Taxicab geometrija

Brdarić, Vinko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Vinko Brdarić

TAXICAB GEOMETRIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, ožujak 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U matematici se često koristimo euklidskom geometrijom. Velika većina kurikuluma geometrije posvećena je euklidskoj geometriji, a to uključuje cjeloviti kurikulum osnovnoškolske i srednjoškolske nastave iz sadržaja geometrija. Naša saznanja iz geometrije uglavnom se temelje na toj geometriji čije je aksiome iznio Euklid u doba stare Grčke.
U euklidskoj geometriji, udaljenost između dvije točke definiramo kao njihovu zračnu udaljenost. Takav način računanja i promatranja prostora vrlo je primjenjiv u stvarnom životu. Na primjer, tako računamo udaljenosti na zemljopisnim kartama, ili udaljenost između dva objekta između kojih nema drugih prepreka. Potpuno drugačiji način doživljavanja i računanja prostornih udaljenosti donosi taxicab geometrija. Među prvima je na takav oblik računanja udaljenosti obratio pozornost Hermann Minkowski, njemački matematičar iz 19. stoljeća, koji je među ostalima poučavao i Alberta Einsteina.
Pokazao je razliku između udaljenosti u taxicab geometriji i euklidskoj geometriji, odnosno ukazao je na razliku između euklidske i neeuklidskih geometrija. Minkowski je htio pokazati da S-K-S poučak o sukladnosti ne vrijedi uvijek. Isto tako je htio pokazati da hipotenuza nije uvijek najdulja stranica u trokutu. Prvi je sam pojam „taxicab geometrija" koristio Karl Menger. Karl Menger (1902. - 1985.) bio je austrijsko-američki matematičar koji je značajno pridonio proučavanju geometrije. Godine 1952. u Muzeju znanosti i industrije u Chicagu, Menger je izložio svoj geometrijski rad, a uz to je napisao knjižicu u kojoj je uveo pojam taxicab geometrija. O toj geometriji pisao je kasnije Eugene F. Krause. On je autor knjige „Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry" izdane godine 1975. U toj knjizi, on je razvio u potpunosti taxicab geometriju koristeći koncept taxicab udaljenosti.
Tematika taxicab geometrije općenito je bila promatrana u kontekstu neeuklidskih geometrija. Bit taxicab geometrije je u drugačijem računanju udaljenosti između dvije točke. Umjesto zračne udaljenosti, taxicab geometrija traži najkraći put između dvije točke s obzirom na konfiguraciju terena, što uključuje i prepreke. Konkretno, taxicab geometrija promatra „idealni" grad u kojem su sve ulice pod pravim kutom. Udaljenost se računa kao najkraći put kojim taksi može proći od jedne točke odnosno zgrade do druge točke odnosno zgrade. Iz toga i proizlazi i sam naziv taxicab geometrija, također i Manhattan udaljenost. Takvo računanje više je primjenjivo u urbanizmu, jer je relevantnije za stvarnu udaljenost

koju ljudi i vozila trebaju proći u svakodnevnom životu. Naravno, gradovi u stvarnosti nisu tako izgrađeni, jer ulice nisu uvijek pod pravim kutom i zgrade nisu točke, ali prostorne probleme lakše je rješavati primjenom taxicab geometrije.
Ovaj rad pokazat će razlike između euklidske i taxicab geometrije. Činjenica da je taxicab udaljenost različita od euklidske udaljenosti dovodi do razlika u izgledu kružnice, elipse, hiperbole, parabole, simetrale stranice, sličnosti trokuta i tako dalje. Usporedno će biti prikazani primjeri iz euklidske i taxicab geometrije, potkrijepljeni grafovima i računima. Bit će analizirani i različiti problemi u planiranju grada koji se mogu rješiti taxicab geometrijom. Želimo pokazati da taxicab geometrija nije samo teoretsko razmišljanje već može dobiti značajno mjesto u rješavanju urbanističkih problema za koje euklidska geometrija nije primjenjiva.
Na početku rada, jednostavnim primjerima pokazujemo računanje udaljenosti u taxicab geometriji te dokazujemo da je ta udaljenost uvijek veća ili jednaka od euklidske. Na različitim primjerima pokazujemo da postoji više jednakih i najkraćih puteva. Također, obradili smo taxicab metriku.
U drugom poglavlju proučavamo simetralu dužine u taxicab geometriji. U taxicab geometriji te simetrale nisu pravci, za razliku od euklidske geometrije. U trećem poglavlju pokazujemo razliku kruga i kružnice u euklidskoj i taxicab geometriji. Osim crtanja kruga i kružnice u taxicab geometriji računamo i formulu za opseg te vrijednost broja π, to jest omjer opsega i dijametra. Također, demonstriramo neke primjene iz stvarnog života kao što je problem u kojem tražimo da naše mjesto stanovanja bude za određen broj kilometara udaljeno od nama važnih lokacija.
U četvrtom poglavlju obrađujemo razliku elipse, hiperbole i parabole u euklidskoj i taxicab geometriji. Analiziramo različite oblike hiperbole u taxicab geometriji. Konstruiramo te krivulje i primjenjujemo njihove definicije na situacije iz stvarnog života koje se mogu dogoditi u modernim gradovima. Elipsu smo primijenili na problem udaljenosti od stana do dvije lokacije, a parabolu na problem policijske ophodnje. U petom poglavlju proučavamo udaljenost točke od pravca, sukladnost i sličnost trokuta te opisanu i upisanu kružnicu trokuta, sve u taxicab geometriji. Prvo pokažemo kako to izgleda u euklidskoj geometriji, a zatim prelazimo na taxicab geometriju. Slike olakšavaju praćenje teorema.
U zadnjem poglavlju bavimo se problemom predstavljanja osnovnih koncepata taxicab geometrije učenicima osmog razreda osnovne škole. Započinjemo primjerima kojima uvodimo taxicab udaljenost, a nakon toga učenici sami rade na nastavnom listiću. Na isti način obrađujemo kružnicu. Nakon otkrivanja kako kružnica izgleda u taxicab geometriji učenici nalaze i formulu za opseg kružnice te vrijednost omjera opsega i promjera kružnice. Nakon svake aktivnosti razrađeni su i pripadni ishodi.

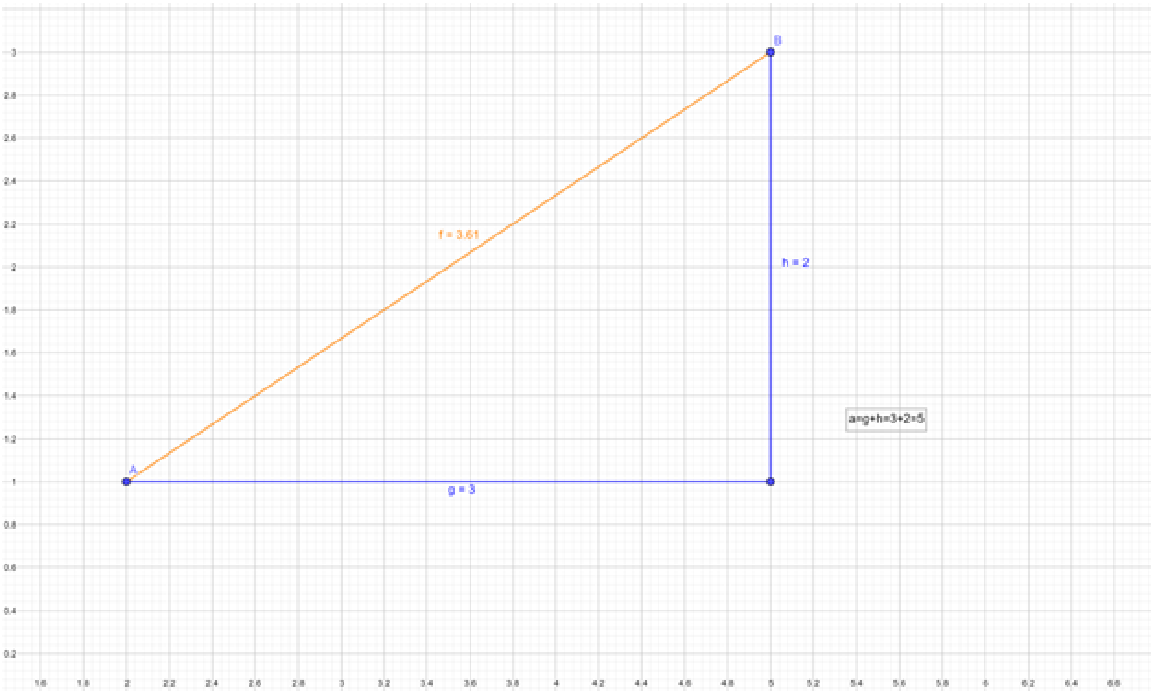
Poglavlje 1

Taxicab udaljenost

U ovom poglavlju slijedimo prve dvije cjeline iz knjige [7] i rad [8]. Također, koristimo definiciju metrike iz skripte [10].

1.1 Taxicab udaljenost

U školskom sustavu pod pojmom geometrija misli se na euklidsku geometriju. No postoje još razne druge geometrije. Pogledajmo grad. Udaljenost u euklidskoj geometriji predstavlja zračnu udaljenost koja nam nije pogodna za računanje duljine nekog puta u gradu. Mi želimo geometriju u kojoj će udaljenost između dvije točke, koje predstavljaju na primjer zgrade u gradu, biti udaljenost koju osoba koja se kreće kroz grad treba zaista proći. Horizontalne i vertikalne linije predstavljaju ulice.



Slika 1.1: Razlika euklidske i taxicab udaljenosti

Pogledajmo na slici 1.1 euklidsku udaljenost između točke $A(2,1)$ i točke $B(5,3)$. Ta udaljenost je jednaka duljini hipotenuze trokuta odnosno $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \approx 3.60555$ po Pitagorinom poučku. Kako smo rekli da su to neke zgrade u gradu, nama ta činjenica ne znači puno. Zamislimo da pješice idemo od točke A do točke B. I dalje želimo minimizirati put pa se prvo pomaknemo za 3 u desno. Time smo došli na pravac $x = 5$ na kojem je i točka B. Zatim se pomaknemo prema gore za 2 kako bismo došli do točke B.
Dakle, udaljenost između točke A i točke B na ovakav način je $3+2=5$. Vidimo da je na taj način udaljenost veća jer $5 > 3.60555$.
Kada računamo euklidsku udaljenost, mi zapravo računamo duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta kojemu je duljina jedne katete razlika x koordinata tih točaka, a duljina druge katete je razlika y koordinata tih točaka. Imamo formulu za euklidsku udaljenost između dviju točaka $T_1(x_1,y_1), T_2(x_2,y_2)$:

$$d_E(T_1,T_2) = \sqrt{(|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2)}.$$

Udaljenost koju računamo kada idemo pješice u ovom primjeru nazivamo udaljenost u taxicab geometriji i označavamo je sa d_T. Mi zapravo računamo zbroj duljina kateta tog pravokutnog trokuta to jest:

$$d_T(T_1, T_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

U ranijem primjeru smo vidjeli

$$d_T(T_1, T_2) = 3 + 2 = 5.$$

Kažemo da je udaljenost u taxicab geometriji odnosno udaljenost od A do B jednaka 5.

Propozicija 1.1.1. *Euklidska udaljenost uvijek je manja ili jednaka od taxicab udaljenosti.*

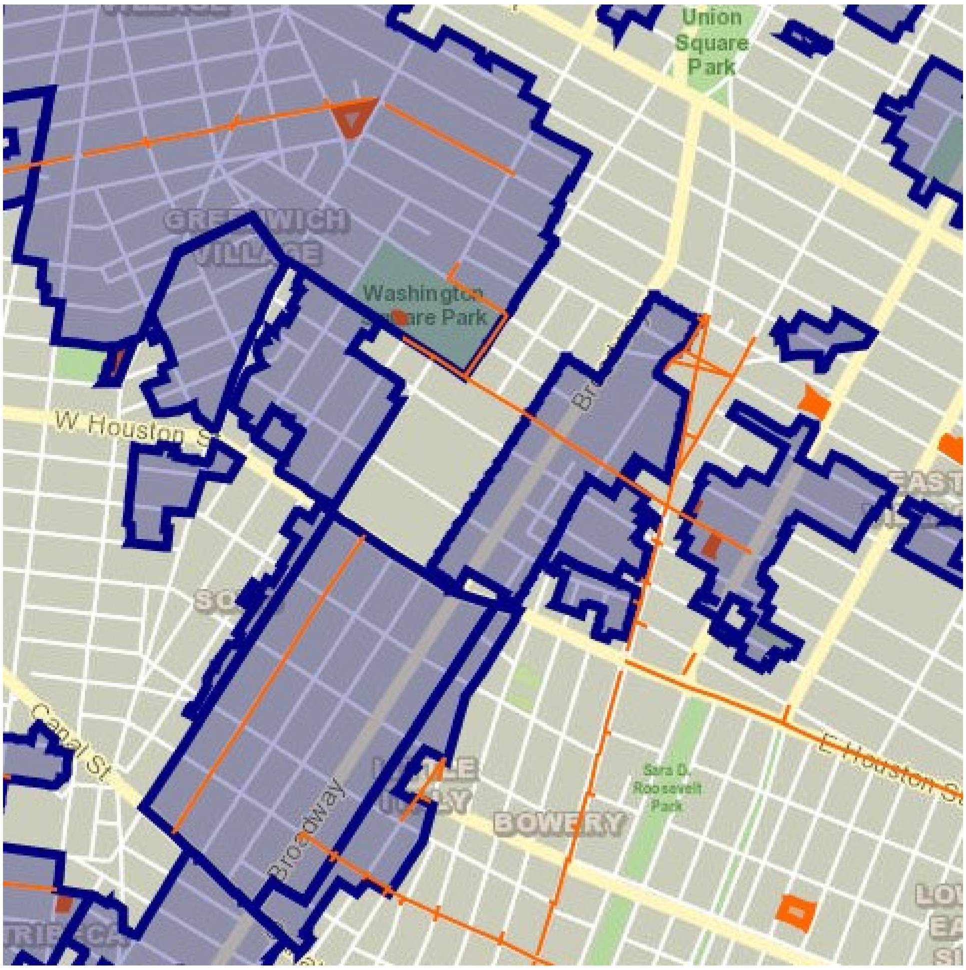
Dokaz. Uzmimo dvije točke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$. Dokažimo da je euklidska udaljenost između te dvije točke manja ili jednaka od taxicab udaljenosti.

$$\begin{aligned}
d_E &\leq d_T \\
\sqrt{(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2)} &\leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\
|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 &\leq |x_1 - x_2|^2 + 2|x_1 - x_2||y_1 - y_2| + |y_1 - y_2|^2 \\
0 &\leq 2|x_1 - x_2||y_1 - y_2|.
\end{aligned}$$

Ova nejednakost vrijedi jer $|x_1 - x_2| \geq 0$ i $|y_1 - y_2| \geq 0$.
Zbog toga vrijedi i $d_E \leq d_T$. □

1.2 O primjenama taxicab geometrije

Kao što smo već rekli, taxicab geometrija prikladnija je za računanje udaljenosti u urbanim područjima od euklidske geometrije. Zračna udaljenost između dvije točke u gradu nam ne znači puno.
Na slici 1.2 vidimo mapu dijela New Yorka. Kako bismo došli od neke lokacije do neke druge moramo proći ulicama koje su postavljene otprilike pod pravim kutom. Nije nam bitna zračna udaljenost jer se na primjer vozimo taksijem, a ne avionom. Zbog toga, taxicab geometrijom možemo doći do stvarne duljine tog puta, za razliku od euklidske geometrije.



Slika 1.2: Slika dijela grada New Yorka[1]

Također, taxicab geometrija pretpostavlja da su sve zgrade veličine točke. To naravno ne odgovara stvarnosti, ali ipak taxicab geometrijom možemo doći do korisnih rezultata.

Slika 1.3: Slika Slavoluka pobjede u središtu Pariza[2]

Na slici 1.3 vidimo da nisu uvijek ulice pod pravim kutom. Trg na slici 1.3 osmišljen je kružno i iz njega se zrakasto šire avenije. Vidimo da za takvu situaciju niti euklidska geometrija niti taxicab geometrija nisu idealne.

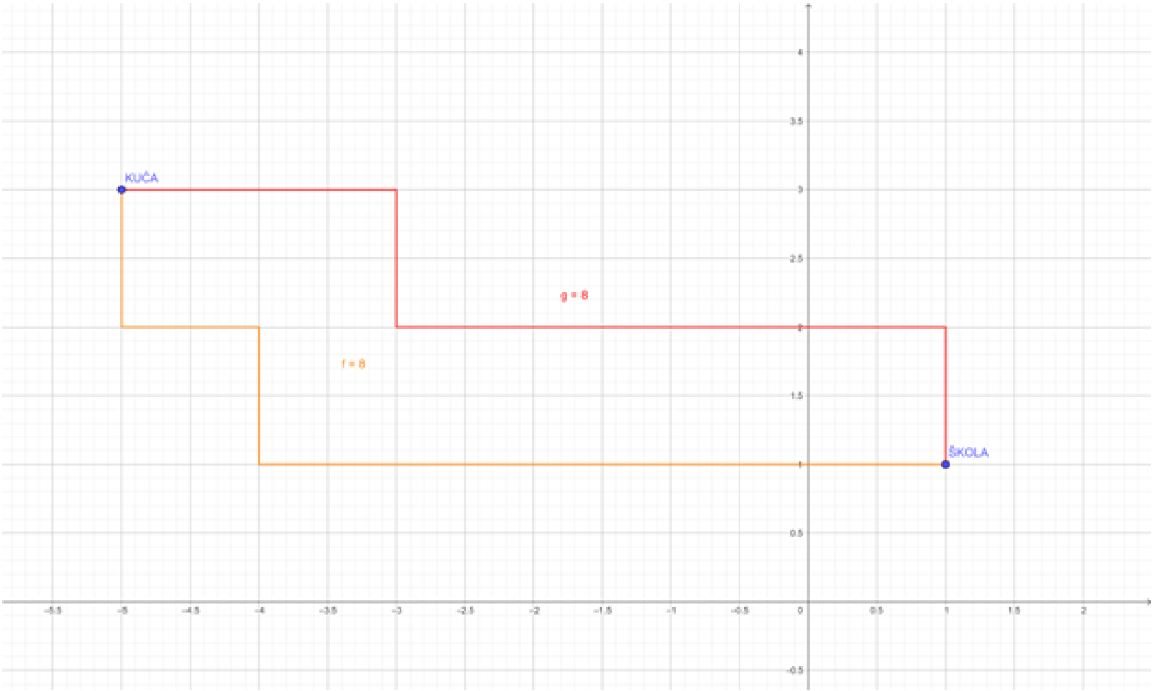
[1]Slika je preuzeta 31.7.2022. sa stranice CNN Travel `https://www1.nyc.gov/nyc-resources/nyc-maps.page`

[2]Slika je preuzeta 31.7.2022. sa stranice CNN Travel `https://edition.cnn.com/travel/article/jeffrey-milstein-paris-from-the-air/index.html`

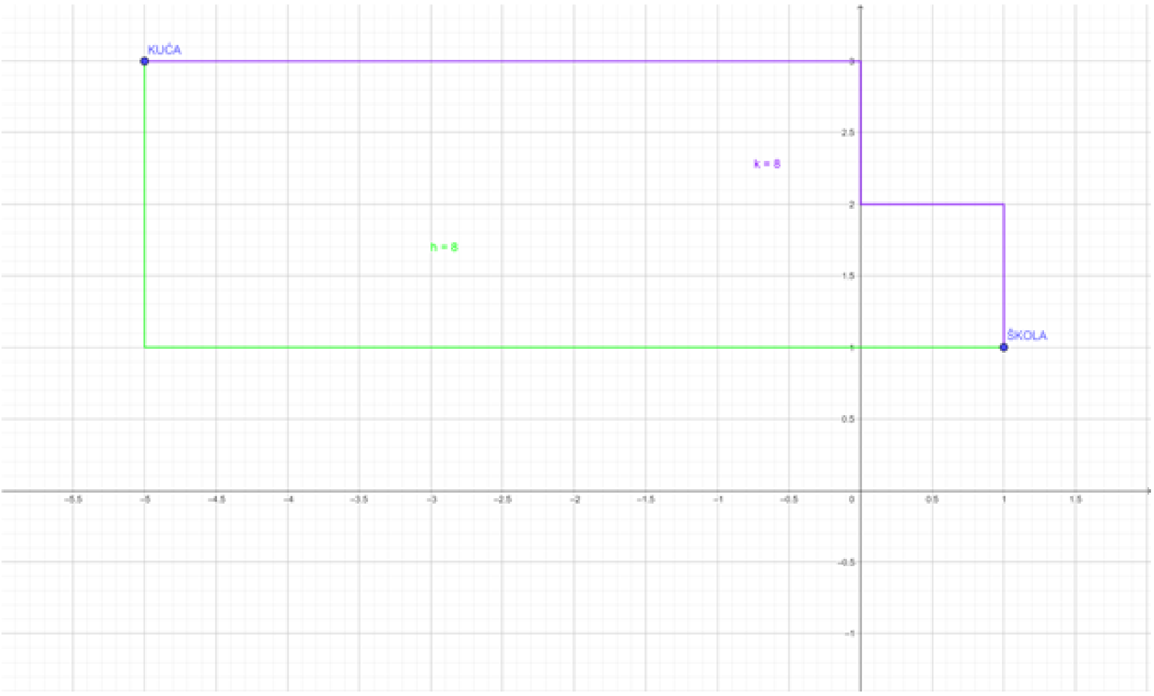
1.3 Računanje udaljenosti

Primjer 1.3.1. *Udaljenosti.*

Recimo da u nekom gradu imamo kuću i školu. Kao što smo već rekli, mi tražimo duljinu puta koji trebamo proći hodajući od kuće do škole, a ne zračnu udaljenost. Nama će kuća biti točka s koordinatama (x_1, y_1), a škola će imati koordinate (x_2, y_2).



Slika 1.4: Kuća i škola; primjeri puteva

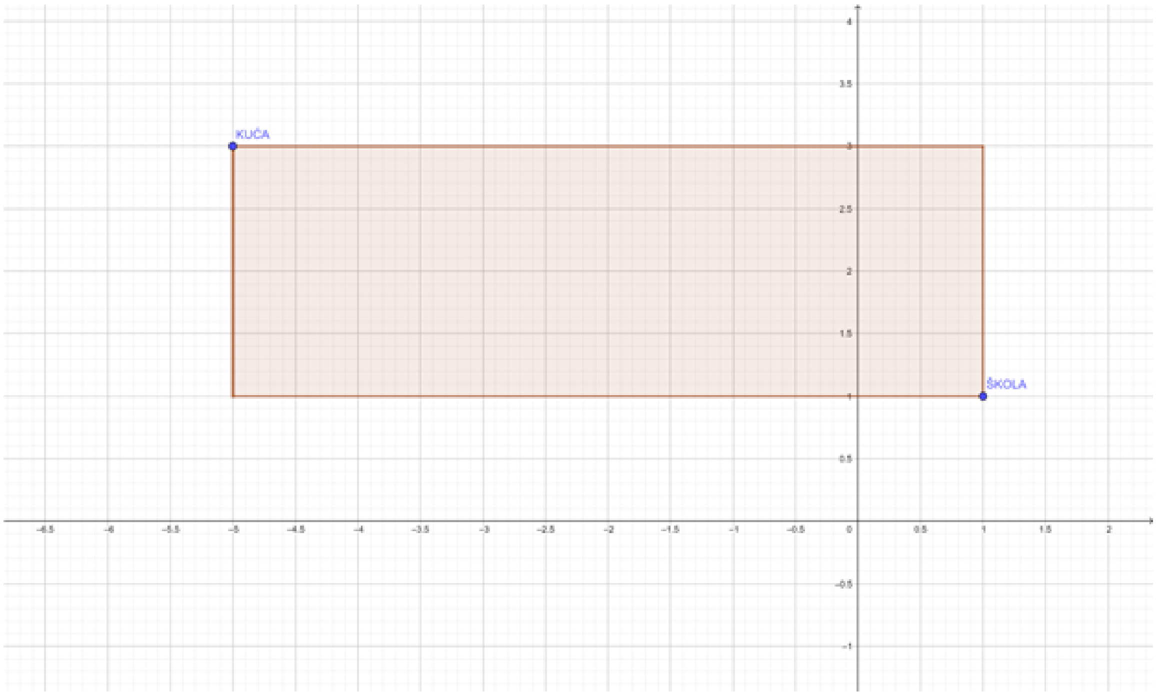


Slika 1.5: Kuća i škola; primjeri puteva

Na slikama 1.4 i 1.5 vidimo da su duljine ova četiri puta jednaka. Kako bismo našli sve puteve jednake duljine?
Zbroj apsolutnih vrijednosti razlika koordinata $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ mora biti 8. To znači da put ne smije biti izvan pravokutnika kojemu su točke "KUĆA" i "ŠKOLA" nasuprotni vrhovi. Ako bi recimo prolazio kroz točku $(-4, 4)$, očito je da bi bio dulji od 8.

Slika 1.6: Kuća i škola; pravokutnik

No ovo također nije puna slika. Rekli smo da ulice nemaju širinu. Točke mogu biti na bilo kojim koordinatama, ne moraju im koordinate biti samo cijeli brojevi. Zato putevi mogu biti sadržani na cijelom pravokutniku.



Slika 1.7: Kuća i škola; pravokutnik

1.4 Taxicab metrika

Definicija 1.4.1. *Metrika ili udaljenost na skupu X je svako preslikavanje $d : X \times X \to \mathbb{R}$, tako da vrijedi:*

1. $d(x, y) \geq 0$*, za svaki x, y element od X*
2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je $x = y$, za svaki x, y element od X*
3. $d(x, y) = d(y, x)$*, za svaki x, y element od X*
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*, za svaki x, y, z element od X.*

Metrički prostor je par (X, d) skupa X i metrike d na X.

Teorem 1.4.2. *Skup $\mathbb{R}^2$ uz taxicab metriku je metrički prostor.*

Dokaz. Definirajmo taxicab udaljenost kao $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}$, $d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Provjerimo je li taxicab udaljenost d_T metrika. U dokazu ćemo koristiti proizvoljne točke,$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Vrijedi li $d_T(x, y) \geq 0$?
   Znamo da:
   $d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$, jer vrijedi $|x_1 - y_1| \geq 0$ i $|x_2 - y_2| \geq 0$ pa je i zbroj veći od nula.

2. Vrijedi li $d_T(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$?
   Pretpostavimo da vrijedi $d_T(x, y) = 0$. Dokažimo da iz toga slijedi $x = y$.
   Zbog apsolutnih vrijednosti vrijedi $|x_1 - y_1| \geq 0$ i $|x_2 - y_2| \geq 0$ pa iz toga slijedi $|x_1 - y_1| = 0$ i $|x_2 - y_2| = 0$.
   Iz toga slijedi da ako je
   $|x_1 - y_1| = 0$ onda vrijedi $x_1 - y_1 = 0$. Ako je $x_1 - y_1 = 0$ onda zaključujemo da je

   $$x_1 = y_1.$$

   Također, ako je $|x_2 - y_2| = 0$, onda vrijedi $x_2 - y_2 = 0$. Ako je $x_2 - y_2 = 0$ onda zaključujemo da je $x_2 = y_2$.
   Dobili smo da vrijedi $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$ pa iz toga slijedi $x = y$.
   Pretpostavimo da vrijedi $x = y$, to jest $x_1 = y_1, x_2 = y_2$. Dokažimo da iz toga slijedi $d_T(x, y) = 0$.
   Ako vrijedi $x = y$, onda imamo

   $$d_T(x, y) = d_T(y, y) = |y_1 - y_1| + |y_2 - y_2| = 0.$$

Iz toga proizlazi
$d_T(x, y) = 0$.

3. Vrijedi li $d_T(x, y) = d_T(y, x)$?
Znamo da je $d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ i da vrijedi $|x_1 - y_1| = |y_1 - x_1|$ pa pišemo
$d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_T(y, x)$.

4. Vrijedi li $d_T(x, y) \leq d_T(x, z) + d_T(z, y)$?
Pišemo
$d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|$.
Znamo da vrijedi nejednakost trokuta $|a + b| \leq |a| + |b|$. Primjenimo to za $a = x_1 - z_1, b = z_1 - y_1$ pa smo dobili
$|x_1 - z_1 + z_1 - y_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|$. (*)
Analogno za vrijednosti $a = x_2 - z_2, b = z_2 - y_2$, proizlazi:
$|x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$. (**)
Iz (*) i (**) zaključujemo da vrijedi nejednakost
$|x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$.
Znamo da vrijedi ova jednakost
$|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| = d_T(x, z) + d_T(z, y)$
pa zaključujemo
$d_T(x, y) \leq d_T(x, z) + d_T(z, y)$.

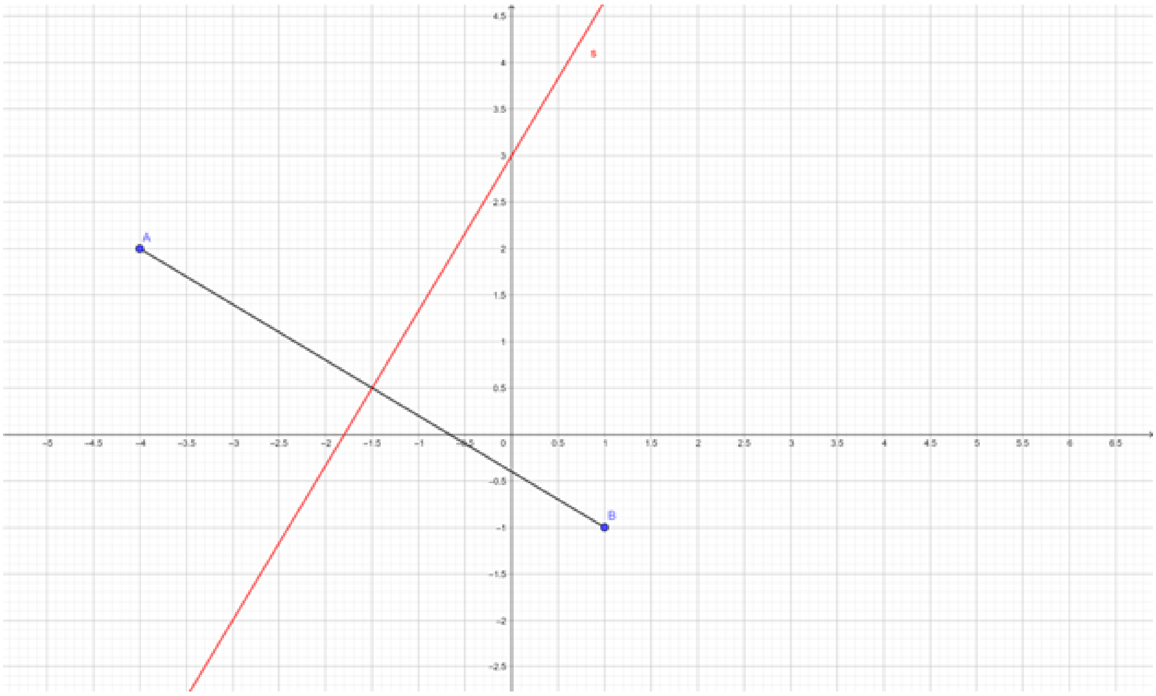
Dokazali smo da je taxicab udaljenost metrika na $\mathbb{R}^2$. □

Poglavlje 2

Simetrala dužine u taxicab geometriji

U ovom poglavlju slijedimo prvu cjelinu iz knjige [7].
Pogledajmo sljedeću situaciju. Imamo dvije točke A i B, recimo da predstavljaju dvije lokacije blizu kojih želimo živjeti. Kako bismo našli lokaciju u kojoj želimo živjeti ako su nam te dvije lokacije A i B jednako važne, odnosno želimo da nam je stan jednako udaljen od obje?
Dakle, tražimo geometrijsko mjesto svih točaka ravnine jednako udaljenih od točke A i od točke B. Kako bi analogni problem izgledao u euklidskoj geometriji?

Primjer 2.0.1. *U euklidskoj geometriji je skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od točke A i od točke B zapravo simetrala dužine $\overline{AB}$. Tražimo skup svih točaka P tako da vrijedi: $d_E(A, P) = d_E(P, B)$.*

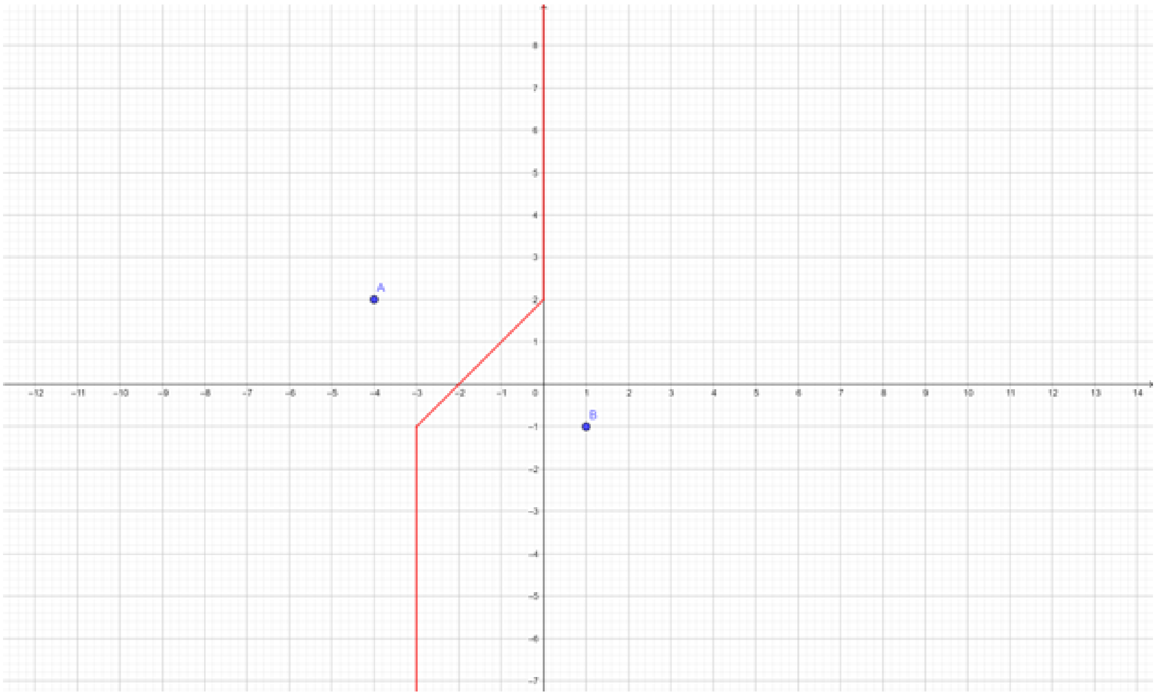


Slika 2.1: Simetrala dužine u euklidskoj geometriji

Kako bismo našli skup svih takvih točaka u taxicab geometriji? Tražimo skup svih točaka P takvih da vrijedi

$$d_T(A, P) = d_T(P, B).$$

Ovdje trebamo simetralu dužine u taxicab geometriji. Kako ona izgleda?

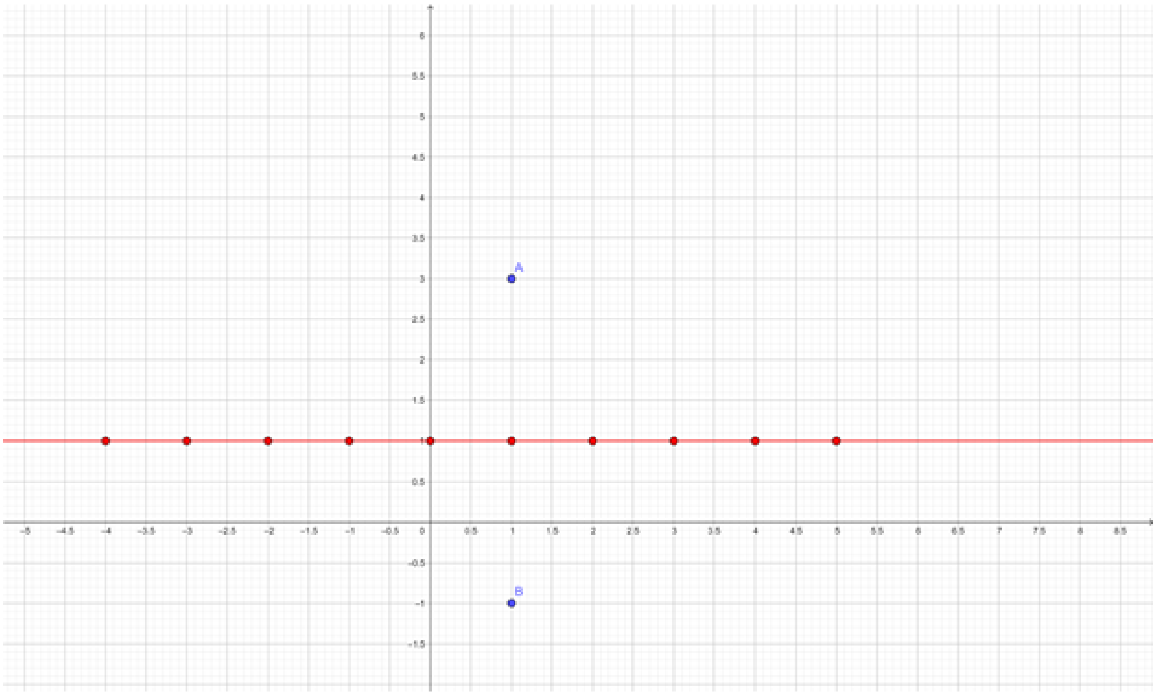


Slika 2.2: Geometrijsko mjesto svih točaka koje su jednako udaljene od točaka A i B

Na slici 2.2 vidimo u crvenom geometrijsko mjesto svih točaka P koje su jednako udaljene od točaka A i B.
Imamo četiri slučaja:

1. slučaj. Točke A i B imaju istu x koordinatu to jest $x_A = x_B$.
   Uzmimo točku $P(x_P, y_P)$ koja je jednako udaljena od te dvije točke.
   Vrijedi
   $$d_T(A, P) = d_T(P, B).$$
   To jest vrijedi
   $$|x_P - x_A| + |y_P - y_A| = |x_P - x_B| + |y_P - y_B|.$$
   Koristimo činjenicu $x_A = x_B$ pa vrijedi:
   $$\begin{aligned} |x_P - x_B| + |y_P - y_A| &= |x_P - x_B| + |y_P - y_B| \\ |y_P - y_A| &= |y_P - y_B|. \end{aligned}$$

Dobili smo da je y koordinata točke P jednako udaljena od y koordinate točke A i y koordinate točke B, to jest da je točno između y koordinata točaka A i B. Također vidimo iz računa da x koordinata točke P može biti bilo koji broj.



Slika 2.3: Simetrala dužine $\overline{AB}$, A i B imaju istu x koordinatu

Na slici 2.3 vidimo simetralu dužine $\overline{AB}$.

2. slučaj. Točke A i B imaju istu y koordinatu to jest $y_A = y_B$.
Uzmimo točku $P(x_P, y_P)$ koja je jednako udaljena od te dvije točke.
Vrijedi

$$d_T(A, P) = d_T(P, B).$$

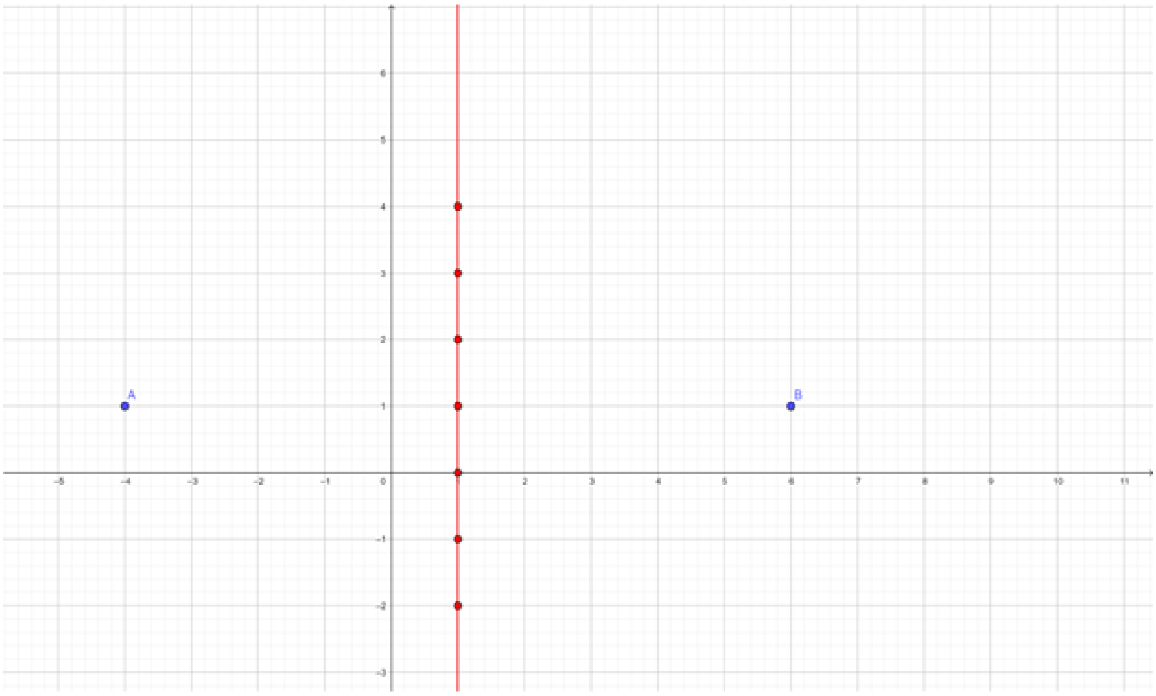
To jest vrijedi

$$|x_P - x_A| + |y_P - y_A| = |x_P - x_B| + |y_P - y_B|.$$

Koristimo činjenicu $y_A = y_B$ pa vrijedi:

$$|x_P - x_A| + |y_P - y_B| = |x_P - x_B| + |y_P - y_B|$$
$$|x_P - x_A| = |x_P - x_B|.$$

Ovaj slučaj je analogan prethodnom. Dobili smo da je x koordinata točke P jednako udaljena od x koordinate točke A i x koordinate točke B, to jest da je točno između x koordinata točaka A i B. Također, vidimo iz računa da y koordinata točke P može biti bilo koji broj.



Slika 2.4: Simetrala dužine $\overline{AB}$, A i B imaju istu y koordinatu

Na slici vidimo simetralu dužine $\overline{AB}$.

3. slučaj. Točke A i B nalaze se na pravcu sa koeficijentom smjera $k \neq -1, 1$.
   Uzmimo točku $P(x_P, y_P)$ koja je jednako udaljena od te dvije točke.
   Nacrtajmo pravokutnik sa vrhovima A i B koji se nalaze na dijagonali (slika 2.5). Znamo da na pravokutniku možemo naći skup točaka koje su jednako udaljene od točaka A i B. Kako bismo našli te točke? Trebat će nam dvije od njih koje se nalaze na stranicama pravokutnika, a ostale dobijemo spajanjem tih točaka.

Uzmimo točku $P_1(x_{p_1}, y_{p_1})$ koja se nalazi na jednoj od stranica ovog pravokutnika i ima istu y koordinatu kao i točka A.
Vrijedi

$$d_T(A, P_1) = d_T(P_1, B).$$

To jest vrijedi

$$|x_{p_1} - x_A| + |y_{p_1} - y_A| = |x_{p_1} - x_B| + |y_{p_1} - y_B|.$$

Koristimo činjenicu $y_A = y_{p_1}$

$$\begin{aligned} |x_{p_1} - x_A| + |y_A - y_A| &= |x_{p_1} - x_B| + |y_A - y_B| \\ |x_{p_1} - x_A| &= |x_{p_1} - x_B| + |y_A - y_B|. \end{aligned}$$

To znači da je udaljenost od točke p_1 do točke A jednaka zbroju apsolutne vrijednosti razlike x koordinata točaka p_1 i B i razlike y koordinata tih točaka.
Na primjer za točke $A(-4, 2), B(1, -1)$

$$\begin{aligned} |x_{p_1} - (-4)| &= |x_{p_1} - 1| + |-1 - 2| \\ |x_{p_1} + 4| &= |x_{p_1} - 1| + |-3| \\ |x_{p_1} + 4| &= |x_{p_1} - 1| + 3. \end{aligned}$$

Rješavamo ovu jednadžbu:
Za $x_{p_1} < -4$

$$\begin{aligned} -x_{p_1} - 4 &= -x_{p_1} + 1 + 3 \\ -4 &= 4, \end{aligned}$$

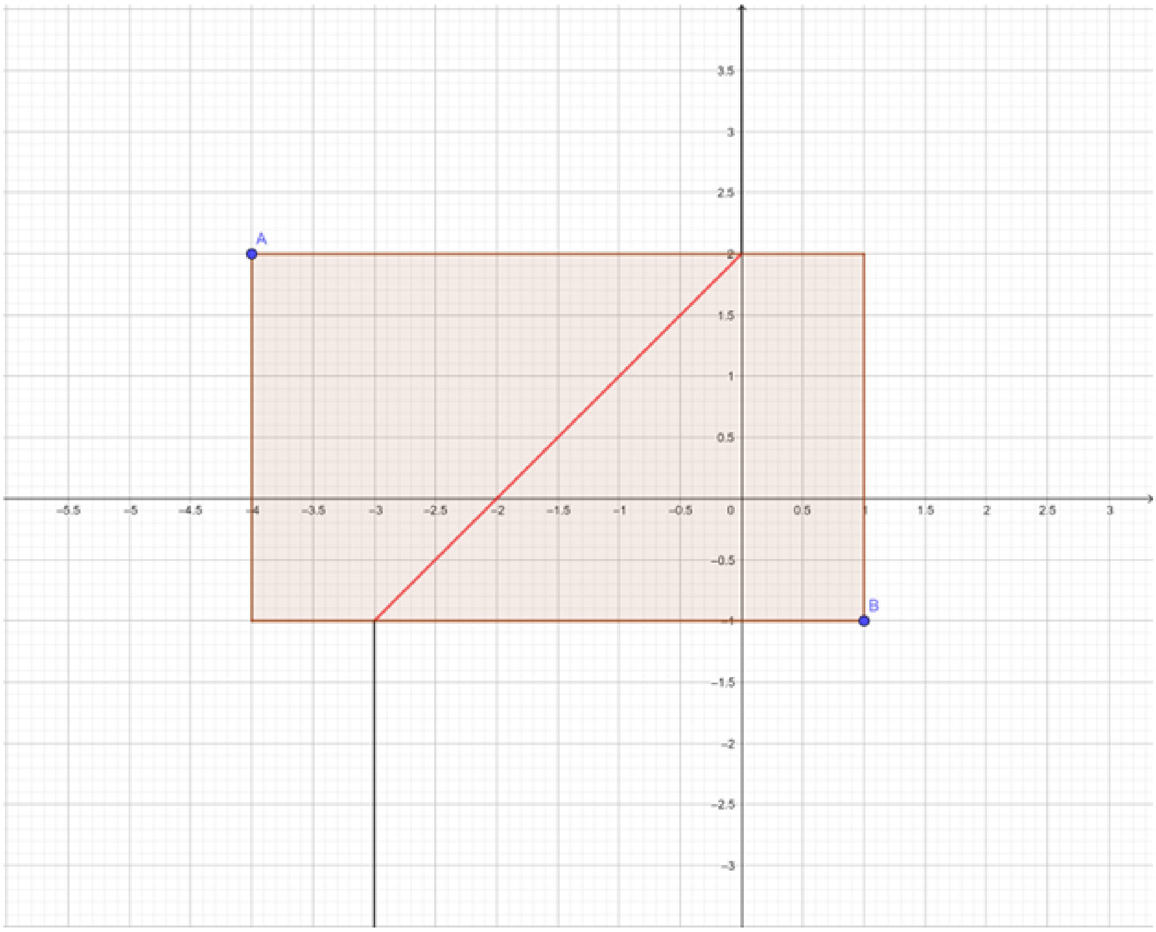
dakle za $x_{p_1} < -4$ jednadžba nema rješenja.
Za $-4 \leq x_{p_1} < 1$

$$\begin{aligned} x_{p_1} + 4 &= -x_{p_1} + 1 + 3 \\ 2x_{p_1} &= 0 \\ x_{p_1} &= 0, \end{aligned}$$

dakle imamo točku $(0, 2)$.
Za $x_{p_1} \geq 1$

$$\begin{aligned} x_{p_1} + 4 &= x_{p_1} - 1 + 3 \\ 4 &= 2, \end{aligned}$$

dakle za $x_{p_1} \geq 1$ jednadžba nema rješenja.
Analogno dobijemo drugu točku $P_2(x_{p_2}, y_{p_2})$ koja se nalazi na jednoj od stranica ovog pravokutnika i ima istu y koordinatu kao i točka B.
Sada spojimo te dvije točke, crvena dužina na slici. To još nisu sve točke jer kada se pomaknemo od točke P_1 prema gore za jedan, vidimo da smo se udaljili i od A i od B za jedan. Dakle, simetrala je i polupravac koji je okomit na stranicu pravokutnika u P_1 i iz nje izlazi prema gore. Analogno, treba nam i polupravac koji je okomit na stranicu pravokutnika u P_2 i iz nje izlazi prema dolje.



Slika 2.5: Simetrala dužine $\overline{AB}$, A i B nalaze se na pravcu s koeficijentom smjera $k \neq -1, 1$

4. slučaj. Točke A i B nalaze se na pravcu s koeficijentom smjera 1 ili -1.
   Zbog toga što se točke A i B nalaze na pravcu s koeficijentom smjera 1 ili -1, apso-

lutna vrijednost razlike njihovih x koordinata jednaka je apsolutnoj vrijednosti razlike njihovih y koordinata.

$$|x_A - x_B| = |y_A - y_B|.$$

Uzmimo točku $P_1(x_{p_1}, y_{p_1})$ koja ima istu y koordinatu kao i točka A.

$$y_{p_1} = y_A.$$

Vrijedi

$$d_T(A, P_1) = d_T(P_1, B).$$

To jest vrijedi

$$|x_{p_1} - x_A| + |y_{p_1} - y_A| = |x_{p_1} - x_B| + |y_{p_1} - y_B|.$$

Koristimo činjenicu $y_A = y_{p_1}$

$$\begin{aligned} |x_{p_1} - x_A| + |y_A - y_A| &= |x_{p_1} - x_B| + |y_A - y_B| \\ |x_{p_1} - x_A| &= |x_{p_1} - x_B| + |y_A - y_B|. \end{aligned}$$

Koristimo činjenicu $|x_A - x_B| = |y_A - y_B|$ pa imamo

$$|x_{p_1} - x_A| = |x_{p_1} - x_B| + |x_A - x_B|.$$

Riješimo ovu jednadžbu s apsolutnim vrijednostima. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da vrijedi $x_A < x_B$.
Za $x_{p_1} < x_A$

$$\begin{aligned} -x_{p_1} + x_A &= -x_{p_1} + x_B - x_A + x_B \\ 2x_A &= 2x_B \\ x_A &= x_B. \end{aligned}$$

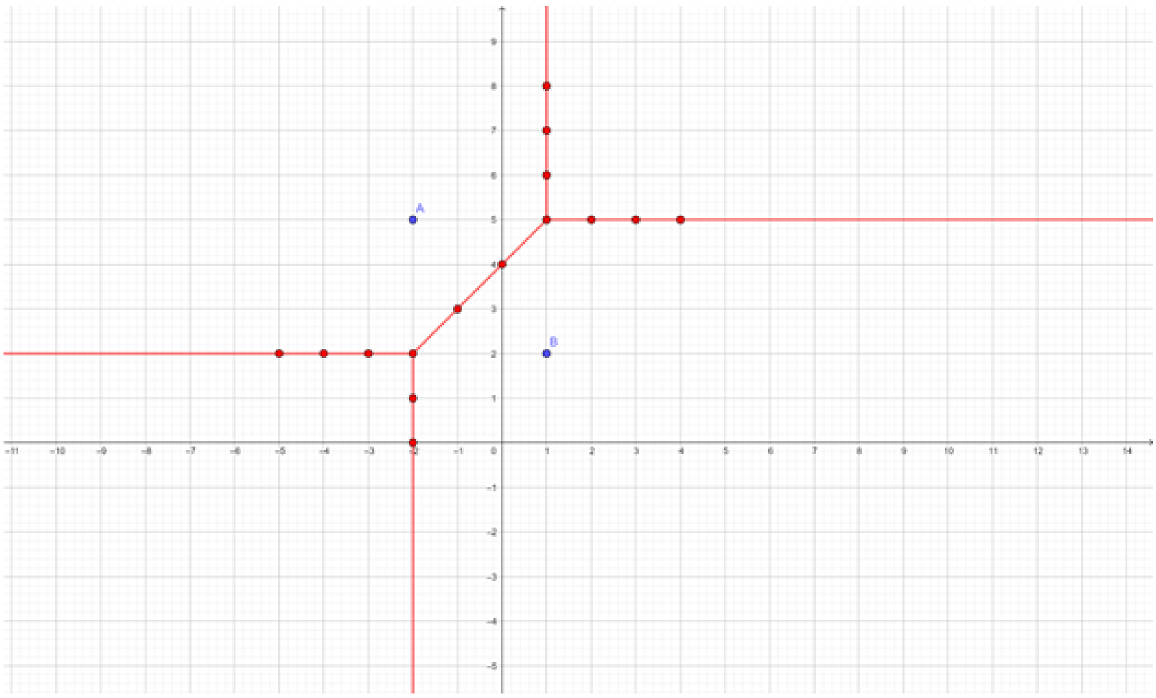
U ovom slučaju bi zapravo točke A i B morale biti jednake jer znamo da se nalaze na pravcu s koeficijentom smjera 1 ili -1.
Za $x_A < x_{p_1} < x_B$

$$\begin{aligned} x_{p_1} - x_A &= -x_{p_1} + x_B - x_A + x_B \\ 2x_{p_1} &= 2x_B \\ x_{p_1} &= x_B. \end{aligned}$$

Točka P_1 ima istu x koordinatu kao točka B.
Za $x_B < x_{p_1}$

$$\begin{aligned} x_{p_1} - x_A &= x_{p_1} - x_B - x_A + x_B \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Dobili smo da ako je x koordinata točke P_1 veća od x koordinate točke B, sve točke za koje vrijedi $x_B < x_{p_1}$ i $y_A = y_{p_1}$ su na simetrali točaka A i B. Ako se sada pomaknemo za jedan prema gore vidimo da smo se udaljili od točaka A i B za jedan. Dakle, trebamo još nacrtati i polupravac $x = x_{p_1}$ koji izlazi iz točke P_1 prema gore.
Analogno za točku P_2 za koju vrijedi $y_{p_2} = y_B$. Nakon što to nacrtamo, spojimo točke P_1 i P_2. Na slici 2.6 vidimo simetralu u crvenom.



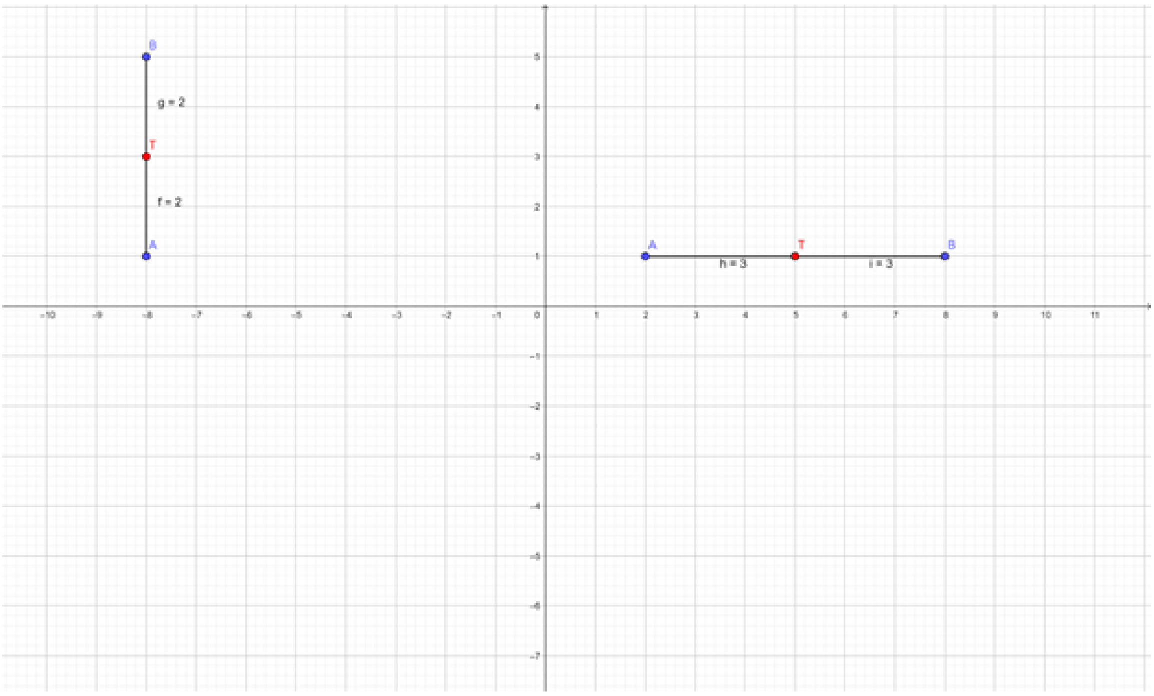
Slika 2.6: Simetrala dužine $\overline{AB}$, A i B nalaze se na pravcu s koeficijentom smjera 1 ili -1

Primjer 2.0.2. *Mi želimo živjeti što bliže tim lokacijama pa tražimo samo takve točke kojima je udaljenost do A i B najmanja.*

U euklidskoj geometriji to je bila jedna točka, polovište dužine $\overline{AB}$. Ovdje gledamo i simetralu dužine $\overline{AB}$ jer su te točke jednako udaljene od A i B, ali i pravokutnik

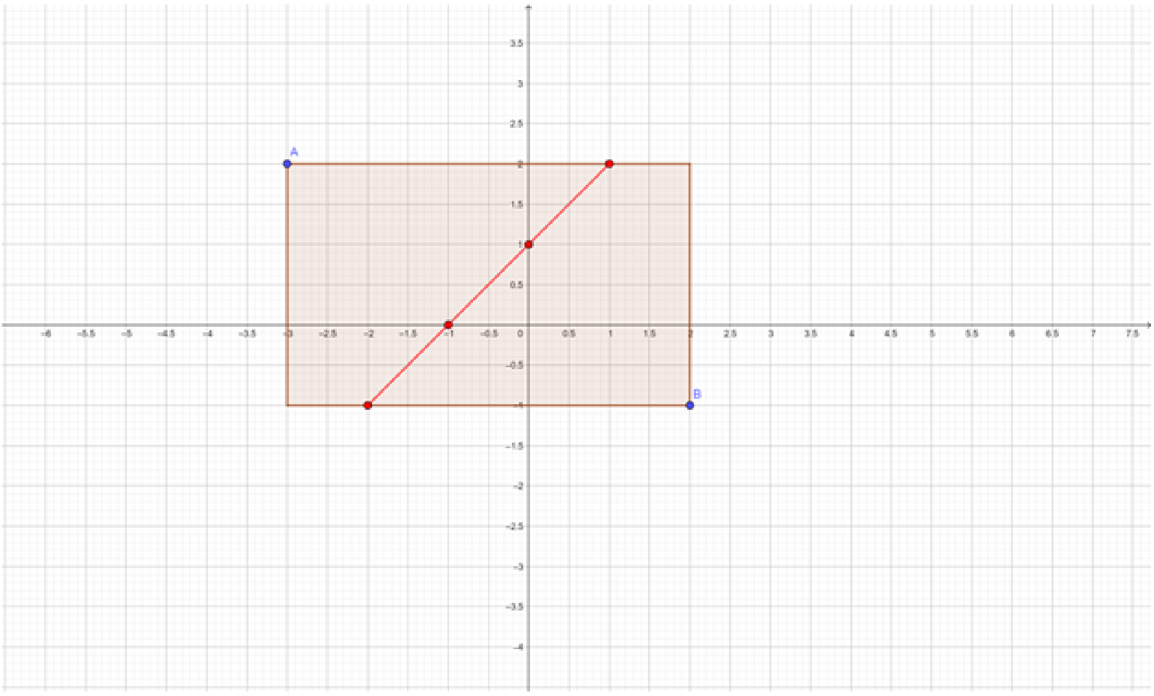
koji smo spomenuli u primjeru kuće i škole. Točke moraju biti na najkraćem putu između A i B kako bi se nalazile na minimalnoj udaljenosti od A i B. Dakle, te točke se moraju nalaziti na pravokutniku čiji su dijagonalni vrhovi A i B (slika 1.6).
Pogledajmo sada kako izgleda skup točaka koje su minimalno udaljene od točaka $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$.

1. slučaj. Točke A i B imaju istu x koordinatu ili istu y koordinatu.
   U ovom slučaju pravac na kojima se nalaze te dvije točke A i B paralelan je s osi x ili s osi y. Rješenje je točka T koja se nalazi točno između točaka A i B.



Slika 2.7: Točka T koja je minimalno udaljena od točaka A i B

2. slučaj. Točke A i B nemaju istu koordinatu x ili istu koordinatu y.



Slika 2.8: Točke koje su minimalno udaljene od točaka A i B

Koristimo pravokutnik koji smo koristili i kada smo govorili o putovima između dvije točke u taxicab geometriji. Rješenje možemo vidjeti u crvenom, to jest rješenje su sve točke na crvenoj dužini. Ta dužina je presjek simetrale tih točaka i pravokutnika. Udaljenost od tih točaka do točaka A i B jednaka je polovici udaljenosti između točaka A i B.

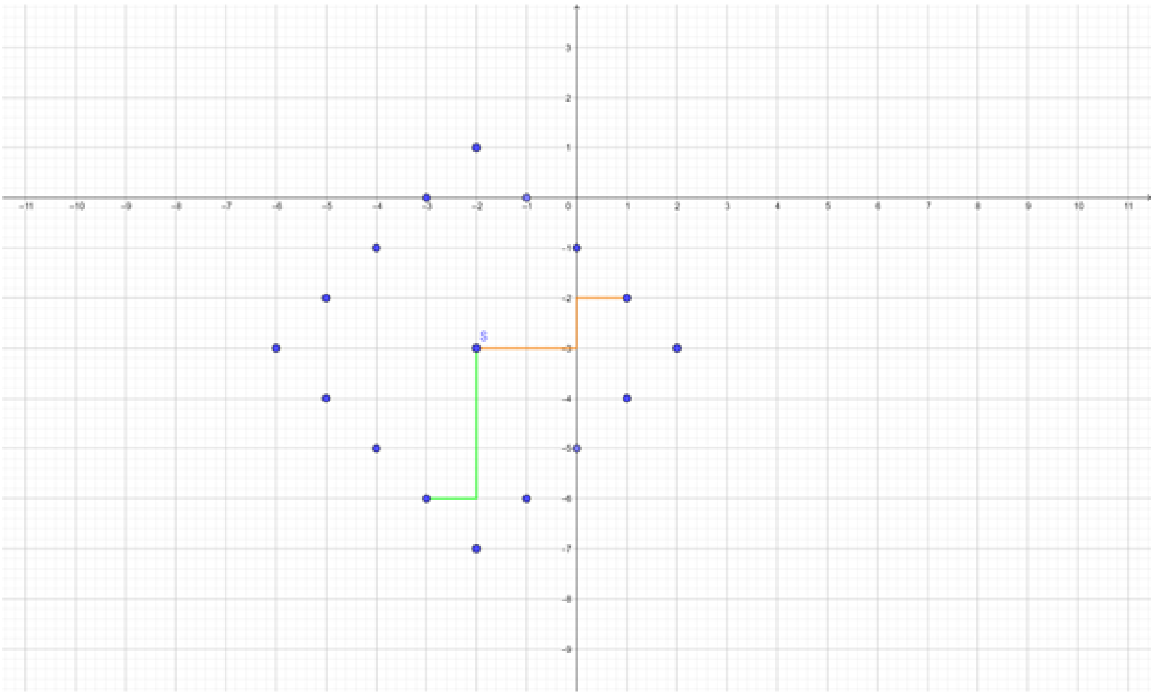
Poglavlje 3

Taxicab krug i kružnica

U ovom poglavlju slijedimo prve dvije cjeline iz knjige [7].
Prvi nam je cilj proučiti kako izgleda kružnica u taxicab geometriji.

Definicija 3.0.1. *Zadana je točka S u ravnini. Kružnica sa središtem u točki S je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od točke S. Točku S nazivamo središte kružnice. Dužinu koja spaja središte kružnice sa bilo kojom točkom kružnice nazivamo radijus.*

U taxicab geometriji kružnica će nam izgledati drugačije nego u euklidskoj geometriji. U koordinatnom sustavu mjerimo broj stranica jediničnih kvadratića. Na primjer ako je kružnica radijusa 4, tada se od središta možemo pomaknuti za 4 stranice jediničnih kvadratića.

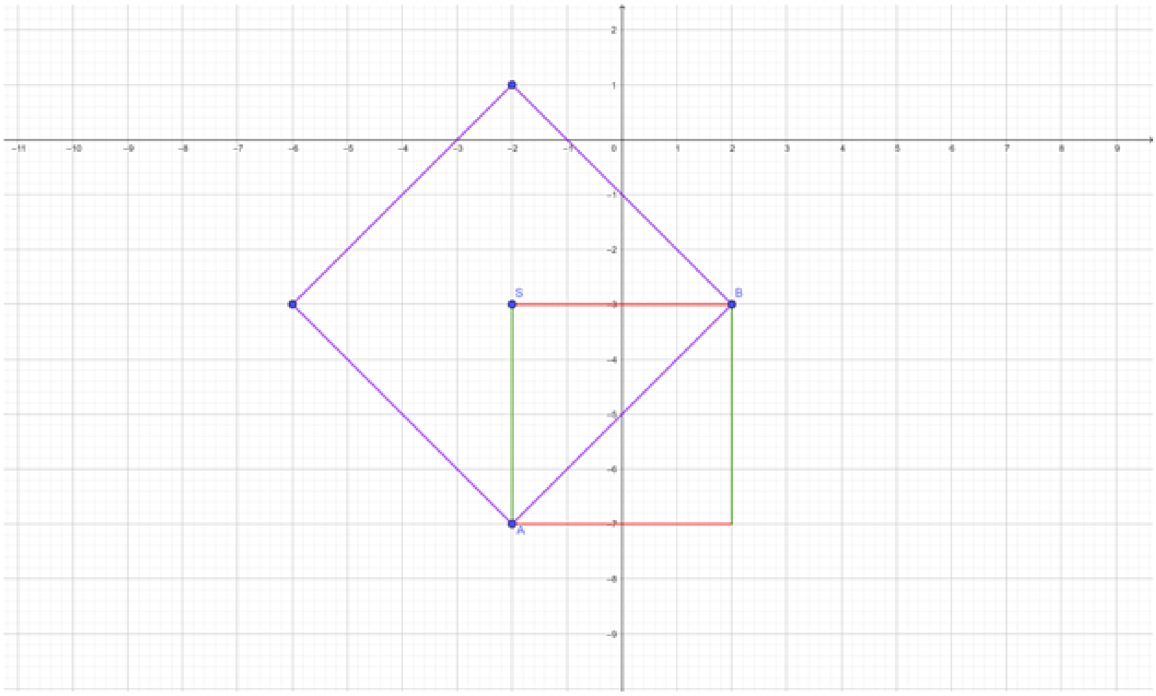


Slika 3.1: Taxicab kružnica

Nakon toga spojimo točke sa slike 3.1 tako da dobijemo kvadrat zarotiran za 45°. Dakle, spojimo svake dvije točke sa slike 3.1 koje su međusobno minimalno udaljene. Taxicab kružnica, odnosno kružnica u taxicab geometriji, je tada upravo kvadrat kojeg smo tako dobili, koji je prikazan na slici 3.2.
Koliko iznosi broj π u taxicab geometriji? Kako inače dobijemo tu konstantu? Konstantu π dobijemo tako da podijelimo opseg O kružnice s njenim dijametrom d.

$$\pi = \frac{O}{d} = \frac{2r\pi}{2r}.$$

Pokažimo da je opseg kružnice u taxicab geometriji jednak 8 radijusa. Pogledajmo sliku 3.2.



Slika 3.2: Opseg taxicab kružnice

Na slici 3.2 imamo kružnicu sa središtem S. Na nju smo postavili dvije točke A i B tako da je $d_T(A, B) = \frac{1}{4}O$, gdje je O opseg ove kružnice. Na slici vidimo i da vrijedi

$$|\overline{AB}| = |\overline{SB}| + |\overline{SA}|.$$

Također vrijedi i $|\overline{SB}| = |\overline{SA}| = r$, pa je $|\overline{AB}| = |\overline{SB}| + |\overline{SA}| = r + r = 2r$.
Iz toga slijedi:

$$2r = |\overline{AB}| = \frac{1}{4}O.$$

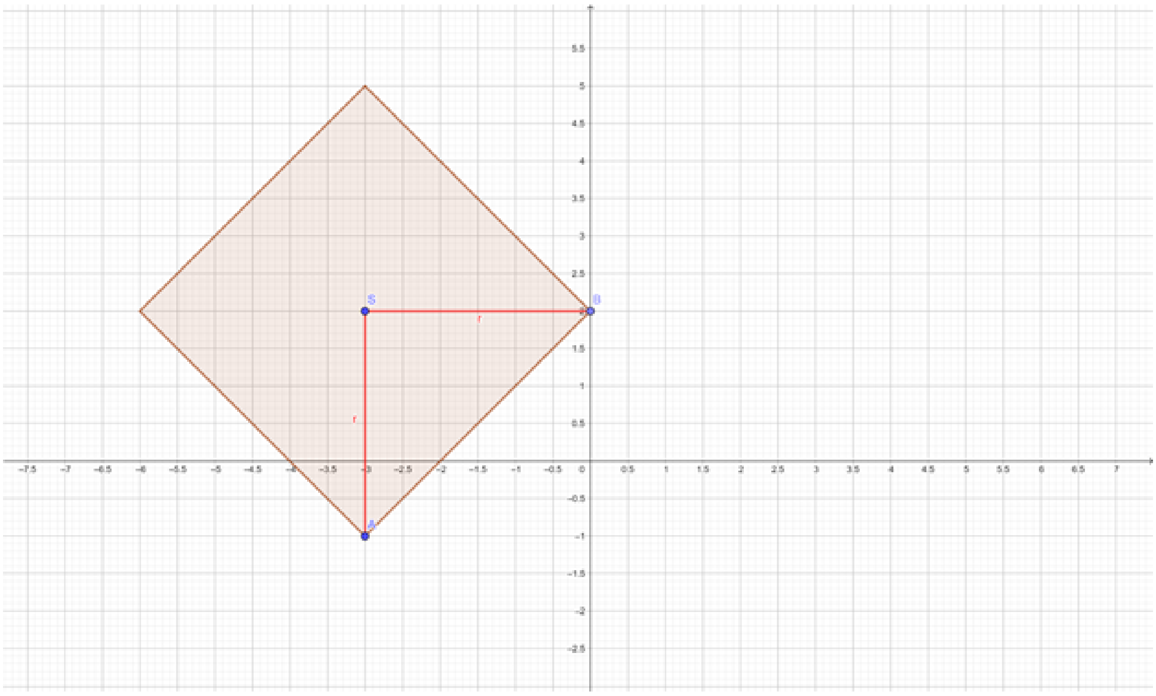
$$O = 8r.$$

Uvrstimo to sada u formulu $\pi = \frac{O}{2r}$

$$\pi = \frac{O}{2r} = \frac{8r}{2r} = 4.$$

Definicija 3.0.2. *Krug je dio ravnine omeđen kružnicom uključujući i kružnicu.*

U euklidskoj geometriji, formula za površinu kruga je $P = r^2\pi$, gdje je r radijus kruga. Mi tražimo formulu za površinu kruga u taxicab geometriji.
S obzirom da je krug u taxicab geometriji zapravo kvadrat, mi trebamo dobiti površinu tog kvadrata. Pogledajmo sliku 3.3.



Slika 3.3: Taxicab krug

Na slici 3.3 imamo taxicab krug sa središtem S i radijusom označenim crvenom bojom. Odabrali smo točke A i B tako da su one susjedni vrhovi tog taxicab kruga.
Pogledajmo trokut ASB. Površina tog trokuta je četiri puta manja od površine taxicab kruga, odnosno

$$P_{ASB} = \frac{1}{4}P_{KRUG}.$$

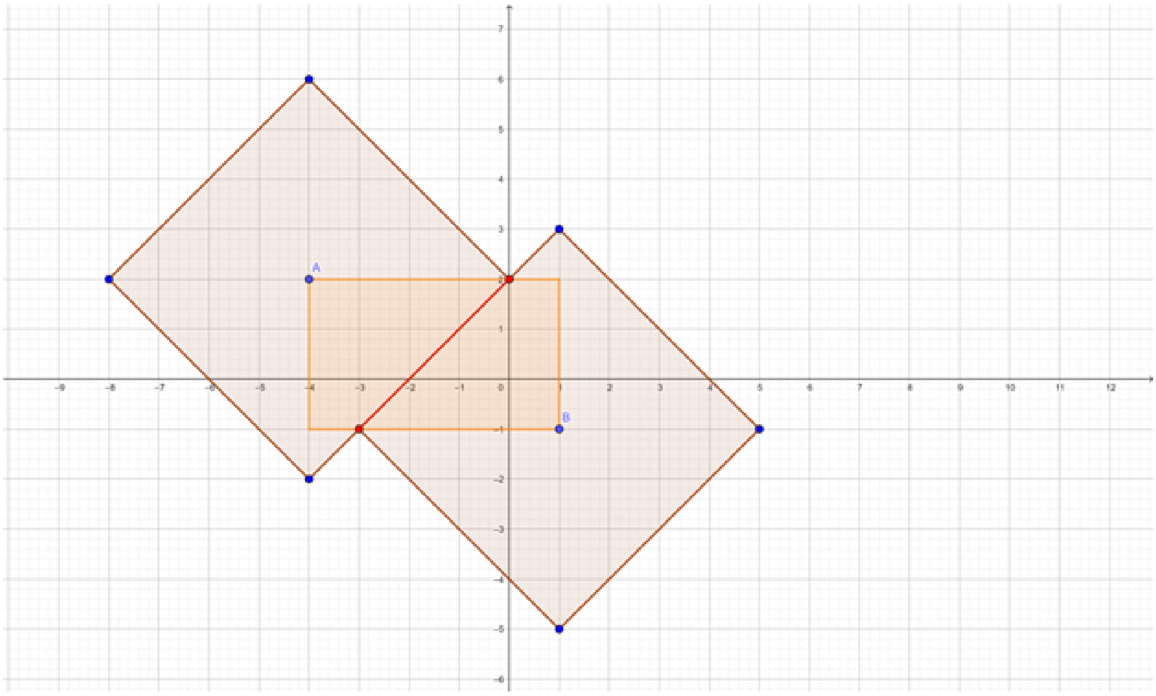
Izračunajmo površinu tog trokuta:

$$P_{ASB} = \frac{r \cdot r}{2} = \frac{r^2}{2}.$$

Iz toga slijedi:

$$P_{KRUG} = 4 \cdot P_{ASB} = 4 \cdot \frac{r^2}{2} = 2 \cdot r^2.$$

Pogledajmo još jednom situaciju na početku Poglavlja 2 i sliku 2.2. Tražimo lokaciju na kojoj želimo živjeti. Dakle, imamo zgrade A i B koje su nam bitne i promatramo različite lokacije na kojima možemo živjeti s obzirom na to koliko su nam zgrade bitne i koliko daleko želimo biti od njih. Riješili smo primjer pronalaženja lokacije ako su nam zgrade A i B jednako bitne ili ako tražimo najmanju udaljenost između te dvije lokacije. Sada se pitamo što ako nam je jedna lokacija bitnija, na primjer lokacija A. I dalje želimo minimizirati udaljenost od zgrade do lokacija A i B.
Tada imamo $d_T(A, P) \leq d_T(P, B)$, gdje je P točka koja predstavlja zgradu gdje bismo mogli živjeti.
Pogledajmo na slici 3.4 gdje su nam točke P za koje vrijedi $d_T(A, P) = d_T(P, B)$ i za koje je zbroj udaljenosti $d_T(A, P) + d_T(P, B)$ minimalan. To je dužina u crvenom. Sada nam je rješenje skup svih točaka P iz onog dijela pravokutnika koji je bliže točki A, odnosno dio pravokutnika koji je između crvene dužine i točke A. Pravokutnik nam je naravno bitan jer su na njemu sve točke koje su na najkraćem putu između A i B. Time smo pokazali da upravo ta lokacija udovoljava traženim uvjetima.



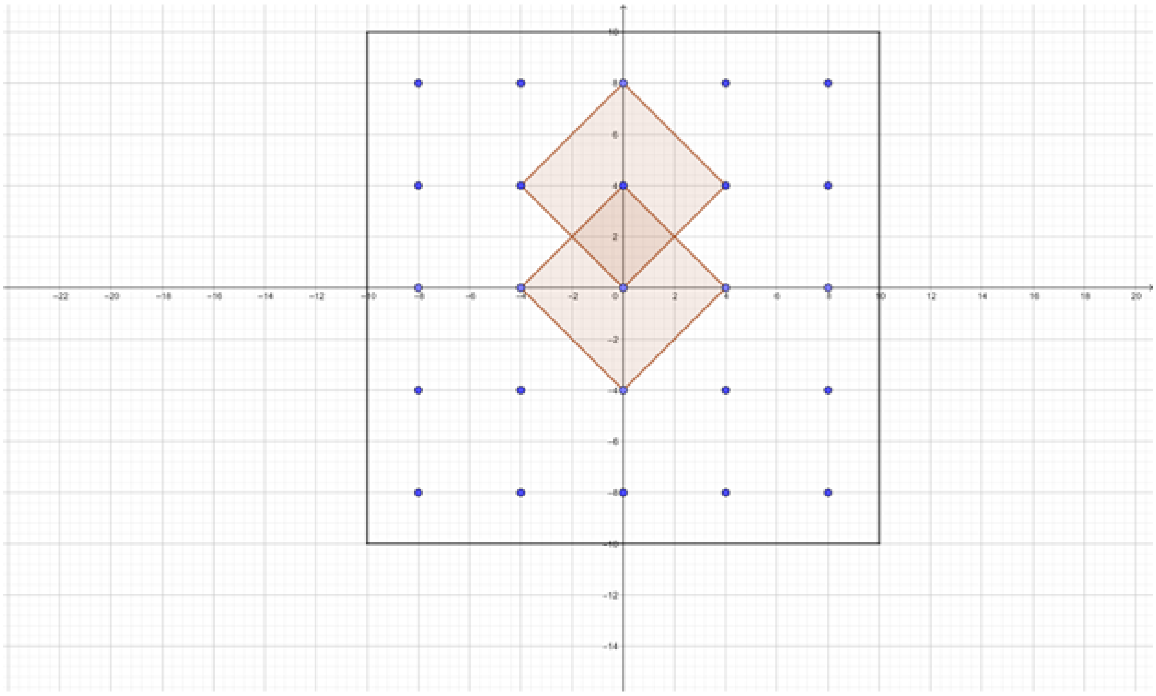
Slika 3.4: Presjek dviju taxicab kružnica

Primjer 3.0.3. *Problem vatrogasne postaje*

U jednom gradu potrebno je izgraditi vatrogasne postaje. Te vatrogasne postaje moraju biti udaljene za četiri bloka od zgrada koje pokrivaju. Kako bismo izgradili te vatrogasne postaje tako da se potroši minimalna količina novaca, to jest tako da broj postaja bude minimalan?

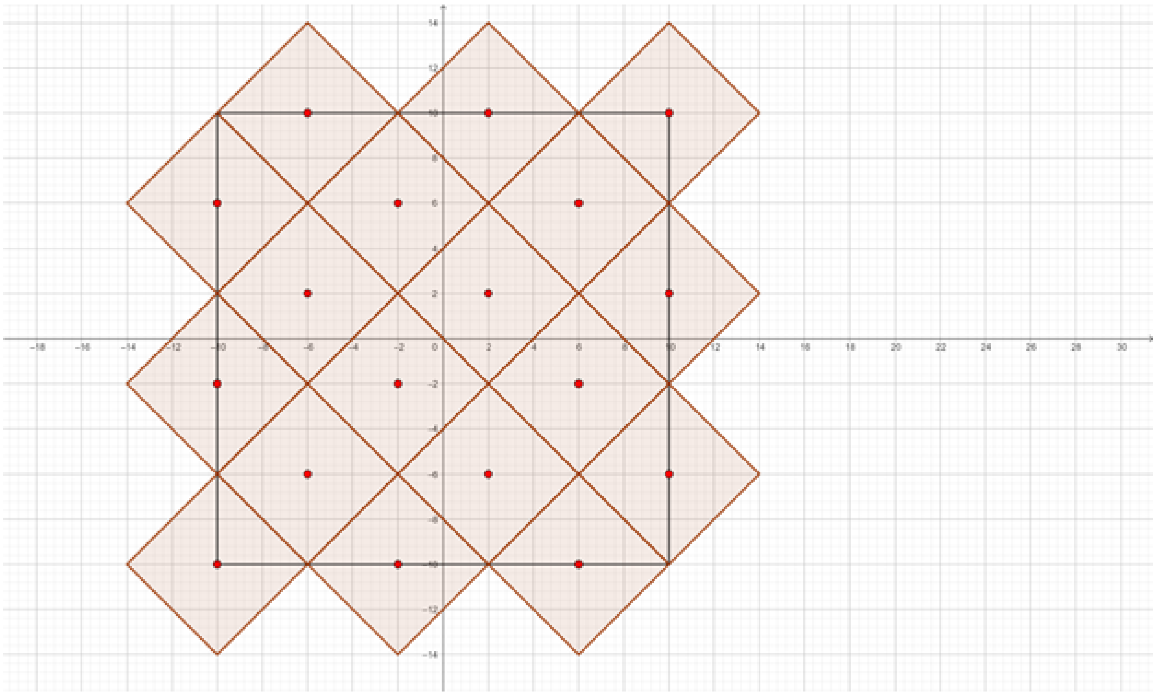
Dakle, zona koja pripada svakoj vatrogasnoj postaji sadrži sve što je za 4 bloka ili manje udaljeno od središta vatrogasne postaje. To je zapravo krug sa radijusom 4 i središtem u samoj vatrogasnoj postaji.

Jedan način bi bilo napraviti vatrogasne postaje na 4 bloka udaljene jedna od druge, kao što je to prikazano na slici 3.5. Tako bismo sigurno dobili pokrivanje teritorija, ali broj postaja tada ne bi bio minimalan.



Slika 3.5: Vatrogasne postaje

Vidimo da se krugovi često sijeku pa to vjerojatno nije najefikasnija metoda.
Drugi način je da postavimo postaje tako da su za 8 blokova udaljene jedna od druge, kao što je to prikazano na slici 3.6. To znači da postavimo središta krugova tako da imaju taxicab udaljenost 8.



Slika 3.6: Vatrogasne postaje

Ovom metodom smo pokrili jednaku površinu, ali smo koristili puno manje točaka. Razlog tome je što smo našli način kako popuniti ovaj dio grada s taxicab krugovima. Krugovi se ne preklapaju jer im je radijus 4 pa se dodiruju.
U euklidskoj geometriji ne možemo pokriti pravokutnik konačnom unijom disjunktnih krugova. U taxicab geometriji to možemo učiniti tako da taxicab krugove povežemo u njihovim vrhovima, kao na slici 3.6 gore.

Poglavlje 4

Krivulje drugog reda u taxicab geometriji

U ovom poglavlju slijedimo treću cjelinu iz knjige [7]. Također koristimo članak [1] i članak [2].

4.1 Elipsa

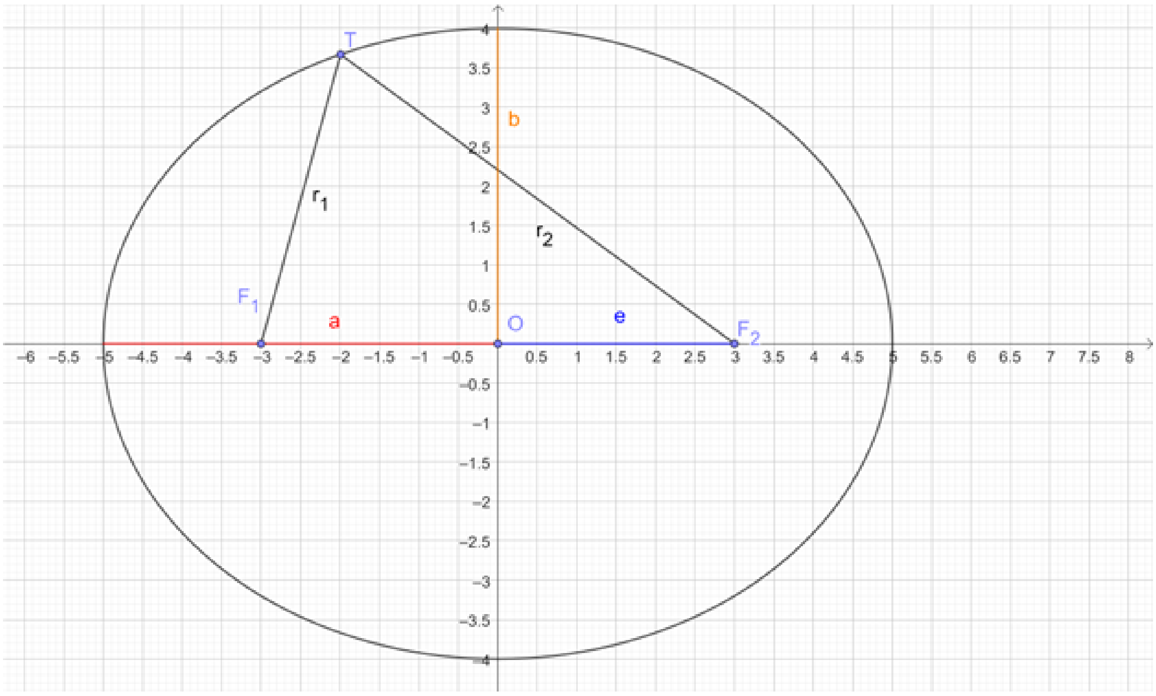
Primjer 4.1.1. *Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u E^2 udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani realni broj takav da je $a > e$. Elipsa je skup točaka u E^2 za koje je zbroj udaljenosti od F_1 i F_2 konstantan i jednak $2a$.*

Definicija 4.1.2. *Točke F_1 i F_2 zovemo fokusima elipse. Vrijedi:*
$d_E(F_1, T) + d_E(F_2, T) = 2a$, za svaku točku T na elipsi.

Pogledajmo sliku 4.1. Nazovimo sa r_1 udaljenost između fokusa F_1 i točke T, a r_2 definirat ćemo kao udaljenost između fokusa F_2 i točke T. Pišemo

$$|F_1T| = r_1, |F_2T| = r_2.$$

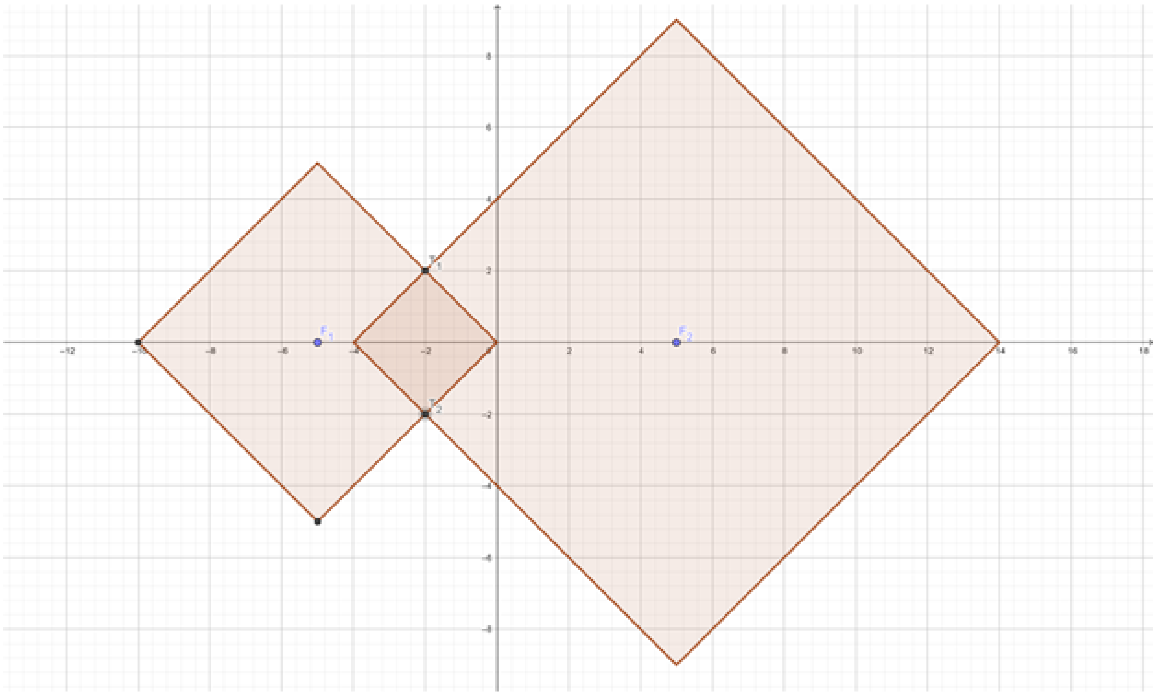
Zbog toga što vrijedi $d_E(F_1, T) + d_E(F_2, T) = 2a$, možemo zaključiti da je $r_1 + r_2 = 2a$.



Slika 4.1: Elipsa u euklidskoj geometriji

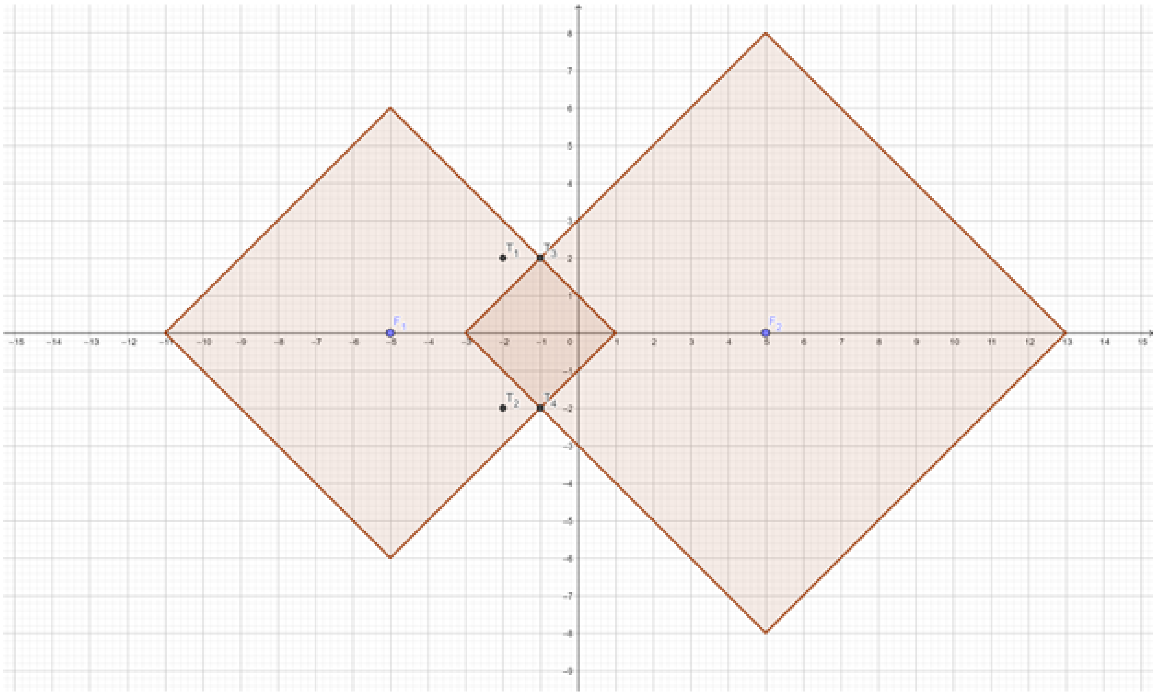
Definicija 4.1.3. *Točku O koja se nalazi na polovištu dužine $\overline{F_1F_2}$ nazivamo ishodište elipse.*

Dužina koja se nalazi na pravcu koji prolazi kroz fokuse i koja sadrži točke A i B koje su ujedno i točke elipse naziva se velika os elipse i duljina joj iznosi $2a$. Pola te dužine, od ishodišta do jedne točke elipse, nazivamo velika poluos elipse i njena duljina je a.
Postavimo okomicu na veliku os elipse koja prolazi kroz ishodište elipse. Dužina koja se nalazi na toj okomici i spaja dvije točke elipse naziva se mala os elipse. Duljina te dužine je $2b$. Polovicu te dužine, od ishodišta do jedne točke elipse, nazivamo mala poluos i njena duljina je b.
Vrijedi $a^2 = b^2 + e^2$.
U taxicab geometriji elipsu definiramo na isti način kao u euklidskoj geometriji. To vrijedi i za druge elemente kao što su fokus. Kako izgleda elipsa u taxicab geometriji?
Konstruirajmo elipsu kojoj je $2a = 14$, dakle $d_T(F_1, T) + d_T(F_2, T) = 14$, s fokusima $F_1 = (-5, 0), F_2 = (5, 0)$.
Moramo naći nekoliko točaka elipse. Zbroj udaljenosti točaka od fokusa elipse je 14, što možemo dobiti npr. kao $5 + 9, 9 + 5, 6 + 8, 8 + 6, 7 + 7$. Dakle, trebaju nam kružnice na primjer $k_1 = (F_1, 5), k_2 = (F_2, 9)$ i tako dalje, gdje je k_1 lijeva kružnica, a k_2 desna kružnica.



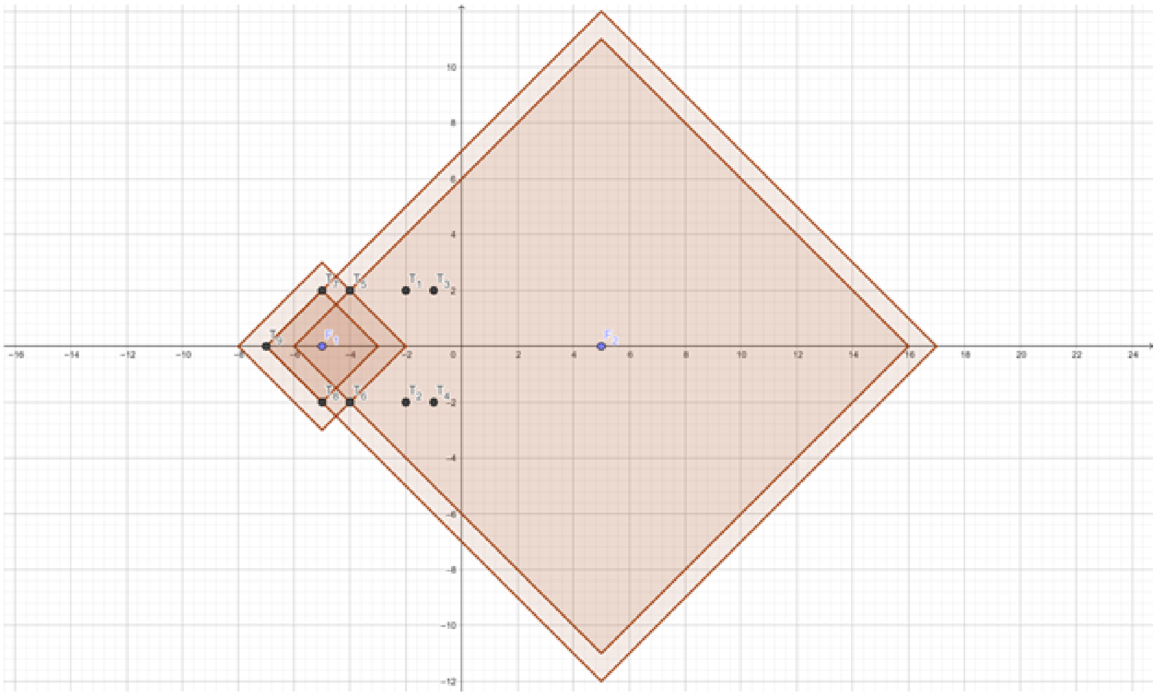
Slika 4.2: Crtanje nekih točaka taxicab elipse

Na ovoj slici 4.2 radijus kružnice k_1 je 5, a radijus kružnice k_2 je 9.
Vidimo da se kružnice sijeku u točkama T_1 i T_2. Dakle, ovako smo našli dvije točke T_1 i T_2 te elipse.



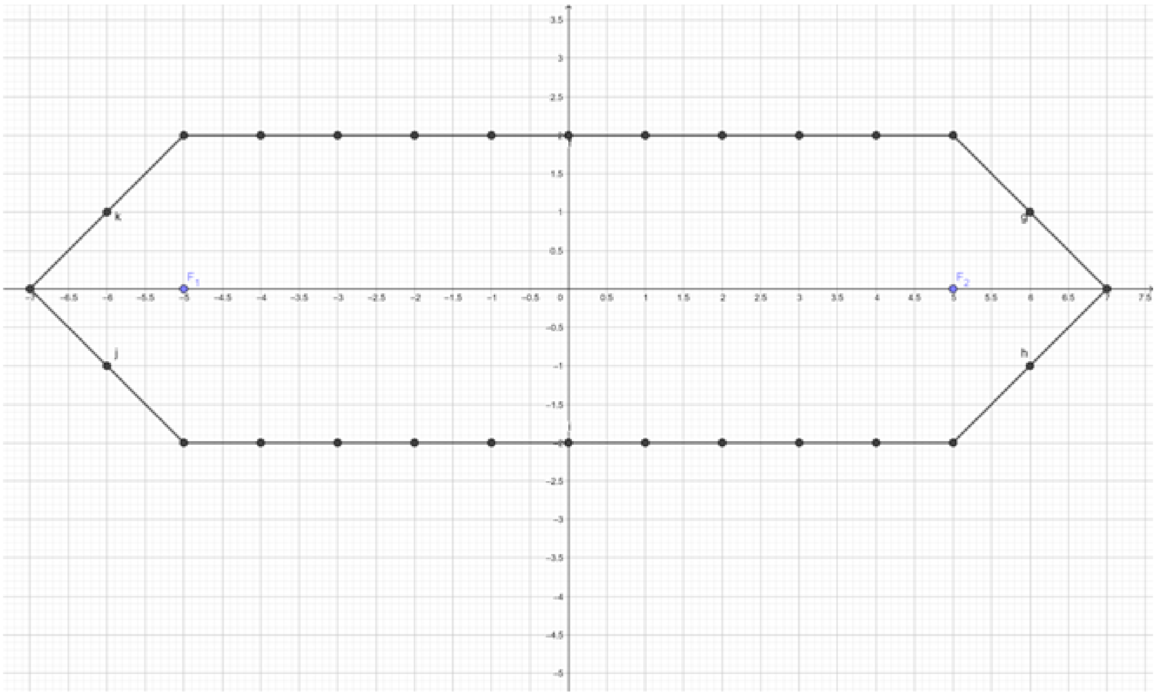
Slika 4.3: Crtanje nekih točaka taxicab elipse

Još jedan par točaka našli smo za kružnice na slici 4.3. Lijeva kružnica ima središte u $F_1(-5, 0)$ i radijus 6, desna kružnica ima središte u $F_2(5, 0)$ i radijus 8. Vrijedi $6 + 8 = 14$.



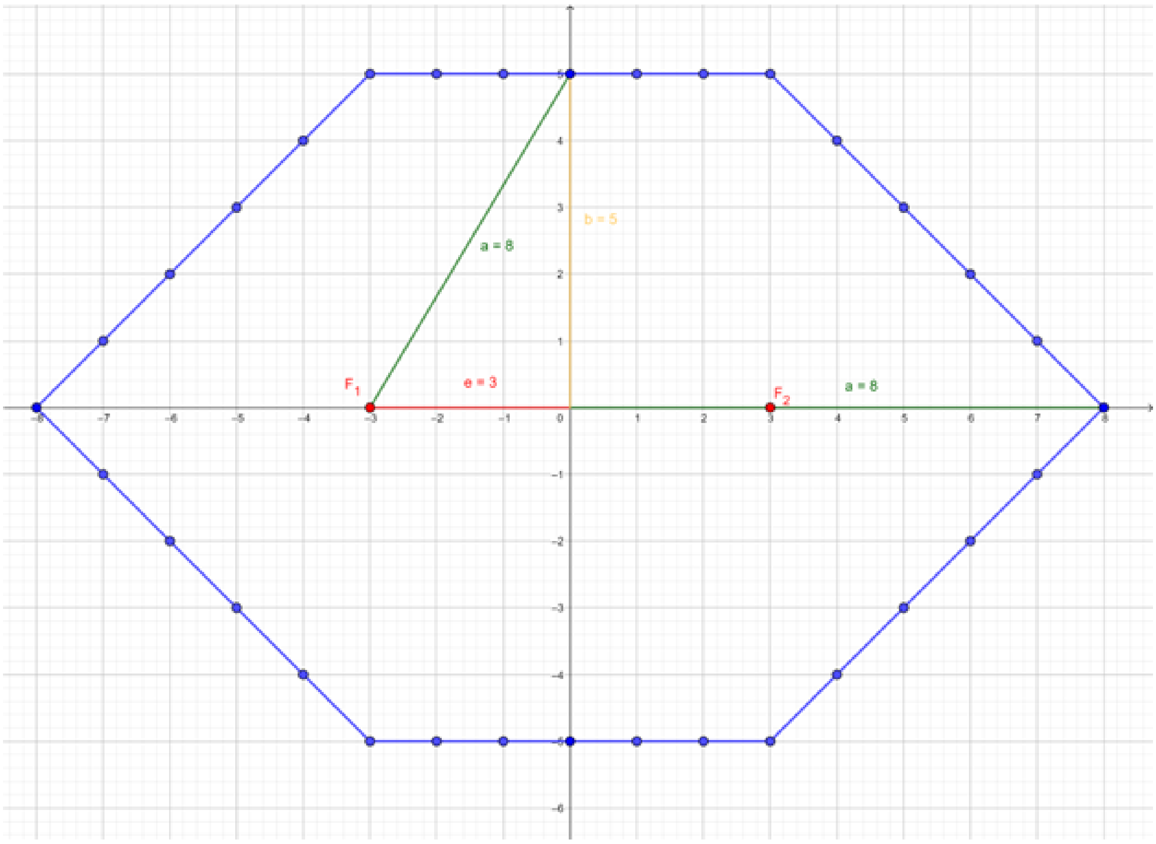
Slika 4.4: Crtanje nekih točaka taxicab elipse

Na slici 4.4 smo našli 5 točaka. Točke T_5 i T_6 smo našli kao presjek kružnice sa središtem u $F_1(-5, 0)$ i radijusom 3 i kružnice sa središtem u $F_2(5, 0)$ i radijusom 11, a T_7, T_8 i T_9 smo našli kao presjek kružnice sa središtem u $F_1(-5, 0)$ i kružnice sa središtem u $F_2(5, 0)$ i radijusom 12. Ovako možemo pronaći još točaka i vidjeti kako izgleda ta elipsa.



Slika 4.5: Taxicab elipsa

Vidimo sa slike 4.5 da je $b = 2$, gdje je b mala poluos elipse definirana isto kao i u euklidskoj geometriji. To dobijemo tako da povučemo okomicu na pravac koji sadrži fokuse i izračunamo udaljenost od ishodišta do fokusa elipse. Ta udaljenost je 2. Već od prije znamo da je $a = 7, e = 5$. Vrijedi $a = b + e$.
U taxicab geometriji općenito vrijedi da je duljina velike poluosi jednaka zbroju duljina male poluosi i polovice duljine između fokusa.
Prikazat ćemo proizvoljnu elipsu.

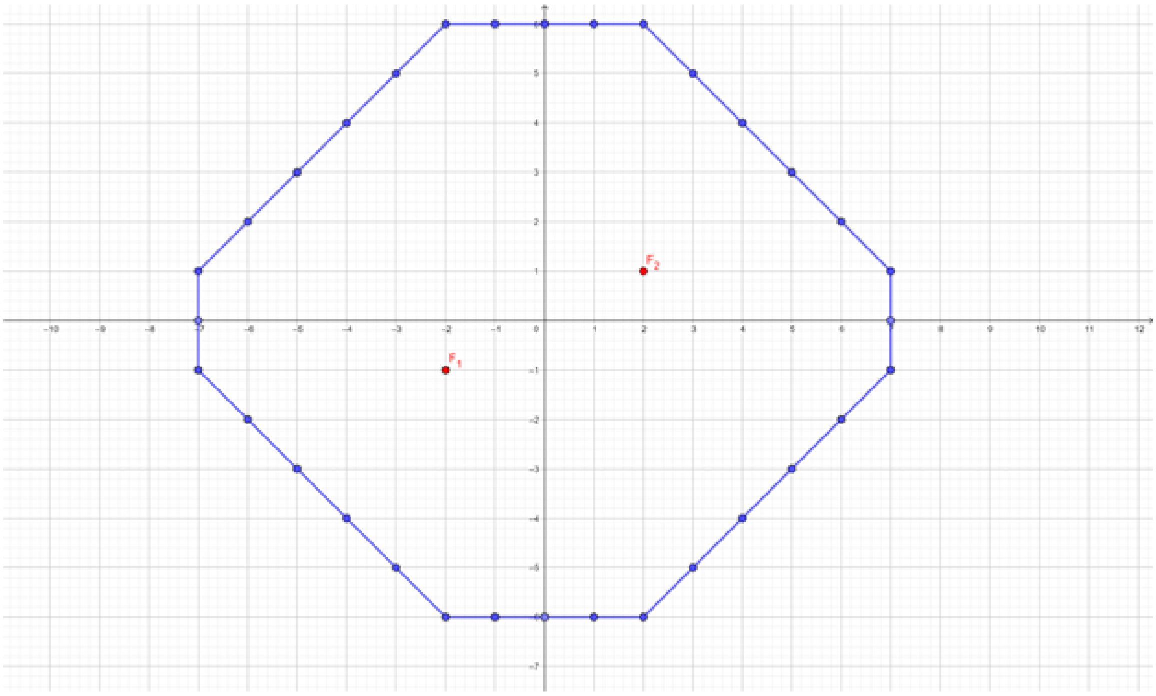


Slika 4.6: Taxicab elipsa

Na slici 4.6 vidimo da vrijedi $a = b + e$.

Primjer 4.1.4. *Fokusi se mogu nalaziti i dijagonalno.*

Na slici 44.7 imamo elipsu sa fokusima $F_1(-2,-1)$ i $F_2(2,1)$ i vrijedi $d_T(F_1,T) + d_T(F_2,T) = 16$, gdje su T točke elipse. Možemo vidjeti da položaj fokusa određuje duljinu bočnih stranica ovog mnogokuta.



Slika 4.7: Taxicab elipsa sa fokusima koji imaju različitu i x i y koordinatu

4.2 Primjena elipse u taxicab geometriji

Primjer 4.2.1. *Imamo dvije lokacije blizu kojih želimo živjeti – uzmimo da su to kolodvor i banka. Jednako su nam važne. Želimo da nam zbroj udaljenosti našeg stana od te dvije lokacije bude manji ili jednak nekoj vrijednosti. Nije bitno ako na primjer uzmemo lokaciju koja je blizu banke, a daleko od kolodvora dok je god sveukupna udaljenost od stana do tih lokacija zadovoljena.*

Na slici 4.8 uzmimo da udaljenost 1 predstavlja 100 metara. Mi tražimo moguće lokacije stana, tako da je zbroj udaljenosti od kolodvora do stana i od stana do banke iznosi manje ili jednako 800 metara.
Budući da se radi o gradu, primijenili smo taxicab udaljenosti i taxicab elipsu. Ono što mi tražimo se može zapisati kao:

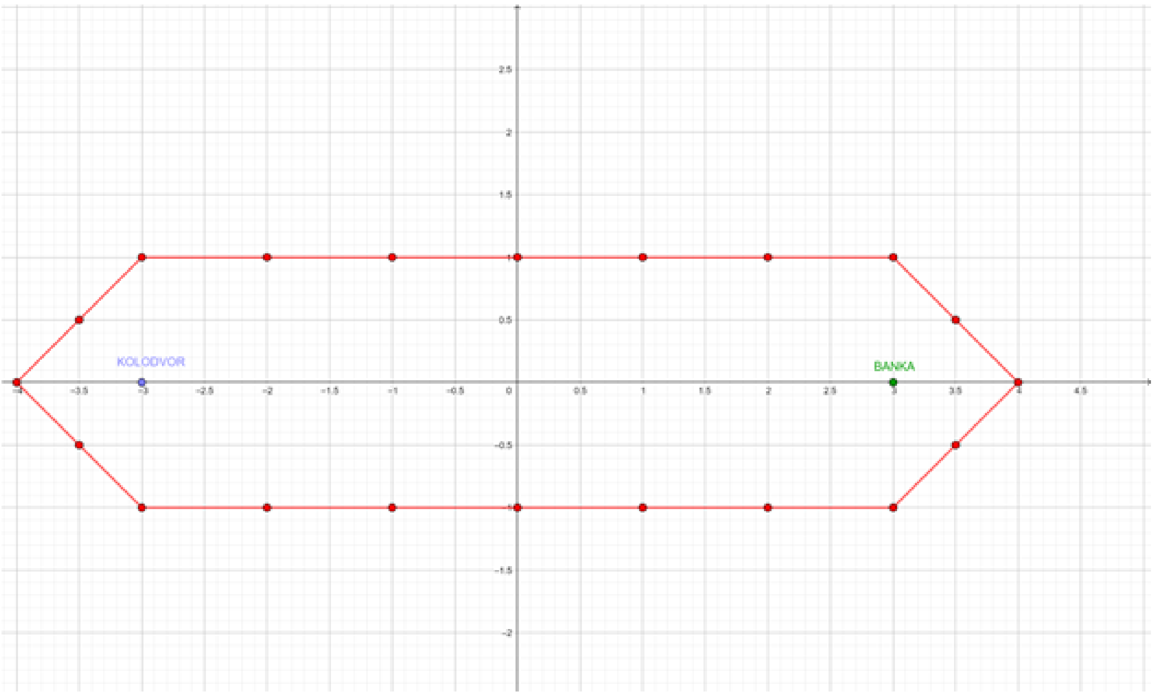
$$d_T(KOLODVOR, STAN) + d_T(STAN, BANKA) \leq 8,$$

jer 8 na slici predstavlja 800 metara u stvarnosti.

Ovdje koristimo formulu:

$$d_T(F_1, T) + d_T(T, F_2) \leq 2a.$$

Ovo je formula za elipsu sa fokusima KOLODVOR i BANKA i $2a = 8$. Točke te elipse i sve točke unutar elipse zapravo predstavljaju moguće lokacije stana koji bi zadovoljavao zadane uvjete.

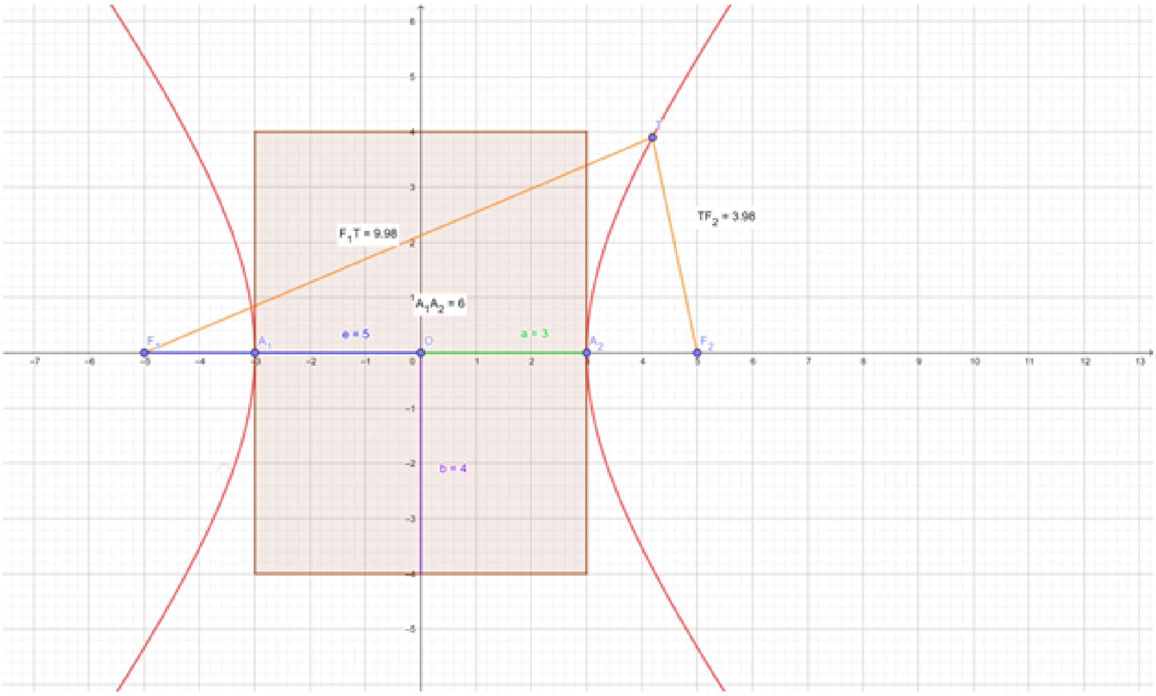


Slika 4.8: Kolodvor i banka

4.3 Hiperbola

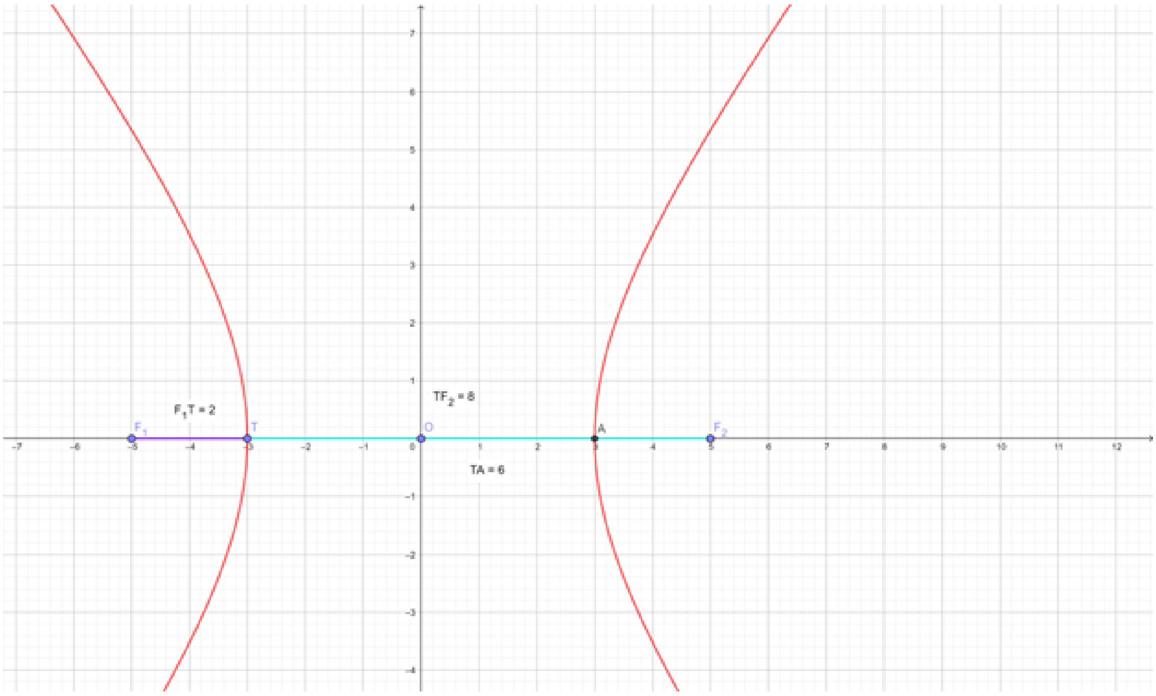
Definicija 4.3.1. *Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u E^2 udaljene za $2e > 0$ koje zovemo fokusima ili žarištima i neka je a zadani realni broj $a < e$. Hiperbola je skup svih točaka u E^2 za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od F_1 i F_2 konstantna i jednaka $2a$.*

Vrijedi:
$||F_1T| - |TF_2|| = 2a$, za svaku točku T na hiperboli.
Pogledajmo sliku neke proizvoljne hiperbole u euklidskoj geometriji. Fokusi te hiperbole su točke $F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$, duljina realne osi je udaljenost od točke A_1 do točke A_2, linearni ekscentricitet hiperbole je udaljenost središta i žarišta F_1 ili F_2.



Slika 4.9: Hiperbola u euklidskoj geometriji

Na slici 4.9 možemo vidjeti vrijednost e odnosno udaljenost od ishodišta do žarišta. Također vidimo realnu poluos a to jest dužinu na pravcu (dužina je označena zelenom bojom) koji prolazi žarištima čiji je jedan kraj ishodište, a drugi točka na hiperboli. Imamo i imaginarnu poluos hiperbole u ljubičastom.
Na hiperboli smo označili proizvoljnu točku T. Razlika euklidskih udaljenosti žarišta F_1 do točke T i točke T do žarišta F_2 je jednaka vrijednosti $2a$.



Slika 4.10: Hiperbola u euklidskoj geometriji

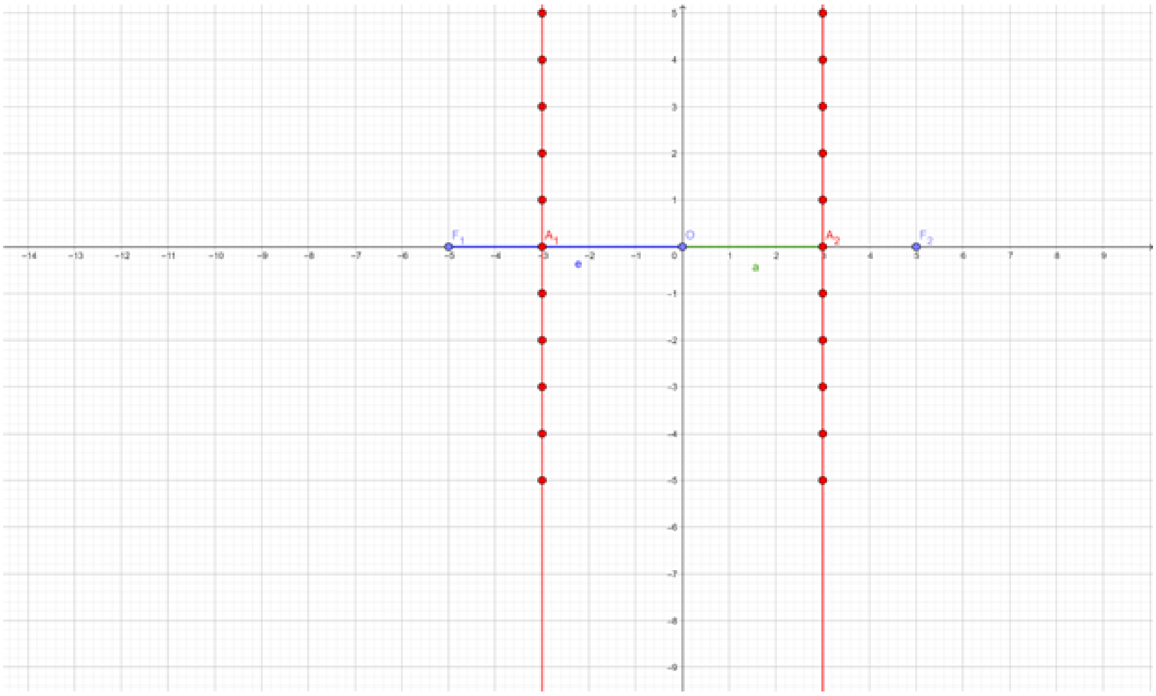
Kao što vidimo na slici 4.10, kada točku T hiperbole postavimo na os x, vidi se ta jednakost između apsolutne vrijednosti razlike udaljenosti točke T do žarišta to jest $||F_1T| - |TF_2||$ i duljine realne osi to jest $2a$.
U ovom primjeru vrijedi:

$$||F_1T| - |TF_2|| = |2 - 8| = | - 6| = 6$$

$$2a = |TA| = 6.$$

Pokažimo sada kako hiperbola izgleda u taxicab geometriji. Prikazat ćemo više slučajeva taxicab hiperbole.

1. slučaj. Fokusi se nalaze na osi x.



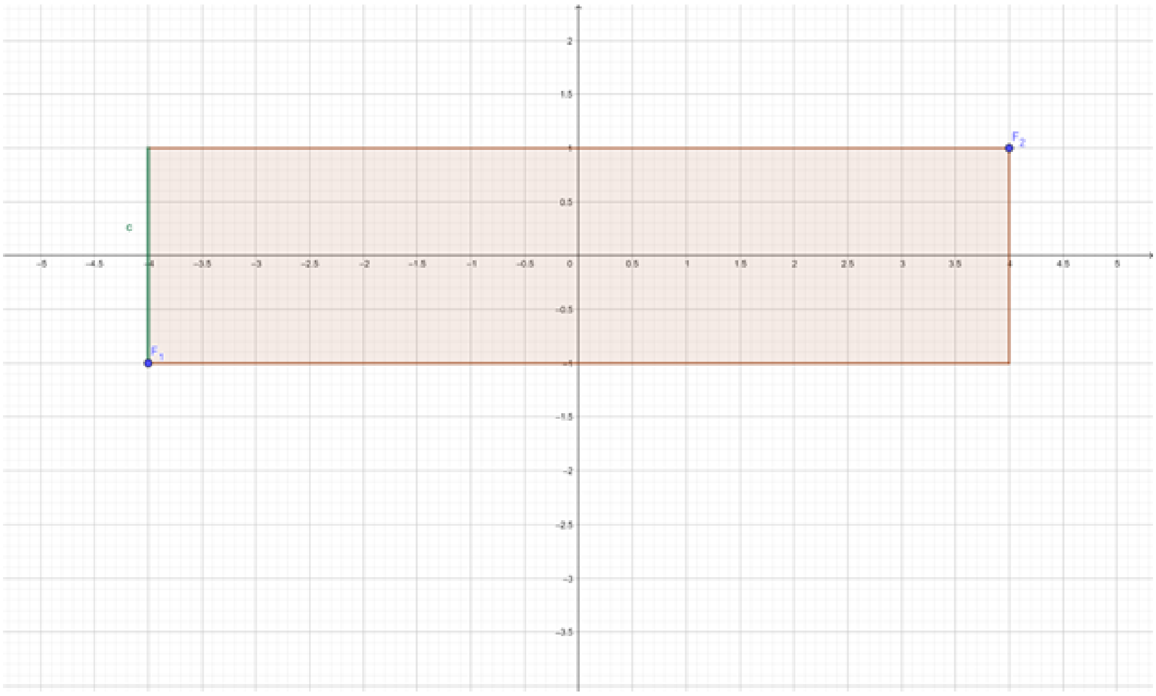
Slika 4.11: Hiperbola u taxicab geometriji, fokusi na osi x

Postavimo fokuse F_1, F_2 na os x. Dvije točke hiperbole (A_1, A_2 na slici, nalaze se na istom pravcu na kojem su i fokusi) možemo naći tako da nađemo duljinu $e - a$. Tada je A_1 udaljena od F_1 za $e - a$, analogno za A_2 i F_2.
Kako bismo našli ostale točke, pogledajmo što će se dogoditi kada se pomaknemo od točke A_1 proizvoljno za jedan prema gore i tamo postavimo točku T. Tada smo i $d_T(F_1, T)$ i $d_T(T, F_2)$ uvećali za jedan pa ostaje jednakost $d_T(F_1, T) - d_T(T, F_2) = 2a$, odnosno točka T je točka na hiperboli. Isto vrijedi za bilo koje drugo takvo pomocanje. Ako se pomaknemo od točke A_1 za jedan prema dolje, imamo isti rezultat. Ponovno se $d_T(F_1, T)$ i $d_T(T, F_2)$ uvećaju za jednak broj (jedan u ovom slučaju) pa ostaje jednakost
$d_T(F_1, T) - d_T(T, F_2) = 2a$, odnosno točka T je točka na hiperboli. Analogno za točku A_2.
Pogledajmo zašto ne možemo uzeti neku drugu točku. Moramo održati jednakost

$$d_T(F_1, T) - d_T(T, F_2) = 2a,$$

pa moramo $d_T(F_1, T)$ i $d_T(T, F_2)$ dodati ili oduzeti istu vrijednost. Na primjer, ako

se od A_1 pomaknemo za jedan prema gore i jedan prema lijevo, tada će $d_T(F_1, T)$ ostati jednak, ali $d_T(T, F_2)$ će se povećati za dva pa više neće vrijediti $d_T(F_1, T) - d_T(T, F_2) = 2a$. Dakle, takva točka T nije na hiperboli.
Ovaj slučaj vrijedi i općenito za sve parove fokusa koji imaju istu y koordinatu.



Slika 4.12: Pravokutnik

2. slučaj. Fokusi $F_1(x_{F_1}, y_{F_1}), F_2(x_{F_2}, y_{F_2})$ imaju i različitu x os i y os.

   a) $c < \frac{2e-2a}{2}$, gdje je $c = |y_{F_2} - y_{F_1}|$
   Na slici 4.13 vidimo hiperbolu u crvenoj boji. Fokusi su F_1 i F_2 kao nasuprotni vrhovi pravokutnika. Vidimo da je c odnosno duljina kraće stranice pravokutnika manja od polovice razlike $2e$ i $2a$ jer je

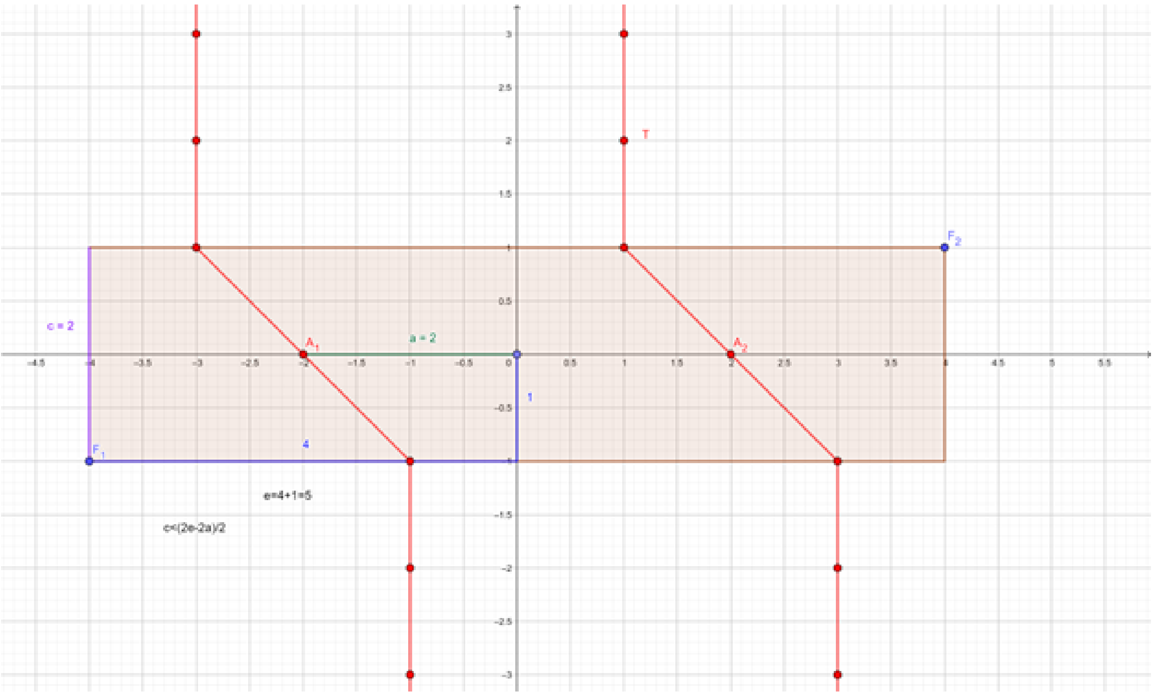
$$c = 2 < \frac{10-4}{2} = \frac{2e-2a}{2}.$$

   Uzmimo proizvoljnu točku T na hiperboli. Vidimo da vrijedi

$$||F_1T| - |TF_2|| = 2a$$

jer

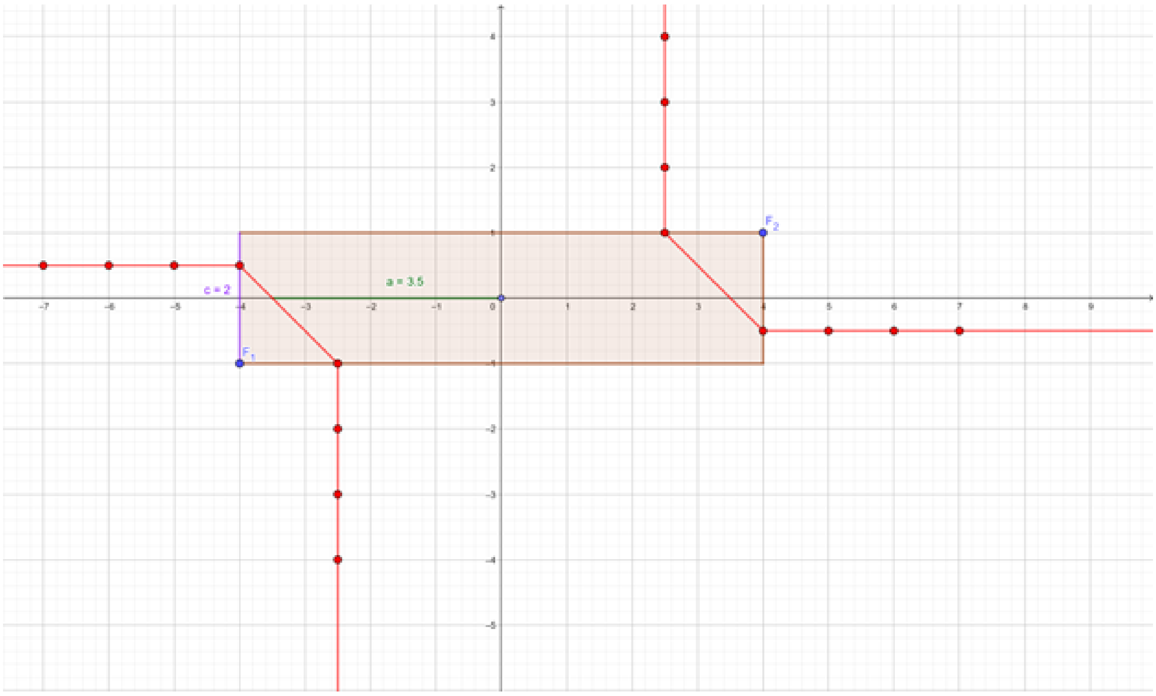
$$|F_1T| = 8, |TF_2| = 4, 2a = 4.$$



Slika 4.13: Hiperbola u taxicab geometriji; fokusi nisu na osi x

Na slici 4.13 vidimo hiperbolu u crvenoj boji.
Nađemo točku središta koja ima koordinate $O\left(\frac{x_{F_2}-x_{F_1}}{2}, \frac{y_{F_2}-y_{F_1}}{2}\right)$.
Na pravcu paralelnom sa osi x nađemo dvije točke hiperbole koje su od O udaljene za a. To su točke A_1, A_2 na slici 4.13. Kao i u prethodnom slučaju, ostale točke nađemo tako da povećamo udaljenosti od fokusa za isti broj.
Ako se iz A_1 pomaknemo za 1 prema lijevo i jedan prema gore vidimo da će to također biti točka na hiperboli. Isto kada se pomaknemo za jedan prema desno i jedan prema dolje. Općenito, krećemo se na taj način iz A_1 i A_2 dok ne dođemo do stranica pravokutnika. Zatim, nacrtamo polupravce koji izlaze iz tih točaka na stranicama pravokutnika, a okomiti su na os x i izlaze iz pravokutnika. To su preostale točke hiperbole.

b) $c > \frac{2e-2a}{2}$, gdje je $c = |y_{F_2} - y_{F_1}|$



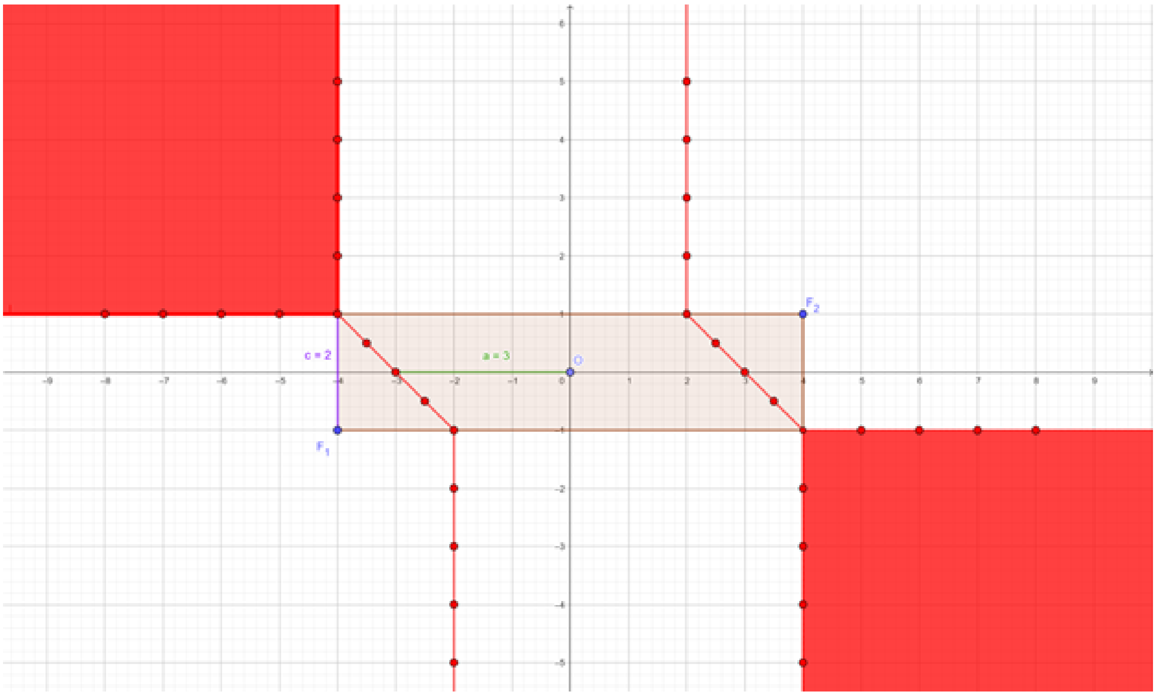
Slika 4.14: Hiperbola u taxicab geometriji; fokusi nisu na osi x

Na slici 4.14 vidimo hiperbolu u crvenoj boji. Vidimo da je c odnosno kraća stranica pravokutnika veća od polovice razlike $2e$ i $2a$ jer je

$$c = 2 > \frac{10-7}{2} = \frac{2e-2a}{2}.$$

Ovaj slučaj crtamo analogno kao slučaj a) dok ne dođemo do stranica pravokutnika. Iz točke hiperbole na lijevoj stranici pravokutnika povučemo polupravac paralelan s osi x koji izlazi iz pravokutnika. Iz točke hiperbole na donjoj stranici pravokutnika povučemo polupravac paralelan s osi y koji izlazi iz pravokutnika. Analogno radimo za desnu stranu, vidi sliku 4.14.

c) $c = \frac{2e-2a}{2}$, gdje je $c = |y_{F_2} - y_{F_1}|$



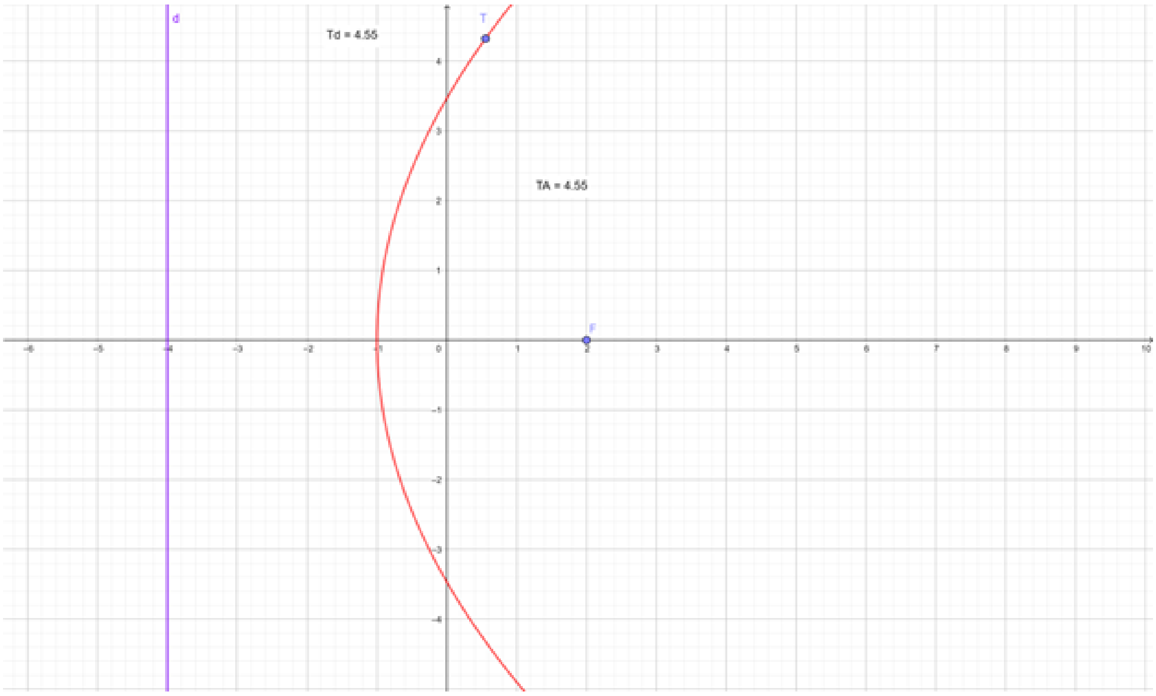
Slika 4.15: Hiperbola u taxicab geometriji; fokusi nisu na osi x

Na slici 4.15 vidimo hiperbolu u crvenoj boji. Pogledajmo dijelove hiperbole u drugom i četvrtom kvadrantu. Za razliku od ostalih dijelova hiperbole, ova dva dijela popunjavaju ravninu između dva polupravca i šire se u beskonačnost. Vrijedi i da je c odnosno duljina kraće stranice pravokutnika jednaka polovici razlike $2e$ i $2a$ jer je

$$c = 2 = \frac{10-6}{2} = \frac{2e-2a}{2}.$$

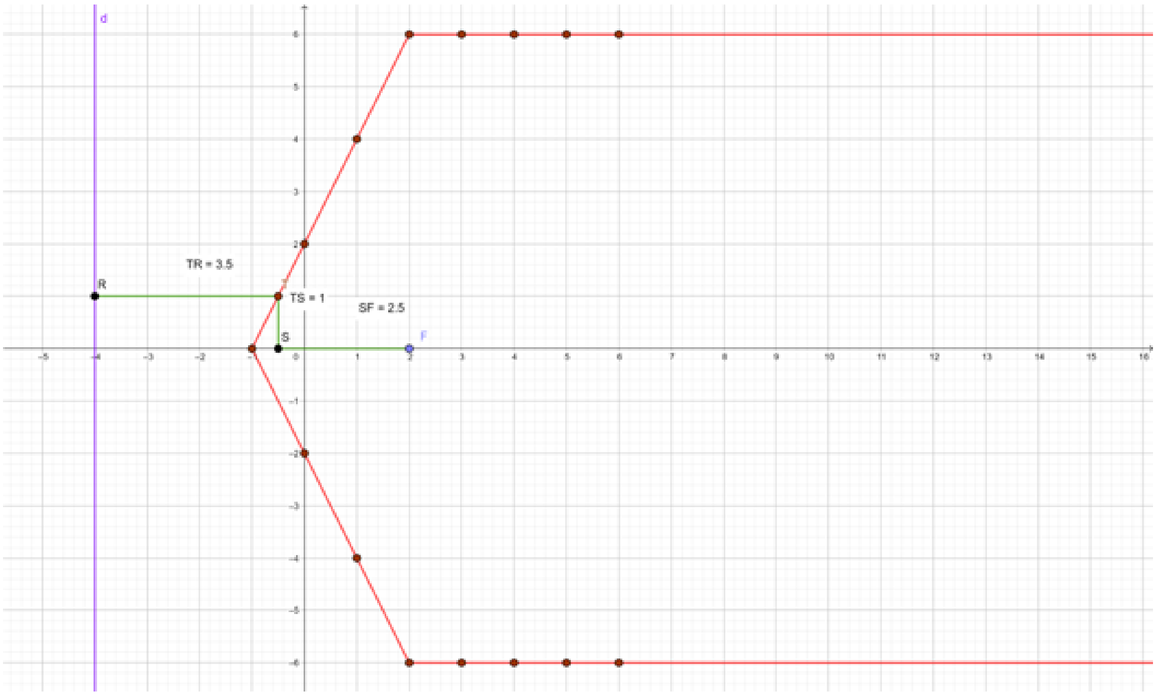
4.4 Parabola

Definicija 4.4.1. *Neka je d čvrsti pravac i F čvrsta točka u E^2 koja ne pripada pravcu d. Parabola je skup svih točaka u E^2 koje su jednako udaljene od d i F.*



Slika 4.16: Parabola u euklidskoj geometriji

Vrijedi jednakost $d_E(T, F) = d_E(T, d)$ za svaku točku T na paraboli.
Kako bismo odredili parabolu u taxicab geometriji?



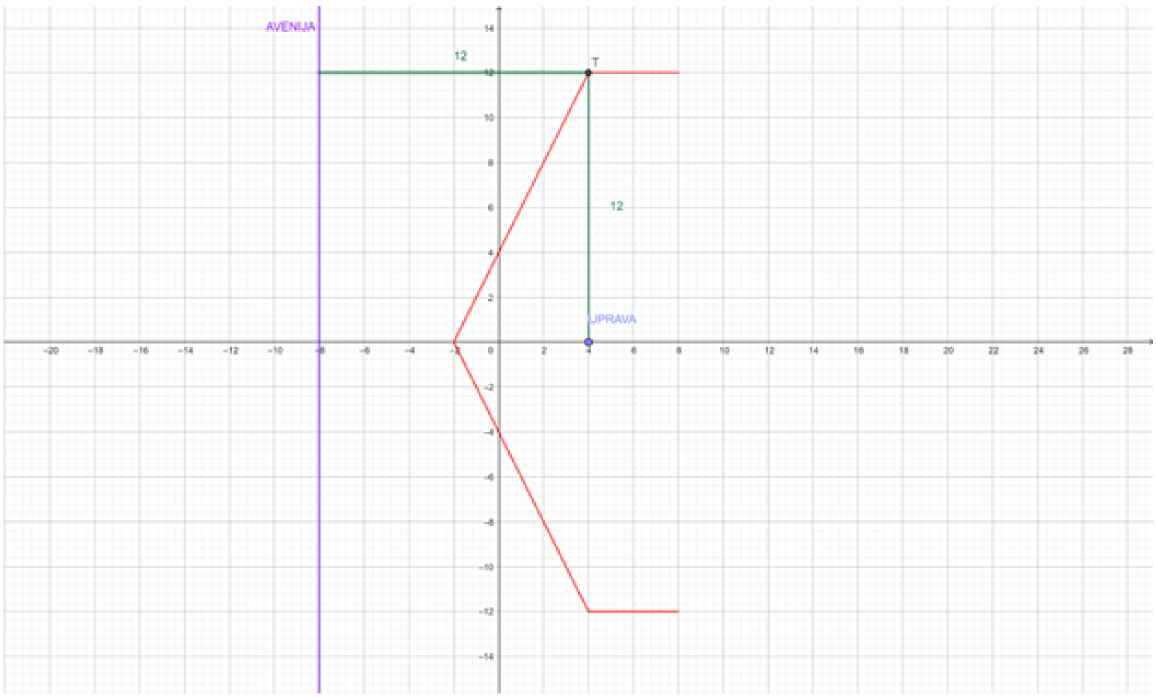
Slika 4.17: Parabola u taxicab geometriji

Na slici 4.17 imamo parabolu s fokusom $F(2,0)$ i ravnalicom d jednadžbe pravca $x = -4$, parabola je u crvenoj boji. Sve točke parabole jednako su udaljene od fokusa F i ravnalice d. Vidimo da je točka T jednako udaljena od ravnalice i od fokusa. Pišemo: $d_T(T,R) = 3.5 = d_T(T,F)$, gdje je R točka na ravnalici koja ima y koordinatu kao točka T. Kao što vidimo na slici 4.17, $|TR| = 3.5 = 1 + 2.5 = |TS| + |SF|$.
Koristimo formulu:
$d_T(T,F) = d_T(T,d)$, za svaku točku T na paraboli.
Očito je da parabola izgleda drugačije u taxicab geometriji jer nije zakrivljena kao u euklidskoj. Ono što je sličnost s euklidskom geometrijom, i ova parabola sadrži točku koja je jednako udaljena od fokusa i presjeka ravnalice i osi x. Ova parabola ograničena je s dva polupravca koji počinju u točkama koje imaju istu koordinatu x kao i fokus, s time da su udaljenosti tih točaka od fokusa jednake njihovoj udaljenosti od ravnalice.

4.5 Primjena parabole u taxicab geometriji

Primjer 4.5.1. *Policijska ophodnja*

U jednom gradu imamo glavnu aveniju i zgradu uprave. Želimo isplanirati najefikasniji put patroliranja jednog para policajaca koji su zaduženi za reagiranje na probleme na glavnoj aveniji jednako kao i za zaštitu zgrade uprave. Budući da imaju jednak prioritet za ta dva zadatka, trebaju uvijek na svojoj ophodnji biti u položaju koji je jednako udaljen od avenije i od zgrade uprave. Policajci ne smiju biti udaljeni više od 4 kilometra od avenije ili uprave.
Putanja tih policajaca je taxicab parabola pri čemu je avenija ravnalica te parabole, a zgrada uprave je fokus.



Slika 4.18: Policijska ophodnja

Na slici 4.18 vidimo parabolu s fokusom UPRAVA $(4, 0)$ i ravnalicom AVENIJA jednadžbe $x = -8$, a udaljenost 1 predstavlja 250 metara. Zbog toga što policajci ne smiju biti udaljeni više od 4 kilometra od avenije ili uprave, krakovi ove taxicab parabole ne idu u beskonačnost, već završavaju u točkama $(8, 12)$ i $(8, -12)$.
Crvenom bojom označena je taxicab parabola na slici 4.18, odnosno put policajaca u ophodnji. Odabrali smo na paraboli točku T i zelenim dužinama pokazali da je jednako udaljena od avenije (ravnalice) i zgrade uprave (fokusa). To znači da će policajci jednako brzo moći reagirati na situaciju na aveniji ili u zgradi uprave.

Poglavlje 5

Trokuti u taxicab geometriji

U ovom poglavlju slijedimo četvrto i peto poglavlje knjige [7]. Također koristimo video [6] i članak [1]. Posebno bih izdvojio znanstveni rad [3] zbog iznimno detaljne obrade teme trokuta u taxicab geometriji.

5.1 Udaljenost točke od pravca

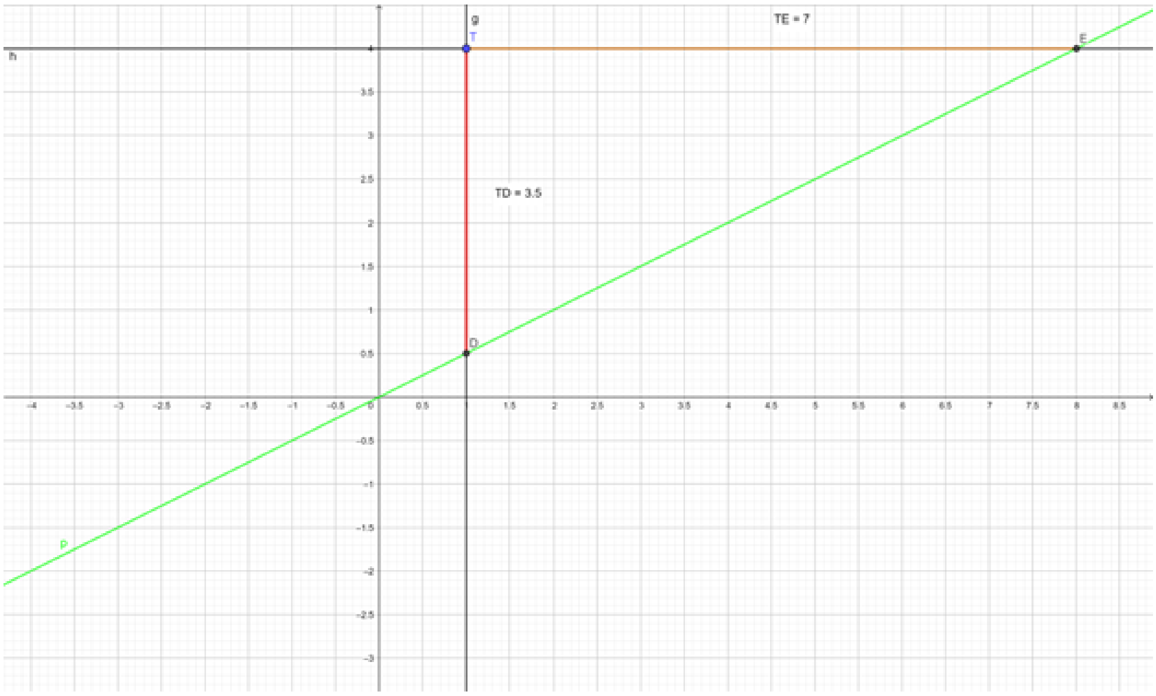
Definicija 5.1.1. *Udaljenost točke T od pravca p je infimum skupa koji se sastoji od svih udaljenosti točke T do točaka na pravcu p. U euklidskoj geometriji to je duljina okomice iz točke T na pravac p.*
Drugim riječima, udaljenost $d(T,p)$ od točke T do pravca p definiramo kao

$$d(T,p) = inf\,\{d(T,X) : X \in p\}\,.$$

Slika 5.1: Udaljenost točke od pravca

Na slici 5.1 smo sa d označili udaljenost od točke T do pravca p. Spuštamo okomicu sa točke T na pravac p, na slici 5.1 vidimo pravi kut.
Provest ćemo diskusiju u ovisnosti o vrijednosti koeficijenta smjera pravca s jednadžbom $y = kx + l$.

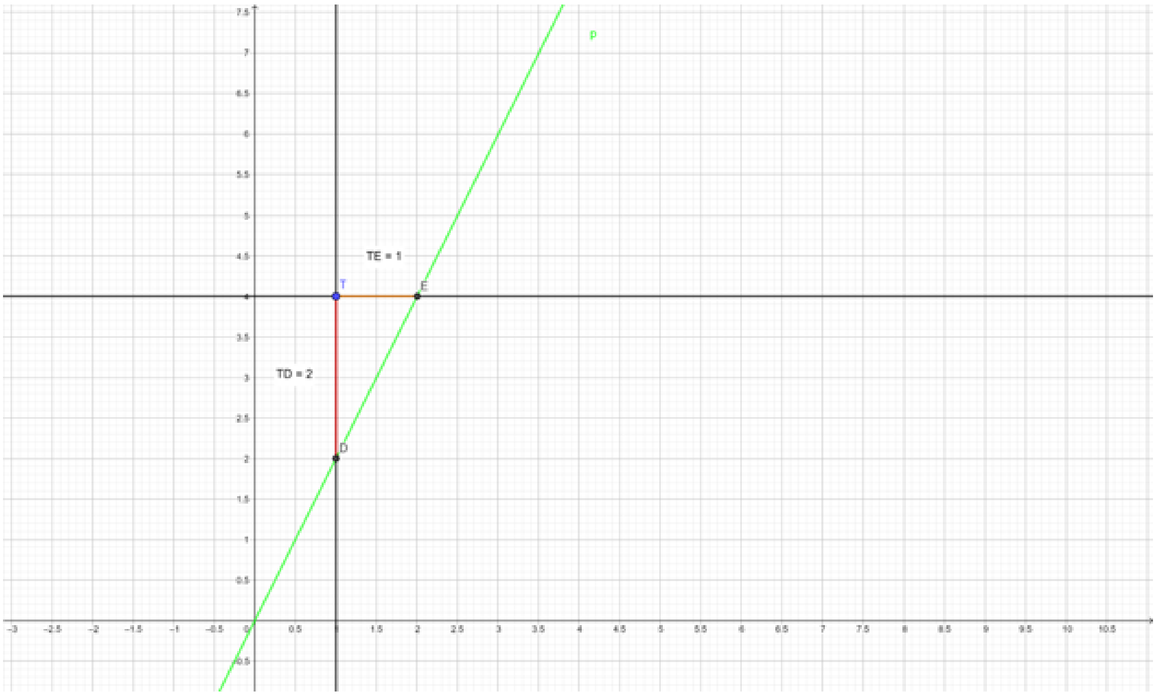
1. slučaj. $k \in \langle -1, 1 \rangle$. Pogledajmo sliku 5.2 na kojoj imamo točku $T(1, 4)$ i pravac p s jednadžbom $y = \frac{1}{2}x$.



Slika 5.2: Udaljenost točke od pravca za $k \in \langle -1, 1 \rangle$

Na slici 5.2 označili smo točku T i pravac p (u zelenom). Točka D je sjecište pravca p i pravca koji prolazi točkom T i paralelan je s osi ordinata. Točka E je sjecište pravca p i pravca koji prolazi točkom T i paralelan je s osi apscisa.
Pogledajmo udaljenosti između točke T i točaka D i E. $d_T(T, D) = 3.5, d_T(T, E) = 7$.
Dakle, $d_T(T, p) = 3.5$.
Kao što vidimo, udaljenost između točke T i točke D (duljina te dužine u crvenoj boji) manja je od udaljenosti između točke T i točke E (duljina te dužine u smeđoj boji). Udaljenost točke T do pravca p je dakle ista kao i udaljenost između točaka T i D.

2. slučaj. $k \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$. Pogledajmo sliku 5.3 za primjer točke $T(1, 4)$ i pravca p s jednadžbom $y = 2x$.



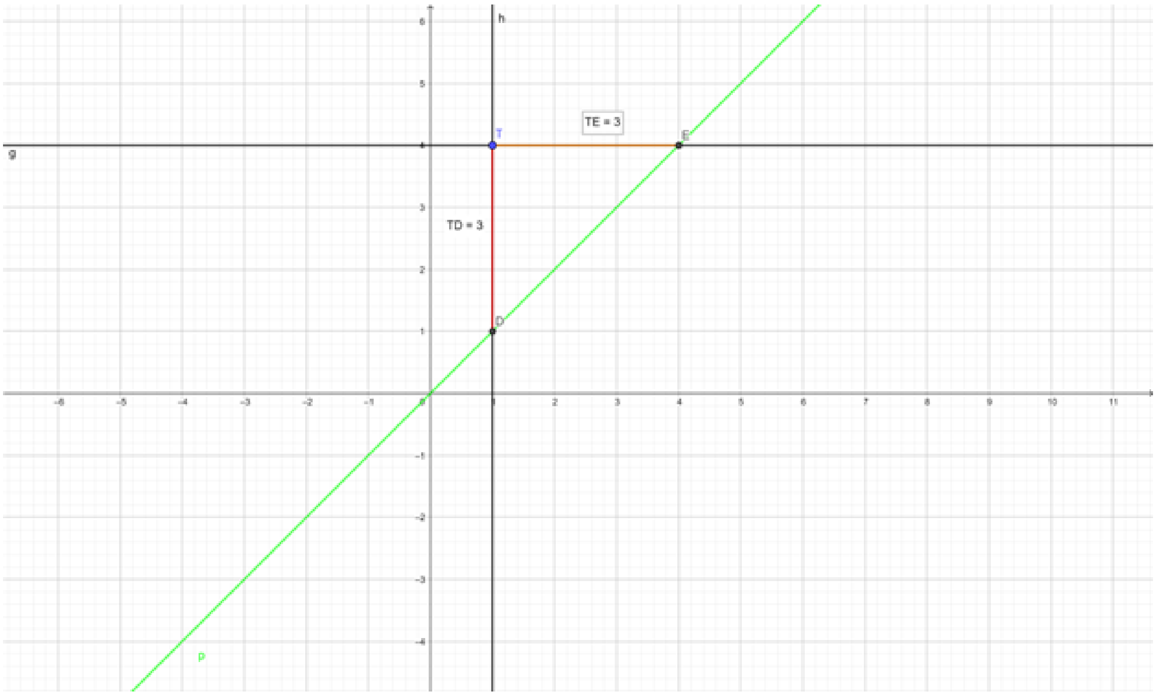
Slika 5.3: Udaljenost točke od pravca za $k \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$

Na slici 5.3 označili smo točku T i pravac p (u zelenom). Točka D je sjecište pravca p i pravca koji prolazi točkom T i paralelan je s osi ordinata. Točka E je sjecište pravca p i pravca koji prolazi točkom T i paralelan je s osi apscisa.
Pogledajmo udaljenosti između točke T i točaka D i E.

$$d_T(T, D) = 2, d_T(T, E) = 1.$$

Dakle, $d_T(T, p) = 1$.
Kao što vidimo na slici 5.3, udaljenost između točke T i točke D (duljina te dužine u crvenoj boji) veća je od udaljenosti između točke T i točke E (duljina te dužine u smeđoj boji).
Udaljenost točke T do pravca p ista je kao i udaljenost između točaka T i E.

3. slučaj. $k = -1, 1$. Pogledajmo sliku 5.4 za primjer točke $T(1, 4)$ i pravca p s jednadžbom $y = x$.



Slika 5.4: Udaljenost točke od pravca za $k = -1, 1$

Na slici 5.4 označili smo točku T i pravac p (u zelenom). Točka D je sjecište pravca p i pravca koji prolazi točkom T i paralelan je s osi ordinata. Točka E je sjecište pravca p i pravca koji prolazi točkom T i paralelan je s osi apscisa.
Pogledajmo udaljenosti između točke T i točaka D i E.

$$d_T(T, D) = 3, d_T(T, E) = 3.$$

Dakle, $d_T(T, p) = 3$.
Pogledajmo eksplicitnu jednadžbu pravca $y = k \cdot x + l$.
Svaki puta kada se x poveća za jedan, y se poveća za k. Ako točka T ima koordinate (x_T, y_T), to znači da je njezina horizontalna udaljenost do pravca ista kao i udaljenost točke T do točke $P_H(x_H, y_H)$ na pravcu p čija je y koordinata jednaka y_T, a x koordinata je jednaka $x_H = \frac{y_T - l}{k}$.
Za prethodno navedene koordinate, formula horizontalne udaljenosti je:

$$d_T(T, P_H) = |x_H - x_T| + |y_H - y_T| = \left|\frac{y_T - l}{k} - x_T\right| + |y_T - y_T| = \left|\frac{y_T - l}{k} - x_T\right|.$$

Vertikalna udaljenost točke T do pravca p je udaljenost između točke T i točke $P_V(x_V, y_V)$ na pravcu p čija je x koordinata jednaka x_T, a y koordinata je jednaka $y_V = kx_T + l$.

Za prethodno navedene koordinate, formula vertikalne udaljenosti je:

$$d_T(T, P_V) = |x_V - x_T| + |y_V - y_T| = |x_T - x_T| + |k \cdot x_T + l - y_T| = |k \cdot x_T + l - y_T|.$$

Konačno,

$$d_T(T, p) = \frac{|k \cdot x_T + l - y_T|}{\max\{|k|, 1\}}.$$

Odaberemo veći od koeficijenta smjera pravca i jedinice za nazivnik jer tražimo najmanju vrijednost za udaljenost, a između razlomaka istog brojnika manji je onaj koji ima veći razlomak.
Usporedimo ove dvije udaljenosti:

$$d_T(T, P_H) = \left|\frac{y_T - l}{k} - x_T\right| = \left|\frac{y_T - l - k \cdot x_T}{k}\right| = \left|-\left(-\frac{-y_T + l + k \cdot x_T}{k}\right)\right| =$$

$$\left|\frac{k \cdot x_T + l - y_T}{k}\right| = \frac{|k \cdot x_T + l - y_T|}{|k|}$$

$$d_T(T, P_V) = |k \cdot x_T + l - y_T|.$$

Dakle,

$$d_T(T, P_H) = \frac{d_T(T, P_V)}{|k|},$$

odnosno,

$$d_T(T, P_V) = |k| \cdot d_T(T, P_H).$$

Pogledajmo sada sljedeća tri slučaja u kojima se razmatra odnos između horizontalne i vertikalne udaljenosti.

1. slučaj. $k \in \langle -1, 1 \rangle$. Tada vrijedi:

$$d_T(T, P_V) \leq (T, P_H)$$

to jest vertikalna udaljenost od točke T do pravca p je manja od horizontalne. Zaključujemo da je tada udaljenost od točke T do pravca p jednaka njihovoj vertikalnoj udaljenosti.

2. slučaj. $k \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. Tada vrijedi:

$$d_T(T, P_V) \geq (T, P_H)$$

to jest vertikalna udaljenost od točke T do pravca p je veća od njihove horizontalne udaljenosti. Zaključujemo da je tada udaljenost od točke T do pravca p jednaka njihovoj horizontalnoj udaljenosti.

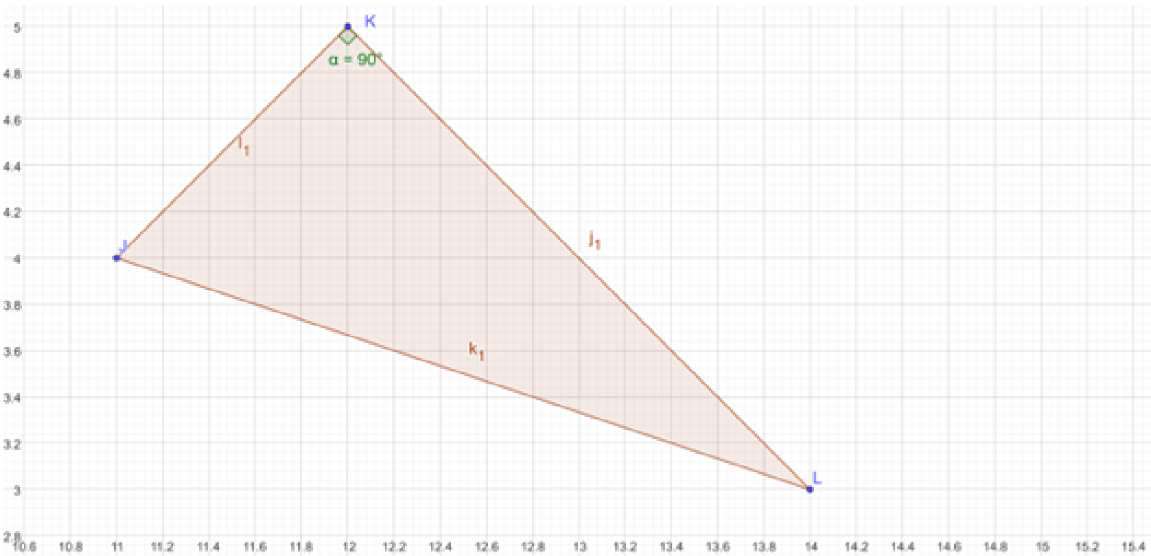
3. slučaj. $k = -1, 1$. Tada vrijedi:

$$d_T(T, P_V) = (T, P_H).$$

to jest vertikalna udaljenost od točke T do pravca p jednaka je njihovoj horizontalnoj udaljenosti. Zaključujemo da tada možemo koristiti njihovu i vertikalnu i horizontalnu udaljenost kao udaljenost od točke T do pravca p.

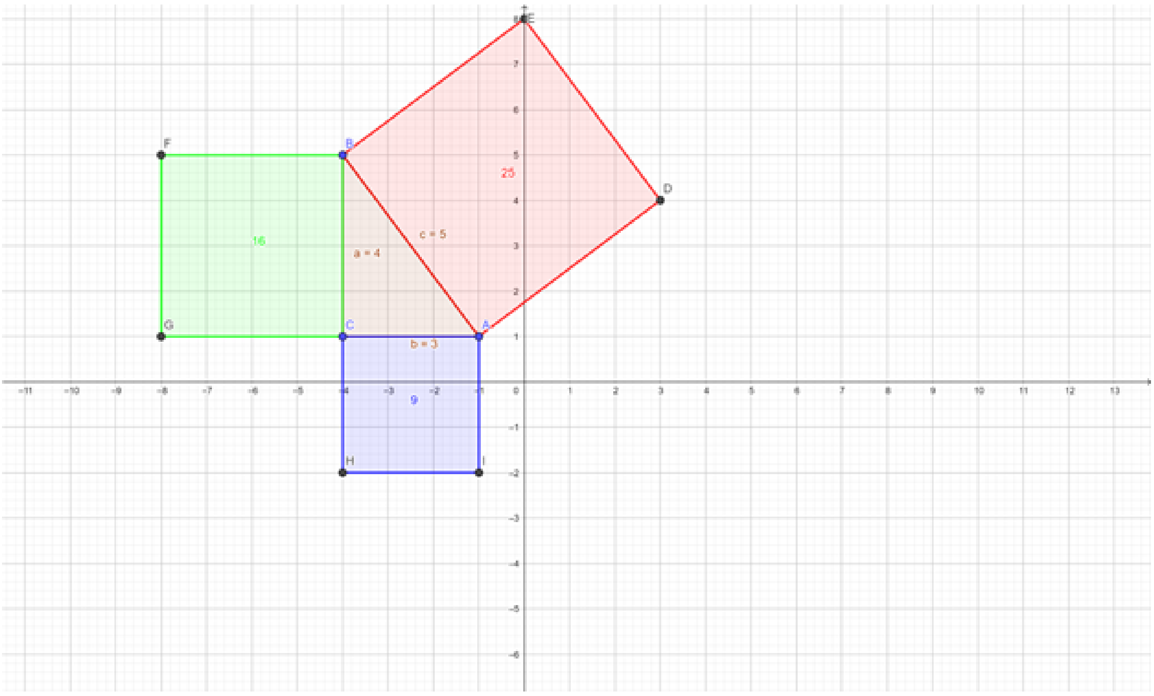
5.2 Sličnost i sukladnost

U ovom dijelu rada reći ćemo nešto o trokutima u taxicab geometriji. U taxicab geometriji nećemo gledati na sličnosti i sukladnosti trokuta na isti način kao u euklidskoj geometriji. U euklidskoj geometriji vrijedi svojstvo da je zbroj duljina dvije stranice trokuta veći od duljine treće stranice trokuta. To ne vrijedi u taxicab geometriji.



Slika 5.5: Trokut

Kao što vidimo na slici 5.5, u trokutu KJL taxicab duljina stranice LJ je 4, duljina stranice KL je isto 4, a duljina stranice KJ je 2.
U euklidskoj geometriji za pravokutni trokut vrijedi Pitagorin poučak:
površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.



Slika 5.6: Pitagorin poučak u euklidskoj geometriji

U pravokutnom trokutu ABC s pravim kutom u vrhu C i duljinama stranica a, b i c to možemo zapisati kao:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

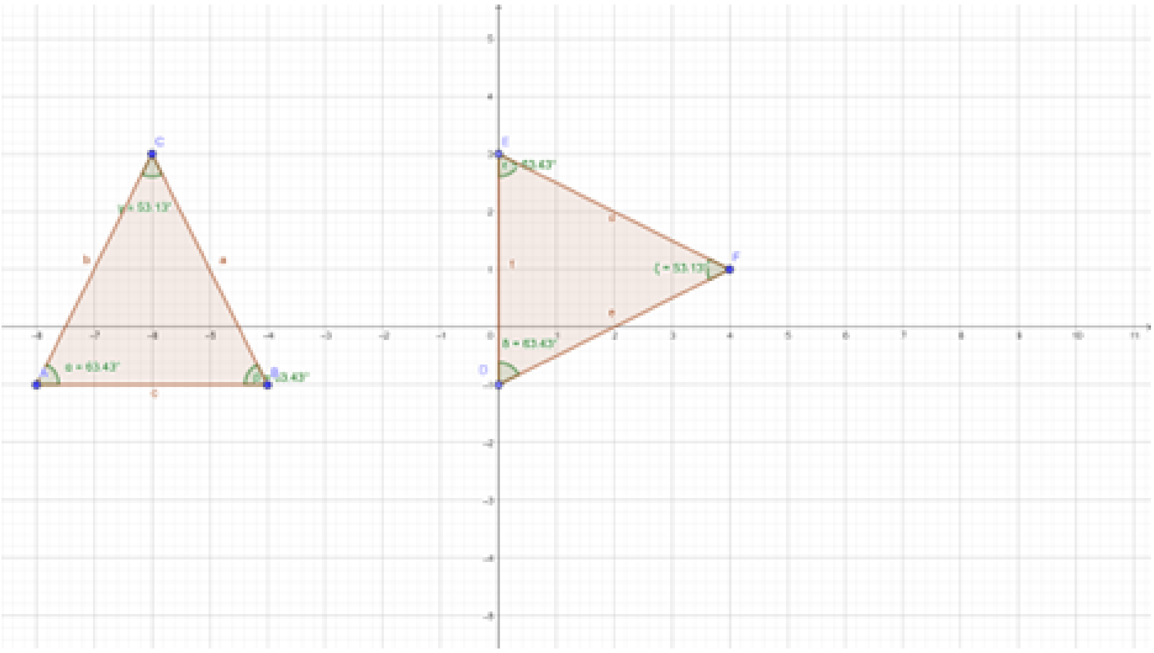
Vrijedi li Pitagorin poučak u taxicab geometriji?
Pogledajmo ponovno sliku 5.5 trokuta KJL. Vidimo da su taxicab duljine krakova 4 i 2, a duljina hipotenuze je 4. Dakle, ne vrijedi formula za Pitagorin poučak:
kvadrat hipotenuze jednak je zbroju kvadrata nad katetama.
jer $4^2 \neq 4^2 + 2^2$.
Zaključujemo da se Pitagorin poučak ne može primijeniti za taxicab pravokutni trokut.

Definicija 5.2.1. *Dva su trokuta sukladna ako su im stranice jednakih duljina i kutovi jednakih veličina.*

Pogledajmo teoreme o sukladnosti i sličnosti u euklidskoj geometriji.

Teorem 5.2.2. *Teoremi o sukladnosti su:*

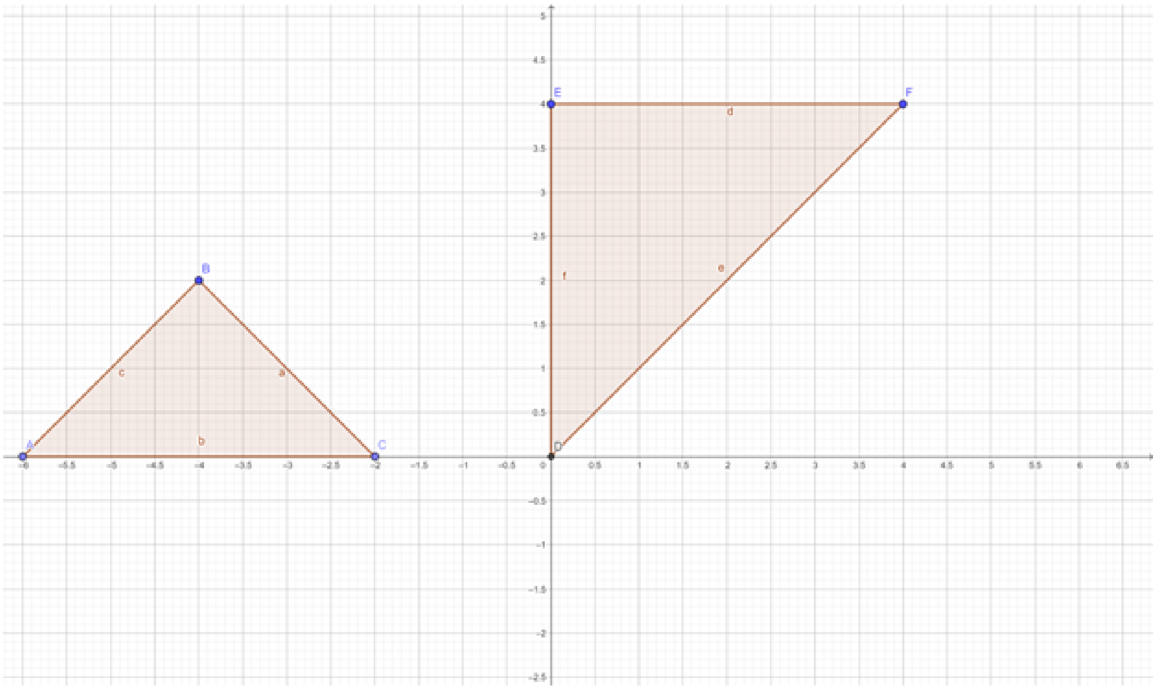
1. *S-S-S TEOREM Dva su trokuta sukladna ako su im sve stranice sukladne.*
2. *S-K-S TEOREM Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut između njih.*
3. *S-K-S TEOREM Dva su trokuta sukladna ako su im sukladna dva kuta i stranica između njih.*
4. *S-S-K TEOREM Dva su trokuta sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut nasuprot veće.*



Slika 5.7: Dva sukladna trokuta

Na slici 5.7 vidimo dva sukladna trokuta. Imaju jednake stranice i kutove.
Pogledajmo vrijede li teoremi o sukladnosti u taxicab geometriji.

1. S-K-S sukladnost



Slika 5.8: S-K-S sukladnost trokuta u taxicab geometriji

Na slici 5.8 imamo trokute ABC i DEF s vrhovima $A(-6, 0), B(-4, 2), C(-2, 0)$,

$$D(0, 0), E(0, 4), F(4, 4).$$

Kutovi u vrhovima B i E su pravi, ostali kutovi imaju mjeru 45°.
Također, vrijedi

$$d_T(A, B) = d_T(D, E) = 4,$$
$$d_T(B, C) = d_T(E, F) = 4.$$

Pogledajmo taxicab duljine hipotenuza tih trokuta.

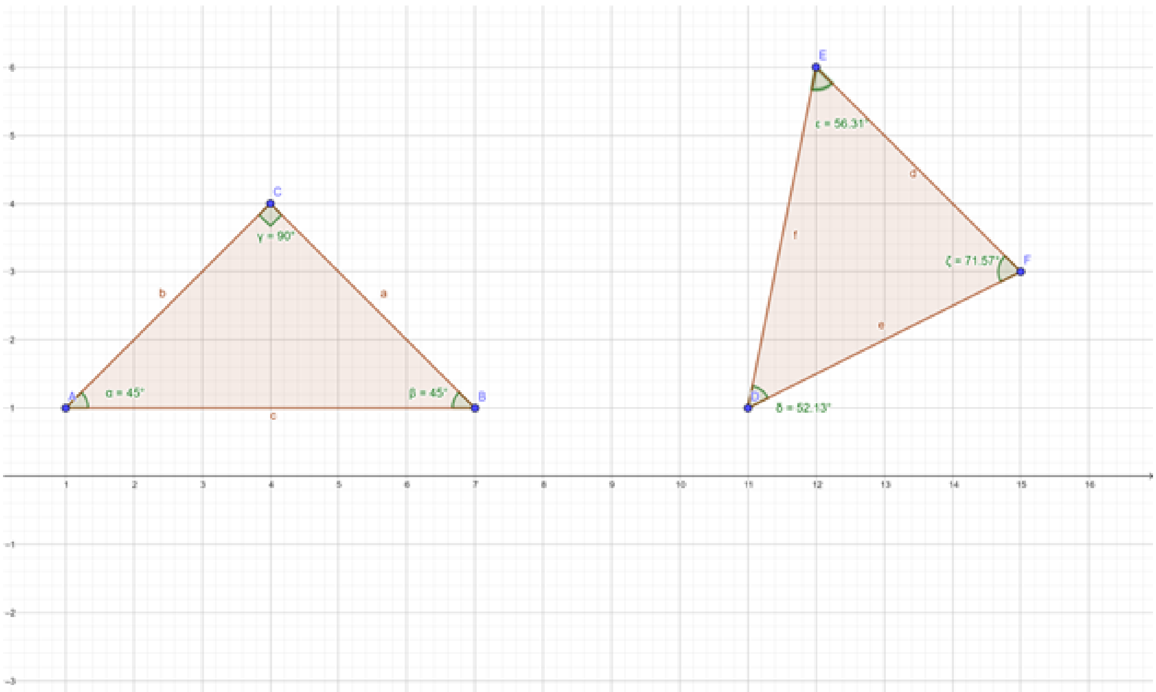
$$4 = d_T(A, C) \neq d_T(D, F) = 8.$$

Dakle, ovi trokuti nisu sukladni jer im nisu sve stranice sukladne. Zbog toga S-K-S sukladnost ne vrijedi u taxicab geometriji.

Također bih naglasio da u taxicab geometriji jednakostranični trokut ne mora imati jednake kutove. Trokut ABC je jedan primjer takvog trokuta, mjera kuta ABC iznosi 90°.

U euklidskoj geometriji vrijedi da je najveći kut trokuta nasuprot najdulje stranice. Kao što vidimo na slici 5.8, to ne vrijedi u taxicab geometriji. Stranica koja se nalazi nasuprot pravog kuta u trokutu ABC nije dulja od ostalih stranica.

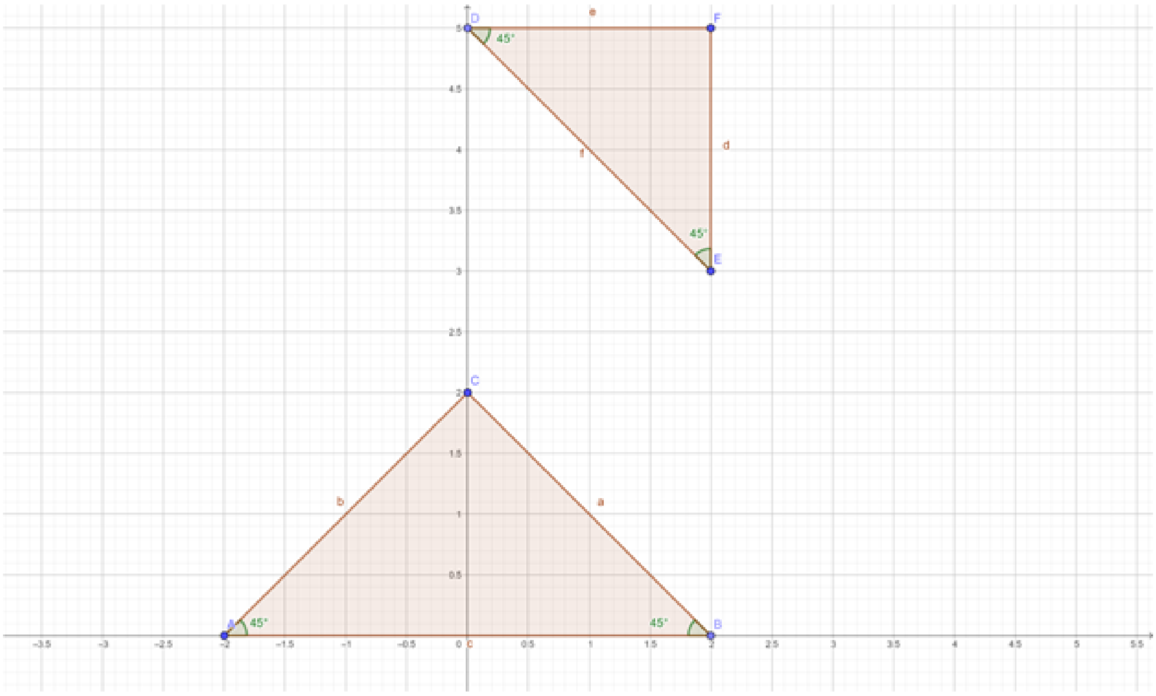
2. S-S-S sukladnost Pogledajmo vrijedi li S-S-S sukladnost u taxicab geometriji.



Slika 5.9: S-S-S sukladnost trokuta u taxicab geometriji

Na slici 5.9 imamo trokute ABC i DEF s vrhovima
$A(1,1), B(7,1), C(4,4), D(11,1), E(12,6), F(15,3)$.
Promotrimo taxicab duljine stranica ovih trokuta.
U trokutu ABC vrijedi $d_T(A,B) = d_T(B,C) = d_T(A,C) = 6$.
U trokutu DEF vrijedi $d_T(D,E) = d_T(E,F) = d_T(D,F) = 6$.
Pogledajmo kutove. Trokut ABC je jednakokračan i pravokutan. Trokut DEF ima sve kutove različite. Zaključujemo da u taxicab geometriji ne vrijedi S-S-S sukladnost.

3. K-S-K sukladnost Pogledajmo vrijedi li K-S-K sukladnost u taxicab geometriji.



Slika 5.10: K-S-K sukladnost trokuta u taxicab geometriji

Na slici 5.10 imamo trokute ABC i DEF s vrhovima
$A(-2, 0), B(2, 0), C(0, 4), D(0, 5), E(2, 3), F(2, 5)$.
Ova dva trokuta imaju jednake kutove u vrhovima A, B, D, E i njihova je mjera $45°$.
Između tih kutova imaju jednaku duljinu stranice u taxicab geometriji.

$$d_T(A, B) = d_T(D, E) = 4.$$

Vidimo sa slike 5.10 da trokuti ABC i DEF nisu sukladni jer $d_T(A, C) = 4 \neq 2 = d_T(D, F)$. Zaključujemo da u taxicab geometriji ne vrijedi K-S-K sukladnost.

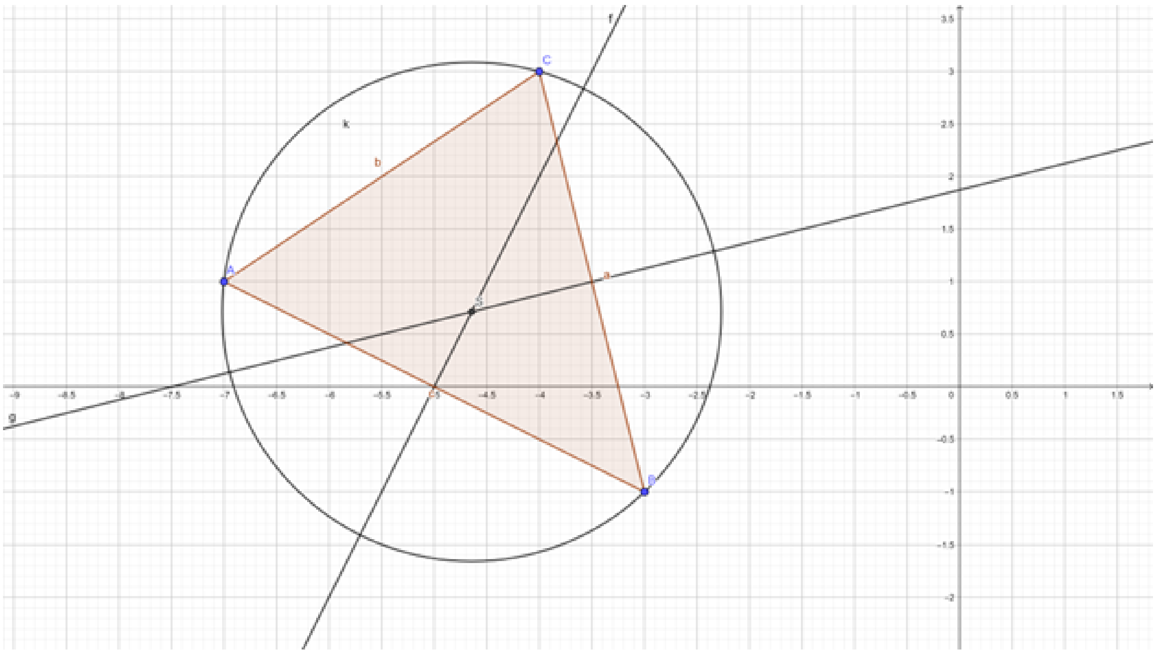
4. S-S-K sukladnost Pogledajmo vrijedi li S-S-K sukladnost u taxicab geometriji. Pogledajmo ponovno trokute sa slike 5.8. Vidimo da ti trokuti imaju jednake duljine kateta i sukladni su im svi kutovi. Pogledajmo taxicab duljine hipotenuza tih trokuta

$$4 = d_T(A, C) \neq d_T(D, F) = 8.$$

Njihove hipotenuze imaju različite taxicab duljine pa zaključujemo da S-S-K sukladnost ne vrijedi u taxicab geometriji.

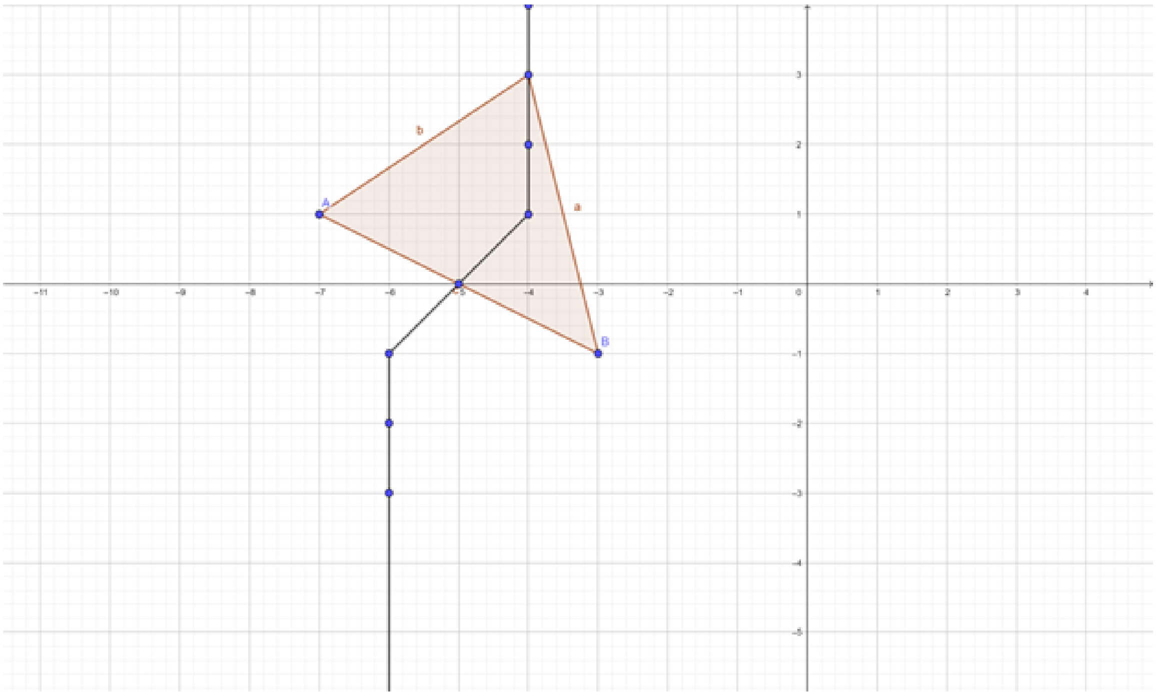
5.3 Trokutu opisana kružnica

Nacrtajmo trokutu opisanu kružnicu u euklidskoj i taxicab geometriji. Za početak ćemo to napraviti u euklidskoj geometriji. Središte trokutu opisane kružnice je sjecište simetrala njihovih stranica.
Simetrala stranice je pravac koji je okomit na stranicu i koji je jednako udaljen od krajeva stranice.



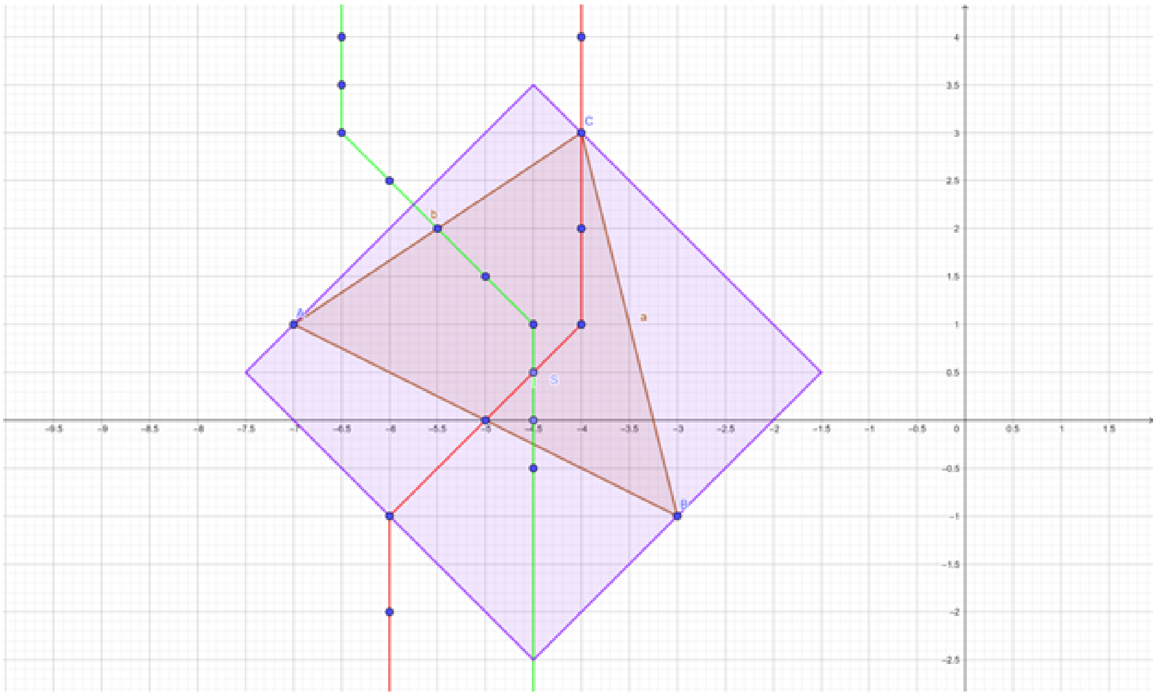
Slika 5.11: Trokutu opisana kružnica u euklidskoj geometriji

Kako bismo to napravili u taxicab geometriji?



Slika 5.12: Simetrala stranice trokuta u taxicab geometriji

U istom trokutu na slici 5.12 nacrtana je simetrala na stranicu AB, u taxicab geometriji. Pogledajmo kako bi izgledala trokutu opisana kružnica u taxicab geometriji.

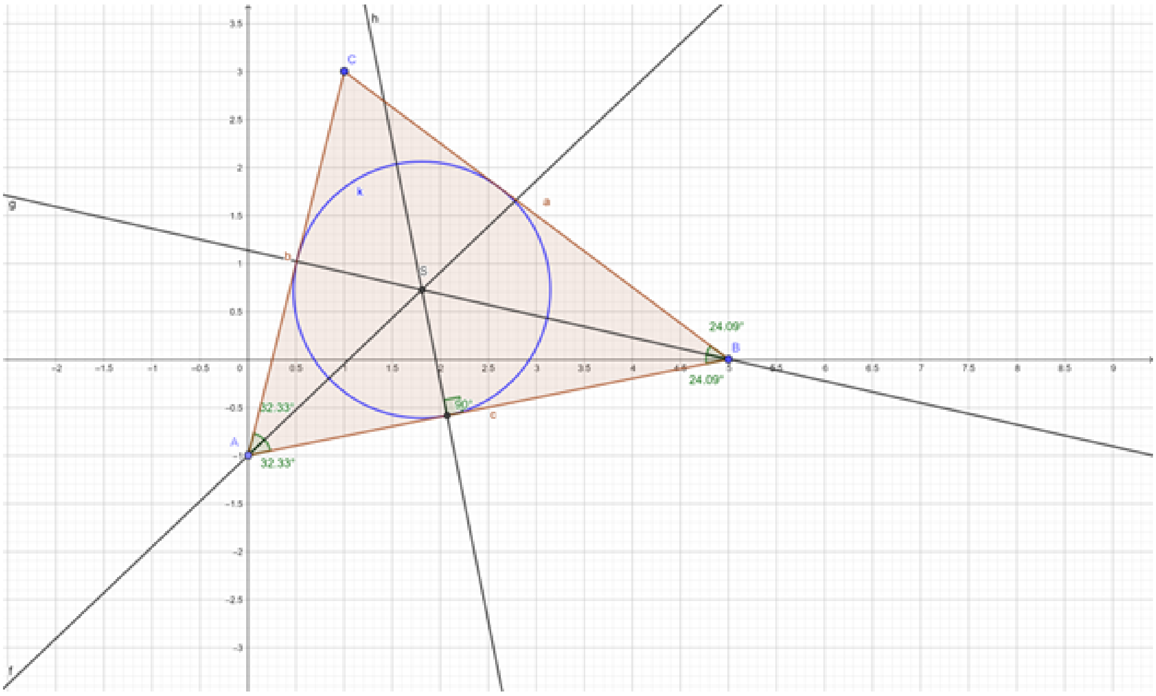


Slika 5.13: Trokutu opisana kružnica u taxicab geometriji

Na slici 5.13 vidimo kružnicu sa središtem u točki S i radijusom 3 koja je opisana trokutu ABC. Njeno središte S je točka koja je nastala kao sjecište simetrala stranica trokuta koje su označene crvenom i zelenom bojom. Dakako, u taxicab geometriji kružnica drugačije izgleda kao što možemo vidjeti na slici 5.13.

5.4 Trokutu upisana kružnica

Primjer 5.4.1. *Prikažimo trokutu upisanu kružnicu u euklidskoj i taxicab geometriji. Središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala kutova. Simetrala kuta je polupravac s početkom u vrhu kuta koji dijeli kut na dva sukladna kuta. Nacrtajmo sada trokutu upisanu kružnicu u euklidskoj geometriji.*



Slika 5.14: Trokutu upisana kružnica u euklidskoj geometriji

Radijus smo dobili tako da smo spustili visinu iz središta na jednu stranicu. Radijus trokutu upisane kružnice je tada udaljenost središta do nožišta te visine.
Pogledajmo sada trokutu upisanu kružnicu u taxicab geometriji.
Središte S dobili smo kao presjek simetrala kutova. Označili smo radijus upisane kružnice sa R_{uk}. Kao što je vidljivo na slici 5.16, S je jednako udaljeno od stranice c i od stranice b. Ti radijusi nisu okomiti na stranice kao što je to u euklidskoj geometriji, nego su ili horizontalni ili vertikalni. Razlog tome je što je udaljenost točke od pravca u taxicab geometriji ili horizontalna ili vertikalna.
Za simetralu kuta trokuta u euklidskoj geometriji znamo da ima svojstvo da se sastoji od točaka koje su jednako udaljene od krakova tog kuta. Naravno, ovdje pričamo o euklidskoj udaljenosti. Motivirani tim rezultatom, prelazimo na simetralu kuta u taxicab geometriji. Definirat ćemo simetralu kuta u taxicab geometriji kao skup svih točaka koje imaju jednaku taxicab udaljenost od krakova tog kuta. Valja istaknuti da simetrale kutova trokuta u taxicab geometriji općenito izgledaju drugačije nego u euklidskoj geometriji jer u taxicab geometriji koristimo taxicab udaljenost. Za neke kutove, primjerice za pravi kut, to će ipak vrijediti pa je u tom slučaju taxicab simetrala kuta jednaka euklidskoj.

Teorem 5.4.2. *Središte trokutu upisane kružnice u taxicab geometriji je sjecište simetrala* *kutova tog trokuta.*

Dokaz. Uzmimo trokut ABC s vrhovima $A(0,0), B(x_b, y_b), C(x_c, y_c)$. Označimo sa P_1, P_2, P_3 pravce koje sadrže stranice AB, BC, CA. Označimo sa k_1, k_2, k_3 koeficijente smjera tih pravaca. Prema slici 5.15 vrijedi $|k_1| \leq 1, |k_3| \leq 1, |k_2| \geq 1$. Tada vrijedi

$$P_1 \dots k_1 \cdot x$$

$$P_2 \dots k_2 \cdot (x - x_c) + y_c$$

$$P_3 \dots k_3 \cdot x.$$

Označimo sa SK_1, SK_2, SK_3 simetrale unutrašnjih kutova trokuta koji se nalaze u vrhovima A, BiC. Zbog toga što je SK_1 jednako udaljena od P_1 i P_3 vrijedi:

$$SK_1 = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_T(X, P_1) = d_T(X, P_3)\}.$$

Pogledajmo te taxicab udaljenosti $d_T(X, P_1) i d_T(X, P_3)$.
Općenito gledamo formulu za udaljenost točke $T(x_T, y_T)$ od pravca $p \dots y = k \cdot x + l$.

$$d_T(T, P) = \frac{|k \cdot x_T + l - y_T|}{max\{|k|, 1\}}$$

$$d_T(X, P_1) = \frac{|k_1 \cdot x - y|}{max\{|k_1|, 1\}} = k_1 \cdot x - y$$

$$d_T(X, P_3) = \frac{|-k_3 \cdot x + y|}{max\{|-k_3|, 1\}} = -k_3 \cdot x + y,$$

Iz $d_T(X, P_1) = d_T(X, P_3)$ slijedi $k_1 \cdot x - y = -k_3 \cdot x + y$

$$2y = k_1 \cdot x + k_3 \cdot x$$

$$2y = x \cdot (k_1 + k_3)$$

$$y = x \cdot \frac{k_1 + k_3}{2}.$$

Ovo je jednadžba simetrale SK_1. Sada ćemo napraviti isto za SK_2.

$$SK_2 = X = (x, y) \in R^2 : d_T(X, P_1) = d_T(X, P_2).$$

Pogledajmo te taxicab udaljenosti $d_T(X, P_1)$ i $d_T(X, P_2)$.

$$d_T(X, P_1) = \frac{|k_1 \cdot x - y|}{max\{|k_1|, 1\}} = k_1 \cdot x - y$$

$$d_T(X, P_2) = \frac{|y + k_2 \cdot (x_c - x) - y_c|}{max\{|k_2|, 1\}} = \frac{(y + k_2 \cdot (x_c - x) - y_c)}{k_2}$$

Iz $d_T(X, P_1) = d_T(X, P_2)$ slijedi $k_1 \cdot x - y = \frac{y+k_2\cdot(x_c-x)-y_c}{k_2}$

$$-y = -k_1 \cdot x + \frac{y + k_2 \cdot (x_c - x) - y_c}{k_2}$$

$$-y \cdot k_2 = -k_1 \cdot k_2 \cdot x + y + k_2 \cdot (x_c - x) - y_c$$

$$-y \cdot k_2 - y = -k_1 \cdot k_2 \cdot x + k_2 \cdot (x_c - x) - y_c$$

$$y \cdot (-k_2 - 1) = -k_1 \cdot k_2 \cdot x + k_2 \cdot (x_c - x) - y_c$$

$$y \cdot (k_2 + 1) = k_1 \cdot k_2 \cdot x - k_2 \cdot (x_c - x) + y_c$$

$$y = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot x - k_2 \cdot (x_c - x) + y_c}{k_2 + 1}$$

$$y = \frac{k_2 \cdot (1 + k_1)}{1 + k_2} \cdot x + \frac{y_c - k_2 \cdot x_c}{1 + k_2}.$$

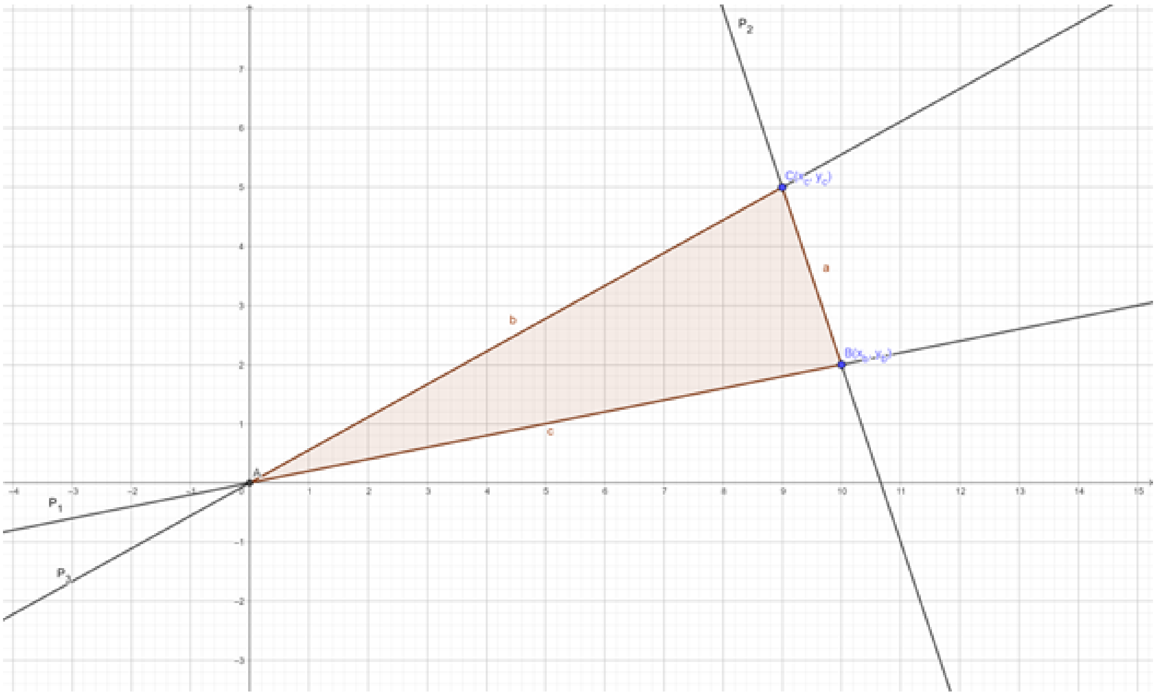
Analogno, jednadžba simetrale SK_3 je

$$y = \frac{k_2 \cdot (1 - k_1)}{1 - k_2} \cdot x + \frac{y_c - k_2 \cdot x_c}{1 - k_2}.$$

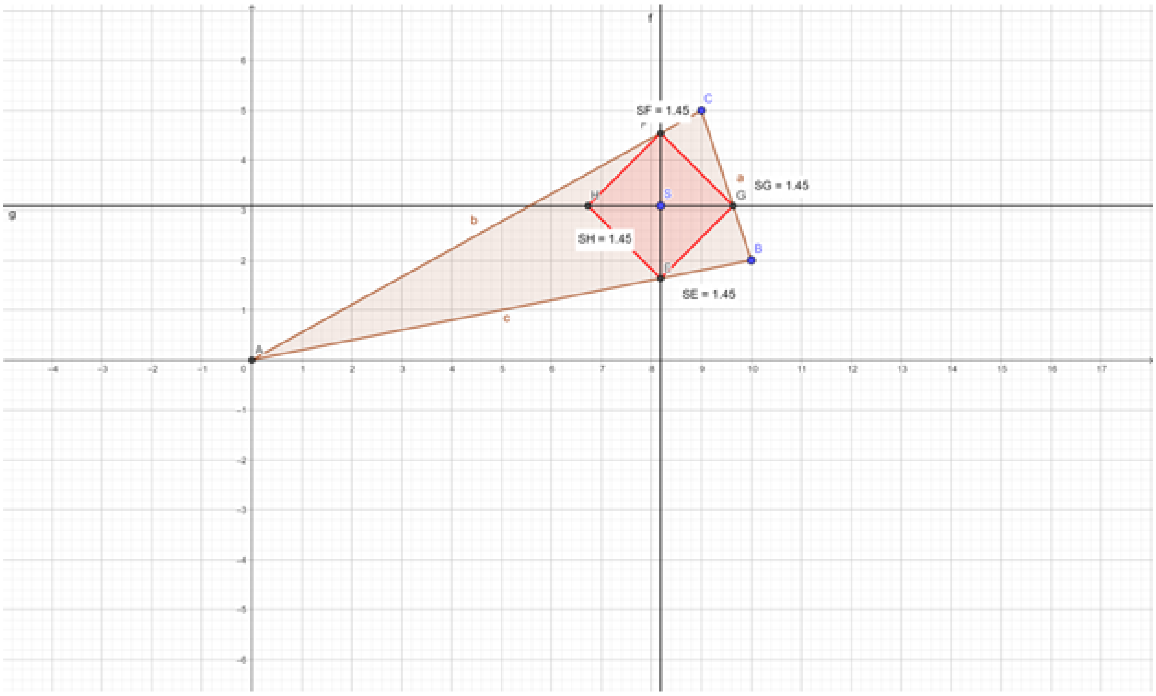
Rješavanjem sustava jednadžbi SK_1, SK_2, SK_3 dobijemo jedinstveno rješenje odnosno središte trokutu upisane kružnice.

□

Valja napomenuti da ovaj teorem ne bi vrijedio kada bismo za simetralu kuta koristili simetralu kuta u euklidskoj geometriji.



Slika 5.15: Trokut ABC



Slika 5.16: Trokutu upisana kružnica u taxicab geometriji

Nacrtajmo kružnicu upisanu trokutu ABC u taxicab geometriji, $A(0,0), B(10,2), C(9,5)$. Pogledajmo sliku 5.15. Imamo tri slučaja za trokutu upisanu kružnicu, koji su povezani s tri slučaja udaljenosti točke od pravca. Ovisno o nagibu stranice trokuta, radijus će biti horizontalan ili vertikalan.

1. slučaj. Nagib stranice trokuta je $k \in \langle -1, 1\rangle$. Kao što smo rekli u poglavlju 4, u ovom slučaju ta udaljenost je vertikalna. Ovdje je naravno ta udaljenost radijus. Na slici pogledajmo stranicu c i dužinu $\overline{SE}$ kao primjer.

2. slučaj. Nagib stranice trokuta je $k \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. U ovom slučaju udaljenost točke od pravca, to jest radijus je horizontalna. Kao primjer na slici 5.16 pogledajmo stranicu a i dužinu $\overline{SG}$ kao primjer.

3. slučaj. Nagib stranice trokuta je $k = -1, 1$. U ovom slučaju udaljenost točke od pravca, to jest radijus može biti i horizontalna i vertikalna.

Teorem 5.4.3. *Trokut ima opisanu i upisanu kružnicu ako i samo ako*

1. *Dvije stranice leže na pravcu za koji vrijedi da je koeficijent smjera* $|k| \leq 1$*, a treća stranica leži na pravcu s koeficijentom smjera* $|k| \geq 1$.
   ili

2. *Dvije stranice leže na pravcu za koji vrijedi da je koeficijent smjera* $|k| \geq 1$*, a treća stranica leži na pravcu s koeficijentom smjera* $|k| \leq 1$.

Poglavlje 6

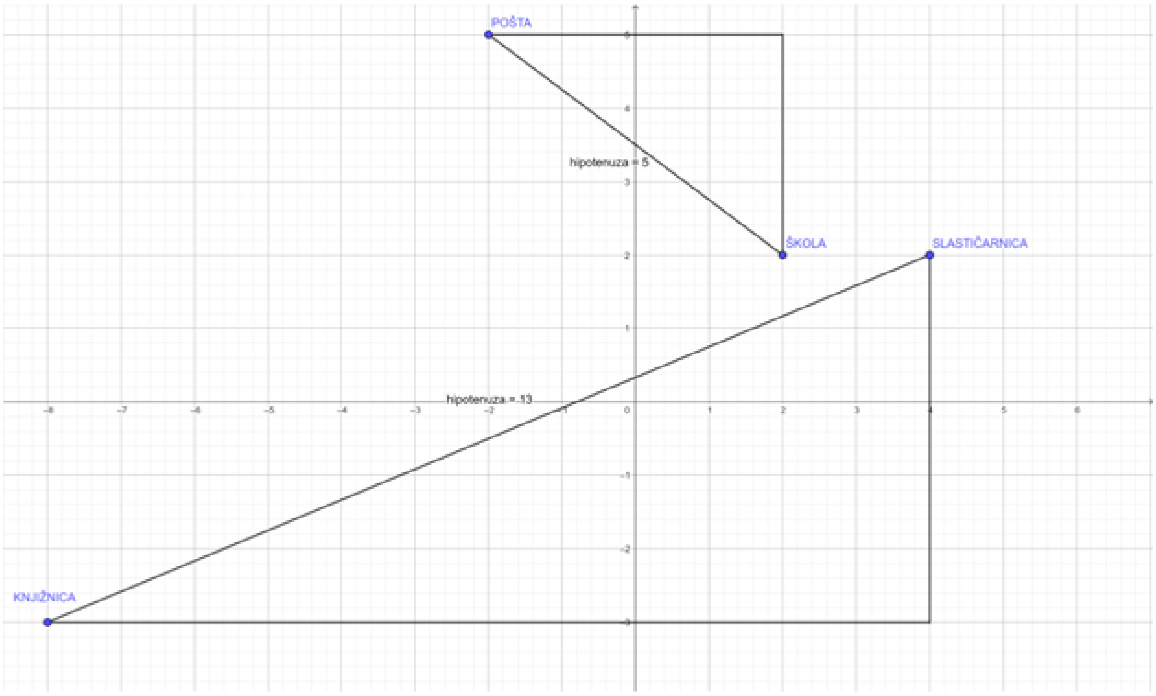
Primjena taxicab geometrije u osnovnoj školi

U ovom poglavlju slijedimo knjige [4] i [5] te kurikulum [9] U osnovnoj školi neke teme iz taxicab geometrije možemo uvesti u okviru redovne ili dodatne nastave matematike u osmom razredu. Iz gradiva sedmoga razreda obradit ćemo teme: koordinatni sustav, kružnica i krug, iz gradiva osmoga razreda: Pitagorin poučak, točke pravci i ravnine u prostoru. Učenici u osnovnoj školi nisu na razini na kojoj mogu ići u dubinu tematike taxicab geometrije, prikladno je samo obraditi osnove. Fokus bi trebao biti na praktičnoj primjeni i osnovnoj razlici u odnosu na euklidsku geometriju.
Za ovu nastavnu tematiku potrebno je usvojeno i primijenjeno znanje Pitagorina poučka, kružnice i kruga i kvadrata. Prema kurikulumu za matematiku, Pitagorin poučak obrađuje se u 8. razredu osnovne škole, a kružnica, krug i mnogokuti u 7. razredu.

6.1 Uvod

Nastavnik na početku sata razgovara s učenicima. Pita ih kako putuju do škole. Kaže im da zamisle da u nekom gradu moraju otputovati od škole do pošte. Pita ih hoće li mjeriti duljinu puta kao da idu helikopterom do tamo ili kao da putuju autom.

Primjer 6.1.1. *Škola i pošta. Nastavnik na ploču nacrta jednostavan model grada, to jest koordinatni sustav. Nacrtane su dvije točke označene sa ŠKOLA i POŠTA.*



Slika 6.1: Škola i pošta, slastičarnica i knjižnica

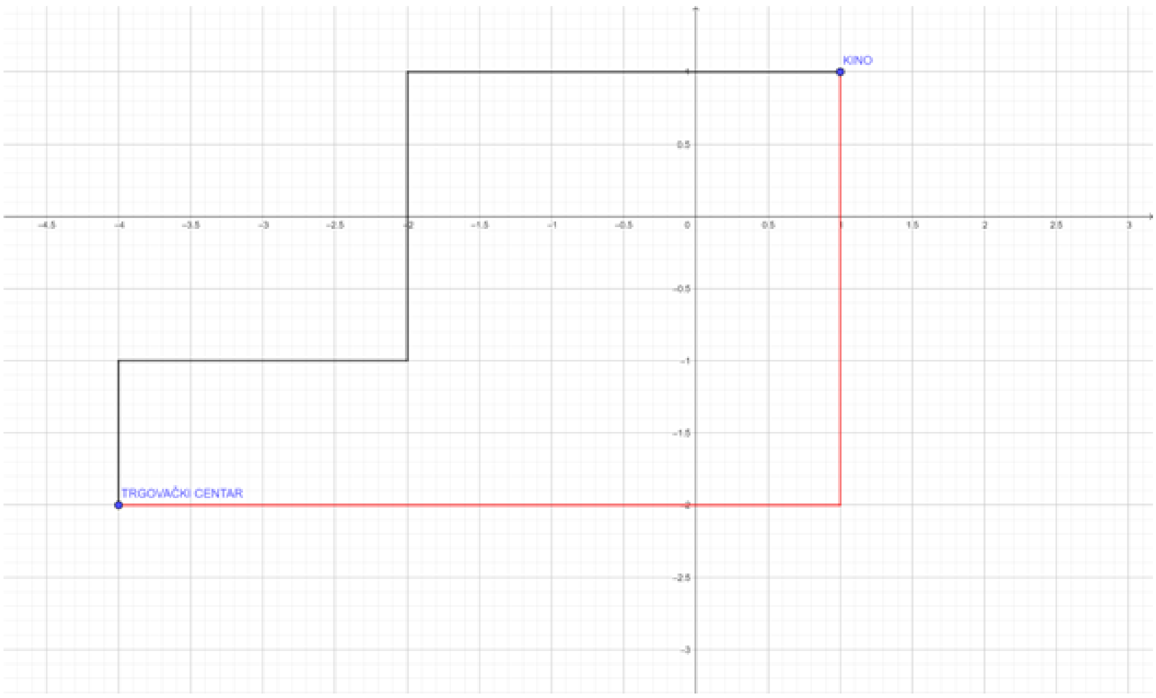
Pretpostavimo da udaljenost 1 u ovom koordinatnom sustavu predstavlja jedan kilometar. Nastavnik pita učenike koliko ćemo kilometara proći na putu od škole do pošte. Treba proći 7 kilometara. Nastavnik također pita učenike bi li brže došli do pošte kad bi mogli ignorirati zgrade na putu. Nastavnik na ploču nacrta puteve od škole do pošte sa slike 6.1, pita kakav je to trokut na slici i traži od njih da koriste Pitagorin poučak za računanje te udaljenosti. Zatim ih pita da usporede duljine puta po hipotenuzi trokuta i puta po katetama. Učenici koriste Pitagorin poučak.

$$d_E(\check{S}KOLA,\ POSTA) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Učenici zaključuju da je takva udaljenost manja od udaljenosti u slučaju kada ne možemo ignorirati zgrade na putu.

Primjer 6.1.2. *Slastičarnica i knjižnica.*
Nastavnik zatim daje još jedan primjer, udaljenost između slastičarnice i knjižnice. Na ploču nacrta točke koje označi sa SLASTIČARNICA I KNJIŽNICA 6.1. Analogno se rješava primjer u kojem učenici ponovno zaključuju da je zračna udaljenost kraća. Nastavnik zatim objašnjava da zračnu udaljenost nazivamo euklidska udaljenost, a udaljenost

koju dobijemo prilikom kretanja po ulicama grada nazivamo taxicab udaljenost. Potrebno je još da nastavnik ukaže učenicima da taxicab udaljenost se ne mora samo mjeriti po zbroju duljina krakova pravokutnog trokuta. Daje primjer udaljenosti između trgovačkog centra i kina.



Slika 6.2: Trgovački centar i kino

Primjer 6.1.3. *Trgovački centar i kino.*
Nastavnik nacrta sliku 6.2 na ploču. Zatim pita učenike da izmjere duljinu puta f *i puta* g. *Učenici izmjere da su obje duljine* 8. *Nastavnik prozove učenika na ploču i traži od učenika da nacrta još jedan put. Učenici će uvidjeti da je taj put jednake duljine kao i ostali. Nastavnik pazi da učenik pravilno nacrta put.*

Nastavnik koristi: metodu dijaloga, problemsku metodu, heurističku metodu, metodu rada na tekstu. Primjerima 6.1.1, 6.1.2. i 6.1.3. ostvaruju se sljedeći odgojno obrazovni ishodi: učenik primjenjuje Pitagorin poučak za računanje nepoznatih elemenata pravokutnog trokuta, potiče se logičko razmišljanje i sposobnost analize problema, primjenjuje matematička rješenja u različitim situacijama.
Razrada ishoda: U primjerima 6.1.1. i 6.1.2. učenik primjenjuje Pitagorin poučak na pravokutne trokute. U svim primjerima potiče se logičko razmišljanje učenika i sposobnost

analize problema. U primjeru 6.1.3. učenik će raditi sam čime se dodatno potiče logičko razmišljanje i sposobnost analize problema. Također, u primjeru 6.1.3. učenik primjenjuje matematička rješenja u novoj situaciji.

6.2 Aktivnost 1. Taxicab udaljenost

Nastavnik podijeli nastavni listić 1. Učenici rješavaju zadatke.

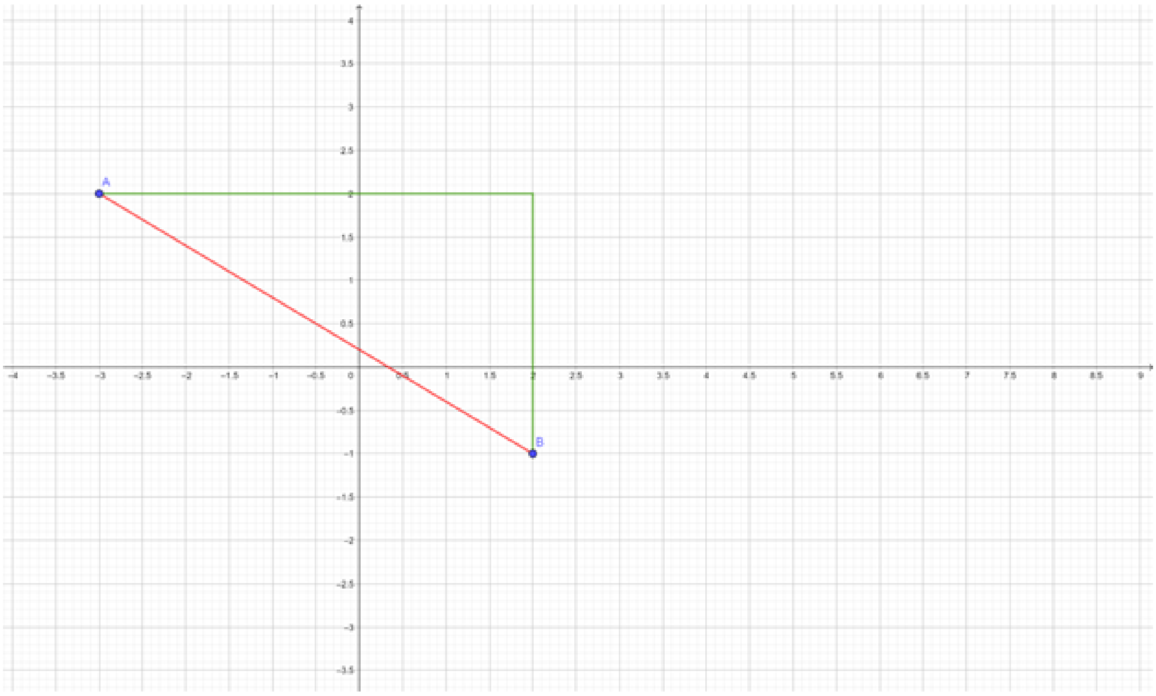
NASTAVNI LISTIĆ 1 – UDALJENOST U TAXICAB GEOMETRIJI
Zadane su točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.
ZADATAK 1.
Izračunajmo formulu za euklidsku (zračnu) udaljenost između točaka A i B.
ZADATAK 2.
Izračunajmo formulu za taxicab (cestovnu) udaljenost između točaka A i B.

Točke A i B označene su koordinatama (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Učenici moraju izračunati formulu za euklidsku udaljenost između točaka i formulu za taxicab udaljenost između tih točaka.
RJEŠENJE ZADATKA 1.
Rješenje se dobiva pomoću Pitagorina poučka. Nacrtat ćemo pravokutni trokut kao na slici 6.3. Intuitivno nam je jasno da je euklidska udaljenost između te dvije točke zapravo duljina dužine $|\overline{AB}|$. To je zapravo duljina hipotenuze tog pravokutnog trokuta. Kako ćemo dobiti taj pravokutni trokut? Na početku izračunamo razliku koordinata x između točaka A i B, to će biti duljina jednog kraka trokuta. Zatim, izračunamo razliku koordinata y između točaka A i B, to će biti duljina drugog kraka tog trokuta. Nacrtamo potom dužinu koja izlazi iz točke A tako da je paralelna s osi x i duljine je istovjetne razlici u koordinatama x između točaka A i B. Zatim, nacrtamo dužinu koja izlazi iz točke B tako da je paralelna s osi y i duljine je istovjetne razlici u koordinatama y između točaka A i B. Spojimo točke A i B. Dobili smo pravokutan trokut, s katetama koje su duljine istovjetne razlikama u koordinatama x odnosno y između točaka A i B.
Euklidska udaljenost između točaka A i B je hipotenuza tog trokuta. Koristimo Pitagorin poučak:

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.
Rješenje će biti zbroj kateta ovog pravokutnog trokuta na slici 6.3. Katete su duljina $|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|$. Koristimo apsolutnu vrijednost jer udaljenost ne može biti negativna.

$$d_T(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

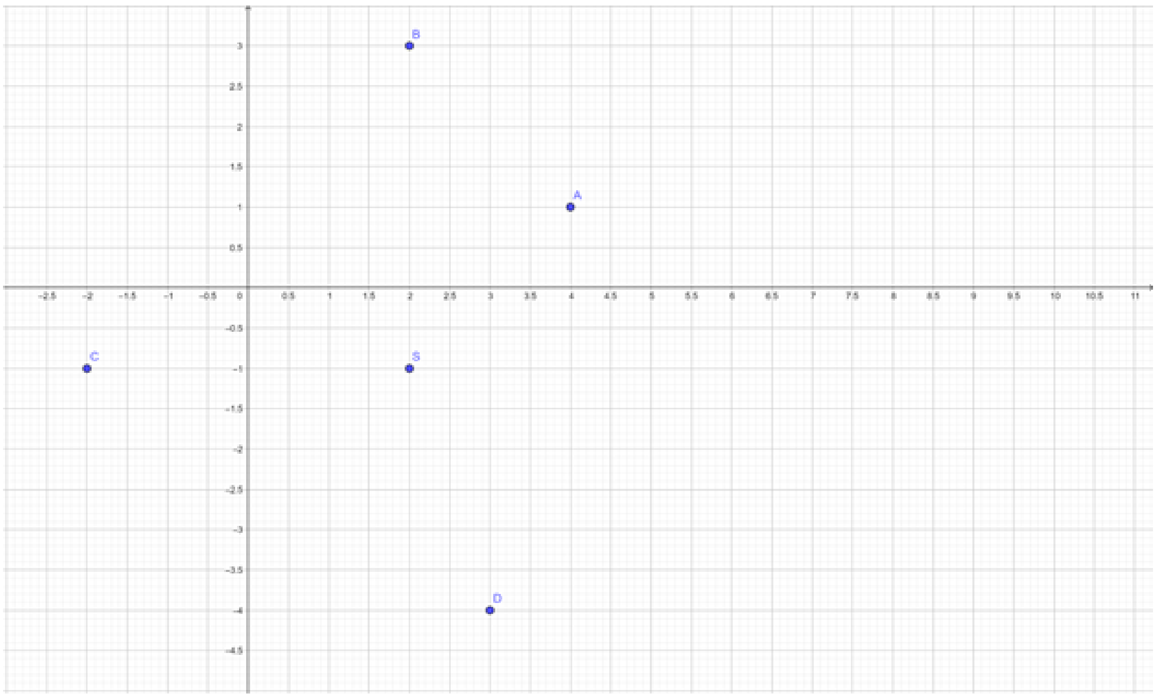


Slika 6.3: Pravokutni trokut

Katete su označene zelenom, a hipotenuza crvenom bojom.
U nastavi se koristi: metoda rada na tekstu, heuristička metoda, problemska metoda. Zadacima jedan i dva ostvaruju se sljedeći odgojno obrazovni ishodi: učenik primjenjuje Pitagorin poučak za računanje nepoznatih elemenata pravokutnog trokuta, prikazuje dužine i analizira njihove međusobne položaje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, učenik izvodi formulu za euklidsku i taxicab udaljenost, učenik računa s apsolutnim vrijednostima, potiče se logičko razmišljanje i sposobnost analize problema.
Razrada ishoda: Učenik primjenjuje Pitagorin poučak u 1. zadatku. U prvom i drugom zadatku učenik prikazuje dužine i analizira njihove međusobne položaje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. U 1. zadatku učenik izvodi formulu za euklidsku udaljenost, u 2. zadatku izvodi formulu za taxicab udaljenost. Također u 2. zadatku učenik računa s apsolutnim vrijednostima. U oba zadatka naglasak nije na tehnici računanja nego na logičkom razmišljanju i sposobnosti analize problema.

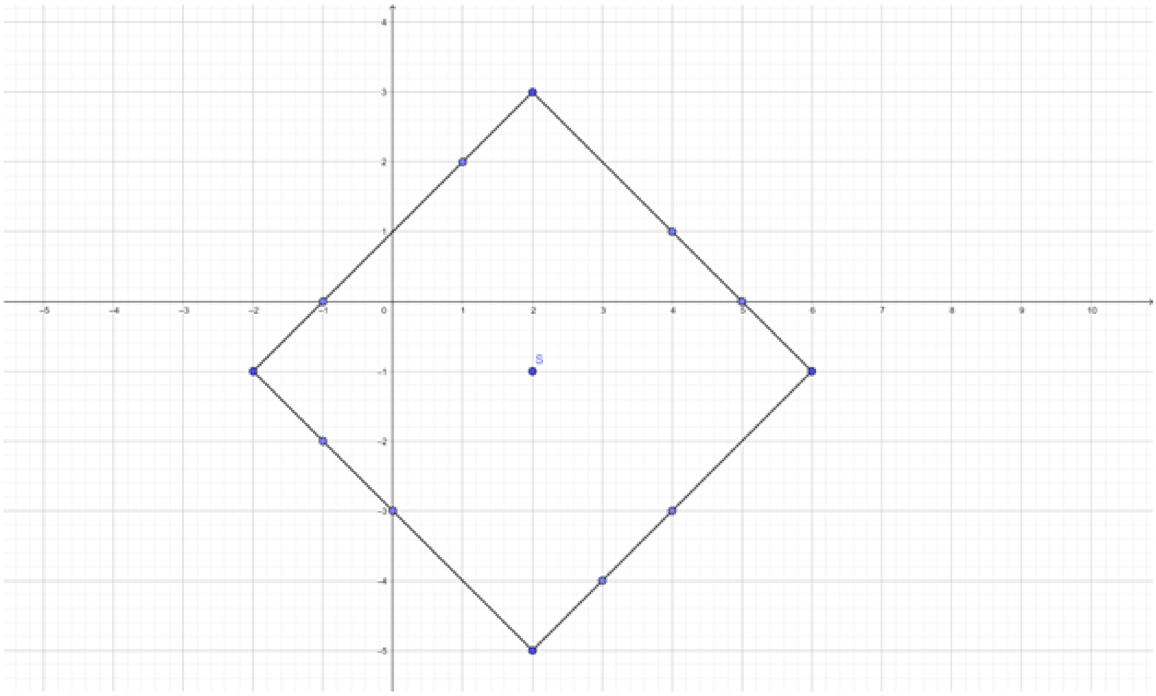
6.3 Aktivnost 2. Taxicab kružnica

Nastavnik prvo pita učenike kako definiramo kružnicu. Učenici odgovaraju da je kružnica skup svih točaka koje su jednako udaljene od zadane točke koju zovemo središte.
Nastavnik zatim pita učenike koja je razlika između kruga i kružnice. Napominje da je krug geometrijski lik.
Zatim daje primjer na ploči. U koordinatnom sustavu nam je zadano središte i nekoliko točaka.



Slika 6.4: Udaljenost točaka od središta

Primjer 6.3.1. *Udaljenost točaka od središta.*
Nastavnik na ploču nacrta središte $S(2,-1)$ *i točke* $A(4,1), B(2,3), C(-2,-1), D(3,-4)$.
Traži od učenika da to nacrtaju u bilježnicu.
Nastavnik pita učenike kolika je udaljenost u taxicab geometriji od središta do svake točke.
Učenici odgovaraju da je udaljenost u svakom od slučajeva jednaka 4.
Nastavnik tada pita učenike da definiraju radijus kružnice. Nakon odgovora, traži od učenika da nađu još nekoliko točaka koje su od središta S *udaljene za* 4. *Nastavnik traži od učenika da mu daju* 12 *točaka koje su od središta udaljene za* 4. *Potom nacrta na ploči ovaj geometrijski lik sa slike 6.5.*

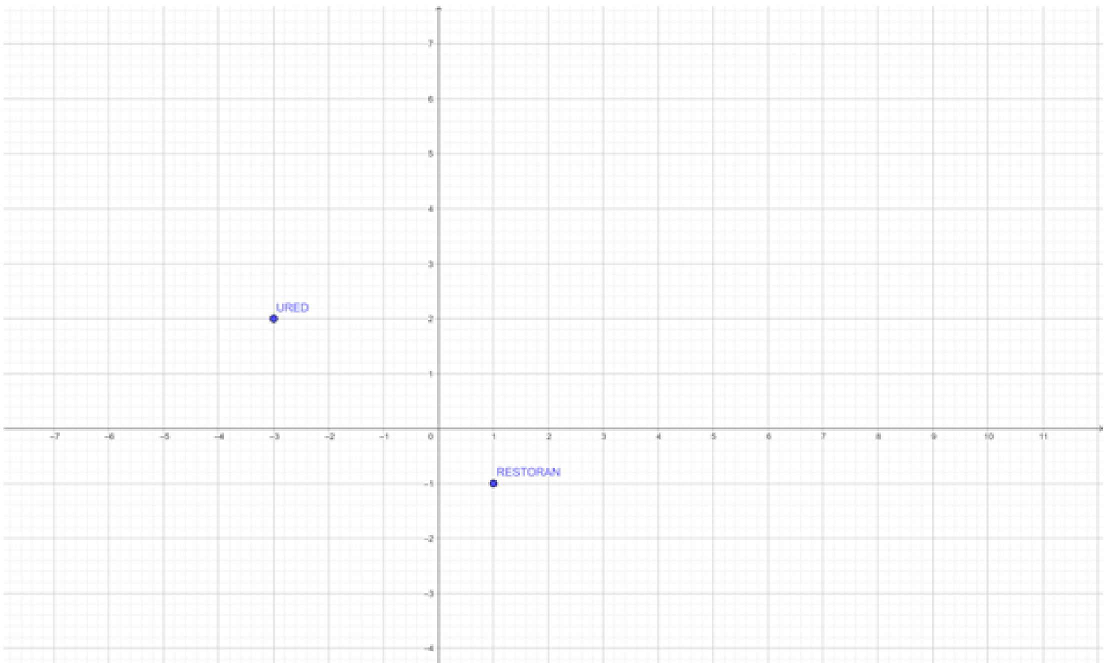


Slika 6.5: Kružnica u taxicab geometriji

Nastavnik pita koji je to zapravo lik. Odgovor je kvadrat (neki učenici će možda reći romb). Pritom nastavnik upozorava da gledamo samo rubove kvadrata. Također, nastavnik spominje da se ovaj skup točaka u taxicab geometriji zove kružnica. Ističe da je takav drugačiji izgled kružnice posljedica drugačijeg računanja udaljenosti i još jednom od učenika traži definiciju kružnice. Nastavnik pita učenike da dođu na ploču i nacrtaju radijus ove kružnice.

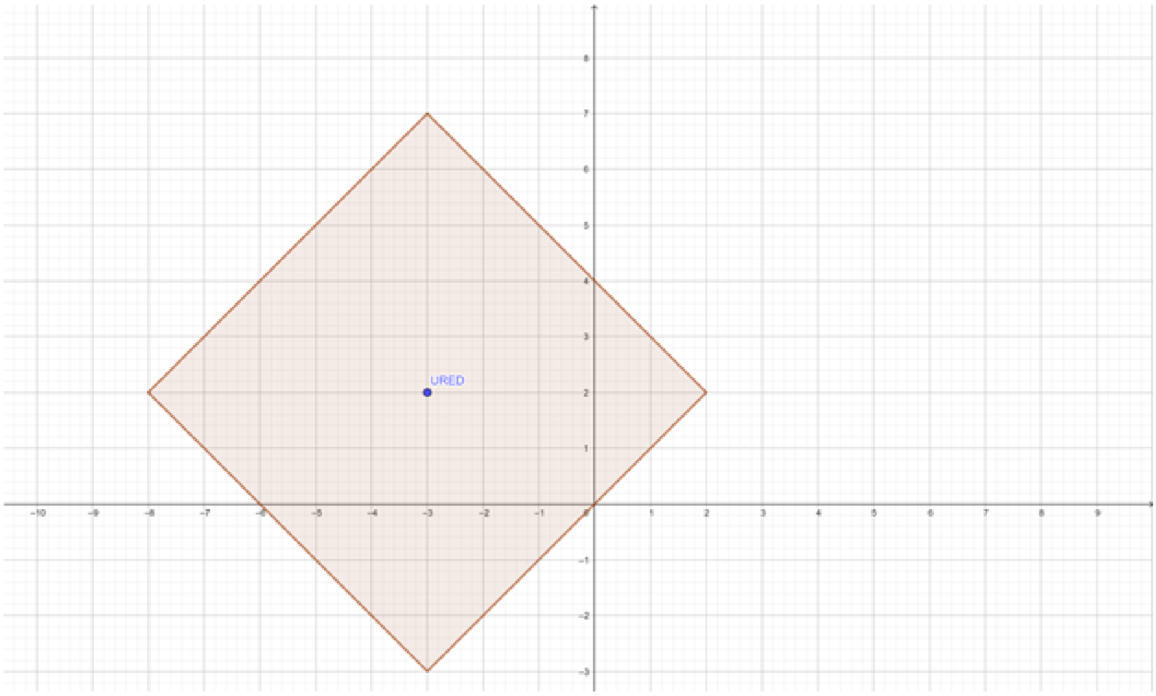
Nastavnik zatim dijeli nastavni listić 2.

NASTAVNI LISTIĆ 2 – TAXICAB KRUŽNICA
ZADATAK 1. Marko radi u uredu, u zgradi koja je označena na slici. Želi kupiti stan koji neće biti udaljen više od 5 kilometara od njegovog radnog mjesta. U koordinatnom sustavu, udaljenost u taxicab geometriji od 1 jednaka je 1 kilometar. Označi gdje Marko može sve kupiti stan.
ZADATAK 2. Marko želi kupiti stan koji nije udaljen više od 5 kilometara od njegovog ureda. Uz to želi da taj stan ne bude udaljen više od 3 kilometra od njegovog najdražeg restorana. Označi gdje Marko može sve kupiti stan.



Slika 6.6: Ured i restoran

RJEŠENJE ZADATKA 1.
Zbog toga što stan mora biti za 5 kilometara ili manje udaljen od Markova ureda, to znači da zapravo tražimo krug sa središtem u točki URED i radijusom 5.

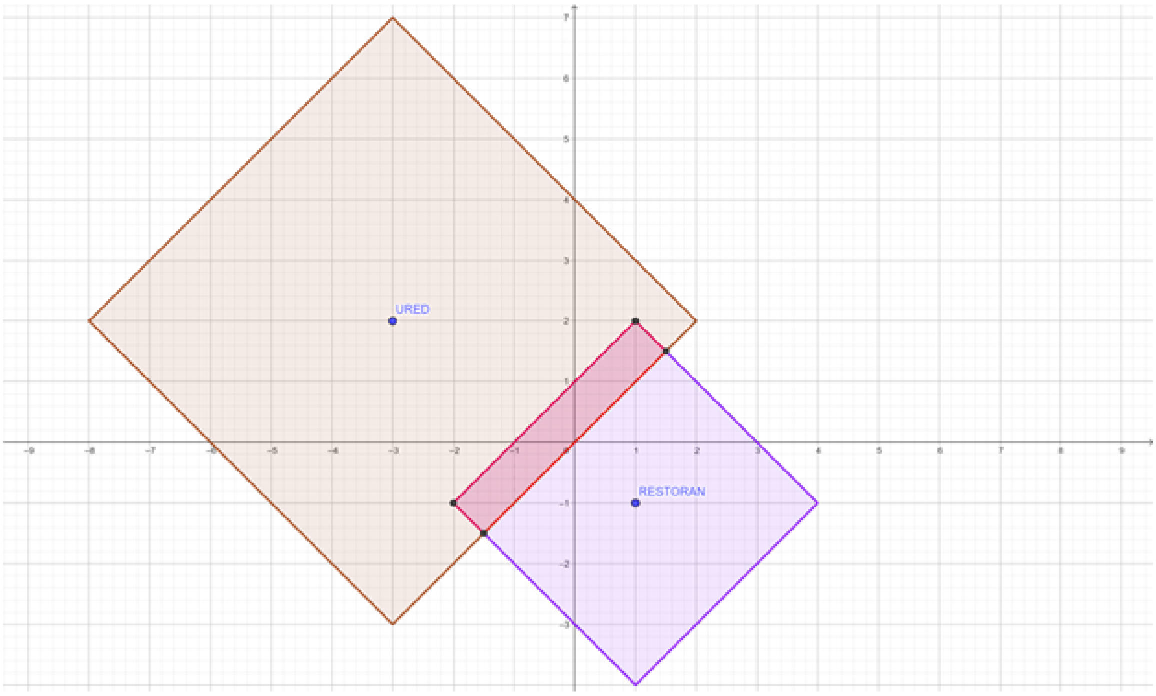


Slika 6.7: Ured i moguće pozicije stana u zadatku 1

Stan može biti na svakoj točki u ovom kvadratu. Nastavnik napominje da u ovom zadatku tražimo krug, a ne kružnicu jer je udaljenost u taxicab geometriji manja ili jednaka 5, a ne samo jednaka 5.

RJEŠENJE ZADATKA 2.

Ovdje tražimo presjek taxicab kruga sa središtem u točki URED i radijusom 5 i taxicab kruga sa središtem u točki RESTORAN i radijusom 3. Rješenje je ružičasti pravokutnik na slici 6.8.



Slika 6.8: Ured, restoran i moguće pozicije stana u zadatku 2

U nastavi se koristi: metoda dijaloga, metoda rada na tekstu, heuristička metoda, metoda analize i sinteze, problemska metoda.
Primjerom 6.3.1. i zadacima jedan i dva ostvaruju se sljedeći odgojno obrazovni ishodi: učenik definira kružnicu i krug, crta točke u koordinatnom sustavu, mjeri udaljenost između dvije točke, definira radijus kružnice, primjenjuje definicije u taxicab geometriji, uočava razlike izgleda kruga i kružnice u euklidskoj i taxicab geometriji, rješava problemski zadatak.

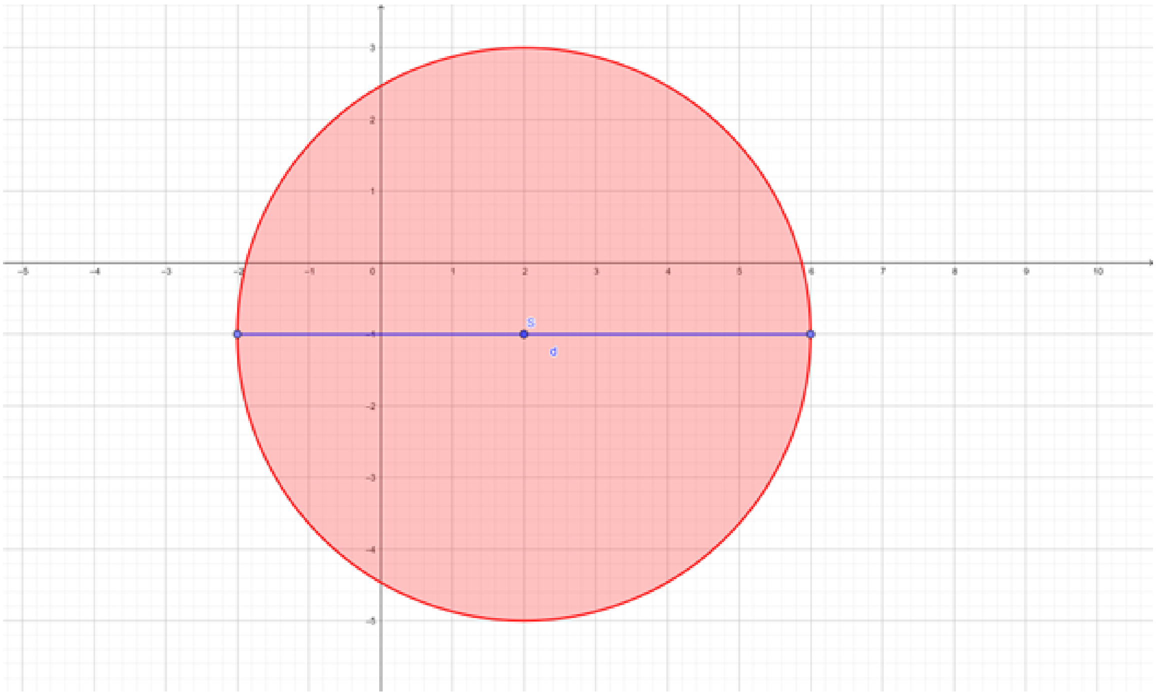
Razrada ishoda: Na početku aktivnosti učenik definira kružnicu i krug te analizira razliku između njih. Učenici crtaju točke u koordinatnom sustavu u sklopu primjera 6.3.1. Nakon toga definiraju radijus kružnice jer im je to potrebno za rješavanje primjera. Učenici prepoznaju da je udaljenost svih navedenih točaka do središta jednaka u taxicab geometriji, time mjere udaljenost između dvije točke. Primjenom definicije radijusa u taxicab geometriji učenici dolaze do izgleda kružnice u taxicab geometriji. Učenici uočavaju razlike između izgleda kružnice u euklidskoj i taxicab geometriji u razgovoru s nastavnikom. Rješavanjem problemskih zadataka na nastavnom listiću 2 učenici primjenjuju usvojeno znanje o kružnici u taxicab geometriji kako bi riješili problem iz stvarnog života. Time se potiče logičko zaključivanje i kreativnost.

6.4 Aktivnost 3. Formula za opseg taxicab kruga

Nastavnik počinje s uvodom u sadržaj, podsjećajući učenike na formulu za opseg kruga u euklidskoj geometriji koju su učili u sedmom razredu osnovne škole. Formula glasi:

$$O = 2r\pi,$$

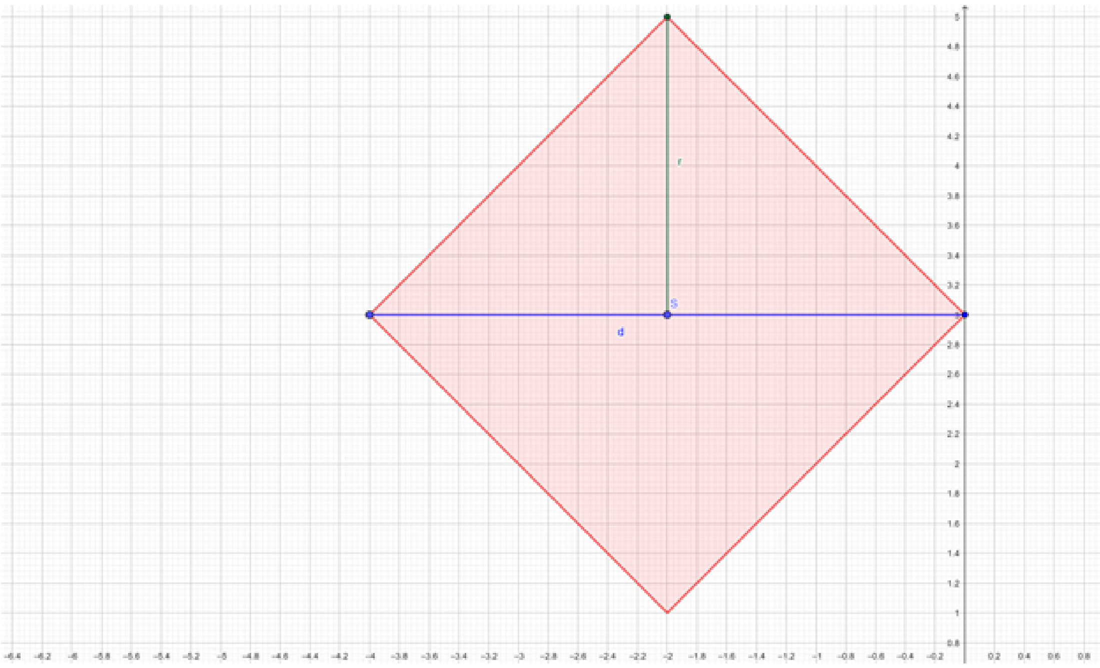
gdje je r radijus (polumjer) kruga.
Nastavnik zatim pita što je broj π. Kao što je naučeno u sedmome razredu, broj π definiramo kao $\pi = \frac{O}{d}, d = 2r$.
Slovom d označavamo dijametar kruga, odnosno dvostruki polumjer. Nastavnik zatim na ploču nacrta krug i njegov dijametar i traži da učenici u bilježnicu nacrtaju krug u euklidskoj geometriji sa središtem $S(2, -1)$ i dijametrom 8.



Slika 6.9: Ured, restoran i moguće pozicije stana u zadatku 2

Krug je na slici 6.9 označen crvenom bojom, a dijametar plavom.
Nastavnik zatim dijeli nastavni listić 3.

NASTAVNI LISTIĆ 3 – OPSEG KRUGA U TAXICAB GEOMETRIJI ZADATAK. Nacrtan je krug u taxicab geometriji. Odredite opseg kruga. Odredite formulu za opseg kruga u taxicab geometriji.



Slika 6.10: Krug i dijametar u taxicab geometriji

Također odredite omjer opsega i dijametra u taxicab geometriji. Imamo formulu:

$$K = \frac{O}{d},$$

gdje je K omjer opsega i dijametra taxicab kruga. Pogledajte dobro što je opseg ovoga kruga i što je dijametar.

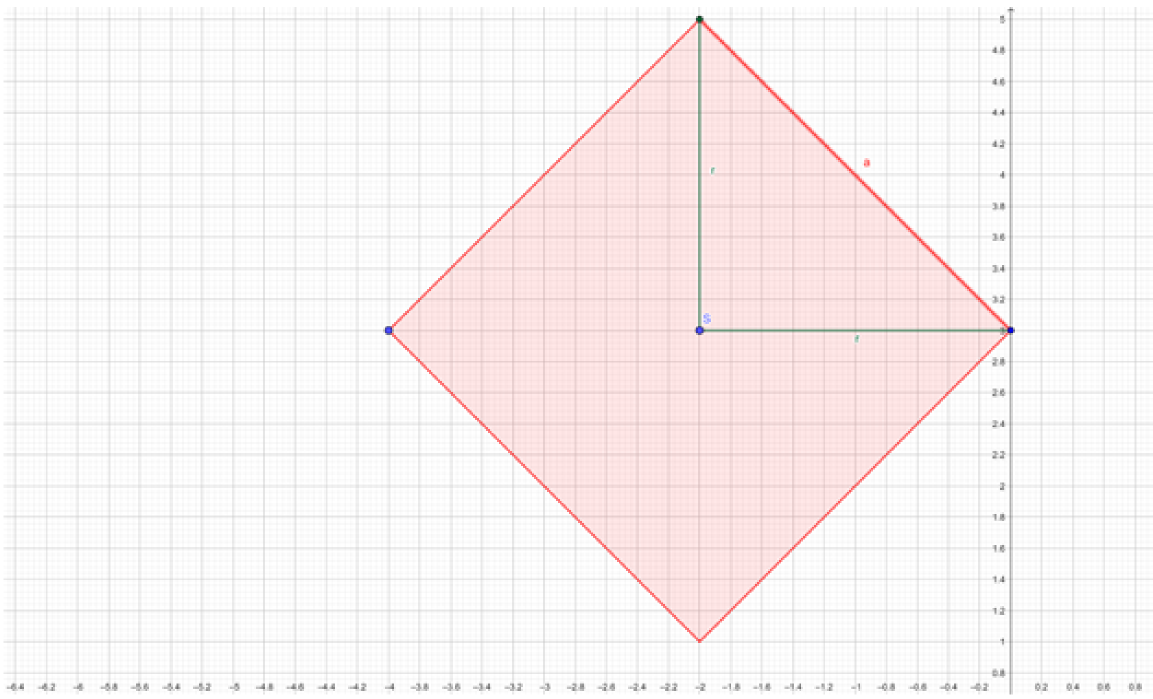
RJEŠENJE.
Nastavnik pita učenike koji je ovo zapravo geometrijski lik u euklidskoj geometriji i koji mu je opseg. Nastavnik napominje učenicima da oni zapravo promatraju opseg kvadrata. Pita učenike kako se računa opseg kvadrata. Zatim, nastavnik pita učenike kako bi izračunali duljinu stranice kvadrata. Duljinu stranice računamo kao udaljenost između njenih

krajnjih točaka. Nastavnik zatim pita kako računamo udaljenost točaka u taxicab geometriji. Učenici odgovaraju formulom

$$d_T(A,B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Ukoliko učenici i dalje ne mogu rješiti zadatak, nastavnik im preporučuje da usporede jednu stranicu kvadrata duljine a sa radijusom r. U taxicab geometriji, duljina jedne stranice kvadrata jednaka je dvostrukom radijusu. Na slici 6.11 vidimo da je duljina stranice a jednaka taxicab udaljenosti točaka $(-2,5)$ i $(0,3)$. Mogli smo uzeti i neki drugi par točaka. Taxicab udaljenost te dvije točke jednaka je 4, što je dvostruko veće od radijusa. Zbog toga vrijedi

$$a = 2r.$$



Slika 6.11: Usporedba radijusa kruga i duljine stranica kvadrata

Zbog toga vrijedi i

$$O = 4a = 8r.$$

pa vrijedi

$$K = \frac{O}{d} = \frac{8r}{2r} = 4.$$

Dakle, u taxicab geometriji omjer opsega i dijametra jednak je broju 4, stoga se razlikuje od omjera opsega i dijametra u euklidskoj geometriji gdje iznosi $\pi \approx 3.14$.
U nastavi se koristi: metoda rada na tekstu, heuristička metoda, problemska metoda, metoda dijaloga, metoda analize i sinteze.
Odgojno obrazovni ishodi: učenik iskazuje formulu za opseg kruga u euklidskoj geometriji, definira dijametar kruga, definira broj π , crta krug s poznatim koordinatama središta i s poznatim dijametrom, primjenjuje definiciju kruga i dijametra u taxicab geometriji, računa opseg kruga u taxicab geometriji, razvija formulu opsega kruga u taxicab geometriji, uočava vrijednost broja π u taxicab geometriji.
Razrada ishoda: Učenik na početku aktivnosti mora iskazati formulu za opseg kruga u euklidskoj geometriji i definira dijametar kruga jer je to potrebno za provođenje ostatka aktivnosti. Također prije rješavanja nastavnog listića 3 mora iskazati formulu za dobivanje vrijednosti broja π. Rješavajući nastavni listić 3, učenik mjeri opseg kruga u taxicab geometriji tako da izmjeri opseg kvadrata. Prilikom određivanja formule za opseg kruga, učenik mjeri dijametar kruga u zadatku iz listića. Učenik uspoređuje radijus kruga i duljinu stranice kvadrata čime dolazi do formule za opseg kruga u taxicab geometriji. Nakon toga učenik primjenjuje tu formulu kako bi izračunao omjer opsega i dijametra u taxicab geometriji.
Potiče se logičko razmišljanje i samostalno rješavanje problemskog zadatka, primjerice u određivanju formule za opseg kruga u taxicab geometriji.

Sažetak

Ukratko, cilj ovog rada je proučavanje taxicab geometrije odnosno, preciznije, analiziranje kako razni geometrijski pojmovi izgledaju u taxicab geometriji. Glavni fokus je na razlikama između euklidske i taxicab geometrije. Započinjemo uvođenjem taxicab udaljenosti i uspoređivanjem s euklidskom udaljenosti. Zatim, obrađujemo različite slučajeve simetrale dužine u taxicab geometriji. Pokazujemo i razliku kruga i kružnice u euklidskoj i taxicab geometriji. Nakon toga prelazimo na elipse, hiperbole i parabole u euklidskoj i taxicab geometriji te na opisanu i upisanu kružnicu trokuta u taxicab geometriji. Konačno, bavimo se problemom prezentacije koncepta taxicab geometrije u okviru osnovnoškolske nastave matematike.

Summary

In short, the goal of this thesis is to study taxicab geometry, i.e., to analyze how various geometric objects look in taxicab geometry. The main focus is on the differences between Euclidean and taxicab geometry. We start by introducing the taxicab distance and comparing it with the Euclidean distance. Next, we consider various cases of segment bisectors in taxicab geometry. We also show the differences between circles in Euclidean and taxicab geometry. Next, we shift to ellipses, hyperbolas and parabolas in Euclidean and taxicab geometry and to the incircle and circumcircle of a triangle. Finally, we deal with the problem of presenting the concept of taxicab geometry in elementary school mathematics.

Bibliografija

[1] S. Briggs, E. Kramer i J. Lenarz, *Exploring Mathematics*, (2010), `http://faculty.cord.edu/andersod/TextFall10.pdf`.

[2] B. Divjak, *Notes on Taxicab Geometry*, KoG **5** (2000), br. 5, 5–9.

[3] T. Ermis, O. Gelisgen i R. Kaya, *On Taxicab Incircle and Circumcircle of a Triangle*, KoG **16** (2012), br. 16, 3–12.

[4] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović i S. Varošanec, *Matematika 7, 2. dio*, Element, 2020.

[5] ______, *Matematika 8, 1. dio*, Element, 2021.

[6] J. Jackson, *Geometry 6.10 Taxicab triangles*, (2016), `https://www.youtube.com/watch?v=1SvxCg6cFEo&ab_channel=Dr.JackL.JacksonII`.

[7] E. F. Krause, *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications, 1975.

[8] K. L. Poore, *Taxicab Geometry*, (2006).

[9] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Okvirni godišnji izvedbeni kurikulumi za nastavnu godinu 2021. /2022.*, (2022), `https://mzo.gov.hr/vijesti/okvirni-godisnji-izvedbeni-kurikulumi-za-nastavnu-godinu-2021-2022/4522`.

[10] S. Štimac, *Metrički prostori*, PMF-MO, 2022, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~sonja/MetrickiProstori.pdf`.

Životopis

Rođen sam 8.1.1995. godine u Zagrebu. Pohađao sam Osnovnu školu Mladost, Osnovnu školu Dr. Ivan Merz, a u Zagrebu sam završio i Gimnaziju Tituša Brezovačkog. Godine 2014. upisao sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu na kojem sam završio preddiplomski studij Matematika; smjer: nastavnički. Godine 2019. upisao sam na istom fakultetu diplomski studij Matematika; smjer: nastavnički. Od 2021. godine radim kao nastavnik matematike u Školi za cestovni promet u Zagrebu.