

Detekcija točka promjene

Turčić, Gabrijel

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:522477>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-10**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Gabrijel Turčić

DETEKCIJA TOČAKA PROMJENE

Diplomski rad

Voditelji rada:
prof. dr. sc Bojan Basrak
doc. dr. sc. Snježana
Lubura Strunjak

Zagreb, studeni, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj	iii
Uvod	1
1 Sekvencijalna detekcija	3
1.1 Waldova sekvencijalna detekcija	3
1.1.1 Operativne karakteristike SPRT algoritma	6
1.2 Bayesovska sekvencijalna detekcija	11
1.2.1 Struktura funkcije minimalnog troška	19
1.3 Veza bayesovske i Waldove sekvencijalne detekcije	20
2 Najbrža detekcija promjene	23
2.1 Bayesovska najbrža detekcija promjene	24
2.1.1 Shiryajevljev problem	24
2.1.2 Pristup maksimizacije vjerojatnosti	29
2.1.3 Druge funkcije troška	32
2.1.4 Formulacija kroz teoriju igara	33
2.2 Nebayesovska najbrža detekcija promijene	37
2.2.1 Lordenov problem	37
2.2.1.1 Karakterističnosti CUSUM algoritma	39
2.2.2 Pollakova mjera uspješnosti	41
3 Simulacijska studija SPRT algoritma	43
Bibliografija	49

Uvod

Problem otkrivanja naglih promjena u statističkom ponašanju promatranog signala ili vremenskog niza je klasičan problem, čije podrijetlo datira barem do 1930-ih i problema praćenja kvalitete proizvodnih procesa. U novije vrijeme ovaj je problem privlači pažnju u raznim područjima uključujući klimatsko modeliranje, ekonometriju, financije, analizu slika i mnogim drugim. U ovakvim problemima cilj je je detektirati točke promjene što ranije uz zadanu preciznost optimizirajući pritom neku od mjera kvalitete detekcije.

U ovom radu najprije ćemo promatrati sekvencijalno testiranje hipoteza koje nam je bitno za samo promatranje i shvaćanje detekcije točaka promjena, a ono će uključivati dva vida pristupanja tom problemu od kojih je jedan Waldov pristupa, a drugi bayesovski te ćemo na kraju poglavlja i usporediti ta dva pristupa i izvesti vezu između njih. Nakon sekvencijalnog testiranja hipoteza okrećemo se problemu najbrže detekcije točaka promjene. Problem najprije promatramo sa bayesovskog stajališta u kojem se pretpostavlja poznavanje apriori distribucije pojavljivanja točaka promjene, no zbog čestog nedostatka znanja o apriori distribuciji pojavljivanja točaka promjena problem promatramo i sa nebayesovskog stajališta. Rad završavamo simulacijskom studijom u kojoj metode za sekvencijalno testiranje primjenjujemo na raznim primjerima.

Poglavlje 1

Sekvencijalna detekcija

Sekvencijalna detekcija alternativa je klasičnoj metodi statističkog testiranja hipoteza sa fiksnom veličinom uzorka. Za nju je karakteristično da broj promatranja potrebnih za testiranje nije unaprijed određen. Umjesto toga, odluka o prekidu eksperimenta ovisi, u svakoj fazi, o rezultatima prethodnih zapažanja. Problemi sekvencijalne detekcije između dvije statističke hipoteze (u kojima duljina promatranog uzorka nije fiksna) uzrokuju pojavljivanje takozvanih optimalnih vremena zaustavljanja te u njima postoji kompromis između vjerojatnosti pogreške (koja može biti vrlo mala ako se promatra dovoljno velik broj opservacija) i vremena opažanja tj. kašnjenja detekcije. Problem je dakle odlučiti se za jednu od dvije statističke hipoteze i tu odluku htjeli bismo donijeti što prije moguće što naravno utječe na kvalitetu donesene odluke.

1.1 Waldova sekvencijalna detekcija

Neka je $Z = \{Z_k\}_{k=1,2,\dots}$ nezavisan i jednako distribuiran niz opservacija za kojeg je istinita jedna od sljedeće dvije hipoteze:

$$\mathcal{H}_0 : Z_k \sim Q_0, k = 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{H}_1 : Z_k \sim Q_1, k = 1, 2, \dots$$

gdje su Q_0, Q_1 dvije vjerojatnosne distribucije kojima su pridružene gustoće q_0, q_1 . Također, označimo sa $\mathcal{F}_k = \sigma(\{Z_i\}_{i \leq k})$ prirodnu filtraciju uz koju je niz Z adaptiran. Problem je odrediti koja hipoteza je istinita promatrajući samo dane opservacije.

Problem je rješiv pomoću sekvencijalnog testa omjera vjerojatnosti (SPRT test). Sekvencijalni test omjera vjerojatnosti za testiranje istinitosti hipoteza \mathcal{H}_0 i \mathcal{H}_1 je određen sekvencijalnim pravilom odlučivanja, tj. uređenim parom (δ, T) , gdje je T vrijeme zaustavljanja, a δ funkcija odlučivanja.

U slučaju SPRT-a vrijeme zaustavljanja je dano sa

$$T = T_{\{A,B\}}^{\text{SPRT}} = \inf \{k \geq 0 \mid \Lambda_k \notin (A, B)\}, \quad (1.1)$$

gdje je Λ_k definirano kao

$$\Lambda_k = \prod_{i=1}^k \frac{q_1(Z_i)}{q_0(Z_i)}, \quad (1.2)$$

a funkcija odlučivanja (nakon zaustavljanja) jednaka je

$$\delta_T = \begin{cases} 0 & \text{ako je } \Lambda_T \leq A, \\ 1 & \text{ako je } \Lambda_T \geq B. \end{cases} \quad (1.3)$$

Drugim riječima, Waldov test promatra novu opservaciju sve dok omjer vjerodostojnosti ne prelazi neku od graničnih vrijednosti A ili B nakon čega se donosi odluka. Ako je Λ_T manji ili jednak od A , prihvaćamo hipotezu \mathcal{H}_0 , a ako je Λ_T veći ili jednak od B , prihvaćamo hipotezu \mathcal{H}_1 . Pogreška prve vrste α jednaka je vjerojatnosti $P_0(\delta_T = 1)$, uz pretpostavku istinosti hipoteze \mathcal{H}_0 . Vjerojatnost pogreške druge vrste β jednaka je vjerojatnosti $P_1(\delta_T = 0)$, uz pretpostavku istinosti hipoteze \mathcal{H}_1 .

Log-omjer vjerodostojnosti S_k definiran sa

$$S_k = \sum_{i=1}^k \ln \frac{q_1(Z_i)}{q_0(Z_i)}, \quad (1.4)$$

također može biti korišten umjesto Λ_k (možemo zamijetiti da je S_k dobiveno iz $\ln \Lambda_k$) kako bi se odredilo sekvencijalno pravilo odlučivanja (δ, T) . U domeni log-vjerodostojnosti vrijeme zaustavljanja SPRT testa jednako je

$$T = T_{\{-a,h\}}^{\text{SPRT}} = \inf \{k \geq 0 \mid S_k \notin (-a, h)\} \quad (1.5)$$

gdje je $\ln A = -a$ i $\ln B = h$. Funkcija odlučivanja tada postaje

$$\delta_T = \begin{cases} 0 & \text{kada je } S_T \leq -a, \\ 1 & \text{kada je } S_T \geq h. \end{cases} \quad (1.6)$$

Jedna od bitnih koncepata koji se koristi u analizi provedbe SPRT algoritma je koncept premašivanja (prekoračivanja).

Definicija 1.1.1. *Premašivanje $O(T, S_t, -1, h, \delta_T)$ je definirano kao*

$$O(T, S_t, -1, h, \delta_T) = \begin{cases} |S_T + a| & \text{ako } \delta_T = 0, \\ |S_T - h| & \text{ako } \delta_T = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Pobliže promatrajući formulu jasno je da je $O(T, S_t, -1, h, \delta_T)$ slučajna varijabla. Kada je $O(T, S_t, -1, h, \delta_T)$ identički jednako nuli tada nema premašivanja (S_T je uvijek jedna od dvije granice $\{a, h\}$), dok kada je $O(T, S_t, -1, h, \delta_T)$ različito od nula imamo premašivanje.

Teorem 1.1.2. (Wald-Wolfowitz) *Neka je (T, δ) sekvencijalno pravilo odlučivanja za sekvencijalni test omjera vjerojatnosti SPRT(A, B) uz $0 < A \leq q \leq B < \infty$ te neka je (T', δ') bilo koje drugo sekvencijalno pravilo odlučivanja za kojega vrijedi $\max\{E_0[T'], E_1[T']\} < \infty$, i koji zadovoljava*

$$\alpha' = P_0(\delta_{T'} = 1) \leq P_0(\delta_T = 1) = \alpha \text{ i } \beta' = P_1(\delta_{T'} = 0) \leq P_1(\delta_T = 0) = \beta,$$

sa

$$P_0(\delta_T = 1) + P_1(\delta_T = 0) < 1.$$

Tada vrijedi

$$E_0[T'] \geq E_0[T] \text{ i } E_1[T'] \geq E_1[T].$$

Sada se nameće logično pitanje, kako odrediti granice A i B kako bi postigli određenu vjerojatnost pogreške. Zbog kompleksnosti traženja egzaktnih granica A i B tražimo njihove aproksimacije koje je vrlo jednostavno za pronaći i koje u praksi vrlo dobro zamjenjuju egzaktne vrijednosti (za više detalja o traženju egzaktnim granicama vidi [1]). Te aproksimacije nazivamo Waldovim aproksimacijama od A i B .

Kada je $\Lambda_k \geq B$ zaustavljamo opservacije i prihvaćamo hipotezu \mathcal{H}_1 . Sekvencijalno pravilo odlučivanja nas vodi do

$$\prod_{i=1}^k q_1(Z_i) \geq B \prod_{i=1}^k q_0(Z_i) \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^k q_1(Z_i)}{\prod_{i=1}^k q_0(Z_i) + \prod_{i=1}^k q_1(Z_i)} \geq B \frac{\prod_{i=1}^k q_0(Z_i)}{\prod_{i=1}^k q_0(Z_i) + \prod_{i=1}^k q_1(Z_i)}, \quad (1.8)$$

gdje izraz na desnoj strani nejednakosti predstavlja vjerojatnost prihvaćanja neispravne hipoteze ako smo prihvatili hipotezu \mathcal{H}_1 što je ustvari pogreška prve vrste $\alpha = P_0(\delta = 1)$. S druge strane izraz na lijevoj strani nejednakosti je pogreška druge vrste $\beta = P_1(\delta = 0)$ koja predstavlja vjerojatnost prihvaćanja ispravne hipoteze ako smo prihvatili \mathcal{H}_1 . Nejednakost (1.8) možemo tumačiti kao da je vjerojatnost opažanja Z_k uz istinitost hipoteze \mathcal{H}_1 najmanje B puta veća nego uz istinitost hipoteze \mathcal{H}_0 . Koristeći nejednadžbu (1.8) i prethodna zapažanja možemo doći do izraza za gornju granicu od B :

$$P_1(\delta = 1) \geq B P_0(\delta = 1) \\ B \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}. \quad (1.9)$$

Slično se može dobiti i donja granica za A koja je jednaka

$$A \geq \frac{\beta}{1 - \alpha}. \quad (1.10)$$

Za Waldove aproksimacije uzimamo točno vrijednosti koje nam u jednažbama (1.9) i (1.10) predstavljaju gornju ili donju granicu, tj. one iznose

$$\tilde{A} = \frac{\beta}{1 - \alpha} \text{ i } \tilde{B} = \frac{1 - \beta}{\alpha}.$$

Ako želimo promatrati log-omjer vjerodostojnost tada za Waldove aproksimacije uzimamo

$$-\tilde{a} = \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} \text{ i } \tilde{h} = \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}.$$

1.1.1 Operativne karakteristike SPRT algoritma

Uz sekvencijalni test omjera vjerojatnosti često vežemo i funkciju operativne karakteristike (eng. Operating Characteristic - OC) i funkciju prosječne duljine uzorka (eng. Average Sample Number - ASN). Uzmimo nezavisan, jednako distribuiran niz $Z = \{Z_k\}_{\{k=1,2,\dots\}}$ opažanja (adaptiranih uz filtraciju \mathcal{F}_k), za koji vrijedi jedna od sljedeće dvije hipoteze

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$$

$$\mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1,$$

gdje je $\theta \in \Theta$ neko jedinstveni parametar slučajne varijable koja generira niz Z (npr. θ može predstavljati očekivanje neke slučajne varijable). Ako vrijedi da je θ jednaka θ_1 , slučajna varijabla koja generira niz Z ima gustoću q_0 , slično kada je θ jednako θ_1 tada je niz Z distribuiran prema gustoći q_1 .

Pretpostavimo da je sada niz $S = \{S_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ dobiven iz Z i to na sljedeći način:

$$S_i = \ln \frac{q_1(Z_i)}{q_0(Z_i)},$$

Uz istinitost hipoteze \mathcal{H}_0 slučajna varijabla koja generira S ima gustoću f_0 i uz istinitost hipoteze \mathcal{H}_1 slučajna varijabla će imati gustoću f_1 , što je skraćeno od f_{θ_0} i f_{θ_1} , respektivno. Općenito, kada je jedinstveno svojstvo niza Z jednako θ , niz S će biti distribuirano gustoćom f_θ . Parametar θ ustvari određuje gustoću slučajne varijable koja generira niz S .

Vjerojatnost $\mathcal{P}(\theta)$ prihvatanja hipoteze \mathcal{H}_0 , kao funkcija od $\theta \in \Theta$, uz dane fiksne izlazne granice $-a$ i h nazivamo funkcija operativne karakteristike. Drugim riječima pogreška prve vrste α jednaka je $1 - \mathcal{P}(\theta_0)$, a pogreška druge vrste β jednaka je $\mathcal{P}(\theta_1)$.

Funkcija prosječne duljine uzorka $\mathbb{E}_\theta [T]$ je prosječna duljina uzorka koja je potrebna da se donese odluka prilikom testiranja hipoteza, s fiksnim danim izlaznim granicama $-a$ i h , kao funkcija od $\theta \in \Theta$. U slučaju kada je θ jednak θ_0 ili θ_1 koristi se skraćena notacija $\mathbb{E}_0 [T]$ i $\mathbb{E}_1 [T]$. Ako niz Z slijedi hipotezu \mathcal{H}_0 , očekivana duljina uzorka potrebna da se donese odluka je jednaka $\mathbb{E}_0 [T]$.

Funkcija operativne karakteristike $\mathcal{P}(\theta)$ može se aproksimirati s $\tilde{\mathcal{P}}(\theta)$ pomoću jednadžbe

$$\tilde{\mathcal{P}}(\theta) = \begin{cases} \frac{\exp(-\omega_0(\theta)h) - 1}{\exp(-\omega_0(\theta)h) - \exp(-\omega_0(\theta)a)} & \text{ako } \mathbb{E}_\theta[S_1] \neq 0, \\ \frac{h}{h+a} & \text{ako } \mathbb{E}_\theta[S_1] = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

gdje je $\omega_0(\theta)$ jedinstveni realan broj različit od nule koji zadovoljava

$$\mathbb{E}_\theta \left[e^{-\omega_0(\theta)S_1} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_0(\theta)S_1} f_\theta(S_1) dS_1 = 1, \quad (1.12)$$

ako postoji rješenje različito od nule, inače je $\omega_0(\theta) = 1$, i $\mathbb{E}_\theta[S_1]$ je definirano kao

$$\mathbb{E}_\theta [S_1] = \int_{-\infty}^{\infty} S_1 f_\theta(S_1) dS_1. \quad (1.13)$$

Waldova aproksimacija vjerojatnosti $\mathcal{P}(\theta)$ dobivena je pomoću Waldovog identiteta (za više detalja o Waldovom identitetu vidi [2], a za primjer specijalnog slučaja Waldovog identiteta vidi [4]) koji u ovom slučaju za niz S , vrijeme zaustavljanja, T definirano jednadžbom (1.5) daje sljedeće

$$\mathbb{E}_\theta \left[e^{-\omega S_T} \left(\mathbb{E}_\theta \left[e^{-\omega S_1} \right] \right)^{-T} \right] = 1. \quad (1.14)$$

Waldov identitet vrijedi za sve $\omega \in \{\omega \mid \mathbb{E}_\theta \left[e^{-\omega S_1} \right] < \infty\}$. Jednadžba (1.14) se jednostavno može transformirati u

$$\mathbb{E}_\theta \left[e^{-\omega S_T - T \ln \mathbb{E}_\theta \left[e^{-\omega S_1} \right]} \right] = 1. \quad (1.15)$$

Ako ω zamijenimo s $\omega_0(\theta)$, jednadžba (1.15) postaje

$$\mathbb{E}_\theta \left[e^{\omega_0(\theta)S_T} \right] = 1. \quad (1.16)$$

Ako zanemarimo premašivanje granica $-a$ i h , S_T je aproksimativno jednako ili $-a$ ili h , i jednadžba (1.16) postaje

$$e^{-\omega_0(\theta)h} [1 - P_\theta(S_T \leq -a)] + e^{\omega_0(\theta)a} P_\theta(S_T \leq -a) \approx 1, \quad (1.17)$$

gdje je $P_\theta(S_T \leq -a)$ jednako $\mathcal{P}(\theta)$. Gledajući $\mathcal{P}(\theta)$ kao subjekt jednadžbe (1.17) dobiva se jednadžba (1.11).

Funkciju prosječne duljine uzorka $\mathbb{E}_\theta(T)$ može se aproksimirati pomoću $\tilde{\mathbb{E}}_\theta(T)$ definirao kao

$$\tilde{\mathbb{E}}_\theta[T] = \begin{cases} \frac{-a\tilde{\mathcal{P}}(\theta) + h(1 - \tilde{\mathcal{P}}(\theta))}{\mathbb{E}_\theta[S_1]} & \text{kada je } \mathbb{E}_\theta[S_1] \neq 0, \\ \frac{a^2\tilde{\mathcal{P}}(\theta) + h^2(1 - \tilde{\mathcal{P}}(\theta))}{\mathbb{E}_\theta[S_1^2]} & \text{kada je } \mathbb{E}_\theta[S_1] = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Aproksimacija funkcije prosječne duljine uzorka je također dobivena pomoću Waldovog identiteta, naime

$$\mathbb{E}_\theta[T] = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}_\theta[s_T]}{\mathbb{E}_\theta[s_1]} & \text{ako } \mathbb{E}_\theta[s_1] \neq 0, \\ \frac{\mathbb{E}_\theta[s_T^2]}{\mathbb{E}_\theta[S_1^2]} & \text{ako } \mathbb{E}_\theta[s_1] = 0. \end{cases}, \quad (1.19)$$

gdje je $\mathbb{E}_\theta[s_T]$ jednako

$$-a\tilde{\mathcal{P}}(\theta) + h[1 - \tilde{\mathcal{P}}(\theta)], \quad (1.20)$$

i $\mathbb{E}_\theta[s_T^2]$ jednako

$$a^2\tilde{\mathcal{P}}(\theta) + h^2[1 - \tilde{\mathcal{P}}(\theta)],$$

ako je premašivanje granica ignorirano. Potrebno je napomenuti da je vrijeme zaustavljanja T koje se koristi u Waldovom identitetu vrijeme zaustavljanja iz SPRT algoritma, također, jednostavno se vidi da kada jednadžbe (1.20) i (1.2.1) uvrstimo u (1.19) dobivamo jednadžbu (1.18).

Waldove aproksimacije mogu se izraziti u domeni log-vjerodostojnosti, te se u tom slučaju $\tilde{\mathcal{P}}(\theta)$ i $\tilde{\mathbb{E}}_\theta[T]$ mogu izraziti kao

$$\tilde{\mathcal{P}}(\theta) = \begin{cases} \frac{B^{-\omega_0(\theta)} - 1}{B^{-\omega_0(\theta)} - A^{-\omega_0(\theta)}} & \text{kada je } \mathbb{E}_\theta[S_1] \neq 0, \\ \frac{\ln B}{(\ln BA)^{-1}} & \text{kada je } \mathbb{E}_\theta[S_1] = 0, \end{cases}$$

i

$$\tilde{\mathbb{E}}_\theta[T] = \begin{cases} \frac{\ln A\tilde{\mathcal{P}}(\theta) + \ln B(1 - \tilde{\mathcal{P}}(\theta))}{\mathbb{E}_\theta[S_1]} & \text{kada je } \mathbb{E}_\theta[S_1] \neq 0, \\ \frac{(\ln A)^2\tilde{\mathcal{P}}(\theta) + (\ln B)^2(1 - \tilde{\mathcal{P}}(\theta))}{\mathbb{E}_\theta[S_1^2]} & \text{kada je } \mathbb{E}_\theta[S_1] = 0. \end{cases}$$

U posebno slučaju kada je $\theta = \theta_0$ ili $\theta = \theta_1$ tada $\tilde{\mathcal{P}}(\theta_0)$ i $\tilde{\mathcal{P}}(\theta_1)$ postaju

$$\tilde{\mathcal{P}}(\theta_0) = \frac{B-1}{B-A} \text{ i } \tilde{\mathcal{P}}(\theta_1) = A \frac{B-1}{B-A},$$

respektivno. Funkcija $\mathbb{E}_\theta(T)$ se također pojednostavi u dva specijalna slučaja $\theta = \theta_0$ i $\theta = \theta_1$

$$\tilde{\mathbb{E}}_0[T] = (\tilde{\mathbb{E}}_0[S_1])^{-1} \left[\tilde{\alpha} \ln \left(\frac{1 - \tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \right) + (1 - \tilde{\alpha}) \ln \left(\frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} \right) \right],$$

$$\tilde{\mathbb{E}}_1[T] = (\tilde{\mathbb{E}}_1[S_1])^{-1} \left[(1 - \tilde{\beta}) \ln \left(\frac{1 - \tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \right) + \tilde{\beta} \ln \left(\frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} \right) \right],$$

gdje su $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ Waldove aproksimacije vjerojatnosti pogrešaka.

Primjer 1.1.3. (Gaussova slučajna varijabla) Promatrajmo niz $Z = \{Z_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ nezavisnih, jednako distribuiranih (adaptiranih uz filtraciju \mathcal{F}_k) generiranih Gaussovom slučajnom varijablom s distribucijom $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Problem je odabrati jednu od dvije hipoteze tako da niz podataka najbolje odgovara odabranoj hipotezi. U obzir su uzete sljedeće dvije hipoteze:

$$\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 = 0$$

$$\mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1 = 1.$$

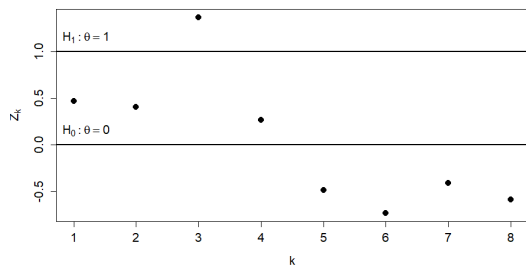
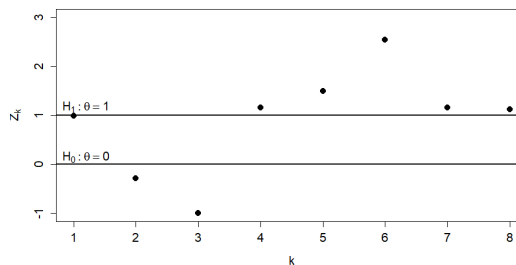
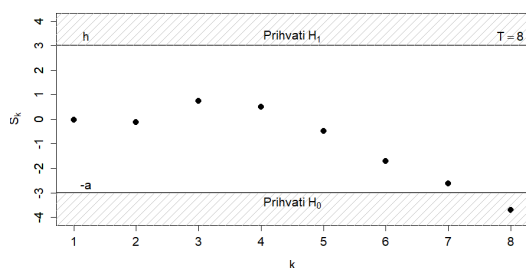
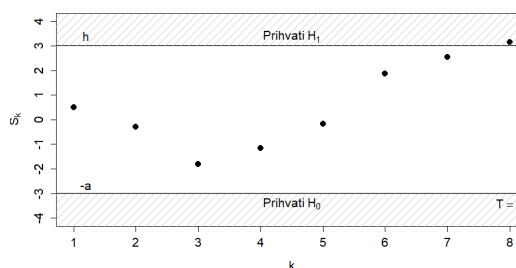
Za dani niz Z , niz S postaje $\{S_k \mid k = 1, 2, \dots\} = \{Z_k - \frac{1}{2} \mid k = 1, 2, 3, \dots\}$ zbog

$$\begin{aligned} S_k &= \ln \frac{q_1(Z_k)}{q_0(Z_k)} \\ &= \ln \frac{e^{-(Z_k-1)^2}}{e^{-Z_k^2}} \\ &= Z_k - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

te je također nezavisan Gaussov niz s gustoćom $f_\theta(S_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(S_1 - (\theta - \frac{1}{2}))^2}{2}}$. Primjeri realizacija od Z_k i S_k kada je $\theta = \theta_0$ ili $\theta = \theta_1$ dane su slikama (1.1), (1.2), (1.3) i (1.4). Potrebno je napomenuti da su nizovi dobro klasificirani za izlazne granice $h = 3$ i $-a = -3$ te za vremena zaustavljanja jednaka $T = 15$ i $T = 11$ u slikama (1.3) i (1.4).

Prvi korak u izračunu OC i ASN funkcija je odrediti $\omega_o(\theta)$ koristeći jednadžbu (1.12) i za ovaj primjer ta vrijednost je jednaka

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\omega_o(\theta) S_1} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega_o(\theta) S_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(S_1 - (\theta - \frac{1}{2}))^2}{2}} dS_1 \\ &= 1 \\ e^{-\omega_o(\theta)(\theta - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \omega_o^2(\theta)} &= e^0 \\ \omega_o(\theta) &= 2\theta - 1 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Slika 1.1: Z_k uz istinost \mathcal{H}_0 Slika 1.2: Z_k uz istinost \mathcal{H}_1 Slika 1.3: S_k uz istinost \mathcal{H}_0 Slika 1.4: S_k uz istinost \mathcal{H}_1

Sljedeći korak je računanje $\mathbb{E}_\theta [S_1]$ koristeći jednadžbu (1.13) pomoću koje dobivamo

$$\mathbb{E}_\theta [S_1] = \theta - \frac{1}{2}.$$

Vrijednost $\mathbb{E}_\theta [S_1^2]$ je također potrebno izračunati i ona iznosi 1 jer je $S_1^2 \sim \chi^2$. Aproximacija funkcije OC određena je supstituiranjem jednadžbe (1.21) u jednadžbu (1.11) čime dobivamo

$$\tilde{\mathcal{P}}(\theta) = \begin{cases} \frac{e^{-(2\theta-1)h} - 1}{e^{-(2\theta)h} - e^{-(2\theta-1)a}} & \text{kada } \theta \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{h}{h+a} & \text{kada } \theta = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Aproximacija funkcije ANS izračunava se na način da zamijenimo $\mathbb{E}_\theta [S_1], \mathbb{E}_\theta [S_1^2]$ i jednadžbu (1.22) i uvrstimo u jednadžbu (1.18) čime dobivamo

$$\tilde{\mathbb{E}}_\theta [T] = \begin{cases} \frac{1}{\theta - \frac{1}{2}} \left[\frac{1 - e^{a(2\theta-1)}}{e^{-h(2\theta-1)} - e^{a(2\theta-1)}} h - \frac{e^{-h(2\theta-1)} - 1}{e^{-h(2\theta-1)} - e^{a(2\theta-1)}} a \right] & \text{kada je } \theta \neq \frac{1}{2}, \\ ah & \text{kada je } \theta = 0. \end{cases}$$

1.2 Bayesovska sekvencijalna detekcija

Nakon Waldove formulacije prelazimo na drugi vid sekvencijalne detekcije, a to je bayesovska formulacija. Neka je ponovno $Z_n = \{z_k\}_{k=1,2,\dots}$ nezavisan i jednako distribuiran niz opservacija te dvije hipoteze:

$$\mathcal{H}_0 : Z_k \sim Q_0, k = 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{H}_1 : Z_k \sim Q_1, k = 1, 2, \dots$$

gdje su Q_0 i Q_1 dvije vjerojatnosne distribucije kojima su pridružene gustoće q_0 i q_1 , respektabilno. Nadalje pretpostavimo da se hipoteza \mathcal{H}_1 događa s apriori vjerojatnošću π , a hipoteza \mathcal{H}_0 s apriori vjerojatnošću $1 - \pi$. Za razliku od Waldovog pristupa u kojem smo tražili granične vrijednosti koje zadovoljavaju određenu vjerojatnost pogreške, problem možemo promatrati na način da od dvije hipoteze odaberemo onu koja minimizira odgovarajuću mjeru pogreške i trošak nove opservacije. Ako se promatra niz $\{Z_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$, između dvije hipoteze možemo birati pomoću granične vrijednosti omjera vjerodostojnosti:

$$\Lambda_n(Z_n) = \prod_{k=1}^n \frac{q_1(Z_k)}{q_0(Z_k)} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{uz istinost hipoteze } \mathcal{H}_0, \\ \infty & \text{uz istinost hipoteze } \mathcal{H}_1. \end{cases}$$

što prirodno vodi do sljedećeg pravila detekcije (poznato kao MAP ili maksimum a posteriori pravilo), a kada se u obzir uzmu apriori vjerojatnosti hipoteza:

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & \text{(tj. hipoteza } \mathcal{H}_0 \text{ je istinita), ako je } \pi_n^\pi \leq 0.5, \\ 1 & \text{(tj. hipoteza } \mathcal{H}_1 \text{ je istinita), ako je } \pi_n^\pi > 0.5. \end{cases}$$

gdje je π_n^π a priori vjerojatnost da je \mathcal{H}_1 točna:

$$\pi_n^\pi = \frac{\pi \prod_{k=1}^n q_1(Z_k)}{\pi \prod_{k=1}^n q_1(Z_k) + (1 - \pi) \prod_{k=1}^n q_0(Z_k)},$$

što se može zapisati na sljedeći način:

$$\pi_n^\pi = \frac{\pi_{n-1}^\pi q_1(Z_n)}{\pi_{n-1}^\pi q_1(Z_n) + (1 - \pi_{n-1}^\pi) q_0(Z_n)}. \quad (1.23)$$

Da bi vidjeli tu činjenicu neka p_k^π bude a priori vjerojatnost i primijetimo da vrijedi

$$p_k^\pi = \frac{\pi \prod_{i=1}^k q_1(Z_i)}{\pi \prod_{i=1}^k q_1(Z_i) + (1 - \pi) \prod_{i=1}^k q_0(Z_i)}. \quad (1.24)$$

Iz jednadžbe iznad slijedi

$$\begin{aligned} p_k^\pi &= \frac{\frac{\pi}{1-\pi} \prod_{i=1}^k \frac{q_1(Z_i)}{q_0(Z_i)}}{\frac{\pi}{1-\pi} \prod_{i=1}^k \frac{q_1(Z_i)}{q_0(Z_i)} + 1} \\ &= \frac{\frac{q_1(Z_k)}{q_0(Z_k)} \frac{\pi}{1-\pi} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_1(Z_i)}{q_0(Z_i)}}{\frac{q_1(Z_k)}{q_0(Z_k)} \frac{\pi}{1-\pi} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_1(Z_i)}{q_0(Z_i)} + 1}. \end{aligned}$$

Primijetimo da vrijedi

$$\frac{\pi_{k-1}^\pi}{1-\pi_{k-1}^\pi} = \frac{\pi}{1-\pi} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_1(Z_i)}{q_0(Z_i)} \quad \forall k \geq 1.$$

Time gornja jednadžba (1.29) postaje

$$\begin{aligned} p_k^\pi &= \frac{\frac{\pi_{k-1}^\pi}{1-\pi_{k-1}^\pi} \frac{q_1(Z_k)}{q_0(Z_k)}}{\frac{\pi_{k-1}^\pi}{1-\pi_{k-1}^\pi} \frac{q_1(Z_k)}{q_0(Z_k)} + 1} \\ &= \frac{p_{k-1}^\pi q_1(Z_k)}{p_{k-1}^\pi q_1(Z_k) + (1-p_{k-1}^\pi)q_0(Z_k)} \end{aligned}$$

Uz napomenu da je $p_0^\pi = \pi$ slijedi da je $\pi_k^\pi = p_k^\pi$.

Pretpostavimo da se promatra sekvencijalni niz $\{Z_k \mid k = 1, 2, \dots\}$, generirajući filtraciju $\{\mathcal{F}_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ uz

$$\mathcal{F}_k = \sigma(Z_1, Z_2, \dots, Z_k), k = 1, 2, \dots, \mathcal{F}_0 = (\Omega, \emptyset),$$

te da postoji trošak $c \geq 0$ za svaku novu opservaciju. Očito se kvaliteta odluke između hipoteze H_0 i H_1 poboljšava većim uzorkom, ali se isto tako i trošak donošenja odluke također povećava. Uz trošak opažanja nove opservacije pretpostavlja se da postoji trošak da se dogodi pogreška prve vrste $c_0 > 0$ i trošak da se dogodi pogreška druge vrste $c_1 > 0$. Prednost ovakvog pristupa je fleksibilnost u smislu da poanta nije imati najmanju vjerojatnost pogreške već minimizirati funkciju troška koja u obzir uzima spomenute c, c_0 i c_1 . Takvu formulaciju problema nazivamo bayesovski problem sekvencijalne detekcije.

Kao i ranije, sekvencijalni test se sastoji od sekvencijalnog pravila detekcije (T, δ) , gdje je $T \in \mathcal{T}$ vrijeme zaustavljanja i $\delta_k \in \mathcal{D}$ \mathcal{F}_k -izmjeriva funkcija te za njega definiramo prosječni trošak greške:

$$c_\varepsilon(T, \delta) = (1-\pi)c_0P_0(\delta_T = 1) + \pi c_1P_1(\delta_T = 0) = (1-\pi)c_0\alpha + \pi c_1\beta$$

gdje P_0 i P_1 predstavljaju vjerojatnosne mjere na $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ takve da su, uz P_j Z_1, Z_2, \dots nezavisno, jednako distribuirani uz marginalnu distribuciju Q_j , za $j = 0, 1$. Ako nadalje razmotrimo vjerojatnosni prostor $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty, P_\pi)$ gdje je

$$P_\pi = (1 - \pi)P_0 + \pi P_1,$$

možemo definirati trošak simuliranja (tj. trošak uzimanja još jedne opservacije) koju možemo izraziti kao

$$c\mathbb{E}_\pi [T] = c[(1 - \pi)\mathbb{E}_0 [T] + \pi\mathbb{E}_1 [T]],$$

gdje $\mathbb{E}_\pi [\cdot]$ označava očekivanje uz vjerojatnosnu mjeru P_π . Potrebno je primijetiti da opservacije u odnosu na mjeru P_π više nisu nezavisne.

Ukupni trošak (Byesov rizik) nastao bilo kojim sekvencijalnim pravilom odlučivanja je jednak sumi prosječnog troška greške i troška simuliranja i možemo ju izraziti kao

$$c\mathbb{E}(T, \delta) + c\mathbb{E}_\pi [T].$$

Prirodno je pretpostaviti da je najbolje sekvencijalno pravilo odlučivanja ono koje minimizira ukupni trošak što možemo zapisati kao

$$s(\pi) = \inf_{T \in \mathcal{T}, \delta \in \mathcal{D}} [c_e(T, \delta) + c\mathbb{E}_\pi [T]], \pi \in (0, 1], \quad (1.25)$$

gdje je $s(\pi)$ poznata kao funkcija minimalnog očekivanog troška, a \mathcal{T} i \mathcal{D} skupovi svih mogućih vremena zaustavljanja i pravila odlučivanja, respektivno.

Propozicija 1.2.1. *Za svaki $T \in \mathcal{T}$, imamo*

$$\inf_{\delta \in \mathcal{D}} c_e(T, \delta) = \mathbb{E}_\pi \{\min [c_1 \pi_T^\pi, c_0(1 - \pi_T^\pi)]\}, \quad (1.26)$$

gdje je niz $\{\pi_n^\pi\}$ definirano kao u (1.23). Štoviše, infimum u (1.26) poprima se pravilom odlučivanja

$$\delta_n = \begin{cases} 0, & \text{ako } \pi_n^\pi < \frac{c_0}{c_0 + c_1}, \\ 1, & \text{ako } \pi_n^\pi \geq \frac{c_0}{c_0 + c_1}. \end{cases}$$

Dokaz. Propozicija je očita u slučaju kada je $\pi = 0$ ili $\pi = 1$ pa se posvećujemo slučaju kada vrijedi $\pi \in (0, 1)$.

Fiksirajmo $T \in \mathcal{T}$. Za bilo koji $\delta \in \mathcal{D}$ možemo pisati

$$c_e(T, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1 - \pi)c_0 \int_{\{\delta_k=1, T=k\}} dP_0 + \pi c_1 \int_{\{\delta_k=0, T=k\}} dP_1 \right].$$

Promotrimo drugi pribrojnik u gornjem izrazu. Koristeći Radon-Nikodymov teorem i činjenicu da P_π dominira P_1 za $\pi > 0$ možemo pisati

$$\int_{\{\delta_k=0, T=k\}} dP_1 = \int_{\{\delta_k=0, T=k\}} \frac{dP_1}{dP_\pi} dP_\pi.$$

Sada, kako su događaj $\{\delta_k\}$ i događaj $\{T = k\}$ u \mathcal{F} možemo pisati

$$\begin{aligned} \pi \int_{\{\delta_k=0, T=k\}} \frac{dP_1}{dP_\pi} dP_\pi &= \pi \int_{\{\delta_k=0, T=k\}} E_\pi \left\{ \frac{dP_1}{dP_\pi} \mid \mathcal{F}_k \right\} dP_\pi \\ &= \int_{\{\delta_k=0, T=k\}} \pi_k^\pi dP_\pi, \end{aligned}$$

uz

$$\pi_k^\pi = \frac{\pi \prod_{j=1}^k q_1(Z_j)}{(1-\pi) \prod_{j=1}^k q_0(Z_j) + \pi \prod_{j=1}^k q_1(Z_j)},$$

gdje koristimo konvenciju da je $\prod_a^b = 1$ ako je $b < a$. Kako bi vidjeli zašto je gornja jednakost istinita moramo primijetiti da se $\frac{dP_1}{dP_\pi}$ može opisati kao omjer vjerojatnosti opažanja Z_1, \dots, Z_k ako je P_1 prava mjera podijeljeno s vjerojatnošću opažanja Z_1, \dots, Z_k ako je P_π prava mjera. Drugim riječima,

$$\frac{dP_1}{dP_\pi} = \frac{\prod_{i=1}^k q_1(Z_i)}{\prod_{i=1}^k q_1(Z_i)\pi + \prod_{i=1}^k q_0(Z_i)(1-\pi)}.$$

Koristeći jednadžbu (1.24) tvrdnja slijedi.

Slično,

$$(1-\pi) \int_{\{\delta_k=1, T=k\}} dP_0 = \int_{\{\delta_k=1, T=k\}} (1-\pi_k^\pi) dP_\pi,$$

i tako dobivamo

$$c_e(T, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[c_0 \int_{\{\delta_k=1, T=k\}} (1-\pi_k^\pi) dP_\pi + c_1 \int_{\{\delta_k=0, T=k\}} \pi_k^\pi dP_\pi \right].$$

Sada je iz (1.27) jasno da $c_e(T, \delta)$ poprima minimum $\delta \in \mathcal{D}$ u pravilu odlučivanja

$$\delta_k^0 = \begin{cases} 1, & \text{ako } c_1 \pi_k^\pi \geq c_0(1-\pi_k^\pi), \\ 0, & \text{ako } c_1 \pi_k^\pi < c_0(1-\pi_k^\pi). \end{cases} \quad (1.27)$$

Zbog toga možemo zaključujemo

$$\begin{aligned} \min_{\delta \in \mathcal{D}} c_e(T, \delta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{T=k\}} \min\{c_1 \pi_k^\pi, c_0(1-\pi_k^\pi)\} dP_\pi \\ &= E_\pi \{ \min\{c_1 \pi_T^\pi, c_0(1-\pi_T^\pi)\} \}. \end{aligned}$$

□

Propozicija 1.2.1 smanjuje problem (1.25) na alternativan problem

$$\inf_{\tau \in \mathcal{T}} E_{\pi} \{ \min [c_1 \pi_{\tau}^{\pi}, c_0(1 - \pi_{\tau}^{\pi})] + c\tau \}, \quad (1.28)$$

u kojem više ne pretražujemo po svim pravilima odlučivanja $\delta \in \mathcal{D}$.

Zbog rekurzivnosti niza π_n^{π} novi problem može se promatrati kao problem Markovljevog optimalnog vremena zaustavljanja, za to naravno moramo primijetiti da je $\pi_n \pi$ homogen Markovljev lanac.

Teorem 1.2.2. (Optimalno sekvencijalno pravilo odlučivanja za nezavisan jednako distribuiran niz) Promatrajmo problem optimizacije dan jednadžbom (1.28) ili jednadžbom (1.25). Optimalno rješenje je dano pravilom sekvencijalne odluke (T, δ) s

$$\tau_{opt} = \inf \{ n \geq 0 \mid \pi_n^{\pi} \notin (\pi_L, \pi_U) \} \quad (1.29)$$

i

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & \text{ako } \pi_n^{\pi} \leq \frac{c_0}{c_0+c_1}, \\ 1 & \text{ako } \pi_n^{\pi} > \frac{c_0}{c_0+c_1}. \end{cases}$$

gdje su izlazne granice π_L i π_U dane s

$$\pi_L = \sup \{ 0 \leq \pi \leq 1 \mid s(\pi) = c_1 \pi \} \quad (1.30)$$

i

$$\pi_U = \sup \{ 0 \leq \pi \leq 1 \mid s(\pi) = c_0(1 - \pi) \} \quad (1.31)$$

respektivno. Ustvari, optimalno sekvencijalno pravilo odlučivanja nastavlja uzimati opservacije sve dok vrijedi $\pi_k^{\pi} \notin (\pi_L, \pi_U)$ nakon čega odabire hipotezu H_1 kao istinitu ako je $\pi_k^{\pi} \geq \pi_L$, a inače odabire H_0 kao istinitu.

Koristeći slijedeća tri rezultat odrediti ćemo računsku metodu za računanje funkcije optimalnog troška $s(\pi)$ i izlazne granice π_L i π_U dane u teoremu (1.2.2).

Teorem 1.2.3. Neka je $x = \{X_k \mid k = 0, 1, \dots\}$ homogeni Markovljev lanac i neka funkcije $g(x)$ i $c(x)$ zadovoljavaju sljedeće

$$|g(x)| \leq G < \infty, 0 \leq c(x) \equiv c < \infty, \forall x. \quad (1.32)$$

Ako je promatrani problem optimizacije oblika

$$v(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_x \{ g(X_{\tau}) - \sum_{v=0}^{\tau-1} c \},$$

tada je

$$v(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q^N g(x)$$

gdje je Q^N N -ta potencija operatora

$$Qf(x) = \max\{f(x), \mathcal{R}f(x) - c\}$$

i gdje je operator \mathcal{R} definiran sa

$$\mathcal{R}f(x) = E_x\{f(X_1)\}.$$

Dodatno, vrijeme zaustavljanja

$$\tau = \inf\{n \geq 0 \mid g(X_n) = v(X_n)\}$$

je optimalno.

Propozicija 1.2.4. (\mathcal{R} je pozitivan linearan operator) Neka je $\{X_k \mid k = 0, 1, \dots\}$ homogeni Markovljev lanac s vrijednostima u prostoru stanja (E, \mathcal{B}) i neka su f i g \mathcal{B} -izmjerive funkcije. Operator \mathcal{R} definiran s

$$\mathcal{R}f(x) = E_x\{f(X_1)\}$$

je pozitivan linearan operator.

Dokaz. Da bi \mathcal{R} bio pozitivan linearan operator moraju biti ispunjena sljedeća dva uvjeta:

1. $f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{R}f \geq 0$ (pozitivnost)
2. $\mathcal{R}[f - g](x) = (\mathcal{R}f)(x) - (\mathcal{R}g)(x)$ (linearnost)

Najprije pokazujemo da je \mathcal{R} pozitivan operator, tj. da vrijedi $\mathcal{R} \geq 0$. Neka je f (pozitivna) funkcija takva da vrijedi

$$f(x) \geq 0, \text{ za svaki } x \in \mathcal{D}(f),$$

gdje $\mathcal{D}(f)$ označava domenu funkcije f . Tada očito imamo i

$$f[X_1(\omega)] \geq 0, \text{ za svaki } \omega \in \Omega.$$

Na kraju

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}g)(x) &= E_x[f(X_1)] \\ &= \int_{\Omega} f(X_1 \mid X_0 = x) dP \geq 0, \end{aligned}$$

stoga slijedi da je \mathcal{R} pozitivan operator.

Kako bi pokazali da je \mathcal{R} linearan računamo slijedeće:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}[f - h](x) &= E_x[f - h](X_1) \\ &= E_x[f(X_1)] - E_x[h(X_1)] \\ &= (\mathcal{R}f)(x) - (\mathcal{R}h)(x),\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi iz svojstva linearnosti očekivanja. \square

Korolar 1.2.5. *Primijetimo da $\mathcal{R} \geq 0$ znači da je $\mathcal{R}f \geq 0$ za sve funkcije f takve da je $f \geq 0$.*

Lema 1.2.6. *Ako je T pozitivan linearan operator, tada vrijedi*

$$T[\max\{g, Tg\}](x) \geq Tg(x).$$

Dokaz. Koristeći pozitivnost i linearnost od T imamo slijedeće:

$$\begin{aligned}\max\{g(x), Tg(x)\} \geq g(x) &\Rightarrow \max\{g(x), Tg(x)\} - g(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow T[\max\{g(x), Tg(x)\} - g(x)] \geq 0 \\ &\Rightarrow T[\max\{g(x), Tg(x)\}] - Tg(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow T[\max\{g, Tg\}](x) \geq Tg(x)\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana. \square

Sada imamo sve potrebne rezultate kako bi mogli izvesti računsku metodu za određivanje minimalne funkcije troškova.

Propozicija 1.2.7. *(Izračunavanje funkcije minimalnog troška za nezavisan, jednako distribuiran niz) Funkcija minimalnog troška $s(\pi) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}} E_\pi\{h(\pi_\tau^\pi) + c\tau\}$, gdje je $h(\pi) = \min\{c_1\pi, c_0(1 - \pi)\}$, je monoton po točkama limes odozgo niza funkcija*

$$s_n(\pi) = \min\{h(\pi), \mathcal{R}s_{n-1}(\pi) + c\}, n = 1, 2.. \quad (1.33)$$

uz $s_0(\pi) = h(\pi)$, i gdje je operator \mathcal{R} definiran s

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f(\pi) &= E_\pi[f(\pi_q^\pi)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi q_1(Z_1)}{\pi q_1(Z_1) + (1 - \pi)q_0(Z_1)}\right) [\pi q_1(Z_1) + (1 - \pi)q_0(Z_1)] dZ_1,\end{aligned}$$

takav da je

$$\mathcal{R}s_{n-1}(\pi) = E_\pi\{s_{n-1}(\pi_1^\pi)\}.$$

Dokaz. Najprije je funkciju minimalnog troška $s(\pi)$ potrebno zapisati na način da možemo primijeniti teorem (1.2.3):

$$\begin{aligned}
s(\pi) &= \inf_{\tau \in \mathcal{T}} E_{\pi}\{h(\pi_{\tau}^{\pi}) + c\tau\} \\
&= -\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{\pi}\{-h(\pi_{\tau}^{\pi}) - c\tau\} \\
&= -\sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{\pi}\{g(\pi_{\tau}^{\pi}) - c\tau\} \\
&= -v(\pi)
\end{aligned} \tag{1.34}$$

gdje je $g(x) := -h(x)$ i $v(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_x\{g(X_{\tau}) - c\tau\}$ isto kao i u teoremu (1.2.3). Primjećujemo da je sada $s(\pi)$ u (1.34) takva da možemo jednostavno primijeniti teorem (1.2.3) (naravno uz $v(\pi) = -s(\pi)$). Dodatno, $\{\pi_n^{\pi}\}$ je homogen Markovljev proces te funkcije $g(x)$ i $c(x) \equiv c$ očito zadovoljavaju uvjete dane u (1.32). Stoga po teoremu (1.2.3) slijedi

$$\begin{aligned}
v(\pi) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E_{\pi}\{g(\pi_{\tau}^{\pi}) - c\tau\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} Q^N g(\pi),
\end{aligned}$$

uz

$$\begin{aligned}
v_1(\pi) &= Qg(\pi) = \max\{g(\pi), \mathcal{R}g(\pi) - c\} \\
&= -\min\{h(\pi), \mathcal{R}h(\pi) + c\} \\
&= -\min\{h(\pi), \mathcal{R}s_0(\pi) + c\} \\
&= -s_1(\pi),
\end{aligned}$$

gdje je $\mathcal{R}s_0(\pi) = E_{\pi}\{s_0(\pi_1^{\pi})\}$. Također, zbog leme (1.2.6) znamo da vrijedi

$$T[\max\{g, Tg\}] \geq Tg \tag{1.35}$$

za bilo koji linearan operator T , a kako je \mathcal{R} linearan operator po propoziciji (1.2.4) imamo

$$\begin{aligned}
v_2(\pi) &= Q^2 g(\pi) = \max\{Qg(\pi), \mathcal{R}Qg(\pi) - c\} \\
&= \max\{\max[g(\pi), \mathcal{R}g(\pi) - c], \mathcal{R}[\max(g(\pi), \mathcal{R}g(\pi) - c)] - c\} \\
&= \max\{g(\pi), \mathcal{R}[\max(g(\pi), \mathcal{R}g(\pi) - c)] - c\} \\
&= \max\{g(\pi), \mathcal{R}Qg(\pi) - c\} \\
&= \max\{-h(\pi), -\mathcal{R}s_1(\pi) - c\} \\
&= -\min\{h(\pi), \mathcal{R}s_1(\pi) + c\} \\
&= -s_2(\pi),
\end{aligned}$$

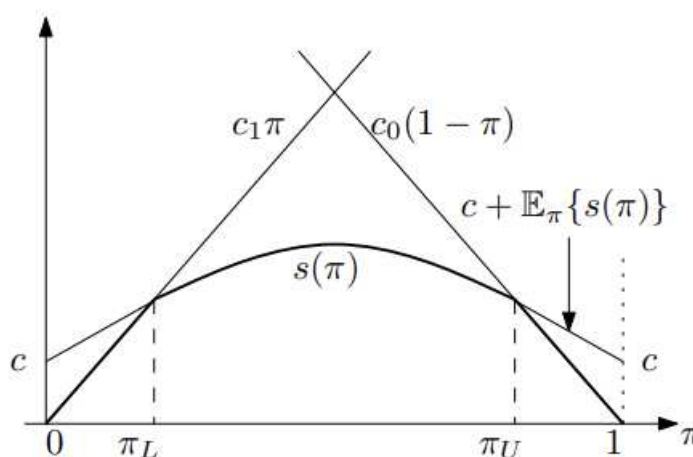
gdje je $\mathcal{R}s_1(\pi) = E_{\pi}\{s_1(\pi_1^{\pi})\}$. Nastavljajući dalje na ovaj način vidi se da $-Q^n g(\pi)$, $n = 1, 2, \dots$ odgovara nizu funkcija $s_n(\pi)$ danom u (1.33). \square

Propozicija (1.2.7) predstavlja sredstvo za izračunavanje funkcije minimalnog troška $s(\pi)$ nakon čega je relativno jednostavno odrediti izlazne granice π_L i π_U koristeći jednadžbe (1.30) i (1.31).

1.2.1 Struktura funkcije minimalnog troška

Može se pokazati da je funkcija minimalnog troška $s(\pi)$ konkavna, te da je omeđena s $0 \leq s(\pi) \leq h(\pi)$, gdje je $h(\pi) = \min\{c_1\pi, c_0(1 - \pi)\}$ kao što je definirano u propoziciji (1.2.7). Dodatno, uvijek vrijedi $s(0) = s(1) = 0$. Primijetimo da priori vjerojatnost da je \mathcal{H}_1 istinita (tj. vjerojatnost π) ne utječe na izračun funkcije minimalnog troška.

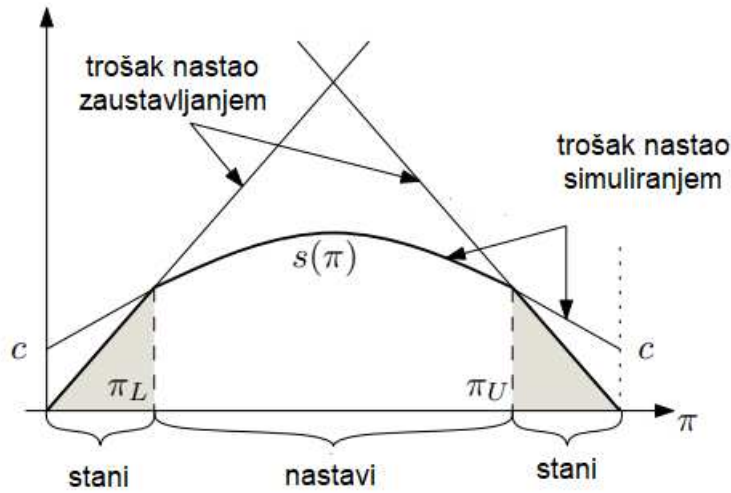
Tipična funkcija minimalnog troška prikazana je na slici (1.5), gdje jednaki troškovi grešaka ($c_0 = c_1$) uzrokuju simetričnost funkcije minimalnog troška $s(\pi)$ oko pravca $\pi = \frac{1}{2}$. Sa slike (1.6) možemo primijetiti da se $s(\pi)$ može podijeliti u regije akcije (tj. regiju nastavi



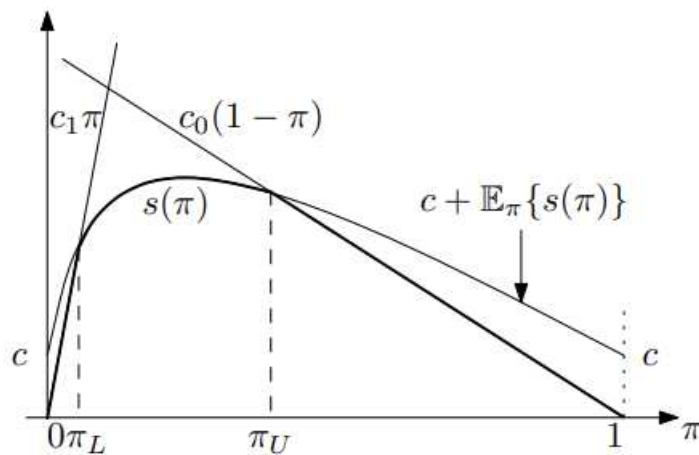
Slika 1.5: Funkcija minimalnog troška $s(\pi)$, $c_0 = c_1$.

simulirati ili regiju stani sa simuliranjem). Točnije, očito je da $s(\pi)$ odgovara, na svakom $\pi \in [0, 1]$, minimumu između troška nastalog kada nastavimo simulirati (što odgovara $c + E_\pi\{s(\pi)\}$) i troška nastalog zaustavljanjem (što je jednostavno $h(\pi)$).

Isti zaključci odnose se i na sliku (1.7) gdje je jedina razlika ta što troškovi grešaka (c_0 i c_1) više nisu jednaki.



Slika 1.6: Regije odlučivanja funkcije minimalnog troška $s(\pi)$, $c_0 = c_1$.



Slika 1.7: Funkcija minimalnog troška $s(\pi)$, $c_0 \neq c_1$.

1.3 Veza bayesovske i Waldove sekvencijalne detekcije

Bayesovsko optimalno vrijeme zaustavljanja definirano u (1.29) se također može zapisati kao

$$\tau_{opt} = \inf\{n \geq 0 \mid \Lambda_n \notin (A, B)\},$$

gdje su pragovi A i B dani sa

$$A = \frac{1 - \pi}{\pi} \frac{\pi_L}{1 - \pi_L} \Leftrightarrow \pi_L = \frac{\pi A}{1 - \pi(1 - A)},$$

i

$$B = \frac{1 - \pi}{\pi} \frac{\pi_U}{1 - \pi_U} \Leftrightarrow \pi_U = \frac{\pi B}{1 - \pi(1 - B)},$$

čime je pokazano da je bayesovsko optimalno sekvencijalno pravilo odlučivanja s granicama π_L i π_U odgovara Waldovom sekvencijalnom testu omjera vjerojatnosti (SPRT) s izlaznim granicama A i B definiranim kao gore.

Zbog navedenoga sad slijedi da je Wald-Wolfowitz teorem vrijedi i za bayesovsko optimalno sekvencijalno pravilo odlučivanja (kako je ono ekvivalentno onom iz SPRT algoritma), i da niti jedan drugi test (sekvencijalan ili drugačiji) neće imati manju očekivanu duljinu uzorka sa istom vjerojatnošću pogreške.

Koristeći Waldove aproksimacije (1.9) i (1.10) vrijednosti α i β mogu se (aproksimativno) dobiti kao:

$$\alpha \approx \frac{1 - A}{B - A} = \frac{\pi_L - \pi}{\pi - 1} \frac{\pi_U - 1}{\pi_L - \pi_U},$$

i

$$\beta \approx A \frac{B - 1}{B - A} = \frac{\pi_L}{\pi} \frac{\pi - \pi_U}{\pi_L - \pi_U}.$$

Vjerojatnost pogreške je tada dana s:

$$\mathbb{P}_e = (1 - \pi)\mathbb{P}_0(\delta_\tau = 1) + \pi\mathbb{P}_1(\delta_\tau = 0) = (1 - \pi)\alpha + \pi\beta,$$

koja se također može odrediti aproksimativno zamjenom (2.3) i (2.4) u (2.5).

Poglavlje 2

Najbrža detekcija promjene

U prijašnjem poglavlju promatran je problem optimalnog testiranja dvije različite hipoteze temeljem nekog niza opservacija tj. pripadnosti tog niza podataka nekom statističkom modelu. U oba ponuđena modela podaci su homogeni, tj. podaci slijede samo jedan od danih modela kroz cijeli period promatranja. U ovom poglavlju promatran je generaliziran problem u kojem je moguće da statističko obilježje danog niza podataka može promijeniti pripadnost jednom modelu u drugi u nekom trenutku promatranja opservacija. Cilj je otkriti takvu točku promjenu, ako se ista i dogodi, u najkraćem mogućem vremenu. Naravno da se takav cilj mora ostvariti uz minimizaciju detekcije točaka koje nisu točke promjene, a takve pojave nazivaju se lažne uzbune. Probleme ovakve prirode nazivamo problemima najbrže detekcije točaka promjena.

Najjednostavniji vid promatranja ovakvog problema je da promatramo niz nasumičnih opservacija Z_1, Z_2, Z_3, \dots uz pretpostavku da postoji točka promjene $\tau \geq 1$ (moguće $\tau = \infty$) takva da za dani t , $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{\tau-1}$ dolaze iz jedne distribucije, a $Z_\tau, Z_{\tau+1}, \dots$ iz neke druge distribucije. Skup strategija za rješavanje problema detekcije se ustvari sastoji od skupa vremena zaustavljanja sa interpretacijom da vrijeme zaustavljanja T govori da se točka promjene τ dogodila u ili prije vremena k kada je $T = k$.

Algoritam za najbržu detekciju točaka promjene tipično uključuje optimizaciju kompromisa između dvije vrste mjera uspješnosti, od kojih je jedna mjera kašnjenje između vremena kada se promjena zaista dogodila i kada je detektirana, a druga frekvencija lažnih uzbuna. Spomenuti problem najprije je promatran kroz bayesovsko gledište, u kojem je nepoznata točka promjene slučajna varijabla s poznatom apriori distribucijom.

2.1 Bayesovska najbrža detekcija promjene

2.1.1 Shiryajevljev problem

Problem je najprije promatran u diskretnom slučaju u kojem je dan slučajan niz $\{Z_k : k = 1, 2, \dots\}$ sa slučajnom točkom promjene τ . Pretpostavlja se da je uvjetno na točku τ , niz $\{Z_k : k = 1, 2, \dots\}$ nezavisan tako da je $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{\tau-1}$ nezavisan jednako distribuiran niz s marginalnom distribucijom Q_0 i $Z_\tau, Z_{\tau+1}, \dots$ nezavisan jednako distribuiran niz s marginalnom distribucijom Q_1 . Opservacije $\{Z_k : k = 1, 2, \dots\}$ generiraju filtraciju $\{\mathcal{F}_k : k = 1, 2, \dots\}$ danu s

$$\mathcal{F}_k = \sigma(Z_1, \dots, Z_k, \{\tau = 0\}), k = 1, 2, \dots$$

i \mathcal{F}_0 sadrži ne samo Ω nego i skup $\{\tau = 0\}$.

U danoj situaciji, za vrijeme zaustavljanja T , kao mjeru kašnjenja uzimamo očekivano kašnjenje:

$$\mathbb{E}\{(T - \tau + 1)^+\}, \quad (2.1)$$

Slično, za mjeru stope lažnih uzbuna uzimamo vjerojatnost lažne zbune:

$$P(T < \tau).$$

Naravno cilj je odrediti vrijeme zaustavljanje T kojima dobivamo optimalan kompromis između malog kašnjenja detekcije i male stope lažnih uzbuna.

Dobar način implementiranja takvih kompromisa je tražiti $T \in \mathcal{T}$ koje rješava sljedeći problem optimizacije

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} [P(T < \tau) + c\mathbb{E}\{(T - \tau + 1)^+\}], \quad (2.2)$$

gdje je $c > 0$ konstanta koja kontrolira važnost dvije mjere uspješnosti. Može se zamijetiti da je dovoljno promatrati vremena zaustavljanja za koja vrijedi da je $\mathbb{E}\{T\} < \infty$. To opažanje slijedi iz činjenice da vrijedi $\mathbb{E}\{(T - \tau + 1)^+\} = \mathbb{E}\{T\} - \mathbb{E}\{(T \wedge (\tau - 1))\}$, tako da ako je $\mathbb{E}\{T\} = \infty$ imamo

$$[P(T < \tau) + c\mathbb{E}\{(T - \tau + 1)^+\}] = \infty$$

Analizu danog problema započinjemo transformiranjem (2.2) u problem optimalnog vremena zaustavljanja što postizemo slijedećim rezultatom.

Propozicija 2.1.1. *Pretpostavimo da je $\mathbb{E}\{\tau\} < \infty$, $\mathbb{E}\{T\} < \infty$ i definiramo niz π_k s*

$$\pi_k = P(\tau \leq k | \mathcal{F}_k), k = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

Tada, za svaki $T \in \mathbb{T}$, vrijedi

$$P(T < \tau) + c\mathbb{E}\{(T - \tau + 1)^+\} = \mathbb{E}\{1 - \pi_T + c \sum_{m=0}^T \pi_m\}. \quad (2.4)$$

Korolar 2.1.2. *Primijetimo da je*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\pi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} &= \mathbb{E}\{P(\tau \leq n+1 \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\} \\ &= P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_n) + P(\tau = n \mid \mathcal{F}_n) \\ &\geq P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_n) = \pi_n\end{aligned}$$

Zbog ovog rezultata $\{\pi_n\}$ je \mathcal{F}_k -submartingal. Kako je $|\pi_n| \leq 1$, za svaki n , po teoremu dominiranoj konvergenciji (vidi Teorem 5.15 iz [3]) imamo

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{\pi_n\} = \mathbb{E}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n\}. \quad (2.5)$$

Dokaz. Za svako vrijeme zaustavljanja T imamo

$$P(T < \tau) = \mathbb{E}\{1_{\{T < \tau\}}\} = \mathbb{E}\{1 - \pi_T\}.$$

Kako T može poprimiti samo prebrojivo mnogo vrijednosti, gornja jednakost je istinita za sve T , čak i kada poprima vrijednost ∞ jer bi tada po korolaru 2.1.2. desna strana bila 0, a trivijalno i lijeva. Sada preostaje pokazati da je

$$\mathbb{E}\{(T - \tau + 1)^+\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{m=0}^T \pi_m\right\}.$$

Može se pisati

$$\mathbb{E}\{(T - \tau + 1)^+\} = \mathbb{E}\{D_T\},$$

gdje je

$$D_k = \mathbb{E}\{(k - \tau + 1)^+ \mid \mathcal{F}_k\}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}D_k &= \sum_{m=0}^k (k - m + 1)P(\tau = m \mid \mathcal{F}_k) \\ &= \sum_{m=0}^k P(\tau \leq m \mid \mathcal{F}_k) \\ &= \sum_{m=0}^k \pi_m + M_k,\end{aligned}$$

gdje je

$$M_k = \sum_{m=0}^{k-1} [P(\tau \leq m \mid \mathcal{F}_k) - \pi_m], k = 0, 1, \dots \quad (2.6)$$

Promatramo niz $\{M_k\}$. Zbog činjenice da je $\mathbb{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_k$, iterativno svojstvo uvjetnog očekivanja implicira slijedeće

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{P(\tau \leq m \mid \mathcal{F}_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}\} &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{1_{\{\tau \leq m\}} \mid \mathbb{F}_k\} \mid \mathbb{F}_{k-1}\} \\ &= \mathbb{E}\{1_{\{\tau \leq m\}} \mid \mathbb{F}_{k-1}\} \\ &= P(\tau \leq m \mid \mathbb{F}_{k-1}).\end{aligned}$$

Slično, kako je $\mathbb{F}_m \subset \mathbb{F}_{k-1}$, $m = 1, \dots, k-1$, imamo

$$\mathbb{E}\{P(\tau \leq m \mid \mathbb{F}_k) \mid \mathbb{F}_m\} = \pi_m, \forall m < k.$$

Stoga,

$$\mathbb{E}\{M_k \mid \mathbb{F}_{k-1}\} = M_{k-1},$$

čime je pokazano da je $\{M_k\}$ \mathbb{F}_k -martingal.

Sada promatramo veličinu

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} (1 - \pi_m) - \tau.$$

Kako vrijedi,

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{m=0}^k (1 - \pi_m)\right\} = \sum_{m=0}^k P(\tau > m) \uparrow \mathbb{E}\{\tau\} < \infty,$$

pa iz Fatouove leme slijedi da je $\mathbb{E}\{|M|\} < 2\mathbb{E}\{\tau\} < \infty$, zbog čega vrijedi da je M integrabilna slučajna varijabla. Sada zbog,

$$\tau = \sum_{m=0}^{\infty} 1_{\{\tau > m\}},$$

imamo

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} [1 - \pi_m - 1_{\{\tau > m\}}],$$

pa je zbog teorema o dominiranoj konvergenciji uvjetno očekivanje gornjeg izraza jednako

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{M \mid \mathbb{F}_k\} &= \sum_{m=0}^{\infty} [\mathbb{E}\{P(\tau > m \mid \mathbb{F}_m) \mid \mathbb{F}_k\} - P(\tau > m \mid \mathbb{F}_k)] \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} [P(\tau > m \mid \mathbb{F}_m) - P(\tau > m \mid \mathbb{F}_k)] = M_k,\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi iz činjenice da je $\mathbb{F}_k \subset \mathbb{F}_m, m > k$ i iterativnog svojstva očekivanja. Stoga, $\{M_k\}$ je regularan pa opcionalno uzrokovanje implicira

$$\mathbb{E}\{M_T\} = \mathbb{E}\{M_0\} = 0.$$

Kako je $D_k = \sum_{m=0}^k \pi_m + M_k$ slijedi tvrdnja propozicije. \square

Kako bi pronašli optimalna vremena zaustavljanja za problem (2.2) potrebno je pretpostaviti specifičnu apriori distribuciju za točku promjene t . Koristan apriori model proizlazi iz pretpostavke da je točka promjene τ distribuirana prema sljedećim pravilima:

$$P(\tau = 0) = \pi \text{ i } P(\tau = k \mid t \geq k) = \rho,$$

gdje su π i ρ konstante iz intervala $(0, 1)$. Odnosno, postoji vjerojatnost π da se promjena dogodila kad smo počeli promatrati opservacije, i uvjetna vjerojatnost ρ da će niz prijeći u stanje nakon promjene u bilo kojem trenutku, uz uvjet da se to već nije dogodilo do tog trenutka. Ovaj model nas vodi do apriori geometrijske distribucije

$$P(\tau = k) = \begin{cases} \pi \text{ ako } k = 0, \\ (1 - \pi)\rho(1 - \rho)^{k-1} \text{ ako } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

koju ćemo nadalje pretpostavljati za probleme detekcije.

Rješenje problema (2.2) s geometrijskom apriori distribucijom (2.7) dano je sljedećim teoremom.

Teorem 2.1.3. *Za prigodno odabran prag $\pi^* \in [0, 1]$, vrijeme zaustavljanja*

$$T_B = \inf\{k \geq 0 \mid \pi_k \geq \pi^*\} \quad (2.8)$$

je bayesovski optimalno (tj. rješava problem (2.2) s geometrijskom apriori distribucijom (2.7)). Štoviše, ako je $c \geq 1$, tada je $\pi^ = 0$.*

Korolar 2.1.4. *Uz apriori geometrijsku distribuciju (2.7), niz $\{\pi_k\}$ se može izračunati iz rekurzije*

$$\pi_k = \frac{L(Z_k) [\pi_{k-1} + \rho(1 - \pi_{k-1})]}{L(Z_k) [\pi_{k-1} + \rho(1 - \pi_{k-1})] + (1 - \rho)(1 - \pi_{k-1})}, k = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

gdje je $L = \frac{dQ_1}{dQ_0}$ i $\pi_0 = \pi$.

Dokaz. Zbog $\mathbb{E}\{\tau\} < \infty$ možemo primijeniti Propoziciju 2.1.1. da izraz (2.2) zapišemo kao

$$\inf_{T \in \mathbb{T}} \mathbb{E}\{1 - \pi_\tau + c \sum_{m=0}^T \pi_m\} \quad (2.10)$$

Zbog korolara 2.1.4. može se primijetiti da je π_k homogeni Markovljev lanac. Štoviše, u terminu korolara 2.1.2. vrijedi $\pi_k \xrightarrow{a.s.} 1$, zbog čega slijedi

$$\sum_{m=0}^k \pi_m \rightarrow \infty \text{ a.s.}$$

Za izraz u jednadžbi (2.10) može se pokazati da je optimalno vrijeme zaustavljanja jednako

$$T_{\text{opt}} = \inf\{k \geq 0 \mid 1 + (c - 1)\pi_k = s(\pi_k)\}$$

uz

$$s(\pi_k) = \inf_{T \in \mathbb{T}} \mathbb{E}_\pi \left\{ 1 - \pi_T + c \sum_{m=0}^T \pi_m \right\}$$

gdje \mathbb{E}_π označava očekivanje uz pretpostavljenu apriori distribuciju (2.7).

Za fiksni $T \in \mathbb{T}$ zbog Propozicije 2.1.1. i (2.7) imamo da je

$$\mathbb{E}_\pi \left\{ 1 - \pi_T + c \sum_{m=0}^T \pi_m \right\} = (1 - \pi) [P_0(T < \tau) + c\mathbb{E}_0\{(T - \tau + 1)^+\}] + \pi c\mathbb{E}_1\{(T + 1)^+\} \quad (2.11)$$

gdje se indeksi odnose na vrijednosti od π uz koje su odgovarajuće vrijednosti izračunate. Iz (2.11) nadalje slijedi da je

$$c\pi \leq s(\pi) \leq 1 + (c - 1)\pi, 0 \leq \pi \leq 1,$$

pri čemu jednakosti vrijede kada je $\pi = 1$, gdje je gornja granica trošak nastao zbog vremena zaustavljanja $T \equiv 0$.

Zbog tih svojstava zaključujemo da je

$$T_{\text{opt}} = \inf\{k \geq 0 \mid \pi_k \geq \pi^*\}, \quad (2.12)$$

gdje je

$$\pi^* = \inf\{\pi \in [0, 1] \mid s(\pi) = 1 + (c - 1)\pi\}.$$

Kako bi promotrili slučaj $c \geq 1$, jednadžbu (2.10) zapisujemo kao

$$\mathbb{E}\left\{1 + (c - 1)\pi_T + \sum_{m=0}^{T-1} \pi_m\right\} = 1 + (c - 1)P(T \geq \tau) + c\mathbb{E}\left\{\sum_{m=0}^{T-1} \pi_m\right\}.$$

Za $c \geq 1$, ta veličina se očito maksimizira za vrijeme zaustavljanje $T = 0$, ili ekvivalentno, s (2.12) uz $\pi^* = 0$.

Time je završen dokaz teorema. □

Korolar 2.1.5. Vrijednost s je gornja ograda po točkama niza funkcija $\{\mathbb{Q}^n g \mid n = 0, 1, \dots\}$, gdje je g

$$g(\pi) = 1 + (c - 1)\pi, \pi \in [0, 1],$$

s operatorom \mathbb{Q} definiranim kao

$$\mathbb{Q}^1 h(\pi) = \min\{g(\pi), \int h \left[\frac{x[\pi + \rho(1 - \pi)]}{x[\pi + \rho(1 - \pi)] + (1 - \pi)(1 - \rho)} dQ_1(x) \right], \pi \in [0, 1].$$

Zbog činjenice da je $\{\mathbb{Q}^n g \mid n = 0, 1, \dots\}$ monoton, ne rastući niz neprekidnih funkcija, niz π_n^* definiran s

$$\pi_n^* = \inf\{\pi \in [0, 1] \mid \mathbb{Q}^n g(\pi) = g(\pi)\}, n = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

konvergira prema pragu detekcije π^* . Stoga, račun praga i optimalnog troška može se izvesti iterativno.

Jedno optimalno vrijeme zaustavljanja kao u Teoremu 2.1.3. dano je u slijedećem primjeru.

Primjer 2.1.6. Pretpostavimo da su opservacije $\{Z_k\}$ slučajne Bernulijeve varijable s $\mathbb{P}(Z_k = 1) = p_0 \in (0, 1), k = 0, 1, \dots, \tau - 1$ i $\mathbb{P}(Z_k = 1) = p_1 \in (0, 1), k = \tau, \dots$. Iz (2.9) slijedi

$$\pi_k = \frac{\frac{(p_1)^{Z_k} (1-p_1)^{1-Z_k}}{(p_0)^{Z_k} (1-p_0)^{1-Z_k}} [\pi_{k-1} + \rho(1 - \pi_{k-1})]}{\frac{(p_1)^{Z_k} (1-p_1)^{1-Z_k}}{(p_0)^{Z_k} (1-p_0)^{1-Z_k}} [\pi_{k-1} + \rho(1 - \pi_{k-1})] + (1 - \rho)(1 - \pi_{k-1})}, k = 1, \dots$$

uz $\pi_0 = \pi$. Optimalno vrijeme zaustavljanja tada je $T = \inf\{k \geq 0 \mid \pi_k \geq \pi^*\}$, gdje je $\pi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n^*$, s π^* definiranim kao u (2.13) i $Q^1 g = \min\{g(\pi), g(r)\}$ gdje je r jednako

$$r = \frac{\frac{p_1}{p_0} [\pi + \rho(1 - \pi)]}{\frac{p_1}{p_0} [\pi + \rho(1 - \pi)] + (1 - \rho)(1 - \pi)} p_1 + \frac{\frac{1-p_1}{1-p_0} [\pi + \rho(1 - \pi)]}{\frac{1-p_1}{1-p_0} [\pi + \rho(1 - \pi)] + (1 - \rho)(1 - \pi)} (1 - p_1)$$

Stoga, gornji rezultat potpuno opisuje rješenje od (2.2) uz apriori geometrijsku distribuciju danu s (2.7). Posebno, možemo vidjeti da je optimalno vrijeme zaustavljanja prvi prelazak niza $\{\pi_k\}$ aposteriori vjerojatnosti promjene preko odgovarajućeg praga .

2.1.2 Pristup maksimizacije vjerojatnosti

Ovaj pristup baziran je na maksimizaciji vjerojatnosti odabira ispravnog procjenitelja za τ na temelju samo opservacija. Promatran je diskretan problem detekcije, a ideja je pronaći $T^* \in \mathcal{T}$ takvo da vrijedi

$$\mathbb{P}(T^* < \infty, X_{T^*} \in B) = \sup_{T^* \in \mathcal{T}} \mathbb{P}(T < \infty, X_T \in B) \quad (2.14)$$

gdje je B prikladan izmjeriv skup i X_T slučajna varijabla čija vrijednost ovisi o opservacijama Z_1, Z_2, \dots . Takav T^* , ako postoji, nazivamo optimalnim.

Ovdje ćemo promatrati specijalan slučaj problema (2.14) u kojem je $X_n = n$ i $B = [\tau - m, \tau + m]$. Primjećujemo da ako je $X_n = n$, $X_T = T$ je slučajna varijabla čija se vrijednost određuje pomoću opservacija jer je T vrijeme zaustavljanja uz filtraciju $\{\mathcal{F}_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ generiranu opservacijama Z_1, Z_2, \dots . Ovaj slučaj odgovara situaciji u kojoj želimo maksimizirati vjerojatnost zaustavljanja unutar m jedinica od točke promjene τ . Drugim riječima, cilj je pronaći T takav da je

$$\mathbb{P}(|\tau - T^*| \leq m) = \sup_T \mathbb{P}(|\tau - T| \leq m) \quad (2.15)$$

Radi jednostavnosti problem rješavamo za $m = 0$. Također, s L_n ćemo označiti omjer vjerodostojnosti $L(Z_n) = \frac{dQ_1}{dQ_2}(Z_n)$, a s $\Lambda_n = \prod_{k=1}^n L(Z_k) = \prod_{k=1}^n L_k$.

Teorem 2.1.7. *Pretpostavimo da je s (2.7) dana apriori distribucija. Rješenje problema (2.15) za $m = 0$ postoji i dano je s*

$$T^* = \inf\{n \mid L_n \geq r^+\}$$

gdje je $r^* = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, uz $r_n = \int [\max\{x, r_n - 1\}] dQ_1(x)$ i $r_0 = 1$.

Dokaz. Iz Bayesove formule slijedi

$$\mathbb{P}(\tau = k \mid \mathcal{F}_n) = \frac{\mathbb{P}(\tau = k)L_n \dots L_k}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\tau = i)L_n \dots L_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = i)}, \forall k \leq n$$

i

$$\mathbb{P}(\tau = k \mid \mathcal{F}_n) = \frac{\mathbb{P}(\tau = k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\tau = i)L_n \dots L_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = i)}, \forall k > n.$$

Korištenjem definicije od π_n iz (2.3) slijedi

$$\mathbb{P}(\tau = k \mid \mathcal{F}_n) = \frac{\rho}{1 - \rho}(1 - \pi_n)L_n.$$

Nadalje,

$$Y_n = h(\pi_n, L_n),$$

gdje je $h(x, y) = \frac{\rho}{1 - \rho}(1 - x)y$. Također,

$$1 - \pi_{n+1} = \frac{\rho(1 - \pi_n)}{L_{n+1}(1 - (1 - \rho)(1 - \pi_n)) + \rho(1 - \pi_n)},$$

i

$$\begin{aligned}
P(\tau > n + 1 \mid \mathcal{F}_n) &= 1 - P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_n) - P(\theta = n + 1 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= 1 - \pi_n - P(\theta = n + 1 \mid \theta > n)P(\theta > n \mid \mathcal{F}_n) \\
&= (1 - \pi_n)(1 - \rho).
\end{aligned}$$

Sada možemo pisati

$$\begin{aligned}
E\{g(L_{n+1})(1 - \pi_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\} &= E_1\{g(L_{n+1})\}P(\tau \leq n + 1 \mid \mathcal{F}_n) + E_0\{g(L_{n+1})\}P(\tau > n + 1 \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \int [g(x) [x(1 - (1 - \rho)(1 - \pi_n)) + 1 - \pi_n]] dQ_1(x).
\end{aligned}$$

Nadalje dobivamo

$$E\{g(L_{n+1})(1 - \pi_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\} = (1 - \rho)(1 - \pi_n) \int g(x) dQ_1(x). \quad (2.16)$$

Sada možemo primijetiti da je (π_{n+1}, L_{n+1}) funkcija od (π_n, L_n) i L_{n+1} i da uvjetna distribucije od L_{n+1} uz dani \mathcal{F}_n ovisi samo o π_n . Stoga je otkriveno Markovljevo svojstvo od Y_n uz filtraciju \mathcal{F}_n . Znajući da je optimalno vrijeme zaustavljanja

$$T_0 = \inf\{n \mid h(\pi_n, L_n) = h^*(\pi_n, L_n)\},$$

gdje je $h^* = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k h$, uz operator T definiran s

$$Tf = \max\{f, Pf\},$$

i

$$Pf(x, y) = E\{f(\pi_{n+1}, L_{n+1}) \mid \pi_n = x, L_n = y\}.$$

Koristeći (2.16) imamo

$$Ph(x, y) = \frac{\rho}{1 - \rho}(1 - x),$$

i

$$Th(x, y) = \frac{\rho}{1 - \rho}(1 - x) \max\{y, 1\}.$$

Stoga indukcijom dobivamo da je

$$h^*(x, y) = \frac{\rho}{1 - \rho}(1 - x) \lim_{n \rightarrow \infty} r_n,$$

gdje je r_n definirano u iskazu teorema.

Stoga, koristeći (2.32), optimalno vrijeme zaustavljanja je $T_0 = \inf\{n \mid L_n \geq r^*\}$, sve dok je konačno. Kako bi razmotrili problem konačnosti promatramo veličinu

$$a = \inf\{a' \mid P_1(L_1 \leq a') = 1\}.$$

Ako je $a = \infty$ tada je $T^* < \infty$ trivijalno. Alternativno, ako je $a < \infty$ tada je P_1 koncentrirano na $[0, 1]$,

$$0 = P_1(L_1 > a) \geq aP_0(L_1 > a).$$

To znači da je distribucija od L_n također koncentriran na $[0, 1]$. Indukcijom po r_i slijedi da je $r^* \leq a$. Međutim, postoji n za koji će L_n biti proizvoljno blizu a pa će T^* biti konačno. \square

2.1.3 Druge funkcije troška

U prijašnjim poglavljima većina funkcija troška pokušavale su penalizirati neku kombinaciju lažnih uzbuna i kašnjenja detekcije. Jedna primjer takve funkcije troška je ona polinomijalnog tipa $(T - \tau)^p$ za fiksni $p > 0$. Takve funkcije troška dovode do problema oblika

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} [P(T < \tau) + cE\{(T - \tau)^p\}].$$

Drugi primjer je eksponencijalni trošak, koji vodi do kriterija

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} [P(T < \tau) + cE\{e^{\alpha(T-\tau)^+} - 1\}],$$

koji se također može modificirati zamjenom $P(T < \tau)$ s $P(T < \tau - \epsilon)$, za fiksni $\epsilon > 0$. I nadalje alternativni trošak kašnjenja je

$$E\{|T - \tau|\},$$

za kojeg se može pokazati da je ekvivalent trošku kašnjenja u Shiryajveljevom problemu. Još jedna zanimljiva funkcija troška je

$$c_f P(T < \tau) + c_b E\{(\tau - T)^+\} + c_a E\{(T - \tau + 1)^+\}, \quad (2.17)$$

koja dozvoljava vremenski linearan trošak lažnih detekcija uz trošak na vjerojatnost lažnih uzbuna. Rezultat propozicije (2.1.1) može se lako primijeniti na ovaj primjer. Posebno, koristeći metode iz propozicije (2.1.1) lako se može vidjeti da je (2.17) jednako

$$c_f + c_b E\{\tau\} + E\{(c_a - c_f)\pi_T + \sum_{m=0}^{T-1} [c_a \pi_m - c_b(1 - \pi_m)]\},$$

što se minimizira pomoću vremenom zaustavljanja iz (2.8), uz prigodan odabir praga π^* . Prag π^* će identični biti jednak nuli ako je

$$c_a - c_f \geq c_b.$$

Zanimljiv ali potpuno drugačiji pristup problemu detekcije bio riješen pomoću sljedeće funkcije troška

$$l(\tau, T) = c_1 1_{\{T < \tau\}} - c_2 \min\{T, \tau - 1\} + c_3(T - \tau + 1)^+. \quad (2.18)$$

Sljedeće poglavlje razmotriti će ovaj pristup pobliže.

2.1.4 Formulacija kroz teoriju igara

Zanimljiv alternativni pristup problemu najbrže detekcije točaka promjene dolazi iz teorije igara i to slijedećom formulacijom. Promatrajmo problem detekcije točaka promjene i igru koja se sastoji od dva igrača u kojoj jedan igrač ("statističar") pokušava u najbržem mogućem vremenu detektirati slučajnu točku promjene dok drugi igrač ("priroda") pokušava izabrati distribuciju pojave točaka promjene (na temelju opservacija) na način da spriječi prvog igrača u detekciji točaka promjene. Pretpostavlja se da je vjerojatnost pojave točke promjene, $p_k = \mathbb{P}(\tau = k \mid \tau \geq k)$, izmjeriva funkcija prošlih opservacija Z_1, Z_2, \dots, Z_{k-1} i da nju odabire drugi igrač. Taj drugi igrač, znajući da će prvi igrač pokušati minimizirati funkciju troška (2.18), želi odabrati točku promjene τ tako da postigne supremum

$$\sup_{\tau} \inf_{T \in \mathcal{T}} l(\tau, T). \quad (2.19)$$

S druge strane, prvi igrač, znajući cilj drugog igrača, želi odabrati vrijeme zaustavljanja T kojim bi postigao infimum

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} \sup_{\tau} l(\tau, T). \quad (2.20)$$

Kao i prije neka je

$$L_n = \frac{dQ_1}{dQ_0}(Z_n),$$

i definiramo

$$S_n = L_n \max\{1, S_{n-1}\}, S_0 = 0.$$

Strategija prirode je specificirati $P(\tau = n \mid \tau \geq n, \mathcal{F}_{n-1})$. Pretpostavimo da priroda izabere

$$P(\tau = n \mid t \geq n, \mathcal{F}_{n-1}) = \rho(1 - S_{n-1})^+,$$

za neki $0 \leq \rho \leq 1$. Definirajmo

$$\frac{\rho_n}{1 - \rho_n} = \frac{\rho}{1 - \rho} S_n.$$

Vrlo je jednostavno vidjeti da je

$$P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_n) = \rho_n. \quad (2.21)$$

Kako bi to vidjeli potrebno se uvjeriti da je tvrdnja istinita za $n = 1$:

$$\frac{P(\tau \leq 1 \mid \mathcal{F}_1)}{1 - P(\tau \leq 1 \mid \mathcal{F}_1)} = \frac{P(\tau = 1)}{1 - P(\tau = 1)} L_1 = \frac{\rho}{1 - \rho} S_1.$$

Pretpostavimo sada da je tvrdnja točna za $n - 1$, tj. da je $P(\tau \leq n - 1 \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \rho_{n-1}$. Tada je

$$\begin{aligned} P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= P(\tau \leq n - 1 \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= (1 - P(\tau \leq n - 1 \mid \mathcal{F}_{n-1}))P(\tau = n \mid \mathcal{F}_{n-1}, \tau \geq n) \\ &= \rho_{n-1} + (1 - \rho_{n-1})P(\tau = n \mid \mathcal{F}_{n-1}, \tau \geq n). \end{aligned}$$

Stoga

$$\begin{aligned} \frac{P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_{n-1})}{1 - P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_{n-1})} &= \frac{\rho_{n-1}}{1 - \rho_{n-1}} \frac{1}{1 - \rho(1 - S_{n-1})^+} + \frac{\rho(1 - S_{n-1})^+}{1 - \rho(1 - S_{n-1})^+} \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \left[\frac{S_{n-1} + (1 - \rho)(1 - S_{n-1})^+}{1 - \rho(1 - S_{n-1})^+} \right] \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \max\{1, S_{n-1}\} \end{aligned}$$

Pa zbog ovog imamo

$$\begin{aligned} \frac{P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_n)}{1 - P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_n)} &= \frac{P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_{n-1})}{1 - P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_{n-1})} L_n = \frac{\rho}{1 - \rho} \max\{1, S_{n-1}\} L_n \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} S_n = \frac{\rho_n}{1 - \rho_n}, \end{aligned}$$

čime je (2.21) dokazano indukcijom.

Naime, oba igrača mogu postići svoj cilj, kao što se vidi iz sljedećeg rezultata.

Teorem 2.1.8. *Definiramo*

$$T_\nu = \inf\{n \mid S_n \geq \nu\}.$$

Uz pretpostavku da je $c_1 - c_2 \geq c_3$, s ν^ označimo jedinstveno rješenje od*

$$c_1 - c_2 E_\infty\{T_{\nu^*}\} = c_3 E_0\{\tau_{\nu^*}\},$$

gdje je prvi izraz dan uz mjeru P_∞ , a drugi uz mjeru P_0 koje odgovaraju vjerojatnosim mjerama generirane opservacijama uvjetovane događajima $\tau = \infty$ i $\tau = 0$. Tada je za neki $\rho \in [0, 1]$ (τ_p, \widehat{T}) rješenje problema (2.19) i (2.20), tj.

$$\sup_{\tau} l(\tau_p, \widehat{T}) = l(\tau_p, \widehat{T}) = \inf_{T \in \mathcal{T}} l(\tau_p, \widehat{T}), \quad (2.22)$$

gdje je $\widehat{T} = T_{v^*}$.

Dokaz. Pretpostavimo da priroda odabere ρ iz (2.20) Najbolje što se može je odabrati strategiju na temelju $P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_n)$. Iz (2.21) znamo da je $P(\tau \leq n \mid \mathcal{F}_n) = \rho_n$. Pokazati ćemo da je optimalno vrijeme zaustavljanja vrijeme zaustavljanja oblika $\inf\{n \mid S_n \geq v\}$ ili ekvivalentno oblika $\inf\{n \mid \rho_n \geq v\}$. Interval $[k, l]$ nazivamo ciklus ako je niz $\rho_n = \rho$ i $l = \inf\{n > k \mid \rho_n = \rho\}$. Drugim riječima, ciklus je dovršen prvi put kada se niz $\{\rho_n\}$ resetira. Proizvoljno vrijeme zaustavljanja karakterizirano je sljedećim veličinama

1. $\tau_0(T)$: očekivana duljina ciklusa pod pretpostavkom da se točka promjene dogodi nakon kraja ciklusa;
2. $\tau_1(T)$: očekivana duljina ciklusa pod pretpostavkom da se točka promjene dogodi prije početka ciklusa;
3. $q_0(T)$: vjerojatnost da će promjena biti detektirana tijekom ciklusa pod pretpostavkom da se točka promjene dogodi nakon kraja ciklusa; i
4. $q_1(T)$: vjerojatnost da će promjena biti detektirana tijekom ciklusa pod pretpostavkom da se točka promjene dogodi prije početka ciklusa.

Trošak nastao vremenom zaustavljanja je očekivana vrijednost gubitka tijekom ciklusa pomnožena sa očekivanim brojem ciklusa, tj.

$$\frac{(1 - \rho)(c_1 q_0(T) - c_2 \tau_0(T)) + \rho c_3 \tau_1(T)}{(1 - \rho) q_0(T) + \rho q_1(T)} \quad (2.23)$$

Kako bi se riješio problem (2.23) potrebno je minimizirati brojnik podložen fiksnom vrijednosti nazivnika. Za to koristi se metoda Lagrangeovih multiplikatora

$$(1 - \rho)(c_1 q_0(T) - c_2 \tau_0(T)) + \rho c_3 \tau_1(T) + \lambda [(1 - \rho) q_0(T) + \rho q_1(T)].$$

Funkcija gubitka linearna je u ρ i stoga

$$\inf_T (1 - \rho)(c_1 q_0(T) - c_2 \tau_0(T)) + \rho c_3 \tau_1(T) + \lambda [(1 - \rho) q_0(T) + \rho q_1(T)]$$

je konkavan u ρ . Ako je $\rho = 1$ potrebno se zaustaviti i optimalna procedura treba za prag imati jedan.

No kako je moguće garantirati postojanje prikladnog v^* Primjećujemo da su i $E_0\{T_v\}$ i $E_\infty\{T_v\}$ rastuće funkcije u v i

1. $\lim_{\nu \rightarrow 0} E_{\infty}\{T_{\nu}\} = E_0\{T_{\nu}\} = 0$,
2. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} E_{\infty}\{T_{\nu}\} = E_0\{T_{\nu}\} = \infty$.

Štoviše, kako ρ varira od 1 do 0, $E_{\infty}\{T_{\nu}\}$ poprima vrijednosti (neprekidno) od 0 do ∞ pa priroda izabire vrijednosti ν^* za koju vrijedi (2.22).

Pretpostavimo da prvi igrač izabere ν^* kao gore. Najbolja strategija za prirodu je onda izabrati τ_{ρ} uz $\nu(\rho) = \nu^*$.

Priroda može izabrati ili $\tau = \infty$ ili $\tau < \infty$. Ako izabere prvo tada je gubitak $c_1 - c_2 E_{\infty}\{T_{\nu^*}\}$. Inače, priroda može izabrati bilo koji $\tau = n \leq T_{\nu^*}$. Ako je $S_{n-1} \leq 1$, tada je očekivani budući gubitak $c_3 E_0\{T_{\nu^*}\}$. Ta vrijednost je veća nego očekivani gubitak kada je $S_{n-1} > 1$ jer je očekivano vrijeme od n do T_{ν^*} monotono u S_{n-1} (to je lagano primijetiti jer S_n stohastički raste za S_k za sve $n \geq k$). Priroda bi stoga trebala odabrati $\tau = \infty$ u tom slučaju, i odabrati između bilo kojeg n i ∞ ako je $\tau \geq n$ i $S_{n-1} \leq 1$. Stoga je $c_3 E_0\{T\}$ maksimalna vrijednost koju priroda može postići i opisana procedura ju garantira.

□

2.2 Nebayesovska najbrža detekcija promijene

U prijašnjem poglavlju promatrali smo Shiryajevljevom problem najbrže detekcije u kojem se pretpostavljalo da je točka promjene slučajna varijabla s nekom danom, geometrijskom, apriori distribucijom. Iako pretpostavka o apriori gustoći točke promjene je prirodna u primjeni praćenja nekih uvjeta, postoje drugačije primjene kod kojih je ta pretpostavka nerealna. Na primjer, u sustavima nadzora ili inspekcije često ne postoji nikakav poznat model za opažanje uljeza ili nedostatka.

U takvim situacijama mora se promatrati drugačija formulacija problema, budući da izostanak apriori isključuje specifikaciju očekivanih kašnjenja i sličnih veličina koje uključuju usrednjavanje kroz distribuciju točaka promjene. Postoje mnoge zanimljive formulacije od kojih ćemo promatrati neke. Primarno ćemo promatrati Lordenov problem u kojem se prosječno kašnjenje zamjenjuje najgorem vrijednošću kašnjenja.

2.2.1 Lordenov problem

Promatramo situaciju u kojoj je točka promjene τ fiksna, neslučajna vrijednosti koja može biti ∞ ili bilo koji pozitivan realna broj. U modeliranju ovog problema koristi se izmjeriv prostro (Ω, \mathbb{F}) koji se sastoji od prostora Ω i σ -algebre \mathbb{F} . Također promatramo familiju vjerojatnosti mjera $\{P_\tau \mid \tau \in [1, 2, \dots, \infty]\}$ na prostoru (Ω, \mathbb{F}) takvu da je uz P_τ $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\tau-1}$ nezavisan i jednako distribuiran niz s marginalnom gustoćom Q_0 i $Z_\tau, Z_{\tau+1}, \dots$ nezavisan i jednako distribuiran niz s marginalnom gustoćom Q_1 i koji je također nezavisan od $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\tau-1}$. Radi jednostavnosti, pretpostavlja se da su Q_0 i Q_1 međusobno apsolutno neprekidne, takve da omjer vjerodostojnosti $L(Z_k) = dQ_1/dQ_0(Z_k)$ nema atoma uz Q_0 , i takve da je $2 < D(Q_1 \parallel Q_0) < \infty$, gdje je $D(Q_1 \parallel Q_0)$ Kullback–Leibler divergencija od Q_1 do Q_0 . Zbog tehničkih razloga također se pretpostavlja postojanje slučajne varijable Z_0 s uniformnom distribucijom na $[0, 1]$ koja je nezavisna od Z_1, Z_2, \dots uz vjerojatnost P_τ .

Cilj je ponovno opisati strategiju koja može detektirati točku promjene ako se dogodi, čim prije nakon same promjene. Za skup strategija prirodno je promatrati skup \mathcal{T} kao skup svih vremena zaustavljanja adaptiranih uz filtraciju $\{\mathcal{F}_k \mid k \geq 0\}$ gdje \mathcal{F}_k predstavlja najmanju σ -algebru uz koju su Z_0, Z_1, \dots, Z_k izmjerivi. Stoga, kada vrijeme zaustavljanja T poprimi vrijednost k , interpretacija je da je T detektirao postojanje točke promjene t u ili prije vremena k .

Od interesa je kazniti eksponencijalno kašnjenje detekcije kroz njegovu vrijednost u najgorem slučaju (tzv. Lordenova mjera uspješnosti):

$$d_l(T) = \sup_{\tau \geq 1} \text{esssup}^1 \mathbb{E}_\tau \{(T - \tau + 1)^+ \mid \mathcal{F}_{\tau-1}\} \quad (2.24)$$

¹esssup-esencijalni superemum slučajne varijable je najmanja gornja međa skupa konstanti koje omeđuju tu slučajnu varijablu s vjerojatnošću 1.

gdje $\mathbb{E}_\tau\{\cdot\}$ označava očekivanje uz vjerojatnost P_τ i $(T - \tau + 1)^2 = \max\{T - \tau + 1, 0\}$. Potrebno je napomenuti da je $\text{esssup}\mathbb{E}_\tau\{(T - \tau + 1)^+ \mid \mathcal{F}_{\tau-1}\}$ prosječna vrijednost najgoreg slučaja kašnjenje uz P_τ , gdje se gleda najgore kašnjenje svake opservacije $Z_0, Z_1, \dots, Z_{\tau-1}$. Želja da $d_l(T)$ bude najmanje moguće mora biti u balansu sa stopom lažnih uzbuna. Lažne uzbune će se sigurno dogoditi, ali je dan limit na stopu pojava istih.

Stopa lažnih uzbuna može se kvantificirati prosječnim vremenom između lažnih uzbuna:

$$f(T) = \mathbb{E}_\infty\{T\} \quad (2.25)$$

a koristan kriterij dizajna tada se daje pomoću

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} d_l(T) \text{ podliježe } f(T) \geq \gamma \quad (2.26)$$

gdje je γ pozitivna, konačna konstanta. Ustvari se traži vrijeme zaustavljanja koje minimizira najgori slučaj kašnjenja unutar ograničenja na prosječno vrijeme između lažnih uzbuna.

Za pronalazak rješenja od (2.26) promatramo Pageov CUSUM test. Za $h \geq 0$ definiramo CUSUM vrijeme zaustavljanja

$$T_h^{\text{CUSUM}} = \inf\{k \geq 0 \mid g_k \geq h\},$$

gdje je

$$g_k = \begin{cases} (g_{k-1} + S_k)^+ & \text{ako } k > 0, \\ y \in \mathbb{R}^+ & \text{ako } k = 0, \end{cases}$$

i

$$S_k = \ln \frac{Q_1(Z_k)}{Q_0(Z_k)}.$$

Uz normalne uvjete CUSUM vremena zaustavljanja y je postavljeno na 0. Moguće je pokazati da je T_h^{CUSUM} optimalno vrijeme zaustavljanja što govori i sljedeći teorem.

Teorem 2.2.1. (Optimalnosti CUSUM-a) Neka je $h > 0$. Tada vrijeme zaustavljanja T_h^{CUSUM} rješava jednadžbu (2.26) uz $\gamma = f(T_h^{\text{CUSUM}})$, tj. za svaki $T \in \mathcal{T}$ vrijedi

$$f(T) \geq f(T_h^{\text{CUSUM}}) \Rightarrow d_l(T) \geq d_l(T_h^{\text{CUSUM}}).$$

Dokaz. U potrazi za optimalnim vremenom zaustavljanja problema (2.26) dovoljno je razmatrati vremena zaustavljanja koja zadovoljavaju uvjet $f(T) \geq \gamma$ s jednakosti. Kako bi to vidjeli najprije je potrebno zamijetiti da se vremena zaustavljanja T za koja $f(T)$ nije konačan može ignorirati. Posebno, ako je $f(T) = \infty$ tada odaberemo dovoljno velik cijeli broj n takav da je $\gamma \leq f(\min\{T, n\}) < \infty$. Kako je $d_l(\min\{T, n\}) \leq d_l(T)$ nije potrebno

promatrati ovakva vremena zaustavljanja T . Tada, za $p = \delta/f(T)$ slučajno vrijeme zaustavljanja

$$T' = \begin{cases} T & \text{sa vjerojatnošću } p, \\ 0 & \text{sa vjerojatnošću } 1-p. \end{cases}$$

zadovoljava $f(T') = \gamma$ i $d_l(T') \leq d_l(T)$. Stoga nije potrebno promatrati T kada T također zadovoljava uvjet i nema veće kašnjenje u najgorem slučaju. \square

2.2.1.1 Karakterističnosti CUSUM algoritma

Isto kao i u poglavlju 1.1.1, parametar θ određuje distribuciju niza Z i kada je $\theta = \theta_0$ niz Z ima gustoću Q_0 (nema točaka promjene), a kada je $\theta = \theta_1$ niz Z ima gustoću Q_1 (dogodila se promjena). Funkcija prosječnog trajanja (eng. average run length function -ARL) $\mathcal{L}(\theta)$ je očekivana duljina uzorka potrebna za zaustavljanje algoritma kao funkcija od θ kada je izlazna granica(granice) fiksna. Ispostavi se da je u slučaju CUSUM algoritma kada je $\theta = \theta_0$ \mathcal{L} jednaka $f(T_h^{\text{CUSUM}})$, a jednaka $d_l(T_h^{\text{CUSUM}})$ kada je $\theta = \theta_1$. Funkcija $\mathcal{L}(\theta)$ može se izračunati kao

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1 - N_\theta(0)}{1 - P_\theta(0)}, \quad (2.27)$$

gdje je $N_\theta(0) = \mathbb{E}_\theta [T | 0]$ i $P_\theta(0) = P_\theta(-a | 0)$ definirano kao vjerojatnost da S_k , počevši od 0, dosegne donju granicu $-a$. Waldova aproksimacija funkcije prosječnog trajanja $\tilde{\mathcal{L}}(\theta)$ može se dobiti evaluacijom sljedećeg limesa

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mathbb{E}}_\theta [T | 0]}{1 - \tilde{P}_\theta(-a | 0)}, \quad (2.28)$$

gdje je \tilde{P}_θ Waldova aproksimacija funkcije operativne karakteristike (OC) \mathcal{P} i $\tilde{\mathbb{E}}_\theta$ Waldova aproksimacija funkcije prosječne duljine uzorka \mathbb{E}_θ uz izlazne granice $-a$ i h . Nakon evaluacije limesa jednažba (2.28) postaje

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{E}_\theta(S_k)} \left(h + \frac{\exp(-\omega_0(\theta)h)}{\omega_0(\theta)} - \frac{1}{\omega_0(\theta)} \right) & \text{ako } \mathbb{E}_\theta [S_k] \neq 0, \\ \frac{h^2}{\mathbb{E}_\theta(S_k^2)} & \text{ako } \mathbb{E}_\theta [S_k] = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Međutim Siegmundova aproksimacija je mnogo bolja od Waldove jer ona uključuje i aproksimaciju premašivanja (prekoračivanja). Siegmundova aproksimacija funkcije pro-

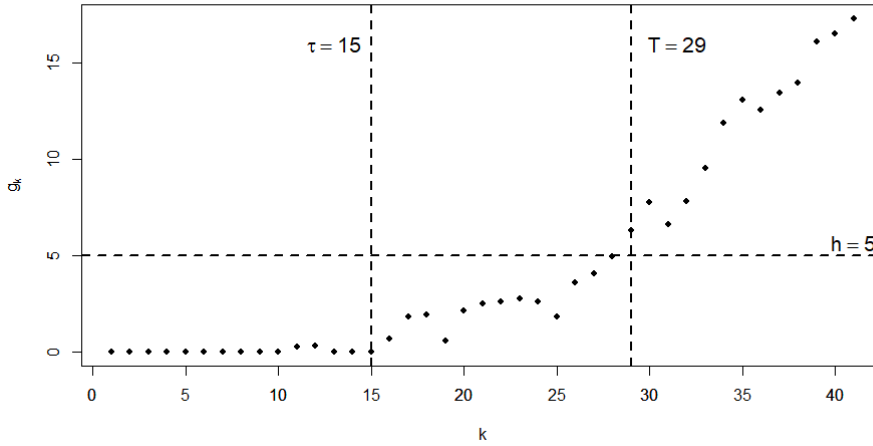
sječnog trajanja definirana je kao

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{E}_\theta(S_k)} \left(h + \delta^+ + \delta^- + \frac{\exp(-\omega_0(\theta)(h + \delta^+ + \delta^-))}{\omega_0(\theta)} - \frac{1}{\omega_0(\theta)} \right), & \text{ako } \mathbb{E}_\theta[S_k] \neq 0, \\ \frac{(h + \delta^+ + \delta^-)^2}{\mathbb{E}_\theta(S_k^2)}, & \text{ako } \mathbb{E}_\theta[S_k] = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

gdje su

$$\begin{aligned} \delta^+ &\approx \mathbb{E}_\theta[S_T - h \mid S_T - h \geq 0], \\ \delta^- &\approx \mathbb{E}_\theta[S_T \mid S_T \leq 0]. \end{aligned}$$

Primjer 2.2.2. (Gaussova slučajna varijabla) Pretpostavimo da je niz $Z = \{Z_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ takav da Z_k dolazi iz distribucije $Q_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ prije točke promjene τ , a iz distribucije $Q_1 \sim \mathcal{N}(1, 1)$ nakon točke promjene. Zbog pretpostavki na niz Z slijedi da je S nezavisan, jednako distribuiran i karakteriziran funkcijom gustoće $f_0 \sim \mathcal{N}(-\frac{1}{2}, 1)$ prije točke promjene i $f_1 \sim \mathcal{N}(\frac{1}{2}, 1)$ nakon točke promjene. CUSUM niz g dobiven je iz S . Odmah nakon što g prijeđe h može se proglasiti pronalazak promjene. Na slici (2.1) dan je primjer niza g . Mjere definirane jednadžbama (2.24) i (2.25) mogu biti izračunate za svaki h tako da se za parametar θ uzme 0 ili 1 u jednadžbi (2.27). Nadalje, $\mathcal{L}(\theta)$ se može izračunati



Slika 2.1: Primjer CUSUM niza g uz $Q_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Q_1 \sim \mathcal{N}(1, 1)$, $h = 5$ i točku promjene $\tau = 15$.

iz jednadžbe (2.27) fiksirajući h . Zamjenom $\mathbb{E}_\theta[S_1], \mathbb{E}_\theta[S_1^2]$ i $\omega_0(\theta)$ koje su izračunate u

odjeljku 1.1.1 u jednadžbi (2.29) dobivamo Waldovu aproksimaciju od $\mathcal{L}(\theta)$ koja je jednaka

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta) = \begin{cases} \frac{\exp(-2(\theta - \frac{1}{2})h) - 1 + 2(\theta - \frac{1}{2})h}{2(\theta - \frac{1}{2})^2} & \text{ako } \theta \neq \frac{1}{2}, \\ h^2 & \text{ako } \theta = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Isto tako Siegmundova aproksimacija dobiva se supstitucijom $\mathbb{E}_\theta[S_1], \mathbb{E}_\theta[S_1^2]$ i $\omega_0(\theta)$ koje su izračunate u odjeljku 1.1.1 u jednadžbi (2.30) te je jednaka

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta) = \begin{cases} \frac{\exp(-2(\theta - \frac{1}{2})h + 1.166(\theta - \frac{1}{2})) - 1 + 2\left[(\theta - \frac{1}{2})h + 1.166(\theta - \frac{1}{2})\right]}{2(\theta - \frac{1}{2})^2} & \text{ako } \theta \neq \frac{1}{2}, \\ (h + 1.166)^2 & \text{ako } \theta = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Jednadžba (2.31) može se izračunati jer u slučaju Gaussove slučajne varijable vrijedi da je $\delta^+ + \delta^- = 2\zeta$ gdje je

$$\zeta = -\pi^{-1} \int_0^\infty x^{-2} \ln \left[\frac{2}{x^2} (1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}) \right] dx \approx 0.583.$$

2.2.2 Pollakova mjera uspješnosti

Mjera kašnjenja $d_l(T)$ definirana jednadžbom (2.24) može se zamijeniti Pollakovom mjerom učinkovitosti koja je jednaka

$$d_p(T) = \sup_{1 \leq \tau < \infty} \mathbb{E}_\tau [T - \tau \mid T \geq \tau],$$

koja problem optimizacije iz jednadžbe (2.26) transformira u

$$\inf_{T \in \mathcal{T}} d_p(T) \text{ podliježe } f(T) \geq \gamma. \quad (2.32)$$

Kao jedno od rješenja jednadžbe (2.32) dano je Shiryaev-Robertsonovo vrijeme zaustavljanja definirano, za $\nu > 0$, s

$$T_\nu^{SR} = \inf\{k \geq 0 \mid R_k \geq \nu\},$$

gdje je

$$R_k = \begin{cases} (1 + R_{k-1})S_k & \text{ako } k > 0, \\ 0 & \text{ako } k = 0. \end{cases}$$

Vrijednost R_k se također može izračunati ne iterativno pomoću

$$R_k = \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^k S_j.$$

Poglavlje 3

Simulacijska studija SPRT algoritma

U ovoj simulacijskoj studiji pobliže ćemo promotriti SPRT algoritam kojim ćemo sekvencijalno testirati pripadnost niza jednoj od dvije razdiobe. U pripremi ove simulacijske studije korišten je programski jezik R.

SPRT algoritmom, tj. SPRT vremenom zaustavljanja koje je definirano jednačbom (1.1) u prvom poglavlju testirati ćemo pripadnost niza nekoj distribuciji. Kroz simulacije korišten je log-omjer vjerodostojnost pa je u tom slučaju vrijeme zaustavljanja SRTP testa jednako

$$T_{\{-a,h\}}^{\text{SPRT}} = \inf\{k \geq 0 \mid S_k \notin (-a, h)\}.$$

Za granice $-a$ i h uzimamo Waldove aproksimacije, tj. definiramo ih kao:

$$-\tilde{a} = \ln \frac{\beta}{1-\alpha} \text{ i } \tilde{h} = \ln \frac{1-\beta}{\alpha},$$

te kroz simulacije variramo vrijednost pogreške prve i druge vrste α i β . Najprije SPRT test provodimo na nizu Z koji dolazi iz normalne distribucije s očekivanjem θ i standardnom devijacijom 1, te testiramo hipoteze:

$$\mathcal{H}_0 : Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\mathcal{H}_1 : Z \sim \mathcal{N}(1, 1)$$

Tablica (3.1) prikazuju postotke odbacivanja hipoteze \mathcal{H}_0 u 10000 simuliranih SPRT testova uz gornje hipoteze, tj. vjerojatnost odbacivanja nulte hipoteze u SPRT testu u slučaju kada je očekivanje niza Z jednako 0, tj. kada je parametar $\theta = 0$. U tablici (3.2) nalaze se vrijednosti prosječne duljine uzorka potrebne za donošenje odluke. Odmah primjećujemo sličnost dviju tablica, tj. vidimo da je uz najmanje postavljene vrijednosti pogrešaka prve i druge vrste α i β imamo najmanji postotak odbacivanja nulte, u ovom slučaju, ispravne hipoteze i da bi donjeli tu odluku morali smo promotriti najveći

$\beta \backslash \alpha$	0.01	0.05	0.1
0.01	0.00554	0.0279	0.06711
0.05	0.00573	0.028482	0.05723
0.1	0.00582	0.02963	0.05762

Tablica 3.1: Postoci odbacivanja \mathcal{H}_0 uz $\theta = 0$.

$\beta \backslash \alpha$	0.01	0.05	0.1
0.01	10.4896	10.04919	9.54518
0.05	7.2322	6.93352	6.50257
0.1	5.92558	5.59409	5.16787

Tablica 3.2: Prosječna duljina uzorka uz $\theta = 1$.

broj opažanja. To je naravno vrlo logično jer da bi bili sigurni da smo odabrali ispravnu hipotezu potrebno je promotriti najveći broj opservacija. Kompromis između odbacivanja ispravne hipoteze i vremena potrebnog za donošenje te odluke vrlo je očit. Uz najveće vrijednosti pogrešaka α i β imamo najveći postotak neispravno odbačenih hipoteza, ali i najmanju prosječnu duljinu uzorka za donošenje odluke pa je potrebno odabrati koja od dviju mjera nam je bitnija te na taj način odabrati razine značajnosti α i β .

Istu stvar napravili smo i za parametar $\theta = 1$, tj. ponovno smo za razne vrijednosti pogrešaka prve i druge vrste simulirali 10000 SPRT testova na nizu Z koji dolazi iz normalne distribucije s očekivanjem 1 i standardnom devijacijom 1, uz hipoteze kao i prije testiramo:

$$\mathcal{H}_0 : Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\mathcal{H}_1 : Z \sim \mathcal{N}(1, 1)$$

Tablica (3.3) prikazuju postotke odbacivanje hipoteze \mathcal{H}_0 , a tablica (3.4) prikazuje vrijednosti prosječne duljine uzorka potrebne za donošenje odluke. Postotci odbacivanja hipoteze \mathcal{H}_0 sada nisu blizu vrijednosti pogreške prve vrste već blizu 1 minu postavljenih pogrešaka prve vrste jer naravno niz Z dolazi iz normalne distribucije sa očekivanjem 1 pa SPRT test odbacuje (tj. trebao bi odbacivati) hipotezu \mathcal{H}_0 u skoro $(1 - \alpha)\%$ slučajeva što nam daje za pravo reći da SPRT test dobro detektira dolazi li niz iz normalne distribucije sa očekivanjem 0 ili 1 (naravno uz standardnu devijaciju 1). Kada promatramo tablicu (3.4), tj. prosječnu duljinu uzorka potrebnu za donošenje odluke ponovno za najmanje vrijednosti pogrešaka prve i druge vrste morali smo promotriti najveći broj opažanja, dok smo uz veće vrijednosti pogrešaka prve i druge vrste morali promotriti skoro upola manje opažanja.

Također je zanimljivo promatrati funkcije operativne karakteristike i prosječne duljine uzorka i to na način da za svaki $\theta \in [0, 1]$ simuliramo 10000 SPRT testova postavljajući

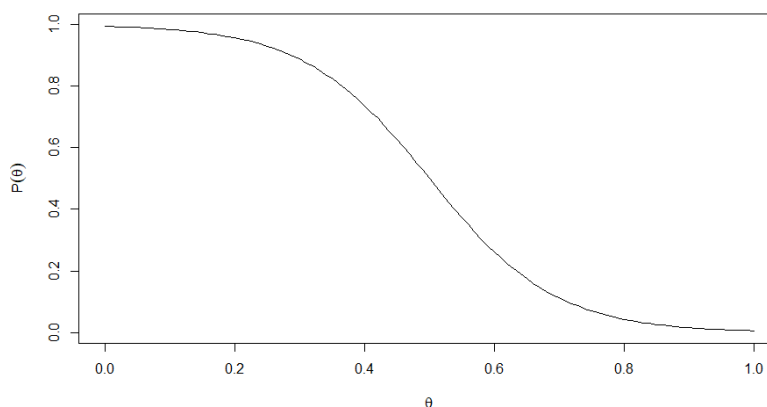
$\beta \backslash \alpha$	0.01	0.05	0.1
0.01	0.99422	0.97275	0.9436
0.05	0.99423	0.97151	0.94305
0.1	0.99431	0.97071	0.94203

Tablica 3.3: Postoci odbacivanja \mathcal{H}_0 uz $\theta = 1$.

$\beta \backslash \alpha$	0.01	0.05	0.1
0.01	10.5072	7.31016	5.90554
0.05	10.05221	6.9267	5.5834
0.1	9.57071	6.49604	5.16926

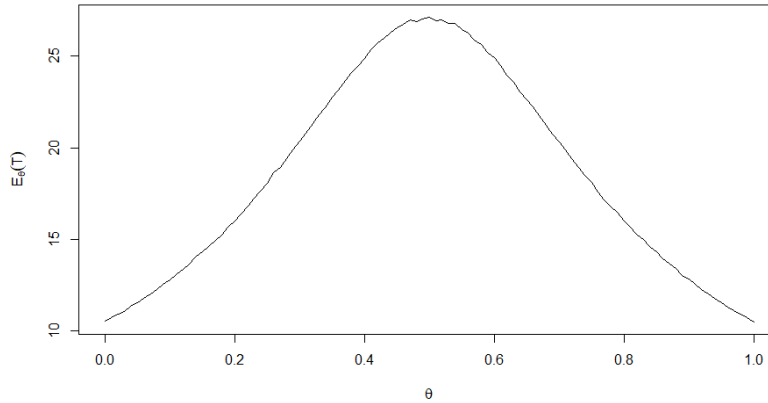
Tablica 3.4: Prosječna duljina uzorka uz $\theta = 1$.

vjerojatnost pogreške prva vrste na $\alpha = 0.01$ i pogrešku druge vrste na $\beta = 0.01$. Tako dobivena funkcija operativne karakteristike prikazana je na slici (3.1), a slika (3.2) prikazuje funkciju prosječne duljine uzorka. Također možemo zamijetiti da je funkcija prosječne duljine uzorka skoro pa simetrična oko 0.5 što je polovica odabranog intervala iz kojeg dolazi θ . Takav oblik funkcije je logičan jer hipotezama testiramo da je θ jednak 0 ili 1 pa za θ blizu 0 test brže odbacuje hipotezu \mathcal{H}_0 i prihvaća hipotezu \mathcal{H}_1 kada je θ blizu 1 nego kada je θ u sredini promatranog intervala $[0, 1]$. Kao što je i očekivano, za vrijednosti od θ blizu

Slika 3.1: Funkcija operativne karakteristike $\mathcal{P}(\theta)$ za $\theta \in [0, 1]$.

0 skoro nikada ne odbacujemo hipotezu \mathcal{H}_0 , dok za vrijednosti od θ blizu 1 skoro uvijek

odbacujemo hipotezu \mathcal{H}_0 , tj. prihvaćamo hipotezu \mathcal{H}_1 , jer hipoteza \mathcal{H}_1 pretpostavlja da niz Z dolazi iz distribucije $\mathcal{N}(1, 1)$.



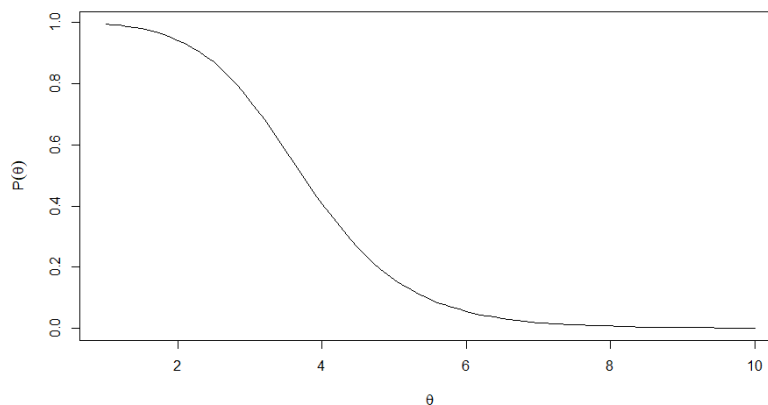
Slika 3.2: Funkcija prosječne duljine uzorka $\mathbb{E}_\theta [T]$ za $\theta \in [0, 1]$.

Sada ćemo promatrati niz Z koji dolazi iz eksponencijalne distribucije sa parametrom λ te ćemo kao i prije uz vrijednosti pogrešaka prve i druge vrste $\alpha = 0.01$ i $\beta = 0.01$ promatrati funkciju operativne karakteristike i prosječne duljine uzorka tako da za svaki $\lambda \in [1, 10]$ simuliramo 10000 SPRT testova u kojima testiramo:

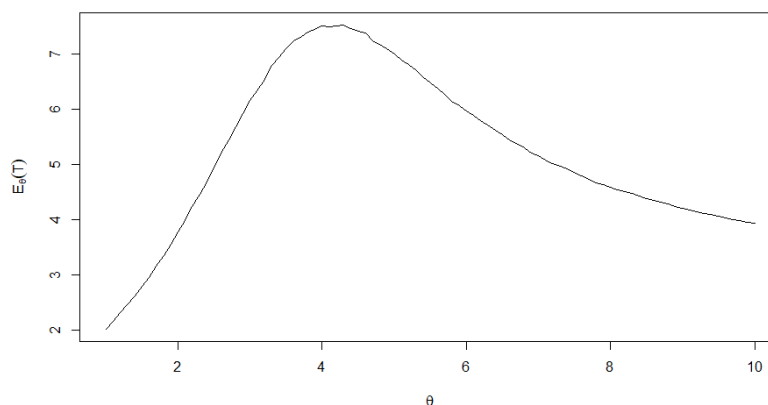
$$\mathcal{H}_0 : Z \sim \mathcal{E}(1)$$

$$\mathcal{H}_1 : Z \sim \mathcal{E}(10)$$

Funkcija operativne karakteristike prikazana je na slici (3.3), a funkcija prosječne duljine uzorka na slici (3.4). Situacija je vrlo slična kao i u prošlom slučaju kada je niz Z dolazio iz normalne distribucije sa očekivanjem $\theta \in [0, 1]$ i standardnom devijacijom 1. Funkcija operativne karakteristike je padajuća jer za λ blizu 1 rijetko odbacujemo nultu hipotezu tj. ne odbacujemo pretpostavku da niz Z dolazi iz eksponencijalne distribucije sa parametrom 1, a što se sve više odmičemo od 1 i približavamo $\lambda = 10$ postotak odbacivanja nulte hipoteze je vrlo velik tj. prihvaćamo alternativu da niz Z dolazi iz eksponencijalne distribucije sa parametrom 10. Kod prijašnjeg primjera funkcije prosječne duljine uzorka komentirali smo njenu simetričnost oko sredine intervala iz kojeg dolazi λ . Kod ove funkcije prosječne duljine uzorka ta simetričnost oko polovice zadanog intervala $[1, 10]$ se gubi te funkcija ne pada prema nuli kada je parametar θ blizu $\lambda = 10$. Sa slike (3.3), tj. iz funkcije operativne karakteristike znamo da test i dalje donosi točne odluke jer su postoci odbacivanja nulte hipoteze veliki oko desnog ruba intervala, ali testu je očito potrebno više opažanja niza

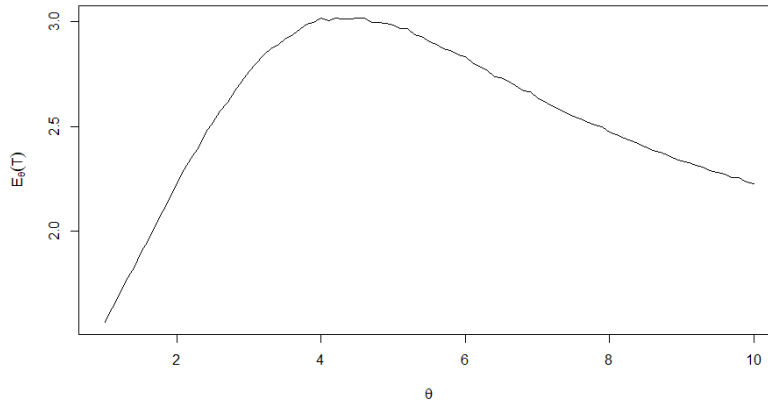


Slika 3.3: Funkcija operativne karakteristike $\mathcal{P}(\lambda)$ za $\lambda \in [1, 10]$.



Slika 3.4: Funkcija prosječne duljine uzorka $\mathbb{E}_\lambda [T]$ za $\lambda \in [1, 10]$.

kako bi došao do te odluke. Promotriti ćemo funkciju prosječne duljine uzorka za isti niz Z i iste hipoteze, ali uz vjerojatnost pogreške prve vrste $\alpha = 0.1$ i vjerojatnost pogreške druge vrste $\beta = 0.1$. Slika (3.5) prikazuje funkciju prosječne duljine uzorka uz takve pretpostavke i na njoj se vidi ista situacija kao i na slici (3.4). Naravno da odmah zamučujemo da nam za bilo koji λ treba manje opservacija nego kada su α i β bili 0.01 što je logično jer sad odluku donosimo uz veće vjerojatnosti pogrešaka prve i druge vrste. I dalje nemamo simetričnost oko polovice intervala te nam je i dalje potrebno više opažanja za donošenje odluke u slučaju kada je λ blizu 10 nego kada je blizu 1.



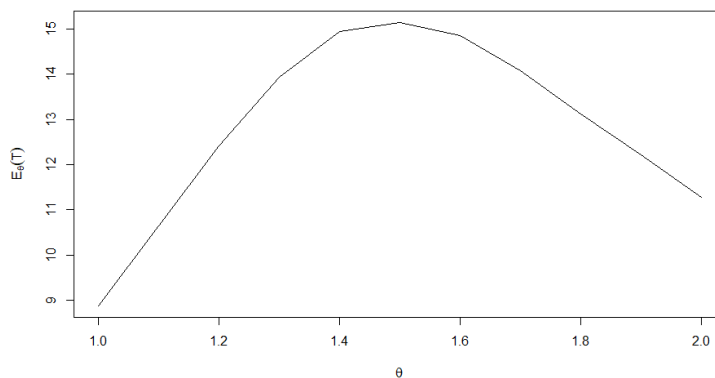
Slika 3.5: Funkcija prosječne duljine uzorka $\mathbb{E}_\lambda [T]$ za $\lambda \in [1, 10]$.

Sada ćemo za isti niz $Z \sim \mathcal{E}(1)$ smanjiti interval na $\lambda \in [1, 2]$ te uz $\alpha = \beta = 0.01$ testirati hipoteze:

$$\mathcal{H}_0 : Z \sim \mathcal{E}(1)$$

$$\mathcal{H}_1 : Z \sim \mathcal{E}(2).$$

Dobivamo funkciju prosječne duljine uzorka koja je prikazana na slici (3.6) i na njoj ponovno zapažamo da nam je potrebno više opservacija za donošenje odluke kada je λ blizu 2 nego kada je λ blizu 1.



Slika 3.6: Funkcija prosječne duljine uzorka $\mathbb{E}_\lambda [T]$ za $\lambda \in [1, 2]$.

Bibliografija

- [1] Ackermann, Etienne Rudolph: *Sequential land cover classification*. 2011.
- [2] H. Vincent Poor, Olympia Hadjiliadis: *Quickest Detection*. Cambridge University Press, 2008.
- [3] Mrazović, R.: *Mjera i integral*. 2020. https://www.dropbox.com/s/fgpz096bvduutn7/MII-skripta.pdf?dl=0&utm_source=Mjera+i+integral+-+predavanja.
- [4] Vondraček, Z.: *Slučajni procesi*. 2010. <https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp22-predavanja.html>.

Sažetak

Cilj ovog rada je bio navesti neke osnovne pojmove i rezultate teorije sekvencijalnog testiranja i detekcije točaka promjene. U prvom poglavlju bavili smo se sekvencijalnim testiranjem hipoteza kroz različite mogućnosti pristupanja spomenutom problemu. Promotri smo optimalna vremena zaustavljanja koja su bila rješenja problema sekvencijalne detekcije te uveli mjere uspješnosti koje su ta ista vremena zaustavljanja opisivale. U drugom poglavlju smo uveli neke osnovne pojmove problema detekcije točaka promjene. Dotaknuli smo se koncepta lažnih uzbuna i zašto su one važne u promatranju ovakvih problema. Rad je završen simulacijskom studijom u kojoj je sekvencijalni test SPRT implementiran u jeziku R i korišten za testiranje pripadnosti niza nekoj distribuciji. Uz sam test implementirane su i njegove karakteristične funkcije koje su nam omogućile bolju analizu same simulacije.

Summary

The aim of this paper was to state some basic terms and results of the theory of sequential testing and detection of change points. In the first chapter, we dealt with the sequential testing of hypotheses using different approaches to the problem. We observed the optimal stopping times that were solutions to the sequential detection problem and introduced measures of success that these same stopping times described. In the second chapter, we introduced some basic concepts of the change point detection problem. We touched upon the concept of false alarms and why they are important in these type of problems. The work was completed with a simulation study in which the sequential SPRT test was implemented in R. Along with the test itself, its characteristic functions were also implemented, which enabled us to better analyze the simulation itself.

Životopis

Rođen sam 6. veljače 1999. godine u Zaboku. 2014. godine završavam Osnovnu školu Đure Prejac u Desiniću te potom opisujem Gimnaziju Antun Gustav Matoš, Zabok. Nakon mature 2018. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2020. godine i iste godine upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu. Tijekom 2021. godine zapošljavam se u Privrednoj banci Zagreb kao student u sektoru za upravljanje rizicima i godinu dana kasnije postajem viši analitičar u Tržišnim i financijskim rizicima.