Specijalna teorija relativnosti i relativistička masa

Turkalj, Matej

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Matej Turkalj

SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI I RELATIVISTIČKA MASA

Diplomski rad

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER: NASTAVNIČKI

Matej Turkalj

Diplomski rad

Specijalna teorija relativnosti i relativistička masa

Voditelj diplomskog rada: Prof. dr. sc. Dubravko Klabučar

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

Datum polaganja: ____________

Zagreb, 2023.

„If you have two friends in your lifetime, you're lucky.
If you have one good friend, you're more than lucky.“

Sažetak

1905. je bila čudesna godina, godina u kojoj je Einstein izdao nekoliko revolucionarnih radova, među kojima je bio i začetak Specijalne Teorije Relativnosti (STR). U svome posljednjem objavljenom radu 1905., Einstein je došao do svoje slavne jednadžbe $E_0 = mc^2$. Osim Einsteina, veliki doprinos razvoju STR dali su Max Planck i Herman Minkowski. Planck je izveo relativistički izraz za količinu gibanja, dok je Minkowski ujedinio prostor i vrijeme u jedan entitet, kojeg je on nazvao *svijet*, a mi ga danas znamo pod drugim imenom – *prostorvijeme,* što je dovelo do stvaranja četverodimenzionalnog formalizma STR. U tom formalizmu može se pokazati kako je masa invarijantna veličina – veličina čija vrijednost ne ovisi o izboru referentnog sustava. Međutim, neispravno tumačenje slavne jednadžbe neizbježno dovodi do koncepta relativističke mase (RM) - mase čija vrijednost ovisi o izboru referentnog sustava, tj. brzini. Iako je znanstvena zajednica danas odustala od koncepta RM, ona i danas dalje prevladava u knjigama popularne znanosti jer zajedno s formulom $E = mc^2$ autori nastoje privući pozornost, te na taj način drže na životu koncept koji se je davno trebao prestati upotrebljavati.

Ključne riječi: specijalna teorija relativnosti, masa, odnos mase i energije, energija mirovanja, prostorvrijeme, relativistička masa

Special Theory of Relativity and Relativistic Mass

Abstract

1905. was a marvelous year, year in which Einstein published several revolutionary works, among which was beginning of Special Theory of Relativity (STR). In his last published work, in 1905., Einstein came up with his famous equation $E_0 = mc^2$. Besides Einstein, great contribution to development of STR gave Max Planck and Herman Minkowski. Planck derived relativistic expression for momentum, while Minkowski united space and time in one entity he called the *world*, which we today know by a different name - *spacetime*, thus led to development of fourdimensional formalism of STR. In that formalism we can show that mass is invariant quantity – quantity whose value does not depend on the chosen reference frame. However, invalid use of the famous equation inevitably leads to a concept of relativistic mass (RM) – mass whose values does depend on the chosen reference frame, i.e. speed. Although the science community did abandon a concept of RM, it still prevails in popular science books, because together with equation $E = mc^2$, authors seek to attract the attention of the reader, keeping alive a concept which was supposed to be abanded long time ago.

Keywords: special theory of relativity, mass, relationship between mass and energy, rest energy, spacetime, relativistic mass

Sadržaj

1 Uvod

Ako je jedna formula najpoznatija u cijeloj znanosti, to je slavna Einsteinova formula $E = mc^2$, proizašla iz njegova rada 1905. godine: *O elektrodinamici tijela u gibanju* - koji će kasnije dovesti do formulacije Specijalne Teorije Relativnosti. Ali, je li formula $E = mc^2$ doista formula do koje je Einstein došao u svojim radovima i koje su posljedice te formule?

U ovome radu ići ćemo putem Einsteina i njegovog otkrivanja tada nepojmljivih svojstava prostora i vremena u kojemu živimo. U sljedećem poglavlju otkrit ćemo što je motiviralo Einsteina na pisanje svoga slavnog rada, a u poglavlju 3 ćemo istražiti koje su posljedice njegove pretpostavke o prirodi svjetlosti, da bi samo na osnovi dva postulata, u poglavlju 4 formulirali Specijalnu Teoriju Relativnosti. Nakon što u poglavlju 4 uvedemo masu kao invarijantnu veličinu – apsolutnu vrijednost 4-vektora čija vrijednost ne ovisi o izboru referentnog sustava, poglavlje 5 posvetit ćemo konceptu relativističke mase - masi čija vrijednost ovisi izboru referentnog sustava, a čije cijelo postojanje se bazira na jednadžbi $E = mc^2$.

2 Motivacija iza stvaranja STR

Jedno od temeljnih načela fizike, koji se najčešće poistovjećuje s Galileom, a proizlazi iz Newtonovih zakona, je princip relativnosti. Princip relativnosti nam govori da su zakoni fizike isti u sustavima koji miruju ili se gibaju pravocrtno stalnom brzinom [19].

U svojoj knjizi: *Dijalog o dva glavna svjetska sustava*, Galileo opisuje princip relativnosti: „…Zatvori se zajedno s prijateljem u glavnoj kabini ispod palube na nekom velikom brodu, i imaj sa sobom neke mušice, leptire, i ostale male leteće životinje. Imaj veliku posudu s vodom i nekim ribama u njoj; ovjesi bocu koja se prazni kap po kap u široku posudu ispod nje. Sa stojećim brodom, promotri pozorno kako male životinje lete istom brzinom na sve strane kabine. Ribe plivaju indiferentno u svim smjerovima; kapi padaju u posudu ispod nje; i u bacanju nečega svome prijatelju, ne moraš baciti ništa jače u jednom smjeru, nego u drugome, za udaljenosti bivaše jednakim; skačući sa spojenim nogama, prelaziš iste udaljenosti u svim smjerovima. Kada si promotrio sve te stvarni pozorno (iako ne postoji sumnja da kada brod stoji, da se sve mora dogoditi na taj način), neka se brod giba nekom brzinom, dokle god je to gibanje jednoliko i ne fluktuira na neki način. Otkriti nećeš ni najmanju promjenu u svim navedenim efektima, niti bi na osnovi bilo kojih od njih mogao reći giba li se brod ili miruje. U skakanju, proći ćeš istu udaljenost kao i prije, nećeš praviti veće skokove prema pramcu nego prema krmi iako se brod giba poprilično brzo, unatoč činjenici da za vrijeme koje si u zraku pod ispod tebe će ići u suprotnom smjeru od tvoga skoka. U bacanju nečega svome prijatelju, nećeš trebati više sile da dođe do njega bilo da je on u smjeru pramca ili krme, s tim da si ti pozicioniran nasuprot. Kapi će padati kao i prije u posudu ispod bez naginjanja prema pramcu, iako dok su kapi u zraku brod se pomakne mnogo. Ribe u vodi plivat će prema prednjoj strani posude bez imalo više truda nego prema stražnjoj strani posude, te će ići istom lakoćom prema mamcu postavljenim bilo gdje pored ruba posude. Posljednje, leptiri i mušice će nastaviti svoj let indiferentno prema svim strana, niti će se dogoditi da su više koncentrirane prema krmi, kao da su umorene od održavanja smjera s brodom…„ [5].

Pravocrtno gibanje sustava s konstantnom brzinom, relativno prema vanjskom promatraču, je neuočljivo unutar samog sustava. Ukoliko se sustav giba jednolikom brzinom po pravcu, ne postoji eksperiment koji bi promatrač unutar toga sustava mogao izvesti kako bi utvrdio giba li se on ili ne. Takav referentni sustav nazivamo inercijalnim referentnim sustavom (IRS) [5]. U daljnjim razmatranjima pričajući o referentnim sustavima uvijek podrazumijevamo da se radi o inercijalnom.

Zamislimo dva IRS, sustav (S) i sustav (S'). Koordinate sustava (S) su (x, y, z), a koordinate sustava (S') su (x', y', z'). U trenutku $t = 0$ ishodišta tih IRS se poklapaju.

Koja je veza između koordinata sustava (S) i koordinata sustava (S')? Ako pretpostavimo da se sustav (S') giba brzinom v, u odnosu na sustav (S), tada će veza između njihovih koordinatnih sustava nakon nekog vremena biti [7]:

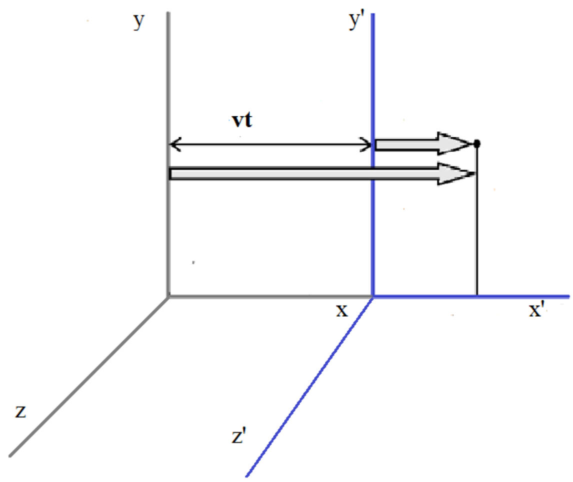
$$t = t' \tag{2.1}$$

$$y = y' \tag{2.2}$$

$$z = z' \tag{2.3}$$

$$x = x' + vt \tag{2.4}$$

Opisana situacija nalazi se na slici (1).



Slika (1) Relativno gibanje između sustava (S) i (S')

Iz jednadžbe (2.1) vidimo kako je vremenska komponenta sustava (S) jednaka vremenskoj komponenti sustava (S'). Vremenska komponenta neovisna je o prostornoj komponenti, svi promatrači mjerit će isto vrijeme. Vrijeme koje je jednako za sve promatrače naziva se apsolutno vrijeme. Opća pretpostavka u Newtonovoj mehanici je ta da je vrijeme apsolutno – vrijeme proteklo u sustavu (S) je isto kao i vrijeme proteklo u sustavu (S') [18]:

$$t = t'$$

Derivacijom izraza (2.4) po vremenu dobijemo vezu između brzina tijela gledano iz dva različita IRS; jedna brzina biti će brzina koju vidi promatrač iz sustava (S) - w, a druga brzina bit će brzina koju vidi promatrač iz sustava (S') - u [7]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{d(ut)}{dt}$$

$$w = u + v \tag{2.5}$$

Mnoga eksperimentalna istraživanja su obavljena između 17. i 20. stoljeća u svrhu potvrđivanja jednadžbe (2.5) i sva su pokazala da je ona u skladu s eksperimentalnim opažanjima. S time je Galileov princip relativnosti postao prihvaćen u znanstvenoj zajednici, a jednadžbe (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) i (2.5) poprimile su naziv Galileove transformacijske jednadžbe koordinata i brzina, te se smatralo da svi zakoni fizike moraju biti invarijantni na Galileove transformacije pri prelasku iz jednog IRS u drugi.

Krajem 19. stoljeća, uspješnost Maxwellove teorije elektromagnetizma u objašnjavanju eksperimentalnih opažanja i predviđanja novih fenomena, postavilo ju je na istu razinu kao i Newtonovu teoriju mehanike [20]. Ali kao što je Galileo pokazao, svi zakoni fizike pa tako i oni vezani za elektromagnetizam, moraju biti invarijantni prema Galileovim transformacijama. Međutim, Maxwellova teorija elektromagnetizma to nikako nije bila. Ako se jednadžba (2.5) primijeni na brzinu svjetlosti c, onda nam Galileove transformacije govore da promatrači u sustavima (S) i (S') moraju izmjeriti dvije različite brzine svjetlosti. Brojna mjerenja su obavljena na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće. Najpoznatiji od tih pokušaja bio je Michelson–Morleyev eksperiment. U svom pokušaju Michelson je izmjerio da su brzine svjetlosti jednake u svim smjerovima. Galileove transformacije brzina, koje su se do sada pokazale točnim, nisu bile primjenjive kod Maxwellove teorije. Jasno je kako ne može i Maxwellova i Newtonova teorija biti točna.

Nešto se je moralo promijeniti. Ili transformacije koordinata iz jednog referentnog sustava u drugi ili teorija o elektromagnetizmu. Kako je Maxwellova teorija bila nova, jedni su odabrali ići tim putem, putem mijenjanja teorije elektromagnetizma kako bi ju doveli u sklad s Galileovim transformacijama. Drugi, a to bi bio sam Albert Einstein, su odabrali ići manje prihvatljivim putem, putem mijenjanja transformacija koordinata [20]. Jer Einstein je uvidio dvije stvari:

1) U odnosu na koga se ta mjerenja rade
2) Maxwellove jednadžbe govore o brzini svjetlosti, ali nigdje u jednadžbama ne piše kako se promatrač giba u odnosu na svjetlost

Einstein je uvidio da ne postoji preferencijalni referentni sustav u Svemiru. Nema „apsolutnog prostora“ naspram kojeg se mogu raditi sva mjerenja. Svako gibanje je relativno i svaki promatrač u IRS može smatrati da miruje i mjeriti sva ostala gibanja naspram njegova referentna sustava. Druga stvar koju je Einstein uvidio, bila je konstantnost brzine svjetlosti. Prema Maxwellovim jednadžbama, svi promatrači mjerit će istu brzinu svjetlosti, bilo da miruju ili se gibaju jednoliko pravocrtno [20].

Ono što je trebalo promijeniti su transformacije koordinata, a trebalo ih je modificirati tako da uvijek daju istu brzinu svjetlosti, neovisno o sustavu iz kojeg promatramo. Einstein je sam izveo jednadžbe za transformaciju koordinata, ali kako su te jednadžbe izvedene prije njega, one danas ne nose njegovo ime, već se nazivaju Lorentzovim transformacijama [18].

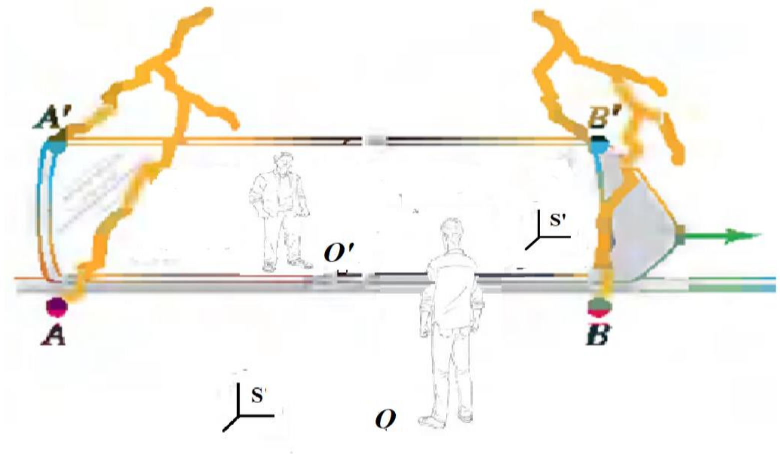
Samo na osnovi principa relativnosti i njene posljedice, a to je konstantnost brzine svjetlosti, Albert Einstein će formulirati svoju Specijalnu Teoriju Relativnosti koja će imati revolucionarne posljedice na naše poimanje prostora i vremena u kojemu živimo, te će nas natjerati da preispitamo zakone fizike.

3 Posljedice konstantnosti brzine svjetlosti

Posljedice konstantnosti brzina svjetlosti bilo je nemoguće uopće za pojmiti, one su se kršile sa svakidašnjim opažanjima i tadašnjim poimanjem Svemira u kojemu živimo. Zbog konstantnosti brzine svjetlosti događaji koji su istodobni u jednom referentnom sustavu, ne moraju biti istodobni u drugom referentnom sustavu – istodobnost dva događaja postaje relativna [2].

3.1 Relativnost istodobnosti

Kako bi demonstrirali relativnost istodobnosti poslužit ćemo se s verzijom Einsteinovog misaonog eksperimenta. Zamislimo vlak koji se giba brzinom koja je usporediva s brzinom svjetlosti. Dva groma udare u oba kraja vagona, jedan u prednji kraj, a drugi u stražnji kraj, te ostave oznaku i na vagonu i na podu u trenutku kada grom udari. Oznake na podu su označene s A i B, dok su na vagonu označene s A' i B'. U vlaku se nalazi promatrač, koji miruje u odnose zidove vlaka (S'), u točki O', koja se nalazi na pola puta između A' i B'. Na peronu se nalazi drugi promatrač, koji miruje u odnosu na zidove perona (S), u točki O, koja se nalazi na pola puta između A i B [7]. Zamišljeni misaoni eksperiment prikazan je na slici (2).



Slika (2) Misaoni eksperiment za demonstriranje relativnosti istodobnosti [7]

Pretpostavimo da bljesak svjetlosti, koji nastane od udara groma, s prednjeg i stražnjeg kraja vagona, stigne do promatrača na peronu (S) u isto vrijeme. On zna da se nalazi na pola puta između A i B pa će bljesku svjetlosti s oba kraja vagona trebati isto vrijeme kako bi došli do njega. Prema tome, on zaključuje kako su gromovi udarali istodobno u prednji i stražnji kraj vagona. Promatrač u vagonu (S') slaže se s promatračem (S) da su snopovi svjetlosti stigli u isto vrijeme do promatrača na peronu, ali se ne slaže da su gromovi udarili u isto vrijeme [7].

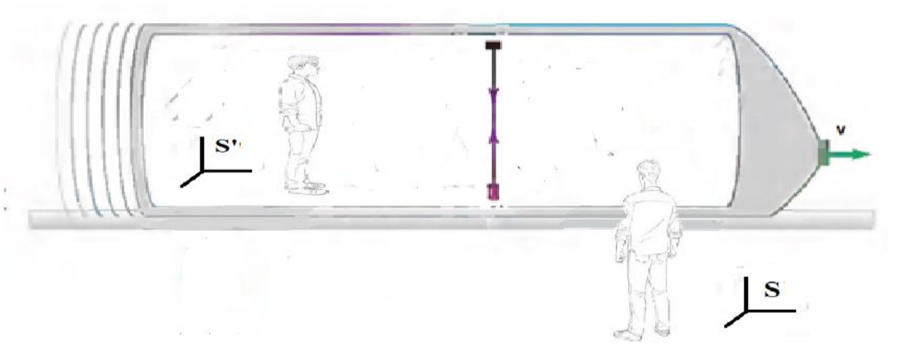
S druge strane, promatrač na peronu (S) i u vlaku (S') se slažu kako promatrač u vagonu (S') ne vidi oba bljeska svjetlosti istodobno. Promatrač u vlaku (S') nalazi se u točki O', giba se desno prema točki B', te od točke A'. Prema promatraču koji se nalazi na peronu (S), promatrač u vlaku (S') prvo vidi bljesak iz B', a tek nakon toga iz A' jer se giba prema snopu svjetlosti koji dolazi iz B', a bježi od snopa koja dolazi iz A'. I zbog toga snopu svjetlosti iz B' treba manje vremena nego snopu iz A' da bi stigla do promatrača u vlaku (S'). Međutim, prema promatraču u vlaku (S'), koji se nalazi u točki O' na pola puta između A' i B', snopovima svjetlosti iz A' i B' treba isto vrijeme kako bi došli do njega. Jer promatrač u vlaku (S') miruje u odnose na zidove vlaka. Iz svog IRS on se ne giba prema točki B', ni prema točki A', pa će snopovima svjetlosti trebati isto vrijeme jer se nalaze na istim udaljenostima, a prema Einsteinu svi promatrači, u svim smjerovima, mjere iste brzine svjetlosti. Iz toga on zaključuje kako snopu svjetlosti iz točke A' i snopu svjetlosti iz točke B' treba isto vremena kako bi došle do njega u točku O'. A pošto promatrač (S') prvo vidi bljesak svjetlosti iz B', on zaključuje da je grom prvo udario u B', a tek nakon toga u A' [7].

Promatrač na peronu (S) opaža kako su gromovi udarili u krajeve vagona istodobno, dok promatrač u vagonu (S') to ne opaža. Za njega ta dva događaja nisu bila istodobna. Iz tog misaonog eksperimenta vidimo kako istodobnost dva događaja ovisi o relativnom gibanju između dva promatrača. Dva događaja koja su istodobna za jednog promatrača, ne moraju biti istodobna za nekog drugog promatrača. Istodobnost postaje relativna, ona ovisi o izboru referentnog sustava. Kada pričamo o vremenu, moramo specificirati referentni sustav kao kada i pričamo o prostoru – vrijeme dijeli sudbinu prostora [2].

3.2 Relativnost vremenskog intervala

Relativnost istodobnosti, dva događaja koja su istodobna u jednom IRS, ne moraju biti istodobna u nekom drugom IRS, direktno utječe na mjerenje vremenskog intervala [7].

Zamislimo eksperiment u kojem se vlak giba, brzinom koja je usporediva s brzinom svjetlosti, u odnosu na promatrača koja miruje na stanici (S). U vlaku se nalaze dva zrcala, jedan se nalazi na tlu, a drugi se nalazi iznad prvog na nekoj udaljenosti. Pored zrcala na tlu se nalazi laser. U vlaku se nalazi drugi promatrač koji miruje u odnosu na zidove vlaka (S') [7]. Zamišljena situacija prikazana je na slici (3).



Slika (3) Misaoni eksperiment za demonstriranje relativnosti vremenskog intervala.

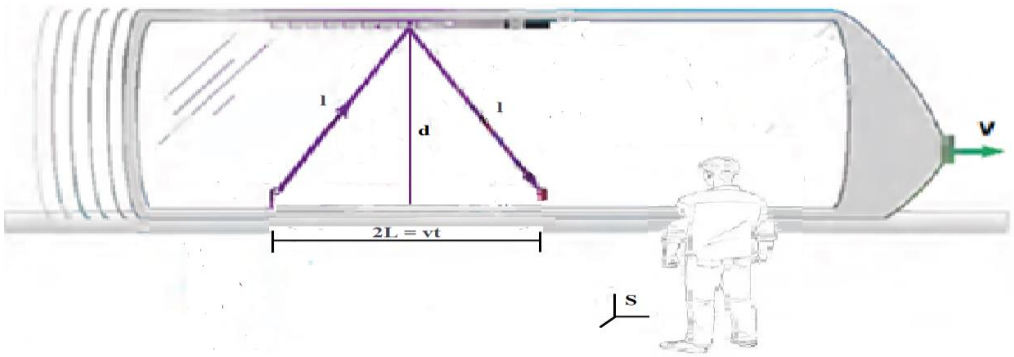
Promatrač u vlaku (S') uključi laser i snop svjetlosti izađe iz lasera prema drugom zrcalu. Promatrač u vlaku (S') vidi kako se snop svjetlosti giba gore, reflektira se od zrcalo i vrati se nazad. Putanja svjetlosti, kako ju vidi promatrač u vlaku (S'), prikazana je na slici (4).

Slika (4) Putanja svjetlosti gledano iz sustava promatrača koji miruje u odnosu na zidove vlaka.

Na osnovi toga možemo izračunati vrijeme potrebno da se snop svjetlosti vrati nazad u početnu točku. Put koju svjetlost prijeđe od donjeg zrcala do gornjeg jednaka je d. Znači da svjetlost prije nego što se vrati u početnu točku prijeđe put od $2d$. Prema Einsteinu, brzina svjetlosti je jednaka za sve promatrače i neovisna je o brzini promatrača, te iznosi c. Vrijeme potrebno snopu svjetlosti kako bi se vratio nazad u početnu točku jednako je [7]:

$$t' = \frac{2d}{c} \tag{3.1}$$

Promotrimo sada danu situaciju, ali gledano iz sustava promatrača koji miruje na stanici (S). Što on vidi? On vidi kako snop svjetlosti izađe iz lasera i giba se prema gornjem zrcalu. Ali dok snop svjetlosti dođe do gornjeg zrcala, zrcalo se pomakne za neku udaljenost jer se vlak pomaknuo za to vrijeme, a zajedno s njim se pomakne i zrcalo. Snop svjetlosti se reflektira od gornjeg zrcala i sada se giba nazad prema donjem zrcalu. Ali dok snop svjetlosti stigne do donjeg zrcala, zrcalo se opet pomakne za neku udaljenost. U trenutku kada se snop svjetlosti vrati nazad do donjeg zrcala, donje zrcalo se u odnosu na početnu točku pomaknulo za $2L$ [7]. Putanja svjetlosti kako ju vidi promatrač koji miruje na stanici (S) dana je na slici (5).



Slika (5) Putanja svjetlosti gledano iz sustava promatrača koji miruje u odnosu na zidove stanice.

Koliki je put koji svjetlost sada prijeđe? Na putu od donjeg do gornjeg zrcala svjetlost prijeđe put koji je prema Pitagorinom poučku jednak:

$$l = \sqrt{L^2 + d^2}$$

Znači da svjetlost prije nego što se vrati nazad u početnu točku prijeđe put od $2l$. I opet se pozivamo na Einsteinovu pretpostavku o brzini svjetlosti, a to je da je brzina svjetlosti jednaka za sve promatrače. Iz toga slijedi da je vrijeme potrebno, kako bi se snop svjetlosti vratio nazad u početnu točku, gledano iz sustava promatrača koji miruje na stanici (S), jednako:

$$t = \frac{2l}{c} = \frac{2\sqrt{L^2 + d^2}}{c} \tag{3.2}$$

Zbog toga što je put koji svjetlost prijeđe iz perspektive promatrača u vlaku (S'), manji od puta koji svjetlost prijeđe iz perspektive promatrača na stanici (S):

$$d < \sqrt{L^2 + d^2}$$

vrijeme koje izmjeri promatrač u vlaku (S') biti će manje od vremena koji izmjeri promatrač na stanici (S). Vidimo da su izmjereni vremenski intervali različiti. Zbog neovisnosti brzine svjetlosti o izboru RS, izmjereni vremenski intervali postaju ovisni o izboru RS – vrijeme je relativno.

U misaonom eksperimentu, pomoću kojeg smo demonstrirali relativnost vremenskog intervala, dobili smo dvije jednadžbe, (3.1) i (3.2), koje opisuju proteklo vrijeme gledano iz dva IRS koji se gibaju relativno jedan prema drugome:

$$t' = \frac{2d}{c} \quad (3.1) \qquad\qquad t = \frac{2\sqrt{L^2 + \mathrm{d}^2}}{c} \quad (3.2)$$

Na osnovi tih dviju jednadžbi možemo dobiti jednadžbu koja daje vezu između vremenskog intervala proteklog u (S) i (S') referentnim sustavima. ako iskoristimo činjenicu da je $L = \frac{vt}{2}$ i $d = \frac{ct\prime}{2}$:

$$t = \frac{2\sqrt{L^2 + d^2}}{c} \rightarrow (tc)^2 = 4(L^2 + d^2) = 4\left(\left(\frac{vt}{2}\right)^2 + \left(\frac{ct'}{2}\right)^2\right)$$

$$t^2\,(c^2 - v^2) = (ct')^2 \rightarrow\; t^2 \;= \frac{c^2}{c^2 - v^2}\,t'^2$$

$$t \;= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,t' \qquad (3.3)$$

Pošto će brzina v uvijek biti manja od brzine svjetlosti c, proteklo vrijeme u referentnom sustavu (S) biti će veće od proteklog vremena u referentnom sustavu (S'). U (S') referentom sustavu vrijeme sporije „teče“.

Jednadžba (3.3) i njen efekt sporijeg prolaska vremena nazivaju se dilatacija vremena, a vrijeme t' koje mjeri promatrač u sustavu (S') naziva se vlastito vrijeme τ – vrijeme koje mjeri promatrač u sustavu (S') koji naspram njega miruje [7].

Dva promatrača, koja se gibaju relativno jedan prema drugom, mjerit će različite vremenske intervale između dva događaja. Zbog konstantnosti brzine svjetlosti više se ne može raditi tiha pretpostavka da je protekle vrijeme u sustavu (S) isto kao i proteklo vrijeme u sustavu (S'), kao i što je pretpostavljeno u Galileovim transformacijama. Zbog konstantnosti brzine svjetlosti vrijeme “teče” različito u sustavu koji miruje i sustavu koji se giba.

3.3 Relativnost intervala duljine

Relativnost istodobnosti, osim što utječe na mjerenje vremenskog intervala, utječe i na mjerenje intervala duljine. Zbog relativnosti istodobnosti, interval duljine koji mjeri promatrač u jednom sustavu neće biti isti kao i interval duljine koji mjeri promatrač u sustavu koji se giba naspram prvog [7]. Kako bi demonstrirali tu posljedicu poslužit ćemo se još jednim misaonim eksperiment.

Zamislimo vlak koji se giba, brzinom koja je usporediva s brzinom svjetlosti, u odnosu na promatrača koji miruje na stanici (S). U vlaku se nalaze dva zrcala, jedan se nalazi na lijevoj strani vlaka, a drugi se nalazi na desnoj strani na nekoj udaljenosti l, mjereno iz sustava (S'). Pored lijevog zrcala nalazi se laser. U vlaku se nalazi promatrač koji miruje u odnosu na zidove vlaka (S') [7]. Zamišljena situacija prikazana je na slici (6).

Slika (6) Misaoni eksperiment za relativnost duljine.

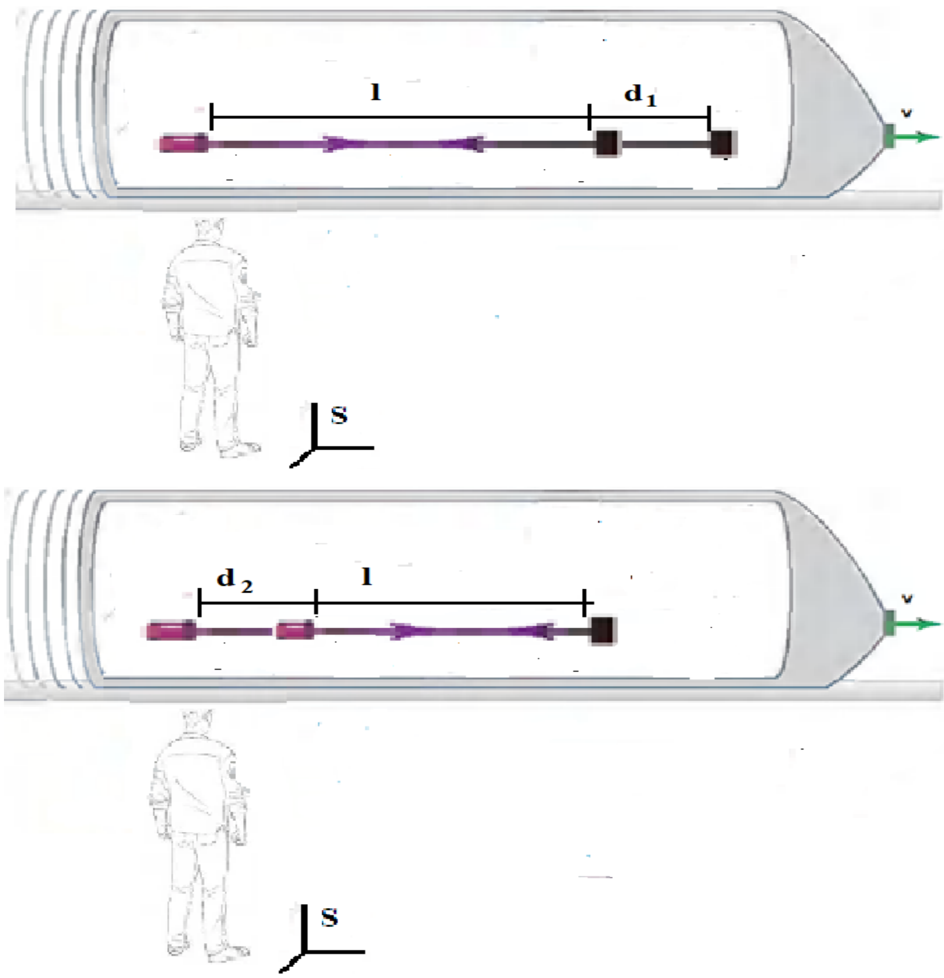
Promatrač u vlaku (S') uključi laser i snop svjetlosti izađe iz lasera prema drugom zrcalu. Promatrač u vlaku (S') vidi kako se snop svjetlosti giba u smjeru vlaka, reflektira se od zrcalo i vrati se nazad. Putanja svjetlosti prikazana je na slici (7).

Slika (7) Putanja svjetlosti gledano iz sustava promatrača koji miruje u odnosu na zidove vlaka [7]

Put koji snop prijeđe prije nego što se vrati nazad u početnu točku je $2l'$. Na osnovi toga, i Einsteinove pretpostavke o brzini svjetlosti, možemo izračunati vrijeme potrebno da se snop svjetlosti vrati nazad u početnu točku [7]:

$$t' = \frac{2l'}{c} \tag{3.4}$$

Promotrimo sada danu situaciju, ali gledano iz sustava promatrača koji miruje na stanici (S). Što on vidi? On vidi kako snop svjetlosti izađe iz lasera i giba se prema desnom zrcalu. Ali dok snop svjetlosti dođe do desnog zrcala, zrcalo se pomakne za neku udaljenost pa će mu trebati malo više vremena da ga sustigne - zrcalo kao da "bježi" od svjetlosti. Snop svjetlosti se reflektira od desnog zrcala i sada se giba nazad prema lijevom zrcalu. Ali zrcalo se giba u susret snopu i zbog toga će snopu svjetlosti trebati manje vremena da dođe do lijevog zrcala [7]. Putanje svjetlosti, kako ih vidi promatrač koji miruje na stanici (S), dane su na slici (8).



Slika (8) Putanje svjetlosti gledano iz sustava promatrača koji miruje u odnosu na zidove stanice.

Koliki je put koji sada svjetlost prijeđe? Na putu od lijevog do desnog zrcala svjetlost prijeđe put s_1 u vremenu t_1, a taj put sastoji se od zbroja duljine l između zrcala i duljine za koju se desno zrcalo pomakne zajedno s vlakom u vremenu t_1:

$$s_1 = l + d_1$$

gdje je d_1 udaljenost za koju se desno zrcalo pomakne u vremenu t_1:

$$ct_1 = l + vt_1 \rightarrow t_1 = \frac{l}{c - v}$$

Na putu od desnog zrcala do lijevog svjetlost prijeđe put s_2 u vremenu t_2, a taj put sastoji se od razlike duljine l i duljine za koju se lijevo zrcalo pomakne, zajedno s vlakom u vremenu t_2, prema snopu svjetlosti:

$$s_2 = l - d_2$$

gdje je d_2 udaljenost za koju se lijevo zrcalo pomakne u vremenu t_2:

$$ct_2 = l - vt_2 \rightarrow t_2 = \frac{l}{c + v}$$

Vrijeme potrebno da se svjetlost vrati nazad u početnu točku gledano iz sustava (S) jednako je zbroju vremena za put tamo i nazad:

$$t = t_1 + t_2$$

$$t = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} \tag{3.5}$$

Ako iskoristimo formulu (3.3) za dilataciju vremena, možemo povezati jednadžbe (3.4) i (3.5), te dobiti vezu između intervala duljine u dva različita referentna sustava.

$$\frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{2l'}{c} = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{2l'}{c} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} l' = \frac{1}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} l$$

$$l = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\, l' \tag{3.6}$$

Pošto će brzina v uvijek biti manja od brzine svjetlosti c, duljina koju mjeri promatrač u (S) referentnom sustavu biti će manja od duljine koju mjeri promatrač u (S') referentnom sustavu. U (S) referentom sustavu dolazi do skraćivanja duljine.

Jednadžba (3.6) i njen efekt skraćivanja nazivaju se kontrakcija duljine, a duljina koju mjeri promatrač u sustavu (S') naziva se vlastita duljina – duljina koju mjeri promatrač u sustavu koji naspram njega miruje [7].

Za svakodnevna događanja na Zemlji, relativne brzine između promatrača su puno manje od brzine svjetlosti pa je omjer brzine tijela i brzine svjetlosti u jednadžbama (3.3) i (3.6) približno jednak nuli i jednadžbe se svode na:

$$t = t'$$

$$l = l'$$

Te dvije jednadžbe opisuju prirodu Svemira točno onako kako smo naviknuti razmišljati jer nikada nismo bili u mogućnosti gibati se brzinama koje su usporedive s brzinom svjetlosti. Zato Newton i je napravio pretpostavku o apsolutnom vremenu.

4 Specijalna teorija relativnosti

Einsteinova STR počiva na dva postulata:

1) Svi zakoni fizike su isti u svim IRS
2) Brzina svjetlosti c je ista u svim IRS

Ali što je STR? STR je prije svega teorija o referentnim sustavima. Ako znamo koordinate tijela u jednom referentnom sustavu, STR govori nam kako možemo doći do koordinata tijela gledanog iz nekog drugog referentnog sustava koji se giba u odnosu na prvi [10]. Te jednadžbe za transformaciju koordinata iz jednog referentnog sustava u drugi nazivaju se Lorentzovim transformacijama.

4.1 Izvod Lorentzovih transformacija

Galileove transformacijske jednadžbe koordinata i brzina dobivene su pod pretpostavkom da je vrijeme apsolutno - vrijeme koje prođe u sustavu (S) je isto kao i vrijeme koje prođe u sustavu (S'):

$$t = t'$$

Ali kao što je Einstein pokazao, ta dva vremena ne mogu biti i nisu jednaka. Prema tome, same Galileove transformacije nisu valjane i potrebno je dobiti nove koje su temeljene na relativnom vremenu, a ne apsolutnom [10]. Kako ćemo onda modificirati Galileove jednadžbe? U jednadžbi (2.4):

$$x = x' + vt$$

put x' je put kojeg mjeri promatrač u sustavu (S'), a to je vlastita duljina. Promatrač u referentnom sustavu (S) vidjet će taj put skraćen za faktor $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ [7]:

$$x = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,x' + vt$$

Iz toga izraza x' jednak je:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{4.1}$$

Poznavajući koordinate sustava (S) možemo odrediti koordinate događaja gledano iz sustava (S'). Zbog principa relativnosti isti zakon mora vrijediti za situaciju u kojoj poznajemo koordinate sustava (S'), a želimo odrediti koje su koordinate sustava (S) [10]:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{4.2}$$

Izjednačavajući jednadžbe (4.1) i (4.2) možemo dobiti jednadžbu koja opisuje transformaciju vremenskih koordinata između sustava (S) i (S') [7]. Iz jednadžbe (4.2) dobijemo da je x':

$$x' = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\, x - vt'$$

Nakon izjednačavanja prethodnog izraza s jednadžbom (4.1) dobijemo vezu između vremenskih koordinata sustava (S) i (S'):

$$\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\, x - vt' \rightarrow \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\, x = -vt'$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{4.3}$$

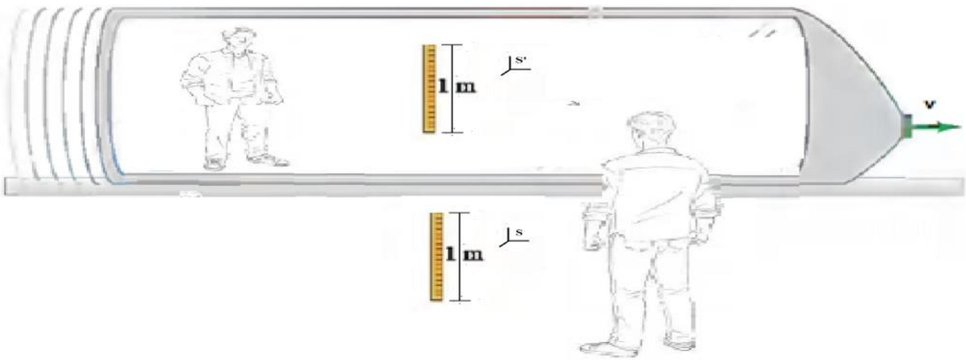
Zbog principa relativnosti isti zakon se može iskoristiti ako znamo koordinate u sustavu (S'), a želimo odrediti koordinate sustava (S) [10]:

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{4.4}$$

Iz jednadžbi (4.3) i (4.4) vidimo da vremenska komponenta jednog sustava ne ovisi samo o vremenskoj komponenti drugog sustava, već ovisi i o njegovoj prostornoj komponenti. Događaji neće biti pomaknuti samo u prostoru, već će biti pomaknuti i u vremenu. U Specijalnoj Teoriji Relativnosti prostor i vrijeme postaju povezani [10].

Što je s preostale dvije prostorne osi? Osi okomite na smjer gibanja, u našem slučaju to su y i z koordinatne osi, se ne mijenjaju. Samo osi paralelne sa smjerom gibanja se mijenjaju [7]. To možemo pokazati i s jednim jednostavnim misaonim eksperimentnom.

Zamislimo opet vlak, koji se giba brzinom usporedivom s brzinom svjetlosti, u kojem se nalazi promatrač (S') koji miruje u odnosu na zidove vlaka. Na peronu se nalazi promatrač (S) koji miruje u odnosu na zidove perona. Oba promatrača sa sobom imaju ravnalo duljine 1 metar, čiji se jedan kraj nalazi u ishodištu njihova koordinatna sustava, te su orijentirani duž y i y'osi [7]. Zamišljeni misaoni eksperiment prikazan je na slici (9).



Slika (9) Misaoni eksperiment za demonstriranje nepromijenjenosti dimenzija koje su okomite na smjer gibanja.

U trenutku kada se ishodište promatrača u vlaku i ishodište promatrača na peronu poklope, promatrač na peronu označi na ravnalu u vlaku 0.5 metara u odnosu na svoje ravnalo, a promatrač u vlaku označi ravnalo na peronu isto 0.5 metara u odnosu na svoje. Pretpostavimo kako promatrač na peronu uočava da je ravnalo u vlaku veće od njegova. Zbog toga će oznaka, koju je on postavio na ravnalo u vlaku, biti ispod centra ravnala. U tom slučaju, promatrač u vlaku mislit će kako se ravnalo na peronu smanjilo jer je njegova oznaka ispod njene. Zaključujemo da promatrač na peronu uočava kako se ravnalo u vlaku poveća, a promatrač u vlaku uočava kako se ravnalo na peronu smanji. Ali to implicira asimetriju između opažanja promatrača, a mi znamo da zbog principa relativnosti oba promatrača moraju doći do istih zaključaka. Kako bi ostali konzistentni s principom relativnosti, oba promatrača moraju opaziti kako su oba ravnala istih dimenzija, bez obzira na to što se jedan od njih giba, a drugi miruje relativno prema prvom. Dimenzije koje su okomite na smjer gibanja ne doživljavaju kontrakciju duljine [7].

$$y = y' \tag{4.5}$$

$$z = z' \tag{4.6}$$

U tablici (1) prikazane su sve transformacije koordinata iz sustava (S) u sustav (S') i transformacije koordinate iz sustava (S') u sustav (S).

Iz sustava (S) u sustav (S')

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Iz sustava (S') u sustav (S)

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Tablica (1) Transformacije koordinate između dva sustava, (S) i (S')

Izraz u nazivniku naziva se gama faktor γ. Gama faktor je funkcija brzine: što je brzina tijela veća, to će gama faktor biti veći i vrijeme će se više „rastezati“, tj. vrijeme sporije „teče“.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{4.7}$$

U sustavu jedinica u kojemu je brzina svjetlosti jednaka jedan, tj. $c = 1$, simetrija između prostora i vremenu u STR izlazi na vidjelo. Lorentzove transformacije iz tablice 1 prikazane su u tablici 2 gdje je uzeto da je $c = 1$ [5]. U sustavu jedinica gdje je $c = 1$, gama faktor poprima sljedeći oblik:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Iz sustava (S) u sustav (S')

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Iz sustava (S) u sustav (S')

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

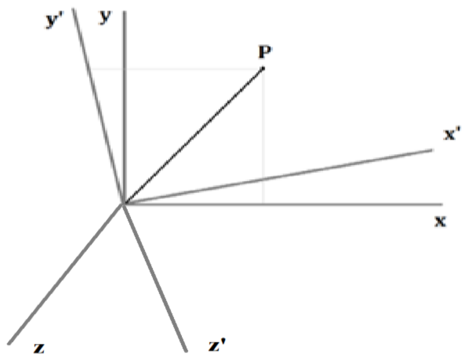
Tablica (2) Transformacije koordinate između dva sustava, (S) i (S'), za sustav mjernih jedinica u kojemu je $c = 1$.

Jednadžbe prikazane u tablici (1) i (2) nazivaju se Lorentzovim transformacijskim jednadžbama. Prema Einsteinu, svi zakoni fizike moraju biti invarijantni na Lorentzove transformacije, a ne na Galileove [10].

4.2 Prostor Minkowskog

U Euklidskoj geometriji, točku P u prostoru možemo opisati s dvama različitim koordinatama. Zamislimo sustav (S) i sustav (S') koji imaju ista ishodišta, ali su osi sustava (S') otklonjene za neki kut u odnosu na osi sustava (S). Točku P možemo opisati s koordinatama (x, y, z), gledano iz sustava (S) ili s koordinatama (x', y', z'), gledano iz sustava (S'), kao što je i prikazano na slici (10). Vektor koji pokazuje od ishodišta koordinatnog sustava do neke točke P u prostoru naziva se radij–vektor. Apsolutna vrijednost tog vektora, koji se sastoji od tri komponente, dana je s:

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

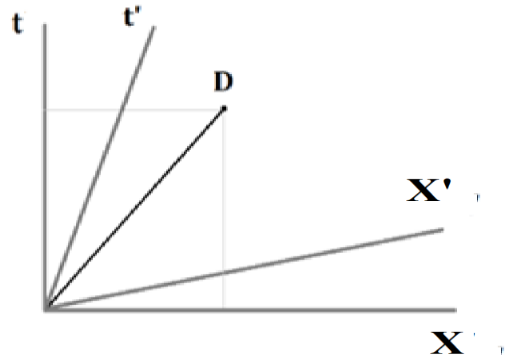


Slika (10) Točka P promatrana iz dva različita koordinatna sustava u Euklidskoj geometriji.

Iako će koordinate (x, y, z) biti različite od koordinata (x', y', z'), promjenom referentnog sustava jedna veličina u Euklidskoj geometriji ostat će nepromijenjena, a to apsolutna vrijednost radij–vektora. To nam govori kako koordinate sustava nisu invarijantne na promjenu sustava, ali apsolutna vrijednost vektora je. Udaljenost točke P od ishodišta i kvadrat te udaljenosti su isti u svim referentnim sustavima [10].

U prostoru Minkowskog, točka, tj. događaj D, nije opisan samo s tri prostorne koordinate, već je opisan s tri prostorne koordinate i jednom vremenskom. Geometrija Minkowskog prostora nije trodimenzionalna, već je četverodimenzionalna - (t, x, y, z). Vrijeme i prostor dio su jednog entiteta kojeg je Minkowski nazvao *prostorvrijeme.*

Slika (11) ilustrira događaj D u prostorvremenu. Takav prikaz još se naziva i prostorvrijeme dijagram, a koristi se za prikazivanje gibanja sustava u prostorvremenu. U takvim dijagramima y i x os predstavljaju vremensku i prostornu koordinatu, a nagib trajektorije t' jednak je brzini sustava (S') u odnosu na sustav (S) [10]. Trajektorija sustava (S') u prostorvrijeme dijagramu još se naziva i „wordline" sustava (S'). Važno je istaknuti kako prostorna koordinata X u sebi sadrži sve tri prostorne komponente (x, y, z) tj. $X = (x, y, z)$.



Slika (11) Događaj D u prostoru Minkowskog za dva različita koordinatna sustava.

U prostoru Minkowskog možemo definirati analogan vektor, vektor koji bi pokazivao od ishodišta koordinatnog sustava do nekog događaja D u prostorvremenu – *prostorvrijeme interval* [10]. Pošto je prostorvrijeme interval vektor koji se sastoji od četiri komponente, onda takav vektor nazivamo i četverovektor– *4-vektor* [5]. Apsolutna vrijednost 4-vektora prostorvrijeme interval u STR definira se na sljedeći način [1]:

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Ili u sustavu jedinica gdje je $c = 1$:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta t^2 - \Delta X^2$$

Razlika kvadrata vremenske i prostorne koordinate događaja D, gledanog iz sustava (S) i sustava (S'), moraju biti jednaki ako će ta veličina biti invarijantna na promjenu koordinatnog sustava [10]:

$$t^2 - X^2 = t'^2 - X'^2$$

$$t^2 - X^2 = \frac{(t - vX)^2}{1 - v^2} - \frac{(X - vt)^2}{1 - v^2} = \frac{t^2(1 - v^2) - X^2(1 - v^2)}{1 - v^2}$$

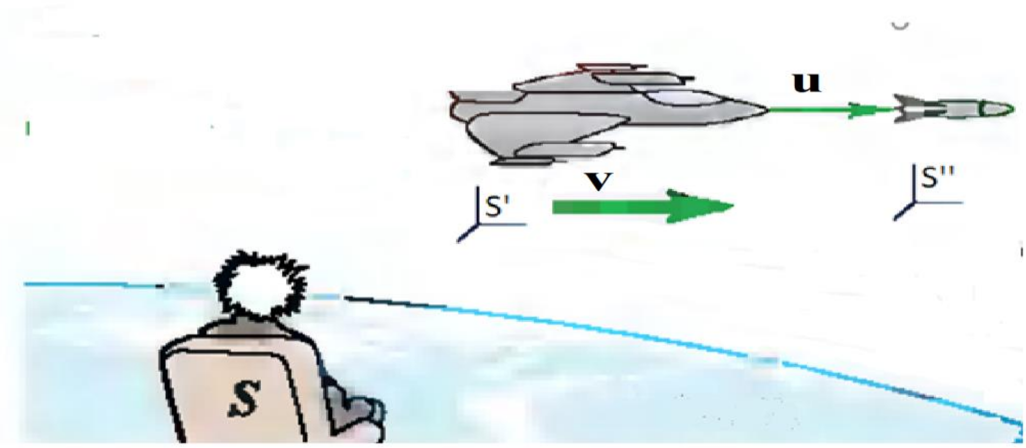
$$t^2 - X^2 = t^2 - X^2$$

Prostorvrijeme interval je invarijantna veličina – neovisna o izboru referentnog sustava. Ta činjenica nas prisiljava da uočimo kako vrijeme ne može biti odvojeno od prostora.

4.3 Najveća moguća brzina

Galileove transformacije brzina ne valjaju iz još jednog razloga. Kada bi se primijenile na brzine koje su usporedive s brzinama svjetlosti, one bi dozvoljavale relativne brzine veće od brzine svjetlosti [7].

Zamislimo situaciju u kojoj se svemirski brod giba brzinom 0.8c u odnosu na promatrača na Zemlji. Svemirski brod lansira raketu brzinom 0.5c odnosu na brod. Zamišljena situacija prikazana je na slici (13). Kolika je brzina rakete u odnosu na promatrača na Zemlji? Prije Einsteinova razmatranja svi bi se složili kako brzina pulsa mora iznosi 1.3c.



Slika (13) Relativno gibanje tri sustava A, B i C jednog u odnosu na drugi [7].

Promotrimo situaciju prikazanu na slici (13). Postoje tri IRS i za svaki IRS vežemo jedan koordinatni sustav. Stoga, postoje tri para koordinata. Koordinate promatrača iz sustava (S) su (t, x, y, z), koordinate promatrača iz sustava (S') su (t', x', y', z') i koordinate promatrača iz sustava (S") su (t'', x'', y'', z''). Brzinu sustava (S') u odnosu na sustav (S) označujemo s v, brzinu sustava (S") u odnosu na sustav (S') označujemo s u, a brzinu sustava (S") u odnosu na sustav (S) označujemo s w. Koordinate svih promatrača povezane su preko Lorentzovih transformacija [10], a prikazane su u tablici (3).

Sustav (S) i (S')	Sustav (S') i (S'')
$x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$	$x'' = \dfrac{x' - ut'}{\sqrt{1-u^2}}$
$t' = \dfrac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}$	$t'' = \dfrac{t' - ux'}{\sqrt{1-u^2}}$

Tablica (3) Lorentzove transformacije za sustav (S) i (S'), te (S') i (S'')

Tražimo vezu između koordinata sustava (S) i sustava (S''). Iz koordinate x'' dobijemo sljedeću jednakost:

$$x''\sqrt{1-u^2} = x' - ut'$$

Uvrštavajući odgovarajuće izraze za x' i t' u prethodnu jednakost, dobijemo sljedeći izraz:

$$x''\sqrt{1-u^2} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} - u\frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$x''\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} = x(1+uv) - t(u+v)$$

x'' koordinata sustava (S'') uvijek će biti jednaka nuli jer se promatrač u sustavu (S'') ne giba, te se on uvijek nalazi u ishodištu svoga koordinatnog sustava [10]. Iz toga slijedi da je:

$$x = \frac{u+v}{1+uv}t \tag{4.8}$$

Jednadžba (4.8) je “wordline” promatrača iz sustava (S'') gledano iz sustava (S) i nagib toga „wordlinea“ jednak je brzini sustava (S'') gledano iz sustava (S) [10]. Iz toga slijedi da je brzina sustava (S'') naspram sustava (S) jednaka:

$$w = \frac{u+v}{1+uv} \tag{4.9}$$

Jednadžba (4.9) je transformacijska jednadžba brzina, tj. jednadžba za zbrajanje brzina za relativno gibanje bilo koja dva tijela. U SI sustavu mjernih jedinica, jednadžba (4.9) poprima oblik:

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Koliko će onda iznositi brzina rakete u odnosu na promatrača na Zemlji? Na osnovi formule za zbrajanje brzina, brzina rakete u odnosu na promatrača na Zemlji iznosit će $0.92c$.

Promotrimo slučaj kada svemirski brod emitira puls svjetlosti. Koliku brzinu pulsa će izmjeriti promatrač na Zemlji? Prema jednadžbi za zbrajanje brzina dobijemo da će brzina pulsa iznositi c, a ne $1{,}3c$ kako se prije mislilo. Oba promatrača mjere istu brzinu svjetlosti, neovisno o njihovom referentnim sustavima. Brzina svjetlosti je, također, invarijantna veličina.

Iz jednadžbe za zbrajanje brzina vidimo da će relativna brzina dva sustava uvijek biti manja od brzine svjetlosti. Drugim riječima, ništa se ne može gibati brže od svjetlosti. Brzina svjetlosti je postala najveća brzina kojom se sustav može gibati. Otkriće postojanja najveće brzinu u Svemiru je jedan od najvećih postignuća ljudskog intelekta, a princip relativnosti sam otkriva kako postojanje najveće brzine leži u prirodi Svemira [2]. Kako je to ograničenje proizašlo iz kinematskog razmatranja, kažemo da Geometrija prostorvremena stavlja ograničenje na najveću moguću brzinu između dva sustava.

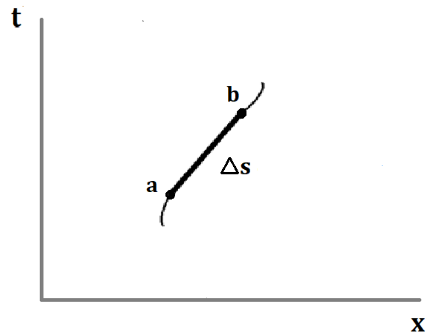
Kada su brzine puno manje u odnosu na brzinu svjetlosti, $\frac{uv}{c^2}$ član u nazivniku je približno jednak nuli i jednadžba (4.9) se reducira na Galileove jednadžbu za zbrajanje brzina (2.5).

4.4 4-vektori

Pogledajmo sada još jedan 4-vektor, *4-brzinu*. Normalnu brzinu s tri komponente definirali smo na način da smo promatrali mali segment puta Δr u vremenu Δt. Zatim smo taj vremenski interval Δt smanjivali prema nuli [10]:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Na isti način ćemo definirati i 4-brzinu. Promatrat ćemo mali interval duž prostorvrijeme trajektorije [10] koji je prikazan na slici (14).



Slika (14) Prostorvrijeme trajektorija.

Interval koji razdvaja točku a i točku b je upravo prostorvrijeme interval Δs, a sam Δs znači promjenu u koordinatnim osima ($\Delta t,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$). 4-brzinu dobit ćemo tako da prostorvrijeme interval podijelimo s vlastitim vremenom τ. Razlog dijeljenja s vlastitim vremenom je taj što želimo konstruirati brzinu koja će biti invarijantna nakon Lorentzovih transformacija – svi promatrači će mjeriti istu 4-brzinu. Prostorvrijeme interval je invarijantna veličina, te dijeleći s vlastitim vremenom koji je također invarijantan, zadržavamo to svojstvo i u 4-brzini [10]. Kako bi razlikovali klasičnu brzinu od 4-brzine, 4-brzinu ćemo označavati sa slovom U:

$$U = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \tau} = \frac{ds}{d\tau} \tag{4.10}$$

Kako je prostorvrijeme interval vektor koji se sastoji od četiri komponente, koje se transformiraju prema Lorentzovih jednadžbama, jednadžbu (4.10) možemo zapisati po komponentama 4-brzine:

$$U_t = \frac{dt}{d\tau} \qquad U_y = \frac{dy}{d\tau}$$

$$U_x = \frac{dx}{d\tau} \qquad U_z = \frac{dz}{d\tau}$$

Ako iskoristimo formulu (3.3) za dilataciju vremena, $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$, tada za komponente 4-brzine dobijemo:

$$U_t = \frac{dt}{\frac{dt}{\gamma}} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{4.11}$$

$$U_y = \frac{dy}{\frac{dt}{\gamma}} = \gamma \frac{dy}{dt} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{4.12}$$

$$U_x = \frac{dx}{\frac{dt}{\gamma}} = \gamma \frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{4.13}$$

$$U_z = \frac{dy}{\frac{dt}{\gamma}} = \gamma \frac{dz}{dt} = \frac{v_z}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{4.14}$$

Iz jednadžbe (4.11) dobivamo novo značenje gama faktora koji se pojavljuje u Lorentzovim transformacijama, dilataciji vremena i kontrakciji duljine – gama faktor predstavlja vremensku komponentu 4-brzine sustava [10].

Sada kada smo definirali 4-brzinu, možemo definirati još jedan 4-vektor, a to je *4-impuls* – analog impulsa (količine gibanja) u Newtonovoj mehanici, ali koji se sastoji od četiri komponente. Impuls (količinu gibanja) u Newtonovoj mehanici definiran je kao umnožak mase i brzine čestice koja se sastojala od samo tri komponente. U STR 4-impuls definirat ćemo na isti način – kao umnožak mase i brzine čestice, ali ne bilo koje brzine, već 4-brzine [10]:

$$p = mU$$

Kako je U 4-vektor, možemo ga rastaviti na njegove četiri komponente:

$$p_t = mU_t = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma m \tag{4.15}$$

$$p_x = mU_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma v_x \tag{4.16}$$

$$p_y = mU_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma v_y \tag{4.17}$$

$$p_z = mU_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma v_z \tag{4.18}$$

Jednadžbe (4.16), (4.17) i (4.18) su relativistički izrazi za impuls (prostornu komponentu 4-impulsa) i mogu se zapisati u kraćem obliku kao:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma m\boldsymbol{v} \tag{4.19}$$

gdje p označava apsolutnu vrijednost relativističkog impulsa $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. U SI sustavu jedinica, relativistički impuls (ili prostorna komponenta 4-impulsa) poprima oblik:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

U limesu niskih brzina, omjer brzine tijela i brzine svjetlosti približno je jednak nuli i relativistički impuls prelazi u poznati izraz za impuls (količinu gibanja) u Newtonovoj mehanici[10]:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

4.5 Formulacija zakona gibanja

Konstantnost brzine svjetlosti natjeralo nas je, ne samo da promjeno naše shvaćanje prostora i vremena u kojem živimo, nego i da preispitamo dosadašnje zakone fizike. Jednadžba $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, koja je bila kamen temeljac razvoja fizike kao znanosti između 17. i 20. stoljeća, sada s pojavom STR će se po prvi put u tristo godina mora preispitati jer nam ona omogućuje brzine koje mogu biti veće i od brzine svjetlosti.

Osim Newtonovog pristupa klasičnoj mehanici, Hamilton i Lagrange su razvili još jedan pristup koji se bazira na principu minimalne akcije. Kako bi dobili ispravne zakone gibanja za česticu u STR, izvest ćemo nove zakone gibanje uz pomoć principa minimalne akcije. U klasičnoj mehanici akciju dobijemo kao integral duž trajektorije sustava, a podintegralna funkcija u akciji naziva se Lagrangijan.

$$Akcija = \int_a^b L dt$$

Princip minimalne akcije nam govori da će sustav uvijek ići takvim putem da minimizira akciju, odnosno, sustav će uvijek pratiti trajektoriju u kojemu će Lagrangijan sustava biti najmanji. U toj formulaciji klasične mehanike Hamiltonijan sustava jednak je ukupnoj energiji koja je sadržana u sustavu i kao takva ona je očuvana veličina, a definira se preko Lagrangijana [10]:

$$H = \sum_i Q^i P^i - L$$

U toj jednadžbi Q^i predstavlja koordinatu, a P^i je impuls koji je također definiran preko Lagrangijana, kao parcijalna derivacija Lagrangijana po brzini:

$$P^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^i}$$

U STR želimo izračunati akciju za slobodnu česticu na sličan način kao što smo to radili i u klasičnoj fizici. A kako bi zakoni gibanja bili jednaki u svim IRS, akcija mora biti invarijantna. Postoji samo jedna veličina koja ostaje nepromijenjena duž trajektorije sustava, a to je vlastito vrijeme [10]. Stoga, relativističku akciju možemo zapisati kao:

$$Akcija = const \int_a^b d\tau$$

Za konstantu proporcionalnosti u relativističkom Lagrangijanu uzima se $-m$, tj. :

$$Akcija = -m \int_a^b d\tau$$

Razlog tomu je to što želimo konstruirati akciju koja će u limesu niskih brzina proizvesti akciju iz klasične mehanike i sve njene jednadžbe.

Ako iskoristimo jednadžbu (3.3) za dilataciju vremena, akciju možemo zapisati kao:

$$Akcija = -m \int_a^b \sqrt{1 - v^2}\, dt$$

Lagrangijan sustava tada će biti jednak:

$$L = -m\sqrt{1-v^2} = -m\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

Ili u SI sustavu jedinica:

$$L = -mc^2\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}}$$

Sada poznavajući relativistički Lagrangijan čestice, možemo izračunati impuls i Hamiltonijan, tj. ukupnu energije čestice. Za tri komponente impulsa (relativistička količina gibanja) dobijemo:

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial v_x}\left(-m\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\right) = \frac{mv_x}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}} = \frac{mv_x}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial v_y} = \frac{\partial}{\partial v_y}\left(-m\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\right) = \frac{mv_y}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}} = \frac{mv_y}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial v_z} = \frac{\partial}{\partial v_z}\left(-m\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\right) = \frac{mv_z}{\sqrt{1-(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}} = \frac{mv_z}{\sqrt{1-v^2}}$$

Dok za Hamiltonijan sustava dobijemo:

$$H = v_xP_x + v_yP_y + v_zP_z - L$$

$$= \left(\frac{mv_x^2}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{mv_y^2}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{mv_z^2}{\sqrt{1-v^2}}\right) - m\sqrt{1-v^2} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2}} - m\sqrt{1-v^2}$$

$$= \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2}} - m\sqrt{1-v^2}\,\frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{m(1-v^2)}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$H = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma m$$

Promotrimo sada tri komponente impulsa i Hamiltonijan, tj. ukupnu energiju sustava. Jednadžbe koje smo izveli iz akcije odgovaraju jednadžbama 4-impulsa kojeg smo dobili množeći masu sustava s 4-brzinom. Energija sustava predstavlja vremensku komponentu 4-impulsa:

$$p_t = mU_t = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma m = H = E$$

Tri prostorne komponente impulsa, zajedno s energijom, tvore 4-vektor kojeg smo nazvali 4-impuls. U STR impuls i energija se miješaju pod Lorentzovim transformacijama; u jednom referentnom sustavu čestica će imati samo energiju, dok u drugom ima i energiju i impuls [10].

Apsolutnu vrijednost 4-vektora prostorvrijeme interval dobili smo tako što smo od vremenske komponente oduzeli prostornu komponentu. Na isti način dobiti ćemo i apsolutnu vrijednost 4-impulsa [5]:

$$(apsolutna\ vrijednost)^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2 \tag{4.20}$$

gdje p opet predstavlja sve tri komponente relativističkog impulsa: $p^2 = {p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2$:

$$(apsolutna\ vrijednost)^2 = (\frac{m}{\sqrt{1-v^2}})^2 - (\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}})^2$$

$$(apsolutna\ vrijednost)^2 = \frac{m^2}{1-v^2}(1-v^2)$$

$$(apsolutna\ vrijednost) = m$$

Ako se vratimo natrag u jednadžbu (4.20) s izračunatom apsolutnom vrijednosti, dobijemo:

$$m^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2 \tag{4.21}$$

Jednadžba (4.21) je jednadžba za apsolutnu vrijednost 4-vektora čija je vremenska komponenta energija, a impuls (količina gibanja) je prostorna komponenta. Energija i impuls toga 4-vektora samo su njegove komponente i one ovise o sustavu iz kojega se promatra gibanje. Drugim riječima, energija i impuls nisu invarijante veličine, ali apsolutna vrijednost 4-vektora, tj. masa je invarijantna veličina.

Jednadžbu (4.21) možemo zapisati u korist ukupne energije:

$$E^2 = m^2 + \boldsymbol{p}^2 \tag{4.22}$$

Ukupna energija slobodne čestice sastoji se od dva doprinosa: jedan dio proizlazi zbog gibanja čestice i taj dio nazivamo kinetičkom energijom, a drugi dio postoji čak i kada je brzina čestice jednaka nuli. Taj doprinos ukupnoj energiji naziva se *energija mirovanja* E_0 – energija koju čestica ima kada je njena brzina jednaka nuli ($p = 0$) [7]:

$$E_0 = m$$

Ukupnu energiju sustava onda možemo zapisati i kao:

$$E = E_0 + KE \tag{4.23}$$

Iz te jednadžbe slijedi da će relativistička kinetička energija čestice iznositi:

$$KE = (\gamma - 1)m \tag{4.24}$$

Jednadžba (4.22) je izraz za ukupnu energije čestice koja jednako obuhvaća čestice s masom i čestice bez mase poput fotona. U slučaju fotona, čija je masa jednaka nuli, prema jednadžbi (4.22), impuls fotona jednak je njegovoj energiji:

$$E = p$$

U SI sustavu jedinica, izvedene jednadžbe za vrijednost *4-impulsa*, ukupnu energiju, kinetičku energiju i energiju mirovanja poprimaju sljedeći oblik:

$m^2 = E^2 - (\boldsymbol{p}c)^2$	$E_0 = mc^2$
$E^2 = m^2 + (\boldsymbol{p}c)^2$	$KE = (\gamma - 1)mc^2$

Iako u vrijeme kada je Einstein došao do jednadžbe $E_0 = mc^2$ nije postojao izraz energija mirovanja, svoju jednadžbu Einstein je zapisao u obliku:

$$m = \frac{E}{c^2}$$

Ali taj izraz je došao uz jednu jako važno napomenu: energija koja se pojavljuje u izrazu je energija koju sistem ima kada ga se promatra iz sustava u kojemu on miruje, tj. kada je količina gibanja sistema jednaka nuli. Iako Einstein nije eksplicitno u jednadžbi dao do znanja da se radi o energiji mirovanja, sama ta rečenica naslućuje da je na to mislio.

4.6 4-impuls i masa

Jednadžba (4.21) nam govori kako je masa apsolutna vrijednost četverovektora 4-impulsa. To znači da se promjenom IRS 4-impuls sistema nikada ne mijenja i apsolutna vrijednost toga 4-vektora, tj. masa, ostaje nepromijenjena. Zato što je masa iznos 4-vektora, njena vrijednost ostaje ista u svim referentnim sustavima. Bez obzira na transformaciju 4-vektora, iznos mase se neće promijeniti. Masa je invarijantna veličina – ne ovisi o izboru IRS [5].

Masu sistema u STR dobivamo kao apsolutnu vrijednost 4-impulsa:

$$m^2{}_{sistema} = E^2{}_{sistema} - p^2{}_{sistema}$$

U sustavu u kojem sam sistem miruje, impuls sistema i njegova kinetička energija jednaki su nuli, a masa sistema jednaka je energiji koja je sadržana u samom sistemu. Masa je mjera energije sadržane u sistemu [5]:

$$m_{sistema} = E_{sistema} = E_0$$

Treba napomenuti da je jednadžba (4.23) jednadžba za ukupnu energiju slobodne čestice. U slučaju kada se čestica nalazi u potencijalu, tj. kada za česticu više ne možemo reći da je slobodna, izraz za ukupnu energija dobiva dodatni član koji nastaje zbog interakcije čestice s potencijalom u kojem se ona nalazi. Također, ako samo sistem miruje, ali se sastoji od čestica koje se unutar tog sistema gibaju, onda izraz za ukupnu energiju sadrži kinetički dio koji nije jednak nuli jer je ta kinetička energija čestica svojstvena za sam sistem [1]:

$$E_{sistema} = E_0 + KE + E_{interakcije} \tag{4.25}$$

4.7 Mjerenje mase

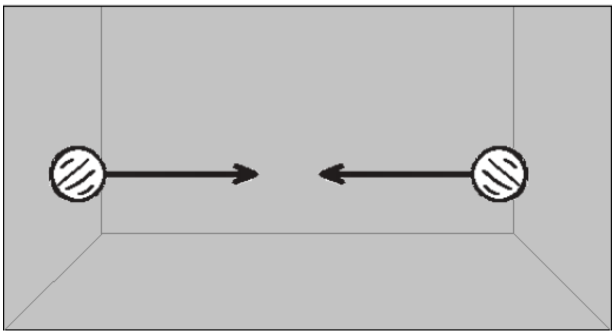
Što znači mjeriti masu i mjerimo li doista samo masu svih sastavnih čestica kada obavljamo mjerenje? Kada mjerimo masu, ono što uređaj zapravo mjeri je količinu ukupne energije sadržane u sistemu, gledanog iz sustava u kojem sam sistem miruje. Drugim riječima, mjerimo energiju mirovanja sistema:

$$m_{sistema} = E_{sistema} = E_0 + KE + E_{interakcije}$$

Sljedećih 5 primjera služe za demonstriranje računanja mase sistema u STR.

1) Masa sistema dvije čestice

Promotrimo sistem koji se sastoji od dvije čestice mase $m = 4$, koje se gibaju jedna prema drugoj brzinama $v = \frac{3}{5}$ (slika (15)). Kolika će biti ukupna masa ovog sistema, hoće li biti jednaka zbroju masa njenih sastavnih dijelova?



Slika (15) Relativno gibanje između dvije čestice.

Masu sistema računat ćemo prema izrazu:

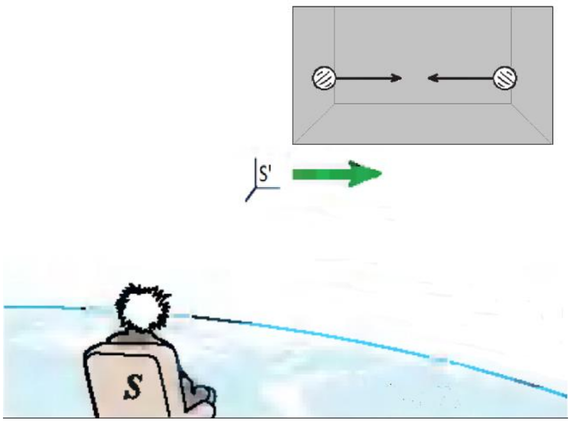
$$m^2{}_{sistema} = E^2{}_{sistema} - p^2{}_{sistema}$$

Zadani sistem promatrat ćemo iz sustava u kojemu on miruje. Tada će ukupni impuls toga sistema biti jednaka nuli. Iz toga slijedi da je masa sistema:

$$m_{sistema} = E_{sistema} = 2E_0 + 2KE = 10$$

Masa sistema, koji se sastoji od čestica u gibanju, veća je od zbroja masa njenih sastavnih dijelova. Gdje je sadržan taj višak mase? Je li se masa svake čestice povećala za jedan? Nije. Višak mase nije sadržan ni u jednoj od čestica, već je sadržan u cijelom sistemu. To je svojstvo samoga sistema [5].

Pogledajmo sada koliko bi iznosila masa sistema ako bi ga promatrali iz sustava u kojemu se cijeli sistem giba relativno prema nekom drugom nepomičnom promatraču (slika (16)).



Slika (16) Sistem čestica gledan iz drugog IRS [7].

Neka se sistem giba istom brzinom kao i čestice, u smjeru lijeve čestice. Relativna brzina desne čestice naspram promatrača biti će jednaka nuli, njegova kinetička energija i impuls će također biti nula i ukupna energije desne čestice jednaka je samo energiji mirovanja:

$$E_{desne} = E_0 = m_{desne} = 4$$

Kako bi izračunali impuls i kinetičku energiju lijeve čestice prvo moramo izračunati relativnu brzinu lijeve čestice naspram promatrača uz pomoć formule (4.9) za zbrajanje brzine:

$$w = \frac{u+v}{1+uv} = \frac{15}{17}$$

gdje je u brzina lijeve čestice naspram zidova sistema, v je brzina sistema naspram promatrača, a w je brzina lijeve čestice naspram promatrača. Impuls i energija lijeve čestice iznose:

$$p_{lijeve} = \frac{mw}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{15}{2} \qquad E_{lijeve} = E_0 + KE = \frac{17}{2}$$

Ukupna energija sistema i ukupni impuls sistema iznose:

$$p_{sistema} = p_{lijeve} + p_{desne} = \frac{15}{2} \qquad E_{sistema} = E_{lijeve} + E_{desne} = \frac{25}{2}$$

Iz toga slijedi da je ukupna masa sistema:

$$m_{sistema}^2 = E_{sistema}^2 - p_{sistema}^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 10$$

Masa sistema nije se promijenila s promjenom referentnog sustava jer je masa sistema neovisna o izboru IRS. Masa sistema iznosi 10 za sve IRS jer je masa iznos 4-vektora koji je invarijantan na Lorentzove transformacije [5].

Ali promijeniti IRS kako bi se sistem gibao i uvesti energiju u sistem kako bi postavili sistem u gibanje nije jedna te ista stvar. Hoće li ubrzavanje sistema dovesti do povećanja mase sistema?

2) Ubrzavanje čestice

Zamislimo neki sistem (čestica) koji miruje. Impuls sistema jednaka je nuli, a jedina energija koja je sadržana u sistemu jednaka je energiji mirovanja:

$$E_{sistema} = E_0 = m = 4$$

Dovođenjem energije na način da se sistem postavi u gibanje i ubrza do $v = \frac{3}{5}$ uzrokovat će impuls sistema različiti od nule. Ali zbog toga, energija koja je sadržana u sistemu neće više biti samo energija mirovanja već sistem dobiva i kinetičku energiju:

$$\mathrm{E}_{sistema} = E_0 + KE = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} = 5$$

Ukupna energija sistema biti će jednaka energiji čestice, a ukupni impuls biti će jednak impulsu te čestice:

$$p_{sistema} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2}} = 3$$

Iz toga slijedi da je masa sistema:

$$m_{sistema}^2 = E_{sistema}^2 - p_{sistema}^2 = 4$$

Masa sistema ne mijenja se ubrzavanjem čestice jer dovedena energija sistemu nije svojstvena za sam sistem. Kinetička energija koju čestice ima kada ju promatramo iz nekog drugog IRS nije svojstvena energiji samoga sistema, to nije energija koja je sadržana u sistemu, ta energija ovisi o drugome sustavu [5]. Ubrzavanje sistema ne uzrokuje povećanje mase sistema. Ali je li moguće dovesti energiju u sistem, a da se pri tome masa sistema poveća?

3) Mjerenje topline

Slika (17) prikazuju sljedeću situaciju. Na obje slike se nalaze identične posude napunjene s istom količinom plina, te obje posude miruju o odnosu na nepomičnog promatrača. Na lijevoj slici, posuda s plinom ima temperaturu T_1, a na desnoj slici temperaturu T_2, pri čemu je $T_2 \gg T_1$. Koja posuda s plinom će imati veću vrijednost mase?

Slika (17) Dvije posude ispunjene istim plinom na različitim temperaturama.

Promatrajući taj sistem iz sustava u kojemu sama posuda miruje, masa sistema biti će jednaka energiji sistema jer je impuls sistema jednak nuli:

$$m_{sistema} = E_{sistema} = E_0 + KE$$

Kinetička energija je sadržana u energiji sistema jer iako se sam sistem ne giba, čestice od kojih je taj sistem izgrađen se gibaju. To gibanje čestica je svojstveno za taj plin pa je i njegova kinetička energija čestica također svojstvena plinu. Kako su plinovi identični, njihove energije mirovanja biti će jednake, ali ukupna kinetička energija svih čestica ovisit će o temperaturi plina. Plin veće temperature imat će veću kinetičku energiju, a prema tome i veću masu. Znači da zagrijavanjem ili hlađenjem sistema dolazi do promjene u masi sistema:

$$\Delta m_{sistema} = \frac{Q}{c^2}$$

Ali zbog faktora konverzije između energije i mase, promjena u masi sistema zbog promjene temperature je zanemariva. Bez obzira na zanemarivost te promjene, do promjene mase zbog promjene temperature doista dolazi [5].

4) Masa vodikova atoma

Promotrimo primjer slobodnih protona i elektrona. Mjereći individualne mase protona i elektrona, ono što mi zapravo mjerimo jesu njihove svojstvene energije, a to je samo energija mirovanja jer u slobodnom stanju to je jedina energiju koju oni imaju. Kinetička energija koju bi proton ili elektron imao zbog njihova gibanja nije svojstvena tim česticama:

$$m_{protona} = (E_0)_{protona}$$
$$m_{elektrona} = (E_0)_{elektrona}$$

Mjereći masu vodikova atomu, koji je vezano stanje protona i elektrona, očekivali bi kako ćemo dobiti masu koja je jednaka zbroju mase protona i elektrona. Ali zbog toga što je atom vodika vezano stanje protona i elektrona, ne možemo ih više smatrati slobodnim česticama pa u izraz za energiju sistema moramo dodati novi član koji odražava tu činjenicu da se radi o vezanom stanju:

$$m_H = E_H = (E_0)_{protona} + (E_0)_{elektrona} + E_{interakcije}$$

Zbog toga što je energija interakcije između protona i elektrona negativna (energija vezanog stanja je negativna), masa vodika koju mjeri uređaj je manja od zbroja masa protona i elektrona kada nisu vezani. Zbog te negativne energije interakcije uređaj će zabilježiti manju ukupnu energiju sistema i prema tome, izmjeriti će da je masa atoma vodika manja od mase njegovih sastavnih čestica:

$$m_H = (E_0)_{protona} + (E_0)_{elektrona} + E_{interakcije} < m_{protona + elektrona}$$
$$= (E_0)_{protona} + (E_0)_{elektrona}$$

5) Masa fotona

Premda eksperimentalni podaci stavljaju gornju granicu mase fotona na $m_\gamma < 10^{-51} g$, znanstvenici uzimaju da je masa fotona jednaka nuli [3]. Hoće li onda bezmasena kutija koja se sastoji od dva fotona imati masu različitu od nule?

Zamislimo situaciju u kojoj se dva fotona istih energija gibaju u susret jedan drugome. Ukupna energija sistema biti će jednaka zbroju energija fotona:

$$E_{sistema} = 2hf$$

Ako sistem promatramo iz sustava u kojemu on miruje, tada će ukupni impuls sistema biti jednak nuli i masa sistema biti će jednaka energiji sistema:

$$m_{sistema} = E_{sistema} = 2hf$$

Ako iskoristimo formulu (4.22) za ukupnu energiju čestice, koja vrijedi jednako za masene kao i bezmasene čestice, onda nas ovaj primjer vodi na zaključak kako bezmasena kutija, koja se sastoji od dva bezmasena fotona, ima masu koja je jednaka zbroju energija tih fotona, tj. imat će nekakvu konačnu masu koja je različita od nule [5].

Svi procesi u prirodu su takvi da ne dolazi do promjene 4-impulsa sistema, koliko god ti procesi bili kompleksni. 4-impuls prije i nakon procesa ostat će isti - ostaje isti i smjerom i iznosom [5]. Krajem 17. stoljeća Gottfried Leibniz otkriva očuvanje veličine koju je on nazvao *vis viva*, a kasnije će biti poznata pod nazivom energija, a 1789. godine francuski kemičar Antoine Lavoisier dolazi do zaključka kako je masa očuvana veličina [17]. U 20. stoljeću Albert Einstein sugerira kako su zakon očuvanja mase i energije samo posebni slučajevi dubljeg principa, a to je očuvanje mase i energije, tj. 4-impulsa. Prije su se ta dva zakona promatrala zasebno, ali u STR, ta dva zakona su zapravo dvije strane jednog te istog koncepta [5].

5 Relativistička masa

Najčešći odgovor na pitanje zašto se neko tijelo ne može gibati brzinom svjetlosti je taj da masa tijela ovisi o brzini; što se tijelo brže giba, njegova masa je veća, a zbog toga moramo tijelu dovesti sve više i više energije kako bi ga doveli do brzine svjetlosti. Taj argument možemo potkrijepiti citatom iz knjige popularne znanosti:

„Zbog jednakosti energije i mase, energija koju objekt ima zbog svoga gibanja će se dodati njegovoj masi. Drugim riječima, napravit će ga težim da mu se brzina poveća… Kako se objekt približava brzini svjetlosti, njegova masa raste sve brže i brže, stoga treba sve više i više energije kako bi ga dalje ubrzali. Ono zapravo nikada neće moći dostići brzinu svjetlosti, zato što bi do tada masa postala beskonačna, i prema jednakosti energije i mase, bilo bi potrebna beskonačna količina energija kako bi tamo došao. Zbog tog razloga, bilo koji normalni objekt je zauvijek ograničen prema relativnosti na gibanje brzinama manjim od brzine svjetlosti [9].“

Masa čija vrijednost ovisi o njenoj brzini naziva se relativistička masa [14]. Relativistička masa je plod krivog tumačenja Einsteinove slavne formule koja govori o vezi između mase i energije. Originalna formula koju je Einstein napisao doista je bila $m = \frac{E}{c^2}$. Ali ono što je on pod tim mislio je ono što danas nazivamo energijom mirovanja E_o- energija sistema promatrano iz sustava u kojemu taj sistem miruje (zato se i naziva energija mirovanja). Dakle, prava Einsteinova formula glasila bi $E_0 = mc^2$, a ne $E = mc^2$ [11]. Relativistička masa proizlazi iz zanemarivanje te činjenice da se sistem mora promatrati iz sustava u kojemu je ukupni impuls sistema jednaka nuli [5]. Tek u tome slučaju masa će biti mjera energije koja je sadržana u sistemu, inače je energija samo jedna od komponenti *4-impulsa* čija apsolutna vrijednost je jednaka masi sistema [5]. Kada se ta činjenica zanemari dobijemo vezu između mase i energije, $E = mc^2$, gdje E označuje ukupnu energiju sistema, a m označuje masu čija vrijednost ovisi o brzini čestice, tj. relativističku masu. Za slobodnu česticu ta ukupna energija sastoji se od energije mirovanja i kinetičke energije, $E = m_0c^2 + KE$, gdje se s m_0 označuje vrijednost mase kada je njegova brzina jednaka nuli, tj. masa mirovanja [6].

Ono što je ovdje važno uočiti jest mala, ali jako bitna razlika u formulama $E = mc^2$ i $E_0 = mc^2$. Te dvije formule, iako izgledaju isto, one daju potpuno drugačije tumačenje mase. U formuli $E = mc^2$, masa je promjenljiva veličina, ona ovisi o ukupnoj energiji sustava i nije invarijantna jer ovisi o izboru IRS. U formuli $E_0 = mc^2$, masa je invarijantna veličina i ne ovisi o izboru IRS - njena vrijednost ovisi samo o vlastitoj energiji sustava, tj. energiji koja je sadržana u sustavu [11].

Iako je Einsteinova originalna formula glasila $E_0 = mc^2$, danas ju rijetko tko zna u tome obliku. U većini literatura koje su namijenjene široj javnosti prevladava formula $E = mc^2$ i mišljenje da masa čestice ovisi o brzini kojom se ta čestica giba.

5.1 Izvod relativističke mase

Promotrimo tijelo dok se nalazi u mirovanju. Dok tijelo miruje, ukupna energija sistema jednaka je energiji mirovanja, a masa tijela jednaka je masi mirovanja m_0. Zatim na to tijelo djelujem silom kako bi ga ubrzali. Nakon vremena dt, tijelo će se pomaknuti za iznos ds, a njegova promjena ukupne energije biti će jednaka obavljenom radu:

$$dE = dW = Fds$$

Pomak tijela možemo zapisati i kao $ds = vdt$, dok ćemo za silu uzeti Newtonov izraz $F = \frac{d(mv)}{dt}$, ali s jednom preinakom, a to je da masa m sada označuje relativističku masu, tj. masa čija se vrijednost mijenja ovisno o brzini tijela, a za vrijednost energije uzimamo izraz $E = mc^2$ ili u sustavu jedinica u kojem je $c = 1$, $E = m$:

$$d(m) = \frac{d(mv)}{dt}(vdt) \rightarrow d(m) = d(mv)v$$

Obje strane jednadžbe sada pomnožimo s $2m$, te cijeli zraz integriramo:

$$2mdm = 2mv\, d(mv) \rightarrow \int 2mdm = \int 2mv\, d(mv)$$

$$m^2 = m^2v^2 + C^2$$

Za određivanje konstante C iskoristit ćemo početni uvjet - kada je brzina tijela jednaka nuli, masa tijela jednak je masi mirovanja m_0:

$$m_0 = C$$

Nakon toga dolazimo do izraza za relativističku masu:

$$m^2 = m^2v^2 + m_0^2$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{5.1}$$

Ili u SI sustavu jedinica:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

Formula (5.1) je formula za relativističku masu [6]. Iz te formule vidimo da kada brzina čestice teži prema 1 $(tj. v = c)$, masa čestice teži u beskonačnost, čime se nastoji objasniti zašto se ni jedna materijalna čestica ne može gibati brzinom svjetlosti. Zbog ovisnosti mase o brzini, moramo djelovati sve većom i većom silom kako bi uzrokovali daljnju akceleraciju. Što smo bliži brzini svjetlosti, sila potrebna kako bi tijelo ubrzali do brzine svjetlosti teži u beskonačnost. Zbog ovisnosti mase o brzini, nijedno tijelo se ne može gibati brzinom svjetlosti [6].

Ali to je krivo tumačenje Einstenove formule $E = mc^2$ i krivo shvaćanje STR. Posljedica koja je nastala, sporije ubrzavanje u istom vremenskom intervalu, nije nastala jer se masa povećala, već je nastala zbog dilatacije vremena. Vrijeme sporije teče za promatrača na Zemlji i njemu se onda čini kako je više vremena potrebno za dano ubrzanje.

5.2 Argumenti protiv RM

U svojim predavanjima R. Feynman kaže:

„Za one koji žele naučiti sasvim dovoljno o tome kako bi mogli rješavati probleme, to je sve što tu ima o teoriji relativnosti – ono samo mijenja Newtonove zakone uvodeći faktor korekcije masi [6]".

Iako korekcija na Newtonove zakone dovodi do točno riješenih problema, ona stvara krivu sliku o STR. Jer bit fizike i njenog izučavanje nije samo točno rješavanje problema, nego otkrivanje unutarnjeg mehanizma cijelog Svemira. Zbog toga takav pristup STR iskrivljuje sliku o prirodi prostorvremena i dovodi do stvaranja miskoncepcija.

Nadalje, relativistička masa sama po sebi ne implicira formulu za zbrajanje brzina. RM kaže da, promatrano iz sustava koji miruje, sistem se nikada neće moći gibati brzinom svjetlosti. Međutim, RM ne govori ništa o relativnom gibanju ta dva sistema. Prema tome, bilo bi moguće zamisliti situaciju u kojoj će relativna brzina između dva sustava biti puno veća od brzine svjetlosti. RM dopušta postojanje superluminalnih objekata [14].

Geometrija prostorvremena je ta koja stavlja ograničenja na najveću brzinu kojom se tijela mogu gibati. Geometrija prostorvremena je odgovorna za ograničenje u brzini, a ne relativistička masa [14]. Ali i dalje prevlada mišljenje kako je formulacija STR moguća uz pomoć relativističke mase, te da je ta formulacija ekvivalentna geometrijskoj formulaciji STR. Što nije točno. Relativistička masa, iako može objasniti zašto se tijela ne mogu gibati brzinom svjetlosti, ne sprječava postojanje brzina koje premašuju brzinu svjetlosti. Jer RM ne implicira jednadžbu za zbrajanje brzina.

Izjave da su Geometrijska formulacija STR i formulacija koja se bazira na RM ekvivalentne jednostavno nije ispravna. Tek uvođenjem principa relativnosti zajedno s RM je moguće doći do svih zaključaka STR. Ali zašto uz princip relativnosti implementirati RM kada je princip relativnosti sam po sebi dovoljan za formulaciju STR? Nadalje, RM osim što omogućuje relativno gibanje između dva sistema brzinama većim od brzine svjetlosti, ono oduzimanjem gama faktora 4-brzini i pridruživanjem masi narušava glavnu odliku STR, a to je simetrija između prostora i vremena. Dolazimo do zaključka kako je relativistička masa zastarjel i suvišan koncept, te se postavlja pitanje koja je motivacija iza njegova uvođenja [14]?

Jedan od razloga za uvođenje relativističke mase je nastojanje da se zadrže poznati oblici Newtonske mehanike [14]. U Newtonskoj mehanici izraz za impuls (količinu gibanja) je:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

Dok je u STR izraz za impuls:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Ako gama faktor, koji pripada brzini, pridružimo masi i tvorimo masu koja ovisi o brzini - relativističku masu, možemo zadržati poznati oblik impulsa: [14]

$$\boldsymbol{p} = m_{relativistički}\boldsymbol{v}$$

Relativistički impuls definiran na ovaj način narušava simetriju prostorvremena, te uz to, ovako definiran relativistički impuls nije invarijantna na Lorentzove transformacije, tj. mijenja se s promjenom referentnog sustava.

Uvođenjem pojma poput relativističke mase, zajedno s njenim izvorom $E = mc^2$, nastaje puno više poteškoća u razumijevanju i miskoncepcija u STR nego što ima prednosti zbog zadržavanja poznatih Newtonskih oblika. Koncept relativističke mase dovodi do shvaćanja kako masa sistema ovisi o izboru IRS, te da je relativistička masa stvarna pojava kao što su to dilatacija vremena i kontrakcija duljine. Prema RM, dva promatrača koja su u relativnom gibanju, kao što neće mjeriti iste vremenske intervale i iste duljine, tako neće mjeriti ni iste mase [14].

Nejasnoće koje proizlaze iz takvog tumačenja STR ilustrirane su sljedećim citatom iz knjige popularne znanosti:

„Promotrimo gibanje molekula u maloj posudi s plinom. Kada se plin zagrije, brzina molekula se poveća, i prema toma, masa se isto poveća i plin postaje teži [8]“.

Iako do povećanja mase sistema doista dolazi zbog dovođenja topline, razlog zbog kojega dolazi do povećanja nije točan. Masa jedne čestice plina neće se povećati dovođenjem topline jer je masa jedne čestice invarijantna veličina i ne ovisi o brzini kojom se ta čestica giba. Dovođenjem topline povećavamo ukupnu kinetičku energiju svih čestica tog sistema. Dovođenjem topline u sistem, njegova energija se povećava zbog povećanja kinetičke energije čestica plina, a time se i masa sistema poveća, ali do povećanja mase jedne čestice toga sistema nije došlo. To je jako bitna razlika između ta dva tumačenja ovoga primjera [5].

To je samo jedan od brojnih primjera koji stvaraju nejasnoće u razumijevanju STR. U knjizi, *Što je teorija relativnosti,* od L. Landau i Y. Rumera, nakon pomno objašnjene STR, autori knjige navode sljedeće:

- „Masa se može smatrati neovisnom o brzini tijela sve dok kažemo da se brzina tijela povećava proporcionalno s vremenom djelovanja sile. Ali čim se brzina tijela približi brzini svjetlosti, proporcionalnost između vremena i brzine nestaje i masa postaje ovisna o brzini [2]“
- Povećanje mase tijela je usko povezano s radom koji je primijenjen na njega: ono je proporcionalno sili koja je potrebna za postavljanje tijela u gibanje… Sve sile koje djeluju na tijelo, povećavaju energiju tijela, te povećavaju i njegovu masu. To je upravo zašto tijelo ima veću masu kada je zagrijano, zašto opruga ima veću masu kada je stisnuta [2]“

Autori navode kako do gušenja akceleracije pri velikim brzinama dolazi zbog toga što masa postaje veća jer je došlo do povećanja brzine, dok stvarno gušenje akceleracije zapravo dolazi zbog dilatacije vremena, što je mala, ali suptilna razlika između ta dva tumačenja. Isto tako navode kako bilo koji oblik energije uveden u sistem će rezultirati povećanjem mase. Ali kao što smo pokazali na primjerima 2 i 3 u poglavlju 4.7 Mjerenja mase, dovođenjem energije u sistem tako da se centru mase tog sistema brzina stalno povećava, neće dovesti do povećanja mase sistema, dok dovođenje energije u sistem na način da centar mase miruje (putem topline ili sabijanja opruge), dovodi do povećanja mase. Problem nastaje zbog manjka razumijevanja Einsteinove jednadžbe. Jednadžba $E = mc^2$ implicira sve oblike energije, a oni oblici energije koji doista ulaze u masu sistema su samo energije koje su svojstvene za taj sistem [1].

Ovi primjeri demonstriraju da uvođenjem pojma RM u STR stvaramo nejasnoće i miskoncepcije. Dobro opravdan razlog za uvođenjem RM ne postoji i najbolje bi bilo u potpunosti ga napustiti. Osim potpunog odustajanja od pojma RM, također treba biti jako oprezan kod tumačenja Einsteinove formule između veze mase i energije jer ona neizbježno dovodi do RM [14]. U svojim radovima o STR Einstein je napisao kako je bolje umjesto izraza za RM uvesti formulu za vezu između impulsa i energije [13]:

$$\boldsymbol{v} = c^2 \frac{\boldsymbol{p}}{E}$$

6 O konceptu mase prije STR

U 13. stoljeću teolog Giles iz Rima (lat. Aegidius Romanus) predložio je da postoji i treća mjera za materiju, uz težinu i volumen – *quantitas materia* ili količina materija u prijevodu. U narednim stoljećima, riječ masa (lat. massa) početi će se upotrebljavati kako bi istaknuli količinu materije [21].

1687. godine Isaac Newton izdaje svoju knjigu, *Matematički principi filozofije prirode*, u kojoj definira koncept mase na sljedeći način:

„Masa je mjera količine materije koja proizlazi iz gustoće i volumena tijela zajedno [13].“ Takva definicija naziva se konceptualnom definicijom jer se bazira na drugim, osnovnijim konceptima.

Svojstvo mase, koje će postati njegovom glavnom karakteristikom, a proizlazi iz Newtonovih zakona, je da je ono sposobnost tijela da se opire promjeni stanja gibanja ili mirovanja [17]. Ta sposobnost tijela opiranju promjeni stanja gibanja naziva se inercija ili tromost.

Drugi Newtonov zakon ostavio je otvorenim izbor sile koja će uzrokovati promjenu stanja tijela. Mjereći akceleraciju tijela uslijed djelovanja različitih vrsta sila na tijelo, uvijek dobivamo isti iznos. Izgleda kao da je masa intrinzična za samo tijelo, tj. masa je svojstvo samog tijela i neovisno je o izboru referentnog sustava [17].

Masu tijela koju dobijemo kroz eksperiment u kojemu promatramo gibanje tijela naziva se inercijska masa. I tu dolazimo do druge definicije koncepta, a to je operacijska definicija. Operacijske definicije su definicije koje određuju eksperiment kroz koji želimo izmjeriti danu veličinu [21].

Na osnovi Keplerovih promatranja, Newton dolazi do zakona gravitacije. Iz Newtonovog zakona gravitacije dobivamo još jedno važno svojstvo mase – mase tijela izvori su gravitacijskih privlačenja.

Kako masu koju određujemo kroz eksperimente koji su vezani za gibanje tijela nazivamo inercijskom masom, tako masu koju određujemo iz eksperimenata kojima su osnova gravitacijska međudjelovanja nazivamo gravitacijskom masom. Kako bi se stvar dodatno zakomplicirala, postoje dvije vrste gravitacijske mase: aktivna i pasivna. Aktivna gravitacijska masa je masa koja je odgovorna za stvaranje gravitacijskog privlačenja, a pasivna gravitacijska masa je masa na koju djeluje gravitacijsko privlačenje [21].

Da su inercijska i gravitacijska masa jedna te ista masa, pokazuju i Galileovi eksperimenti u kojima je pokazao da sva tijela, neovisno o njihovim masa, padaju istim ubrzanjem – ubrzanjem sile teže. Jednakost akceleracije svih tijela u slobodnom padu i ubrzanja sile teže moguće je samo ako će inercijska i gravitacijska masa biti jednake [13]:

$$\sum F = m_i a = F_g = m_g g \rightarrow \ a = \left(\frac{m_g}{m_i}\right) g$$

Sva mjerenja tih različitih masa dala su iste rezultate, što se još ponekad naziva i Galileov ili slabi princip ekvivalencije. I sam Einstein bio je voljan prihvatit da su to sve inercijske mase, tj. sve su Newtonske mase m [17].

Kroz naredna stoljeća doći će do razvitka kemije i Newtonova definicija mase kao mjera količine materije postat će sve manje i manje prihvaćena u znanstvenoj zajednici. Zašto? Zato što masa kao količina materije nije konzistentna s glavnom karakteristikom mase, a to je njena inercija. Tijela koja imaju istu količinu materije, ne moraju imati iste mase, a prema tome i iste inercije ili tijela koja imaju različite mase, imat će i različite inercije, ali ne moraju imati različite količine tvari.

Nadalje, Ernest Mach ističe kako je definicija mase preko gustoće i volumena kružna jer je sama gustoća definirana preko mase i volumena. Stoga Mach, krajem 19. stoljeća, predlaže novu definiciju mase zajedno s metodom njena mjerenja; dva tijela koja su u međudjelovanju, uzrokovat će akceleraciju jedan u drugome, a omjer njihovih akceleracija jednak je omjer njihovih masa [17]:

$$\frac{m_A}{m_B} = -\frac{a_B}{a_A}$$

Početkom 20. stoljeća FitzGerald i Lorentz nastojali su objasniti zašto Michelson-Morleyev eksperiment uvijek daje istu brzinu svjetlosti. Oni su pretpostavili kako dolazi do skraćivanja duljine interferometra zbog tlaka koji stvara eter [17]. U toj svojoj pretpostavci došli su do zaključka da kada je sila okomita na smjer brzine, drugi Newtonov zakon poprima oblik $F = \gamma ma$, a kada je sila u smjeru brzine $F = \gamma^3 ma$. Kako bi zadržali poznati oblik drugog Newtonovog zakona, za γm predložen je naziva transverzalna masa m_t, a za $\gamma^3 ma$ je predložena longitudinalna masa m_l [18].

Transverzalna i longitudinalna masa ispale su iz upotrebe jednom kada je na scenu došla relativistička masa. S pojavom RM pojavila se još jedna masa, a to je masa mirovanja. Iako je sam Einstein u svom posljednjem radu napomenuo kako se iz upotrijebe treba izbaciti RM i koristiti samo jednu masu, masu mirovanja, tj. Newtonsku masu m, RM imala je poprilično dug životni vijek koji se djelomično može prepisati Diracovom priručniku o STR u kojem se rabi izraz za relativističku masu [17].

Ipak, u svoj toj zbrci i dalje možemo razabrati neka ključna svojstva mase u STR. Kao prvo, masa je u STR Lorentz invarijantna, tj. masa ne ovisi o izboru referentnog sustava, te je i dalje izvor gravitacijskog privlačenja.

Zadnje, Einstein sa svojom teorijom nudi novu definiciju mase kao rezervoar energije. I zbog toga masu se više ne može smatrati aditivnom veličinom jer masa složenog tijela nije više jednaka samo zbroju masa od kojeg se to složeno tijelo sastoji, već ovisi i o energijama njegovih sastavnih dijelova.

7 Zaključak

U Newtonovoj mehanici masa je imala značenje mjere količine tvari koju je posjedovao neki sistem. Tako ju je i sam Newton definirao u *Matematičkim principima filozofije prirode*. Prema toj definiciji, masa je bila aditivna veličina: ukupna masa sistema jednaka je zbroju masa njenih sastavnih dijelova. U narednim stoljećima pojam mase se razvijao i dobio novo tumačenje - masa je mjera inercije tijela.

Osim aditivnosti, masa u Newtonovoj mehanici je ima jedno važno svojstvo: masa sistema neovisna je o izboru IRS, svi IRS mjere istu masu sistema. Masa u Newtonovoj mehanici je invarijantna veličina.

Kao i u Newtonovoj mehanici, a tako i u STR, masa je invarijantna veličina, neovisna o izboru IRS. Neovisna je o izboru IRS zato što je masa u STR apsolutna vrijednost 4-vektora impulsa i energije. Taj iznos 4-vektora je isti u svim IRS, on ostaje isti pri Lorentzovim transformacijama iz jednog IRS u drugi.

Ali u STR više ne možemo reći da je masa mjera količine tvari koja je sadržana u nekom sistemu jer u STR masa dobiva novu definiciju: masa je mjera količine energije koja je sadržana u nekom sistemu. Masa sustava, osim što ovisi o masi njenih sastavnih dijelova, ovisi i o energijama tih sastavnih dijelova, a izjava da su masa i energija ekvivalentne vrijedi samo u slučaju kada danu masu promatramo iz sustava u kojemu ona miruje jer je masa iznos 4-vektora u kojemu je energija samo jedna o četiri komponente.

Mnoge poteškoće u razumijevanju STR, a time i Svemira u kojemu živimo, proizlaze iz neopreznog korištenja formule $E = mc^2$, i njene direktne posljedice, a to je relativistička masa, te ne naglašavanja referentnog sustava iz kojega se dani sistem promatra. Što je ključna stvar. Jer Specijalna Teorija Relativnosti je prije svega teorija o referentnim sustavima.

8 Literatura

[1] P. Hrasko, Basic Relativity: An Introductory Essay (Springer, New York, 2011) 1-69 str

[2] L. Landau, Yu. Rumer, What is theory of relativity, trans: A. Zdornykh (Mir Publisher, Moscow, 1981)

[3] L.B. Okun, ABC of Physics: A Very Brief Guide, (World Scientific Printers, Singapore, 2012) 9-16 str

[4] L.B. Okun, Energy and Mass in Relativity Theory (World Scientific Printers, Singapore (2009)

[5] E.F. Taylor, J.A. Wheeler, SpaceTime Phyics: Introduction to Special Relativity 2nd ed, (W.H. Freeman and Company, New York, 1992)

[6] R.P. Feynman, R.E. Leighton, M. Sands, The Feynman, Lectures on Physics Vol I (Basic Books, New York, 2010) 140-169 str.

[7] H.D. Young, R.A. Freedman, Sears and Zemansky's University Physics With Modern Physics 12 ed, (Pearson Addison – Weasley, San Francisco, 2008) 1268-1296 str

[8] R.P. Feynman, Six Not-So-Easy Pieces (Basic Books, New York, 2011) 49-109 str

[9] S. Hawking, A Brief History of Time (Penguin Radnom House, UK, 2016) 21 str

[10] L. Susskind, A. Friedman, Speical Relativity and Classical Field Theory: The theoretical Minimum (Penguin Books, 2017) 1-113 str

[11] L.B. Okun, The Concept of Mass (Physics Today, America, June 1989)

[12] L.B. Okun, Mass versus relativistic and rest masses (Am. J. Phys., Vol. 77, No. 5, May 2009)

[13] L.B. Okun, The Concept of Mass in the Einstein Year (arXiv:hep-ph/0602037v1, 3 Feb 2006-2 Feb 2008)

[14] G. Oas, On the abuse and use of relativistic mass (arXiv:physics/0504110v2, 21 Oct 2005-2 Feb 2008)

[15] G. Oas, On the Use of Relativistic Mass in Various Published Works (arXiv:physics/0504111v1 18 Apr 2005-2 Feb 2008)

[16] I. Newton, The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy, trans: I.B. Cohen, A. Whitman (University of California Press, USA, 1999)

[17] J. Baggott, Mass (Oxfor Universitiy Press, Great Britain, 2017) 78-145 str

[18] M. Grba, Fizika nakon čuda 1905. (ALFA d.d., Zagreb, 2016) 19-30 str

[19] I. Supek, Povijest Fizike (Školska Knjiga, Zagreb, 2004) 35-55; 124-128 str

[20] J. Gribbin, Science: A History (Penguin Books, England, 2003) 435-441 str

[21] E. Hecht, There Is No Real Good Definition of Mass (The Physics Teacher, Vol. 44, January 2006)

8.1 Slike

Slika 2: Misaoni eksperiment za demonstriranje relativnosti istodobnosti [7]

Slika 13: Relativno gibanje tri sustava A, B i C jednog u odnosu na drugi [7]

Slika 17: Dvije posude ispunjene istim plinom na različitim temperaturama [7]