Brownovo gibanje u osiguranju

Aničić, Ena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ena Aničić

BROWNOVO GIBANJE U REOSIGURANJU

Diplomski rad

Voditelj rada:
Zoran Vondraček

Zagreb, 2022./2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Iako je koncept osiguranja široko poznat, manje poznato je i da osiguravajuće kuće imaju potrebu za osiguranjem. Reosiguranje je oblik osiguranja kojim se osiguravajuće kuće nastoje zaštititi od prevelikih ili neočekivanih gubitaka. Štoviše, one mogu upravljati svojom razinom rizika kupnjom reosiguranja i potražnjom za priljevom novca u pravom trenutku. Kako bi pronašli pravi trenutak i potrebnu količinu novaca, kao i politiku reosiguranja, potrebno je pronaći strategiju koja smanjuje troškove tvrtke i održava njezino poslovanje. U ovom radu, pod pojmom održavanja poslovanja podrazumijevamo održavanje pričuve pozitivnom. Pričuvu ćemo modelirati pomoću klasičnog modela rizika poznatog kao Cramer-Lundbergov model. Zatim ćemo primijeniti tehniku difuzijske aproksimacije kojom se klasični model rizika, radi svoje kompleksnosti, zamjenjuje odgovarajućim difuzijskim modelom. Difuzijski model koji ćemo iskoristiti temelji se na Brownovom gibanju kao najpoznatijem difuzijskom procesu. Kada definiramo model, optimalnu politiku pronaći ćemo koristeći kvazi-varijacijske nejednakosti (eng. QVI). Također, razmotrit ćemo dva oblika reosiguranja, proporcionalno i reosiguranje viška štete i pronaći optimalnu politiku u oba slučaja. Proporcionalno reosiguranje podrazumijeva da određeni postotak troška preuzima reosiguratelj, dok reosiguranje viška štete zada određeni limit nakon kojeg trošak preuzima isključivo reosiguratelj.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Započet ćemo s nekoliko osnovnih rezultata koje ćemo koristiti u modeliranju reosiguranja. Neka je Ω proizvoljan neprazan skup i $\mathcal{P}(\Omega)$ njegov partitivni skup.

Definicija 1.0.1. *Familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω zove se σ-algebra, ako vrijede sljedeća tri svojstva:*

- $\Omega \in \mathcal{F}$*;*
- *Ako je $A \in \mathcal{F}$ onda je i $A^c \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na komplement);*
- *Ako su $A_j \in \mathcal{F},\ j \in \mathbb{N}$, onda je i $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na prebrojive unije)*

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se izmjeriv prostor.

Od posebnog značaja bit će nam Borelova σ-algebra nad skupom realnih brojeva $\mathbb{R}$. To je σ-algebra generirana familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. Njezine elemente nazivamo Borelovim skupovima. Borelova σ-algebra može se karakterizirati i kao σ-algebra na $\mathbb{R}$ generirana a) svim otvorenim intervalima u $\mathbb{R}$, b) svim beskonačnim intervalima tipa $(-\infty, b]$,...Borelovu σ-algebru na d-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^d$ označavat ćemo s $\mathcal{B}_d$. Dalje, definiramo vjerojatnosni prostor.

Definicija 1.0.2. *Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algebra. Vjerojatnost na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća tri aksioma:*

- *(nenegativnost) Za sve $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$;*
- *(normiranost)* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$*;*

- *(σ-aditivnost) Za svaki niz $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ ($A_i \cap A_j \neq \emptyset$ za $i \neq j$) vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se vjerojatnosni prostor.

Kako bi povezali dva izmjeriva prostora potrebna je funkcija koja će zadržati svojstvo izmjerivosti. U tu svrhu navodimo sljedeću definiciju.

Definicija 1.0.3. *Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ dva izmjeriva prostora. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}$, tj. $(\forall A \in \mathcal{G})(f^{-1}(A) \in \mathcal{F})$.*

Sada imamo sve potrebne elemente za definiciju slučajne varijable i slučajnog vektora.

Definicija 1.0.4. *Slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ izmeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$. Slučajni vektor na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}_d)$.*

Za svaku slučajnu varijablu veže se i njezino očekivanje, koje će nam biti od velikog značaja u ovom radu.

Definicija 1.0.5. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla. Kažemo da X ima matematičko očekivanje ako vrijedi*

$$\mathbb{E}|X| := \int_\Omega |X| d\mathbb{P} = \int_\Omega |X|(\omega) d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

U tom slučaju definiramo matematičko očekivanje od X kao

$$\mathbb{E}X := \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Nakon definicije očekivanja, prelazimo na uvjetno očekivanje. Kako bi definirali uvjetno očekivanje, potrebna nam je definicija uvjetne vjerojatnosti.

Definicija 1.0.6. *Za događaj $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$, definiramo pojam uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(\cdot|A)$ formulom*

$$\mathbb{P}(B|A) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Preciznije, funkcija $\mathbb{P}_A : \mathcal{F} \to [0,1]$ *definirana sa*

$$\mathbb{P}_A(B) := \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

je vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ *koju zovemo uvjetna vjerojatnost.*

Definicija 1.0.7. *Neka je X slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *koja ima očekivanje. Uvjetno očekivanje od X uz dano A definiramo formulom*

$$\mathbb{E}[X|A] := \mathbb{E}_A X = \int_\Omega X d\mathbb{P}_A$$

Definicija 1.0.8. *Neka je X nenegativna slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *za koju je* $\mathbb{E}X < \infty$ *te neka je* $\mathcal{G}$ σ*-podalgebra od* $\mathcal{F}$*. Uvjetno očekivanje od X uz dano* $\mathcal{G}$ *je* $\mathcal{G}$*-izmjeriva slučajna varijabla* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to [0,\infty]$ *takva da za sve* $A \in \mathcal{G}$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[1_A X].$$

Ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla koja ima očekivanje, tada definiramo*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}],$$

gdje su $X^+ := \max(X,0)$ *i* $X^- := -\min(X,0)$ *pozitivni, odnosno negativni, dio slučajne varijable X.*

1.1 Slučajni procesi

U ovom odjeljku definirat ćemo pojmove slučajni proces, filtracija i martingal.

Definicija 1.1.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor, te neka je za svaki* $n \in \mathbb{Z}_+$ X_n *slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Familija* $X = (X_n : n \geq 0)$ *naziva se slučajni proces (s diskretnim vremenom).*

Definicija 1.1.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor.*

- *Familija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ σ*-podalgebri od* $\mathcal{F}$ *takvih da je* $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ *za svaki* $n \geq 0$ *zove se filtracija.*

- *Slučajni proces* $X = (X_n : n \geq 0)$ *zove se adaptiran s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *ako je za svaki* $n \geq 0$ *slučajna varijabla* X_n $\mathcal{F}_n$*-izmjeriva.*

- *Neka je* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces. Za* $n \geq 0$ *definiramo* $\mathcal{F}^0 := \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$*. Tada se filtracija* $\mathbb{F}^0 = (\mathcal{F}_n^0 : n \geq 0)$ *zove prirodna filtracija od X.*

Definicija 1.1.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor,* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ *filtracija,* $X = (X_n : n \geq 0)$ *slučajni proces. Pretpostavimo da je* X *adaptiran s obzirom na* $\mathbb{F}$*, te da je* $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ *za sve* $n \geq 0$.

- X *se zove martingal ako za sve* $n \geq 0$ *vrijedi*
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \text{ g.s}$$
- X *se zove supermartingal ako za sve* $n \geq 0$ *vrijedi*
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n \text{ g.s}$$
- X *se zove submartingal ako za sve* $n \geq 0$ *vrijedi*
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \text{ g.s}$$

Konkretan slučajni proces koji ćemo koristit u ovom radu zove se skalirana slučajna šetnja.

Definicija 1.1.4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F},)$ *vjerojatnosni prostor, te neka je* $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem* 0 *i varijancom* σ^2, $\sigma > 0$. *Slučajna šetnja je slučajni proces* $S = (S_n : n \in \mathbb{N}_0)$ *definiran s* $S_0 = 0$, *te* $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, n \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.1.5. *Za fiksni* $n \in \mathbb{N}$ *slučajni proces* $X^{(n)} = (X_t^{(n)} : t \geq 0)$ *definiran s*

$$X_t^{(n)} := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} + \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{[nt]+1}(nt - [nt]), t \geq 0 \tag{1.1}$$

zovemo skalirana slučajna šetnja, gdje su $Y_1, Y_2, ...$ *nezavisne i jednakodistribuirane slučajne varijable s očekivanjem* 0 *i varijancom* $\sigma^2, \sigma > 0$.

1.2 Difuzijski proces

Definicija 1.2.1. *Markovljev proces* $X = (X_t : t \geq 0)$ *nazivamo difuzijskim s drift funkcijom* $m(x)$ *i varijancom* $\sigma^2(x) > 0$ *ako*

- $\mathbb{E}[(X_{s+t} - X_s)1_{[|X_t - x| \leq \epsilon]}|X_s = x] = tm(x) + o(t)$
- $\mathbb{E}[(X_{s+t} - X_s)^2 1_{[|X_t - x| \leq \epsilon]}|X_s = x] = t\sigma^2(x) + o(t)$
- $\mathbb{E}[|X_{s+t} - X_s| > \epsilon|X_s = x] = o(t)$

kada $t \to 0$, *za svaki* $x \in \mathbb{R}$ *i* $\epsilon > 0$, *gdje je* $\lim_{t->0} = \frac{o(t)}{t} = 0$

Najpoznatiji difuzijski proces je upravo Brownovo gibanje.

1.3 Brownovo gibanje

Konkretan slučajni proces koji ćemo koristiti u ovom radu zove se Brownovo gibanje.

Definicija 1.3.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $B = (B_t, t \geq 0)$ *je Brownovo gibanje ako vrijedi:*

- *Putovi* $t \mapsto B_t(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *(za g.s.* $\omega \in \Omega$*).*
- $B_0 = 0$
- *Za sve* $m \in \mathbb{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ *su prirasti* $B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$ *nezavisni*
- *Za sve* $0 \leq s < t$ *je prirast* $B_t - B_s$ *normalno distribuiran s očekivanjem 0 i varijancom* $t - s$

Brownovo gibanje naziva se i Wienerov proces.

Pored samog procesa, potrebno je i definirati filtraciju Brownovog gibanja.

Definicija 1.3.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i neka je* $B = (B_t, t \geq 0)$ *Brownovo gibanje na tom prostoru.* ***Filtracija*** *za Brownovo gibanje je familija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *koja zadovoljava*

- *Za sve* $0 \leq s < t$*,* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$
- *(Adaptiranost) Za svaki* $t \geq 0$*,* B_t *je* $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva slučajna varijabla*
- *(Nezavisnost budućih prirasta) Za sve* $0 \leq s < t$*, prirast* $B_t - B_s$ *nezavisan je od* $\mathcal{F}_s$*.*

U nastavku koristit ćemo prirodnu filtraciju Brownovog gibanja koju definiramo kao $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s < t)$. Za kraj ovog odjeljka navest ćemo teorem koji pokazuje da je Brownovo gibanje limes slučajnih šetnji i čiji dokaz možemo pronaći u [4] (odjeljak 5.2 i teorem 6.1.1). Prije toga definiramo slabu konvergenciju koju koristimo u teoremu.

Definicija 1.3.3 (Slaba konvergencija)**.** *Niz* $(X^{(n)})$ *stohastičkih procesa* ***konvergira slabo*** *stohastičkom procesu X ako za svaku ograničenu, neprekidnu funkciju* $f \in C[0,1]$*, gdje je norma na* $C[0,1]$ *supremum norma, vrijedi:*

$$\lim_{n \mapsto \infty} \mathbb{E}[f(X^{(n)})] = \mathbb{E}[f(X)]$$

i pišemo $X^{(n)} \Rightarrow X$*.*

Teorem 1.3.4 (Donskerov teorem)**.** *Ako su* $Y_1, Y_2, ...$ *nezavisne i jednakodistribuirane slučajne varijable s očekivanjem* 0 *i varijancom* σ^2 *i ako je* X^n *definirana kao u* (1.1.5)*, tada* $X^n \Rightarrow W$ *kada* $n \to \infty$*.*

1.4 Brownovo gibanje s driftom

Definicija 1.4.1. *Neka je $B = (B_t, t \geq 0)$ standardno Brownovo gibanje te neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma \in \mathbb{R}_+$ fiksni. Brownovo gibanje s parametrom drifta μ i varijancom σ^2 je proces $X_t = \mu t + \sigma B_t$ za $t \geq 0$.*

Također, ono ima nezavisne priraste i za sve $0 \leq s < t$ je prirast $B_t - B_s$ normalno distribuiran s očekivanjem $\mu(t-s)$ i varijancom $\sigma^2(t-s)$

1.5 Itov integral i stohastičke diferencijalne jednadžbe

Neka je $T > 0$, $W = (W_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje zajedno s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0,T])$ te $H = (H_t : t \in [0,T])$ adaptirani slučajni proces s obzirom na $\mathbb{F}$. U ovom odjeljku ćemo definirati Itov integral $\int_0^T H_t dW_t$ na način da ćemo prvo krenuti od definicije na jednostavnim procesima, a zatim definiciju proširiti.

Definicija 1.5.1. *Adaptiran slučajni proces $H = (H_t : t \in [0,T])$ zove se jednostavan proces ako je*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

za neku particiju $\Pi = 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ intervala $[0,T]$ i omeđene slučajne varijable ϕ_j, $j = 0, 1, ..., n-1$, takve da je ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva. S $\mathcal{E}_T$ označavamo familiju svih adaptiranih slučajnih procesa na $[0,T]$

Definicija 1.5.2. *Za slučajni proces $H \in \mathcal{E}_T$ definiran s 1.5.1 definiramo slučajni proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ s*

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (W_{t_{j+1} \wedge t} - W_{t_j \wedge t}). \tag{1.2}$$

Proces I zovemo Itov integral jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje W i označavamo ga s

$$I_t = \int_0^t H_s dW_s$$

Sada ćemo definiciju proširiti na opće integrande. Općim integrandima smatramo one iz familije $\mathbb{F}$-adaptiranih slučajnih procesa $H = (H_t : 0 \leq t \leq T)$ koji zadovoljavaju uvjet:

$$\mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt < \infty.$$

Navedenu familiju označavamo s $\mathcal{L}^2_{ad}$. Da bi mogli proširiti definiciju potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 1.5.3. *Za slučajni proces $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ postoji niz $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ jednostavnih procesa takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} \|H^{(N)} - H\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T |H^{(n)}_t - H_t|^2 dt = 0$$

odnosno $H^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{ad}} H, n \to \infty$.

Neka je sada $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_T$ niz aproksimirajućih jednostavnih integranada iz leme 1.5.3. Označimo $I^{(n)}_t = \int_0^t H^{(n)}_u dW_u$. Dokaže se da niz takvih Itovih integrala $(I^{(n)}_t)_n \in \mathbb{N}$ u trenutku t konvergira (u L^2) (dokaže se da je on Cauchyjev u L^2 i iskoristi se potpunost L^2, više o tome u [5]) i njegov limes zovemo Itovim integralom procesa H s obzirom na Brownovo gibanje, zapisom

$$\int_0^t H_u dW_u = (L^2) \lim_{n\to\infty} \int_0^t H^{(n)}_u dW_u.$$

Kako bi objasnili gibanje slučajnih procesa kroz vrijeme koristimo se sljedećom jednakosti:

$$dX_t = m(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, t \geq 0 \tag{1.3}$$

gdje je W standarno Brownovo gibanje i proces počinje u X_0.

Definicija 1.5.4. *Model 1.3 se naziva stohastička diferencijalna jednadžba, a proces X definiran s (ako navedeni integrali postoje)*

$$X_t := X_0 + \int_0^t m(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s, t \geq 0$$

se naziva strogo rješenje jednadžbe.

Difuzijski procesi objašnjeni ranije su rješenja stohastičkih diferencijalnih jednadžbi.

Poglavlje 2

Reosiguranje

Ugovorom o osiguranju, klijent se obvezuje plaćati **premiju** (dogovorena svota novaca koju će klijent isplaćivati tvrtki). Zauzvrat, tvrtka mu obećava pokriće osigurane štete u slučaju nesreće. Kada klijent zatraži pokriće, to nazivamo odštetnim zahtjevom(eng. claims). Za tvrtku, odštetni zahtjevi su ono što predstavlja rizik. Naime, vrijeme podnošenja odštetnog zahtjeva je slučajno, kao i količina zahtjeva pristigla u određenom trenutku. Tako u situacijama poput prirodnih katastrofa (npr. potres 2020.), u kojima se tvrtka susreće sa velikim brojem zahtjeva istovremeno, ili prilikom velikih zahtjeva (eng. large claims), tvrtka nije u mogućnosti samostalno pokriti sve troškove. Stoga se javlja potreba za reosiguranjem, odnosno prenošenjem rizika na druge kompanije koje tada nazivamo reosigurateljima. Radi jednostavnosti, pretpostavljat ćemo da se radi samo o jednom reosiguratelju, iako to ne mora biti slučaj.
Također, reosiguranje, osim što sprječava tvrtku od propasti, pomaže istoj očuvati stabilnost jer smanjuje mogućnost značajnih odstupanja naplaćenih premija od odštentnih zahtjeva. Ipak, postoji i loša strana reosiguranja, a to je njegova cijena. Da bi tvrtka uživala u svim blagodatima reosiguranja, i ona se mora obvezati plaćati premiju reosiguratelju.
Oblike reosiguranja prema udjelu u riziku možemo podijeliti na proporcionalne i nepropoionalne. Kod proporcionalnih reosiguranja, reosiguratelj ovisno o udjelu u rizik, proporcionalno sudjeluje i u premiji i u odštetnim zahtjevim bez obzira na visinu štete.
Kod neproporcionalnog reosiguranja, reosiguratelj svoj udio u riziku određuje na osnovi visine štete i zatim utvrđuje premiju.
Na tvrtki je da ovisno o svom poslovanju odredi koji oblik reosiguranja je za nju najpovoljniji, odnosno koji osigurava najmanji rizik.

2.1 Proporcionalno reosiguranje

Ugovori proporcionanog reosiguranja određuju udio reosiguratelja u premiji i šteti, pri čemu je taj udio jednak u oba slučaja. Razlikujemo dvije vrste proporcionalnog osiguranja. To su

- kvotno reosiguranje (Quota Share reinsurance)
- svotno-ekscedentno reosiguranje (Surplus reinsurance)

S obzirom na to da u ovom radu nećemo problematizirati svotno-ekscedentno reosiguranje, pobliže ćemo opisati samo kvotno.

Kvotno reosiguranje

Kvotno reosiguranje je oblik proporcionalnog reosiguranja u kojem reosiguratelj neovisno o visini odštetnog zahtjeva podnosi jednak udio. Nadalje, u svakoj pojedinačnoj premiji sudjeluje s jednakim postotkom kao i u pojedinačnom odštetnom zahtjevu. Time, ako s X_t označimo iznos odštetnog zahtjeva, s $\mu > 0$ premijsku stopu, a s $0 < u_s < 1$ kvota reosiguratelja, imamo:

- Premija tvrtke $p = u_s\mu$
- Iznos odštetnog zahtjeva koji plaća tvrtka $Y_t = u_sX_t$
- Iznos odštetnog zahtjeva koji plaća reosiguratelj $Z_t = (1 - u_s)X_t$

2.2 Neproporcionalno reosiguranje

Ugovori neporporcionalnog osiguranja zahtijevaju od reosiguratelja preuzimanje rizika samo u slučaju kada odštetni zahtjevi premaše unaprijed dogovoren limit. Razlikujemo dva tipa neproporcionalnog reosiguranja:

- reosiguranje viška štete (Excess of Loss, XL)
- reosiguranje tehničkog rezultata (Stop Loss, SL)

S obzirom na to da u ovom radu nećemo problematizirati reosiguranje tehničkog rezultata, pobliže ćemo opisati samo reosiguranje viška štete.

Reosiguranje viška štete

Reosiguranje viška štete podrazumijeva da se ugovorom postavi određeni limit (dalje oznaka u_s) iznosa odštetnog zahtjeva koji pokriva tvrtka, dok sve preko određenoga limita pokriva reosiguratelj. Ovom vrstom reosiguranja tvrtka se osigurava od velikih zahtjeva kao i od kumuliranja rizika, koje su posljedice npr. elementarnih nepogoda. S oznakama kao gore imamo:

- Iznos odštetnog zahtjeva koji plaća tvrtka $Y_t = min(X_t, u_s)$
- Iznos odštetnog zahtjeva koji plaća reosiguratelj $Z_t = (X_t - u_s)^+$

Poglavlje 3

Matematički model

Pričuvu i gubitke modelirat ćemo korak po korak kao u [2]. Započet ćemo s klasičnim modelom rizika, poznat i kao Cramer-Lundbergov model, koji se često koristi za modeliranje stohastičkih procesa. Ako s X_0 označimo iznos pričuve u početnom trenutku, imamo:

$$X_t = X_0 + pt - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

gdje je p premijska stopa koju plačaju klijenti, $N(t)$ Poissonov proces s parametrom λ (bez smanjenja općenitosti $\lambda = 1$), a Y_i su nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable sa zajedničkom funkcijom distribucije F koje predstavljaju veličinu odštetnih zahtjeva i vrijedi $Y_i > 0$. Poissonov proces označava broj zahtjeva u trenutku t. Naizgled jednostavna formulacija klasičnog modela rizika, ponekad je teška za numeričke izračune. Stoga ćemo aproksimirati navedeni model, koristeći se tzv. "difuzijskom aproksimacijom" na način da se slučajni dijelovi klasičnog modela zamijenjuju difuzijom.

Pokazat ćemo da se klasični model rizika može aproksimirati difuzijskim. Za to će nam trebati definicija slabe konvergencije definirana u (1.3)

Definicija 3.0.1. *Ako za klasični proces rizika X_t postoji niz $C_t^{(n)}$ klasičnih procesa rizika takvi da je $C_t^{(1)} = X_t$ i $C^{(n)} \Rightarrow W' = mt + \sigma W - t$ za neke m i σ^2, tada W' nazivamo difuzijskom aproksimacijom od X.*

Sad ćemo prikazati konstrukciju takvog niza s ciljem zamjene klasičnog rizik procesa s difuzijskim (vidi [1]). Neka su

$$C_t^{(n)} = x_n + p_n t - S_t^{(n)}$$

pri čemu je $S_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{N_t^{(n)}} Z_i^{(n)}$, p_n su premijske stope, a $N_t^{(n)}$ je Poissonov proces s parametrom λ_n, gdje su odštetni zahtjevi označeni sa $Z_i^{(n)}$, pri čemu je njihova funkcija distribucije G_n.

Nadalje,

$$\mu^{(n)} := \int_0^\infty z dG_n(z)$$
$$\mu_2^{(n)} := \int_0^\infty z^2 dG_n(z)$$

i pretpostavljamo $\mu_2^{(n)} < \infty$.
Definirajmo i doplatak za sigurnost (eng. safety loadings):

$$\eta_n := \frac{p_n - \lambda_n \mu^{(n)}}{\lambda_n \mu^{(n)}}.$$

Neka je $\{W_t\}$ standardno Brownovo gibanje, a W' gdje je $W_t' = W_0' + mt + \sigma W_t$ Brownovo gibanje s driftom.
Da bismo mogli pobliže opisati gornje parametre, potrebne su nam nekakve restrikcije. Za to će nam poslužiti donji teorem čiji dokaz možemo pronaći u [3] (strana 74.).

Teorem 3.0.2. *Da bi vrijedilo $C^{(n)} \mapsto W'$ parametri moraju zadovoljavati sljedeće:*

- $\lim_{n\mapsto\infty} \lambda_n = \infty$
- $\lim_{n\mapsto\infty} p_n = \infty$
- $\lim_{n\mapsto\infty} \eta_n \lambda_n \mu_n = m$
- $\lim_{n\mapsto\infty} \lambda_n((\mu^{(n)})^2 + (\mu_2^{(n)})^2) = \sigma^2$
- $\lim_{n\mapsto\infty} \mu^{(n)} = 0$
- $\lim_{n\mapsto\infty} \mu_2^{(n)} = 0$

Stoga za aproksimaciju možemo odabrati $\lambda_n = n\lambda$, $Z_i^{(n)} = \frac{Z_i}{\sqrt{n}}$, $\eta_n = \frac{\eta}{\sqrt{n}}$ i $x_n = x$. Dobivamo:

$$C_t^{(n)} = x + \lambda\mu\sqrt{n}(1 + \frac{\eta}{\sqrt{n}})t - \sum_{i=1}^{N_t^{(n)}} \frac{Z_i}{\sqrt{n}} = x + \lambda\mu\eta t + \frac{\lambda\mu n t - \sum_{i=1}^{N_t^{(n)}} Z_i}{\sqrt{n}}.$$

Sada kada pustimo $n \to \infty$ i koristeći se Donskerovim teoremom, imamo

$$C_t^{(n)} \Rightarrow W_t' = x + \lambda\mu\eta t + \sqrt{\lambda\mu_2} W_t,$$

odnosno, možemo zapisati

$$X_t = x + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

gdje je bez smanjenja općenitosti $\lambda = 1, \mu = p - \mathbb{E}(Y_1)$ i $\sigma = \sqrt{(Y_1^2)}$ i $\{W_s\}_s \geq 0$ standardno Brownovo gibanje s filtracijom $\{\mathcal{F}_s\}_{s \geq 0}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Nadalje, pretpostavimo da tvrtka ima dug ili obvezu na dividendu koja se financira iz viška po konstantnoj stopi (kasnije ćemo se referirati na važnost toga parametra u modelu). Tada možemo zapisati:

$$X_t = x + \int_0^t (\mu - \delta) ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

gdje je $\delta > 0$ stopa duga. Sada ćemo u igru uvesti priljeve novaca i na taj način omogućiti optimizaciju poslovanja i poantu cijelog ovog rada. Definiramo politiku kontrole π kao:

$$\pi := \{u_s, s > 0; (\tau_1, \tau_2, ...); (\xi_1, \xi_2, ...)\}$$

gdje je $0 \leq u_s \leq 1$, τ_i su slučajne varijable koje reprezentiraju vrijeme u kojem su se dogodili priljevi novaca, tj. to su vremena zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\{\mathcal{F}_s\}_{s > 0}$. Ona su dakako rastuća. ξ_i su $\mathcal{F}_{\tau_i}$ izmjerive slučajne varijable za $i = 1, 2, ...$ i one predstavljaju iznos priljeva novaca u trenutku τ_i. Veličina u_s vezana je za politiku reosiguranja u trenutku s. Razlikujemo slučaj proporcionalnog reosiguranja, gdje kao što smo prethodno objasnili, $(1 - u_s)$ predstavlja postotak odštetnog zahtjeva koji plaća reosiguranje te reosiguranje viška štete gdje u_s predstavlja maksimalni limit koji tvrtka može pokriti ($(Y_i - u_y)^+$ plaća reosiguranje). Uvedemo li sada politiku kontrole u naš model dobivamo:

$$X_t = x + \int_0^t (\mu(u_s) - \delta) ds + \int_0^t \sigma(u_s) dw_s + \sum_{\tau_i \leq t} \xi_i \tag{3.1}$$

Za proporcionalno reosiguranje vrijedi

$$\mu(u) = \mu u$$
$$\sigma(u) = \sigma u$$

gdje je $0 \leq u \leq 1$, dok za reosiguranje viška štete ono iznosi

$$\mu(u) = \int_0^u [1 - F(x)] dx$$
$$\sigma(u) = \sqrt{\int_o^u 2x[1 - F(x)] dx}$$

gdje je $0 \leq u \leq N$ i $N \leq \infty$.
Za proporcionalno reosiguranje dopustivim smatramo $u \in \mathcal{U} = [0, 1]$, a u slučaju reosiguranja viška štete vrijedi $u \in \mathcal{U} = [0, N]$. Naravno, cilj bi bio pričuvu održavati nenegativnom. Međutim, to i dalje nije dovoljna informacija koja bi nam omogućila optimizaciju politike kontrole. Odnosno, potrebno je staviti "sve karte na stol"i definirati funkciju gubitka vezanu za politiku kontrole i postaviti kao cilj minimizaciju iste. Želimo da funckija gubitka prikazuje ukupni trošak priljeva novaca, a koji će na tvrtku utjecati s određenim koeficijentom. Taj koeficijent varirat ćemo ovisno o vremenu na način da trošak za tvrku bude manji s većim vremenskim odmakom.
Time, s obzirom na politiku kontrole π, definiramo:

$$C^{\pi}(x) := \mathbb{E}_x[\sum_{\tau_i < \infty} e^{-r\tau_i} g(\xi_i)] \tag{3.2}$$

gdje je $\mathbb{E}_x$ očekivanje s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}(\cdot|X_0 = x)$, a g funkcija gubitka priljeva novaca definirana s

$$g(\xi) = K + c\xi. \tag{3.3}$$

$K > 0$ je fiksna cijena troška , a $c \geq 1$ je rata gubitka koja prikazuje ukupni trošak koji nastaje prilikom dodavanja jedne novčane jedinice pričuvi.
Prihvatljiva politika kontrole je ona u kojoj je pričuva uvijek nenegativna ($X_t^{\pi} \geq 0$) za gotovo sve t, te vrijedi $C^{\pi}(x) < \infty$ za sve $x \geq 0$. Označit ćemo s Π skup svih prihvatljivih politika kontrole. Kao završni korak problema optimizacije, potrebna je funkcija vrijednosti koja će obuhvatiti sve navedene zahtjeve. Definiramo funkciju vrijednosti V i kao cilj postavljamo pronalazak njezine točne definicije kao i optimalnu politiku kontrole π^* za koje vrijedi:

$$\begin{aligned} V(x) : &= \inf_{\pi \in \Pi} C^{\pi}(x) \\ V(x) &= C^{\pi^*}(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Kratko ćemo se još referirati na parametar δ kako bismo razjasnili potrebu svake komponente koju smo uveli u model. Naime, kada ne bi postojao parametar δ optimalna politika bila bi uzimati stopostotno reosiguranja (čime bi očuvali pričuvu nenegativnom) i ne pozivati priljeve novaca. Time bi vrijedilo $V = 0$. Nažalost, takav slučaj nije blizak stvarnosti.

Kada smo definirali naš model, vrijeme je pronaći odgovarajuću optimalnu politiku. U tu svrhu, u sljedećem odjeljku, pronalazimo neka svojstva funkcije V i predlažemo QVI potrebne za njeno rješavanje.

3.1 Svojstva funkcije V i QVI

U ovom odjeljku uvest ćemo operatore infiniezimalni generator i inf-konvolucijski operator, QVI funkcije i leme potrebne za njihovo rješavanje. Time ćemo završiti cijelu pripremu potrebnu za pronalazak eksplicitnog rješenja funkcije vrijednosti kao i optimalne politike kontrole.
Za fiksni $0 \leq u \leq 1$ definiramo infinitezimalni generator kao

$$(\mathcal{L}^u \psi)(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(u)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + [\mu(u) - \delta]\frac{d\psi(x)}{dx} \tag{3.5}$$

za neku funkciju $\psi \in C^2[0, \infty)$. Zatim, definiramo inf-konvolucijski operator M:

$$M\psi(x) = \inf_{\xi > 0}[g(\xi) + \psi(x + \xi)] \tag{3.6}$$

Sada pretpostavimo da je funkcija vrijednosti $V \in C^2[0, \infty)$. Tada su kvazi-varijacijske nejednakosti problema kontrole zadane s :

$$\mathcal{L}^u(x)V(x) - rV(x) \geq 0 \tag{3.7}$$

$$MV(x) \geq V(x) \tag{3.8}$$

za sve $x \geq 0$ i $u \in \mathcal{U}$. Zajedno, zapisujemo:

$$[MV(x) - V(x)] \min_{u \in \mathcal{U}}[\mathcal{L}^u V(x) - rV(x)] = 0. \tag{3.9}$$

Sada pokazujemo ograničenost funkcije V.

Lema 3.1.1. *Za svaki $\xi > 0$, $V(0) \leq g(\xi)\frac{e^{-r\frac{\xi}{\delta}}}{1-e^{r\frac{\xi}{\delta}}}$ i za svaki $x \geq 0$, $V(x) \leq V(0)e^{-r\frac{x}{\delta}}$*

Dokaz. Dokazujemo prvu nejednakost. Ako odaberemo politiku kontrole π gdje je $u_s = 0$, pričuva postaje deterministički proces. Još odaberimo da su priljevi novaca konstante i da su pozvane u trenutku propasti poslovanja. Tada je vrijeme potrebno da iz trenutka τ_{i-1} dođemo u trenutak τ_i, za $i \geq 1$ jednako $\frac{\xi}{\delta}$. Naime, uzimajući u obzir navedeno, vrijedi:

$$X^{\pi}_{\tau_{i-1}} = -\delta\tau_{i-1} + (i-1)\xi = \xi$$

Također, za X_{τ_i} želimo da vrijedi:

$$X^{\pi}_{\tau_i} = -\delta\tau_i + i\xi = \xi$$

Raspišemo li to i primijenimo jednakost za $X_{\tau_{i-1}}$ imamo:

$$\begin{aligned} -\delta\tau_{i-1} - \delta\Delta t + (i-1) + \xi &= \xi \\ \xi - \delta\Delta t + \xi &= \xi \\ \Delta t &= \frac{\xi}{\delta} \end{aligned}$$

Primijenimo li dobiveno na funkciju troška V imamo:

$$\begin{aligned} V(0) \leq C^{\pi}(0) &= \mathbb{E}_0[\sum_{\tau_i<\infty} e^{-r\tau_i} g(\xi_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_0[e^{-r\tau_i} g(\xi)] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} g(\xi)\mathbb{E}_0[e^{-ri\frac{\xi}{\delta}}] \\ &= g(\xi) \sum_{i=1}^{\infty} e^{-ri\frac{\xi}{\delta}} \\ &= g(\xi)e^{-r\frac{\xi}{\delta}} \frac{1}{1 - e^{r\frac{\xi}{\delta}}} \end{aligned}$$

pri čemu treća jednakost vrijedi jer su sumandi nenegativni, a zadnji rezultat dobijemo kao sumu geometrijskog reda za koji je $q = e^{-r\frac{\xi}{\delta}} < 1$. Analogno se dokazuje i druga nejednakost. □

U sljedećoj lemi pokazujemo da je optimalno zatražiti priljev novaca u trenutku propasti poslovanja, odnosno kada pričuva padne na 0.

Lema 3.1.2. *Ako za politiku kontrole π postoji i takav da vrijedi $X^{\pi}_{\tau_i-} > 0$, onda politika π nije optimalna*

Dokaz. Neka vrijedi $X^{\pi}_{\tau_i-} > 0$. Razmotrimo novu politiku kontrole $X^{\pi'}$ koja je po svemu jednaka početnoj, osim što odgađa potražnju za i-tim priljevom novaca na prvi idući trenutak kada pričuva dotakne 0. Na taj način reduciramo funkciju gubitka jer produžujemo razdoblje diskontiranja $(r\tau_i)$. □

Sada iz lema (3.1.1) i (3.1.2) zaključujemo da na $(0, \infty)$, funkcija V rješava:

$$\min_{u\in\mathcal{U}}[\mathcal{L}^u V(x) - rV(x)] = 0 \tag{3.10}$$

gdje vrijede granični uvjeti:

$$\begin{aligned} V(\infty) &= 0 \\ MV(0) &= V(0). \end{aligned}$$

3.2 Verifikacijski teorem

U ovom odjeljku iskazat ćemo i dokazati verifikacijski teorem koji ćemo koristiti u idućim poglavljima.
Za početak ćemo iskazati lemu koja će nam biti od velike važnosti za dokaz teorema.

Lema 3.2.1 (Itova lema, [6]). *Za difuzijski proces oblike* $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ *i bilo koju funkciju* $f(t,x) \in C^2$ *vrijedi*

$$df(t,X_t) = (\frac{df}{dt} + \mu_t \frac{df}{dx} + \frac{\sigma_t^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2})dt + \sigma_t \frac{df}{dx} dB_t$$

za sve $t \geq 0$

Teorem 3.2.2. *Pretpostavimo da* $W \in C^2[0,\infty)$ *zadovoljava jednadžbu* (3.10)*, zajedno s graničnim uvjetima i neka je* W' *ograničena na* $[0,\infty)$*. Tada se* W *podudara s funkcijom vrijednosti* V *na* $[0,\infty)$*. Nadalje, ako postoji konstantna* u^* *koja minimizira* (3.10)*, tj.*

$$\mathcal{L}^{u*}V(x) - rV(x) = \min_{u \in \mathcal{U}} [\mathcal{L}^u V(x) - rV(x)]$$

za sve $x > 0$*, tada je optimalna politika reosiguranja dana s*

$$u_s^* = u^*$$

Optimalna veličina priljeva novaca je konstanta i jednaka ξ^* *u inf-konvolucijsku operatoru*

$$g(\xi^*) + V(\xi^*) = \inf_{\xi > 0} [g(\xi) + V(\xi)]$$

Optimalna vremena zaustavljanja su vremena propasti poslovanja pričuvnog procesa $X_s^{\pi *}$

Dokaz. Uzmimo bilo koju prihvatljivu politiku π. Lema (3.1.2) implicira da bi vremena zaustavljanja trebala biti ona u kojima je pričuva jednaka nuli. Stoga, stavimo $\tau_0 = 0$ i označimo s $\tau_i, i = 1, 2, ...$ vremena zaustavljanja, odnosno vremena propasti poslovanja pričuvnog procesa politike π. Označimo s $\xi_i, i = 1, 2, ...$ veličinu i-tog priljeva. Uzimajući u obzir da W rješava (3.10), da je $X_0^\pi = x$ i koristeći se Itovom lemom imamo:

$$
\begin{aligned}
e^{-rt}W(X_t^\pi) - W(x) &= \int_0^t e^{-rs}(dW(X_s^\pi) - rW(X_s^\pi))ds \\
&= \int_0^t e + e^{-rs}(\mathcal{L}^u W(X_s^\pi) - rW(X_s^\pi))ds + \int_0^t \sigma(u_s)e^{-rs}W'(X_s^\pi)dw_s + \\
&+ \int_0^t e^{-rs}\frac{dW}{ds}ds \\
&= \int_0^t e + e^{-rs}(\mathcal{L}^u W(X_s^\pi) - rW(X_s^\pi))ds + \int_0^t \sigma(u_s)e^{-rs}W'(X_s^\pi)dw_s + \\
&+ \sum_{0<\tau_i\le t} e^{-r\tau_i}[W(X_{\tau_i}^\pi) - W(X_{\tau i}-^\pi)] \\
&\ge \int_0^t \sigma(u_s)e^{-rs}W'(X_s^\pi)dw_s + \sum_{0<\tau_i\le t} e^{-r\tau_i}[W(X_{\tau_i}^\pi) - W(X_{\tau i}-^\pi)] \\
&= \int_0^t \sigma(u_s)e^{-rs}W'(X_s^\pi)dw_s + \sum_{0<\tau_i\le t} e^{-r\tau_i}[W(\xi_i) - W(0)]
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

za svaki inicijalni $x > 0$. Iz graničnog uvjeta $MW(0) = W(0)$ slijedi

$$W(0) \le g(\xi_i) + W(\xi_i)$$

pa dobivamo

$$e^{-rt}W(X_t^\pi) - W(x) \ge \int_o^t \sigma(u_s)e^{-rs}W'(X_s^\pi)dw_s + \sum_{0<\tau_i\le t} e^{-r\tau_i}[-g(\xi_i)] \tag{3.12}$$

Primijetimo da je $\sigma(u_s)e^{-rs}W'(X_s^\pi)$ ograničena pa vrijedi da je proces

$$\int_0^t \sigma(u_s)e^{-rs}W'(X_s^\pi)dw_s{}_{t\ge 0}$$

martingal očekivanja nula. Primijenimo li očekivanje na (3.12) i pustimo $t \mapsto \infty$ dobivamo:

$$W(x) \le \mathbb{E}[\sum_{0<\tau_i<\infty} e^{-r\tau_i}[g(\xi_i)]] = C^\pi(x)$$

Stoga je

$$W(x) \le V(x)$$

Kada stavimo $\pi = \pi^*$, nejednakosti u (3.11) i (3.12) postaju jednakosti pa imamo

$$W(x) = C^{\pi *}(x) \ge V(x)$$

pa zaključujemo da vrijedi tvrdnja. □

3.3 Rješenje u slučajnu proporcionalnog reosiguranja

U ovom odjeljku riješiti ćemo QVI u slučaju proporcionalnog reosiguranja i pronaći ćemo funkciju V te optimalnu politiku kontrole π^*.
S obzirom na to da rješenje uvelike ovisi o parametru δ, o čemu će biti riječi kasnije, razlikovat ćemo dva slučaja rješenja.

Niska stopa duga

U ovom slučaju pretpostavit ćemo da je $\delta < \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{2\mu}$.

Definirat ćemo $u_W(x)$ za svaku funkciju $W \in C^2[0,\infty)$ za koju vrijedi $W''(x) \neq 0$ na sljedeći način:

$$u_W(x) := -\frac{\mu}{\sigma^2}\frac{W'(x)}{W''(x)} \tag{3.13}$$

Pretpostavimo da V rješava (3.10), odnosno da vrijedi:

$$\min_{0\leq u\leq 1}[\frac{1}{2}\sigma^2u^2V''(x) + (\mu(u)-\delta)V'(x) - rV(x)] = 0 \tag{3.14}$$

te pretpostavimo $V''(x) > 0$ i $0 \leq u_V(x) \leq 1$.
Deriviramo li (3.14) u potrazi za minimumom, dobivamo da je $u^*(x) = u_V(x)$
Ako sada to primijenimo na (3.14) imamo:

$$\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}\frac{[V'(x)]^2}{V''(x)} + \delta V'(x) + rV(x) = 0 \tag{3.15}$$

Uzimajući u obzir da vrijedi $V(\infty) = 0$, pretpostavljamo rješenje u obliku:

$$V(x) = \alpha e^{-\beta x}$$

gdje su $\alpha > 0, \beta > 0$.
Kako bi pronašli parametar β, rješenje ćemo primijeniti na (3.15). Uzimajući u obzir da je $V'(x) = -\beta V(x)$ i $V''(x) = \beta^2 V(x)$ imamo :

$$\beta = \frac{1}{\delta}(r + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}) \tag{3.16}$$

Primijenjujući sad rezultat za β imamo:

$$u_V(x) = \frac{2\delta\mu}{2r\sigma^2 + \mu^2} \tag{3.17}$$

Time je zahtjev $u_V(x) < 1$ ekvivalentan $\delta < \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{2\mu}$ što stoji u početnoj pretpostavci.
Parametar α pronaći ćemo koristeći se $MV(0) = V(0)$.
Primijenjujući definiciju operatora M, funkcije g i $V(0) = \alpha$ imamo:

$$\alpha = \inf_{\xi>0}[K + c\xi + \alpha e^{-\beta\xi}] \tag{3.18}$$

Deriviranjem gornje jednakosti dolazimo do parametra ξ^*:

$$\xi^* = -\frac{1}{\beta}\ln\frac{c}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta}\ln\frac{\alpha\beta}{c} \tag{3.19}$$

Kada to ponovno uvrstimo u (3.18), imamo:

$$K + \frac{c}{\beta}\ln\frac{\alpha\beta}{c} + \frac{c}{\beta} - \alpha = 0 \tag{3.20}$$

Mora biti $\xi^* > 0$, a time dobivamo $\alpha > \frac{c}{\beta}$. Sada definiramo funkciju G na sljedeći način:

$$G(\alpha) := \frac{c}{\beta}\ln\frac{\alpha\beta}{c} + \frac{c}{\beta} - \alpha \tag{3.21}$$

i tražimo njezino rješenja na intervalu $(\frac{c}{\beta}, \infty)$. Uočavamo da je $G(\frac{c}{\beta}) = 0$ i $G(\infty) = -\infty$, i da je funkcija strogo padajuća. Stoga postoji jedinstveno rješenje na intervalu $(\frac{c}{\beta}, \infty)$ za $G(\alpha) = -K$ i to rješenje je naš parametar α. Time smo napravili uvod u dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 3.3.1. *Ako je* $\delta < \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{2\mu}$*, tada je funkcija vrijednosti definirana u* (3.4) *dana s*

$$V(x) = \alpha e^{-\beta x},$$

gdje je β *definirana u* (3.16)*, a* α *je jedinstveno rješenje jednakosti* (3.21) *na intervalu* $(\frac{c}{\beta}, \infty)$*. Optimalni koeficijent reosiguranja je dan s*

$$u_s^* = \frac{2\delta\mu}{2r\sigma^2 + \mu^2},$$

optimalni priljevi novaca su konstante i dane s

$$\xi_i^* = \frac{1}{\beta}\ln\frac{\alpha\beta}{c}, \tag{3.22}$$

za $i = 1, 2, ...$ *i optimalna vremena zaustavljanja* τ_i^* *su trenuci propasti poslavanja.*

Dokaz. Za danu funkciju V vrijedi $V''(x) > 0$. Nadalje, koristeći se pretpostavkom o koeficijenu δ i (3.17) imamo:

$$0 < u_V(x) = \frac{2\delta\mu}{2r\sigma^2 + \mu^2} < 1$$

Time je minimum u (3.10) na intervalu $[0, 1]$ dana s $u^* = u_V(x)$, odnosno

$$\min_{0 \le u \le 1} \mathcal{L}^u V(x) - rV(x) = \mathcal{L}^{u*} V(x) - rV(x) \tag{3.23}$$

Uvrstimo li V iz iskaza teorema i gornju jednakost za β, vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{u*} V(x) - rV(x) &= \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}\frac{[v'(x)]^2}{V''(x)} + \delta V'(x) + rV(x) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2} V(x) - \delta\beta V(x) + rV(x) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2} V(x) - rV(x) - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2} V(x) + rV(x) = 0
\end{aligned}$$

odnosno V rješava (3.14).
Nadalje, uvjet $MV(0) = V(0)$ dobivamo derivacijom ξ^* u (3.19) . Ostalo slijedi iz verifikacijskog teorema. □

Slučaj s visokom stopom duga

U ovom odjeljku pretpostavljamo da je $\delta \ge \frac{\mu^2 + 2r\sigma^2}{2\mu}$.

Pretpostavimo da V rješava (3.14) za svaki $x > 0$ i neka je $V''(x) > 0$ i $u_V(x) \ge 1$. Tada je minimum u lijevoj strani od (3.14) dan s :

$$u^*(x) = 1$$

Ako to uvrstimo u (3.14), dobijemo da V rješava

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V(x) + (\mu - \delta)V'(x) - rV(x) = 0 \tag{3.24}$$

Općenito rješenje ovog problema je

$$V(x) = \eta e^{-\gamma x} + \kappa e^{px}$$

gdje su η i κ slobodne konstante, a

$$\gamma, p = \frac{\sqrt{(\mu - \delta)^2 + 2r\sigma^2} \pm (\mu - \delta)}{\sigma^2} \tag{3.25}$$

Sada iz graničnog uvjeta $V(\infty) = 0$ dobivamo da je $\kappa = 0$, odnosno imamo

$$V(x) = \eta e^{-\gamma x}. \tag{3.26}$$

Zbog $V'(x) = -\gamma V(x)$ i $V''(x) = \gamma^2 V(x)$ imamo

$$u_V(x) = \frac{\mu}{\sigma^2\gamma} = \frac{\mu}{(\mu - \delta) + \sqrt{(\mu-\delta)^2 + 2r\sigma^2}}$$

odnosno, uvjet $u_V(x) \geq 1$ je ekvivalentan početnoj pretpostavki o parametru δ.
Slijedi da je minimum na lijevoj stani (3.14) $u^*(x) = 1$.
Ostaje odrediti parametar η iz graničnog uvjeta $MV(0) = V(0)$. Imamo

$$\eta = \inf_{\xi>0}[K + c\xi + \eta e^{-\gamma\xi}] \tag{3.27}$$

Deriviranjem izraza u zagradama s desne strane, dobivamo da je minimum dan s :

$$\xi^* = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{\eta\gamma}{c} \tag{3.28}$$

odnosno η rješava

$$K + \frac{c}{\gamma}\ln\frac{\eta\gamma}{c} + \frac{c}{\gamma} - \eta = 0 \tag{3.29}$$

Iz (3.28) vidimo da je η^* pozitivna, stoga imamo $\eta > \frac{c}{\gamma}$.
Sada, slično kao i prije zaključujemo da postoji jedinstveno rješenje ove jednadžbe na intervalu $(\frac{c}{\gamma}, \infty)$
Pripremili smo sve za idući teorem.

Teorem 3.3.2. *Ako je $\delta \geq \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{2\mu}$, tada je funkcija vrijednosti definirana u* (3.4) *dana s*

$$V(x) = \eta e^{-\gamma x}$$

pri čemu je γ dana s (3.25) *i η je jedinstveno rješenje jednadžbe* (3.29) *na intervalu $(\frac{c}{\gamma}, \infty)$.*
Optimalna stopa reosiguranja daja je s

$$u_s^* = 1$$

Optimalni priljevi novaca $\xi_i^*, i = 1, 2, ...$ su konstante i vrijedi:

$$\xi_i^* = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{\eta\gamma}{c}$$

i optimalna vremena zaustavljanja τ_i^* su vremena propasti poslovanja pričuvnog procesa s politikom π^*

Dokaz. Iz definicije funkcije V uočavamo da vrijedi $V''(x) > 0$. Zatim iz pretpostavke o parametru δ imamo

$$\begin{aligned} u_V(x) &= \frac{\mu}{(\mu-\delta) + \sqrt{(\mu-\delta)^2 + 2r\sigma^2}} \\ &\geq \frac{\mu}{\frac{\mu^2-2r\sigma^2}{2\mu} + \sqrt{(\frac{\mu^2-2r\sigma^2}{2\mu})^2 + 2r\sigma^2}} \\ &= \frac{\mu}{\frac{\mu^2-2r\sigma^2}{2\mu} + \sqrt{(\frac{\mu^2+2r\sigma^2}{2\mu})^2}} \\ &= \frac{\mu}{\frac{2\mu^2}{\mu^2}} = 1 \end{aligned}$$

Stoga je minimum (3.10) na intervalu $[0, 1]$ dan s $u^* = 1$, tj.

$$\min_{0\leq u\leq 1} \mathcal{L}^u V(x) - rV(x) = \mathcal{L}^1 V(x) - rV(x)$$

Slično kao u prvom slučaju, uvrštavajući γ, vrijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 V(x) - rV(x) &= \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu-\delta)V'(x) - rV(x) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2 V(x) - (\mu-\delta)(x) - rV(x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2r\sigma^2}{\sigma^2} V(x) - rV(x) = 0 \end{aligned}$$

Odnosno V rješava (3.10). Nadalje, granični uvjet $MV(0) = V(0)$ slijedi iz definicije ξ^*. Ostatak dokaza slijedi iz verifikacijskog teorema. □

Interpretacija

U ovom odjeljku objasnit ćemo interakcije između parametara i odabranog modela. Cilj je steći intuiciju što dani parametri prikazuju

Napomena 3.3.3 (Parametar δ). *Kada je stopa duga δ mala, optimalna politika teži držati stopu reosiguranje konstantnim. Suprotno, kada je stopa duga velika, optimalno je uopće ne kupovati reosiguranje.*

Napomena 3.3.4 (Fiksna cijena priljeva novaca). *Funkcija G definirana u* (3.21) *je strogo padajuća na* $(\frac{c}{\beta}, \infty)$. *Stoga je G^{-1} strogo padajuća na* $(-\infty, 0)$. *Dakle*

$$\alpha = G^{-1}(-K)$$

raste, kao i ξ^* *u* (3.19) *kada* K *raste.*
To znači da kada je fiksna cijena skuplja, a svi ostali parametri modela ostaju nepromjenjeni, treba povisiti veličinu priljeva novaca i smanjiti frekvenciju njihovih potraživanja

Napomena 3.3.5 (Veza veličine priljeva novaca i stope c)**.** *Definirat ćemo novu funkciju* H

$$H(\theta) := \frac{1}{\beta}\ln\beta\theta + \frac{1}{\beta} - \theta$$

Za $\theta \in (\frac{1}{\beta}, \infty)$ *pri čemu ćemo označiti* $\theta = \frac{\alpha}{c}$*. Primijetit ćemo da je funkcija* H *strogo padajuća na zadanom interval. Time je i* H^{-1} *također strogo padajuća na* $(0, -\infty)$*. Nadalje, vrijedi*

$$\theta = H^{-1}(-\frac{K}{c})$$

jer je $G(\alpha) = cH(\alpha)$ *te* $G(\alpha) = -K$*. Također, vrijedi*

$$\xi^* = \frac{1}{\beta}\ln\beta\theta$$

Iz čega vidimo da ako c *raste,* θ *pada, a time pada i* ξ^**. Odnosno, kada se rata gubitka* c *poveća, veličina priljeva novaca treba se smanjiti.*

Napomena 3.3.6 (Negativna pričuva u početnom trenutku)**.** *U ovoj napomeni razmotrit ćemo slučaj u kojem je pričuva u početnom trenutku bila negativna(*$x < 0$*).*
Tada je u trenutku $t = 0$ *potreban priljev novaca u iznosu* $(\xi^* - x)$ *(dokazuje se iz* $V(x) = MX(x)$*).*
U tom slučaju, minimalna funkcija gubitka dana je s

$$V(x) = K + c(\xi^* - x) + V(\xi^*)$$

za sve $x < 0$*. Odnosno, u ovisnosti o parametru* δ *razlikujemo dva slučaja*

- *za* $\delta < \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{2\mu}$ *vrijedi*

$$V(x) = K + \frac{c}{\beta}\ln\frac{\alpha\beta}{c} + \frac{c}{\beta} - cx = \alpha - cx$$

- *za* $\delta \geq \frac{\mu^2+2r\sigma^2}{2\mu}$ *vrijedi*

$$V(x) = K + \frac{c}{\gamma}\ln\frac{\eta\gamma}{c} + \frac{c}{\gamma} - cx = \gamma - cx$$

Na taj način možemo proširiti funkciju V *na* $(-\infty, \infty)$

3.4 Rješenje u slučaju reosiguranja viška štete

U ovom odjeljku pronaći ćemo rješenje optimalne politike kontrole u slučaju kada se koristi reosiguranje viška štete.
Za početak, pretpostavimo da V rješava (3.10), odnosno

$$\min_{0 \le u \le N} \frac{1}{2}\sigma^2(u)V''(x) + [\mu(u) - \delta]V'(x) - rV(x) = 0 \tag{3.30}$$

Pronađimo u tom slučaju i funkciju $u_V(x)$. Deriviranjem dobivamo

$$u_V(x) = -\frac{V'(x)}{V''(x)}$$

uzimajući u obzir da je $0 \le u_V(x) \le N$ i $V''(x) > 0$.
Predlažemo rješenje oblika:

$$V(x) = \zeta e^{-\kappa x}$$

Tada je

$$V'(x) = -\kappa V(x)$$
$$V''(x) = \kappa^2 V(x)$$

pri čemu su $\kappa, \zeta > 0$. Tada je

$$u_V(x) = \frac{1}{\kappa}$$

pretpostavljajući da je $0 \le \frac{1}{\kappa} < N$ Nađimo sada parametar κ. Ako gornje pretpostavke uvrstimo u (3.30), slijedi:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{1}{\kappa})\kappa^2 - [\mu(\frac{1}{\kappa}) - \delta]\kappa - r = 0 \tag{3.31}$$

odnosno κ je rješenje jednadžbe.
Sada ćemo slično kao u gornjim rješenjima, definirati funkciju J i dokazati da ona ima jedinstveno rješenje na željenom intervalu. To rješenje bit će upravo κ.
Krenimo s definicijom funkcije J:

$$J(u) := \frac{\sigma^2(u)}{2u} - \mu(u) - ru + \delta, u > 0 \tag{3.32}$$

Zbog prethodnog vrijedi

$$J(\frac{1}{\kappa}) = 0 \tag{3.33}$$

Dalje, uočimo da je $J(0+) = \delta$ (jer je $\sigma(0+) = \mu(0+) = 0$) te da ako vrijedi:

$$\sigma < \mu + rN - \frac{\sigma^2}{2N}$$

onda je i $J(N) < 0$.
Zaključno, funkcija J padajuća je ($J'(u) = -r < 0$). Stoga, postoji jedinstveno rješenje κ takvo da je $0 < \frac{1}{\kappa} < N$. Zatim, određujemo parametar ζ. U tome će nam pomoći granični uvjet $MV(0) = V(0)$. Kao i prethodno, za početak deriviranjem odredimo minimum i dobivamo da vrijedi

$$\xi^* = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\eta\kappa}{c}$$

Tada dobivamo da $\zeta \in [\frac{c}{\kappa}, \infty)$ rješava

$$K + \frac{c}{\kappa} \ln \frac{\zeta\kappa}{c} + \frac{c}{\kappa} - \eta = 0 \tag{3.34}$$

Ova razmatranja sumirat ćemo u idućem teoremu:

Teorem 3.4.1. *Ako vrijedi $\delta < \mu + rN - \frac{\sigma^2}{2N}$, tada je funkcija vrijednosti definirano u* (3.4) *dana s*

$$V(x) = \eta e^{-\kappa x}$$

pri čemu je κ rješenje (3.32) *i η jedinstveno rješenje od* (3.34) *na intervalu $(\frac{c}{\kappa}, \infty)$. Optimalna politika reosiguranja je konstanta dana s :*

$$u_s^* = \frac{1}{\kappa}$$

Optimalni priljevi novaca su također konstante i događaju se u trenucima propasti poslovanja pričuvnog procesa π^*, a iznose:

$$\xi_i^* = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\eta\kappa}{c}$$

Teorem 3.4.2. *Ako vrijedi $\delta \geq \mu + rN - \frac{\sigma^2}{2N}$, tada je funkcija vrijednosti definirana u* (3.4) *jednaka onoj u teoremu 3.3.2. Optimalna politika reosiguranja dana je s $u^* = N$. Optimalna vremena zaustavljanja su vremena propasti poslovanja, a optimalni priljevi novaca identični su kao oni u teoremu 3.3.2*

Dokaz. Provjeravamo rješava li V jednadžbu (3.10).
Za početak uočimo da vrijedi

$$u_V(x) = -\frac{V'(x)}{V''(x)} = \frac{1}{\gamma}$$

Također, vrijedi $\frac{1}{\gamma} \geq N$ (jer je ekvivalentno s početnim uvjetom za δ).
Kako je funkcija $\mathcal{L}^u V$ padajuća na $(0, \frac{1}{\gamma})$, tako je na intervalu $[0, N]$ $u^* = N$.
V rješava 4.9 pa i jednadžbu (3.10):

$$\min_{0 \leq u \leq N} [\mathcal{L}^u V(x) - rV(x)] = \mathcal{L}^N V(x) - rV(x) = 0$$

s graničnim zahtjevom u (3.10).
Ostatak slijedi iz verifikacijskog teorema. □

Bibliografija

[1] J. Eisenberg i H. Schmidli, *Optimal Control of Capital Injections by Reinsurance and Investments*, J. Appl. Prob. **48**, 733–748 (2011).

[2] S. Luo i M. Taksar, *Minimal cost of a Brownian risk without ruin*, (2011).

[3] H. Schmidli, *A General Insurance Risk Model*, thesis (Dr.Sc.Math) Eidgenoessische Technische Hochschule Zuerich (Switzerland), 1992.

[4] E. Schondorf, *The Wiener measure and Donsker's invariance principle*, (2019), `https://math.uchicago.edu/~may/REU2019/REUPapers/Schondorf.pdf`.

[5] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje 2*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm2_p12.pdf`, preuzeto 13.12.2022.

[6] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*, Springer, Berlin, 2000.

Sažetak

U ovom radu proučavali smo politiku reosiguranja i potražnje za priljevima novaca s ciljem očuvanja poslovanja tvrtke i spašavanja iste od propasti. Cilj modela bio je ustvrditi trenutke u kojima je potrebno zatražiti priljev novaca te njihov iznos, pronaći optimalnu razinu reosiguranja (za oba oblika reosiguranja) te funkciju vrijednosti koja prati troškove firme i minimizira ih. Optimalna funkcija vrijednosti pronađena je eksplicitno pomoću kvazi-varijacijskih nejednakosti i radi se o eksponencijalnoj funkciji. Trenuci u kojima je potrebno zatražiti priljeve novaca su upravo oni u kojima dolazi do propasti poslovanja (pričuva je jednaka nuli). Iznosi priljeva novaca kao i optimalna razina reosiguranja su konstante. Time je optimalna politika koja kontrolira pričuvu modelirana difuzijskim procesom sa skokovima gdje je pričuvni proces Brownovo gibanje s konstantnim driftom i konstatnim skokovima napravljenima u trenucima propasti poslovanja.

Summary

In this paper, we studied an optimal reinsurance policy as well as the optimal policy of cash-injection calls. The presented model establishes the moments in which it is necessary to request cash injections and determines their amount, it also finds the optimal level of reinsurance (for both forms of reinsurance) and the value function that minimizes the cost. The optimal value function is found explicitly using QVI and is an exponential function. Cash-injections are optimally called at the moment of ruins (surplus is equal to zero) and their amount was found to be constant. The optimal level of reinsurance is also found to be constant. Thus, the optimal policy that controls surplus process was modeled by jump-diffusion process and the surplus process became a Brownian motion with a constant drift and constant jumps at the times of ruin.

Životopis

Rođena sam 4.2.1999. u Zagrebu. Nakon osnovne škole, upisujem XV. gimnaziju koju završavam 2017. godine. Iste godine upisujem preddiplomski studij Matematike na matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, 2020. godine, upisujem diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu. Tijekom diplomskog studija razvila sam interes za aktuarstvo koje jenjava nakon rada u osiguravajućoj kući. Shvativši da moj životni put nije financijska industrija, odlučila sam sreću pronaći drugdje. Trenutno uživam i radim u području podatkovne znanosti i strojnog učenja.