_k}\mathbf{u_k}^*) \begin{bmatrix} a_{k+1,k} \\ a_{k+2,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\alpha| = \left\| \begin{bmatrix} a_{k+1,k} \\ a_{k+2,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{bmatrix} \right\| \tag{1.3}$$

Sveukupna vremenska složenost algoritma je :

- Množenje P_k slijeva : $\sum_{k=1}^{n-2} 4(n-k-1)(n-k) \approx \frac{4}{3}n^3$

Algorithm 1 Redukcija na Hessenbergovu matricu

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ovaj algoritam reducira matricu A na Hessenbergovu matricu H nizom Householderovih reflektora. Na izlazu, elementi matrice H su upisani u matricu A. Ako su potrebni svojstveni vektori algoritam računa i matricu produkta transformacija sličnosti U.
for $k = 1$ to $n-2$ **do**
  Generiraj Householderov reflektor P_k prema (1.3);
  /* Primjeni $P_k = I_k \oplus (I_{n-k} - 2\mathbf{u_k}\mathbf{u_k^*})$ s lijeva na A. */
  $A_{k+1:n,k:n} := A_{k+1:n,k:n} - 2\mathbf{u_k}(\mathbf{u_k^*}A_{k+1:n,k:n})$;
  /* Primjeni P_k zdesna, $A := AP_k$ */
  $A_{1:n,k+1:n} := A_{1:n,k+1:n} - 2(A_{1:n,k+1:n}\mathbf{u_k})\mathbf{u_k}^*$
end for
if potrebni svojstveni vektori **then**
  /* Formiraj $U = P_1 \dots P_{n-2}$ */
  $U := I_n$;
  for $k = n-2$ unazad do 1 **do**
    /* Ažuriraj $U := P_k U$ */
    $U_{k+1:n,k+1:n} := U_{k+1:n,k+1:n} - 2\mathbf{u_k}(\mathbf{u_k}^* U_{k+1:n,k+1:n})$;
  end for
end if

- Množenje P_k zdesna : $\sum_{k=1}^{n-2} 4(k)(n-k) \approx 2n^3$
- Formiranje matrice $U = P_1 \dots P_n$: $\sum_{k=1}^{n-2} 4(n-k)(n-k)\frac{4}{3} \approx n^3$

Stoga, redukcija na Hessenbergovu matricu košta otprilike $\frac{10}{3}n^3$ operacija bez formiranje matrice transformacija, a $\frac{13}{3}n^3$ sa formiranjem te matrice.

Poglavlje 2

Metoda podijeli pa vladaj

2.1 Izvod metode podijeli pa vladaj

Podjela tridijagonalne matrice

Neka je $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ simetrična tridijagonalna matrica :

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Pretpostaviti ćemo da je T i ireducibilna ($b_i \neq 0, i = 1, ...n$). Inače, ako postoji neki i td. $b_i = 0$, tada imamo

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix},$$

i problem možemo riješiti rješavajući dva svojstvena potproblema za matrice T_1 i T_2. Isti postupak možemo ponavljati sve dok ne dobijemo da su sve podmatrice ireducibilne i zatim za njih riješavamo svojstveni problem.

Podjelu ireducibilne tridijagonalne matrice možemo napraviti na idući način

$$
\begin{aligned}
T &= \left[\begin{array}{cccc|cccc}
a_1 & b_1 & & & & & & \\
b_1 & a_2 & \ddots & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & b_{m-1} & & & & \\
 & & b_{m-1} & a_m & b_m & & & \\
\hline
 & & & b_m & a_{m+1} & b_{m+1} & & \\
 & & & & b_{m+1} & a_{m+2} & \ddots & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\
 & & & & & & b_{n-1} & a_n
\end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cccc|cccc}
a_1 & b_1 & & & & & & \\
b_1 & a_2 & \ddots & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & b_{m-1} & & & & \\
 & & b_{m-1} & a_m \mp b_m & & & & \\
\hline
 & & & & a_{m+1} \mp b_m & b_{m+1} & & \\
 & & & & b_{m+1} & a_{m+2} & \ddots & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\
 & & & & & & b_{n-1} & a_n
\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c}
 & \\
\pm b_m & b_m \\
\hline
b_m & \pm b_m \\
 &
\end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho}\mathbf{u}\mathbf{u}^T, \qquad \text{gdje su } \mathbf{u}^T = \left[\ \pm\mathbf{e}_m \mid \mathbf{e}_1\ \right] \text{ i } \frac{1}{\rho} = \pm b_m.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

gdje je e_m vector duljine m, e_1 vektor duljine $n-m$, $m \approx \frac{n}{2}$, a $\frac{1}{\rho}$ namještamo da bude pozitivan. Sa podjelom iz (2.1) matricu T smo prikazali kao blok dijagonalnu matricu dvaju manjih tridijagonalnih matrica plus matrica ranga jedan. Vidjeti ćemo da, ako imamo rješenje svojstvenog problema za manje tridijagonalne matrice, možemo riješiti i svojstveni problem kada je rješenje modificirano sa matricom ranga jedan.

Kombiniranje rješenja manjih potproblema

Nakon podjele rješavamo svojstvene probleme prepolovljene veličine,

$$T_i = Q_i \Lambda_i Q_i^T, \quad Q_i^T Q_i = I, i = 1, 2, \quad \Lambda_i \text{ dijagonalna} \tag{2.2}$$

Ova dva svojstvena problema mogu biti riješeni bilo kojim algoritmom pa tako i ovim kojeg trenutno izvodimo. Tako dobivamo veliki broj manjih potproblema koje potencijalno možemo rješavati paralelno. Ubacivanjem (2.2) u (2.1) dobivamo

$$\begin{bmatrix} Q_1\Lambda_1 Q_1^T & \\ & Q_2\Lambda_2 Q_2^T \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho}\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T \right) \begin{bmatrix} Q_1^T & \\ & Q_2^T \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

gdje su

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} Q_1^T & \\ & Q_2^T \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \pm Q_1^T \mathbf{e}_m \\ Q_2^T \mathbf{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\text{zadnji red od } Q_1 \\ \text{prvi red od } Q_2 \end{bmatrix}.$$

Iz čega zaključujemo da su svojstvene vrijednosti od T jednake svojstvenim vrijednostima od dijagonalne matrice plus matrice ranga jedan :

$$D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T, \text{ gdje je } D = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Neka je rješenje tog svojstvenog problema

$$D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T = Q\Lambda Q^T. \tag{2.5}$$

Tada je rješenje svojstvenog problema za matricu T

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix} Q\Lambda Q^T \begin{bmatrix} Q_1^T & \\ & Q_2^T \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Svojstveni problem za $D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$

Pretpostavljamo da je $\frac{1}{\rho} \neq 0$, inače rješenje svojstvenog problema već imamo. Također ćemo pretpostaviti da su sve vrijednost vektora $\mathbf{v}$ različite od nula i da su svi dijagonalni element od D međusobno različiti, konkretnije, imati ćemo ocjenu na veličinu elemenata vektora $\mathbf{v}$ i na međusobnu udaljenost dijagonalnih elemenata

$$|v_i| > C\varepsilon||T||, \quad |d_i - d_j| > C\varepsilon||T||. \tag{2.7}$$

Ove pretpostavke ćemo kasnije opravdati u odjeljku *Deflacija.*

Sortirati ćemo dijagonalne element od D tako da vrijedi

$$d_1 < d_2 < ... < d_n.$$

Zbog ovoga moramo permutirati i elemente od $\mathbf{v}$. Napomenimo da ovim korakom malo mijenjamo svojstveni problem koji rješavamo. Označimo permutaciju sa kojom smo sortirali elemente od D sa P. Zapravo ćemo računati rješenje

$$P(D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T)P^T = Q\Lambda Q^T$$

pa će rješenje svojstvenog problema za matricu T biti

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix} P^T Q\Lambda Q^T P \begin{bmatrix} Q_1^T & \\ & Q_2^T \end{bmatrix}.$$

Neka je (λ, x) svojstveni par od

$$(D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T)x = \lambda x \tag{2.8}$$

Tada je

$$(D - \lambda I)x = -\frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T x \tag{2.9}$$

Primjetimo sada da je matrica $D - \lambda I$ regularna. Kada bi bila singularna, λ bi trebala biti jednaka jednom od d_i. Ako je $\lambda = d_k$, onda se k-ti element sa lijeve strane od (2.9) poništava pa mora vrijediti $v_k = 0$ ili $v^T x = 0$. Prvo ne može biti istina zbog pretpostavke o elementima vektora $\mathbf{v}$. Sa druge strane ako je $\mathbf{v}^T x = 0$, onda je $(D - d_k I)x = 0$. Stoga je $x = e_k$ i vrijedi $\mathbf{v}^T e_k = v_k = 0$, što je opet kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle, matrica $D - \lambda I$ je regularna pa imamo

$$x = \frac{1}{\rho}(\lambda I - D)^{-1}\mathbf{v}(\mathbf{v}^T x). \tag{2.10}$$

Ova jednažba nam pokazuje da je x proporcionalan vektoru $(\lambda I - D)^{-1}\mathbf{v}$. Ako zahtjevamo da je $||x|| = 1$ imamo

$$x = \frac{(\lambda I - D)^{-1}\mathbf{v}}{||(\lambda I - D)^{-1}\mathbf{v}||} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\lambda - d_1} \\ \dots \\ \frac{v_n}{\lambda - d_n} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{||(\lambda I - D)^{-1}\mathbf{v}||} \tag{2.11}$$

Time smo došli do izraza za svojstvene vektore ako znamo svojstvene vrijednosti.

Da bi pronašli svojstvene vrijednosti od $D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ pogledajmo karakteristični polinom

$$det(D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T - \lambda I) = det((D - \lambda I)(I + \frac{1}{\rho}(D - \lambda)^{-1}\mathbf{v}\mathbf{v}^T)) \tag{2.12}$$

Zbog toga što je matrica $D - \lambda I$ regularna, vrijedi $det(I + \frac{1}{\rho}(D - \lambda)^{-1}\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = 0$ ako je λ svojstvena vrijednosti. Primjetimo da je $I + \frac{1}{\rho}(D - \lambda)^{-1}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ oblika identiteta plus matrica ranga 1. Determinantu takve matrice je lagano izračunati :

Lema 2.1.1. *Neka su* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *, tada vrijedi* $det(I + \mathbf{x}\mathbf{y}^T) = 1 + \mathbf{y}^T\mathbf{x}$

Dokaz. Neka je $X = \left[\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_2}, X_2\right]$ matrica sa prvim stupcem jednakim $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_2}$, a ostali stupci neka su takvi da je X ortogonalna. Tada

$$det(I + \mathbf{x}\mathbf{y}^T) = det(X^T(I + \mathbf{x}\mathbf{y}^T)X) = det(I + X^T\mathbf{x}\mathbf{y}^T X)$$

Vrijedi $X^T\mathbf{x} = [||\mathbf{x}||, 0, ..., 0]^T$ i $\mathbf{y}^T X = \left[\frac{\mathbf{y}^T\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_2}, \mathbf{y}^T X_2\right]$ pa slijedi

$$I + X^T\mathbf{x}\mathbf{y}^T X = \begin{bmatrix} 1 + ||\mathbf{x}||_2 \cdot \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_2} & ||\mathbf{x}||_2\mathbf{y}^T X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

a ta matrica je gornje trokutasta sa determinantom $1 + \mathbf{y}^T\mathbf{x}$. □

Sad možemo izračunati determinantu

$$det(I + \frac{1}{\rho}(D - \lambda)^{-1}\mathbf{v}\mathbf{v}^T) = 1 + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}^T(D - \lambda)^{-1}\mathbf{v} = 1 + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i^2}{d_i - \lambda} =: g(\lambda). \quad (2.13)$$

Tako dobivamo da su svojstvene vrijednosti matrice $D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$, a time i matrice T, jednake nultočkama jednažbe $g(\lambda) = 0$.

Rješavanjem te jednažbe ćemo se pozabaviti u odjeljku 1.2. U ovom trenutku ćemo samo pretpostaviti da je najbolje što možemo dobiti rješavanjem te jednažbe su numeričke aproksimacije $\tilde{\lambda}_i$ nultočki λ_i.

Sada možemo iskoristiti jednažbu (2.11) da izračunamo svojstvene vektore q_i. Primjetimo da zato što imamo aproksimacije svojstvenih vrijednosti i svojstveni vektori će biti aproksimacije $\tilde{q}_i$ točnih svojstvenih vektora q_i

$$\tilde{q}_i = \left(\frac{v_1}{d_1 - \tilde{\lambda}_i}, ..., \frac{v_n}{d_n - \tilde{\lambda}_i}\right)^T \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{v_j^2}{(d_j - \tilde{\lambda}_i)}}$$

U ekstremnim slučajevima, iako je $\tilde{\lambda}_i$ blizu λ_i, aproksimacijski omjer $v_j/(d_j - \tilde{\lambda}_i)$ je dosta različit od točnog omjera $v_j/(d_j - \lambda_i)$ pa izračunat svojstveni vektor $\tilde{q}_i$ je dosta različit od egzaktnog svojstvenog vektora q_i. Posljedično, i ono što je puno važnije, matrica izračunatih svojstvenih vektora će biti daleko od ortogonalne.

Da bi riješili ovu numeričku nestabilnost, Sorensen and Tang [9] su razvili verziju algoritma koji simulira proširenu preciznost i pokazuju da je tada algoritam stabilan. Problem sa simuliranjem proširene stabilnosti je da tada razvijeni program ovisi o računalu na kojem se izvodi. Gu i Eisenstat [5] su otkrili jednostavan način na koji razriješiti nestabilnost - primjetili su da je $\mathbf{v}$ jedinstveno određen sa podacima d_i i λ_i.

Propozicija 2.1.2. *Neka je $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dijagonalna matrica, $\mathbf{v} \in R^n$ te $\rho > 0$. Neka su $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ svojstvene vrijednosti od matrice $D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}$. Pretpostavit ćemo još da vrijedi $d_1 < \lambda_1 < d_2 < \lambda_2 < ... < d_n < \lambda_n$ (Ovo svojstvo ćemo opravdati u odjeljku 2.2). Tada vrijedi*

$$v_k = \pm\sqrt{\rho\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(d_k - \lambda_j)\prod_{j=k}^{n}(\lambda_j - d_k)}{\prod_{j=1}^{k-1}(d_k - d_j)\prod_{j=k+1}^{n}(d_j - d_k)}} \tag{2.14}$$

Dokaz. Pogledati [5]. □

Sada primjenom Propozicije 2.1.2 na izračunate svojstvene vrijednosti $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i=1}^n$ (za koje pretpostavljamo da zadovoljavaju svojstvo iz pretpostavki teorema) dobivamo vektor $\tilde{\mathbf{v}}$. Iz propozicije zaključujemo da su svojstvene vrijednosti $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i=1}^n$ *egzaktne* svojstvene vrijednosti matrice $D + \rho\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^T$. Prema tome znamo da možemo sa visokom relativnom točnosti izračunati svojstvene vektore $\hat{q}_i$ matrice $D+\frac{1}{\rho}\tilde{v}\tilde{v}^T$ pa će i dobivena matrica svojstvenih vektora biti numerički ortogonalna.

Deflacija

Sada ćemo opravdati pretpostavke iz (2.7). Određena rješenja jednažbe (2.8) možemo odmah odrediti detaljnijim promatranjem dane jednažbe.

Ako postoje elementi vektora $\mathbf{v}$ jednaki nuli, onda imamo

$$(v_i = 0 \iff \mathbf{v}\mathbf{e}_i = 0) \implies (D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{e}_i = d_i\mathbf{e}_i \tag{2.15}$$

Dakle, ako imamo nulu u vektoru $\mathbf{v}$ tada je svojstvena vrijednost jednaka odgovarajućem dijagonalnom elementu od D i odgovarajući svojstveni vektor je koordinatni vektor.

Ako postoje identični elementi na dijagonali od D, npr. $d_i = d_j$, $i < j$ tada možemo naći ravninsku rotaciju $G(i, j, \phi)$ tako da uvodi nulu na j-tu poziciju u $\mathbf{v}$,

$$G_{ij}^T\mathbf{v} = G_{ij}(i,j,\phi)^T\mathbf{v} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \times \\ \vdots \\ \sqrt{v_i^2 + v_j^2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Uz to, vrijedi i

$$G_{ij}(i,j,\varphi)^T D G_{ij}(i,j,\varphi) = D, \quad d_i = d_j.$$

Dakle, za međusobno jednake dijagonalne vrijednosti iz D možemo za sve osim jedne uvesti nule u vektor $\mathbf{v}$, a zatim primjeniti postupak iz (2.15). Deflacija mijenja svojstveni problem iz $D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ u svojstveni problem za

$$\begin{bmatrix} D_1 + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} = G^T(D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T)G + E, ||E|| < C\varepsilon\sqrt{||D||^2 + |\rho|^2||v||^4}, \quad (2.16)$$

gdje D_1 nema višestruke dijagonalne elemente i $\mathbf{v_1}$ nema elemente jednake nuli, a G je produkt ravninskih rotacija G_{ij}. Zaključno, moramo riješiti svojstveni problem za matricu iz (2.16) koja je slična originalnoj uz male perturbaciju. Pa će rješenje početnog svojstvenog problema biti

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix} P^T G^T Q \Lambda Q^T G P \begin{bmatrix} Q_1^T & \\ & Q_2^T \end{bmatrix}.$$

Kada radimo u aritmetici sa pomičnom točkom smatrat ćemo da je $v_i = 0$ odnosno $d_i = d_j$ ako vrijedi

$$|v_i| < C\varepsilon||T|| \quad \text{odnosno} \quad |d_i - d_j| < C\varepsilon||T||, \quad (2.17)$$

gdje je C neka konstanta, a ε strojna preciznost.
Time zadovoljavamo pretpostavke iz (2.7).

2.2 Rješavanje sekularne jednažbe

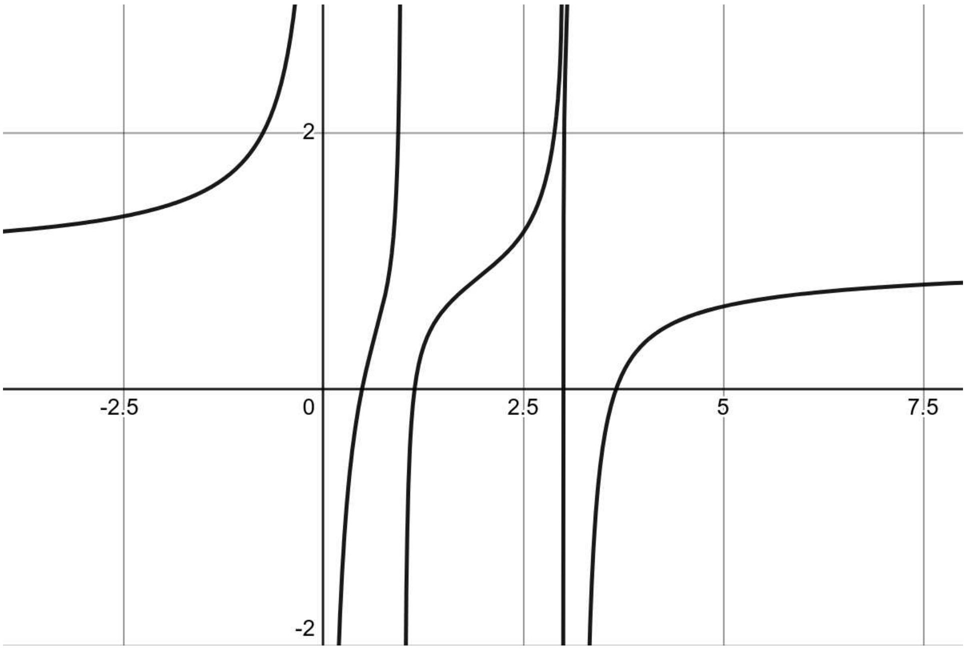
U daljnjim razmatranjima pretpostaviti ćemo da vrijedi $\frac{1}{\rho} > 0$, $v_j \neq 0, j = 1, ..., n$ te $d_1 < d_2 < ... < d_n$. Promatrati ćemo jednažbu $g(\lambda) = 0$ pomnoženu sa ρ. Time ne mijenjamo rješenja te jednažbe

$$f(\lambda) := \rho g(\lambda) = \rho + \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k^2}{d_k - \lambda}. \quad (2.18)$$

Jednažbu $f(\lambda) = 0$ zovemo **sekularna jednažba**. Sekularna jednažba ima polove u dijagonalnim elementima matrice D. Primjetimo još

$$f'(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k^2}{(d_k - \lambda)^2}.$$

Vidimo da je derivacija funkcije f uvijek pozitivna kad god ima konačnu vrijednost. Tipičan graf funkcije f je prikazan na 2.1.



Slika 2.1: Graf funkcije $1 + \frac{0.8^2}{0-\lambda} + \frac{0.3^2}{1-\lambda} + \frac{0.1^2}{3-\lambda} + \frac{0.6^2}{3.2-\lambda}$

Preko slike možemo primjetiti dva ugodna svojstva koje ima sekularna jednažba. Prvo, monotona je na intervalima (d_i, d_{i+1}), isto možemo zaključiti iz pozitivnosti derivacije. Drugo, vrijednosti d_i i nultočke koje ćemo označiti sa λ_i se isprepliću, konkretnije,

$$d_1 < \lambda_1 < d_2 < \lambda_2 < ... < d_n < \lambda_n. \tag{2.19}$$

Dakle, na svakom intervalu $(d_i, d_{i+1}), i = 1, ..., n-1$ je točno jedna nultočka i još jedna se nalazi na intervalu (d_n, ∞). Sveukupno funkcija f ima n nultočaka. Svojstvo preplitanja polova d_i i nultočaka λ_i koje primjećujemo preko slike, potvrđujemo i pogledom na oblik sekularne funkcije u jednažbi (2.18) i na njezinu derivaciju. Iz monotonosti funkcije na intervalima (d_i, d_{i+1}) te činjenice da su d_i i d_{i+1} polovi odnosno vertikalne asimptote funkcije f vidimo da vrijedi to svojstvo. Dodatno ćemo još staviti da je $d_{n+1} = d_n + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{v}$. Tada vrijedi svojstvo ispreplitanja i za zadnji umjetni interval.

Propozicija 2.2.1. *Neka je $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dijagonalna matrica, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$. Označimo sa $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od matrice $D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathbf{T}$. Tada vrijedi*

$$\lambda_n < d_n + \frac{1}{\rho}\mathbf{v^T v} := d_{n+1}$$

Dokaz. Koristeći Weylov teorem 1.0.6 (stavljamo po teoremu da je $A = D$, $E = \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$) zaključujemo $\lambda_n - d_n \leq ||\frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T||_2$. Euklidska norma simetričnih matrica je jednaka spektralnom radijusu [8, str. 13-19], a matrica $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ je ranga jedan pa ima samo jednu svojstvenu vrijednost jednaku $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$ jer vrijedi

$$(\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{v}^T\mathbf{v}) = (\mathbf{v}^T\mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Pa slijedi,

$$\lambda_n - d_n \leq ||\frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T||_2 = \frac{1}{\rho}\mathbf{v}^T\mathbf{v} \implies \lambda_n < d_n + \frac{1}{\rho}\mathbf{v^T v}.$$

□

Stoga sada imamo da vrijedi svojstvo ispreplitanja za sve intervale :

$$d_i < \lambda_i < d_{i+1}, \quad i = 1, ..., n.$$

Jedna od očitih metoda za rješavanje jednažbe je $f(x) = 0$ je Newtonova metoda, no s obzirom na to da je $f(x)$ racionalna funkcija sa polovima u $d_1, ..., d_n$ Newtonova metoda sa lokalnom linearnom interpolacijom nije baš najzgodnije rješenje. Pokušamo li pronaći nultočku na intervalu $(1, 3)$ funkcije sa slike 2.1, vidimo da jednažba naglo mijenja smjer blizu nultočke i blizu pola 1.

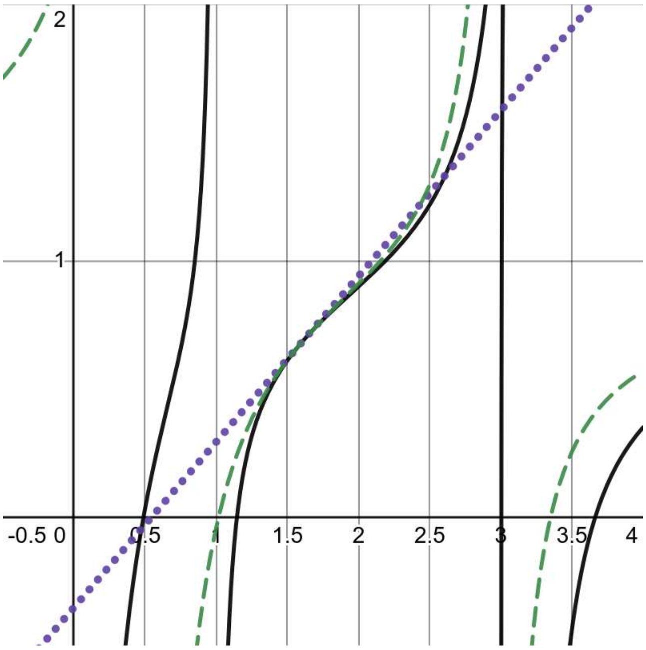
Na primjer, ako pokušamo interpolirati funkciju f na intervalu $(1, 3)$ linearnom funkcijom (vidi sliku 2.2) sa početnom aproksimacijom nultočke $x = 1.6$, sljedeća aproksimacija nultočke koju ćemo dobiti je izvan intervala $(1, 3)$ pa će Newtonova metoda u sljedećem koraku tražiti sasvim drugu nultočku, a ne onu koju smo tražili iz intervala $(1, 3)$.

Stoga ćemo malo modificirati standardnu Newtonovu metodu korištenjem malo drugačije funkcije za interpolaciju funkcije f. Koristiti ćemo rješavač koje je Li [6] nazvao *Prilaz slijeva* te njegov analogon *Prilaz zdesna.*

Sekularnu funkciju $f(x)$ interpolirat ćemo kombinacijom dvaju sljedećih jednostavnih racionalnih funkcija:

$$F(x; p, q) := \frac{q}{p - x} \quad \text{i} \quad G(x; \delta, r, s) := r + \frac{s}{\delta - x}. \tag{2.20}$$

Pri tome ćemo funkciju f particionirati na sljedeći način $f(x) = \rho + \psi_k(x) + \phi_k(x)$ gdje su



Slika 2.2: Punom crtom je označen graf funkcije $1+\frac{0.8^2}{0-\lambda}+\frac{0.3^2}{1-\lambda}+\frac{0.1^2}{3-\lambda}+\frac{0.6^2}{3.2-\lambda}$. Istočkanom crtom je označena linearna interpolacija nacrtane funkcije oko točke $x = 1.6$, dok je isprekidanom crtom označena racionalna interpolacija (kao što je navedeno u *Prilazu slijeva*) nacrtane funkcije oko točke $x = 1.6$.

$$\psi_k(x) := \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{d_j - x}, \quad \phi_k(x) := \sum_{j=k+1}^{n} \frac{v_j^2}{d_j - x}, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{2.21}$$

(Po konvenciji stavljamo $\phi_n(x) = 0$). Izbor broja k, a time i način na koji particioniramo ovisi o tome koju nultočku λ_k računamo.

Očito je za $d_k < x < d_{k+1}$

$$-\infty < \psi_k(x) < 0 < \phi_k(x) < +\infty$$

Za bilo koju aproksimaciju y od λ_k, aproksimirati ćemo $\psi_k(x)$ i $\phi_k(x)$ sa jednostavnijim funkcijama F ili G tako da se podudaraju u vrijednostima ψ_k i ϕ_k i derivacijama ψ_k' i ϕ_k' u točki $x = y$.

Rješavanje $f(x) = 0$

Na četiri načina možemo tražiti k-tu nultočku λ_k sekularne funkcije kombiniranjem različitih racionalnih interpolacijskih funkcija za aproksimaciju funkcija $\psi_k(x)$ i $\phi_k(x)$.

Mi ćemo pogledat dvije metode.

Prva je razvijena u [1] i zove se *Prilaz slijeva* jer generira monotono rastući niz aproksimacija za λ_k ako je početna procjena nultočke između d_k i λ_k.

Druga je analogon *Prilazu slijeva* i zove se *Prilaz zdesna* jer generira monotono padajući niz aproksimacija za λ_k ako je početna procjena nultočke između λ_k i d_{k+1}.

Pretpostaviti ćemo da imamo početnu procjenu y nultočke λ_k uz uvjet $d_k < y < d_{k+1}$. Kasnije ćemo pokazati kako izabrati takav y. Ovisno o tome sa koje strane nultočke je početna aproksimacija y koristimo *Prilaz slijeva* ili *Prilaz zdesna.*

Prilaz slijeva

Pretpostavimo za trenutak $1 \leq k < n$.

Interpolirati ćemo $\psi_k(x)$ sa $F(x;p,q)$ i $\phi_k(x)$ sa $G(x;d_{k+1},r,s)$. Parametre p,q,r i s biramo tako da vrijedi

$$F(y;p,q) = \psi_k(y), \quad F'(y;p,q) = \psi_k'(y) \tag{2.22}$$

$$G(y;d_{k+1},r,s) = \phi_k(y), \quad G'(y;d_{k+1},r,s) = \phi_k'(y). \tag{2.23}$$

Primjetimo da smo u parametrizaciji funkcije G izabrali $\delta = d_{k+1}$ tako da se podudara sa polom funkcije $\phi_k(x)$ koji je pokraj točke y. Za parametre vrijede sljedeće formule (za izvod formula pogledati Dodatak 4, Racionalna interpolacija - izvod)

- Za $F(x;p,q) = q/(p-x)$,

$$\begin{aligned} p &= y + \psi_k(y)/\psi_k'(y) \\ &= \frac{1}{\psi_k'(y)} \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{(d_j - y)^2} d_j, \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$q = \psi_k(y)^2/\psi_k'(y) > 0. \tag{2.25}$$

- Za $G(x;d_{k+1},r,s) = r + s/(d_{k+1}-x)$,

$$\begin{aligned} r &= \phi_k(y) - (d_{k+1} - y)\phi_k'(y) \\ &= \sum_{j=k+2}^{n} \frac{d_j - d_{k+1}}{(d_j - y)^2} v_j^2 > 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$s = (d_{k+1} - y)^2 \phi_k'(y) > 0. \tag{2.27}$$

Navedimo sada dva bitna svojstva koja vrijedi za interpolaciju funkcije $\psi_k(x)$ funkcijom $F(x;p,q)$.

Propozicija 2.2.2. *Neka funkcija $F(x;p,q)$ interpolira funkciju $\psi_k(x)$ parametrima iz (2.24) i (2.25). Tada vrijedi $d_1 \leq p \leq d_k < y$. Stroga nejednakost će vrijediti za $k \geq 2$.*

Dokaz. Dokažimo prvo $d_1 \leq p$:

$$d_1 \leq p \overset{(2.24)}{=} \frac{1}{\psi_k'(y)} \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{(d_j - y)^2} d_j \overset{\psi_k'(y)>0}{\iff} \psi_k'(y) d_1 \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{(d_j - y)^2} d_j$$
$$\iff \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{(d_j - y)^2} d_1 \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{(d_j - y)^2} d_j \iff \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{(d_j - y)^2} (d_1 - d_j) \leq 0$$

Posljednja nejednažba vrijedi jer su svi članovi sume negativni jer vrijedi $v_j^2 > 0, (d_j - y)^2 > 0$ i $d_1 - d_j \leq 0, \forall j = 1, ..., k$. Dok za $k \geq 2$ imamo barem jedan $j > 1$ za koju vrijedi $d_1 - d_j < 0$ pa imamo strogu nejednakost.

Sličnim postupkom dobivamo i sljedeću ekvivalenciju :

$$p < d_k \iff \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{(d_j - y)^2} (d_j - d_k) < 0$$

Druga nejednažba vrijedi jer su svi članovi sume negativni jer vrijedi $v_j^2 > 0, (d_j - y)^2 > 0$ i $d_j - d_k \leq 0, \forall j = 1, ..., k$. Dok za $k \geq 2$ imamo barem jedan $j < k$ za koju vrijedi $d_j - d_k < 0$ pa imamo strogu nejednakost.

Posljednja nejednakosti iz propozicije vrijedi po pretpostavci aproksimacije y nultočke λ_k. □

Ova propozicija pokazuje da pol p funkcije $F(x;p,q)$ leži dalje od y nego d_k. Stoga $F(x;p,q)$ može loše aproksimirati $\psi_(x)$ između pola d_k i y. To će se događati kada je v_k relativno mali, u tom slučaju će λ_k biti jako blizu d_k, a zbog toga i y također.

Teorem 2.2.3. *Neka je $k \geq 2$, tada za $d_k < x < +\infty$ i za $x \neq y$ vrijedi*

$$\psi_k(x) < F(x;p,q).$$

Dokaz. Dokaz teorema se nalazi u [1]. □

Analogno svojstvo imamo za interpolaciju funkcije $\phi_k(x)$ funkcijom $G(x; d_{k+1}, r, s)$.

Teorem 2.2.4. *Neka je $k \leq n - 2$, tada za $y \neq x < d_{k+1}$ vrijedi*

$$\phi_k(x) < G(x; d_{k+1}, r, s).$$

Nakon interpolacije, umjesto da rješavamo $\rho + \psi_k(x) + \phi_k(x) = 0$, rješavamo

$$\rho + \frac{q}{p - x} + r + \frac{s}{d_{k+1} - x} = 0 \tag{2.28}$$

po x. Jednažba (2.28) ima točno dva rješenja od kojih jedno rješenje leži između p i d_{k+1}[1]. To će biti naša nova aproksimacija $y + \eta$. Neka je $\Delta_{k+1} := d_{k+1} - y$. Tada je korekcija η jednaka

$$\eta = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c} \text{ za } a \leq 0, \tag{2.29}$$

$$= \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 - 4bc}} \text{ za } a > 0 \tag{2.30}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
a &= f(y)\left(\Delta_{k+1} + \frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)}\right) - \Delta_{k+1}\psi_k(y)\left(1 + \frac{\phi_k'(y)}{\psi_k'(y)}\right) \\
b &= \Delta_{k+1} f(y) \frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)} \\
c &= \rho + r = \rho + \phi_k(y) - \Delta_{k+1}\phi_k'(y).
\end{aligned}$$

Slučaj $k = n$ je poseban zbog $\phi_n \equiv 0$. Rješavanjem $\rho + \frac{q}{p-x} = 0$ daje

$$\eta = x - y = \frac{\rho + \psi_n(y)}{\rho \psi_n'(y)} \psi_n(y) = \frac{f(y)\psi_n(y)}{f'(y)\rho} \tag{2.31}$$

Za izvode pogledati Dodatak 4, Prilaz slijeva - izvod.
Za ovaj izbor interpolacije vrijedi sljedeće

Teorem 2.2.5. *Ako je $d_k < y < \lambda_k$, tada je $\eta > 0$ i $y < y + \eta < \lambda_k$; ako je $\lambda_k < y < d_{k+1}$, tada $\eta < 0$ i $y + \eta < \lambda_k < y$.*

Dokaz. Neka je aproksimacija funkcije $f(x)$ označena sa $\bar{f}(x) = \rho + F(x) + G(x)$, a njezina nultočka $y + \eta$ sa z.

Pogledajmo prvo slučaj $d_k < y < \lambda_k$. Tada vrijedi (Vidi Sliku 2.3)

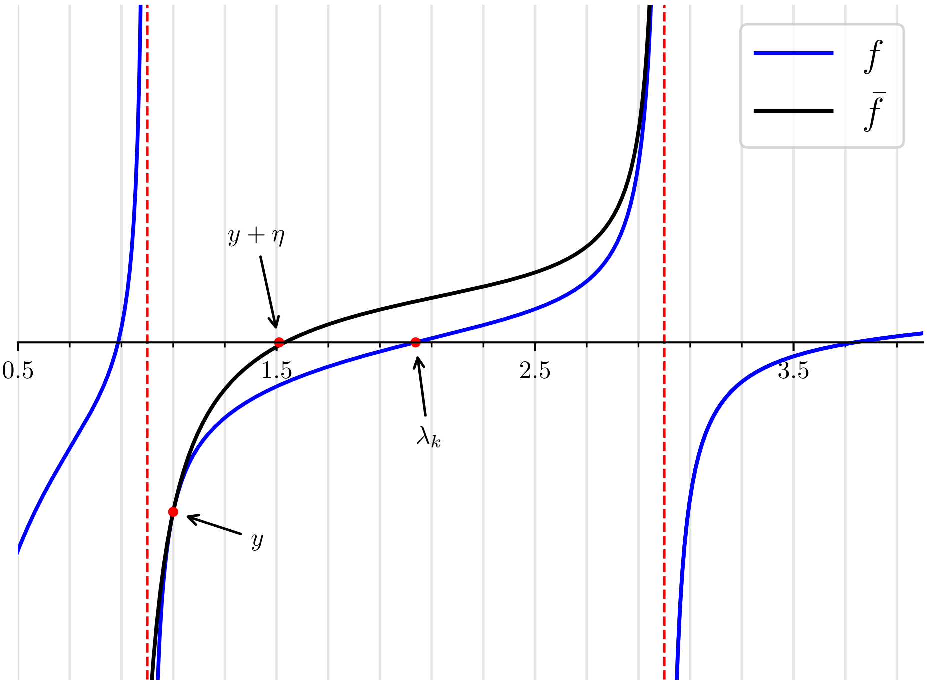
$$\begin{aligned}
0 > f(y) = \rho + \psi_k(y) + \phi_k(y) = \rho + F(y) + G(y) = \bar{f}(y) \\
\implies \bar{f}(y) < 0 \implies y < z = y + \eta
\end{aligned}$$

[1] Drugo rješenje će ležati desno od d_{k+1} jer interpolacijska funkcije ima pol u d_{k+1} i rastuća je na tom intervalu (to možemo vidjeti iz derivacije i činjenice da su $q, s > 0$) (Vidjeti desni dio slike 2.2, graf interpolacijske funkcije na segmentu desno od pola $x = 3$)

Druga jednakost u prethodnoj jednažbi slijedi iz činjenice da $\bar{f}$ aproksimira f u točki y. Iz $\bar{f}(y) < 0$ i činjenice da je $\bar{f}'(x) > 0$ slijedi $y < z = y + \eta$.

Dalje vrijedi (Vidi Sliku 2.3)

$$0 = \bar{f}(z) = \rho + F(z) + G(z) \overset{2.2.3,2.2.4}{>} \rho + \psi_k(z) + \phi_k(z) = f(z) \implies f(z) < 0$$



Slika 2.3: Slikoviti prikaz dokaza teorema 2.2.5. Na slici imamo prikaz interpolacije funkcije f funkcijom $\bar{f}$ u točki y. Interpolacijska funkcija $\bar{f}$ je prikazana crnom bojom, a sekularna funkcija f plavom bojom. Polovi sekularne funkcije su označeni crvenim iscrtkanim linijama.

Iz $f(z) < 0$ i činjenice da je $f'(x) > 0$ slijedi $y + \eta = z < \lambda_k$.

Pogledajmo sada slučaj $\lambda_k < y < d_{k+1}$. Vrijedi

$$0 < f(y) = \bar{f}(y) \implies y + \eta = z < y$$

uz analogne argumente kao u prvom slučaju. Slično zaključujemo i

$$0 = \bar{f}(z) > f(z) \implies y + \eta = z < \lambda_k.$$

□

Teorem 2.2.5 kaže da počevši sa nekom početnom procjenom nultočke koja je manja od nultočke λ_k, ova shema će producirati niz aproksimacija koja monotono konvergiraju prema λ_k; s druge strane ako početna procjena premašuje λ_k prva korekcija η će biti dovoljno negativna da sljedeća aproksimacija bude manja od λ_k pa će sve sljedeće aproksimacije ići prema λ_k.

Prema prethodnome, predložena shema zvuči obećavajuće, ali ima jedan nezgodan slučaj koji se može dogoditi. Primjetimo da u drugoj tvrdnji Teorema 2.2.5 nemamo donju ogradu za izraz $y + \eta$. Može se dogoditi da početna procjena toliko premašuje λ_k da sljedeća aproksimacija pada ispod d_k. Tada ne možemo iskoristiti prvu tvrdnju gornjeg teorema i nemamo garantiranu konvergenciju metode.

Jedan od načina za izbjegavanjem tog slučaja je pažljivo i pametno biranje početne procjene y nultočke λ_k. Čime ćemo se baviti u sljedećem odjeljku.

Ova metoda konvergira kvadratno prema nultočki.

Teorem 2.2.6. *Neka je dan $y_0 \in (d_k, d_{k+1})$, $k = 1, ..., n$. Neka je y_j, $j \geq 1$ rješenje od*

$$\rho + \frac{q}{p - y_j} + r + \frac{s}{d_{k+1} - y_j} = 0$$

gdje su p, q, r i s definirani kao u (2.24)-(2.27). Ako vrijedi $y_j \to \lambda_k$ za sve dovoljno velike k, tada vrijedi

$$|y_{j+1} - \lambda_k| \leq \kappa |y_j - \lambda_k|^2$$

gdje je κ konstanta neovisna o iteraciji.

Dokaz. Vidjeti dokaz u [1, Teorem 3] □

U prosjeku su potrebne 2 do 3 iteracije da bi nultočka bila blizu nule do na strojnu preciznost. Stoga za jednu nultočku potrebno nam je $\mathcal{O}(n)$ operacija, a za sve nultočke $\mathcal{O}(n^2)$ operacija.

Prilaz zdesna

Prilaz zdesna je analogan *Prilazu slijeva.* Neka je ponovno $1 \leq k \leq n-1$. Razlika između ta dva pristupa je takva da u *Prilazu zdesna* ψ_k interpoliramo sa $G(x; d_k, r, s)$, a ϕ_k sa $F(x; p, q)$. Parametre p, q, r i s biramo tako da vrijedi

$$F(y; p, q) = \phi_k(y), \quad F'(y; p, q) = \phi_k'(y) \tag{2.32}$$
$$G(y; d_k, r, s) = \psi_k(y), \quad G'(y; d_k, r, s) = \psi_k'(y). \tag{2.33}$$

Za parametre vrijede sljedeće formule. Izvodi su slični izvodima za parametre u *Prilazu slijeva*

- Za $F(x; p, q) = q/(p-x)$,

$$\begin{aligned} p &= y + \phi_k(y)/\phi_k'(y) \\ &= \frac{1}{\phi_k'(y)} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{v_j^2}{(d_j - y)^2} d_j, \end{aligned} \tag{2.34}$$
$$q = \phi_k(y)^2/\phi_k'(y) > 0. \tag{2.35}$$

- Za $G(x; d_k, r, s) = r + s/(d_k - x)$,

$$\begin{aligned} r &= \psi_k(y) - (d_k - y)\psi_k'(y) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d_j - d_k}{(d_j - y)^2} v_j^2 > 0, \end{aligned} \tag{2.36}$$
$$s = (d_k - y)^2 \psi_k'(y) > 0. \tag{2.37}$$

Dalje, vrijede i slična svojstva za ovu metodu kao i u *Prilazu slijeva.*

Propozicija 2.2.7. *Neka funkcija $F(x; p, q)$ interpolira funkciju $\phi_k(x)$ parametrima iz (2.34) i (2.35). Tada vrijedi $y < d_{k+1} \leq p < d_n$. Stroga nejednakost će vrijediti za $k < n-1$.*

Teorem 2.2.8. *Neka je $k \leq n-2$, tada za $y \neq x < d_{k+1}$ vrijedi*

$$F(x; p, q) < \phi_k(x).$$

Teorem 2.2.9. *Neka je $k \geq 2$, tada za $d_k < x < +\infty$ i za $x \neq y$*

$$G(x; d_k, r, s) < \psi_k(x).$$

Dokazi su analogni dokazima za *Prilaz slijeva*.

Sada nakon interpolacije rješavamo

$$\rho + \frac{q}{p-x} + r + \frac{s}{d_k - x} = 0 \tag{2.38}$$

po x. Rješenje će ponovno biti nova aproksimacija jednaka $y+\eta$. Neka je $\Delta_k := d_k - y$. Tada je korekcija η dana sa jednažbama (2.29)-(2.30), ali sa

$$\begin{aligned}
a &= f(y)\left(\Delta_k + \frac{\phi_k(y)}{\phi_k'(y)}\right) - \Delta_k\phi_k(y)\left(1 + \frac{\psi_k'(y)}{\phi_k'(y)}\right),\\
b &= \Delta_k f(y)\frac{\phi_k(y)}{\phi_k'(y)},\\
c &= \rho + r = \rho + \psi_k(y) - \Delta_k\psi_k'(y).
\end{aligned}$$

Za $k = n$, particioniramo i interpoliramo sekularnu funkciju $f(x)$ na isti način kao za $k = n-1$, ali tražimo novu aproksimaciju za λ_n tako da bude rješenje jednažbe $\rho + G(x; d_{n-1}, r, s) + F(x; p, q) = 0$ koje leži između d_n i d_{n+1}, ako postoji takvo. Tada je korekcija η jednaka

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c} \text{ za } a \geq 0, && (2.39)\\
&= \frac{2b}{a - \sqrt{a^2 - 4bc}} \text{ za } a < 0, && (2.40)
\end{aligned}$$

uz a, b, c navedene kao gore za $k = n-1$, a to može biti pojednostavljeno na

$$\begin{aligned}
a &= (\Delta_{n-1} + \Delta_n)f(x) - \Delta_{n-1}\Delta_n f'(y),\\
b &= \Delta_{n-1}\Delta_n f(y),\\
c &= \rho + r = \rho + \psi_{n-1}(y) - \Delta_{n-1}\psi_{n-1}'(y)
\end{aligned}$$

Izraz (2.40) vrijedi ako je $\rho + r > 0$.

Naime, vrijedi $F(x; p, q) \equiv \phi_{n-1}(x)$ iz čega slijedi da će interpolacijska funkcija imati polove u d_{n-1} i d_n. Stoga ćemo imati nultočku desnije od pola d_n ako je horizontalna asimptota koju definira $\rho + r$ pozitivna. To vidimo iz toga što je interpolacijska funkcija rastuća za $x > d_n$ i kako x raste tako njezine vrijednosti idu prema $\rho + r$.

S obzirom na to da će u našem slučaju uvijek vrijediti $\rho > 0$ i $r > 0$ slijedi da će uvijek postojati traženo rješenje gornje jednažbe.

Ovu shemu zovemo *Prilaz zdesna* zbog sljedećeg teorema :

Teorem 2.2.10. *Ako je* $\lambda_k < y < d_{k+1}$*, tada je* $\eta < 0$ *i* $\lambda_k < y + \eta < y$*. Ako je* $d_k < y < \lambda_k$ *i* $k < n$*, tada je* $\eta > 0$ *i* $y < \lambda_k < y + \eta$*. Ako je* $d_n < y < \lambda_n$*, tada je* $y + \eta > \lambda_n$*.*

Dokaz teorema se provodi slično kao za analogni teorem u *Prilazu slijeva*.

Kao i u Teoremu 2.2.5, u situaciji kada je $d_k < y < \lambda_k$, može se dogoditi da $y + \eta$ završi desno od d_{k+1} pa to moramo spriječiti prilikom korištenja ove metode. Način na koji ćemo spriječiti takve situacije je kombiniranjem korištenja *Prilaza slijeva* i *Prilaza zdesna*.

Hibridna shema

Hibridnom shemom ćemo nazvati naš pristup rješavanja sekularne jednažbe. Kao što smo primjetili u prethodnim odjeljcima, *Prilaz slijeva* i *Prilaz zdesna* su dobre metode za traženje rješenja sekularne jednažbe u slučaju da se početna aproksimacija y nultočke λ_k nalazi unutar intervala (d_k, d_{k+1}) i lijevo od nultočke za *Prilaz slijeva*, a desno od nultočke za *Prilaz zdesna*.

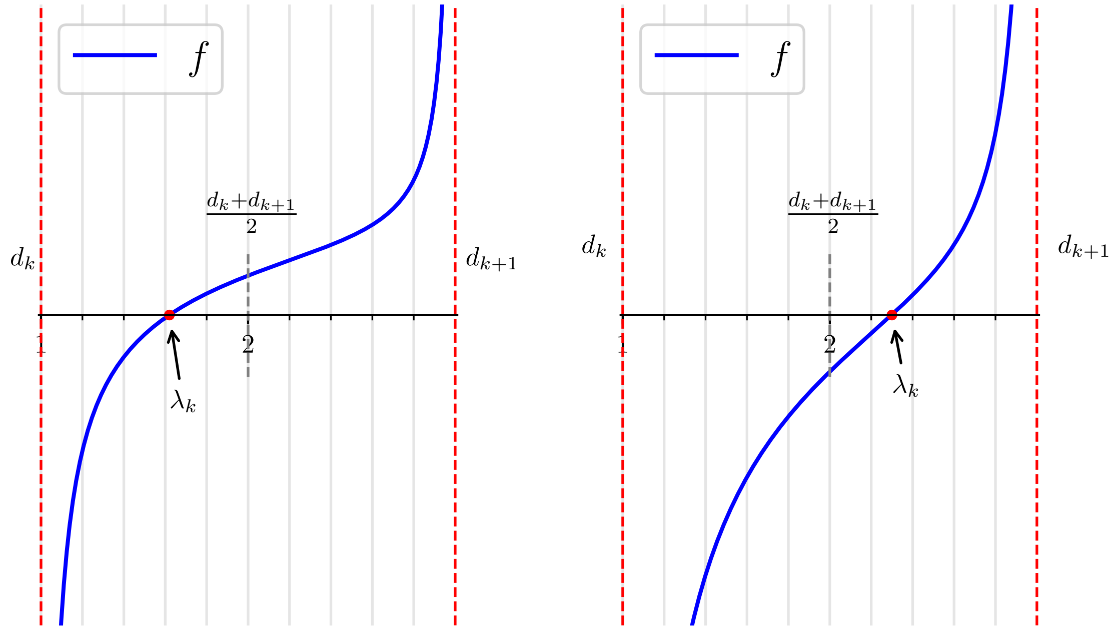
Prema tome, za rješavanje sekularne jednažbe ćemo primjeniti sljedeću taktiku. Ako je trenutna aproksimacija y lijevo od nultočke onda koristimo *Prilaz slijeva*, a ako je y desno od nultočke koristimo *Prilaz zdesna*. Sa koje strane nultočke je y određujemo po predznaku vrijednosti $f(y)$ s obzirom da je funkcija $f(x)$ rastuća na intervalu (d_k, d_{k+1}). Ovom taktikom izbjegavamo probleme koji se mogu pojaviti primjenom samo jedne od metoda.

Početna procjena nultočke λ_k

Iteriranje koje bi moglo konvergirati kvadratičnom brzinom, što je prilično brzo, može ipak konvergirati sporo ili čak nikako ako je početna procjena nultočke loša. Takav slučaj postaje vrlo vjerojatan kada su v_k i v_{k+1} jako mali u odnosu na ostale v_j-ove. U tom slučaju će λ_k biti vrlo blizu d_k ili d_{k+1}.

Početnu procjenu koja je relativno točna zapravo nije skupo za dobiti. Usput ćemo dobiti informaciju je li nultočka λ_k bliža polu d_k ili d_{k+1} što ćemo iskoristiti da bi točnije računali izraze poput (2.21). Da bi izbjegli računanje najmanje razlike $d_k - x$ (ili $d_{k+1} - x$), a time izbjegavamo i kraćenje u najosjetljivijem članu, pomaknuti ćemo ishodište u d_k odnosno d_{k+1} ovisno o tome zaključimo li da je nultočka λ_k bliža d_k odnosno d_{k+1}.

Očiti način kako odrediti kojem polu je nultočka bliža je da pogledamo vrijednost $f(\frac{d_k + d_{k+1}}{2})$. Ako je vrijednost pozitivna, znamo da je λ_k bliža d_k nego d_{k+1} pa ćemo ishodište prebaciti u d_k; inače je λ_k bliža d_{k+1} (Vidi Sliku 2.4). Slijedi opis načina izračuna $f(\frac{d_k + d_{k+1}}{2})$ tako da usput dobijemo i početnu procjenu y.



(a) $f(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}) > 0$ (b) $f(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}) < 0$

Slika 2.4: Slikoviti prikaz biranja bližeg pola. Na lijevoj slici prikazan je slučaj kada je funkcija pozitivna na polovištu dva pola pa se nultočka nalazi lijevo od tog polovišta. Na desnoj slici prikazan je slučaj kada je funkcija negativna na polovištu dva pola pa se nultočka nalazi desno od tog polovišta.

Promotrimo prvo slučaj $1 \leq k < n$.
Napišimo sekularnu funkciju (2.18) kao $f(x) = g(x) + h(x)$, gdje su

$$g(x) := \rho + \sum_{j=1, j\neq k,k+1}^{n} \frac{v_j^2}{d_j - x} \quad \text{i} \quad h(x) := \frac{v_k^2}{d_k - x} + \frac{v_{k+1}^2}{d_{k+1} - x}. \tag{2.41}$$

Početna procjena y će biti jedno od rješenja jednažbe

$$g\left(\frac{d_k + d_{k+1}}{2}\right) + h(y) = 0. \tag{2.42}$$

koje se nalazi između d_k i d_{k+1}, gdje smo $g\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right)$ izračunali tijekom računanja

$f\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right)$. U slučaju $f\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right) > 0$, jednažbu (2.42), rješavamo pomicanjem ishodišta u d_k i rješavanjem jednažbe za $\tau = y - d_k$. Dok za slučaj $f\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right) < 0$, pomičemo ishodište u d_{k+1} i rješavanjem jednažbe za $\tau = y - d_{k+1}$. Za τ vrijede sljedeće formule po kojima ga računamo

$$\begin{aligned} \tau = y - d_K &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c} \text{ za } a \leq 0 \\ &= \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 - 4bc}} \text{ za } a > 0, \end{aligned} \tag{2.43}$$

gdje su za $f(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}) > 0$,

$$K = k, a = c\Delta + (v_k^2 + v_{k+1}^2), b = v_k^2\Delta, \tag{2.44}$$

a za $f(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}) < 0$,

$$K = k+1, a = -c\Delta + (v_k^2 + v_{k+1}^2), b = -v_{k+1}^2\Delta, \tag{2.45}$$

uz $\Delta = d_{k+1} - d_k$ i $c = g(\frac{d_k+d_{k+1}}{2})$. Za izvod pogledati *Odabir početne procjene nultočke* λ_k *- izvod* (Poglavlje 4).

Sljedeći teorem nam govori da će dobivena početna procjena y biti dobra.

Teorem 2.2.11. *Ako je* $f(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}) > 0$*, tada za* τ *dan sa* (2.43) *i* (2.44) *vrijedi,*

$$d_k < d_k + \tau < \lambda_k < \frac{d_k + d_{k+1}}{2};$$

ako je $f(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}) < 0$*, tada za* τ *dan sa* (2.43) *i* (2.45) *vrijedi,*

$$\frac{d_k + d_{k+1}}{2} < \lambda_k < d_{k+1} + \tau < d_{k+1}.$$

Dokaz. Pogledati [6, Teorem 6] □

Za $k = n$, raščlanjujemo sekularnu funkciju kao u (2.41) i kao da je $k = n-1$. A početnu procjenu dobivano rješavanjem

$$g\left(\frac{d_n + d_{n+1}}{2}\right) + h(y) = 0.$$

Za $\tau = y - d_n$ tada dobivamo sljedeću formulu:

- Za $\frac{d_n+d_{n+1}}{2} \leq \lambda_n$ odnosno $f\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) \leq 0$,

1. Ako je $g\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) \leq -h(d_{n+1})$ tada
$$\tau = y - d_n = \mathbf{v}^T\mathbf{v}/\rho.$$
U ovom slučaju rješavanjem jednažbe dobili bi $y >= d_{n+1}$, no znamo da je $\lambda_n \leq d_{n+1}$ pa stoga postavljamo $y = d_{n+1}$ odnosno $\tau = \mathbf{v}^T\mathbf{v}/\rho$.
2. Ako je $g\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) > -h(d_{n+1})$ tada
$$\begin{aligned} \tau = y - d_n &= \frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2c} \text{ za } a \geq 0, \\ &= \frac{2b}{a-\sqrt{a^2-4bc}} \text{ za } a < 0, \end{aligned} \tag{2.46}$$
gdje su $\Delta = d_n - d_{n-1}, c = g\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right)$ i
$$a = -c\Delta + (v_{n-1}^2 + v_n^2), b = -v_n^2\Delta. \tag{2.47}$$
Izvod je analogan izvodu za $1 \leq k < n, f\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right) < 0$. Pokažimo da u ovom slučaju vrijedi $\frac{d_n+d_{n+1}}{2} \leq \lambda_n < d_n + \tau < d_{n+1}$. Označimo sa $r(x) := g\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) + h(x)$. Vrijedi $r'(x) > 0$ i $r(d_{n+1}) > 0$ pa zaključujemo da $d_n + \tau = y < d_{n+1}$ jer je $r(y) = 0$. Sa druge strane, primjetimo $g(\lambda_n) + h(\lambda_n) = f(\lambda_n) = 0$ iz čega slijedi $r(\lambda_n) = g\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) + h(\lambda_n) < 0$. To vidimo zbog
$$\frac{d_n+d_{n+1}}{2} < \lambda_n \overset{g'(x)>0}{\Longrightarrow} g\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) < g(\lambda_n)$$
Konačno, iz $r(\lambda_n) < 0$ zaključujemo $\lambda_n < y = d_n + \tau$.

- Za $\frac{d_n+d_{n+1}}{2} > \lambda_n$ odnosno $f\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) > 0$. Tada
$$\begin{aligned} & g\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) + h\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) = f\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) > 0 \\ \Longrightarrow & \; g\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) > -h\left(\frac{d_n+d_{n+1}}{2}\right) \overset{h'(x)>0}{>} -h(d_{n+1}) \end{aligned}$$

pa računamo τ kao u (2.46). U ovom slučaju vrijedi $d_n < d_n + \tau < \lambda_n < \frac{d_n+d_{n+1}}{2}$. U točki d_n funkcija $r(x)$ ima asimptotu u kojoj ide prema $-\infty$ pa zaključujemo $d_n < y = d_n + \tau$. Sličnim postupkom kao u prethodnom slučaju zaključujemo i $d_n + \tau < \lambda_n$.

Kriterij zaustavljanja

Za kriterij zaustavljanja koristimo

$$|f(x)| \leq n\epsilon \left(\rho + \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{v_j^2}{d_j - x} \right| \right) \tag{2.48}$$

gdje je x trenutna aproksimacija nultočke, a ϵ strojna preciznost. Izraz sa desne strane je zapravo gornja ograda na grešku za računanje funkcije $f(x)$.

2.3 Podijeli pa vladaj algoritam

Slijedi pseudokod algoritma *Podijeli pa vladaj*. Svim koracima, osim koraku broj 10, je potrebno $\mathcal{O}(n^2)$ operacija. Koraku broj 10 treba $\mathcal{O}(n^3)$ operacija. Stoga, cijelom algoritmu je potrebno

$$\begin{aligned} T(n) &= \mathcal{O}(n^3) + 2 \cdot T(n/2) = n^3 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^3 + 4 \cdot T(n/4) \\ &= n^3 + \frac{n^3}{4} + 4\left(\frac{n}{4}\right)^3 + 8T(n/8) = \cdots = \frac{4}{3}n^3 \end{aligned}$$

Ovaj izračun kompleksnosti algoritma često precjenjuje stvarni broj potrebnih operacija algoritma zbog značajne deflacije koja se događa iznenađujuće često. U najgorem slučaju algoritmu će trebati $\mathcal{O}(n^3)$ operacija, ali u praksi je broj operacija puno manji. U prosjeku, za veliki skup slučajnih testnih primjera potrebno joj je otprilike $\mathcal{O}(n^{2.3})$, dok za neke distribucije svojstvenih vrijednosti čak i $\mathcal{O}(n^2)$ [3].

Algorithm 2 Podijeli pa vladaj algoritam za tridijagonalne matrice

Neka je $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ realna simetrična tridijagonalna matrica. Ovaj algoritam računa spektralnu dekompoziciju $T = Q\Lambda Q^T$, gdje je Λ dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti, a Q je ortogonalna.
if T dimenzije 1×1 **then**
    return $(\Lambda = T; Q = 1)$
end if
Particioniraj $T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho}\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ kao u (2.1)
Pozovi ovaj algoritam uz T_1 kao ulaz, a (Λ_1, Q_1) kao izlaz.
Pozovi ovaj algoritam uz T_2 kao ulaz, a (Λ_2, Q_2) kao izlaz.
Formiraj $D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ iz $\Lambda_1, \Lambda_2, Q_1, Q_2$ prema (2.3) i (2.4).
Pronađi svojstvene vrijednosti Λ i svojstvene vektore Q' od $D + \frac{1}{\rho}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ kao što je opisano u odjeljku 1.2.
Formiraj $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \cdot Q'$ - svojstvene vektore od T.
return (Λ, Q).

Poglavlje 3

Numerički rezulati

U ovom odjeljku opisujemo način testiranja implementiranog algoritma. Opisujemo način na koji mjerimo koliko dobro algoritam radi, matrice na kojima ćemo testirati algoritam te pokazujemo same rezultate.

Mjere kvalitete algoritma

Brzinu samog algoritma mjerimo jednostavnim mjerenjem vremena izvršavanja algoritma. Točnost metode određujemo pomoću rezidualne greške izračunatog rješenja te provjerom ortogonalosti izračunatih svojstvenih vektora. Konkretno za dani $T = Q\Lambda Q^T$ sa izračunatim rješenjem $\hat{Q}\hat{\Lambda}\hat{Q}^T$, greške računamo kao :

$$\text{rezidualna greška } = \mathcal{R} = \max_i \frac{||(T\hat{Q} - \hat{Q}\hat{\Lambda})\mathbf{e}_i||_2}{\left|\hat{\lambda}\right|_{max}}$$

$$\text{greška ortogonalnosti } = \mathcal{O} = \max_i ||(\hat{Q}\hat{Q}^T - I)\mathbf{e}_i||_2$$

U principu, navedene greške su određene sa najvećom greškom za bilo koji pojedinačni svojstveni par.

Sljedeći teorem pokazuje da ako su rezidualna greška i greška ortogonalnosti male, tada izračunata svojstvena dekompozicija ima malu apsolutnu pogrešku.

Teorem 3.0.1. *Neka je $\hat{Q}$ matrica izračunatih svojstvenih vektora, a $\hat{\Lambda}$ dijagonalna matrica izračunatih svojstvenih vrijednosti za simetričnu matricu T. Ako vrijedi $\mathcal{R} \leq \varepsilon_1$ i $\mathcal{O} \leq \varepsilon_2$, tada postoji matrica E takva da vrijedi*

$$T + E = \hat{Q}\hat{\Lambda}\hat{Q}^T, \ i \ ||E||_2 \leq \sqrt{n}\left(|\lambda|_{max}\epsilon_2 + |\hat{\lambda}|_{max}\epsilon_1\sqrt{1+\sqrt{n}\epsilon_2}\right)$$

Dokaz. Vidjet u [7, Teorem 5.1.1] □

Test matrice

Sljedeći tipovi matrica su korišteni da bi testirali implementirani algoritam:

1. Simetrična matrica sa slučajnim elementima uniformno distribuiranim na intervalu (-1, 1).
2. Simetrična tridijagonalna matrica sa slučajnim elementima dizajnirana da "simulira" matricu kao gore nakon što je reducirana na tridijagonalnu formu. Dijagonalni elementi su dani sa

$$a_i = rnd(-1, 1)$$

   a gornja i donja sporedna dijagonala sa

$$b_i = \pm\sqrt{\sum_{k=i}^{n}[rnd(0,1)]^2}$$

   .
3. 10 zaljepljenih 21×21 Wilkinson matrica ($ljepilo = \delta = 10^{-4}$)

$$W = \begin{bmatrix} 10 & 1 & & & & \\ 1 & 9 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} W & \delta & & & \\ \delta & W & \delta & & \\ & \delta & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & W & \delta \\ & & & \delta & W \end{bmatrix}$$

.

4. Tridijagonalna matrica T dimenzija 512, 1024, 2048, 4096 i 8192 sa $a_i = 2$ i $b_i = 1$.
5. Tridijagonalna matrica BCSSTK08.dat veličine 1047×1047 iz Boeing-Harwell kolekcije matrica.

Rezultati

n	$\mathcal{O}$	$\mathcal{R}$	vrijeme (s)
512	4.8×10^{-14}	5.2×10^{-11}	0.32
1024	7.5×10^{-14}	1.2×10^{-11}	1.16
2048	1.2×10^{-13}	3.5×10^{-10}	5.302
4096	2.2×10^{-13}	5.3×10^{-10}	34.004

Tablica 3.1: Rezultati za matricu tipa 1

n	$\mathcal{O}$	$\mathcal{R}$	vrijeme (s)
512	3.9×10^{-14}	5.1×10^{-12}	0.355
1024	6.2×10^{-14}	5.9×10^{-11}	1.295
2048	1.1×10^{-13}	1.3×10^{-11}	3.988
4096	1.8×10^{-13}	4.5×10^{-10}	13.786
8192	3.1×10^{-13}	3.5×10^{-10}	61.208

Tablica 3.2: Rezultati za matricu tipa 2

n	$\mathcal{O}$	$\mathcal{R}$	vrijeme (s)
512	6.5×10^{-16}	2.8×10^{-14}	0.48
1024	9.2×10^{-16}	5.1×10^{-14}	1.249
2048	1.5×10^{-15}	7.4×10^{-14}	3.431
4096	2.3×10^{-15}	1.2×10^{-13}	12.898
8192	3.3×10^{-15}	1.9×10^{-13}	52.122

Tablica 3.3: Rezultati za matricu tipa 4

Prema dobivenim rezultatima vidimo da algoritam točno rješava svojstveni problem. Svojstveni vektori koji dobijemo su ortogonalni (do na dvije do tri magnitude veći od strojne preciznosti), dok je rezidualna greška kod matrica tipa 1 i 2 nešto veća nego što bismo željeli.

Rezultat za 10 zaljepljenih 21×21 Wilkinson matrica je

$$\mathcal{O} = 1.1 \times 10^{-14};$$
$$\mathcal{R} = 3.1 \times 10^{-5}$$

dok za tridijagonalnu BCSSTK08 matricu dobivamo

$$\mathcal{O} = 7.7 \times 10^{-14};$$
$$\mathcal{R} = 9.4 \times 10^{-09}.$$

Deset zaljepljenih 21×21 Wilkinson matrica je jedan od primjera kada originalni algoritam nije točno radio dok Gu i Eisenstat nisu pronašli stabliniji način računanja svojstvenih vektora. Vidimo da kod naše implementacije dobivamo ortogonalne svojstvene vektore, ali rezidualna greška je puno veća od strojne preciznosti.

Poglavlje 4

Dodatak

Racionalna interpolacija - izvod

Ovdje namještamo parametre p i q iz $F(x; p, q)$ tako da vrijedi

$$F(y; p, q) = \psi_k(y), \quad F'(y; p, q) = \psi_k'(y).$$

gdje su

$$F(x; p, q) = \frac{q}{p - x}, \quad \psi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{d_j - x}$$

Iz te dvije jednažbe dobivamo izraze za p i q :

$$\frac{q}{p - y} = F(y; p, q) = \psi_k(y) \implies q = (p - y)\psi_k(y)$$
$$\frac{q}{(p - y)^2} = F'(y; p, q) = \psi_k'(y) \implies q = (p - y)^2 \psi_k'(y)$$

$$
\begin{aligned}
&\implies (p-y)\psi_k(y) = (p-y)^2\psi_k'(y) \implies \\
&\boxed{p = y + \frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)}} = \frac{1}{\psi_k'(y)}(y\psi_k'(y) + \psi_k(y)) \\
&= \frac{1}{\psi_k'(y)}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{yv_k^2}{(d_j-y)^2} + \sum_{j=1}^{k}\frac{v_j^2}{(d_j-y)}\right) = \frac{1}{\psi_k'(y)}\sum_{j=1}^{k}\frac{v_j^2(y+d_j-y)}{(d_j-y)^2} = \\
&= \boxed{\frac{1}{\psi_k'(y)}\sum_{j=1}^{k}\frac{v_k^2}{(d_j-y)^2}d_j} \implies \boxed{q = \frac{\psi_k(y)^2}{\psi_k'(y)}}
\end{aligned}
$$

Sada namještamo parametre r i s iz $G(x; d_{k+1}, r, s)$ tako da vrijedi

$$
G(y; d_{k+1}, r, s) = \phi_k(y), \quad G'(y; d_{k+1}, r, s) = \phi_k'(y)
$$

gdje su

$$
G(x; \delta, r, s) = r + \frac{s}{\delta - x}, \quad \phi_k(x) = \sum_{j=k+1}^{n}\frac{v_j^2}{d_j - x}.
$$

Iz te dvije jednažbe dobivamo izraze za r i s :

$$
\begin{aligned}
&r + \frac{s}{d_{k+1}-y} = G(y; d_{k+1}, r, s) = \phi_k(y) \implies s = (d_{k+1}-y)(\phi_k(y) - r) \\
&\frac{s}{(d_{k+1}-y)^2} = G'(y; d_{k+1}, r, s) = \phi_k'(y) \implies s = (d_{k+1}-y)^2\phi_k'(y) \\
&\implies (d_{k+1}-y)(\phi_k(y)-r) = (d_{k+1}-y)^2\phi_k'(y) \\
&\implies \boxed{r = \phi_k(y) - (d_{k+1}-y)\phi_k'(y)} \implies \boxed{s = (d_{k+1}-y)^2\phi_k'(y)}
\end{aligned}
$$

Prilaz slijeva - izvod

U ovom odjeljku se nalazi izvod formula za metodu *Prilaz slijeva*. Pretpostavljamo da je $1 \le k < n$ i da je y neka početna aproksimacija nultočke λ_k funkcije f. Interpoliramo ψ_k sa $F(x; p, q)$, a ϕ_k sa $G(x; d_{k+1}, r, s)$, gdje su p, q, r i s određeni sa jednažbama (2.24)-(2.27).

$$\rho + \frac{q}{p-x} + r + \frac{s}{d_{k+1}-x} = 0 \quad \Big/ \cdot (p-x)(d_{k+1}-x)$$

$$(\rho + r)(p-x)(d_{k+1}-x) + q(d_{k+1}-x) + s(p-x) = 0$$

$$\overset{x=y+\eta}{\Longrightarrow} (\rho + r)(p-y-\eta)(d_{k+1}-y-\eta) + q(d_{k+1}-y-\eta) + s(p-y-\eta) = 0$$

$$\overset{\Delta_{k+1}=d_{k+1}-y}{\Longrightarrow} (\rho + r)(p-y-\eta)(\Delta_{k+1}-\eta) + q(\Delta_{k+1}-\eta) + s(p-y-\eta) = 0$$

$$(\rho + r)((p-y)\Delta_{k+1} - \eta(p-y+\Delta_{k+1}) + \eta^2) + q\Delta_{k+1} - q\eta + s(p-y) - s\eta = 0$$

$$\underbrace{(\rho + r)}_{c}\eta^2 - \eta\underbrace{((\rho + r)(p-y+\Delta_{k+1}) + q + s)}_{a} +$$

$$+ \underbrace{(\rho + r)(p-y)\Delta_{k+1} + q\Delta_{k+1} + s(p-y)}_{b} = 0$$

$$\begin{aligned}
a &= (\rho + r)(p-y+\Delta_{k+1}) + q + s \\
&\overset{(2.24)-(2.26)}{=} (\rho + \phi_k(y) - \Delta_{k+1}\phi_k'(y))\left(\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)} + \Delta_{k+1}\right) + \\
&\quad + \frac{\psi_k^2(y)}{\psi_k(y)'} + \Delta_{k+1}^2\phi_k'(y) \\
&= (\rho + \phi_k(y) + \psi_k(y) - \psi_k(y) - \Delta_{k+1}\phi_k'(y))\left(\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)} + \Delta_{k+1}\right) + \\
&\quad + \frac{\psi_k^2(y)}{\psi_k(y)'} + \Delta_{k+1}^2\phi_k'(y) \\
&= f(y)\left(\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)} + \Delta_{k+1}\right) - (\psi_k(y) + \Delta_{k+1}\phi_k'(y))\left(\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)} + \Delta_{k+1}\right) + \\
&\quad + \frac{\psi_k^2(y)}{\psi_k(y)'} + \Delta_{k+1}^2\phi_k'(y) \\
&= f(y)\left(\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)} + \Delta_{k+1}\right) - \Delta_{k+1}\psi_k(y) - \Delta_{k+1}\phi_k'(y)\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)} \\
&= f(y)\left(\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)} + \Delta_{k+1}\right) - \Delta_{k+1}\psi_k(y)\left(1 + \frac{\phi_k'(y)}{\psi_k(y)'}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= (\rho+r)(p-y)\Delta_{k+1} + q\Delta_{k+1} + s(p-y) \\
&\overset{(2.24),(2.25),(2.27)}{=} (\rho+r)\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)}\Delta_{k+1} + \frac{\psi_k(y)^2}{\psi_k'(y)}\Delta_{k+1} + \Delta_{k+1}^2\phi_k'(y)\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)} \\
&= \Delta_{k+1}\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)}(\rho + r + \psi_k(y) + \Delta_{k+1}\phi_k'(y)) \\
&\overset{(2.26)}{=} \Delta_{k+1}\frac{\psi_k(y)}{\psi_k'(y)}f(y)
\end{aligned}$$

Slučaj $k = n$ je poseban jer vrijedi $\phi_n \equiv 0$ pa rješavamo :

$$\rho + \frac{q}{p-x} = 0 \implies (p-x)\rho + q = 0 \overset{x=y+\eta}{\implies} (p-y-\eta)\rho + q = 0$$

$$\implies \eta = \frac{(p-y)\rho+q}{\rho} \overset{(2.24),(2.25)}{=} \frac{\frac{\psi_n(y)}{\psi_n'(y)}\rho + \frac{\psi_n^2(y)}{\psi_n'(y)}}{\rho} = \frac{\rho+\psi_n(y)}{\psi_n'(y)\rho}\psi_n(y) = \boxed{\frac{f(y)\psi_n(y)}{f'(y)\rho}}$$

Odabir početne procjene nultočke λ_k - izvod

U ovom odjeljku izvodimo formule za odabir početne procjene nultočke λ_k. Tražimo rješenje jednažbe

$$g\left(\frac{d_k + d_{k+1}}{2}\right) + h(y) = 0 \tag{4.1}$$

gdje su

$$g(x) = \rho + \sum_{j=1, j\neq k,k+1} \frac{v_j^2}{d_j - x}, \text{ i } h(x) = \frac{v_k^2}{d_k - x} + \frac{v_{k+1}^2}{d_{k+1} - x}$$

koje leži na intervalu (d_k, d_{k+1}). U slučaju $f\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right) \geq 0$ jednažbu (4.1) rješavamo za $\tau = y - d_k$. Označimo odmah $c := g\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right)$ i $\Delta = d_{k+1} - d_k$ i riješimo jednažbu za taj slučaj

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right)+h(y)=0 &\implies c+\frac{v_k^2}{d_k-y}+\frac{v_{k+1}^2}{d_{k+1}-y}=0\\
&\overset{y=\tau+d_k}{\implies} c+\frac{v_k^2}{d_k-\tau-d_k}+\frac{v_{k+1}^2}{d_{k+1}-\tau-d_k}=0\\
&\implies c+\frac{v_k^2}{-\tau}+\frac{v_{k+1}^2}{\Delta-\tau}=0\\
&\implies (\tau-\Delta)\tau c+(\Delta-\tau)v_k^2-\tau v_{k+1}^2=0\\
&\implies c\tau^2-\tau\underbrace{(\Delta c+v_k^2+v_{k+1}^2)}_{a}+\underbrace{\Delta v_k^2}_{b}=0\\
&\implies \tau=y-d_k=\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2c}.
\end{aligned}
$$

Analognim postupkom radimo izvod za slučaj $f\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right)<0$, samo ovaj put rješavamo za $\tau=y-d_{k+1}$

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{d_k+d_{k+1}}{2}\right)+h(y)=0 &\implies c+\frac{v_k^2}{d_k-x}+\frac{v_{k+1}^2}{d_{k+1}-x}=0\\
&\overset{y=\tau+d_{k+1}}{\implies} c+\frac{v_k^2}{d_k-\tau-d_{k+1}}+\frac{v_{k+1}^2}{d_{k+1}-\tau-d_{k+1}}=0\\
&\implies c+\frac{v_k^2}{-\Delta-\tau}+\frac{v_{k+1}^2}{-\tau}=0\\
&\implies (\Delta+\tau)\tau c-\tau v_k^2-(\Delta+\tau)v_{k+1}^2=0\\
&\implies c\tau^2+\tau\underbrace{(\Delta c-(v_k^2+v_{k+1}^2))}_{-a}-\underbrace{\Delta v_{k+1}^2}_{b}=0\\
&\implies \tau=y-d_{k+1}=\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2c}.
\end{aligned}
$$

Bibliografija

[1] James R. Bunch, C. P. Nielsen i Danny C. Sorensen, *Rank-one modification of the symmetric eigenproblem*, Numerische Mathematik **31** (1978), 31–48.

[2] Jan Cuppen, *A divide and conquer method for the symmetric eigenproblem*, Numerische Mathematik **36** (1980), 177–195.

[3] James W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997, `https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611971446`.

[4] Gene H. Golub i Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, third., The Johns Hopkins University Press, 1996.

[5] Ming Gu i Stanley C. Eisenstat, *A Stable and Efficient Algorithm for the Rank-One Modification of the Symmetric Eigenproblem*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **15** (1994), 1266–1276.

[6] Ren Li, *Solving Secular Equations Stably and Efficiently*, Teh. izv., USA, 1993.

[7] Jeffery D. Rutter, *A Serial Implementation of Cuppen"s Divide and Conquer Algorithm*, Teh. izv., USA, 1991.

[8] Yousef Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011, `https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611970739`.

[9] D. C. Sorensen i Ping Tak Peter Tang, *On the Orthogonality of Eigenvectors Computed by Divide-and-Conquer Techniques*, SIAM J. Numer. Anal. **28** (1991), br. 6, 1752–1775, ISSN 0036-1429, `https://doi.org/10.1137/0728087`.

Sažetak

U ovom radu proučavamo i implementiramo rješavanje simetričnog svojstvenog problema metodom *Podijeli-pa-vladaj*. Izvodimo samu metodu i navodimo bitne rezultate koji opisuju njezine karakteristike. Navodimo rezultate dobivene testiranjem implementacije algoritma u C++-u na nekoliko različitih primjera matrica.

Summary

In this thesis we study the solving of symmetric eigenproblem using *Divide-and-conquer* method. We derive the method and present some important results that describe its characteristics. After that, we proceed by presenting the results obtained by testing the implementation of the algorithm in C++ on several different examples of matrices.

Životopis

Luka Tomić rođen je 10. ožujka 1998. godine u Zagrebu. U Zagrebu pohađa Osnovnu školu Marina Držića, a nakon toga zagrebačku V. gimnaziju.

Na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu 2017. godine upisuje Preddiplomski sveučilišni studij matematike, koji završava u rujnu 2020. godine. Po završetku preddiplomskog studija, na istom fakultetu upisuje Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika.