Razdioba dugih ciklusa i velikih djelitelja

Antoliš, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Antoliš

RAZDIOBA DUGIH CIKLUSA I VELIKIH DJELITELJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Centralni objekt ovog rada je Poisson-Dirichletova razdioba koju je prvi uveo Kingman 1975. godine. Pokazuje se da su njezine primjene mnogobrojne u područjima kao što su populacijska genetika, kombinatorika, teorija brojeva, ekonomija, statistika i druge. U ovom radu uvest ćemo je kroz dva različita modela koja je proučavao Billingsley u svojoj knjizi Convergence of Probability Measures iz 1968. i kasnijem izdanju iz 1999. godine.

Prvi model bazira se na proučavanju nasumičnih permutacija fiksne duljine, koje dolaze iz uniformne distribucije te na njihovom rastavu na cikluse. Zanimat će nas asimptotska svojstva duljina ciklusa normiranih s duljinom permutacije koja će se posebno važnima pokazati u slučaju nekoliko najduljih ciklusa.

Drugi model koji ćemo proučavati dolazi iz teorije brojeva, konkretno promatrat ćemo rastav nasumično odabranog broja iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ na proste faktore. Pokazat ćemo da su asimptotska svojstva skaliranih vrijednosti najvećih prostih faktora, nakon logaritmiranja, ista onima u slučaju dugih ciklusa.

U poglavlju 1 definirat ćemo pojmove i dokazati alate nužne za razumijevanje nastavka rada. Budući da se u radu obrađuju rezultati iz više matematičkih područja u ovom se poglavlju povezuju pojmovi iz teorije brojeva, analize, teorije vjerojatnosti i teorije mjere.

U poglavlju 2 detaljno obrazlažemo i dokazujemo sve rezultate potrebne kako bi se objasnilo asimptotsko ponašanje slučajnih vektora iz dva spomenuta modela. Uvest ćemo prostor na kojem su promatrani objekti definirani i dokazati da oba modela konvergiraju prema istoj distribuciji.

U poglavlju 3 pomoću ranije pokazanih rezultata definirat ćemo centralni objekt ovog rada, Poisson-Dirichletovu razdiobu. Pokazat ćemo kako je povezana s Dirichletovom razdiobom te pomoću nje izvesti formulu za gustoću, marginalne gustoće i momente Poisson-Dirichletove razdiobe.

U poglavlju 4 vratit ćemo se originalnim motivacijskim primjerima te argumentirati i ilustrirati kako se dobiveni rezultati na njih odražavaju.

Svi rezultati bit će potkrijepljeni detaljnim objašnjenjima i primjerima. Za razumijevanje dokaza teorema u radu potrebno je predznanje iz područja teorije mjere i teorije vjerojatnosti.

Poglavlje 1

Pripremni rezultati

U ovom poglavlju definirat ćemo pojmove i navesti, a jednim dijelom i dokazati, njihova svojstva koja će se pokazati važnima u nastavku rada.

1.1 Funkcija Γ i njezine primjene

Definicija 1.1. Funkciju $\Gamma : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ definiramo pomoću nepravog Riemannovog integrala

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx. \tag{1.1}$$

Pokazuje se da je funkcija Γ dobro definirana te da joj se domena može i proširiti. Za okvire ovog rada ovakva definicija će biti dostatna.

Propozicija 1.2. Funkcija Γ zadovoljava sljedeće jednakosti

(i) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, za $t > 0$

(ii) $\Gamma(n+1) = n!$, za $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du$, za $x, y > 0$.

Dokaz. (i)

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x} dx = \left(-e^{-x} x^t\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty t x^{t-1} e^{-x} dx = t\Gamma(t)$$

(ii) Budući da je

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^\infty = 1 \tag{1.2}$$

koristeći (i) rekurzivno dobivamo $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \ldots = n!\Gamma(1) = n!$

(iii)

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \cdot \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds =$$

$$\iint_{t,s>0} t^{x-1}e^{-t}s^{y-1}e^{-s}dsdt = \left[f(u,v) = (t,s) = (uv, v(1-u)), \left\|\begin{bmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{bmatrix}\right\| = v\right]$$

$$\iint_{\substack{0<u<1 \\ 0<v}} u^{x-1}v^{x-1}e^{-uv}v^{y-1}(1-u)^{y-1}e^{-v(1-u)}v\,dudv =$$

$$\int_0^1\int_0^\infty u^{x-1}(1-u)^{y-1}v^{x+y-1}e^{-v}\,dv\,du = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du\int_0^\infty v^{x+y-1}e^{-v}dv =$$

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du \cdot \Gamma(x+y).$$

Dijeljenjem izraza s $\Gamma(x+y)$ slijedi tvrdnja propozicije.

□

Označimo s $B_k(x) \subset \mathbb{R}^k$ definiran na sljedeći način

$$B_k(x) := \left\{(t_1,\ldots,t_k) \in \mathbb{R}^k : t_1,\ldots,t_k > 0, \sum_{i=1}^k t_i < x\right\}.$$

Uz ovu definiciju vrijedi sljedeći teorem

Teorem 1.3. *Neka je dana funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i* $\alpha_1,\ldots\alpha_k > 0$*,* $k \in \mathbb{N}$*, tada vrijedi*

$$\int_{B_k(x)} f(t_1+\ldots+t_k)\,t_1^{\alpha_1-1}\ldots t_k^{\alpha_k-1}\,dt_1\ldots dt_k = \frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)}\int_0^x f(t)\,t^{\sum_{i=1}^k\alpha_i-1}dt. \tag{1.3}$$

Dokaz. Tvrdnju pokazujemo matematičkom indukcijom. Za $k = 1$ tvrdnja trivijalno slijedi. Za $k = 2$ vrijedi

$$\int\limits_{\substack{t_1,t_2>0\\ t_1+t_2<x}} f(t_1+t_2)\, t_1^{\alpha_1-1} t_2^{\alpha_2-1}\, dt_1 dt_2 = \left[f(s_1,s_2) = ((1-s_1)\, s_2, s_1 s_2),\, \left\| \begin{bmatrix} -s_2 & 1-s_1 \\ s_2 & s_1 \end{bmatrix} \right\| = -s_2 \right]$$

(Uočimo da uvjet $t_1 + t_2 < x$ povlači $s_2 = (1-s_1)\, s_2 + s_1 s_2 < x$.)

$$\int\limits_{\substack{0<s_1<1\\ 0<s_2<x}} f(s_2)\,(1-s_1)^{\alpha_1-1}\, s_2^{\alpha_1-1} s_1^{\alpha_2-1} s_2^{\alpha_2-1}\, |-s_2|\, ds_1 ds_2 =$$

$$\int_0^1 (1-s_1)^{\alpha_1-1}\, s_1^{\alpha_2-1} ds_1 \int_0^x f(s_2)\, s_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} ds_2 \overset{1.2}{=} \frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int_0^x f(t)\, t^{\alpha_1+\alpha_2-1} dt.$$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za svaki $k < n$ te pokažimo da vrijedi za n. Budući da su slučajevi $n = 1, 2$ već pokazani pretpostavimo da je $n > 2$. Označimo s $a = t_3 + \ldots t_n$ tada je

$$\int\limits_{B_n(x)} f(t_1+t_2+a)\, t_1^{\alpha_1-1} t_2^{\alpha_2-1} \ldots t_n^{\alpha_n-1} dt_1 dt_2 \ldots dt_n \overset{n-2>0}{=}$$

$$\int\limits_{B_{n-2}(x)} t_3^{\alpha_3-1} \ldots t_n^{\alpha_n-1} \int\limits_{\substack{t_1,t_2>0\\ t_1+t_2<x-a}} f(t_1+t_2+a)\, t_1^{\alpha_1-1} t_2^{\alpha_2-1} dt_1 dt_2\, dt_3 \ldots dt_n =$$

(Primjenimo li slučaj $k = 2$ uz $\tilde{x} = x - a$ i $\tilde{f}(t) = f(t+a)$.)

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int\limits_{B_{n-2}(x)} t_3^{\alpha_3-1} \ldots t_n^{\alpha_n-1} \int_0^{x-a} f(t+a)\, t^{\alpha_1+\alpha_2-1} dt\, dt_3 \ldots dt_n =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int\limits_{B_{n-1}(x)} f(t+t_3+\ldots t_n)\, t^{(\alpha_1+\alpha_2)-1} t_3^{\alpha_3-1} \ldots t_n^{\alpha_n-1} dt dt_3 \ldots dt_n \overset{\text{po pretpostavci indukcije}}{=}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_3)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma((\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)} \int_0^x f(t)\, t^{(\alpha_1+\alpha_2)+\sum_{i=3}^k \alpha_i - 1} dt =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)} \int_0^x f(t)\, t^{\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1} dt.$$

Po principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja teorema za svaki $k \in \mathbb{N}$. □

U radu ćemo češće koristiti sljedeći korolar.

Korolar 1.4. Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ i $k \in \mathbb{N}$, tada vrijedi

$$\int\limits_{B_k(x)} f(t_1 + \ldots + t_k)(t_1 \ldots t_k)^{\alpha_k - 1}\, dt_1 \ldots dt_k = \frac{\Gamma^k(\alpha)}{\Gamma(k\alpha)} \int\limits_0^x f(t)\, t^{k\alpha-1} dt.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi izravno iz (1.3) ako uzmemo $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \alpha > 0$. □

Može se pokazati da je funkaicja Γ definirana pomoću (1.1) analitička, što će se kasnije pokazati važnim. Uz nju vežemo i pojam *Euler-Mascheronove konstante* γ. Numeričkim metodama može se odrediti njezina približna vrijednost, odnosno pokazati da je $\gamma \approx 0.5772$, a za nas će biti važno njezino svojstvo koje daje vazu između funkcije Γ i konstante γ. Vrijedi

$$\gamma = -\Gamma'(1). \tag{1.4}$$

1.2 Neki pojmovi teorije vjerojatnosti

Definicija 1.5. Neka je $B : \langle 0, \infty\rangle \times \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, takva da vrijedi

$$B(x, y) = \int\limits_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du. \tag{1.5}$$

Za B kažemo da je *beta-funkcija*.

Definicija 1.6. Neka su $p > 0, q > 0$ fiksni. Neprekidna slučajna varijabla X ima *beta-distribuciju* s parametrima p i q ako joj je gustoća f dana sa

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \le 0 \text{ ili } x \ge 1. \end{cases}$$

Iz (1.5) se lako vidi da je f zaista vjerojatnosna funkcija gustoće, a ako uvažimo i formulu iz propozicije 1.2 slijedi alternativna formula

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \le 0 \text{ ili } x \ge 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Promotrimo kako izgleda beta-distribucija u posebnom slučaju $p = q = 1$. Budući da je po propoziciji 1.2 $\Gamma(n+1) = n!$ iz (1.6) slijedi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 \cdot 1}{(2-1)!} x^{1-1} (1-x)^{1-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ ili } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ ili } x \geq 1. \end{cases}$$

Iz ovoga zaključujemo da je beta-distribucija s parametrima $p = q = 1$ zapravo uniformna distribucija na $\langle 0, 1 \rangle$. Više informacija, odnosno svojstava beta-distribucije može se naći u Sarapa [4].

Okrenimo se sada rezultatima ključnima za daljnji nastavak rada koji govore o graničnim svojstvima slučajnih varijabli.

Definicija 1.7. Reći ćemo da niz slučajnih varijabli ili vektora $\{X_n\}$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli, odnosno vektoru X i pišemo $X_r \Rightarrow X$ ako za svaku neprekidnu, ograničenu funkciju f vrijedi

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X_n)] \text{ kada } n \to \infty.$$

Detaljna svojstva i motivacija za ovakvu definiciju mogu se naći u Billingsley [1]. Sljedeći teorem daje nam nekoliko alternativnih definicija koje će se u kasnijim poglavljima pokazati korisnima.

Teorem 1.8. *Za $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}$ sljedećih pet uvjeta su ekvivalentni*

(i) $X_n \Rightarrow X$.

(ii) $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X_n)]$ *kada $n \to \infty$ za sve ograničene, neprekidne funkcije f.*

(iii) $\limsup_n \mathbb{P}[X_n \in F] \leq \mathbb{P}[X \in F]$ *za svaki zatvoreni skup F.*

(iv) $\liminf_n \mathbb{P}[X_n \in U] \geq \mathbb{P}[X \in U]$ *za svaki otvoreni skup U.*

(v) $\mathbb{P}[X_n \in A] \to \mathbb{P}[X \in A]$ *za svaki skup A takav da je $\mathbb{P}[X \in \partial A] = 0$.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Vrijedi izravno po definiciji.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka je $F \subset \mathbb{R}^r$ zatvoren skup i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, tada je $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(1 - \frac{d(x, F)}{\varepsilon}\right)^+,$$

gdje d označava metriku na $\mathbb{R}^r$, a $x^+ = x\mathbb{1}_{x>0}$.

Budući da je $d(x,F) \geq 0$ za svaki x slijedi da je $0 \leq f \leq 1$. Budući da je f kompozicija neprekidnih funkcija i sama je neprekidna. Također ukoliko s označimo $F^{\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^r : d(x,F) \geq \varepsilon\}$ vrijedi

$$\mathbb{1}_F(x) \leq f(x) \leq \mathbb{1}_{F^{\varepsilon}}(x). \tag{1.7}$$

Zaista, ukoliko je $x \in F$ tada je $d(x,F) = 0$ pa je $f(x) = 1 \geq \mathbb{1}_F(x)$, za $x \notin F$ je $\mathbb{1}_F(x) = 0$, a kako je $f \geq 0$ nejednakost trivijalno slijedi. Za $x \notin F^{\varepsilon}$ je $\frac{d(x,F)}{\varepsilon} > \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$ pa je $f(x) = 0 \leq \mathbb{1}_F^{\varepsilon}(x)$, a za $x \in F^{\varepsilon}$ je $\mathbb{1}_{F^{\varepsilon}}(x) = 1$, a kako je $f \leq 1$ nejednakost trivijalno slijedi.

Iz (1.7) slijedi

$$\begin{aligned}&\limsup_n \mathbb{P}[X_n \in F] = \limsup_n \mathbb{E}[\mathbb{1}_F(X_n)] \leq \limsup_n \mathbb{E}[f(X_n)] \overset{(ii)}{=} \\ &\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{F^{\varepsilon}}(X)] = \mathbb{P}[X \in F^{\varepsilon}].\end{aligned}$$

Budući da je F zatvoren puštanjem $\varepsilon \searrow 0$ zbog neprekidnosti vjerojatnosti s obzirom na padajući niz događaja slijedi (*iii*).
(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*) Budući da je U otvoren slijedi da je U^c zatvoren pa imamo

$$\liminf_n \mathbb{P}[X_n \in U] = 1 - \limsup_n \mathbb{P}[X_n \in U^c] \overset{(iii)}{\geq} 1 - \mathbb{P}[X \in U^c] = \mathbb{P}[X \in U].$$

(*iii*) i (*iv*) $\Rightarrow$ (*v*) Označimo s $\mathrm{Int}(A)$ interior skupa A i s $\mathrm{Cl}(A)$ zatvarač skupa A. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[X \in A] \leq \mathbb{P}[X \in \mathrm{Int}(A)] + \mathbb{P}[X \in \partial A] = \mathbb{P}[X \in \mathrm{Int}(A)] \overset{(iv)}{\leq} \liminf_n \mathbb{P}[X_n \in \mathrm{Int}(A)] \leq \\ &\limsup_n \mathbb{P}[X_n \in \mathrm{Cl}(A)] \overset{(iii)}{\leq} \mathbb{P}[X \in \mathrm{Cl}(A)] \leq \mathbb{P}[X \in A] + \mathbb{P}[X \in \partial A] = \mathbb{P}[X \in A],\end{aligned}$$

iz čega slijedi (*v*).
(*v*) $\Rightarrow$ (*i*) Neka je $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ ograničena i neprekidna funkcija, pa postoje konstante $a < b \in \mathbb{R}$ takve da je $a \leq f(x) \leq b$ za svaki $x \in \mathbb{R}^r$. Tada za funkciju

$$g(x) := \frac{f(x) - a}{b - a}$$

vrijedi $0 \leq g(x) \leq 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}^r$. Zato je

$$\mathbb{E}[f(X)] = (b-a)\mathbb{E}[g(X)] + a = (b-a)\int_0^1 x dF_{g(X)} + a = (b-a)\int_0^1 \int_0^x dt\, dF_{g(X)} + a =$$

$$(b-a)\int_0^1\int_t^1 dF_{g(X)}\,dt + a = (b-a)\int_0^1 \mathbb{P}\left[g(X)\leq 1\right] - \mathbb{P}\left[g(X)\leq t\right]dt + a =$$

$$(b-a)\int_0^1 \mathbb{P}\left[g(X) > t\right]dt + a = (b-a)\int_0^1 \mathbb{P}\left[X \in g^{-1}\left(\langle t,\infty\rangle\right)\right]dt + a,$$

gdje je $F_{g(X)}$ funkcija distribucije od $g(X)$. Analogan račun vrijedi i za X_n.

Budući da je $X \in \partial g^{-1}(\langle t,\infty\rangle) \subset X \in g^{-1}(t)$ slijedi da je $\mathbb{P}\left[X \in \partial g^{-1}(\langle t,\infty\rangle)\right] \leq \mathbb{P}\left[X \in g^{-1}(t)\right]$ pa je $\mathbb{P}\left[X \in \partial g^{-1}(\langle t,\infty\rangle)\right] = 0$ za sve osim eventualno prebrojivo mnogo $t \in \langle 0,1\rangle$.

Budući da je $\mathbb{P}\left[X \in g^{-1}(\langle t,\infty\rangle)\right] \leq 1$, a $\int_0^1 1dt = 1 < \infty$ po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji i tvrdnji (v) za $A = g^{-1}(\langle t,\infty\rangle)$ slijedi

$$\mathbb{E}\left[f(X_n)\right] = (b-a)\int_0^1 \mathbb{P}\left[X_n \in g^{-1}\left(\langle t,\infty\rangle\right)\right]dt + a \overset{(v)}{\to}$$

$$(b-a)\int_0^1 \mathbb{P}\left[X \in g^{-1}\left(\langle t,\infty\rangle\right)\right]dt + a = \mathbb{E}\left[f(X)\right], \text{ kada } n\to\infty.$$

Ovime je pokazano da je svih pet uvjeta međusobno ekvivalentno. □

Sljedeća definicija zajedno s propozicijama koje je slijede a navodene su bez dokaza, koji se mogu naći u primjerima 2.3. i 2.4. u Billingsley[1], omogućuje nam da umjesto svih skupova A u (v) ponekad promatramo manju klasu.

Definicija 1.9. Reći ćemo da je klasa $\mathcal{A}$ određuje konvergenciju ako za svaki X i svaki niz $\{X_n\}$ konvergencija $\mathbb{P}[X_n \in A] \to \mathbb{P}[X \in A]$ za svaki skup $A \in \mathcal{A}$ takav da je $\mathbb{P}[X \in \partial A] = 0$ povlači $X_n \Rightarrow X$.

Propozicija 1.10. Klasa $\mathcal{A} := \left\{\prod_{i=1}^{r}\langle -\infty, x_i] : x_i, i = 1,2,\ldots,r\right\}$ u $\mathbb{R}^r$ određuje konvergenciju.

Propozicija 1.11. Klasa $\mathbb{R}^\infty_f := \left\{\pi_k^{-1}H : k \geq 1, H \in \mathbb{R}^k\right\}$ u $\mathbb{R}^\infty$ određuje konvergenciju. ($\pi_k : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^k$ je prirodna projekcija)

Sada smo u mogućnosti dati ekvivalentnu definiciju konvergencije po distribuciji.

Korolar 1.12. Neka su X_n i X slučajne varijable i F_{X_n}, F_X njihove funkcije distribucije. Tada $X_n \Rightarrow X$ ako i samo ako $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ za svaki $x \in D_{F_X}$, gdje je D_{F_X} skup prekida funkcije F_X. Odnosno

$$X_n \Rightarrow X \text{ ako i samo ako } X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X.$$

Dokaz. Neka $X_n \Rightarrow X$, tada po teoremu 1.8 $\mathbb{P}[X_n \in A] \to \mathbb{P}[X \in A]$ za svaki skup A takav da je $\mathbb{P}[X \in \partial A] = 0$. Neka je $x \in D_{F_X}$, tada je

$$\mathbb{P}[X \in \partial \langle -\infty, x]] = \mathbb{P}[X = x] = F_X(x) - F_X(x-) = 0.$$

Uz $A = \langle -\infty, x]$ dobivamo

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}[X_n \in \langle -\infty, x]] \to \mathbb{P}[X \in \langle -\infty, x]] = F_X(x),$$

odnosno $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

Pretpostavimo sada da $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Tada za $x \in D_{F_X}$, odnosno, po računu od ranije, za x takav da je $\mathbb{P}[X \in \partial \langle -\infty, x]] = 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}[X_n \in \langle -\infty, x]] = F_{X_n}(x) \to F_X(x) = \mathbb{P}[X \in \langle -\infty, x]].$$

Po propoziciji 1.10 za $r = 1$ slijedi $X_n \Rightarrow X$. □

Sljedeći teorem daje nam neke dovoljne uvjete za konvergenciju u slučaju kada promatrana klasa $\mathcal{A}$ ne određuje nužno konvergenciju. Dokaz se može naći u teoremu 2.5 u Billingsley [1], a prije iskaza navedimo još jednu definiciju.

Definicija 1.13. Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ zove se poluprsten (podskupova od X) ako:

$(S1)$ $\emptyset \in \mathcal{S}$.

$(S2)$ $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.

$(S3)$ $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists C_1, C - 2, \ldots, C_n \in \mathcal{S}$, međusobno disjunktni, takvi da je $A \setminus B = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$.

Teorem 1.14. *Neka je dan poluprsten $\mathcal{A}$ takav da je svaki otvoren skup unija prebrojivo mnogo skupova iz $\mathcal{A}$. Ako vrijedi $\mathbb{P}[X \in A] \leq \liminf_n \mathbb{P}[X_n \in A]$ za svaki $A \in \mathcal{A}$ tada $X_n \Rightarrow X$.*

Korolar 1.15. Ako vrijedi $\mathbb{P}[X \in A] \leq \liminf_n \mathbb{P}[X_n \in A]$ za svaki

$$A \in \left\{ \prod_{i=1}^{r} \langle a_i, b_i] : a_i < b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

tada $X_n \Rightarrow X$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi izravno iz prethodnog teorema jer je klasa

$$\mathcal{A} = \left\{ \prod_{i=1}^{r} \langle a_i, b_i] : a_i < b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

poluprsten, i svaki otvoreni interval se može prikazati kao prebrojiva unija poluotvorenih intervala, a svaki otvoren skup se može prikazati dao prebrojiva unija otvorenih intervala. □

Sljedeći teorem daje nam dovoljne uvjete za donošenje zaključaka o konvergenciji kompozicije.

Teorem 1.16. *Neka je h izmjeriva funkcija i D_h skup njezinih točaka prekida. Ako je $\mathbb{P}[X \in D_h] = 0$ i $X_n \Rightarrow X$ onda $h(X_n) \Rightarrow h(X)$.*

Dokaz. Neka je F zatvoren skup i $x \in \mathrm{Cl}\left(h^{-1}(F)\right)$. Tada postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $h(x_n) \in F$. Ako još dodatno zahtijevamo da je $x \in D_h^c$ to implicira da je $h(x) \in \mathrm{Cl}(F) = F$. Zato je $D_h^c \cap \mathrm{Cl}\left(h^{-1}(F)\right) \subset h^{-1}(F)$. Budući da je $\mathbb{P}[X \in D_h] = 0$ vrijedi $\mathbb{P}[X \in D_h^c] = 1$, iz čega slijedi

$$\limsup_n \mathbb{P}[h(X_n) \in F] = \limsup_n \mathbb{P}\left[X_n \in h^{-1}(F)\right] \leq \limsup_n \mathbb{P}\left[X_n \in \mathrm{Cl}\left(h^{-1}(F)\right)\right] \stackrel{Teorem 1.8}{\leq}$$
$$\mathbb{P}\left[X \in \mathrm{Cl}\left(h^{-1}(F)\right)\right] = \mathbb{P}\left[X \in D_h^c \cap \mathrm{Cl}\left(h^{-1}(F)\right)\right] \leq \mathbb{P}\left[X \in h^{-1}(F)\right] = \mathbb{P}[h(X) \in F].$$

Tvrdnja teorema sada slijedi iz teorema 1.8, odnosno $h(X_n) \Rightarrow h(X)$. □

Korolar 1.17. Ako $X_n \Rightarrow X$ onda je $\mathbb{E}|X| \leq \liminf_n \mathbb{E}|X_n|$.

Dokaz. Po teoremu 1.16 $|X_n| \Rightarrow |X|$, pa kao i ranije $\mathbb{P}[|X_n| > t] \to \mathbb{P}[|X| > t]$ za sve osim prebrojivo mnogo t, tvrdnja korolara slijedi po Fatouovoj lemi. □

Korolar 1.18. Ako vrijedi $\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|^{1+\varepsilon}\right] < \infty$ i $X_n \Rightarrow X$ onda $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

Dokaz. Po korolaru 1.17 X je integrabilna, a po teoremu 1.16 $X_n^+ \Rightarrow X^+$ i $X_n^- \Rightarrow X^-$. Za proizvoljni α vrijedi

$$\mathbb{E}\left[X_n^+\right] = \int\limits_{X_n^+<\alpha} X_n^+ d\mathbb{P} + \int\limits_{X_n^+\geq\alpha} X_n^+ d\mathbb{P} = \int\limits_0^\alpha x dF_{X_n^+} + \int\limits_{X_n^+\geq\alpha} X_n^+ d\mathbb{P} = \int\limits_0^\alpha \int\limits_0^x dt\, dF_{X_n^+} + \int\limits_{X_n^+\geq\alpha} X_n^+ d\mathbb{P} =$$

$$\int\limits_0^\alpha \int\limits_1^t dF_{X_n^+}\, dt + \int\limits_{X_n^+\geq\alpha} X_n^+ d\mathbb{P} = \int\limits_0^\alpha \mathbb{P}\left[t < X_n^+ < \alpha\right] dt + \int\limits_{X_n^+\geq\alpha} X_n^+ d\mathbb{P}$$ i analognim postupkom

$$\mathbb{E}\left[X^+\right] = \int\limits_0^\alpha \mathbb{P}\left[t < X^+ < \alpha\right] + \int\limits_{X^+\geq\alpha} X^+ d\mathbb{P}.$$

Budući da je $\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|^{1+\varepsilon}\right] < \infty$ za proizvoljni ε postoji dovoljno velik α da vrijedi

$$\int\limits_{X_n^+\geq\alpha} X_n^+ d\mathbb{P} = \int\limits_{X_n^+\geq\alpha} X_n^+ \left(\frac{X_n^+}{X_n^+}\right)^\varepsilon d\mathbb{P} \leq \frac{1}{\alpha^\varepsilon} \int\limits_{X_n^+\geq\alpha} \left(X_n^+\right)^{1+\varepsilon} \leq \frac{1}{\alpha^\varepsilon}\mathbb{E}\left[\left(X_n^+\right)^{1+\varepsilon}\right] \leq \frac{1}{\alpha^\varepsilon}\mathbb{E}\left[|X_n|^{1+\varepsilon}\right] < \varepsilon$$

i $\int_{X^+\geq\alpha} X_n^+ d\mathbb{P} \leq \varepsilon$. Budući da je $\mathbb{P}\left[t < X_n^+ < \alpha\right] \leq 1$, a $\int_0^\alpha 1dt < \infty$ po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji i teoremu 1.8 slijedi

$$\int\limits_0^\alpha \mathbb{P}\left[t < X_n^+ < \alpha\right] dt \to \int\limits_0^\alpha \mathbb{P}\left[t < X^+ < \alpha\right] dt.$$

Zbog argumenata vezano uz odabir parametra α sada zaključujemo da $\mathbb{E}\left[X_n^+\right] \to \mathbb{E}\left[X^+\right]$, a kako bi cijeli postupak analogno prošao i za X_n^-, odnosno X^- slijedi

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] = \mathbb{E}\left[X_n^+\right] - \mathbb{E}\left[X_n^-\right] \to \mathbb{E}\left[X^+\right] - \mathbb{E}\left[X^-\right] = \mathbb{E}\left[X\right].$$

□

Zaključno s ovim korolarom pokazali smo sve potrebne tvrdnje vezane uz konvergenciju slučajnih varijabli. Okrenimo se sada konstrukciji koja će igrati ključnu ulogu u dokazima mnogih teorema u nastavku rada.

Neka je $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ slučajni vektor za koji vrijedi $X_k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i $\sum_{k=1}^{\infty} X_k = 1$. Želimo definirati slučajni vektor $\hat{\mathbb{X}} = \left(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots\right)$ tako da zadovoljava

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\hat{X}_1 = X_i\right] = X_i \quad \text{za svaki } i \\
&\mathbb{P}\left[\hat{X}_2 = X_j \mid \hat{X}_1 = X_i\right] = \frac{X_j}{1 - X_i} \quad \text{za svaki } j \neq i \\
&\mathbb{P}\left[\hat{X}_3 = X_k \mid \hat{X}_1 = X_i, \hat{X}_2 = X_j\right] = \frac{X_k}{1 - X_i - X_j} \quad \text{za svaki } k \neq i, j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Formalna konstrukcija takvog vektora dana je u sljedećoj napomeni.

Napomena 1.19. Neka je $S_0 = 0$, $S_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$. Budući da je $\sum_{k=1}^{\infty} X_k = 1$ vrijedi $S_i \to 1$. Promotrimo slučajne varijable $Y_1, Y_2, \ldots$ uniformne na $\langle 0, 1\rangle$ koje su međusobno nezavisne i nezavisne sa X_k za svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka je $\tau_r = i$ kada je $S_{i-1} < Y_r \leq S_i$. Ukoliko je $X_i = 0$ za neko $i \in \mathbb{N}$ onda je $\tau_r \neq i$ za svaki r, a ukoliko je $X_i > 0$ onda τ_r poprima vrijednost i s vjerojatnošću X_i. Neka je $\theta_1 = \tau_1$, neka je $\theta_2 = \tau_r$ gdje je r najmanji indeks za koji je $\theta_1 \neq \tau_r$, $\theta_3 = \tau_s$, gdje je s najmanji indeks za koji je $\theta_1, \theta_2 \neq \tau_s$ i tako dalje. Tada će za vektor $\hat{\mathbb{X}} = \left(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots\right)$ kojeg definiramo s $\hat{X}_u = X_{\theta_u}$ zadovoljavati

$$\mathbb{P}\left[\hat{X}_1 = X_i\right] = \mathbb{P}\left[X_{\theta_1} = X_i\right] = \mathbb{P}\left[\theta_1 = i\right] = \mathbb{P}\left[\tau_1 = i\right] = X_i, \quad \text{za svaki } i,$$

$$\mathbb{P}\left[\hat{X}_2 = X_j \mid \hat{X}_1 = X_i\right] = \mathbb{P}\left[X_{\theta_2} = X_j \mid X_{\theta_1} = X_i\right] = \frac{\mathbb{P}\left[\theta_2 = j \cap \theta_1 = i\right]}{\mathbb{P}\left[\theta_1 = i\right]} \overset{\text{definicija od } \theta_2}{=}$$

$$\frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{r=2}^{\infty} \tau_1 = \ldots = \tau_{r-1} = i, \tau_r = j\right]}{X_i} \overset{\text{nezavisnost}}{=} \frac{\sum_{r=2}^{\infty} \mathbb{P}\left[\tau_r = j\right] \cdot \prod_{k=1}^{r-1} \mathbb{P}\left[\tau_k = i\right]}{X_i} =$$

$$\frac{\sum_{r=2}^{\infty} X_j \cdot \prod_{k=1}^{r-1} X_i}{X_i} = X_j \sum_{r=2}^{\infty} X_i^{r-2} = \frac{X_j}{1 - X_i}, \quad \text{za svaki } j \neq i,$$

$$\mathbb{P}\left[\hat{X}_3 = X_k \mid \hat{X}_1 = X_i, \hat{X}_2 = X_j\right] = \mathbb{P}\left[X_{\theta_3} = X_k \mid X_{\theta_1} = X_i, X_{\theta_2} = X_j\right] =$$

$$\frac{\mathbb{P}\left[\theta_3 = k \cap \theta_2 = j \cap \theta_1 = i\right]}{\mathbb{P}\left[\theta_1 = i \cap \theta_2 = j\right]} \overset{\text{definicija od } \theta_2}{=}$$

$$\frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{r=2}^{\infty} \bigcup_{s=r+1}^{\infty} \tau_1 = \ldots = \tau_{r-1} = i, \tau_r = j, \tau_{r+1}, \ldots, \tau_{s-1} \in \{i, j\}, \tau_s = k\right]}{\mathbb{P}\left[\bigcup_{r=2}^{\infty} \tau_1 = \ldots = \tau_{r-1} = i, \tau_r = j\right]} \overset{\text{nezavisnost}}{=}$$

$$\frac{\sum\limits_{r=2}^{\infty}\sum\limits_{s=r+1}^{\infty}\left(\prod\limits_{n=1}^{r-1}\mathbb{P}\left[\tau_n=i\right]\right)\cdot\mathbb{P}\left[\tau_r=j\right]\cdot\left(\prod\limits_{m=r+1}^{s-1}\mathbb{P}\left[\tau_m\in\{i,j\}\right]\right)\cdot\mathbb{P}\left[\tau_s=k\right]}{\frac{X_iX_j}{1-X_i}}=$$

$$\frac{\sum\limits_{r=2}^{\infty}\sum\limits_{s=r+1}^{\infty}\left(\prod\limits_{n=1}^{r-1}X_i\right)\cdot X_j\cdot\left(\prod\limits_{m=r+1}^{s-1}X_i+X_j\right)\cdot X_k}{\frac{X_iX_j}{1-X_i}}=\frac{X_k\cdot X_j\cdot X_i\cdot\sum\limits_{r=2}^{\infty}X_i^{r-2}\cdot\sum\limits_{s=r+1}^{\infty}\left(X_i+X_j\right)^{s-(r+1)}}{\frac{X_iX_j}{1-X_i}}=$$

$$\frac{X_k\cdot X_j\cdot X_i\cdot\frac{1}{1-X_i}\cdot\frac{1}{1-X_i-X_j}}{\frac{X_iX_j}{1-X_i}}=\frac{X_k}{1-X_i-X_j},\quad \text{za svaki } k\neq i,j,$$

$$\vdots$$

što smo i željeli pokazati. Jedini problem je što ako niz $(\theta_u)_{u\in\mathbb{N}}$ nije dobro definiran. To bi se moglo dogoditi ako za neki u ne postoji r takav da je $\tau_r\neq\theta_1,\ldots\theta_{u-1}$. To bi značilo da je $X_{\theta_1}+\ldots+X_{\theta_{u-1}}=1$. Tada recimo da je $\theta_v=\infty$ za $v\geq u$ i $\hat{X}_v=0$. U ovom slučaju ponovno su zadovoljene tražene tvrdnje.

Iz ove napomene dobivamo tvrdnju sljedeće propozicije

Propozicija 1.20. Za ranije definiran vektor $\hat{\mathbb{X}}=\left(\hat{X}_1,\hat{X}_2,\ldots\right)$ vrijedi

(i) $\hat{X}_k>0$, za svaki $k\in\mathbb{N}$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\hat{X}_k=1$

(iii) $\mathbb{P}\left[\theta_1=i_1,\ldots,\theta_r=i_r\mid\mathbb{X}\right]=X_{i_1}\dfrac{X_{i_2}}{1-X_{i_1}}\cdots\dfrac{X_{i_r}}{1-X_{i_1}-\ldots-X_{i_{r-1}}}$.

Dokaz. (i) Tvrdnja vrijedi jer za svaki ω i za svaki $k\in\mathbb{N}$ postoji $i\in\mathbb{N}$ takav da je $\hat{X}_k(\omega)=X_i(\omega)>0$.

(ii) Zbog uvjeta da za θ_k biramo τ_r s najmanjim indeksom koji je različit od svih ranijih θ_i dobivamo da je svaki ω vektor $\hat{\mathbb{X}}(\omega)$ permutacija vektora $\mathbb{X}(\omega)$. Tvrdnja vrijedi jer je $\sum_{k=1}^{\infty}X_k=1$.

(iii)

$$\mathbb{P}\left[\theta_1=i_1,\ldots,\theta_r=i_r\mid\mathbb{X}\right]=\mathbb{P}\left[\theta_r=i_r\mid\mathbb{X}\cap\theta_1=i_1\cap\ldots\cap\theta_{r-1}=i_{r-1}\right]\cdot$$
$$\mathbb{P}\left[\theta_{r-1}=i_{r-1}\mid\mathbb{X}\cap\theta_1=i_1\cap\ldots\cap\theta_{r-2}=i_{r-2}\right]\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}\left[\theta_1=i_1\mid\mathbb{X}\right]=$$
$$\frac{X_{i_r}}{1-X_{i_1}-\ldots-X_{i_{r-1}}}\cdot\frac{X_{i_{r-1}}}{1-X_{i_1}-\ldots-X_{i_{r-2}}}\cdot\ldots\cdot\frac{X_{i_2}}{1-X_{i_1}}\cdot X_{i_1}.$$

$\square$

1.3 Neki pojmovi teorije brojeva

Definicija 1.21. Ako je $g(x) > 0$ za sve $x \geq a$, kažemo da je

$$f(x) = O(g(x))$$

ako je $f(x)(g(x))^{-1}$ ograničeno za svaki $x \geq a$, odnosno postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|f(x)| \leq Mg(x)$ za svaki $x \geq a$. Jednadžba oblika

$$f(x) = h(x) + O(g(x))$$

znači da je $f(x) - h(x) = O(g(x))$.

Uz ovu notaciju vrijedi tvrdnja sljedeće propozicije

Propozicija 1.22. Za funkciju Γ definiranu pomoću (1.1) i Euler-Mascheronovu konstantu γ vrijedi

$$\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(1+\alpha) = 1 - \gamma\alpha + O\left(\alpha^2\right), \text{ za } \alpha > 0.$$

Dokaz. Budući da je po (1.2) $\Gamma(1) = 1$, po (1.4) $\Gamma'(1) = -\gamma$, a kako je funkcija Γ analitička slijedi da je $\Gamma(1+\alpha) = 1-\gamma\alpha+O\left(\alpha^2\right)$. Ukoliko na dobiveno primijenimo tvrdnju propozicije 1.2 slijedi tražena tvrdnja. □

Pokazat ćemo još dva teorema koji će se pokazati značajni u poglavlju 2.

Teorem 1.23.

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1), \quad x \to \infty,$$

gdje se sumacija vrši po prostim brojevima $p \leq x$.

Dokaz. Neka je

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log(p) & n = p^k, \\ 0, & \text{inačne.} \end{cases}$$

Po primjeru 5.4. u Dujella [2] vrijedi

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log(x) + O(1). \tag{1.8}$$

Također vrijedi

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\sum_{p\leq x}\frac{\log(p)}{p}=\sum_{\substack{p^m\leq n\\ m\geq 2}}\frac{\log(p)}{p^m}\leq\sum_{p}\log(p)\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{p^m}=\sum_{p}\frac{\log(p)}{p^2}\frac{p}{p-1}\leq$$
$$2\sum_{p}\frac{\log(p)}{p^2}<\infty.$$

Iz dobivenog slijedi da je

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log(p)}{p}=\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}+O(1),$$

što zajedno sa (1.8) daje tvrdnju teorema. □

Teorem 1.24.

$$\sum_{p\leq x}\log(p)=O(x),\quad x\to\infty,$$

gdje se sumacija vrši po prostim brojevima $p\leq x$.

Dokaz. Budući da je

$$\binom{2n}{k}=\frac{(2n)!}{(n)!\,(n)!}$$

ako je $n<p\leq 2n$ onda prost broj p dijeli $\binom{2n}{k}$. Zato označimo li s $\theta(x)=\sum_{p\leq x}\log(p)$ vrijedi

$$\theta(2n)-\theta(n)=\sum_{n<p\leq 2n}\log(p)=\log\left(\prod_{n<p\leq 2n}p\right)\leq\log\left(\binom{2n}{k}\right)\leq\log\left(2^{2n}\right)=2n\log(2).\quad(1.9)$$

Za $n=2^k$ zato vrijedi

$$\theta\left(2^{k+1}\right)\leq\theta\left(2^k\right)+2^{k+1}\log(2)\leq\ldots\leq\theta\left(2^0\right)+2^{1+1}\log(2)+\ldots+2^{k+1}\log(2)\leq 2^{k+2}\log(2).$$

Za $2^m\leq n<2^{m+1}$ zato vrijedi

$$\theta(n)\leq\theta(2^m)+\theta\left(2^{m+1}\right)-\theta(2^m)\leq 2^{m+1}\log(2)+2^{m+1}\log(2)=42^m\log(2)\leq 4n\log(2),$$

iz čega po definiciji 1.21 slijedi tvrdnja teorema. □

1.4 Formula uključivanja i isključivanja

Promotrimo skup $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ i označimo s $|I|$ kardinalitet skupa I. Neka je $r \in \mathbb{R}$ i neka su $S_1, \ldots, S_n \subset \mathbb{R}^r$. Tada vrijedi sljedeći teorem

Teorem 1.25. *Za svaku integrabilnu funkciju $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\int\limits_{S_1\cap\ldots\cap S_n} f d\lambda = \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \int\limits_{\bigcap_{i\in I} S_i^c} f d\lambda, \tag{1.10}$$

gdje se u slučaju $I = \emptyset$ smatra $\bigcap_{i\in I} S_i^c = \mathbb{R}^r$.

Dokaz. Za $i = 1, \ldots, n$ označimo s $A_i := S_i^c$ te s $A := S_1 \cap \ldots \cap S_n = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c$. Tada je $A^c = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ te vrijedi

$$(\mathbb{1}_{A^c} - \mathbb{1}_{A_1}) \cdot (\mathbb{1}_{A^c} - \mathbb{1}_{A_2}) \cdot \ldots \cdot (\mathbb{1}_{A^c} - \mathbb{1}_{A_n}) = 0,$$

jer je za $x \notin A_1 \cup \ldots \cup A_n$ vrijednost svake karakteristične funkcije 0, a za $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $x \in A_i$ pa je $(\mathbb{1}_{A^c} - \mathbb{1}_{A_i}) = 0$. Raspisivanjem ovog izraza i primjenom formule $\mathbb{1}_B \cdot \mathbb{1}_C = \mathbb{1}_{B\cap C}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \mathbb{1}_{A^c\cap(\bigcap_{i\in I} A_i)} = 0 \Longrightarrow \mathbb{1}_{A^c} + \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I} A_i} = 0 \Longrightarrow \\
&\mathbb{1} - \mathbb{1}_A + \sum_{\emptyset\neq I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I} A_i} = 0 \Longrightarrow \mathbb{1}_A = \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I} A_i}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Za integrabilnu funkciju $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ zato vrijedi

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{S_1\cap\ldots\cap S_n} f d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}^r} f \mathbb{1}_{S_1\cap\ldots\cap S_n} d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}^r} f \mathbb{1}_A d\lambda \overset{(1.11)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^r} f \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I} A_i} d\lambda = \\
&\sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \int\limits_{\mathbb{R}^r} f \mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I} A_i} d\lambda = \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \int\limits_{\mathbb{R}^r} f \mathbb{1}_{(\bigcap_{i\in I} S_i^c)} d\lambda = \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \int\limits_{\bigcap_{i\in I} S_i^c} f d\lambda.
\end{aligned}$$

Ovime je pokazana tvrdnja teorema. □

Korolar 1.26. Neka je dan skup $X \subset \mathbb{R}^r$ i integrabilna funkcija $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$. Tada je

$$\int\limits_{X\cap S_1\cap\ldots\cap S_n} f d\lambda = \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \int\limits_{X\cap(\bigcap_{i\in I} S_i^c)} f d\lambda, \tag{1.12}$$

gdje se u slučaju $I = \emptyset$ smatra $\bigcap_{i\in I} S_i^c = \mathbb{R}^r$.

Dokaz. Primijenimo li (1.12) na funkciju $\tilde{f} = f\mathbb{1}_X$ dobivamo

$$\int\limits_{X\cap S_1\cap\ldots\cap S_n} f d\lambda = \sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} \int\limits_{X\cap\left(\bigcap_{i\in I} S_i^c\right)} f d\lambda$$

što je trebalo pokazati. $\square$

Poglavlje 2

Motivacijski primjeri

U ovom poglavlju definirat ćemo dva naizgled nepovezana vjerojatnosna modela i proučiti njihova svojstva. Kasnije će nam poslužiti za definiciju Poisson-Dirichletove razdiobe koja je centralni objekt ovog rada.

2.1 Ciklusi slučajnih permutacija

Prvi prostor koji promatramo jest prostor S_n svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ s jednakom vjerojatnošću svake permutacije. Neka je dana slučajna permutacija $\sigma \in S_n$ i neka se ta permutacija rastavlja na cikluse $\{C_1, C_2, \ldots\}$, gdje je taj skup konačan. Dodatno pretpostavimo da C_1 sadrži 1, C_2 sadrži najmanji element skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji nije sadržan u C_1, općenito C_k sadrži najmanji element skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji nije sadržan ni u jednom C_l za $l < k$. Uvedimo oznake za duljine $(|C_1|, |C_2|, \ldots)$ odgovarajućih ciklusa gdje po potrebi ovaj niz možemo interpretirati kao beskonačan ukoliko uzmemo da je $|C_k| = 0$ za k veći od broja ciklusa permutacije σ. Primijetimo da trivijalno vrijede sljedeće činjenice $\mathbb{P}(\{\sigma\}) = \frac{1}{n!}$ i $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| = n$. Odnosno $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|C_k|}{n} = 1$ i $\frac{|C_k|}{n} \geq 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Primjer 2.1. Promotrimo kako uvedene oznake izgledaju za $n = 9$ i na odabranu permutaciju $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 4 & 1 & 5 & 8 & 2 & 6 & 7 \end{smallmatrix}\right)$, odnosno zapisano pomoću ciklusa $\sigma = (1, 3, 4)\,(2, 9, 7)\,(5)\,(6, 8)$. Tada je uz gornje oznake

$$C_1 = (1, 3, 4)\,, C_2 = (2, 9, 7)\,, C_3 = (5)\,, C_4 = (6, 8)$$

iz čega slijedi

$$|C_1| = 3, |C_2| = 3, |C_3| = 1, |C_4| = 2.$$

Odnosno dobivamo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|C_k|}{9} = \frac{3+3+1+2}{9} = 1$.

U navedenom primjeru promatrali smo svojstva fiksne permutacije σ, a sljedeća lema nam govori više o ciklusima slučajno odabrane permutacije.

Lema 2.2. Neka je definiran vjerojatnosni prostor kao gore i neka se σ rastavlja na odgovarajuće cikluse. Tada vrijedi $\mathbb{P}(\frac{|C_1|}{n} = \frac{i}{n}) = \mathbb{P}(|C_1| = i) = \frac{1}{n}$ za $1 \leq i \leq n$

Dokaz.

$$\mathbb{P}(|C_1| = i) = \frac{\textit{broj permutacija s prvim ciklusom duljine i}}{n!} = \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)\cdot(n-i)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Gdje druga jednakost vrijedi jer znamo da je prvi element ciklusa C_1 1, a ostale odaberemo na $(n-1)\cdot ... \cdot(n-i+1)$ načina. Tako dobivamo C_1 duljine i a zatim na $(n-i)!$ načina ispermutiramo preostale elemente. □

Pretpostavimo nadalje da je $|C_1| = i$, odnosno da vrijedi $C_1 = (1, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$. Tada preostali ciklusi čine permutaciju skupa $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{1, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$. Pa je uvjetno na događaj da je $|C_1| = i$, vjerojatnost da je $|C_2| = j$ upravo vjerojatnost da je prvi ciklus permutacije $(n-i)$-članog skupa duljine j. Iz ovih napomena i prethodne leme slijedi

$$\mathbb{P}(|C_1| = i, |C_2| = j) = \mathbb{P}(|C_2| = j \mid |C_1| = i)\cdot\mathbb{P}(|C_1| = i) = \frac{1}{n-i}\cdot\frac{1}{n}$$

Uočimo da ovaj postupak možemo nastaviti te induktivno za $i_1, i_2, \ldots, i_k > 0$ takve da je $\sum_{j=1}^{k} i_j \leq n$ zaključujemo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|C_1| = i_1, |C_2| = i_2, ..., |C_k| = i_k) = \\
&\mathbb{P}(|C_k| = i_k \mid |C_1| = i_1, \ldots, |C_{k-1}| = i_{k-1})\cdot\mathbb{P}(|C_1| = i_1, \ldots, |C_{k-1}| = i_{k-1}) \overset{\textit{induktivna pretpostavka}}{=} \\
&\frac{1}{n-(i_1+\ldots+i_{k-1})}\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\prod_{j=1}^{k-2}\frac{1}{n-(i_1+\ldots+i_j)}\right) = \\
&\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-i_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-(i_1+i_2+\ldots+i_{k-1})}
\end{aligned}$$

Ukoliko je $\sum_{j=1}^{k} i_j > n$ tada je tražena vjerojatnost nula, jer je nemoguće da je zbroj duljina ciklusa veći od n.
Ovim razmatranjima dokazan je sljedeći rezultat

Propozicija 2.3. (a) Slučajna varijabla $\frac{|C_1|}{n}$ uniformno je distribuirana na skupu $\left\{\frac{i}{n}, i \leq n\right\}$.

(b) uvjetno na $\frac{|C_1|}{n} = \dfrac{i}{n}$ slučajna varijabla $\frac{|C_2|}{n}$ uniformno je distribuirana na skupu $\left\{\frac{j}{n}, j \leq n - i = n - |C_1|\right\}$.

(c) uvjetno na $\frac{|C_1|}{n} = \frac{i_1}{n}, \frac{|C_2|}{n} = \frac{i_2}{n}, \ldots, \frac{|C_{k-1}|}{n} = \frac{i_{k-1}}{n}$ slučajna varijabla $\frac{|C_k|}{n} = \frac{i_k}{n}$ uniformno je distribuirana na skupu $\left\{\frac{i_k}{n}, i_k \leq n - i_1 - i_2 - \ldots - i_{k-1} = n - |C_1| - |C_2| \ldots - |C_{k-1}|\right\}$.

Sada smo spremni razmotriti što se događa u graničnim situacijama. Prethodna propozicija daje nam za pravo pretpostaviti da će promatrane slučajne varijable u nekom smislu konvergirati ka slučajnim varijablama koje su uniformno distribuirane na $[0, 1]$. U tu svrhu definirajmo slučajne varijable $U_1, U_2, \ldots U_k, \ldots$ koje su sve nezavisne i uniformne na $[0, 1]$. Pokažimo prvo sljedeću lemu.

Lema 2.4. Neka su $|C_1|$ i U_1 slučajne varijable definirane kao gore. Tada vrijedi

$$\frac{|C_1|}{n} \Rightarrow U_1.$$

Dokaz. Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, a budući da je skup $[0, 1]$ kompaktan funkcija f je i ograničena. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{|C_1|}{n}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)dx = \mathbb{E}\left[f\left(U_1\right)\right]$$

Gdje konvergencija vrijedi jer je f neprekidna pa je Riemann integrabilna iz čega slijedi da Darbuoxova suma konvergira prema Reimannovom integralu funkcije f. Po teoremu 1.8 slijedi tvrdnja leme. □

Sličnu tvrdnju možemo dobiti i za $\frac{|C_2|}{n}$ samo što u ovom slučaju moramo danu slučajnu varijablu u nekom smislu skalirati kako bi ponovno dobili konvergenciju prema uniformnoj na $[0, 1]$.

Lema 2.5. Neka su $|C_1|, |C_2|$ i U_1, U_2 slučajne varijable definirane kao gore. Tada vrijedi

$$\left(\frac{|C_1|}{n}, \frac{\frac{|C_2|}{n}}{1 - \frac{|C_1|}{n}}\right) \Rightarrow (U_1, U_2)\,.$$

Dokaz. Uvedimo prvo oznake koje će nam pojednostavniti zapis. Neka je $L_i^n = \frac{|C_i|}{n}$. Nadalje neka je $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, a budući da je skup $[0, 1]^2$ kompaktan funkcija f je i ograničena.. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}\left[f\left(L_1^n, \frac{L_2^n}{1-L_1^n}\right)\right] = \sum_{i+j=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-i}\cdot f\left(\frac{i}{n}, \frac{\frac{j}{n}}{1-\frac{i}{n}}\right) =$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i+j=1}^{n}\frac{f\left(\frac{i}{n}, \frac{\frac{j}{n}}{1-\frac{i}{n}}\right)}{1-\frac{i}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \iint\limits_{0\le x_1+x_2\le 1} \frac{f(x_1, \frac{x_2}{1-x_1})}{1-x_1}\, d(x_1,x_2) \overset{Fubini}{=}$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x_1}\frac{f(x_1, \frac{x_2}{1-x_1})}{1-x_1}\, dx_2 dx_1 \left[y = \frac{x_2}{1-x_1}, dy = \frac{dx_2}{1-x_1}\right] =$$

$$\int_0^1\int_0^1 f(x_1, y)\, dy dx_1 = \iint\limits_{[0,1]^2} f(x,y)\, d(x,y) = \mathbb{E}\left[f\left(U_1, U_2\right)\right]$$

Gdje konvergencija vrijedi jer je funkcija $(x_1, x_2) \to f(x_1, \frac{x_2}{1-x_1})/\,(1-x_1)$ neprekidna pa je Riemann integrabilna iz čega slijedi da Darbuoxova suma konvergira prema Reimannovom integralu funkcije. Po teoremu 1.8 slijedi tvrdnja leme. □

Dokazani rezultat se može induktivno poopćiti s dvije na r slučajnih varijabli. To je formalno iskazano sljedećim teoremom.

Teorem 2.6. *Neka su $|C_1|, |C_2|, \ldots |C_r|$ i $U_1, U_2, \ldots U_r$ slučajne varijable definirane kao gore. Tada vrijedi*

$$\left(\frac{|C_1|}{n}, \frac{\frac{|C_2|}{n}}{1-\frac{|C_1|}{n}}, \ldots, \frac{\frac{|C_r|}{n}}{1-\frac{|C_1|}{n}-\frac{|C_2|}{n}-\ldots-\frac{|C_{r-1}|}{n}}\right) \Rightarrow (U_1, U_2, \ldots, U_r)\,.$$

Prije nego krenemo na dokaz teorema uočimo da bi nam ponovno, kao i u dokazu prethodne leme, uvođenje novih oznaka bitno pojednostavilo zapis u iskazu teorema. Zato prvo navedimo sljedeću definiciju.

Definicija 2.7. Neka su $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_r|$ slučajne varijable koje odgovaraju duljinama ciklusa permutacije n-članog skupa kao što je definirano ranije. Neka su tada $L_1^n, L_2^n, \ldots, L_r^n$ slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru definirane relacijom

$$L_i^n := \frac{|C_i|}{n}, i \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

i neka je $\mathbb{L}^n = (L_1^n, L_2^n, \ldots, L_r^n, 0, \ldots)$.

Uz ove oznake za dokaz teorema potrebno je pokazati da vrijedi

$$\left(L_1^n, \frac{L_2^n}{1-L_1^n}, \ldots, \frac{L_r^n}{1-L_1^n-L_2^n-\ldots-L_{r-1}^n}\right) \Rightarrow (U_1, U_2, \ldots, U_r).$$

Za dokaz teorema potrebna nam je još jedna tehnička lema koja se dokazuje metodom matematičke indukcije.

Lema 2.8. Za proizvoljan $r \in \mathbb{N}$ i za svaku neprekidnu funkciju $f : [0,1]^r \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int\limits_{0 \le x_1+\ldots+x_r \le 1} \frac{f\left(x_1, \frac{x_2}{1-x_1}, \ldots, \frac{x_r}{1-x_1-\ldots-x_{r-1}}\right)}{(1-x_1)\ldots(1-x_1-\ldots-x_{r-1})}\, d(x_1,\ldots,x_r) = \int\limits_{[0,1]^r} f(y_1,\ldots,y_r)\, d(y_1,\ldots,y_r).$$

Dokaz. Budući da su slučajevi kada je $r = 1, 2$ već napravljeni u dokazima prethodnih lema bazu indukcije već imamo. Zato pretpostavimo da za svaki $s < r$ i za svaku neprekidnu funkciju $f : [0,1]^s \to \mathbb{R}$ vrijedi tražena tvrdnja. Nadalje neka je $f : [0,1]^r \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi

$$\int\limits_{0 \le x_1+\ldots+x_r \le 1} \frac{f\left(x_1, \frac{x_2}{1-x_1}, \ldots, \frac{x_r}{1-x_1-\ldots-x_{r-1}}\right)}{(1-x_1)\cdot\ldots\cdot(1-x_1-\ldots-x_{r-1})}\, d(x_1,\ldots,x_r) \overset{Fubini}{=}$$

$$\int\limits_{0 \le x_1+\ldots+x_{r-1} \le 1} \int\limits_0^{1-x_1-\ldots-x_{r-1}} \frac{f(x_1, \frac{x_2}{1-x_1}, \ldots, \frac{x_r}{1-x_1-\ldots-x_{r-1}})}{(1-x_1)\cdot\ldots\cdot(1-x_1-\ldots-x_{r-1})}\, dx_r\, d(x_1,x_2,\ldots,x_{r-1}) =$$

$$\left[y = \frac{x_r}{1-x_1-\ldots-x_{r-1}}, dy = \frac{dx_r}{1-x_1-\ldots-x_{r-1}}\right]$$

$$\int\limits_{0 \le x_1+\ldots+x_{r-1} \le 1} \frac{\int_0^1 f(x_1,\ldots,\frac{x_{r-1}}{1-x_1-\ldots-x_{r-2}}, y)\, dy}{(1-x_1)\cdot\ldots\cdot(1-x_1-\ldots-x_{r-2})}\, d(x_1,x_2,\ldots,x_{r-1}) =$$

Primjenom induktivne pretpostavke za $s = r-1$ i za funkciju

$$(x_1,x_2,\ldots,x_{r-1}) \to \int_0^1 f(x_1,\ldots,\frac{x_{r-1}}{1-x_1-\ldots-x_{r-2}}, y)\, dy$$

$$\int\limits_{[0,1]^{r-1}} \int_0^1 f(y_1,\ldots,y_{r-1},y)\, dy\, d(y_1,\ldots y_{r-1}) \overset{Fubini}{=}$$

$$\int\limits_{[0,1]^r} f(y_1,y_2,\ldots,y_r)\, d(y_1,y_2,\ldots,y_r).$$

Odnosno tražena tvrdnja vrijedi za r čime je dokazana lema. □

Sada smo spremni za dokaz tvrdnje teorema 2.6

Dokaz. Neka je $f : [0,1]^r \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, koja je ponovno i ograničena. Tada vrijedi

$$\mathbb{E}\left[f\left(L_1^n, \frac{L_2^n}{1-L_1^n}, \dots, \frac{L_r^n}{1-L_1^n-L_2^n-\dots-L_{r-1}^n}\right)\right] =$$

$$\sum_{i_1+\dots+i_r=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-i_1}\cdot\dots\cdot\frac{1}{n-i_1-\dots-i_{r-1}}\cdot f\left(\frac{i_1}{n}, \frac{\frac{i_2}{n}}{1-\frac{i_1}{n}}, \dots, \frac{\frac{i_r}{n}}{1-\frac{i_1}{n}-\dots-\frac{i_{r-1}}{n}}\right) =$$

$$\frac{1}{n^r}\sum_{i_1+\dots+i_r=1}^{n} \frac{f\left(\frac{i_1}{n}, \frac{\frac{i_2}{n}}{1-\frac{i_1}{n}}, \dots, \frac{\frac{i_r}{n}}{1-\frac{i_1}{n}-\dots-\frac{i_{r-1}}{n}}\right)}{\left(1-\frac{i}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{i_1}{n}-\frac{i_2}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{i_1}{n}-\dots-\frac{i_{r-1}}{n}\right)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\int\limits_{0\le x_1+\dots+x_r\le 1} \frac{f(x_1, \frac{x_2}{1-x_1}, \dots, \frac{x_r}{1-x_1-\dots-x_{r-1}})}{(1-x_1)\cdot(1-x_1-x_2)\cdot\dots\cdot(1-x_1-\dots-x_{r-1})}\, d(x_1,x_2,\dots,x_r) \overset{lema 2.8}{=}$$

$$\int\limits_{[0,1]^r} f(y_1,y_2,\dots,y_r)\, d(y_1,y_2,\dots,y_r) = \mathbb{E}\left[f(U_1,U_2,\dots,U_r)\right].$$

Gdje konvergencija vrijedi jer je funkcija definirana svojim djelovanjem na proizvoljni vektor

$$(x_1,x_2,\dots,x_r) \to \frac{f\left(x_1, \frac{x_2}{1-x_1}, \dots, \frac{x_r}{1-x_1-\dots-x_{r-1}}\right)}{(1-x_1)\cdot(1-x_1-x_2)\cdot\dots\cdot(1-x_1-\dots-x_{r-1})}$$

neprekidna pa je Riemann integrabilna iz čega slijedi da Darbuoxova suma konvergira prema Reimannovom integralu funkcije. Ponovno po teoremu 1.8 slijedi tvrdnja teorema. □

Iz prethodno dokazanog teorema u slučaju $r = 2$ slijedi $\left(L_1^n, \frac{L_2^n}{1-L_1^n}\right) \Rightarrow (U_1, U_2)$, a iz toga po teoremu 1.16 zaključujemo da vrijedi

$$(L_1^n, L_2^n) \Rightarrow (U_1, (1-U_1)\,U_2).$$

Za $r = 3$ smo pokazali da $\left(L_1^n, \frac{L_2^n}{1-L_1^n}, \frac{L_3^n}{1-L_1^n-L_2^n}\right) \Rightarrow (U_1, U_2, U_3)$ odnosno ponovno po teoremu 1.16 dobivamo

$$\begin{aligned}(L_1^n, L_2^n, L_3^n) &\Rightarrow (U_1, (1-U_1)\,U_2, U_3\,(1-U_1-(1-U_1)\,U_2)) \\ &= (U_1, (1-U_1)\,U_2, (1-U_1)(1-U_2)\,U_3).\end{aligned}$$

Induktivnim postupkom za proizvoljan $r \in \mathbb{N}$ dobivamo

$$(L_1^n, L_2^n, \dots, L_r^n) \Rightarrow (U_1, (1 - U_1)\, U_2, (1 - U_1) \dots (1 - U_{r-1})\, U_r)\,.$$

Ovo nas navodi na ideju da promatramo $G_1 := U_1, G_2 := (U_1, (1 - U_1)\, U_2), \dots, G_2 := (U_1, (1 - U_1)\, U_2, (1 - U_1) \dots (1 - U_{r-1})\, U_r)$. Uz tako definirane slučajne varijable iz prethodnih napomena slijedi tvrdnja sljedećeg korolara.

Korolar 2.9.

$$(L_1^n, L_2^n, \dots, L_r^n) \Rightarrow (G_1, G_2, \dots, G_r)\,.$$

Korolar 2.10. Neka je vektor $\mathbb{L}^n = (L_1^n, L_2^n, \dots, L_r^n, \dots)$ i $\mathbb{G} := (G_1, G_2, \dots, G_r, \dots)$. Tada vrijedi

$$\mathbb{L}^n \Rightarrow \mathbb{G}.$$

Dokaz. Neka je funkcija $\pi_r : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^r$ projekcija na prvih r koordinata, odnosno neka na vektor $(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ djeluje na sljedeći način $\pi_r(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$. U propoziciji 1.11 rečeno je da $\mathbb{L}^n \Rightarrow \mathbb{G}$ ako i samo ako $\mathbb{P}\left[X_n \in \pi_r^{-1}(A)\right] \to \mathbb{P}\left[X \in \pi_r^{-1}(A)\right]$ za svaki $r \in \mathbb{N}$ i $A \in \mathbb{R}^r$ takav da je $\mathbb{P}\left[X \in \partial\pi_r^{-1}(A)\right] = 0$. U teoremu 1.8 je pokazamo da je $\mathbb{P}[\pi_r(X_n) \in A] \to \mathbb{P}[\pi_r(X) \in A]$ za svaki $A \in \mathbb{R}^r$ takav da je $\mathbb{P}[\pi_r(X) \in \partial A] = 0$ ekvivalentno tome da $\pi_r(X_n) \Rightarrow \pi_r(X)$. Budući da je $\mathbb{P}\left[X_n \in \pi_r^{-1}(A)\right] = \mathbb{P}[\pi_r(X_n) \in A]$, $\mathbb{P}\left[X \in \pi_r^{-1}(A)\right] = \mathbb{P}[\pi_r(X) \in A]$ i $\mathbb{P}\left[X \in \partial\pi_r^{-1}(A)\right] = \mathbb{P}[\pi_r(X) \in \partial A]$ te zbog korolara 2.9 slijedi $(L_1^n, L_2^n, \dots, L_r^n \dots) \Rightarrow (G_1, G_2, \dots, G_r \dots)$. □

Napomena 2.11. Slučajne varijable $G_1, G_2, \dots$ imaju sljedeću intuitivnu interpretaciju: Promatrajmo jedinični interval $I_0 = [0, 1]$ kako je po definiciji $G_1 = U_1$ znamo da je G_1 uniformna slučajna varijabla na I_0. Slučajna varijabla G_2 uvjetno na realizaciju slučajne varijable G_1 je uniformna na intervalu $1 - G_1$. Odnosno (G_1, G_2) možemo zamišljati kao da režemo I_0 u slučajnom omjeru $1 - U_1 : U_1$ i odbacujemo drugi dio odsječenog intervala, odnosno onaj duljine $U_1 = G_1$. Zatim početni dio intervala I_0, odnosno interval $I_1 = [0, 1 - U_1] = [0, 1 - G_1]$ ponovno režemo u slučajnom omjeru $1 - U_2 : U_2$ te odbacujemo drugi dio intervala, odnosno onaj duljine $U_2(1 - U_1) = G_2$. Ovaj postupak možemo nastaviti, tako ćemo u sljedećem koraku uzeti početni dio intervala I_1, odnosno interval $I_2 = [0, (1 - U_1)(1 - U_2)] = [0, 1 - G_1 - G_2]$ koji ponovno režemo. U r-tom koraku, za proizvoljan $r \in \mathbb{N}$ dobivamo interval $I_r = [0, (1 - U_1) \cdot (1 - U_2) \cdot \ldots \cdot (1 - U_r)] = [0, 1 - G_1 - G_2 - \ldots - G_r]$.

Dosta je intuitivno za pretpostaviti da je $\lim_{r\to\infty} I_r = \{0\}$. Također iz konstrukcije intervala I_r, odnosno njegove karakterizacije preko G_i, koristeći trivijalnu činjenicu da je početni interval I_0 bio je duljine 1 i uz oznaku $|I_r|$ za duljinu intervala I_r uočavamo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} G_i = 1 - \prod_{i=1}^{\infty}(1 - U_i) = 1 - \lim_{r\to\infty} |I_r| = 1$$

Zaključci ove napomene mogu se dokazati i formalno, uz činjenicu da će konvergencija koju smo u napomeni prihvatili intuitivno sada vrijediti gotovo sigurno.

Nas zapravo zanima $\lim_{r\to\infty} (1 - U_1) \cdot (1 - U_2) \cdot \ldots \cdot (1 - U_r)$ *g.s.* Kako su slučajne varijable $U_1, U_2, \ldots, U_r, \ldots$ nezavisne i uniformne na intervalu $[0, 1]$ vjerojatnost da ih je samo konačno mnogo veće ili jednako $\frac{1}{2}$ je 0. Zato postoji niz $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takav da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $U_{i_k} \geq \frac{1}{2}$ *g.s.*. Neka je r proizvoljan, označimo s $n(r)$ najveći k takav da je $i_k \leq r$. Budući da je $\lim_{k\to\infty} i_k = \infty$ slijedi da je $\lim_{r\to\infty} n(r) = \infty$. Budući da za svaki od faktora u promatranom produktu vrijedi $0 \leq (1 - U_i) \leq 1$ *g.s.* za proizvoljan r imamo sljedeći niz nejednakosti:

$$0 \leq (1 - U_1) \cdot (1 - U_2) \cdot \ldots \cdot (1 - U_r) \leq (1 - U_{i_1}) \cdot (1 - U_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \left(1 - U_{i_{n(r)}}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n(r)} \quad g.s.$$

Odnosno kad pustimo $r \to \infty$ po teoremu o sendviču slijedi tražena konvergencija.

Prethodna napomena i ovi formalni zaključci nam zapravo govore da o rastavu slučajne permutacije na cikluse možemo razmišljati kao o rezanju intervala u slučajnom omjeru.

Ono što će nas u nastavku zanimati jest vektor $\mathbb{L}^n$, ali s komponentama sortiranima silazno po veličini odnosno vektor

$$\mathbb{L}^n_{(.)} := \left(L^n_{(1)}, L^n_{(2)}, \ldots L^n_{(r)}, \ldots\right), \quad L^n_{(1)} \geq L^n_{(2)} \geq \ldots \geq L^n_{(r)} \geq \ldots.$$

Intuitivno očekujemo da će iz $\mathbb{L}^n \implies \mathbb{G}$ slijediti $\mathbb{L}^n_{(.)} \implies \mathbb{G}_{(.)}$, ali da bi mogli tako nešto i formalno ustvrditi potrebna su detaljnija teorijskih razmatranja koja ćemo obraditi u poglavlju 2.3.

2.2 Djelitelji slučajnih brojeva

Sada se okrećemo ranije najavljenom drugom primjeru koji, iako naizgled nepovezan s ciklusima i permutacijama, pokazuje mnogo sličnih svojstava.

Promatrat ćemo rastav prirodnog broja na proste faktore. To nam daje primjer drugog vjerojatnosnog prostora s kojim ćemo raditi, a definiran je na skupu svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih nekom $n \in \mathbb{N}$. Kao i u primjeru permutacija neka je jednaka vjerojatnost odabira svakog broja $N_n \leq n$. Za dani slučajni broj N_n neka su $(P_1, P_2, \ldots)$ različiti prosti faktori od N_n takvi da vrijedi $N_n = P_1^{\alpha_1} \cdot P_2^{\alpha_2} \cdot \ldots$, gdje je definirani niz konačan. Označimo s $T_n := P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots$. Uočimo u ovom trenutku da smo u prethodnom primjeru imali prirodan poredak među promatranim ciklusima. S indeksom 1 označili smo onaj koji u sebi sadrži broj 1, s 2 onaj koji sadrži najmanji prirodan broj koji se već nije pojavio u prvom ciklusu i tako dalje. Također uočimo da kod prostih djelitelja takvog prirodnog poretka nema, pa ćemo zato u ovom primjeru odmah poredati promatrane elemente od većeg prema manjem. Što smo i u prethodnom primjeru u konačnici napravili. Ponovno je moguće dani niz interpretirati i kao beskonačan ukoliko stavimo da je $P_k = 1$ za k veći od broja različitih prostih djelitelja broja N_n. Primijetimo da trivijalno vrijede sljedeće činjenice $\mathbb{P}(\{N_n = k\}) = \frac{1}{n}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ i $\sum_{k=1}^{\infty} \log(P_k) = \log(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots) = \log(T_n)$. Odnosno, slično kao i u prethodnom primjeru, vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(P_k)}{\log(T_n)} = 1$ i $\frac{\log(P_k)}{\log(T_n)} \geq 0$ za $k \geq 1$.

Primjer 2.12. Promotrimo kako uvedeni pojmovi izgledaju za $N = 3150$. Tada je uz gornje oznake

$$\begin{aligned} &p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 5, p_5 = 7 \\ &T_n = 1050 \end{aligned}$$

Iz čega dobivamo

$$\sum_k \frac{\log(p_k)}{\log(T_n)} = \frac{\log(2) + \log(3) + \log(3) + \log(5) + \log(5) + \log(7)}{\log(1050)} = \frac{\log(1050)}{\log(1050)} = 1.$$

Neka je vektor $\mathbf{X}^n = (X_1^n, X_2^n, \ldots)$ definiran pomoću relacije $X_i = \frac{\log(P_i)}{\log(T_n)}$. Promotrimo vektor $\hat{\mathbf{X}}^n = \left(\hat{X}_1^n, \hat{X}_2^n, \ldots\right)$ koji se formalno definira kao u napomeni 1.19 te zadovoljava

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left[\hat{X}_1^n = X_i^n\right] = X_i^n \text{ za svaki } i \\ &\mathbb{P}\left[\hat{X}_2^n = X_j^n \mid \hat{X}_1^n = X_i^n\right] = \frac{X_j^n}{1 - X_i^n} \text{ za svaki } j \neq i \\ &\mathbb{P}\left[\hat{X}_3^n = X_k^n \mid \hat{X}_1^n = X_i^n, \hat{X}_2^n = X_j^n\right] = \frac{X_k^n}{1 - X_i^n - X_j^n} \text{ za svaki } k \neq i, j \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sada uvodimo nove slučajne varijable $D_1^n, D_2^n, \ldots$ pomoću relacije

$$D_k^n := \exp\left(\hat{X}_k^n \cdot \log(T_n)\right).$$

Budući da $\hat{X}_1^n$ s vjerojatnošću X_i poprima vrijednost $X_i = \frac{\log(P_i)}{\log(T_n)}$ onda D_1^n s vjerojatnošću $X_i = \frac{\log(P_i)}{\log(T_n)}$ poprima vrijednost

$$\exp\left(\frac{\log(P_i)}{\log(T_n)} \cdot \log(T_n)\right) = \exp(\log(P_i)) = P_i.$$

Slične tvrdnje vrijede za ostale indekse uz uvjet da uzimamo uvjetnu vjerojatnost. Uočimo još da su slučajne varijable $\{P_i : i \in \mathbb{N}\}$ sortirane silazno dok za $\{D_i^n : i \in \mathbb{N}\}$ to ne vrijedi.

Ukoliko je $N_n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ gdje su $p_1, \ldots, p_r$ međusobno različiti prosti brojevi onda je

$$\mathbb{P}\left[D_1^n = p_1, \ldots D_r^n = p_r \mid N_n\right] = \frac{\log(p_1)}{\log(T_n)} \cdot \frac{\frac{\log(p_2)}{\log(T_n)}}{1 - \frac{\log(p_1)}{\log(T_n)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\frac{\log(p_r)}{\log(T_n)}}{1 - \frac{\log(p_1)}{\log(T_n)} - \ldots - \frac{\log(p_{r-1})}{\log(T_n)}} =$$
$$\frac{\log(p_1)}{\log(T_n)} \cdot \frac{\log(p_2)}{\log(T_n) - \log(p_1)} \cdot \ldots \cdot \frac{\log(p_r)}{\log(T_n) - \log(p_1) - \ldots - \log(p_{r-1})} =$$
$$\frac{\log(p_1)}{\log(T_n)} \cdot \frac{\log(p_2)}{\log\left(\frac{T_n}{p_1}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{\log(p_r)}{\log\left(\frac{T_n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1}}\right)}.$$

Definirajmo slučajne varijable $V_1^n := n$ i $V_i^n := \frac{n}{D_1^n \cdot \ldots \cdot D_{i-1}^n}$ za $i > 1$
te slučajne varijable

$$U_i^n := \frac{\log\left(D_i^n\right)}{\log\left(V_i^n\right)} \text{ za } i \in \mathbb{N}.$$

Kao što notacija daje naslutiti pokazat ćemo da za slučajne varijable U_i^n vrijedi

$$\left(U_1^n, U_2^n, \ldots\right) \Rightarrow \left(U_1, U_2, \ldots\right),$$

gdje su U_i međusobno nezavisne slučajne varijable uniformno distribuirane na $[0, 1]$.

Raspišimo U_i^n za $i = 1, 2, 3$.

$$U_1^n = \frac{\log\left(D_1^n\right)}{\log\left(V_1^n\right)} = \frac{\log\left(D_1^n\right)}{\log(n)},$$
$$U_2^n = \frac{\log\left(D_2^n\right)}{\log\left(V_2^n\right)} = \frac{\log\left(D_2^n\right)}{\log\left(\frac{n}{D_1^n}\right)} = \frac{\log\left(D_2^n\right)}{\log(n) - \log\left(D_1^n\right)} = \frac{\frac{\log\left(D_2^n\right)}{\log(n)}}{1 - \frac{\log\left(D_1^n\right)}{\log(n)}},$$
$$U_3^n = \frac{\log\left(D_3^n\right)}{\log\left(V_3^n\right)} = \frac{\log\left(D_3^n\right)}{\log\left(\frac{n}{D_1^n \cdot D_2^n}\right)} = \frac{\log\left(D_3^n\right)}{\log(n) - \log\left(D_1^n\right) - \log\left(D_2^n\right)} =$$
$$\frac{\frac{\log\left(D_3^n\right)}{\log(n)}}{1 - \frac{\log\left(D_1^n\right)}{\log(n)} - \frac{\log\left(D_2^n\right)}{\log(n)}}.$$

Sada uočavamo još jednu sličnost s prethodnim primjerom ciklusa. Jedini problem je što su nas u prethodnom primjeru zanimale upravo slučajne varijable L_i, ali sada nas ne zanimaju slučajne varijable $\frac{\log(D_i^n)}{\log(n)}$ već slučajne varijable $\frac{\log(D_i^n)}{\log(T_n)}$. Pokažimo da je ta razlika zapravo nebitna. Odnosno formalno dokažimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.13. Za niz slučajnih varijabli $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi

$$\frac{\log(T_n)}{\log(n)} \Rightarrow 1 \text{ kada n } \to \infty.$$

Dokaz. U dokazu koristimo tvrdnje iz teorije brojeva koje su ranije pokazane u teoremu 1.23, odnosno teoremu 1.24.

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1), \quad x \to \infty, \tag{2.1}$$

$$\sum_{p\leq x} \log(p) = O(x), \quad x \to \infty. \tag{2.2}$$

Označimo s $t(m)$ produkt svih različitih prostih faktora prirodnog broja m. Tada je

$$t(N_n) = T_n. \tag{2.3}$$

Budući da vrijedi

$$\mathbb{E}[\log(T_n)] = \sum_{m=1}^{n} \frac{\log(t(m))}{n} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{p|m} \log(p) =$$
$$\sum_{p\leq n} \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \log(p) \geq \sum_{p\leq n} \frac{\log(p)}{p} - \frac{1}{n} \sum_{p\leq n} \log(p)$$

koristeći (2.1) i (2.2) imamo da je $\mathbb{E}[\log(n) - \log(T_n)] \leq \log(n) - \log(n) - O(1) + \frac{1}{n} O(n) = O(1)$ kada $n \to \infty$. Po definiciji 1.21 postoji konstanta M takva da za dovoljno veliki n vrijedi $\mathbb{E}[\log(n) - \log(T_n)] \leq M$. Budući da je $\log(n) > \log(T_n)$ dobivamo

$$0 \leq \mathbb{E}\left[1 - \frac{\log(T_n)}{\log(n)}\right] \leq \frac{M}{\log(n)}.$$

Po teoremu o sendviču slijedi $\mathbb{E}\left[\left|1 - \frac{\log(T_n)}{\log(n)}\right|\right] = \mathbb{E}\left[1 - \frac{\log(T_n)}{\log(n)}\right] \to 0$ kada $n \to \infty$. Budući da konvergencija u L^1 povlači konvergenciju po distribuciji zbog korolara 1.12 dobivamo traženu tvrdnju. □

Kao i u primjeru ciklusa promatrat ćemo slučajne varijable

$$G_1 := U_1,$$
$$G_i := (1 - U_1)(1 - U_2)\dots(1 - U_{i-1})\, U_i, \text{ za } i = 2, 3, \dots .$$

U skladu s prethodnom propozicijom ukoliko pokažemo da slučajne varijable U^n uistinu konvergiraju ka uniformnima istim računom kao i u slučaju ciklusa slijedit će da vrijedi

$$\left(\frac{\log\left(D_1^n\right)}{\log\left(T_n\right)}, \frac{\log\left(D_2^n\right)}{\log\left(T_n\right)}, \dots \right) \Rightarrow (G_1, G_2, \dots).$$

Pokažimo sada da je uporaba oznaka U_i^n bila opravdana, odnosno dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 2.14. *Za slučajne varijable U_i^n vrijedi*

$$(U_1^n, U_2^n, \dots) \Rightarrow (U_1, U_2, \dots),$$

gdje su U_i međusobno nezavisne slučajne varijable uniformno distribuirane na $[0, 1]$.

Dokaz. Po korolaru 1.15 dovoljno je dokazati da za svaki $r \in \mathbb{N}$ i $0 < a_i < b_i < 1$ vrijedi

$$\liminf_n \mathbb{P}\left[a_i < U_i^n \le b_i, i \le r\right] \ge \prod_{i=1}^{r} (b_i - a_i).$$

Budući da je $U_i^n := \frac{\log\left(D_i^n\right)}{\log\left(V_i^n\right)}$, imamo

$$\mathbb{P}\left[a_i < U_i^n \le b_i, i \le r\right] = \mathbb{P}\left[a_i < \frac{\log\left(D_i^n\right)}{\log\left(V_i^n\right)} \le b_i, i \le r\right] =$$
$$\mathbb{P}\left[\log\left((V_i^n)^{a_i}\right) < \log\left(D_i^n\right) \le \log\left((V_i^n)^{b_i}\right), i \le r\right] =$$
$$\mathbb{P}\left[(V_i^n)^{a_i} < D_i^n \le (V_i^n)^{b_i}, i \le r\right] = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}\left[N_n = m, (V_i^n)^{a_i} < D_i^n \le (V_i^n)^{b_i}, i \le r\right] =$$
$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{(v_i)^{a_i} < p_i \le (v_i)^{b_i} \\ p_1, \dots p_r \mid m \\ p_i \ne p_j}} \mathbb{P}\left[N_n = m, D_i^n = p_i, i \le r\right]$$

gdje je $v_i = n\,(p_1 \dots p_{i-1})^{-1}$. Ponovno označimo s $t(m)$ produkt svih različitih prostih faktora prirodnog broja m.

$$\mathbb{P}\left[N_n = m, D_i^n = p_i, i \le r\right] = \mathbb{P}\left[D_1^n = p_1, D_2^n = p_2, \dots D_r^n = p_r \mid N_n = m\right] \cdot \mathbb{P}\left(N_n = m\right) = \frac{\log(p_1)}{\log(t(m))} \cdot \frac{\log(p_2)}{\log\left(\frac{t(m)}{p_1}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{\log(p_r)}{\log\left(\frac{t(m)}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1}}\right)} \cdot \frac{1}{n}.$$

Budući da iz $m \le n$ slijedi $t(m) \le n$ dobivamo ogradu

$$\mathbb{P}\left[a_i < U_i^n \le b_i, i \le r\right] \ge \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{\substack{(v_i)^{a_i} < p_i \le (v_i)^{b_i} \\ p_1, \dots p_r | m \\ p_i \ne p_j}} \prod_{i=1}^{r} \frac{\log(p_i)}{\log\left(\frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1}}\right)}. \tag{2.4}$$

Budući da su svi pribrojnici s desne strane od (2.4) pozitivni ukoliko smanjimo broj elemenata p_i po kojima sumiramo dobit ćemo izraz manji od desne strane u (2.4). Zato definiramo $v_i(\varepsilon) := n\varepsilon\,(p_1 \dots p_{i-1})^{-1} = v_i \cdot \varepsilon$ za $i \le r$ i $0 < \varepsilon < 1$.
Za $i = r$ tada $p_r \le (v_r(\varepsilon))^{b_r}$ i činjenica da je $b_r \in \langle 0, 1\rangle$ implicira da je $p_r \le p_r^{\frac{1}{b_r}} \le n\varepsilon\,(p_1 \dots p_{r-1})^{-1}$ odnosno

$$n\varepsilon \ge p_1 \cdot p_2 \dots p_r. \tag{2.5}$$

Nadalje vrijedi

$$\left\lfloor \frac{n}{p_1 \dots p_r} \right\rfloor \ge \frac{n}{p_1 \dots p_r} - 1 = \frac{n - p_1 \dots p_r}{p_1 \dots p_r} \overset{(2.5)}{\ge} \frac{n - n\varepsilon}{p_1 \dots p_r} = \frac{n\,(1-\varepsilon)}{p_1 \dots p_r}. \tag{2.6}$$

Iz (2.4) i (2.6) slijedi

$$\mathbb{P}\left[a_i < U_i^n \le b_i, i \le r\right] \overset{(2.4)}{\ge} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{\substack{(v_i)^{a_i} < p_i \le (v_i(\varepsilon))^{b_i} \\ p_1, \dots p_r | m \\ p_i \ne p_j}} \prod_{i=1}^{r} \frac{\log(p_i)}{\log\left(\frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1}}\right)} =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{(v_i)^{a_i} < p_i \le (v_i(\varepsilon))^{b_i} \\ p_1 \dots p_r \le n \\ p_i \ne p_j}} \left\lfloor \frac{n}{p_1 \dots p_r} \right\rfloor \prod_{i=1}^{r} \frac{\log(p_i)}{\log\left(\frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1}}\right)} \overset{(2.6)}{\ge}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{(v_i)^{a_i} < p_i \le (v_i(\varepsilon))^{b_i} \\ p_i \ne p_j}} \frac{n\,(1-\varepsilon)}{p_1 \dots p_r} \prod_{i=1}^{r} \frac{\log(p_i)}{\log\left(\frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1}}\right)} = (1-\varepsilon) \sum_{\substack{(v_i)^{a_i} < p_i \le (v_i(\varepsilon))^{b_i} \\ p_i \ne p_j}} \prod_{i=1}^{r} \frac{\log(p_i)}{p_i \cdot \log\left(\frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1}}\right)}$$

Neka je $n_i := n\,(p_1 \ldots p_{i-1})^{-1}$ za $i = 1, 2, \ldots, r$. Za n_i vrijedi $n = n_1 > n_2 > \ldots > n_r$ i

$$\frac{n_i}{ni+1} = \frac{\frac{n}{p_1 \ldots p_{i-1}}}{\frac{n}{p_1 \ldots p_i}} = p_i.$$

Za $p_i \leq (v_i(\varepsilon))^{b_i} = \left(n\varepsilon\,(p_1 \ldots p_{i-1})^{-1}\right)^{b_i} \leq n_i^{b_i}$ vrijedi nejednakost $n_{i+1} \geq n_i^{1-b_i}$. Ukoliko je promijenimo redom za $i = r, r-1, \ldots 1$ dobivamo da je $n_r \geq n_1^{(1-b_{r-1})(1-b_{r-2})\ldots(1-b_1)} = n^{\delta}$, gdje smo s δ označili $\prod_{i=1}^{r-1}(1 - b_i) > 0$.

Ponovno ćemo koristiti rezultat iz teorije brojeva, odnosno teorem 1.23

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + O(1), \quad x \to \infty.$$

Odnosno u našem slučaju

$$\sum_{p \leq (\varepsilon x)^{b_i}} \frac{\log(p)}{p} = b_i \cdot \log(\varepsilon) + b_i \cdot \log(x) + O(1),$$
$$\sum_{p \leq (x)^{a_i}} \frac{\log(p)}{p} = a_i \cdot \log(x) + O(1).$$

Iz čega slijedi

$$\sum_{(x)^{a_i} < p \leq (\varepsilon x)^{b_i}} \frac{\log(p)}{p} = b_i \cdot \log(\varepsilon) + b_i \cdot \log(x) - a_i \cdot \log(x) + O(1) \Longrightarrow$$
$$\sum_{(x)^{a_i} < p \leq (\varepsilon x)^{b_i}} \frac{\log(p)}{p\log(x)} = (b_i - a_i) + b_i\frac{\log(\varepsilon)}{\log(x)} + \frac{O(1)}{\log(x)}.$$

Zbog čega postoji x_ε takav da za svaki $x > x_\varepsilon$ vrijedi

$$\sum_{(x)^{a_i} < p \leq (\varepsilon x)^{b_i}} \frac{\log(p)}{p\log(x)} \geq (b_i - a_i)(1 - \varepsilon).$$

Budući da je $n_i \geq n^{\delta}$ za $n \geq x_\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}$ je $n_i \geq x_\varepsilon$, odnosno upravo dokazana nejednakost vrijedi za svaki n_i, $i = 1, 2, \ldots r$.

$$\mathbb{P}\left[a_i < U_i^n \leq b_i, i \leq r\right] \geq (1 - \varepsilon) \sum_{\substack{(v_i)^{a_i} < p_i \leq (v_i(\varepsilon))^{b_i} \\ p_i \neq p_j}} \prod_{i=1}^{r} \frac{\log(p_i)}{p_i \cdot \log(n_i)} =$$

$$(1-\varepsilon)\sum_{\substack{(v_i)^{a_i}<p_i\leq(v_i(\varepsilon))^{b_i}\\ p_i\neq p_j\\ i=1,\dots,r-1}}\prod_{i=1}^{r-1}\frac{\log(p_i)}{p_i\cdot\log(n_i)}\sum_{\substack{(v_i)^{a_r}<p_r\leq(v_r(\varepsilon))^{b_r}\\ p_i\neq p_r}}\frac{\log(p_r)}{p_r\cdot\log(n_r)}\geq$$

$$(1-\varepsilon)\sum_{\substack{(v_i)^{a_i}<p_i\leq(v_i(\varepsilon))^{b_i}\\ p_i\neq p_j\\ i=1,\dots,r-1}}\prod_{i=1}^{r-1}\frac{\log(p_i)}{p_i\cdot\log(n_i)}\left(\sum_{(v_i)^{a_r}<p_r\leq(v_r(\varepsilon))^{b_r}}\frac{\log(p_r)}{p_r\cdot\log(n_r)}-\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\log(p_i)}{p_i\cdot\log(n_i)}\right)\geq$$

$$(1-\varepsilon)\sum_{\substack{(v_i)^{a_i}<p_i\leq(v_i(\varepsilon))^{b_i}\\ p_i\neq p_j\\ i=1,\dots,r-1}}\prod_{i=1}^{r-1}\frac{\log(p_i)}{p_i\cdot\log(n_i)}\left((b_r-a_r)(1-\varepsilon)-r\cdot\frac{1}{\log(n_r)}\right)\geq$$

$$(1-\varepsilon)\left((b_r-a_r)(1-\varepsilon)-r\cdot\frac{1}{\log(n^\delta)}\right)\sum_{\substack{(v_i)^{a_i}<p_i\leq(v_i(\varepsilon))^{b_i}\\ p_i\neq p_j\\ i=1,\dots,r-1}}\prod_{i=1}^{r-1}\frac{\log(p_i)}{p_i\cdot\log(n_i)}\geq\dots\geq$$

$$(1-\varepsilon)\prod_{i=1}^{r}\left((b_i-a_i)(1-\varepsilon)-\frac{r}{\log(n^\delta)}\right).$$

Iz čega slijedi

$$\liminf_n\mathbb{P}\left[a_i<U_i^n\leq b_i, i\leq r\right]\geq\prod_{i=1}^{r}(b_i-a_i).$$

□

Iz ovog teorema i ranijih napomena izravno dobivamo tvrdnju sljedećeg korolara.

Korolar 2.15.

$$\left(\frac{\log\left(D_1^n\right)}{\log(T_n)},\frac{\log\left(D_2^n\right)}{\log(T_n)},\dots\right)\Longrightarrow(G_1,G_2,\dots).$$

Ono što ponovno kao i u primjeru ciklusa preostaje za pokazati jest što se događa sa

$$\left(\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)},\frac{\log(P_2)}{\log(T_n)},\dots\right),$$

odnosno hoće li se sortiranjem vektora

$$\left(\frac{\log\left(D_1^n\right)}{\log(T_n)},\frac{\log\left(D_2^n\right)}{\log(T_n)},\dots\right)$$

očuvati konvergencija. Budući da su oba primjera svedena na rješavanje istog problema sada je razumno preći na općeniti model koji će obuhvatiti relevantna svojstva oba primjera.

2.3 Prostor Δ

Iskažimo i formalno definiciju čija se važnost dala naslutiti iz dosadašnjih primjera, a pokazat će se centralnim prostorom u ovom poglavlju.

Definicija 2.16. Prostor

$$\Delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : x_1, x_2, \ldots \geq 0, x_1 + x_2 + \ldots = 1\}$$

promatramo kao potprostor od $\mathbb{R}^\infty$ od kojega nasljeđuje topologiju konvergencije po koordinatama.

Topologija konvergencije po koordinatama se tako naziva jer niz $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta$ konvergira k $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty$ ako i samo ako niz $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k x_k gdje smo s x_k^n odnosno x_k označili k-tu koordinatu vektora $\mathbf{x}_n$ odnosno $\mathbf{x}$.

Na prostoru Δ definirat ćemo funkciju rangiranja koja uzima proizvoljni element iz prostora Δ i njegove elemente sortira od većeg prema manjem. S obzirom na razmatranja u prethodna dva primjera jasno je da su svojstva ove funkcije ključna u formalnom dokazivanju tvrdnji koje smo ranije naslutili.

Definicija 2.17. Funkciju rangiranja $\rho : \Delta \to \Delta$ definiramo pomoću relacije

$$\rho(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots),$$

za koju postoji permutacija $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(x_1, x_2, \ldots) = (y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)}, \ldots)$ i vrijedi $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_k \geq \ldots$.

Napomena 2.18. Funkcija ρ je dobro definirana.

Iz $x_1 + x_2 + \ldots = 1$ i $x_1, x_2, \ldots \geq 0$ slijedi da postoji $\max_{k\in\mathbb{N}} x_k$ i da se taj maksimum postiže za neki $n < \infty$ indeksa k. Iz toga slijedi da je dobro definirano $y_1 = \ldots = y_n = \max_{k\in\mathbb{N}} x_k$. Nastavimo li ovaj postupak dobivamo egzistenciju vektora $(y_1, y_2, \ldots)$, a jedinstvenost je očita iz definicije.

Teorem 2.19. *Funkcija rangiranja je neprekidna.*

Dokaz. Budući da je prostor Δ metrički kako bi dokazali da je funkcija ρ neprekidna dovoljno je pokazati da ukoliko niz $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta$ konvergira ka $\mathbf{x} \in \Delta$ onda niz $(\rho(\mathbf{x}_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta$ konvergira k $\rho(\mathbf{x}) \in \Delta$. Po definiciji prostora Δ ove nizovne konvergencije zapravo znače konvergenciju po svakoj od pojedinih koordinata. Iz tog razloga koordinate možemo permutirati po želji pa zato nije smanjenje općenitosti ako pretpostavimo da za vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \Delta$ vrijedi $x_1 \geq x_2 \geq \ldots$. Odnosno da je $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Dakle pretpostavimo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_m^n \to x_m$ kada $n \to \infty$ i dokažimo da tada za svaki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi $\rho(\mathbf{x}_n)_l \to \rho(\mathbf{x})_l = x_l$ kada $n \to \infty$.

Dokažimo prvo tvrdnju za $l = 1$. Iz definicije funkcije ρ znamo da je tada $\rho(\mathbf{x}_n)_l = \max_{k\in\mathbb{N}} x_k^n$. Ukoliko je $x_1 = x_2 = \ldots = x_L > x_{L+1}$ pokažimo da za dovoljno velik n vrijedi $\rho(\mathbf{x}_n)_1 = \max_{k\leq L} x_k^n$. Neka je $\varepsilon > 0$, budući da je $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1$, postoji $K_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{i=K_0}^{\infty} x_i < \varepsilon$. Neka je $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq N_0$ i za svaki $i < K_0$ vrijedi $\left|x_i^n - x_i\right| < \frac{\varepsilon}{K_0}$ iz čega slijedi

$$\sum_{i=K_0}^{\infty} x_i^n = 1 - \sum_{i=1}^{K_0-1} x_i^n < 1 - \sum_{i=1}^{K_0-1} x_i - \frac{\varepsilon}{K_0} = K_0 \cdot \frac{\varepsilon}{K_0} + 1 - \sum_{i=1}^{K_0-1} x_i = \varepsilon + \sum_{i=K_0}^{\infty} x_i < 2\varepsilon, \forall n \geq N_0.$$

Iz činjenice da je $x_1 > 0$ i da $x_1^n \to x_1$ kada $n \to \infty$ slijedi da postoji $N_1 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > N_1$ vrijedi $\left|x_1^n - x_1\right| < \frac{x_1}{3}$. Tada ako u gornjoj nejednakosti uzmemo $\varepsilon = \frac{x_1}{3}$ za $n > \max\{N_0, N_1\}$ vrijedi

$$x_1^n > x_1 - \frac{x_1}{3} = 2 \cdot \frac{x_1}{3} > \sum_{i=K_0}^{\infty} x_i^n \geq x_k^n, \forall k \geq K_0.$$

Odnosno za $n > \max\{N_0, N_1\}$ je $\rho(\mathbf{x}_n)_1 = \max_{k<K_0} x_k^n$. Sada ovu ocjenu možemo i poboljšati, jer budući da je $x_1 > x_{L+1} \geq x_{L+2} \geq \ldots \geq x_{K_0}$ onda postoji N_2 takav da za $n > N_2$ vrijedi $x_1^n > x_{L+1}^n, x_1^n > x_{L+2}^n, \ldots, x_1^n > x_{K_0}^n$.

Budući da za svaki $k \leq L$ vrijedi $x_k^n \to x_k = x_1$ kada $n \to \infty$ iz gore pokazanog slijedi i da $\rho(\mathbf{x}_n)_1 = \max_{k\leq L} x_k^n \to x_1 = \rho(\mathbf{x})_1$ kada $n \to \infty$.

Uočimo da promatranjem l-te najveće vrijednosti umjesto maksimuma isti argumenti povlače da tvrdnja vrijedi za svaki $l \leq L$. Odnosno možemo zaključiti da za dovoljno veliki n i za svaki $l \leq L$ vrijedi $\rho(\mathbf{x}_n)_l \in \{x_1^n, \ldots x_L^n\}$.

Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $l = L+1$, a onda će zbog analognih argumenata tvrdnja vrijediti i općenito primjenom matematičke indukcije.

Ukoliko je $x_{L+1} = 0$ onda je $x_i = 0$ za svaki $i \geq L + 1$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $N_3 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq N_3$ i za svaki $i \leq L$ vrijedi $\left|x_i^n - x_i\right| < \frac{\varepsilon}{L+1}$ iz čega slijedi

$$\sum_{i=L+1}^{\infty} x_i^n = 1 - \sum_{i=1}^{L} x_i^n < 1 - \sum_{i=1}^{L}\left(x_i - \frac{\varepsilon}{L+1}\right) =$$

$$(L+1) \cdot \frac{\varepsilon}{L+1} + 1 - \sum_{i=1}^{L} x_i = \varepsilon + \sum_{i=L+1}^{\infty} x_i = \varepsilon, \ \forall n \geq N_3.$$

Budući da smo ranije već dokazali da za dovoljno veliki n vrijedi $\rho(\mathbf{x}_n)_l \in \{x_1^n, \ldots x_L^n\}$ sada možemo zaključiti da za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji $N_4 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq N_4$ vrijedi $\rho(\mathbf{x}_n)_{L+1} \leq \sum_{i=L+1}^{\infty} x_i^n < \varepsilon$. Odnosno da $\rho(\mathbf{x}_n)_{L+1} \to 0 = \rho(\mathbf{x})_{L+1}$ kada $n \to \infty$.

Preostaje pokazati da tvrdnja teorema vrijedi i u slučaju $x_{L+1} \neq 0$.

Ponovno istim argumentima kao i ranije dobivamo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $K_1, N_5 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{i=K_1}^{\infty} x_i < \varepsilon$ i za svaki $n \geq N_5$ je $\sum_{i=K_1}^{\infty} x_i^n < 2\varepsilon$ Iz činjenice da je $x_{L+1} > 0$ i da $x_{L+1}^n \to x_{L+1}$ kada $n \to \infty$ slijedi da postoji $N_6 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > N_6$ vrijedi $\left|x_{L+1}^n - x_{L+1}\right| < \frac{x_{L+1}}{3}$. Tada ako u gornjoj nejednakosti uzmemo $\varepsilon = \frac{x_{L+1}}{3}$ za $n > \max\{N_5, N_6\}$ vrijedi

$$x_{L+1}^n > x_{L+1} - \frac{x_{L+1}}{3} = 2 \cdot \frac{x_{L+1}}{3} > \sum_{i=K_1}^{\infty} x_i^n \geq x_k^n, \forall k \geq K_1.$$

Odnosno ponovno koristeći činjenicu da za dovoljno veliki n vrijedi $\rho(\mathbf{x}_n)_l \in \{x_1^n, \dots x_L^n\}$ dobivamo da je $\rho(\mathbf{x}_n)_{L+1} = \max_{L<k<K_1} x_k^n$. Sada ovu ocjenu možemo i poboljšati, jer uz oznake $x_{L+1} = ... = x_S > x_{S+1} \geq x_{S+2} \geq \dots \geq x_K$ postoji N_7 takav da za $n > N_7$ vrijedi $x_{L+1}^n > x_{S+1}^n, x_{L+1}^n > x_{S+2}^n, \dots x_{L+1}^n > x_{K_1}^n$. Iz čega slijedi da ponovno za dovoljno veliki n vrijedi $\rho(\mathbf{x}_n)_{L+1} = \max_{L<k\leq S} x_k^n$.

Budući da za svaki $L < k \leq S$ vrijedi $x_k^n \to x_k = x_{L+1}$ kada $n \to \infty$ iz gore pokazanog slijedi i da $\rho(\mathbf{x}_n)_{L+1} = \max_{L<k\leq S} x_k^n \to x_{L+1} = \rho(\mathbf{x})_{L+1}$ kada $n \to \infty$. Čime je dokaz gotov. □

Sada smo u mogućnosti vratiti se ranije pretpostavljenoj tvrdnji u primjeru ciklusa. Ustvrdili smo da intuitivno očekujemo da će iz $L^n \Longrightarrow G$ slijediti da isto vrijedi i za silazno rangirane cikluse. A sljedeći korolar nam tu činjenicu i formalno dokazuje.

Korolar 2.20.

$$\mathbb{L}_{(.)}^n \Longrightarrow \mathbb{G}_{(.)}.$$

Dokaz. Od prije znamo da je $\mathbb{L}^n \in \Delta$ i da je $\mathbb{P}[\mathbb{G} \in \Delta] = 1$, pa ukoliko $\mathbb{G}$ izmijenimo na skupu vjerojatnosti 0 dobivamo da su $\mathbb{L}^n, \mathbb{G} \in \Delta$. Kako je $\mathbb{L}_{(.)}^n = \rho(\mathbb{L}^n)$ i $\mathbb{G}_{(.)} = \rho(\mathbb{G})$, a funkcija ρ po teoremu 2.19 neprekidna onda iz teorema 1.16 i korolara 2.10 slijedi tražena tvrdnja. □

Analogan rezultat dobivamo i u primjeru djelitelja

Korolar 2.21.

$$\left(\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)}, \frac{\log(P_2)}{\log(T_n)}, \dots\right) \Longrightarrow \mathbb{G}_{(.)}.$$

Dokaz. Od prije znamo da je

$$\left(\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)}, \frac{\log(P_2)}{\log(T_n)}, \dots\right) \in \Delta$$

i da je $\mathbb{P}[G \in \Delta] = 1$. Ako $\mathbb{G}$ izmijenimo na skupu vjerojatnosti 0 dobivamo da je i $\mathbb{G} \in \Delta$. Kako je

$$\left(\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)}, \frac{\log(P_2)}{\log(T_n)}, \dots \right) = \rho \left(\frac{\log\left(D_1^n\right)}{\log(T_n)}, \frac{\log\left(D_2^n\right)}{\log(T_n)}, \dots \right)$$

i $\mathbb{G}_{(.)} = \rho(\mathbb{G})$, a funkcija ρ po teoremu 2.19 neprekidna onda iz teorema 1.16 i korolara 2.15 slijedi tražena tvrdnja. $\square$

Ovime je završena rasprava iz oba primjera i u nastavku se posvećujemo proučiti svojstva slučajnog procesa $\mathbb{G}_{(.)}$ na prostoru Δ. Naravno da je to ključno u proučavanju graničnih svojstava za primjere ciklusa i djelitelja.

Poglavlje 3

Poisson-Dirichletova razdioba

U ovom poglavlju cilj nam je definirati, a potom opisati te dokazati glavna svojstva Poisson-Dirichletove razdiobe čija je važnost uočena u prethodnom poglavlju.

3.1 Povezanost Dirichletove i Poisson-Dirichletove razdiobe

Promatrat ćemo nešto općenitiji model nego u prethodnom poglavlju. Do sada smo za definiciju slučajne varijable G_k koristili uniformnu distribuciju, a sada uzimamo beta distribuciju definiranu u 1.6.

Definicija 3.1. Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, F, \mathbb{P})$ i na njemu nezavisne slučajne varijable $B_1, B_2, \ldots$ s beta-$(1, \theta)$, $\theta > 0$ distribucijom. Definiramo slučajne varijable $G_1, G_2, \ldots$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} G_1 &:= B_1, \\ G_k &:= (1 - B_1) \cdot \ldots \cdot (1 - B_{k-1})\, B_k, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Neka je također $\mathbb{G} := (G_1, G_2, \ldots)$.

Ova definicija se poklapa s ranijom u slučaju $\theta = 1$ budući da je uniformna distribucija beta-$(1, 1)$ distribucija, a formule kojom su definirane G_k su jednake. Za ovako definirane, odnosno poopćene slučajne varijable $G_1, G_2, \ldots$ također vrijedi $\sum_{k=1}^{\infty} G_k = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} (1 - B_k)$, što se pokazuje isto kao i u posebnom slučaju iz prethodnog poglavlja. Također, budući da je $\sum_{k=1}^{\infty} G_k = 1$ *g.s.*, ponovno možemo izmijeniti vrijednost od $\mathbb{G}$ na skupu vjerojatnosti 0 tako da vrijedi $\mathbb{G} \in \Delta$. Zato je dobro definirano $\mathbb{G}_{(.)} := \rho(\mathbb{G})$.

Definicija 3.2. Razdiobu slučajnog vektora $\mathbb{G}_{(.)}$ na prostoru Δ nazivamo *Poisson-Dirichletova razdioba* s parametrom θ.

Napomena 3.3. U prethodnom poglavlju pokazali smo da slučajni vektori

$$\mathbb{L}^n_{(.)} \text{ i } \left(\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)}, \frac{\log(P_2)}{\log(T_n)}, \ldots\right)$$

konvergiraju prema Poisson-Dirichletovoj razdiobi s parametrom 1.

Cilj ovog poglavlja je odrediti funkciju gustoće slučajnog vektora $\mathbb{G}_{(.)}$ i njegovih komponenti. Pokazuje se da se to najjednostavnije postiže neizravnim putem. U tu svrhu promotrimo niz slučajnih vektora $\mathbb{B}^n = (B^n_1, B^n_2, \ldots)$ na prostoru $[0,1]^\infty$. Neka su komponente $B^n_1, B^n_2, \ldots$ međusobno nezavisne slučajne varijable, takve da B^n_i ima beta-$(\alpha+1, (n-i)\alpha)$ distribuciju, gdje je koeficijent $\alpha > 0$. Tada je, po (1.6), funkcija gustoće od B^n_i dana formulom

$$h^n_i(x) = \frac{\Gamma((n-i+1)\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma((n-i)\alpha)} x^\alpha (1-x)^{(n-i)\alpha-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x). \tag{3.1}$$

Uočimo da za fiksan r kada pustimo $n \to \infty$ ukoliko dodatno zahtijevamo da vrijedi i $n\alpha \to \theta$ za svaki $1 \le i \le r$ imamo $B^n_i \Longrightarrow B_i$, a onda i $(B^n_1, \ldots B^n_r) \Longrightarrow (B_1, \ldots B_r)$.

Napomena 3.4. U nastavku kada koristimo parametar α podrazumijevat ćemo da ako $n \to \infty$ onda $n\alpha \to \theta$, pa i $\alpha \to 0$, drugim riječima α se mijenja u ovisnosti o n čak i kada to eksplicitno nije naglašeno. Formalno možemo definirati funkciju $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takvu da je $\lim_{n\to\infty} n\alpha(n) = \theta$ i slučajne varijable B^n_i koje imaju beta-$(\alpha(n)+1, (n-i)\alpha(n))$ distribuciju. U praksi ćemo nastaviti pisati α, ali podrazumijevamo značenje tog parametra u skladu s ovom napomenom.

Neka je nadalje slučajni vektor $\mathbb{G}^n = (G^n_1, G^n_2, \ldots)$ definiran s

$$\begin{aligned} G^n_1 &:= B^n_1, \\ G^n_k &:= (1-B^n_1)\cdot\ldots\cdot(1-B^n_{k-1}) B^n_k, \quad k \ge 2. \end{aligned}$$

Po teoremu 1.16 i iz prethodnih razmatranja slijedi $(G^n_1, \ldots G^n_r) \Longrightarrow (G_1, \ldots G_r)$.

Propozicija 3.5. Funkcija gustoće slučajnog vektora $(G^n_1, G^n_2, \ldots, G^n_r)$ je $f^n_r : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$,

$$f^n_r(z_1, z_2, \ldots, z_r) = h^n_1(z_1)\, h^n_2\left(\frac{z_2}{1-z_1}\right) \ldots h^n_r\left(\frac{z_r}{1-z_1-\ldots-z_{r-1}}\right) \prod_{i=1}^{r-1} (1-z_1-\ldots z_i)^{-1}$$

za $(z_1, z_2, \ldots, z_r)$ takve da je $z_1, z_2, \ldots, z_r > 0$ i $z_1 + z_2 + \ldots + z_r < 1$, a $f^n_r \equiv 0$ inače.

Dokaz. Budući da su $B_1^n, B_2^n, \ldots B_r^n$ međusobno nezavisne slučajne varijable s funkcijama gustoće $h_1^n, h_2^n, \ldots h_r^n$ redom, slijedi da je funkcija gustoće slučajnog vektora $(B_1^n, B_2^n, \ldots B_r^n)$ funkcija $\psi : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$,

$$\psi(z_1, z_2, \ldots, z_r) := h_1^n(z_1)\, h_2^n(z_2) \ldots h_r^n(z_r)\,.$$

Budući da je $(G_1^n, G_2^n, \ldots, G_r^n) = (B_1^n, (1 - B_1^n)\, B_2^n, \ldots, (1 - B_1^n) \cdot \ldots \cdot (1 - B_{r-1}^n)\, B_r^n)$ definiramo funkciju $g : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$,

$$g(z_1, z_2, \ldots, z_r) := (z_1, (1 - z_1)\, z_2, \ldots, (1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (1 - z_{r-1})\, z_r)\,.$$

i prostor

$$T := \left\{ (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{R}^r : s_1, \ldots, s_r > 0, \sum_{i=1}^{r} s_i < 1 \right\}$$

Vrijedi $(G_1^n, G_2^n, \ldots, G_r^n) = g(B_1^n, B_2^n, \ldots B_r^n)$ i funkcija $g : \langle 0, 1 \rangle^r \to T$ je Borelova i bijekcija. Nadalje g^{-1} djeluje na vektor $(z_1, z_2, \ldots, z_r) \in T$ na sljedeći način

$$g^{-1}(z_1, z_2, \ldots, z_r) := \left(z_1, \frac{z_2}{1 - z_1}, \ldots, \frac{z_r}{1 - z_1 - \ldots - z_{r-1}} \right),$$

iz čega slijedi da je $g^{-1} \in C^1(T)$. Odredimo Dg^{-1}.

$$Dg^{-1} = \left\| \begin{bmatrix} 1 & \frac{z_2}{(1-z_1)^2} & \frac{z_3}{(1-z_1-z_2)^2} & \cdots & \frac{z_r}{(1-z_1-\ldots z_{r-1})^2} \\ 0 & \frac{1}{(1-z_1)} & \frac{z_3}{(1-z_1-z_2)^2} & \cdots & \frac{z_r}{(1-z_1-\ldots z_{r-1})^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-z_1-z_2)} & \cdots & \frac{z_r}{(1-z_1-\ldots z_{r-1})^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(1-z_1-\ldots z_{r-1})} \end{bmatrix} \right\| \overset{\text{gornje trokutasta matrica}}{=}$$

$$\prod_{i=1}^{r-1} (1 - z_1 - \ldots z_i)^{-1} \neq 0$$

za $(z_1, z_2, \ldots, z_r) \in T$. Budući da su zadovoljeni uvjeti teorema 11.8. u Sarapa [4] slijedi da je funkcija gustoće slučajnog vektora $(G_1^n, G_2^n, \ldots, G_r^n)$ dana s

$$f_r^n(z_1, z_2, \ldots, z_r) = \psi g^{-1}(z_1, z_2, \ldots, z_r) \left| Dg^{-1} \right| \mathbb{1}_T(z_1, z_2, \ldots, z_r) =$$

$$h_1^n(z_1)\, h_2^n\left(\frac{z_2}{1 - z_1}\right) \ldots h_r^n\left(\frac{z_r}{1 - z_1 - \ldots - z_{r-1}}\right) \prod_{i=1}^{r-1} (1 - z_1 - \ldots z_i)^{-1}\, \mathbb{1}_T(z_1, z_2, \ldots, z_r)\,.$$

$\square$

Iz prethodne propozicije, kada uvrstimo čemu je po (3.1) jednako h_1^n slijedi da je

$$\mathbb{P}\left[(G_1^n,\dots G_r^n)\in H\right]=\int\limits_H h_1^n(z_1)\,h_2^n\left(\frac{z_2}{1-z_1}\right)\dots h_r^n\left(\frac{z_r}{1-z_1-\dots-z_{r-1}}\right)\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{r-1}(1-z_1-\dots z_i)^{-1}\,\mathbb{1}_T(z_1,z_2,\dots,z_r)\,dz_1\dots dz_r=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^r}\prod_{i=1}^{r}\frac{\Gamma((n-i+1)\alpha+1)}{\Gamma((n-i)\alpha)}\int\limits_H z_1^\alpha\dots z_r^\alpha\cdot(1-z_1-\dots-z_r)^{(n-r)\alpha-1}\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{r-1}(1-z_1-\dots z_i)^{-1}\,\mathbb{1}_T(z_1,z_2,\dots,z_r)\,dz_1\dots dz_r.$$

Koristeći svojstvo $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$ odredimo posebno vrijednost izraza

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^r}\prod_{i=1}^{r}\frac{\Gamma((n-i+1)\alpha+1)}{\Gamma((n-i)\alpha)}=\frac{1}{\alpha^r\Gamma(\alpha)^r}\prod_{i=1}^{r}\frac{((n-i+1)\alpha)\,\Gamma((n-i+1)\alpha)}{\Gamma((n-i)\alpha)}=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)^r}\cdot\frac{\Gamma((n-1+1)\alpha)}{\Gamma((n-1)\alpha)}\cdot\frac{\Gamma((n-2+1)\alpha)}{\Gamma((n-2)\alpha)}\cdot\ldots\cdot\frac{\Gamma((n-r+1)\alpha)}{\Gamma((n-r)\alpha)}\prod_{i=1}^{r}(n-i+1)=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)^r}\cdot\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma((n-r)\alpha)}\cdot(n)_r.$$

Iz pokazanog slijedi

$$\mathbb{P}\left[(G_1^n,\dots G_r^n)\in H\right]=\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(\alpha)^r\,\Gamma((n-r)\alpha)}\int\limits_H (n)_r\cdot z_1^{\alpha-1}\dots z_r^{\alpha-1}\cdot(1-z_1-\dots-z_r)^{(n-r)\alpha-1}\cdot$$
$$z_1\frac{z_2}{1-z_1}\cdots\frac{z_r}{(1-z_1-\dots z_{r-1})}\mathbb{1}_T(z_1,z_2,\dots,z_r)\,dz_1\dots dz_r. \tag{3.2}$$

Za daljnje proučavanje svojstava Poisson-Dirichletove razdiobe okrenut ćemo se modelu koji proizlazi iz populacijske genetike. Pretpostavimo da se promatrana populacija sastoji od jedinki koje pripadaju jednom od n različitih tipova. Označimo s Z_i, $i=1,2,\dots n$ relativne frekvencije i-tog tipa. Budući da je $Z_1+\dots Z_n=1$ dovoljno je promatrati vektor $(Z_1,\dots Z_{n-1})$. Razdioba vektora $(Z_1,\dots Z_{n-1})$ naziva se *Dirichletova razdioba*, a odgovarajuća funkcija gustoće dana je formulom

$$f_n(z_1,\dots z_{n-1})=\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^n(\alpha)}z_1^{\alpha-1}\dots z_{n-1}^{\alpha-1}(1-z_1-\dots-z_{n-1})^{\alpha-1}, \tag{3.3}$$

gdje vektor $(z_1,\dots z_{n-1})$ zadovoljava $z_1+\dots+z_{n-1}<1$ i $z_1,\dots z_{n-1}>0$.

Parametar α u zapisu predstavlja stopu mutacije po pojedinom tipu. Nas će zanimati slučaj u kojem se broj tipova beskonačno povećava, jer se svakom mutacijom u populaciji stvaraju novi tipovi, ali ukupna stopa mutacije za cijelu populaciju ostaje finska. Formalno promatrat ćemo što se događa kada $n \to \infty$, ali parametar $n\alpha$ ne teži u 0 već u pozitivnu konstantu. Uočimo da se ova situacija poklapa s ranije spomenutim slučajem od interesa kada je $n \to \infty$ i $n\alpha \to \theta$. Kao i u prethodnom poglavlju zanimat će nas sortirane, odnosno konkretno najveće relativne frekvencije $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \ldots Z_{(r)}$.

Napomena 3.6. Uočimo da smo odlukom da promatramo samo prvih r slučajnih varijabli izgubili jedno od ranije bitnih svojstava da je suma elemenata u promatranom slučajnom vektoru 1.

Uvedimo zato formalno vektor $\mathbb{Z}^n = (Z_1^n, Z_2^n, \ldots)$ i neka je on slučajni element prostora Δ za koji je prvih $n-1$ komponenata definirano pomoću funkcije gustoće dane u (3.3), n-ta komponenta dana formulom $1 - Z_1^n - \ldots - Z_{n-1}^n$, a za sve veće komponente vrijedi $Z_i^n = 0$. Označimo s $Z_{(.)}^n := \rho Z^n$.

Za ovako definiran Z^n i fiksan r promatrat ćemo vektor

$$\left(Z_{(1)}^n, Z_{(2)}^n, \ldots Z_{(r)}^n\right),$$

kada $n \to \infty$ i $n\alpha \to \theta > 0$.

Propozicija 3.7. Ako je slučajni vektor $(Z_1^n, \ldots Z_{n-1}^n)$ dan funkcijom gustoće (3.3) onda je za $1 \leq r < n$ funkcija gustoće vektora $(Z_1^n, \ldots Z_r^n)$ u točki $(z_1, \ldots z_r)$, gdje je $z_1, \ldots, z_r > 0$ i $z_1 + \ldots + z_r < 1$ dana formulom

$$h_r(z_1, \ldots z_r) = \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^r(\alpha)\,\Gamma((n-r)\alpha)} z_1^{\alpha-1} \ldots z_r^{\alpha-1} (1 - z_1 - \ldots - z_r)^{(n-r)\alpha-1}.$$

Dokaz. Za proizvoljan $1 \leq r < n$ označimo s h_r funkcija gustoće vektora $(Z_1^n, \ldots Z_r^n)$. Označimo s $m := n - r - 1$ i $\sigma := \sum_{i=1}^{r} z_i$. Zbog (3.3) slijedi da za vektor $(z_1, \ldots z_r)$, takav da je $z_1, \ldots, z_r > 0$ i $z_1 + \ldots + z_r < 1$ vrijedi

$$h_r(z_1, \ldots z_r) = \int\limits_{\substack{s_1, \ldots s_m > 0 \\ s_1 + \ldots + s_m < 1 - \sigma}} f_n(z_1, \ldots z_r, s_1, \ldots s_m) =$$

$$\int\limits_{\substack{s_1, \ldots s_m > 0 \\ s_1 + \ldots + s_m < 1 - \sigma}} \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^n(\alpha)} (z_1 \ldots z_r)^{\alpha-1} (s_1 \ldots s_m)^{\alpha-1} (1 - \sigma - s_1 - \ldots - s_m)^{\alpha-1} ds_1 \ldots ds_m =$$

$$\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^n(\alpha)} (z_1 \ldots z_r)^{\alpha-1} \int\limits_{\substack{s_1, \ldots s_m > 0 \\ s_1 + \ldots + s_m < 1 - \sigma}} (s_1 \ldots s_m)^{\alpha-1} (1 - \sigma - s_1 - \ldots - s_m)^{\alpha-1} ds_1 \ldots ds_m =$$

(ukoliko na uglatu zagradu primjenimo tvrdnju korolara 1.4 uz $f(t) = (1-\sigma-t)^{\alpha-1}$)

$$\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^n(\alpha)}(z_1\dots z_r)^{\alpha-1}\frac{\Gamma^m(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)}\int\limits_0^{1-\sigma}(1-\sigma-t)^{\alpha-1}t^{m\alpha-1}dt = \left[s=\frac{t}{1-\sigma},\ \ ds=\frac{dt}{1-\sigma}\right] =$$

$$\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(m\alpha)\Gamma^{r+1}(\alpha)}(z_1\dots z_r)^{\alpha-1}\int\limits_0^1(1-\sigma)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}(1-\sigma)^{m\alpha-1}s^{m\alpha-1}(1-\sigma)\,ds =$$

$$\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(m\alpha)\Gamma^{r+1}(\alpha)}(z_1\dots z_r)^{\alpha-1}(1-\sigma)^{(n-r)\alpha-1}\int\limits_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{m\alpha-1}ds \overset{propozicija 1.2}{=}$$

$$\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(m\alpha)\Gamma^{r+1}(\alpha)}(z_1\dots z_r)^{\alpha-1}(1-\sigma)^{(n-r)\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m\alpha)}{\Gamma((n-r)\alpha)} =$$

$$\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^r(\alpha)\Gamma((n-r)\alpha)}z_1^{\alpha-1}\dots z_r^{\alpha-1}(1-z_1-\dots z_r)^{(n-r)\alpha-1}.$$

□

Ako umjesto promatranja konkretnog podskupa $\{1,2,\dots,r\}$ uzmemo proizvoljni podskup skupa $\{1,2,\dots,n\}$ duljine r i označimo ga s $\{i_1,i_2,\dots,i_r\}$ zbog simetrije i prethodne propozicije vrijedi tvrdnja sljedećeg korolara.

Korolar 3.8. Funkcija gustoće vektora $\left(Z^n_{i_1},\dots Z^n_{i_r}\right)$ u točki $(z_1,\dots z_r)$, gdje je $z_1,\dots,z_r>0$ i $z_1+\dots+z_r<1$ dana je formulom

$$h_r(z_1,\dots z_r) = \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^r(\alpha)\Gamma((n-r)\alpha)}z_1^{\alpha-1}\dots z_r^{\alpha-1}(1-z_1-\dots-z_r)^{(n-r)\alpha-1}. \tag{3.4}$$

Označimo s $\left(Z^n_{\tau_1},\dots Z^n_{\tau_r}\right)$ vektor dobiven kao u napomeni 1.19 iz $\mathbb{Z}^n$, odnosno vektor $\left(\hat{Z}^n_1,\dots\hat{Z}^n_r\right)$. Budući da je po propoziciji 1.20,

$$\mathbb{P}[\tau_1=i_1,\dots,\tau_r=i_r \mid Z^n] = Z^n_{i_1}\frac{Z^n_{i_2}}{1-Z^n_{i_1}}\cdots\frac{Z^n_{i_r}}{1-Z^n_{i_1}-\dots-Z^n_{i_{r-1}}} =: p_r\left(Z^n_{i_1},\dots Z^n_{i_r}\right),$$

vrijedi

$$\mathbb{P}\left[\left(\hat{Z}^n_1,\dots\hat{Z}^n_r\right)\in H \mid Z^n\right] = \sum p_r\left(Z^n_{i_1},\dots Z^n_{i_r}\right)\mathbb{1}_H\left(Z^n_{i_1},\dots Z^n_{i_r}\right),$$

gdje se sumira po uređenim r-torkama međusobno različitih elemenata skupa $\{1,2,\dots,n\}$. Uočimo da tih pribrojnika ima $(n)_r = n(n-1)\dots(n-r+1)$

Budući da za događaj A i slučajnu varijablu X vrijedi

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid X]] = \mathbb{E}[\mathbb{P}[A \mid X]]$$

imamo sljedeću relaciju

$$\mathbb{P}\left[\left(\hat{Z}_1^n, \dots \hat{Z}_r^n\right) \in H\right] = \int_H \sum p_r(z_1, \dots z_r)\, h_r(z_1, \dots z_r)\, dz_1 \dots dz_r \overset{zbog simetrije}{=}$$
$$\int_H (n)_r p_r(z_1, \dots z_r)\, h_r(z_1, \dots z_r)\, dz_1 \dots dz_r =$$
$$\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(\alpha)^r \Gamma((n-r)\alpha)} \int_H (n)_r \cdot z_1^{\alpha-1} \dots z_r^{\alpha-1} \cdot (1 - z_1 - \dots - z_r)^{(n-r)\alpha-1} \cdot$$
$$z_1 \frac{z_2}{1-z_1} \dots \frac{z_r}{(1-z_1-\dots z_{r-1})} \mathbb{1}_T(z_1, z_2, \dots, z_r)\, dz_1 \dots dz_r \overset{(3.2)}{=} \mathbb{P}\left[(G_1^n, \dots G_r^n) \in H\right].$$

Iz čega slijedi da su vektori $\left(\hat{Z}_1^n, \dots \hat{Z}_r^n\right)$ i $(G_1^n, \dots G_r^n)$ jednako distribuirani.

Korolar 3.9.

$$\mathbb{Z}_{(.)}^n \Longrightarrow \mathbb{G}_{(.)} \;\; n \to \infty.$$

Dokaz. Ranije smo pokazali da $(G_1^n, \dots G_r^n) \Longrightarrow (G_1, \dots G_r)$ iz čega po teoremu 2.19 slijedi da $\rho(\mathbb{G}^n) \Longrightarrow \rho(\mathbb{G})$. Ako uz tu konvergenciju uvažimo i napomene prije iskaza korolara slijedi $\rho\left(\hat{\mathbb{Z}}^n\right) \Longrightarrow \rho(\mathbb{G})$. Budući da je $\hat{\mathbb{Z}}^n$ permutacija slučajnog vektora $\mathbb{Z}^n$ vrijedi $\rho\left(\hat{\mathbb{Z}}^n\right) = \rho(\mathbb{Z}^n)$. Dakle imamo

$$\mathbb{Z}_{(.)}^n = \rho(\mathbb{Z}^n) = \rho\left(\hat{\mathbb{Z}}^n\right) \Longrightarrow \rho(\mathbb{G}) = \mathbb{G}_{(.)} \;\; n \to \infty,$$

čime je korolar dokazan. □

U nastavku ćemo proučavati granična svojstva vektora $\mathbb{Z}_{(.)}^n$, ali da bi mogli doći do potrebnih zaključaka prvo je potrebno dokazati određen dio tehničkih tvrdnji.

3.2 Tehnički rezultati

Za fiksan $r \in \mathbb{N}$ neka je

$$M_r := \left\{(z_1, \dots z_r) \in \mathbb{R}^r : 1 > z_1 > \dots z_r > 0, \sum_{i=1}^r z_i < 1\right\}. \tag{3.5}$$

Neka je za fiksni α funkcija $g_m(.\,;\alpha)$ konvolucija funkcije $\alpha x^{\alpha-1}$ sa samom sobom na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ m puta.

Raspišimo malo detaljnije funkciju $g_m(.\,;\alpha)$ za $m = 1, 2, 3$:

$$g_1(x\,;\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$g_2(x\,;\alpha) = \int_0^1 \alpha y^{\alpha-1} \cdot \alpha(x-y)^{\alpha-1} dy = \alpha^2 \int_0^1 (x-y)^{\alpha-1} y^{\alpha-1} dy$$

$$g_3(x\,;\alpha) = \int_0^1 \alpha z^{\alpha-1} \cdot \alpha^2 \int_0^1 y^{\alpha-1}(x-z-y)^{\alpha-1} dy\,dz = \alpha^3 \iint\limits_{0<y,z<1} (x-y-z)^{\alpha-1} y^{\alpha-1} z^{\alpha-1} dydz$$

Matematičkom indukcijom za općeniti m dobivamo formulu

$$g_m(x\,;\alpha) = \alpha^m \int\limits_{0<s_1,\ldots,s_{m-1}<1} (x - s_1 - \ldots - s_{m-1})^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{m-1} s_i^{\alpha-1}\, ds_1 \ldots ds_{m-1}.$$

Sada smo u mogućnosti pokazati sljedeću lemu koja će nam biti od pomoći pri određivanju traženih svojstava Poisson-Dirichletove razdiobe.

Lema 3.10. Gustoća slučajnog vektora $\left(Z^n_{(1)}, Z^n_{(2)}, \ldots, Z^n_{(r)}\right)$ u točki $(z_1, z_2, \ldots, z_r) \in M_r$ dana je s

$$n(n-1)\ldots(n-r+1)\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^n(\alpha)}\alpha^{-(n-r)} z_1^{\alpha-1} \ldots z_{r-1}^{\alpha-1} z_r^{(n-r+1)\alpha-2} g_{n-r}\left(\frac{1 - z_1 - \ldots - z_r}{z_r}; \alpha\right).$$

Dokaz. Označimo s $m = n - 1 - r$, $s = \sum_{i=1}^r z_i$, $c = \frac{1-s}{z_r}$. Gustoća slučajnog vektora $(Z^n_1, Z^n_2, \ldots, Z^n_{n-1})$ dana je s

$$f_n(z_1, \ldots z_{n-1}) = \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^n(\alpha)} z_1^{\alpha-1} \ldots z_{n-1}^{\alpha-1} (1 - z_1 - \ldots - z_{n-1})^{\alpha-1} \cdot \mathbb{1}_T(z_1, \ldots z_{n-1}),$$

gdje je $T = \left\{(x_1, \ldots x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1, \ldots x_{n-1} > 0, x_1 + \ldots + x_{n-1} < 1\right\}$. Uz ranije definirane oznake parcijalnom integracijom želimo dobiti gustoću slučajnog vektora $\left(Z^n_{(1)}, \ldots Z^n_{(r)}\right)$. Budući da su koordinate slučajnog vektora $\left(Z^n_{(1)}, \ldots Z^n_{(r)}\right)$ sortirane zanimat će nas samo one permutacije vektora $(z_1, \ldots z_{n-1})$ za koje je $z_1 > z_2 > \ldots > z_r > z_{r+1}, \ldots, z_{n-1}, z_n$, gdje je $z_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} z_i$. Kako bi dobili taj uređaj, zbog simetričnosti izraza, dovoljno je formulu dobivenu parcijalnom integracijom pomnožiti s faktorom $(n)_r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$. Odnosno dobivamo formulu za gustoću

$$(n)_r \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^n(\alpha)} z_1^{\alpha-1} \ldots z_r^{\alpha-1} \int\limits_{\substack{0<y_1,\ldots y_m<z_r \\ 0<1-s-y_1-\ldots-y_m<z_r}} y_1^{\alpha-1} \ldots y_m^{\alpha-1} \left(1 - s - \sum_{i=1}^m y_1\right)^{\alpha-1} dy_1 \ldots dy_m,$$

za $(z_1,\dots z_r) \in M_r$. Dalje računamo vrijednost integrala

$$\int\limits_{\substack{0<y_1,\dots y_m<z_r\\ 0<1-s-y_1-\dots-y_m<z_r}} y_1^{\alpha-1}\dots y_m^{\alpha-1}\left(1-s-\sum_{i=1}^{m} y_1\right)^{\alpha-1} dy_1\dots dy_m =$$

$$[y_i = z_r s_i,\ dy_i = z_r ds_i,\ i = 1,\dots m]$$

$$\int\limits_{\substack{0<s_1,\dots s_m<1\\ 0<c-s_1-\dots-s_m<1}} (z_r s_1)^{\alpha-1}\dots(z_r s_m)^{\alpha-1}\, z_r^{\alpha-1}\left(c-\sum_{i=1}^{m} s_i\right)^{\alpha-1} z_r^m ds_1\dots ds_m =$$

$$z_r^{(\alpha-1)(m+1)+m}\int\limits_{\substack{0<s_1,\dots s_m<1\\ c-1<s_1+\dots+s_m<c}} s_1^{\alpha-1}\dots s_m^{\alpha-1}\left(c-\sum_{i=1}^{m} s_i\right)^{\alpha-1} ds_1\dots ds_m =$$

$$z_r^{\alpha(m+1)-1}\alpha^{-m}\int\limits_{\substack{0<s_1,\dots s_m<1\\ c-1<s_1+\dots+s_m<c}} \left(\prod_{i=1}^{m}\alpha s_i^{\alpha-1}\right)\left(c-\sum_{i=1}^{m} s_i\right)^{\alpha-1} ds_1\dots ds_m.$$

Ukoliko u dobivenom integralu napravimo zamjenu varijabli $x = s_1+\dots+s_m$, $s_m = x-s_1-\dots-s_{m-1}$, $ds_m = dx$, slijedi

$$\int\limits_{\substack{0<s_1,\dots,s_m<1\\ c-1<s_1+\dots+s_m<c}} \left(\prod_{i=1}^{m}\alpha s_i^{\alpha-1}\right)\left(c-\sum_{i=1}^{m} s_i\right)^{\alpha-1} ds_1\dots ds_m =$$

$$\int\limits_{c-1<x<c}(c-x)^{\alpha-1}\int\limits_{0<s_1,\dots,s_{m-1}<1}\alpha^m\,(x-s_1-\dots-s_{m-1})^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{m-1} s_i^{\alpha-1}\, ds_1\dots ds_{m-1}\, dx =$$

$$\alpha^{-1}\int\limits_{c-1<x<c}\alpha\,(c-x)^{\alpha-1}\, g_m(x\,;\alpha)\, dx =$$

$$[t = c-x,\ dt = -dx]$$

$$\alpha^{-1}\int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} g_m(c-t\,;\alpha)\, dt = \alpha^{-1} g_{m+1}(c\,;\alpha)$$

Odnosno dobivamo formulu za gustoću slučajnog vektora $\left(Z_{(1)}^n, Z_{(2)}^n,\dots,Z_{(r)}^n\right)$

$$(n)_r\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^n(\alpha)} z_1^{\alpha-1}\dots z_r^{\alpha-1} z_r^{\alpha(m+1)-1}\alpha^{-(m+1)} g_{m+1}(c\,;\alpha).$$

Iz čega, nakon što uvrstimo čemu su jednaki c, m i s, slijedi tvrdnja leme. □

Uvedimo još jednu novu oznaku. Za $k \geq 1$ neka je

$$C_k(x) := \left\{ (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k : s_1, \ldots, s_k > 1, \sum_{i=1}^{k} s_i < x \right\}.$$

Uočimo da za $x \leq k$ uvjeti iz definicije $C_k(x)$ nisu nikada oba zadovoljeni pa je $C_k(x) = \emptyset$. U slučaju kada je $k = 0$ recimo da je $C_0(x) := \emptyset$.

U nastavku će nas zanimati granična svojstva funkcije $g_m(x\,;\alpha)$ čija je važnost postala očita u prethodnoj lemi. Tvrdnja sljedećeg teorema pokazat će se ključna u dobivanju traženih rezultata.

Teorem 3.11. *Za* $0 < x < m$, *vrijedi*

$$g_m(x\,;\alpha) = \sum_{0 \leq k < x} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{\Gamma^{m-k}(\alpha)\alpha^m}{\Gamma((m-k)\alpha)} \cdot \int\limits_{C_k(x)} s_1^{\alpha-1} \ldots s_k^{\alpha-1} \left(x - \sum_{i=1}^{k} s_i \right)^{(m-k)\alpha-1} ds_1 \ldots ds_k,$$

gdje se u slučaju $k = 0$ *integral zamjeni s* $x^{m\alpha-1}$.

Dokaz. Neka je

$$A_m(x) := \left\{ (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^m : 0 < s_1, \ldots, s_m < 1, \sum_{i=1}^{m} s_i < x \right\} \text{ i}$$

$$B_k(x) := \left\{ (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k : s_1, \ldots, s_k > 0, \sum_{i=1}^{k} s_i < x \right\}.$$

Za $0 < x < m$ imamo

$$\int_0^x g_m(u\,;\alpha)\,du = \int_0^x \alpha^m \int\limits_{0<s_1,\ldots,s_{m-1}<1} (u - s_1 - \ldots - s_{m-1})^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{m-1} s_i^{\alpha-1}\, ds_1 \ldots ds_{m-1}\, du =$$

$$\left[u - \sum_{i=1}^{m-1} s_i = s_m \quad du = ds_m \right] = \int\limits_{0<s_1,\ldots,s_{m-1}<1} \int\limits_{0<s_1+\ldots+s_m<x} \alpha^m s_1^{\alpha-1} \ldots s_m^{\alpha-1} ds_m ds_1 \ldots ds_{m-1}.$$

Pokažimo da se integracija u zadnjem integralu zapravo vrši po skupu $A_m(x)$. Uvjeti $0 < s_1, \ldots s_{m-1} < 1$ i $\sum_{i=1}^{m} s_i < x$ su trivijalno zadovoljeni. Pretpostavimo da uvjet $s_m > 0$ nije zadovoljen, odnosno budući da nas kod integracije rubovi ne zanimaju pretpostavimo da je $s_m = -\varepsilon < 0$. Budući da se integrira po svim $0 < s_1, \ldots s_{m-1}$ dozvoljen je slučaj $s_1 = \ldots = s_{m-1} = \varepsilon(2m-2)^{-1}$, ali tada je $\sum_{i=1}^{m} s_i = \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon < 0$ što je kontradikcija. Dakle

$s_m > 0$. Pretpostavimo nadalje da je $s_m > 1$. Budući da je $x < m$ postoji $\varepsilon' > 0$ takav da je $x = m - \varepsilon'$. Tada za $s_1 = \ldots = s_{m-1} = 1 - \varepsilon' (2m-2)^{-1}$ imamo $\sum_{i=1}^{m} s_i = m - 1 - \frac{\varepsilon'}{2} + s_m > m - \frac{\varepsilon'}{2} > x$. Ovime smo pokazali da je zadovoljen i uvjet $s_m < 1$. Odnosno pokazali smo da je

$$\int_0^x g_m(u;\alpha)\,du = \int_{A_m(x)} \alpha^m s_1^{\alpha-1} \ldots s_m^{\alpha-1} ds_1 \ldots ds_m.$$

Uvedimo sljedeće pomoćne oznake

$$P_k^n := \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n : s_k < 1\},\ n = 1, 2, \ldots, m\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Uz ove oznake dobivamo da vrijede sljedeće skupovne relacije

$$\begin{aligned} A_m(x) &= B_m(x) \cap P_1^m \cap \ldots \cap P_m^m, \\ C_k(x) &= B_k(x) \cap \left(P_1^k\right)^c \cap \ldots \cap \left(P_k^k\right)^c. \end{aligned}$$

Iz dobivenog korištenjem korolara 1.26 za $n = m$, $X = B_m(x)$, $S_i = P_i^m$ te $f(x_1, \ldots, x_m) = \alpha^m (x_1, \ldots, x_m)^{\alpha-1}$ i činjenice da je funkcija f simetrična s obzirom na varijable $x_1, \ldots, x_m$ slijedi

$$\int_{A_m(x)} \alpha^m s_1^{\alpha-1} \ldots s_m^{\alpha-1} ds_1 \ldots ds_m = \int_{B_m(x)\cap P_1^m \cap\ldots\cap P_m^m} \alpha^m s_1^{\alpha-1} \ldots s_m^{\alpha-1} ds_1 \ldots ds_m =$$

$$\sum_{0\le k\le m} (-1)^k \binom{m}{k} \alpha^m \int_{B_m(x)\cap\left(P_1^m\right)^c\cap\ldots\cap\left(P_k^m\right)^c} s_1^{\alpha-1} \ldots s_k^{\alpha-1} s_{k+1}^{\alpha-1} \ldots s_m^{\alpha-1} ds_1 \ldots ds_m =$$

(budući da se integrira po području na kojem su $s_1, \ldots s_k > 1$ i vrijedi $\sum_{i=1}^{k} s_i < x$ ako je $k \ge x$ područje intergacije je prazan skup, odnosno odgovarajući pribrojnik je 0)

$$\sum_{0\le k< x} (-1)^k \binom{m}{k} \alpha^m \int_{B_k(x)\cap\left(P_1^k\right)^c\cap\ldots\cap\left(P_k^k\right)^c} \int_{B_{m-k}(x-\sum_{i=1}^k s_i)} s_1^{\alpha-1} \ldots s_k^{\alpha-1} s_{k+1}^{\alpha-1} \ldots s_m^{\alpha-1} ds_{k+1} \ldots ds_1 \ldots ds_k =$$

$$\sum_{0\le k< x} (-1)^k \binom{m}{k} \alpha^m \int_{C_k(x)} s_1^{\alpha-1} \ldots s_k^{\alpha-1} \left[\int_{B_{m-k}\left(x-\sum_{i=1}^k s_i\right)} s_{k+1}^{\alpha-1} \ldots s_m^{\alpha-1} ds_{k+1} \ldots ds_m \right] ds_1 \ldots ds_k =$$

(ukoliko na uglatu zagradu primjenimo korolar 1.4 uz funkciju $f \equiv 1$)

$$\sum_{0\le k< x} (-1)^k \binom{m}{k} \alpha^m \int_{C_k(x)} s_1^{\alpha-1} \ldots s_k^{\alpha-1} \frac{\Gamma^{m-k}(\alpha)}{\Gamma((m-k)\alpha)} \int_0^{x-\sum_{i=1}^k s_i} t^{(m-k)\alpha-1} dt\, ds_1 \ldots ds_k =$$

$$\sum_{0\le k<x}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{\alpha^m\Gamma^{m-k}(\alpha)}{(m-k)\alpha\Gamma\left((m-k)\alpha\right)}\int\limits_{C_k(x)} s_1^{\alpha-1}\dots s_k^{\alpha-1}\left(x-\sum_{i=1}^k s_i\right)^{(m-k)\alpha} ds_1\dots ds_k.$$

U slučaju $k=0$ u izrazu u drugom redu zapravo imamo samo integral po $B_m(x)$, koji zatim u zadnjem redu prelazi u $x^{m\alpha}$.

Budući da smo promatrali $\int_0^x g_m(u\,;\alpha)\,du$ zanimat će nas derivacija dobivenog izraza. Želimo po x derivirati izraz oblika $\sum_{0\le k<x} f_k(x)$. Uočimo da izraz ovog oblika ne mora uvijek biti derivabilan, čak ni u slučaju kada su f_k derivabilne, no pokazuje se da u našem slučaju jest. Zaista, za $x\notin\mathbb{N}$, a to se svodi na derivaciju od f_k za fiksni k. Promotrimo prvo slučaj $x\in\mathbb{N}$. U tom slučaju tražena derivacija je $\sum_{0\le k<x} f_k'(x)+\lim_{h\searrow 0} f_x(x+h)\cdot h^{-1}$. Za određivanje limesa koristit ćemo argument sličan onome pomoću kojega smo zaključili da je dovoljno sumirati do x. Ako integriramo po području na kojem su $s_1,\dots s_k>1$ i vrijedi $\sum_{i=1}^k s_i<x+h$, gdje $h\searrow 0$ za $k=x$ imamo da je $\sum_{i=1}^x s_i=x+\delta>x+h$ za dovoljno mali h. Odnosno traženi limes je za dovoljno mali h integral po praznom skupu, odnosno on je 0. Ovime se slučaj $x\in\mathbb{N}$ svodi na $x\notin\mathbb{N}$

S obzirom na ranije komentare za $k=0$ tražena derivacija se svodi na derivaciju od $x^{m\alpha}$, odnosno ako uzmemo u obzir konstante dobivamo

$$(-1)^0\binom{m}{0}\frac{\alpha^m\Gamma^m(\alpha)}{m\alpha\Gamma\left(m\alpha\right)}m\alpha x^{m\alpha-1}.$$

Uočimo da dobiveni izraz odgovara izrazu u slučaju $k=0$ iz iskaza teorema. Preostaje promotriti što se događa u slučaju $k>0$.

Neka je $1\le k<x$ fiksan. Budući da je $x<m$ vrijedi $\beta:=(m-k)\alpha>0$. Označimo sa $\sigma:=\sum_{i=1}^k s_i$. Zanima nas derivacija integrala

$$\int\limits_{C_k(x)} s_1^{\alpha-1}\dots s_k^{\alpha-1}\left(x-\sum_{i=1}^k s_i\right)^{(m-k)\alpha} ds_1\dots ds_k$$

po varijabli x. Odnosno računamo sljedeći limes

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\left[\int\limits_{C_k(x+h)}(s_1\dots s_k)^{\alpha-1}(x+h-\sigma)^\beta\,ds_1\dots ds_k-\int\limits_{C_k(x)}(s_1\dots s_k)^{\alpha-1}(x-\sigma)^\beta\,ds_1\dots ds_k\right]=$$

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\int\limits_{C_k(x+h)\setminus C_k(x)}(s_1\dots s_k)^{\alpha-1}(x+h-\sigma)^\beta\,ds_1\dots ds_k\;+$$

$$\int\limits_{C_k(x)} (s_1 \ldots s_k)^{\alpha-1} \frac{(x+h-\sigma)^\beta - (x-\sigma)^\beta}{h} ds_1 \ldots ds_k.$$

Za $(s_1, \ldots s_k) \in C_k(x+h) \setminus C_k(x)$ je $\sigma = \sum_{i=1}^k s_i \geq x$ odnosno $x + h - \sigma \leq h$. Zato je

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int\limits_{C_k(x+h) \setminus C_k(x)} (s_1 \ldots s_k)^{\alpha-1} (x+h-\sigma)^\beta \, ds_1 \ldots ds_k \leq$$

$$\lim_{h \searrow 0} h^{\beta-1} \int\limits_{C_k(x+h) \setminus C_k(x)} (s_1 \ldots s_k)^{\alpha-1} \, ds_1 \ldots ds_k =$$

$$\lim_{h \searrow 0} h^{\beta-1} \left[\int\limits_{C_k(x+h)} (s_1 \ldots s_k)^{\alpha-1} \, ds_1 \ldots ds_k - \int\limits_{C_k(x)} (s_1 \ldots s_k)^{\alpha-1} \, ds_1 \ldots ds_k \right] \overset{korolar\ 1.4}{=}$$

$$\lim_{h \searrow 0} h^{\beta-1} \left[\frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^{x+h} t^{k\alpha-1} dt - \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^{x} t^{k\alpha-1} dt \right] = \lim_{h \searrow 0} h^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_x^{x+h} t^{k\alpha-1} dt =$$

$$\lim_{h \searrow 0} h^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)\, k\alpha} \Big((x+h)^{k\alpha} - x^{k\alpha} \Big) = \lim_{h \searrow 0} \frac{\Gamma(\alpha)^k h^\beta}{\Gamma(k\alpha)\, k\alpha} \frac{(x+h)^{k\alpha} - x^{k\alpha}}{h} =$$

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\Gamma(\alpha)^k h^\beta}{\Gamma(k\alpha)} x^{k\alpha-1} = 0,$$

gdje zadnja jednakost vrijedi jer je $\beta > 0$. Preostaje odrediti

$$\lim_{h \searrow 0} \int\limits_{C_k(x)} (s_1 \ldots s_k)^{\alpha-1} \frac{(x+h-\sigma)^\beta - (x-\sigma)^\beta}{h} ds_1 \ldots ds_k.$$

Budući da je $\lim\limits_{h \searrow 0} \Big((x+h-\sigma)^\beta - (x-\sigma)^\beta \Big) \cdot h^{-1} = \beta (x-\sigma)^{\beta-1}$ pod uvjetom da možemo zamijeniti poredak limesa i integrala odnosno pokazati da vrijedi

$$\lim_{h \searrow 0} \int\limits_{C_k(x)} (s_1 \ldots s_k)^{\alpha-1} \frac{(x+h-\sigma)^\beta - (x-\sigma)^\beta}{h} ds_1 \ldots ds_k =$$

$$\int\limits_{C_k(x)} \lim_{h \searrow 0} (s_1 \ldots s_k)^{\alpha-1} \frac{(x+h-\sigma)^\beta - (x-\sigma)^\beta}{h} ds_1 \ldots ds_k$$

dobivamo da je derivacija k-tog člana sume dana formulom

$$(-1)^k \binom{m}{k} \frac{\alpha^m \Gamma^{m-k}(\alpha)}{(m-k)\alpha\Gamma((m-k)\alpha)} \int\limits_{C_k(x)} (s_1 \ldots s_k)^{\alpha-1} \beta (x-\sigma)^{\beta-1} \, ds_1 \ldots ds_k.$$

Nakon uvrštavanja vrijednosti β i σ i sumacije po k dobivamo

$$g_m(x;\alpha) = \sum_{0\le k<x} (-1)^k \binom{m}{k} \frac{\Gamma^{m-k}(\alpha)\alpha^m}{\Gamma((m-k)\alpha)} \cdot \int\limits_{C_k(x)} s_1^{\alpha-1} \dots s_k^{\alpha-1} \left(x - \sum_{i=1}^{k} s_i\right)^{(m-k)\alpha-1} ds_1 \dots ds_k,$$

gdje se u slučaju $k = 0$ integral zamjeni s $x^{m\alpha-1}$.

Ostali smo dužni opravdati zamjenu limesa i integrala za što ćemo iskoristiti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji. Po teoremu srednje vrijednosti za funkciju $f(y) = y^\beta$ na intervalu $[x-\sigma, x-\sigma+h]$ postoji $c \in \langle x-\sigma, x-\sigma+h\rangle$ takav da je

$$\beta c^{\beta-1} = \frac{(x-\sigma+h)^\beta - (x-\sigma)^\beta}{x-\sigma+h-(x-\sigma)} = \frac{(x-\sigma+h)^\beta - (x-\sigma)^\beta}{h}.$$

Ako je $\beta \ge 1$ onda za $h < x$ imamo $\beta c^{\beta-1} \le \beta(2x)^{\beta-1}$, a ako je $0 < \beta < 1$ onda je $\beta c^{\beta-1} \le \beta(x-\sigma)^{\beta-1}$. U oba slučaja postoji funkcija g takva da je

$$(s_1 \dots s_k)^{\alpha-1} \frac{(x+h-\sigma)^\beta - (x-\sigma)^\beta}{h} \le g(s_1, \dots s_k).$$

U slučaju $\beta \ge 1$ vrijedi

$$\int\limits_{C_k(x)} g(s_1, \dots s_k)\, ds_1 \dots ds_k \le \int\limits_{B_k(x)} (s_1 \dots s_k)^{\alpha-1} \beta(2x)^{\beta-1}\, ds_1 \dots ds_k \overset{korolar 1.4}{=}$$

$$\beta(2x)^{\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int\limits_0^x t^{\alpha-1} dt = \frac{\beta}{\alpha-1} 2^{\beta-1} x^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} < \infty,$$

a u slučaju $0 < \beta < 1$

$$\int\limits_{C_k(x)} g(s_1, \dots s_k)\, ds_1 \dots ds_k \le \int\limits_{B_k(x)} (s_1 \dots s_k)^{\alpha-1} \beta(x-\sigma)^{\beta-1}\, ds_1 \dots ds_k \overset{korolar 1.4}{=}$$

$$\beta \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\beta-1} t^{\alpha-1} dt = [t = xs,\ dt = xds] =$$

$$\beta x^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int\limits_0^1 (1-s)^{\beta-1} s^{\alpha-1} ds \overset{1.2}{=} \beta x^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)^{k+1}\Gamma(\beta)}{\Gamma(k\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)} < \infty$$

pa možemo primijeniti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji. Čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Neka je za $k \geq 1$ i $\theta > 0$ definirana funkcija

$$J_k\left(x\,;\theta\right) := \int\limits_{C_k(x)} \frac{\left(x - \sum_{i=1}^{k} s_i\right)^{\theta-1}}{s_1 \cdot \ldots \cdot s_k} ds_1 \ldots ds_k. \tag{3.6}$$

Uočimo da je za $x \leq k$ $C_k\left(x\right) = 0$, a onda i $J_k\left(x\,;\theta\right) = 0$. U slučaju kada je $k = 0$ recimo da je $J_0\left(x\,;\theta\right) := x^{\theta-1}$.

Sada smo spremni dokazati rezultate vezane uz granična svojstva funkcije $g_m\left(x\,;\alpha\right)$, koja su iskazana sljedećim korolarom.

Korolar 3.12. Ako $m \to \infty$ i $m\alpha \to \theta > 0$, onda $g_m\left(x\,;\alpha\right)$ konvergira prema

$$g_\theta(x) = \sum_{0 \leq k < x} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\theta)e^{\gamma\theta}} \frac{\theta^k}{k!} J_k\left(x\,;\theta\right) \tag{3.7}$$

za svaki pozitivni x. Definiran gornjom formulom g_θ je vjerojatnosna funkcija gustoće na $\langle 0, \infty\rangle$. Korišteni γ je Eulerova konstanta definirana pomoću relacije 1.4.

Dokaz. Promotrimo što se događa kada $m \to \infty$ i $m\alpha \to \theta > 0$. Iz (1.4) znamo da je $\Gamma'(1) = -\gamma$, a iz propozicije 1.22 da je $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(1+\alpha) = 1 - \gamma\alpha + O\left(\alpha^2\right)$. Zato vrijedi

$$\lim_{m\to\infty}\left(\alpha\Gamma\left(\alpha\right)\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1 - \gamma\alpha + O\left(\alpha^2\right)\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{-\gamma\theta}{m}\left(\frac{m\alpha}{\theta} - O\left(\alpha^2\right)\frac{m}{\gamma\theta}\right)\right)^m =$$
$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{-\gamma\theta}{m}\left(1 - O\left(\alpha^2\right)\frac{1}{\gamma\alpha}\right)\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{-\gamma\theta}{m}\left(1 - O\left(\alpha\right)\right)\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{-\gamma\theta}{m}\right)^m = e^{-\gamma\theta}.$$

Zbog neprekidnosti funkcija Γ za proizvoljni x i svaki $k < x$ je $\lim_{m\to\infty}\left(\Gamma\left(\left(m-k\right)\alpha\right)\right)^{-1} = \left(\Gamma\left(\theta\right)\right)^{-1}$. Budući da je $(m-k)^k \leq \frac{m!}{(m-k)!} \leq m^k$ i jer vrijedi

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma\left(\alpha\right)^k}{(m-k)^k} = \lim_{m\to\infty}\frac{\left(\Gamma\left(\alpha+1\right)\right)^k}{(\alpha m - \alpha k)^k} = \frac{1}{\theta^k} = \lim_{m\to\infty}\frac{\left(\Gamma\left(\alpha+1\right)\right)^k}{(\alpha m)^k} = \lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma\left(\alpha\right)^k}{m^k}$$

po teoremu o sendviču slijedi $\lim_{m\to\infty}\frac{m!}{(m-k)!}\Gamma\left(\alpha\right)^{-k} = \theta^k$.

Dosadašnjim razmatranjima pokazali smo da je

$$\lim_{m\to\infty}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{\Gamma^{m-k}(\alpha)\alpha^m}{\Gamma((m-k)\alpha)} = \lim_{m\to\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma\left(\left(m-k\right)\alpha\right)}\left(\alpha\Gamma\left(\alpha\right)\right)^m\frac{m!}{(m-k)!}\Gamma\left(\alpha\right)^{-k}\frac{1}{k!} =$$
$$(-1)^k\frac{1}{\Gamma\left(\theta\right)}e^{-\gamma\theta}\theta^k\frac{1}{k!} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\theta)e^{\gamma\theta}}\frac{\theta^k}{k!}.$$

Preostaje pokazati da je

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{C_k(x)} s_1^{\alpha-1} \dots s_k^{\alpha-1} \left(x - \sum_{i=1}^{k} s_i \right)^{(m-k)\alpha-1} ds_1 \dots ds_k = J_k\,(x\,;\theta)\,.$$

Za $k = 0$, kao što je napomenuto u iskazu teorema 3.11, umjesto integrala uzimamo $x^{m\alpha-1}$, a kako je $J_0\,(x\,;\theta) = x^{\theta-1}$ u tom slučaju konvergencija trivijalno vrijedi. Neka je zato $1 \le k < x$. Uvedimo novu oznaku

$$D_k\,(x) := \left\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k : s_1, \dots, s_k > \frac{1}{x}, \sum_{i=1}^{k} s_i < 1 \right\}$$

te kao i u prethodnom dokazu neka je

$$B_k(x) = \left\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k : s_1, \dots, s_k > 0, \sum_{i=1}^{k} s_i < x \right\}.$$

te pomoću nje napravimo zamjenu varijabli u promatranim integralima. Neka je $s_i = xu_i$, $ds_i = xdu_i$.

$$\int\limits_{C_k(x)} s_1^{\alpha-1} \dots s_k^{\alpha-1} \left(x - \sum_{i=1}^{k} s_i \right)^{(m-k)\alpha-1} ds_1 \dots ds_k =$$

$$\int\limits_{D_k(x)} x^{(\alpha-1)k} u_1^{\alpha-1} \dots u_k^{\alpha-1} x^{(m-k)\alpha-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k} u_i \right)^{(m-k)\alpha-1} x^k du_1 \dots du_k =$$

$$x^{m\alpha-1} \int\limits_{D_k(x)} u_1^{\alpha-1} \dots u_k^{\alpha-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k} u_i \right)^{(m-k)\alpha-1} du_1 \dots du_k =$$

$$x^{m\alpha-1} \int\limits_{D_k(x)} \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{k} u_i\right)^{(m-k)\alpha-1}}{u_1 \cdot \ldots \cdot u_k} (u_1 \cdot \ldots \cdot u_k)^{\alpha}\, du_1 \dots du_k,$$

$$\int\limits_{C_k(x)} \frac{\left(x - \sum_{i=1}^{k} s_i\right)^{\theta-1}}{s_1 \cdot \ldots \cdot s_k} ds_1 \dots ds_k = \int_{D_k(x)} x^{\theta-1} \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{k} u_i\right)^{\theta-1}}{x^k u_1 \cdot \ldots \cdot u_k} x^k du_1 \dots du_k =$$

$$x^{\theta-1} \int\limits_{D_k(x)} \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{k} u_i\right)^{\theta-1}}{u_1 \cdot \ldots \cdot u_k} du_1 \dots du_k.$$

Budući da $x^{m\alpha-1} \to x^{\theta-1}$ kada $m \to \infty$ preostaje vidjeti što se događa s integralima. Neka je zato $0 < \theta_0 < \theta$, a budući da je $\lim_{m\to\infty}(m-k)\alpha = \theta$ za dovoljno veliki m je $(m-k)\alpha > \theta_0$. Zato vrijedi

$$\left|\frac{\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{(m-k)\alpha-1}}{u_1\cdot\ldots\cdot u_k}(u_1\cdot\ldots\cdot u_k)^\alpha - \frac{\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{\theta-1}}{u_1\cdot\ldots\cdot u_k}\right| \overset{u_1,\ldots,u_k>\frac{1}{x}}{\leq}$$

$$x^k\left|\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{(m-k)\alpha-1}(u_1\cdot\ldots\cdot u_k)^\alpha - \left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{\theta-1}\right| \overset{u_1,\ldots,u_k<1}{\leq}$$

$$x^k\left|\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{(m-k)\alpha-1}\right| + \left|\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{\theta-1}\right| \overset{0<1-\sum_{i=1}^k u_i<1}{\leq} 2x^k\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{\theta_0-1}.$$

$$\int\limits_{D_k(x)} 2x^k\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{\theta_0-1} du_1\ldots du_k \leq 2x^k\int\limits_{B_k(1)}\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{\theta_0-1} du_1\ldots du_k \overset{korolar 1.4}{=}$$

$$2x^k\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_0^1(1-t)^{\theta_0-1}t^{k-1}dt = 2x^k\frac{\Gamma(\theta_0)\Gamma(k)}{\Gamma(k)\Gamma(\theta_0+k)} = 2x^k\frac{\Gamma(\theta_0)}{\Gamma(\theta_0+k)} < \infty.$$

Budući da

$$\frac{\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{(m-k)\alpha-1}}{u_1\cdot\ldots\cdot u_k}(u_1\cdot\ldots\cdot u_k)^\alpha - \frac{\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{\theta-1}}{u_1\cdot\ldots\cdot u_k} \to 0 \text{ kada } m\to\infty$$

po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\int\limits_{D_k(x)}\frac{\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{(m-k)\alpha-1}}{u_1\cdot\ldots\cdot u_k}(u_1\cdot\ldots\cdot u_k)^\alpha - \frac{\left(1-\sum_{i=1}^k u_i\right)^{\theta-1}}{u_1\cdot\ldots\cdot u_k}du_1\ldots du_k \to 0 \text{ kada } m\to\infty.$$

Ovime smo pokazali da $g_m(x;\alpha) \to g_\theta(x)$ kada $m\to\infty$ i $m\alpha\to\theta$ za svaki pozitivni x.

Preostaje pokazati da je g_θ vjerojatnosna funkcija gustoće. Budući da je $g_m(x;\alpha) \geq 0$ za svaki $x > 0$ pa isto vrijedi i za g_θ. Kako bi smo pokazali da je $\int_0^\infty g_\theta(x)dx = 1$ koristimo sljedeću lemu.

Lema 3.13. Laplaceova transformacija funkcije g_θ jest

$$\int\limits_0^\infty e^{-tx}g_\theta(x)dx = e^{-\gamma\theta}t^{-\theta}\exp\left[-\theta\int\limits_t^\infty e^{-u}u^{-1}du\right] = \exp\left[-\theta\int\limits_0^t\frac{1-e^{-u}}{u}du\right]. \tag{3.8}$$

Dokaz. Označimo sa $\sigma := \sum_{i=1}^{k} s_i$.

$$\int_0^\infty e^{-tx} g_\theta(x)dx = \int_0^\infty \sum_{0\le k<x} e^{-tx}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\theta)e^{\gamma\theta}}\frac{\theta^k}{k!}\int_{C_k(x)}\frac{\left(x-\sum_{i=1}^k s_i\right)^{\theta-1}}{s_1\cdot\ldots\cdot s_k}ds_1\ldots ds_k dx \overset{C_k(x)=\emptyset \text{ za } k\ge x}{=}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\theta)e^{\gamma\theta}}\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{-tx}\frac{(-\theta)^k}{k!}\int_{C_k(x)}\frac{\left(x-\sum_{i=1}^k s_i\right)^{\theta-1}}{s_1\cdot\ldots\cdot s_k}ds_1\ldots ds_k\,dx = \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\theta)e^{\gamma\theta}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\theta)^k}{k!}\int_0^\infty\int_{C_k(x)}\frac{e^{-tx}\left(x-\sum_{i=1}^k s_i\right)^{\theta-1}}{s_1\cdot\ldots\cdot s_k}ds_1\ldots ds_k\,dx =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\theta)e^{\gamma\theta}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\theta)^k}{k!}\int_{s_1,\ldots,s_k>1}\frac{1}{s_1\cdot\ldots\cdot s_k}\int_\sigma^\infty e^{-tx}\left(x-\sigma\right)^{\theta-1}dx\,ds_1\ldots ds_k =$$

$$[y = t\,(x-\sigma)\,,\ dy = tdx] =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\theta)e^{\gamma\theta}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\theta)^k}{k!}\int_{s_1,\ldots,s_k>1}\frac{1}{s_1\cdot\ldots\cdot s_k}\int_0^\infty e^{-t\sigma}e^{-y}t^{-\theta}\,(y)^{\theta-1}\,dy\,ds_1\ldots ds_k =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\theta)e^{\gamma\theta}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-\theta)^k}{k!}\int_{s_1,\ldots,s_k>1}\frac{1}{s_1\cdot\ldots\cdot s_k}e^{-t\sum_{i=1}^k s_i}t^{-\theta}\Gamma\,(\theta)\,ds_1\ldots ds_k =$$

$$e^{-\gamma\theta}t^{-\theta}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-\theta)^k}{k!}\left(\int_1^\infty\frac{e^{-ts}}{s}ds\right)^k = [ts=u,\ tds=du] = e^{-\gamma\theta}t^{-\theta}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-\theta)^k}{k!}\left(\int_t^\infty\frac{e^{-u}}{u}du\right)^k =$$

$$e^{-\gamma\theta}t^{-\theta}\exp\left[-\theta\int_t^\infty e^{-u}u^{-1}du\right] = \exp\left[-\theta\left(\gamma+\ln(t)+\int_t^\infty e^{-u}u^{-1}du\right)\right] = \tag{3.10}$$

$$\exp\left[-\theta\left(-\int_0^\infty e^{-u}\ln(u)du + \ln(t) + e^{-u}\ln(u)\Big|_t^\infty + \int_t^\infty e^{-u}\ln(u)du\right)\right] =$$

$$\exp\left[-\theta\left(-\int_0^t e^{-u}\ln(u)du + (1+e^{-t})\ln(t)\right)\right] = \exp\left[-\theta\int_0^t\frac{1-e^{-u}}{u}du\right]. \tag{3.11}$$

Zamjena integrala i sume u (3.9) je opravdana po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji, jer je daljnji račun isti bez člana $(-1)^k$, a

$$e^{-\gamma\theta}t^{-\theta}\exp\left[\theta\int_t^\infty e^{-u}u^{-1}du\right]<\infty.$$

Jednakost u (3.10) vrijedi jer je po (1.4) $\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty e^{-u}\ln(u)$, a (3.11) zbog parcijalne integracije, jer je $\lim_{u\searrow 0}(1+e^{-u})\ln(u) = 0$. □

Budući da je

$$\lim_{t\searrow 0}\exp\left[-\theta\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\right] = e^0 = 1 \text{ po (3.8) dobivamo } \lim_{t\searrow 0}\int_0^\infty e^{-tx}g_\theta(x)dx = 1.$$

Kako za $t_1 > t_2$ vrijedi $0 \le e^{-t_1x}g_\theta(x) \le e^{-t_2x}g_\theta(x) \le g_\theta(x)$ po Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$1 = \lim_{t\searrow 0}\int_0^\infty e^{-tx}g_\theta(x)dx = \int_0^\infty \lim_{t\searrow 0}e^{-tx}g_\theta(x)dx = \int_0^\infty g_\theta(x)dx.$$

Ovime smo pokazali da je g_θ vjerojatnosna funkcija gustoće i dovršili dokaz korolara. □

Zaključno s ovim korolarom raspolažemo svim rezultatima potrebnima da odredimo funkciju gustoće slučajnog vektora $\mathbb{G}_{(.)}$ na prostoru Δ koji ima Poisson-Dirichletovu razdiobu s parametrom θ.

3.3 Svojstva Poisson-Dirichletove razdiobe

Teorem 3.14. *Za fiksan r kada $n \to \infty$ i $n\alpha \to \theta$ funkcija gustoće slučajnog vektora $\left(Z_{(1)}^n, Z_{(2)}^n, \ldots, Z_{(r)}^n\right)$ konvergira na skupu M_r, definiranom u (3.5), prema funkciji*

$$\theta^r\Gamma(\theta)\,e^{\gamma\theta}z_1^{-1}\cdot\ldots\cdot z_{r-1}^{-1}z_r^{\theta-2}g_\theta\left(\frac{1-z_1-\ldots-z_r}{z_r}\right). \tag{3.12}$$

Dokaz. Funkcija gustoće slučajnog vektora $\left(Z^n_{(1)}, Z^n_{(2)}, \ldots, Z^n_{(r)}\right)$ u točki $(z_1, \ldots, z_r) \in M_r$ po lemi 3.10 je

$$n(n-1)\ldots(n-r+1)\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma^n(\alpha)}\alpha^{-(n-r)}z_1^{\alpha-1}\ldots z_{r-1}^{\alpha-1}z_r^{(n-r+1)\alpha-2}g_{n-r}\left(\frac{1-z_1-\ldots-z_r}{z_r};\alpha\right) =$$

$$n\alpha\cdot(n-1)\alpha\cdot\ldots\cdot(n-r+1)\alpha\frac{\Gamma(n\alpha)}{(\alpha\Gamma(\alpha))^n}z_1^{\alpha-1}\ldots z_{r-1}^{\alpha-1}z_r^{(n-r+1)\alpha-2}g_{n-r}\left(\frac{1-z_1-\ldots-z_r}{z_r};\alpha\right).$$

$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\alpha\to\theta}}(n-i)\alpha = \theta$, za $i = 0, 1, \ldots, r-1$.

$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\alpha\to\theta}}\Gamma(n\alpha) = \Gamma(\theta)$, jer je funkcija Γ neprekidna.

$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\alpha\to\theta}}(\alpha\Gamma(\alpha))^n = e^{-\gamma\theta}$, što je pokazano u dokazu korolara 3.12.

$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\alpha\to\theta}} z_i^{\alpha-1} = z_i^{-1}$, za $i = 1, \ldots, r-1$.

$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\alpha\to\theta}} z_r^{(n-r+1)\alpha-2} = z_r^{\theta-2}$.

$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\alpha\to\theta}} g_{n-r}\left(\frac{1-z_1-\ldots-z_r}{z_r};\alpha\right) = g_\theta\left(\frac{1-z_1-\ldots-z_r}{z_r}\right)$, po tvrdnji korolara 3.12, jer je

$\frac{1-z_1-\ldots-z_r}{z_r} > 0$ za $(z_1, \ldots, z_r) \in M_r$.

Ovime je pokazano da funkcija gustoće slučajnog vektora $\left(Z^n_{(1)}, Z^n_{(2)}, \ldots, Z^n_{(r)}\right)$ konvergira na skupu M_r prema funkciji

$$f(z_1, \ldots, z_r) = \theta^r\Gamma(\theta)\,e^{\gamma\theta}z_1^{-1}\cdot\ldots\cdot z_{r-1}^{-1}z_r^{\theta-2}g_\theta\left(\frac{1-z_1-\ldots-z_r}{z_r}\right)$$

kada $n\to\infty$ i $n\alpha\to\theta$. □

Kada uzmemo u obzir zaključke s kraja sekcije 3.1, uočavamo važnost pokazivanja da je funkcija f definirana u prethodnom teoremu vjerojatnosna funkcija gustoće. To ćemo i pokazati, ali prvo se okrenimo proučavanju funkcije koju dobivamo iz f nakon što se integriranjem po skupu na kojem to ima smisla riješimo svih osim zadnje varijable. Tu funkciju možemo smatrati r-tom marginalnom gustoćom od funkcije f i njenu eksplicitnu formulu daje nam sljedeći teorem.

Teorem 3.15. *Za* $0 < x < r^{-1}$ *r-ta marginalna gustoća od funkcije dane formulom (3.12) u točki x jest*

$$d_r(x;\theta) = x^{\theta-2}\sum_{0\le k<x^{-1}-r}(-1)^k\frac{\theta^{r+k}}{k!\,(r-1)!}J_{k+r-1}\left(\frac{1-x}{x};\theta\right), \tag{3.13}$$

gdje je funkcija $J_k(\cdot\,;\theta)$ definirana u (3.6).

Napomena 3.16. Prije nego krenemo na dokaz obrazložimo zašto se u iskazu teorema uzima $0 < x < r^{-1}$. Nas zanima x takav da postoji vektor $(z_1, \ldots, z_{r-1}, x) \in M_r$. Iz uvjeta $z_1 > \ldots z_r > 0$ i $\sum_{i=1}^{r} z_i < 1$ iz definicije prostora M_r slijedi $x > 0$, ali nameće se i uvjet $1 > \sum_{i=1}^{r-1} z_i + x > r \cdot x$ odnosno $x < r^{-1}$. Okrenimo se sada dokazu teorema 3.15.

Dokaz. Uvedimo oznaku

$$M_r(x) := \left\{(z_1, \ldots z_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1} : 1 > z_1 > \ldots > z_{r-1} > x > 0, \sum_{i=1}^{r-1} z_i < 1 - x\right\},$$

jer se upravo po tom skupu vrši parcijalna integracija kojom dobivamo

$$d_r(x;\theta) = \int\limits_{M_r(x)} \theta^r \Gamma(\theta)\, e^{\gamma\theta} z_1^{-1} \cdot \ldots \cdot z_{r-1}^{-1} x^{\theta-2} g_\theta\left(\frac{1 - z_1 - \ldots - x}{x}\right) dz_1 \ldots dz_{r-1} =$$

$$\int\limits_{M_r(x)} \theta^r \Gamma(\theta)\, e^{\gamma\theta} z_1^{-1} \cdot \ldots \cdot z_{r-1}^{-1} x^{\theta-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\theta) e^{\gamma\theta}} \frac{\theta^k}{k!} J_k\left(\frac{1 - z_1 - \ldots - x}{x};\theta\right) dz_1 \ldots dz_{r-1}.$$

Budući da funkcija $J_k(\cdot\,;\theta)$ ima faktor u kojem se integrira po području $C_k(\cdot)$, pribrojnik za koje je $k \geq (1 - z_1 - \ldots - x)\, x^{-1}$ su jednaki 0. Zato su pogotovo pribrojnici za koje je $k \geq x^{-1} - r = (1 - x - \ldots - x)\, x^{-1} > (1 - z_1 - \ldots - x)\, x^{-1}$ jednaki 0. Iz ovoga zaključujemo da se vrijednost integrala ne mijenja ukoliko se sumacija vršiti samo po $k < x^{-1} - r$.

$$d_r(x;\theta) = \sum_{0 \leq k < (\frac{1}{x} - r)} \int\limits_{M_r(x)} \theta^{r+k} z_1^{-1} \cdot \ldots \cdot z_{r-1}^{-1} x^{\theta-2} \frac{(-1)^k}{k!} J_k\left(\frac{1 - z_1 - \ldots - x}{x};\theta\right) dz_1 \ldots dz_{r-1}.$$

Zbog simetričnosti izraza koji integriramo uvjet $z_1 > \ldots > z_{r-1}$ možemo maknuti ukoliko tako dobiveni integral podijelimo s $(r-1)!$. Ukoliko još napravimo i zamjenu varijabli $xs_i = z_i$, $xds_i = dz_i$ za $i = 1, 2, \ldots, r-1$ dobivamo

$$x^{\theta-2} \sum_{0 \leq k < (\frac{1}{x} - r)} \frac{(-1)^k \theta^{r+k}}{k!\,(r-1)!} \int\limits_{C_{r-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)} s_1^{-1} \cdot \ldots \cdot s_{r-1}^{-1} J_k\left(\frac{1-x}{x} - s_1 - \ldots - s_{r-1};\theta\right) ds_1 \ldots ds_{r-1}.$$

Uvrstimo li u dobiveni integral čemu je po (3.6) jednaka vrijednost funkcije $J_k(\cdot\,;\theta)$ dobivamo

$$\int\limits_{C_{r-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)} s_1^{-1}\cdot\ldots\cdot s_{r-1}^{-1}J_k\left(\frac{1-x}{x}-s_1-\ldots-s_{r-1}\,;\theta\right)ds_1\ldots ds_{r-1}=$$

$$\int\limits_{C_{r-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)} s_1^{-1}\cdot\ldots\cdot s_{r-1}^{-1}\int\limits_{C_k\left(\frac{1-x}{x}-s_1-\ldots-s_{r-1}\right)}\frac{\left(\frac{1-x}{x}-\sum_{i=1}^{r-1}s_i-\sum_{j=1}^{k}t_j\right)^{\theta-1}}{t_1\cdot\ldots\cdot t_k}dt_1\ldots dt_k\,ds_1\ldots ds_{r-1}=$$

$$\int\limits_{C_{k+r-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)} s_1^{-1}\cdot\ldots\cdot s_{r-1}^{-1}t_1^{-1}\cdot\ldots\cdot t_k^{-1}\left(\frac{1-x}{x}-\sum_{i=1}^{r-1}s_i-\sum_{j=1}^{k}t_j\right)^{\theta-1}ds_1\ldots ds_{r-1}dt_1\ldots dt_k=$$

$$J_{k+r-1}\left(\frac{1-x}{x}\,;\theta\right).$$

Ovime smo pokazali tvrdnju teorema, odnosno da je

$$d_r(x\,;\theta)=x^{\theta-2}\sum_{0\le k<x^{-1}-r}(-1)^k\frac{\theta^{r+k}}{k!\,(r-1)!}J_{k+r-1}\left(\frac{1-x}{x}\,;\theta\right).$$

□

Od pomoći za dokazivanje da je f definirana u teoremu 3.14 vjerojatnosna funkcija gustoće, ali i od važnosti kao takav, bit će nam sljedeći teorem.

Teorem 3.17. *Za $m=0,1,2,\ldots$ m-ti momenti s obzirom na funkciju $d_r(\cdot\,;\theta)$ danu u (3.13) jesu*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{r}}x^m d_r(x\,;\theta)\,dx=\frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta+m)}\int\limits_0^{\infty}y^{m-1}\frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!}\left(\int\limits_y^{\infty}e^{-u}u^{-1}du\right)^{r-1}\exp\left[-y-\theta\int\limits_y^{\infty}e^{-u}u^{-1}du\right]dy.$$

Dokaz. Budući da je $d_r(x\,;\theta)=0$ za $x\ge r^{-1}$ vrijedi

$$\int\limits_0^{\frac{1}{r}}x^m d_r(x\,;\theta)\,dx=\int\limits_0^{1}x^m d_r(x\,;\theta)\,dx=\left[y=\frac{1}{x},\ dy=-\frac{dx}{x^2}\right]=\int\limits_1^{\infty}\frac{d_r\left(y^{-1}\,;\theta\right)}{y^{m+2}}dy\overset{(3.13)}{=}$$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{y^{m+2}}y^{2-\theta}\sum_{0\le k<y-r}(-1)^k\frac{\theta^{r+k}}{k!\,(r-1)!}J_{k+r-1}(y-1\,;\theta)\,dy=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\theta^{r+k}}{k!\,(r-1)!} \int\limits_1^{\infty} y^{-(\theta+m)} J_{k+r-1}\,(y-1\,;\theta)\,dy = \text{ (neka je } n := k+r-1\text{)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\theta^{r+k}}{k!\,(r-1)!} \int\limits_1^{\infty} y^{-(\theta+m)} \int\limits_{C_n(y-1)} \frac{\left(y-1-\sum_{i=1}^n s_i\right)^{\theta-1}}{s_1\cdot\ldots\cdot s_n} ds_1\ldots ds_n dy =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\theta^{r+k}}{k!\,(r-1)!} \int\limits_{s_1,\ldots s_n>1} (s_1\cdot\ldots\cdot s_n)^{-1} \int\limits_{\sum_{i=1}^n s_i+1}^{\infty} y^{-(\theta+m)} \left(y-1-\sum_{i=1}^n s_i\right)^{\theta-1} dy ds_1\ldots ds_n.$$

Primijenimo li supstituciju $s = \left(1+\sum_{i=1}^n s_i\right)\cdot y^{-1}$, $ds = -\left(1+\sum_{i=1}^n s_i\right)\cdot y^{-2}dy$ dobivamo

$$\int\limits_{\sum_{i=1}^n s_i+1}^{\infty} y^{-(\theta+m)} \left(y-1-\sum_{i=1}^n s_i\right)^{\theta-1} dy =$$

$$\int\limits_0^1 \frac{s^{\theta+m-2}}{\left(1+\sum_{i=1}^n s_i\right)^{\theta+m-2}} \left(1+\sum_{i=1}^n s_i\right)^{\theta-1} \left(\frac{1}{s}-1\right)^{\theta-1} \frac{ds}{1+\sum_{i=1}^n s_i} =$$

$$\frac{1}{\left(1+\sum_{i=1}^n s_i\right)^m} \int\limits_0^1 s^{m-1}\,(1-s)^{\theta-1}\,ds = \frac{1}{\left(1+\sum_{i=1}^n s_i\right)^m} \frac{\Gamma(\theta)\,\Gamma(m)}{\Gamma(\theta+m)},$$

iz čega slijedi

$$\int\limits_0^{\frac{1}{r}} x^m d_r\,(x\,;\theta)\,dx =$$

$$\frac{\Gamma(\theta)\,\Gamma(m)}{\Gamma(\theta+m)} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\theta^{r+k}}{k!\,(r-1)!} \int\limits_{s_1,\ldots s_n>1} (s_1\cdot\ldots\cdot s_n)^{-1} \left(1+\sum_{i=1}^n s_i\right)^{-m} ds_1\ldots ds_n =$$

$$\frac{\Gamma(\theta+1)\,\theta^{r-1}}{\Gamma(\theta+m)\,(r-1)!} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\theta^k}{k!} \int\limits_{s_1,\ldots s_n>1} (s_1\cdot\ldots\cdot s_n)^{-1}\,\Gamma(m) \left(1+\sum_{i=1}^n s_i\right)^{-m} ds_1\ldots ds_n.$$

Označimo sa $\sigma := \sum_{i=1}^{n} s_i$. Tada je

$$\Gamma(m)\left(1+\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^{-m} = (1+\sigma)^{-m}\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}dx = \left[y = \frac{x}{1+\sigma},\ dy = \frac{dx}{1+\sigma}\right]$$
$$(1+\sigma)^{-m}\int_0^\infty (1+\sigma)^{m-1}\, y^{m-1}e^{-y(1+\sigma)}\,(1+\sigma)\,dy = \int_0^\infty y^{m-1}e^{-y(1+\sigma)}dy.$$

Zato vrijedi

$$\int_0^{\frac{1}{r}} x^m d_r(x;\theta)\,dx =$$
$$\frac{\Gamma(\theta+1)\,\theta^{r-1}}{\Gamma(\theta+m)\,(r-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^k}{k!}\int\limits_{s_1,\dots s_n>1}(s_1\cdot\ldots\cdot s_n)^{-1}\int_0^\infty y^{m-1}e^{-y\left(1+\sum_{i=1}^{n} s_i\right)}dy\,ds_1\ldots ds_n =$$
$$\frac{\Gamma(\theta+1)\,\theta^{r-1}}{\Gamma(\theta+m)\,(r-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^k}{k!}\int_0^\infty y^{m-1}e^{-y}\int\limits_{s_1,\dots s_n>1}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-ys_i}}{s_i}\,ds_1\ldots ds_n\,dy =$$
$$\frac{\Gamma(\theta+1)\,\theta^{r-1}}{\Gamma(\theta+m)\,(r-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^k}{k!}\int_0^\infty y^{m-1}e^{-y}\left(\int_1^\infty\frac{e^{-ys}}{s}\,ds\right)^n dy = [ys=u,\ yds=du]$$
$$\frac{\Gamma(\theta+1)\,\theta^{r-1}}{\Gamma(\theta+m)\,(r-1)!}\int_0^\infty y^{m-1}e^{-y}\left(\int_y^\infty\frac{e^{-u}}{u}\,du\right)^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^k}{k!}\left(\int_y^\infty\frac{e^{-u}}{u}\,du\right)^k dy =$$
$$\frac{\Gamma(\theta+1)\,\theta^{r-1}}{\Gamma(\theta+m)\,(r-1)!}\int_0^\infty y^{m-1}e^{-y}\left(\int_y^\infty\frac{e^{-u}}{u}\,du\right)^{r-1}\exp\left[-\theta\int_y^\infty\frac{e^{-u}}{u}\,du\right]dy =$$
$$\frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta+m)}\int_0^\infty y^{m-1}\frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!}\left(\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right)^{r-1}\exp\left[-y-\theta\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right]dy.$$

□

Sada smo u mogućnosti pokazati sljedeći korolar.

Korolar 3.18. Funkcija $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$,

$$f(z_1,\ldots,z_r) = \theta^r \Gamma(\theta)\, e^{\gamma\theta} z_1^{-1} \cdot \ldots \cdot z_{r-1}^{-1} z_r^{\theta-2} g_\theta\left(\frac{1-z_1-\ldots-z_r}{z_r}\right) \mathbb{1}_{M_r}(z_1,\ldots,z_r)$$

jest vjerojatnosna funkcija gustoće.

Dokaz. U teoremu 3.14 je pokazano da kada $n \to \infty$ i $n\alpha \to \theta$ funkcije gustoće slučajnog vektora $\left(Z^n_{(1)}, Z^n_{(2)}, \ldots, Z^n_{(r)}\right)$ konvergiraju prema f. Zbog činjenice da je funkcija gustoće slučajnog vektora $\left(Z^n_{(1)}, Z^n_{(2)}, \ldots, Z^n_{(r)}\right)$ pozitivna slijedi da je $f \geq 0$. Preostaje pokazati da je

$$\int_{\mathbb{R}^r} f(z_1,\ldots,z_r)\, dz_1 \ldots dz_r = 1.$$

Pokažimo prvo da je za svaki $r \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{1}{r}} d_r(x;\theta) = 1.$$

U teoremu 3.17 smo za $m = 0$ dokazali da je

$$\int_0^{\frac{1}{r}} d_r(x;\theta) = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta)} \int_0^\infty y^{-1} \frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!} \left(\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right)^{r-1} \exp\left[-y-\theta\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right] dy =$$

$$\theta\int_0^\infty y^{-1}e^{-y} \frac{\left(\theta\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right)^{r-1}}{(r-1)!} \exp\left[-\theta\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right] dy.$$

U slučaju $r = 1$ imamo

$$\int_0^1 d_1(x;\theta) = \int_0^\infty \theta y^{-1}e^{-y} \exp\left[-\theta\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right] dy = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \exp\left[-\theta\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right] dy =$$

$$e^0 - \lim_{y\to 0} \exp\left[-\theta\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right] = e^0 - e^{-\infty} = 1.$$

U slučaju $r > 1$ imamo

$$\int_0^\infty \theta y^{-1} e^{-y} \exp\left[-\theta \int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du\right] dy = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^{r-1}}{\partial \theta^{r-1}} \left(\int_0^\infty y^{-1} e^{-y} \exp\left[-\theta \int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du\right] dy \right) = \frac{\partial^{r-1}}{\partial \theta^{r-1}} \left(\frac{1}{\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty y^{-1} e^{-y} \exp\left[-\theta \int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du\right] (-1)^{r-1} \left(\int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du \right)^{r-1} dy = (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{\theta^r} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{1}{r}} d_r(x;\theta) = \theta \int_0^\infty y^{-1} e^{-y} \frac{\left(\theta \int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du\right)^{r-1}}{(r-1)!} \exp\left[-\theta \int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du\right] dy = 1. \tag{3.14}$$

U teoremu 3.15 je dokazano da je $d_r(z_r;\theta) = \int_{\mathbb{R}^{r-1}} f(z_1,\dots,z_r)\, dz_1 \dots dz_{r-1}$, a to zajedno s (3.14) daje

$$\int_{\mathbb{R}^r} f(z_1,\dots,z_r)\, dz_1 \dots dz_r = \int_0^\infty d_r(z_r;\theta)\, dz_r = 1.$$

□

Zaključno sa korolarom koji slijedi dokazali smo tražena svojstva Poisson-Dirichletove razdiobe.

Korolar 3.19. Neka je dan slučajni vektor $\mathbb{G}_{(.)} := (G_{(1)}, G_{(2)}, \dots)$ na prostoru Δ s Poisson-Dirichletovom razdiobom s parametrom θ. Neka je $r \in \mathbb{N}$ fiksan. Tada je funkcija gustoće slučajnog vektora $(G_{(1)}, G_{(2)}, \dots, G_{(r)})$ funkcija $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$,

$$f(z_1,\dots,z_r) = \theta^r \Gamma(\theta) e^{\gamma\theta} z_1^{-1} \cdot \ldots \cdot z_{r-1}^{-1} z_r^{\theta-2} g_\theta \left(\frac{1 - z_1 - \ldots - z_r}{z_r} \right) \mathbb{1}_{M_r}(z_1,\dots,z_r),$$

gdje je funkcija g_θ dana u (3.7), a prostor M_r u (3.5).

Funkcija gustoće slučajne varijable $G_{(r)}$ funkcija $d_r(\cdot\,;\theta) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$d_r(x;\theta) = x^{\theta-2} \sum_{0 \le k < x^{-1}-r} (-1)^k \frac{\theta^{r+k}}{k!\,(r-1)!} J_{k+r-1}\left(\frac{1-x}{x};\theta\right) \mathbb{1}_{\langle 0, r^{-1} \rangle}(x),$$

gdje je funkcija J_k dana u (3.6).

Za $m \in \mathbb{N}$ m-ti moment slučajne varijable $G_{(r)}$ iznosi

$$\mathbb{E}\left[(G_{(r)})^m\right] = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta+m)} \int_0^\infty y^{m-1} \frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!} \left(\int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du \right)^{r-1} \exp\left[-y - \theta \int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du \right] dy. \tag{3.15}$$

Dokaz. U korolaru 3.9 je pokazano da $\mathbb{Z}^n_{(.)} \Longrightarrow \mathbb{G}_{(.)}$ kada $n \to \infty$ i $n \to \infty$. Iz toga slijedi da za fiksan r funkcija gustoće slučajnog vektora $\left(Z^n_{(1)}, Z^n_{(2)}, \ldots, Z^n_{(r)}\right)$ konvergira k funkciji gustoće slučajnog vektora $(G_{(1)}, G_{(2)}, \ldots, G_{(r)})$ kada $n \to \infty$. U teoremu 3.14 je dokazano da funkcija gustoće slučajnog vektora $\left(Z^n_{(1)}, Z^n_{(2)}, \ldots, Z^n_{(r)}\right)$ konvergira k funkciji f. Budući da je u korolaru 3.18 pokazano da je f vjerojatnosna funkcija gustoće zaključujemo da je f funkcija gustoće slučajnog vektora $(G_{(1)}, G_{(2)}, \ldots, G_{(r)})$.

Budući da je funkcija f funkcija gustoće slučajnog vektora $(G_{(1)}, G_{(2)}, \ldots, G_{(r)})$, a funkcija $d_r(\cdot\,;\theta)$ po teoremu 3.15 r-ta marginalna gustoća od f i po dokazu korolara 3.18 vjerojatnosna funkcija gustoće slijedi da je $d_r(\cdot\,;\theta)$ funkcija gustoće slučajne varijable $G_{(r)}$.

Budući da je $d_r(\cdot\,;\theta)$ funkcija gustoće slučajne varijable $G_{(r)}$, a po teoremu 3.17 za proizvoljni $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\int_0^{\frac{1}{r}} x^m d_r(x\,;\theta)\, dx = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta+m)} \int_0^\infty y^{m-1} \frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!} \left(\int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du \right)^{r-1} \exp\left[-y - \theta \int_y^\infty e^{-u} u^{-1} du \right] dy$$

dobivamo traženu tvrdnju za $\mathbb{E}\left[(G_{(r)})^m\right]$. $\square$

Poglavlje 4

Zaključak

U poglavlju 2 proučavali smo dva primjera slučajnih vektora za koje smo pokazali da konvergiraju prema distribuciji koju nazivamo Poisson-Dirichletova. U poglavlju 3 dokazali smo svojstva te distribucije, tako da smo sada u mogućnosti reći nešto više o graničnom ponašanju dugih ciklusa i velikih djelitelja.

Korolar 4.1. Neka je $\left|C_{(r)}\right|$ slučajna varijabla koja odgovara duljini r-tog po veličini ciklusa permutacije n-članog skupa. Kada $n \to \infty$ slučajna varijabla $\frac{|C_{(r)}|}{n}$ konvergira k slučajnoj varijabli s funkcijom gustoće $d_r(\cdot\,;1)$ danoj u (3.13) i m-tim momentima danima u (3.15) za $\theta = 1$.

Dokaz. Po napomeni 3.3 slučajni vektor $\mathbb{L}^n_{(.)}$ konvergira prema Poisson-Dirichletovoj razdiobi s parametrom 1. Budući da je $\frac{|C_{(r)}|}{n}$ r-ta komponenta vektora $\mathbb{L}^n_{(.)}$ po korolaru 3.19 vrijedi tražena tvrdnja uz parametar $\theta = 1$. □

Korolar 4.2. Neka je P_r slučajna varijabla koja odgovara r-tom po veličini prostom faktoru prirodnog broja $N_n \leq n$. Kada $n \to \infty$ slučajna varijabla $\frac{\log(P_r)}{\log(t(N_n))}$, gdje je funkcija t dana u (2.3), konvergira k slučajnoj varijabli s funkcijom gustoće $d_r(\cdot\,;1)$ danoj u (3.13) i m-tim momentima danima u (3.15) za $\theta = 1$.

Dokaz. Slučajni vektor $\left(\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)}, \frac{\log(P_2)}{\log(T_n)}, \dots\right)$ konvergira prema Poisson-Dirichletovoj razdiobi s parametrom 1, ponovno po napomeni 3.3. Budući da je $t(N_n) = T_n$ i $\frac{\log(P_r)}{\log(t(N_n))}$ r-ta komponenta vektora $\left(\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)}, \frac{\log(P_2)}{\log(T_n)}, \dots\right)$ po korolaru 3.19 vrijedi tražena tvrdnja uz parametar $\theta = 1$. □

Promotrimo detaljnije što se dobiva iz prethodna dva korolara u slučaju $r = 1$ odnosno za najdulji ciklus i najveći prosti faktor. Kada $n \to \infty$ slučajna varijabla $\frac{|C_{(1)}|}{n}$ i slučajna varijabla $\frac{\log(P_1)}{\log(t(N_n))}$ konvergiraju k slučajnoj varijabli s funkcijom gustoće

$$d_1(x;1) = x^{-1} \sum_{0 \le k < x^{-1}-1} \frac{(-1)^k}{k!} \int\limits_{\substack{s_1,\dots,s_k>1 \\ \sum_{i=1}^k s_i < \frac{1-x}{x}}} \frac{ds_1 \dots ds_k}{s_1 \cdot \dots \cdot s_k}, \tag{4.1}$$

gdje se u slučaju $k = 0$ za vrijednost integrala uzima 1.

Za niz slučajnih varijabli $\frac{|C_{(1)}|}{n}$ vrijedi

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\left|\frac{|C_{(1)}|}{n}\right|^{1+\varepsilon}\right] \le 1 < \infty$$

čime je zadovoljen uvjet korolara 1.18. Iz čega možemo zaključiti da je za dovoljno veliki n očekivana relativna duljina najduljeg ciklusa slučajne permutacije približno dana formulom

$$\mathbb{E}\left[\frac{|C_{(1)}|}{n}\right] \approx \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+1)} \int_0^\infty y^{1-1} \frac{1^{1-1}}{(1-1)!} \left(\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right)^{1-1} \exp\left[-y - \int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right] dy =$$
$$\int_0^\infty e^{-y} \exp\left[-\int_y^\infty e^{-u}u^{-1}du\right] dy \approx 0.624.$$

Vjerojatnosti $\mathbb{P}[G_{(r)} > x]$ mogu se numerički izračunati i tabelirati za različite parametre θ. Slučaj koji nas najviše zanima za $\theta = 1$ i $r = 1$ po Griffiths [3] izračunat na četiri decimale dan je u tablici 4.1.

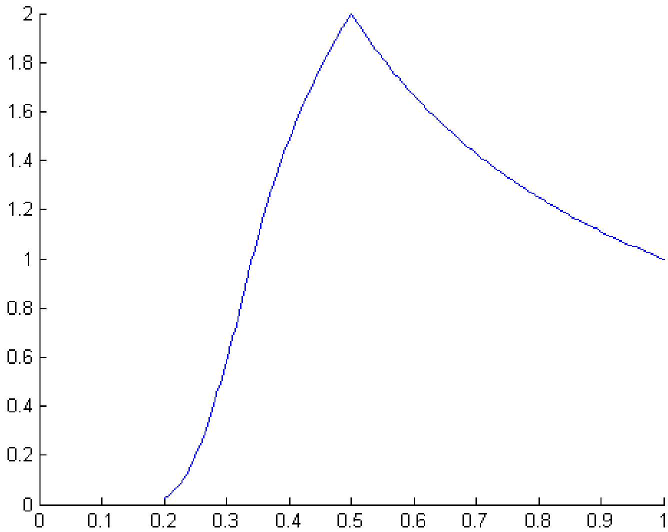
x	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\mathbb{P}[G_{(1)} > x]$	1.0000	1.0000	0.9996	0.9951	0.9763	0.9346
x	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65
$\mathbb{P}[G_{(1)} > x]$	0.8697	0.7878	0.6931	0.5978	0.5108	0.4308
x	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
$\mathbb{P}[G_{(1)} > x]$	0.3567	0.2877	0.2231	0.1625	0.1054	0.0513

Tablica 4.1: Distribucija slučajne varijable $G_{(1)}$.

Ponovno za dovoljno veliki n možemo po podacima iz tablice 4.1 zaključiti da je

$$\mathbb{P}\left[\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)} > 0.8\right] \approx 0.2231 \Rightarrow \mathbb{P}\left[P_1 > T_n^{0.8}\right] \approx 0.2231,$$
$$\mathbb{P}\left[\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)} \le 0.2\right] \approx 1 - 0.9996 \Rightarrow \mathbb{P}\left[P_1 \le T_n^{0.2}\right] \approx 0.0004.$$

Prirodno se postavlja pitanje što znači dovoljno veliki n. Na to pitanje nećemo dati formalan odgovor, ali ga intuitivno možemo naslutiti vizualnim pristupom. Na slici 4.1 prikazan je graf funkcije dane u (4.1) prema kojoj po korolaru 4.2 konvergira slučajna varijabla $\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)}$. Budući da je za određivanje vrijednosti funkcije gustoće za $x < 0.2$ potrebno računati peterostruke i više integrale što je numerički vrlo zahtjevno graf je prikazan za $x \in [0.2, 1]$.

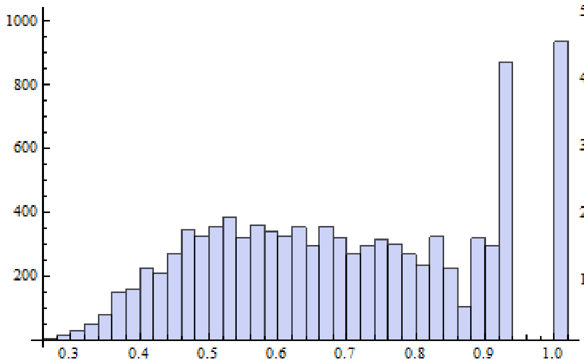


Slika 4.1: Graf funkcije $d_1\,(x\,; 1)$, za $x \in [0.2, 1]$.

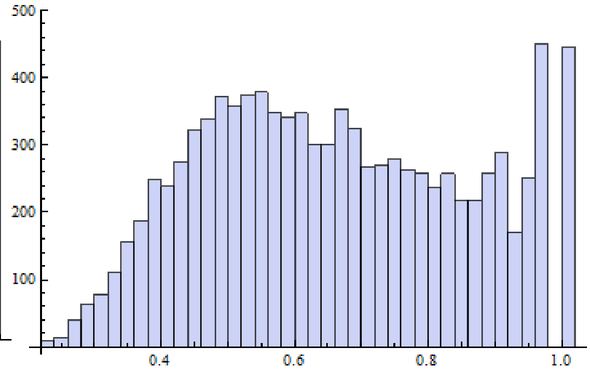
Kako bismo odredili ponašanje varijable $\frac{\log(P_1)}{\log(T_n)}$ za konkretan n promatrali smo slučajne uzorke od po $m = 1000$ elemenata i za dobivene realizacije crtali histograme.

Tako su na slici 4.2 prikazani histograni dobiveni u slučaju $n = 10^5$, $n = 10^{10}$, $n = 10^{15}$ i $n = 10^{20}$ pomoću programskog paketa Wolfram Mathematica [5]. Uočimo da se na svim grafovima može uočiti rast otprilike do vrijednosti 0.5 kao što i očekujemo s obzirom na graf sa slike 4.1, i pad nakon 0.5. Ono što na grafovima za $n < 10^{20}$ posebno odskače od očekivanog jesu slučajevi kada je $\frac{\log(p_1)}{\log(t_n)} > 0.9$ što se događa na primjer u slučaju kada je $t_n = p_1$, odnosno kada je nasumično odabran broj prost ili potencija prostog. Uočimo da taj utjecaj postupno slabi kako n raste i da za $n = 10^{20}$ histogram vrlo dobro odgovara grafu sa slike 4.1. Budući da se to postiže tek za $n = 10^{20}$ zaključujemo da je brzina konvergencije vrlo spora.

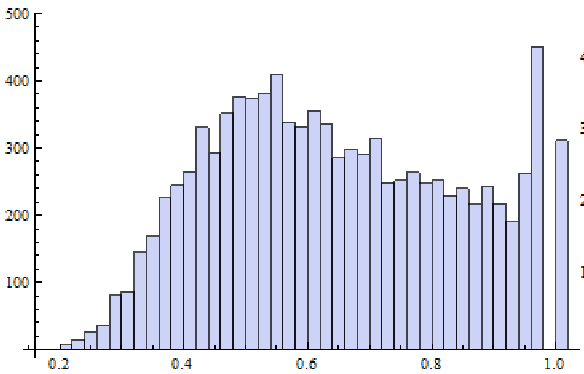
S ovih nekoliko od mnogobrojnih primjena rezultata dobivenih u ovom radu zaokružena je tema razdiobe dugih ciklusa i velikih djelitelja.



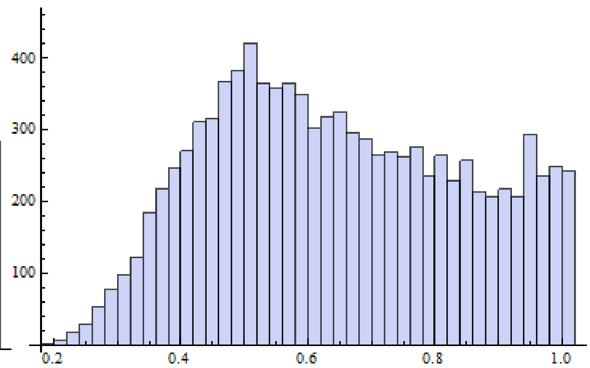
(a) $n = 10^5$.



(b) $n = 10^{10}$.



(c) $n = 10^{15}$.



(d) $n = 10^{20}$.

Slika 4.2: Histogrami vrijednosti $\dfrac{\log(P_1)}{\log(T_n)}$ za različite n i za 10000 realizacija slučajnih varijabli P_1 i T_n.

Bibliografija

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, A Wiley-Interscience Publication, 1999.

[2] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva, Skripta*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, http://web.math.pmf.unizg.hr/ duje/utb/utblink.pdf.

[3] R.C. Griffiths, *On the Distribution of Points in a Poisson Dirichlet Process*, Journal of Applied Probability **25**, br. 2, 336–345, 1988.

[4] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

[5] Inc. Wolfram Research, *Mathematica*, verzija 9.0, Champaign, IL, 2012.

Sažetak

Jedan on ciljeva ovog diplomskog rada bio je definirati Poisson-Dirichletovu razdiobu i proučiti njezina glavna svojstva. Uvedeni su pojmovi iz područja matematičke analize, teorije vjerojatnosti i teorije brojeva nužni za razumijevanje kasnijih rezultata, a neka njihova svojstva su i dokazana. Motivacija i opravdanost definicije Poisson-Dirichletove razdiobe ilustrirani su kroz dva primjera u drugom poglavlju. Detaljno su obrazložena i formalno pokazana asimptotska svojstva slučajnih vektora koji odgovaraju relativnim duljinama ciklusa slučajnih permutacija, odnosno logaritamskih vrijednosti prostih djelitelja slučajnog prirodnog broja manjeg od n. U trećem poglavlju izrečeni su i dokazani glavni rezultati razmatrani u ovom radu. Povezana je funkcija gustoće Poisson-Dirichletove razdiobe, njezine marginalne gustoće i momenti s asimptotskim svojstvima dugih ciklusa i velikih djelitelja. U zadnjem poglavlju su ti rezultati primijenjeni na konkretnim podacima te je ilustrirana brzina konvergencije distribucija dugih ciklusa i velikih djelitelja za velik, ali konačan n.

Summary

One of the aims of this thesis was to define Poisson-Dirichlet distribution and study its main properties. Concepts from the fields of Analysis, Probability theory and Number theory are introduced and some of their properties proven in order to fully understand later results. The motivation and justification for the definition of Poisson-Dirichlet distribution are illustrated by two examples in Chapter 2. Asymptotic properties of random vectors corresponding to relative lengths of cycles in random permutations and logarithmic values of prime divisors of random natural numbers smaller than n are formally proven and explained in detail. The main results discussed in this thesis are stated and proven in Chapter 3. The relation between probability density function of Poisson-Dirichlet distribution, its marginal densities and moments and asymptotic properties of long cycles and great divisors is proven. In concluding chapter these results are applied to specific data, we also illustrate the speed of convergence of distributions of long cycles and great divisors for large, but finite n.

Životopis

Rođena sam 17. lipnja 1991. godine u Zagrebu. Nakon završetka Osnovne škole Vladimira Nazora upisala sam XV. gimnaziju u Zagrebu. 2010. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2013. godine diplomski sveučilišni studij Teorijska matematika na istom fakultetu. Tokom studija nagrađena sam trećom nagradom na međunarodnom studentskom natjecanju IMC 2012. godine, Priznanjem za izniman uspjeh u studiju 2013. i 2015. godine te Rektorovom nagradom 2015. godine.