

# Implicitna jednađba stanja kozmičkih fluida i modeli tamne energije, tamne materije i njihovog ujedinjenja

---

**Perković, Dalibor**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:502116>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-16**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Dalibor Perković

**IMPLICITNA JEDNADŽBA STANJA  
KOZMIČKIH FLUIDA I MODELI  
TAMNE ENERGIJE, TAMNE  
MATERIJE I NJIHOVOG  
UJEDINJENJA**

DOKTORSKI RAD

Mentor: dr. sc. Hrvoje Štefančić

Zagreb, 2022.



Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Dalibor Perković

**IMPLICITNA JEDNADŽBA STANJA  
KOZMIČKIH FLUIDA I MODELI  
TAMNE ENERGIJE, TAMNE  
MATERIJE I NJIHOVOG  
UJEDINJENJA**

DOKTORSKI RAD

Mentor: dr. sc. Hrvoje Štefančić

Zagreb, 2022.



University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

Dalibor Perković

**IMPLICIT EQUATION OF STATE OF  
COSMIC FLUIDS AND MODELS OF  
DARK ENERGY, DARK MATTER  
AND THEIR UNIFICATION**

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor: dr. sc. Hrvoje Štefančić

Zagreb, 2022.

# Informacije o mentoru

Prof. dr. sc. Hrvoje Štefančić doktorirao je fiziku na PMF-u u Zagrebu 2002. godine, a usavršavao se na Sveučilištu u Barceloni. Na Zavodu za teorijsku fiziku Instituta Ruđer Bošković bio je zaposlen do 2014. godine, a od 2012. radi na Hrvatskom katoličkom sveučilištu gdje je obnašao dužnost prorektora za znanost, a sada obnaša dužnost prorektora za međunarodnu suradnju. Bavio se istraživanjima u područjima fizike visokih energija, fizikalne kozmologije i znanosti o kompleksnim sustavima. Osobit interes su mu interdisciplinarne primjene metoda i pristupa teorijske fizike. U području fizikalne kozmologije bavio se istraživanjima problema ubrzanog širenja svemira i povezanih pitanja tamne energije, kozmološke konstante i vakuumske energije, modifikacija gravitacije na kozmološkim udaljenostima te ujedinjenih modela tamne materije i tamne energije. Vodio je i sudjelovao je u nizu interdisciplinarnih istraživanja vezanih uz fiziku kompleksnih sustava, prvenstveno uz istraživanje strukture i dinamike kompleksnih mreža i procesa na njima. Publicirao je višestruko citirane radove u istaknutim međunarodnim časopisima iz područja fizike i povezanih područja, te izlagao na brojnim međunarodnim znanstvenim skupovima.

# Zahvale

Prije svega, zahvajujem mentoru, dr. sc. Hrvoju Štefančiću, na dugotrajnom profesionalnom vodstvu, ali najviše nadljudskom strpljenju koje je pokazao tokom višegodišnjeg rada na ovoj disertaciji. Razumijevanje za subjektivno teže uvjete koji su me pratili na ovom putu bilo je ključan faktor za uspješno privođenje posla cilju.

Također, ništa manje, zahvaljujem supruzi Jasminki na, opet, ništa manje strpljenja i podnošenju svih odricanja, nedostatka i preraspodjele vremena koji su bili potrebni za završenje ovog doktorata.

I za kraj, zahvaljujem i obitelji, a posebno mami, na dovoljno sportskog duha da ne poklekne tokom maratona kojemu se ponekad nije nazirao kraj.

## Sažetak

Ubrzano širenje svemira jedno je od ključnih otkrića u modernoj kozmologiji. Iako se na tom problemu radi već dva desetljeća, još uvijek nema empirijski potvrđene teorije koja bi na zadovoljavajući način objasnila ovu pojavu. U ovom radu razvija se nova metodologija modeliranja tamne energije preko implicitne jednačbe stanja kozmičkog fluida te modeliranja brzine zvuka kao funkcije parametra jednačbe stanja kozmičkih fluida. Postupak se demonstrira na uspostavljanju novih i analizi postojećih modela.

Ispituju se svojstva tamne materije i tamne energije poput tranzijentne tamne energije i budućih singulariteta u širenju svemira. Proučava se ujedinjenje tamne materije i tamne energije u dobivenih modelima i sukladnost s podacima iz kozmoloških i astrofizičkih opažanja. Uspoređuje se veći broj dosad uspostavljenih modela i parametrizacija tamne energije i provjerava sukladnost s osnovnim svojstvima barotropskog fluida. Povezuje se koncept  $k$ -esencije s predloženom metodologijom i analiziraju dobiveni rezultati. Na temelju orbitalnih brzina objekata u našoj galaksiji proučava se brzina zvuka kozmičkih fluida u ovisnosti o udaljenosti od središta galaksije i rezultati se uspoređuju s temeljnim postavkama barotropskog fluida.

Ključne riječi: tamna energija, tamna materija, kozmički fluid, brzina zvuka, jednačba stanja

## Extended Abstract

Accelerated expansion of the universe is one of key discoveries in modern cosmology. Even though the problem has been worked on for more than two decades, there is still no empirically confirmed theory that would sufficiently explain this phenomenon. In this work, a new methodology of modelling dark energy through implicit equation of state of cosmic fluid is developed: speed of sound is being modelled as a function of parameter  $w$  of the equation of state of cosmic fluids. The procedure is demonstrated through establishing new and analysis of already existing models.

As can be seen in the equation of acceleration, value of component parameter of equation of state,  $w = p/\rho$ , is crucial for the behaviour of expansion of universe. If  $w > -1/3$ , the contribution to expansion is decelerating and if  $w < -1/3$ , the contribution to expansion is accelerating. The  $\Lambda$ CDM model presumes that  $w = -1$  for dark energy throughout the history of the universe. This assumption, however, leads to some recently observationally established tensions, which is why a dynamic dark energy is investigated: several models and parametrizations are trying to establish a dynamic function where  $w$  changes with time.

After the primary objective of this work, the development of new methodology, the secondary direction of this work is twofold. The first direction is investigating how much certain functions and parametrizations of  $w(a)$  yield results that conform with observation. The second is checking if dark energy in selected and also newly constructed models has the properties of barotropic fluid, i. e., if its pressure is the function of energy density only; also, this means verifying that the value of its speed of sound squared,  $c_s^2$  is always between zero and speed of light squared.

Methodology derived in this work will rely heavily on equations derived from the fluid continuity equation. Due to the nature of those equations, behaviour of parameter  $w$  around the value of -1 will be especially important because at that point  $c_s^2$ , parameter  $w$  and/or other cosmic parameters often go through a singularity. In chapter 2 a model is presented that, in some cases, allows a smooth cosmological constant boundary crossing between areas  $w < -1$  to  $w > -1$ . Some results of this model are then compared to observational data. Also, depending on model parameters, possible futures are discussed: Big Rip, Small Rip and transient dark energy. Some of the important parameter



regimes show a wide range of scale factor  $a$  during which the parameter  $w$  is almost constant and close to -1, conforming to the current observational results.

Another set of models introduced in this work is the one unifying dark matter and dark energy. Analytical function for  $c_s^2(w)$  yields results that describe behaviour of unified dark fluid that behaves like dark energy or dark matter through different stages of development of the universe: starting with dark matter stage, depending on model parameters, parameter  $w$  goes through the stage of dark energy to end up either as phantom energy ( $w < -1$ ), dark energy with  $w$  asymptotically going to  $w_*$  or shifting back into dark matter regime.

The next part of the work deals with collecting around 40 models presented in literature and determining whether dark energy presented there has key properties of barotropic fluid. Analytical examination is performed in two cases and numerical analysis using two methods is performed in all of them, examining if speed of sound squared of the dark fluid remains between zero and speed of light squared for the whole interval of cosmic past ( $0 < a < a_0$ ). Results show that many models developed since the discovery of accelerated expansion of the universe do not satisfy these conditions.

Furthermore, newly constructed models of dark energy are examined through the model of purely kinetic k-essence, formulating it through Lagrange field theory which would connect cosmology with other areas of physics. In all introduced models there is a case of unification of dark matter and dark energy with  $w$  shifting from zero or near-zero (depending on model parameters) at  $a = 0$  to  $w$  asymptotically going to -1 as  $a$  goes to infinity.

Finally, observational data of orbital velocities of objects in Milky Way galaxy are examined and used to establish a method of checking if local dark fluid is in concord with properties of barotropic fluid. A model-independent method is derived for calculating speed of sound squared from the observed data using numerical calculation of first and second derivatives of orbital velocity on distance from the galaxy centre. The results mostly show the possibility of dark matter showing properties of barotropic fluid, however, there is significant room for improvement with regard to the accuracy of observed data.

Keywords: dark energy, dark matter, cosmic fluid, speed of sound, equation of state

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Povijesni pregled . . . . .	2
1.2	Koncepti tamne energije i tamne materije . . . . .	3
1.2.1	$\Lambda$ CDM i kozmološka konstanta . . . . .	4
1.2.2	Kvintesencija . . . . .	6
1.2.3	Međudjelujuća tamna energija . . . . .	9
1.2.4	Modeli promjenjive tamne energije . . . . .	10
1.2.5	Modificirana gravitacija . . . . .	13
1.2.6	Alternativne teorije . . . . .	14
1.3	Metoda modeliranja brzina zvuka kao funkcije parametra $w$ . . . . .	15
1.4	Ciljevi, hipoteze i struktura disertacije . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Tranzijentna tamna energija i prijelaz granice kozmološke konstante</b>	<b>20</b>
2.1	Formalizam . . . . .	21
2.2	Reprezentacija preko skalarnog polja . . . . .	25
2.3	Analiza modela po parametarskom prostoru i prijelaz granice kozmološke konstante . . . . .	27
2.4	Prilagodba parametara modela rezultatima promatranja . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Ujedinjenje tamne materije i tamne energije</b>	<b>36</b>
3.1	Model . . . . .	36
3.2	Primjeri različitih modela ujedinjenja u ovisnosti o parametrima . . . . .	37
3.2.1	Tamna materija - fantomska energija . . . . .	38
3.2.2	Tamna materija - tamna energija koja asimptotski teži prema $w_*$ . . . . .	40
3.2.3	Ujedinjenje tamna materija - tamna energija - tamna materija . . . . .	42
3.2.4	Zaključak . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Primjena modeliranja <math>c_s^2(w)</math> na rezultatima iz literature i provjera suglasnosti sa svojstvima barotropskog fluida</b>	<b>47</b>
4.1	Metodologija i neki analitički rezultati . . . . .	47
4.2	Analitički pristupi . . . . .	48

4.2.1	Opći analitički pristup . . . . .	48
4.2.2	Model $w = w_0 \frac{a}{a_0}$ . . . . .	49
4.2.3	Model CPL . . . . .	50
4.3	Pregled numeričkih rezultata . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Opis modela barotropskih fluida preko kinetičke k-esencije</b>	<b>66</b>
5.1	Prikaz modela $c_s^2(w)$ kao preko čisto kinetičke k-esencije . . . . .	67
5.2	Analitička rješenja za modele $c_s^2(w)$ . . . . .	69
5.2.1	Model prelaska granice kozmološke konstante . . . . .	69
5.2.2	Model CPL . . . . .	69
5.2.3	Primjeri eksplicitnih rješenja . . . . .	70
5.2.4	Model 1 . . . . .	70
5.2.5	Model 2 . . . . .	73
5.2.6	Model 3 . . . . .	75
5.2.7	Model 4 . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Rotacijske krivulje</b>	<b>81</b>
6.1	Poveznica veličina vezanih uz tamnu materiju sa svojstvima rotacijske krivulje . . . . .	82
6.2	Mjerni podaci i izračun . . . . .	85
6.3	Vrijednosti gustoće i $c_s^2$ za rotacijsku krivulju Mliječnog puta . . . . .	87
6.3.1	Derivacije . . . . .	87
6.3.2	Gustoća energije . . . . .	87
6.3.3	Brzina zvuka . . . . .	88
6.3.4	Rezultati i zaključci . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>95</b>
	<b>Literatura</b>	<b>97</b>
	<b>Životopis i popis radova</b>	<b>107</b>

# 1 Uvod

Ako se pogledaju sveukupno dosad prikupljena znanja iz fizike kao i moderna istraživanja prema zasad neistraženim područjima, moglo bi se reći da se glavni naponi u otkrivanju novih spoznaja, uz ponešto tehničkih popunjavanja praznina u dosad istraženom, kreću u dva velika smjera. Ta dva smjera bi se mogla nazvati: prema ekstremno malom i prema ekstremno velikom. Onaj prvi odnosi se na istraživanje temeljne strukture materije i međudjelovanja u najmanjim mjerilima: subnuklearne čestice i kvantna fizika. Drugi smjer, prema ekstremno velikom, naravno, odnosi se na kozmologiju i istraživanje svemira i prostora na najvećim skalama.

Prije dvadesetak godina kozmologija je doživjela iznenađenje u vidu otkrića koje je napravljeno 1998. i 1999. godine: utvrđeno je da se širenje svemira ne usporava, što je do tada bila vodeća pretpostavka i glavno je pitanje bio intenzitet tog usporavanja, nego ubrzava [1,2].

Ponudeno je više klasa modela koji su ovo ubrzavanje pokušavali objasniti na razne načine, ali od svih njih model tamne energije se najbolje održao, ali i razgranao na više potklasa o čemu će biti govora kasnije u ovom tekstu.

Usprkos dvadesetogodišnjim naporima, danas još uvijek ne znamo prirodu tamne energije: na primjer, ne znamo je li riječ o polju ili materiji u obliku čestica, postoje li njene prostorne fluktuacije ili je riječ o pojavi homogenoj kroz cijeli svemir, ne znamo međudjeluje li ona s drugim oblicima materije/energije u svemiru. Također, jedna od pretpostavki koje se pokušavaju analizirati - a dijelom će o tome biti riječi i u ovom radu - je pokušaj ujedinjenja tamne materije i tamne energije, to jest objašnjavanja dvije različite pojave različitim aspektima jednog istog fizikalnog entiteta.

Primarni zadatak ovog rada neće biti toliko uspostavljanje novih modela tamne energije ili ujedinjenja tamne energije s tamnom materijom, koliko uvođenje novog formalizma za proučavanje tamne energije preko jednadžbe stanja kozmičkih fluida i brzine zvuka kao funkcije parametra jednadžbe stanja. Kroz ovaj formalizam će se onda uvesti neki probni modeli, više kao primjeri korištenja formalizma i zaključaka koji se ovim postupkom mogu izvesti. Rad će se također dotaknuti i opisa tamne energije kao barotropskog fluida preko *k-esencije* (engl. *k-essence*) pristupa u teoriji polja, kao i korištenja ove metode kad se uzmu u obzir neki konkretni rezultati promatranja.

## 1.1 Povijesni pregled

Naše se poimanje svemira i zakonitosti koje u njemu vladaju promijenilo kad su dva tima predvođena Adamom Riessom (1998. godine) [1] Saulom Perlmutterom (1999. godine) [2], pokušavajući što točnije izmjeriti stopu promjene brzine širenja svemira, otkrili da kozmička ekspanzija ubrzava, a ne usporava. Timovi su za mjerenje koristili standardne svijeće, eksplozije supernova tipa Ia. S vremenom je prikupljeno još dokaza kao što su anizotropije u kozmičkom mikrovalnom pozadinskom zračenju, barionske akustične oscilacije, gravitacijske leće, raspored grozdova galaksija, pa čak i sama starost svemira [3–5].

Ovo je, naravno, potpuno suprotno svemu što se očekivalo još otkako je Albert Einstein formulirao svoje jednadžbe Opće teorije relativnosti [6]. Odmah nakon objavljivanja Einsteinovih jednadžbi polja, čak desetak godina prije Hubbleovog otkrića, već su se počele formulirati teorije o dinamičnom svemiru: Alexander Friedmann je 1922. godine formulirao svoje jednadžbe za homogeni svemir [7], da bi nekoliko godina kasnije Georges Lemaître dobio sličan rezultat [8]. Na njihov rad nastavili su se Howard P. Robertson [9] i Arthur Geoffrey Walker [10] i stvorili ono što danas znamo kao Friedmann–Lemaître–Robertson–Walkerova metrika:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (1.1)$$

Riječ je o metrici koja predstavlja analitičko rješenje Einsteinovih jednadžbi za homogeni izotropni svemir koje uvodi faktor skale  $a$ . Faktor skale često se u literaturi definira kao

$$a = \frac{d(t)}{d_0} \quad (1.2)$$

gdje je  $d(t)$  udaljenost između dvije točke prostora u nekom trenutku  $t$  u povijesti svemira, a  $d_0$  je udaljenost između istih tih točaka u nekom referentnom trenutku. Za referentno vrijeme najčešće se uzima sadašnjost. U ovoj varijanti faktor skale je bezdimenzionalna veličina.

Druga definicija faktora skale - koja će se koristiti u ovom radu - predstavlja samo udaljenost neke dvije točke prostora, a u računima se pojavljuje kao omjer  $\frac{a}{a_0}$ , gdje je  $a_0$

faktor skale u sadašnjem vremenu. Dakle, u ovom slučaju,  $a$  ima dimenziju duljine.

Egzaktni prikaz Einsteinovih jednadžbi za homogeni i izotropni svemir predstavljaju Friedmannove jednadžbe:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (1.3)$$

i

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (1.4)$$

gdje je  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  definirano kao Hubbleova funkcija.

## 1.2 Koncepti tamne energije i tamne materije

Ideja da u svemiru postoji tamni dio mase koji ne vidimo, a koji utječe na galaktičke orbite, prvi je spomenuo lord Kelvin još krajem 19. stoljeća. On je u predavanju održanom 1884. godine iznio procjenu ukupne mase "tamnih tijela" u Mliječnom putu koju je dobio na temelju izmjerenih orbitalnih brzina i ustvrdio da je ona značajno veća od mase sve materije koju možemo detektirati [11]. Pojam "tamne materije" 1906. godine ("matière obscure") prvi je upotrijebio Henri Poincaré u analizi Kelvinovih rezultata [12], dok je Jacobus Kapteyn prvi obavio mjerenja na temelju kojih je bilo moguće izračunati stvarnu količinu tamne materije u galaksiji [13]. Konceptualno točne, ali kvantitativno značajno pogrešne rezultate objavili su i Jan Oort 1932. godine [14] te Fritz Zwicky 1933. godine [15] mjereći brzine galaksija, pri čemu je Zwicky također upotrijebio izraz "tamna materija" ("dunkle Materie"). Na kraju, Horace Babcock je 1939. godine objavio rezultate mjerenja rotacijskih brzina galaksije Andromeda iz čega je preciznije izmjerio radijalno opadanje omjera mase i luminoziteta [16].

U sljedećim desetljećima godina prikupljeni su daljnji dokazi o postojanju i djelovanju tamne materije: ponašanje gravitacijskih leća, anizotropije u pozadinskom mikrovalnom zračenju, distribucija temperature u vrućim plinovima u galaktičkim klasterima [17, 18]. Međutim, još uvijek nema konkretnih rezultata koji bi dali naslutiti o kakvoj je pojavi zapravo riječ. Najveće slaganje za sada vlada oko modela po kojemu je tamna materija sastavljena od dosad neotkrivenih subatomske čestice.

Ako se o prirodi tamne materije zna malo, tamna energija je trenutno još veća nepoznanica. Iako su se neki oblici sličnih pojava spominjali i ranije - modeli kojima se pokušava objasniti inflacija u ranoj fazi svemira postuliraju polje slično tamnoj energiji - istraživanja onoga što danas nazivamo tamnom energijom ozbiljno su krenula tek nakon otkrića kasne ubrzane ekspanzije svemira. Prevladava mišljenje da je, za razliku od tamne materije, riječ o homogenoj komponenti koja ispunjava cijeli svemir zbog čega je njena gustoća premala da bi se detektirala u nekom obliku eksperimenta.

Prvi koncept koji danas prepoznajemo kao tamnu energiju nastao je s Općom teorijom relativnosti. Riječ, je, naravno, o kozmološkoj konstanti koju je Albert Einstein dodao u svoje jednačbe polja kako bi objasnio statični svemir [19]. No, informacija koja daje značajniju indikaciju postojanja i svojstava tamne energije je nedostajuća gustoća potrebna da bi svemir bio ravan u skladu s trenutno dostupnim podacima. Naime, postuliranje tamne energije na neki je način riješilo jedan drugi problem: da bi svemir bio prostorno ravan, potrebno je da ukupna gustoća energije bude jednaka kritičnoj gustoći:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.5)$$

Međutim, sve izmjerene i izračunate vrijednosti nerelativističke materije davale su samo trećinu potrebne vrijednosti. Uvođenjem koncepta tamne energije otvoren je novi put eventualnog rješavanja ovog problema.

Od svih modela tamnog sektora, najjednostavniji model koji daje dobra poklapanja s mjerenjima je takozvani model  $\Lambda$ CDM.

### 1.2.1 $\Lambda$ CDM i kozmološka konstanta

U trenutku kad je Albert Einstein izveo jednačbe polja još uvijek nije bilo poznato da se svemir širi. Međutim, Einsteinovo rješenje za statični svemir bilo je nestabilno: iz rješenja za homogeni i izotropni svemir jasno je da za statični svemir  $\ddot{a}$  mora biti jednako nuli, što znači da je potrebna korekcija u obliku dodatnog člana koji je nazvan kozmološka konstanta  $\Lambda$ .

Hubbleovim otkrićem crvenog pomaka udaljenih galaksija ovaj je član prestao biti nužan. No, sama po sebi, kozmološka konstanta nije predstavljala pogrešku, pogreška je eventualno bila u određivanju njene vrijednosti, a ne u samoj činjenici da je dodana

u jednadžbu tako da je u razmatranjima tokom sljedećih desetljeća ipak ostala prisutna, pri čemu su čak provedena i neka istraživanja kako bi se utvrdilo je li ona zaista jednaka nuli. Također, u fizici čestica pojavilo se pitanje može li ova veličina predstavljati energiju vakuuma [20]. Cijelo vrijeme do otkrića ubrzane kasne ekspanzije svemira kozmološka je konstanta ostala u upotrebi jer je naknadna mjerenja nisu uspjela potpuno odbaciti.

Na kraju, otkrićem ubrzanog širenja svemira kozmološka konstanta drastično je dobila na važnosti jer se pokazala kao bitan parametar za pokušaje objašnjavanja prirode ekspanzije.

Najistaknutiji pokušaj objašnjavanja prirode kozmološke konstante upravo je spomenuta energija vakuuma. Naime, ako se razmatra potencijalna energija skalarnog polja, nema razloga zašto bi minimum te energije bio jednak nuli. Ukoliko bi se vakuum smatrao idealnim fluidom, za njegov tlak i gustoću energije možemo postaviti

$$p = -\rho. \quad (1.6)$$

Dakle, po ovom modelu, energija vakuuma odgovara svojstvima koja opisujemo kao kozmološku konstantu.

Nadalje, u kvantnoj mehanici, za potencijalnu energiju harmoničkog oscilatora  $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$  vrijedi da je minimalni potencijal - što odgovara stanju u vakuumu - jednak nuli. Međutim, zbog principa neodređenosti najmanja energija zapravo mora iznositi  $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ . Naravno, i ovome se, opet, može dodati bilo koja konstanta bez utjecaja na ponašanje sustava, ali iz ovog rezultata jasno je da minimalna energija ovisi i o frekvenciji oscilatora.

U teoriji polja, polje se može zamisliti kao beskonačan skup oscilatora. Teorijski, energija toga polja onda može biti i beskonačna. Međutim, ako odbacimo modove visoke energije i odredimo neku maksimalnu frekvenciju, gustoća energije će imati oblik  $\rho_\Lambda \propto \hbar_{max}^4$  [21].

Na kraju, ukupna kozmološka konstanta će biti suma nekoliko različitih doprinosa zajedno s osnovnom kozmološkom konstantom  $\Lambda_0$ . Međutim, numerička procjena pojedinih komponenti postavlja novi problem: dok se teorijske vrijednosti spomenutih komponenti gustoće energije potrebnih za kozmološku konstantu nalaze u rasponu od



oko  $10^{40}$  i  $10^{110} J/m^3$ , vrijednost  $\rho_\Lambda$  dobivena iz mjerenja ima red veličine od otprilike  $10^{-10} J/m^3$  [21]. Ovo je poznato kao "problem kozmološke konstante" i za sada je jedno od važnijih otvorenih pitanja u kozmologiji.

Kao što je već spomenuto, uvjet da svemir bude ravan je da gustoća energije bude jednaka kritičnoj gustoći  $\rho_c$ . U mjerenju i računanju doprinosa različitih oblika materije zato se koristi omjer komponenti prema toj kritičnoj gustoći. Također je zanimljivo proučiti kako se gustoća komponenti mijenja sa starošću svemira; u nekim najvažnijim modelima, u kojima vrijedi da je  $w$  konstantan, za promjenu gustoće svake od pojedinačnih komponenti vrijedi da je proporcionalna faktoru skale na neku potenciju. (Također, lako je pokazati da ova je potencija za nerelativističku materiju i radijaciju cijeli broj.) Ta potencija vezana je uz parametar jednadžbe stanja fluida:

$$p_i = w_i \rho_i, \quad (1.7)$$

pri čemu se  $i$  odnosi na različite komponente tako da vrijedi

$$\rho_i \propto a^{n_i}, \quad (1.8)$$

pri čemu je

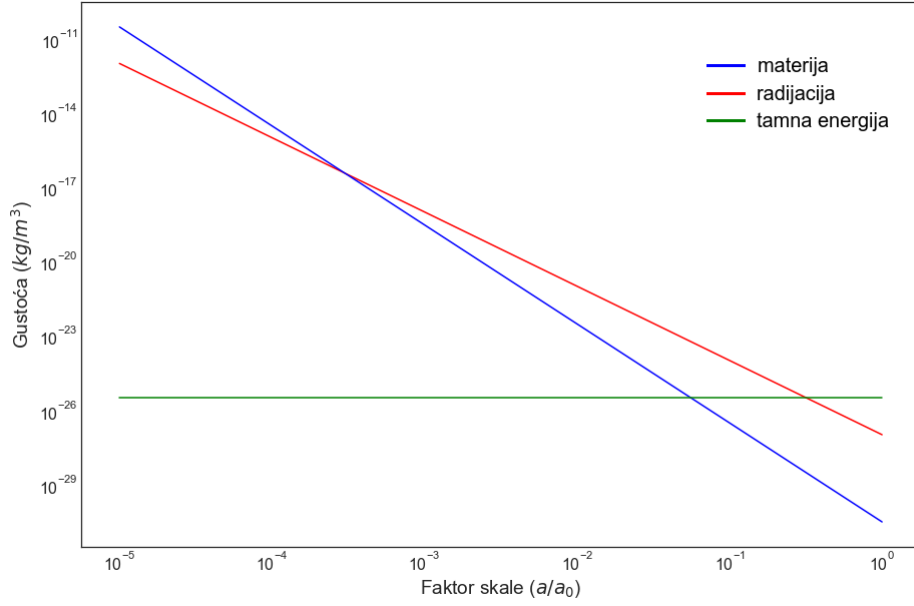
$$n_i = -3(1 + w_i). \quad (1.9)$$

Prilično je lako doći do vrijednosti za  $n_i$  i  $w_i$  za pojedine komponente gustoće energije. Tako je za običnu materiju jasno da, s obzirom da je masa u svemiru konstantna, vrijedi  $\rho_m \propto a^{-3}$ . Gustoća energije radijacije je slična uz dodatni faktor opadanja s veličinom svemira zbog crvenog pomaka tako da je  $\rho_r \propto a^{-4}$ .

Energija vakuuma je konstantna tako da vrijedi  $\rho_v \propto a^0$  što iz (1.9) daje  $w_v = -1$ , odnosno negativan tlak.

### 1.2.2 Kvintesencija

Kvintesencija je naziv za skalarno polje koje predstavlja jednu od hipoteza kojima se objašnjava tamna energija. Glavna razlika u odnosu na kozmološku konstantu je da je kvintesencija vremenski promjenjiva veličina. Ovaj je koncept prvi put predložen 1988. godine [22] u sklopu objašnjenja inflacije u ranom svemiru [23–25] i rezultata



Slika 1.1: Prikaz evolucije gustoće energije za različite komponente: materija, radijacija, energija vakuuma.

promatranja koji govore da je svemir ravan: s obzirom da je parametar ukupne gustoće (tamne i barionske) materije  $\Omega_M$  znatno manji od 1, diskrepancija se pokušala objasniti novom vrstom neluminiscentne materije čiji parametar gustoće bi bio jednak  $1 - \Omega_M$ . Sam termin "kvintesencija" (quintessence) prvi put je spomenut 1998. godine u radu koji se fokusirao na slučajeve gdje za parametar jednadžbe stanja  $w = p/\rho$  vrijedi  $-1 < w < 0$  s obzirom da se taj interval najbolje poklapa s rezultatima promatranja [26]. Ovaj je parametar bitan za svojstva tamne energije i kvintesencije. Prije svega, iz jednadžbe za akceleraciju (1.4) jasno je da mora vrijediti  $w < -1/3$  da bi širenje svemira bilo ubrzano. Dok kozmološku konstantu karakterizira  $w = -1$ , za modele kvitesencije je ključan režim kojim se  $w$  mijenja.

Kvintesencija se može opisati skalarnim poljem  $\phi$  tako da vrijedi:

$$p = \dot{\phi}^2/2 - V(\phi), \quad (1.10)$$

$$\rho = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi), \quad (1.11)$$

gdje je  $V(\phi)$  potencijal polja [27]. Situacija je slična inflaciji u ranom svemiru, s tim da ovdje u razmatranje treba uzeti i gustoću komponente nerelativističke materije zbog

toga što je ona ovdje usporediva s gustoćom tamne energije.

S obzirom da se  $w$  mijenja, modele kvintesencije možemo podijeliti na nekoliko klasa [28]: "otapajući" (*thawing*) i "smrzavajući" (*freezing*), u ovisnosti o tome u kojem dijelu vremenskog razvoja se  $w$  više mijenja. Pritom kod smrzavajućeg modela postoji i podklasa "pratećih" (*tracking*) modela [29]. Za mnoge od ovih modela pronađena su i analitička rješenja.

Primjer pratećih modela može se vidjeti u [30] čije je analitičko rješenje

$$w(a) = w_{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} w_{(0)} (1 - w_{(0)}^2)}{1(n+1)w_{(0)} + 2n(n+1)w_{(0)}^2} \left( \frac{\Omega_{\phi}(a)}{1 - \Omega_{\phi}(a)} \right)^n. \quad (1.12)$$

Zajednička značajka smrzavajućih modela općenito je takav razvoj tamne energije i parametra  $w$  u kojemu se skalarno polje u početku mijenja da bi se u kasnijoj fazi približilo vrijednosti kozmološke konstante. Primjer ove klase nalazi se u [31] gdje je predložen potencijal oblika

$$V(\phi) = V_1 e^{-\lambda_1 \phi / M_{pl}} + V_2 e^{-\lambda_2 \phi / M_{pl}}, \quad (1.13)$$

gdje su  $\lambda_i$  i  $V_i$  konstante.

Kod otapajućih modela ponašanje tamne energije odnosno kvintesencije je vrlo blisko kozmološkoj konstanti u ranoj fazi svemira da bi u kasnijem periodu došlo do razdvajanja. Primjer ove klase modela može se naći u [32] gdje je potencijal prikazan jednadžbom

$$V(\phi) = \mu^4 [1 + \cos(\phi / f_a)], \quad (1.14)$$

uz konstante  $\mu$  i  $f_a$ .

Modeli tamne energije za koje vrijedi  $w < -1$  zovu se modelima fantomske energije. Za ove modele karakteristično je da se fantomska energija ispoljava u kasnijoj fazi svemira. Tako bi za  $w = -3$  vrijedilo da će gustoća energije biti  $\rho \propto a^6$  [33].

Posebna skupina modela tamne energije koja se također temelji na skalarnom polju je k-esencija. Ovaj je pristup uveden kao pokušaj da se riješi problem koincidencije i finog podešavanja kozmoloških parametara. Po modelima k-esencije, negativni tlak je posljedica nelinearne kinetičke energije skalarnog polja čija je promjena rezultat pro-

mjene jednadžbe stanja koja se događa u pozadini [34]. U periodu dominantne radijacije, k-esencija prati parametar jednadžbe stanja radijacije, ali kad materija postane dominantna, parametar jednadžbe stanja k-esencije usporava svoj pad i asimptotski ide u vrijednost između -1 i 0.

### 1.2.3 Međudjelujuća tamna energija

Iako  $\Lambda$ CDM model dobro objašnjava rezultate aktualnih promatranja, i dalje su prisutni neki problemi. Jedan od njih je činjenica da su gustoća tamne energije i tamne materije danas istog reda veličine. Na prvi pogled ovo ne bi trebalo biti problematično, međutim, ukoliko bi tamna materija i tamna energija bile dvije potpuno neovisne pojave, njihov sadašnji omjer je neuobičajen. Drugim riječima, ukoliko je gustoća tamne energije konstantna, kako predviđa  $\Lambda$ CDM model, a gustoća tamne materije (i materije općenito) se mijenja s  $a^{-3}$ , to znači da bi njihove vrijednosti bile usporedive vremenskom intervalu koji je kratak u usporedbi sa starošću svemira. Činjenica da sada živimo u periodu kad je to slučaj se smatra koincidencijom.

Međutim, ovaj problem koincidencije bi se mogao razjasniti ukoliko tamna materija i tamna energija nisu potpuno neovisne pojave. U neku ruku, ova skupina modela je prijelaz između potpuno neovisnih tamne materije i tamne energije i modela ujedinjenja koji pokušavaju uspostaviti jedinstvene jednadžbe za obje pojave. Također, ovakvi modeli podrazumijevaju i vremenski promjenljivu gustoću tamne energije.

Jedan od predloženih modela pomoću kojeg se želi riješiti ovaj problem je sustav prijelaza tamne energije u tamnu materiju ili obratno [35]. Jednadžba kontinuiteta fluida

$$d\rho + 3\rho(1+w)\frac{da}{a} = 0 \quad (1.15)$$

u Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker metrici odnosi se na sumu svih oblika materije/energije pri čemu za svaki pojedini oblik možemo napisati

$$\dot{\rho}_i = -3H(1+w_i)\rho_i + Q_i, \quad (1.16)$$

pri čemu je  $\sum_i Q_i = 0$ . Naravno, različiti  $w_i$  se odnose na različite fluide:  $w_m = 0$  za

materiju (barionsku i tamnu),  $w_r = 1/3$  za radijaciju, a  $w_\Lambda = -1$  za tamnu energiju u obliku kozmološke konstante u okviru  $\Lambda$ CDM modela.

Gornju jednadžbu možemo interpretirati kao rezultat dva mehanizma: prvi je ponašanje gustoće energije kao posljedica tlaka i normalne ekspanzije prostora, dok je drugi može shvatiti kao prijenos energije među fluidima [36].

Na primjer, jedan od modela predložen u [35] je opći zakon raspada:

$$\dot{\rho}_\Lambda = -Q\rho_\Lambda^n, \quad (1.17)$$

gdje se  $Q$  može odrediti iz promatranja, dok je  $n$  parametar za različite modele. S obzirom da su svojstva obične, barionske materije poznata i da bi bilo lako detektirati njezin raspad i anihilaciju, isključena je mogućnost njezine značajne interakcije s tamnom energijom i prijelazi se razmatraju isključivo između tamne enerije i tamne materije.

Vrijednost koja se u ovom modelu pokazuje kao zanimljiva je  $n = 3/2$  i za nju je u kasnijoj fazi omjer  $\rho_m/\rho_\Lambda$  konstantan.

Prilikom istraživanja modela pokazalo se da će međudjelovanje između tamne materije i tamne energije imati posljedicu i na formiranje struktura, kao i na svojstva pozadinskog mikrovalnog zračenja [37]. U ovim procesima bitan je parametar jednadžbe stanja  $w$ : prilikom njegovog prelaska vrijednosti  $-1$  dolazi do perturbacija uzrokovanih nestabilnostima u ranoj fazi svemira. Zbog toga se u analizama često pribjegava odvojenim istraživanjima za područja  $w > -1$  i  $w < -1$  što može dovesti do toga da promaknu neki bitni rezultati. Međutim, pokazalo se da se uvođenjem međudjelovanja između tamne energije i tamne materije može doći do nekih stabilnijih rješenja koja će vrijediti za vrijednosti  $w$  i veće i manje od  $-1$  [38, 39].

#### 1.2.4 Modeli promjenjive tamne energije

Za razliku od tamne materije, za koju postoje kandidati koji se mogu proučavati u akceleratorima, glavni način proučavanja tamne energije sastoji se u kozmološkim promatranjima i pokušajima konstruiranja modela koji bi odgovarali rezultatima promatranja.  $\Lambda$ CDM kao prvi, najjednostavniji model konstantne tamne energije, već je spomenut. No, tokom dvadesetak godina proučavanja ovog fenomena iskristalizirali su se neki popularniji i jednostavniji modeli promjenjive tamne energije. Jedan od načina formu-

liranja ovih modela su jednadžbe stanja s nekoliko postavljenih parametara, najčešće u dimenziji parametra  $w$ . Općeniti oblik parametrizacije je

$$w(z) = \sum_n w_n x_n(z) \quad (1.18)$$

gdje su  $w_n$  konstante, tj. parametri, a  $x_n(z)$  funkcije crvenog pomaka.

Prvi model koji je dobro spomenuti je Chevallier–Polarski–Linder (CPL), razvijen u dva rada [40, 41]. Ubrzo nakon otkrića kasne akceleracije svemira postalo je jasno da se nova kozmologija više ne može ograničiti na "potragu za dva broja", već da je potrebno istražiti cijelu funkciju  $a(t)$  koja opisuje povijest svemira [41]. Ova se funkcija može prikazati kao

$$t(a) = \int_a^1 da' / (a'H) = \int_0^z dz' / [(1+z')H(z')]. \quad (1.19)$$

Problem s ovim izrazom je što, da bi se dobila tražena funkcija, iz izmjerenih podataka treba izračunati i derivaciju izmjerene udaljenosti, što dodatno otežavaju nepreciznosti u mjerenjima. Umjesto toga,  $H(z)$  se može odrediti uz pomoć gustoće  $\rho$  i parametra jednadžbe stanja  $w$ . U svrhu usporedbe modela, koristi se niz parametrizacija pri čemu je ona prva i najjednostavnija, a odnosi se na razvoj prvog reda jednadžbe stanja [42]:

$$w(z) = w_0 + w_1 z, \quad (1.20)$$

gdje je  $w_1 = (dw/dz)_0$ . Međutim, ova parametrizacija ne pokazuje dobra poklapanja s rezultatima promatranja za  $z > 1$ . Zbog toga je predložen novi model [40]:

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a). \quad (1.21)$$

Ova parametrizacija je pogodna iz više razloga: može se konstruirati jasan dvodimenzionalni prostor, u bliskoj povijesti (za mali  $z$ ) svodi na poznati linearni režim stabilne ekspanzije svemira, ima stabilno ponašanje u dalekoj prošlosti (na visokim  $z$ -ovima). Također, ovaj se model dobro poklapa s rezultatima promatranja.

Sljedeći zanimljivi model [43] nastao je iz potrebe da parametrizacija što bolje objasni kozmološke vrijednosti na visokim  $z$ -ovima, posebno u eri razdvajanja mate-

rije od zračenja ( $z \approx 1100$ ), zbog toga što bi vrijednost gustoće tamne energije u tom periodu mogla značajno utjecati na anizotropije u pozadinskom mikrovalnom zračenju kao i na formiranje struktura. Definiran je parametar  $b$  koji određuje odstupanje modela od kozmološke konstante. Konkretno,  $b$  se definira kao  $1/\ln(1+z_b)$  u ovisnosti o vrijednosti crvenog pomaka na kojem slabo promjenljiva jednačba stanja počinje više varirati. Kao rezultat, dobivamo parametrizaciju

$$w(z) = \frac{w_0}{1 + b \cdot \ln(1 + z)}. \quad (1.22)$$

Ova parametrizacija održava udio gustoće tamne energije  $\Omega_{de}$  između 0 i 1 i podrazumijeva negativnu jednačbu stanja ( $w < 0$ ). Također, za ovaj model, ukoliko je  $w_0$  blizu -1, za male vrijednosti crvenog pomaka i  $w(z)$  ostaje blizu -1.

U radu [44] predložen je model u kojemu su parametri izričito  $w_0 = w(0)$  i  $w_1 = (dw/dz)_0$ . Predložena je parametrizacija

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z(1+z)}{1+z^2}. \quad (1.23)$$

Kao i mnoge druge parametrizacije, i ova ima svojstvo ograničenog  $w$  kroz cijelu povijest svemira kao i linearnu promjenu parametra jednačbe stanja za mali  $z$ . Kako bi za velike vrijednosti crvenog pomaka tamna energija bila ne-dominantna, potrebno je ograničiti parametre na  $w_0 + w_1 < 0$ . U ovom režimu, Friedmanova jednačba glasi:

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_m^0 (1+z)^3 + (1 - \Omega_m^0) f(z)], \quad (1.24)$$

pri čemu je

$$f(z) = \frac{\rho_{de}}{\rho_{de}^0} = (1+z)^{3(1+w_0)} (1+z^2)^{3w_1/2}. \quad (1.25)$$

Ovaj model za  $\Omega_m^0 = 0,27$  daje ograničenje  $w_0 < 0,43$ . Također, u istom radu napravljena je usporedba modela s rezultatima promatranja (supernove Ia, barionske akustične oscilacije i anizotropije pozadinskog mikrovalnog zračenja). Dobivene su vrijednosti vrijednosti  $w_0 = -1,11$  i  $w_1 = 0,43$ , dok pouzdanost od 68,3% daje intervale  $-1,35 \leq w_0 \leq -0,86$  i  $-0,33 \leq w_1 \leq 0,91$ .

Čevrti model koji će ovdje biti spomenut predložen je u [45]. Ovdje se također

primarno gleda period kasnog svemira ( $z < 1$ ), a posebna se pažnja poklanja ograničenjima koja nameću rezultati promatranja. S obzirom da su prvotni podaci dobiveni mjerenjem udaljenosti supernova Ia bili opterećeni velikim nesigurnostima u mjerenju, posebnu pažnju autori su poklonili podacima vezanima uz mikrovalno pozadinsko zračenje [46, 47]. Posebno treba napomenuti da su u ranijem radu ovi autori usporedili ograničenja nametnuta podacima dobivenim iz pozadinskog zračenja i supernova Ia pri čemu je ispalo da se ta dva skupa ne preklapaju unutar intervala pouzdanosti od 68% [48]. Ovaj model postavljen je uz korištenje novijih mjerenja, kako supernova, tako i pozadinskog zračenja [49]. Upotrijebljene su dvije parametrizacije:

$$w(z) = w_0 + w'_0 \frac{z}{(1+z)^p}; \quad p = 1, 2. \quad (1.26)$$

Naravno, za  $p = 1$  dobivamo već spomenuti CPL dok za  $p = 2$  vrijedi  $w(\infty) = w_0$ .

### 1.2.5 Modificirana gravitacija

Iako je postojanje tamne energije gotovo najčešće korišten pristup, predloženo je više drugih objašnjenja ubrzanog širenja svemira. Jedan od skupova modela pretpostavlja neki modificirani oblik gravitacije koji bi bio drugačiji u odnosu na ono što znamo o gravitaciji na razini galaksije, zvjezdanih sustava ili manjim udaljenostima. Modificirana gravitacija se u različitim modelima primjenjuje kao alternativa i tamnoj materiji i tamnoj energiji. U principu, dok se modeli tamne energije bave istraživanjem i modificiranjem desne strane Einsteinove jednadžbe polja - tenzora impulsa i energije - teorije modificirane gravitacije se bave lijevom stranom, to jest modificiranjem same Teorije relativnosti [50].

Načina na koje se ovo može izvesti je mnogo: od uvođenja neke vrste mehanizma zasjenjenja, preko definiranja pete sile pa sve do uvođenja novih stupnjeva slobode u gravitacijskim poljima.

Postoji nekoliko klasa teorija modificirane gravitacije. Jedna od njih bavi se skalarno-tenzorskim poljima koja nastaju zbog djelovanja materije na metriku prostora, tako da čestice osjećaju nenevtonovske sile:

$$a = -\nabla(\Phi + \ln A(\phi)), \quad (1.27)$$



gdje je  $\Phi$  potencijal Einsteinovog referentnog okvira, dok je  $\phi$  skalarno polje. Jedna od glavnih skalar-tenzor teorija je Brans-Dickeova teorija. Ovdje je predložen novi formalizam u svrhu objašnjavanja Machovog principa dodavanjem dodanih dimenzija [51].

Dalje, tu su teorije membranskih svemira. Jedno od pitanja koje se ovdje postavlja je može li graviton biti masivna čestica. Naime, takva polja stvaraju Yukawin potencijal koji ima kraći domet od Newtonove gravitacije:

$$V(r) \sim \frac{e^{-mr}}{r}, \quad (1.28)$$

gdje je  $m \sim H_0$ . Srodna ovome je teorija masivne gravitacije [53–56]. Jedna od popularnijih teorija je DGP model koji se sastoji od 4-dimenzionalne membrane koja se nalazi u višedimenzionalnom prostoru [57]. Ako promatramo prostor unutar membrane, gravitacija se prenosi gravitonima koji na većim udaljenostima izlaze iz membrane u više dimenzije. Tu su i modeli zasjenjenja koji dozvoljavaju nove stupnjeve slobode gravitacijskih polja koji su na lokalnim udaljenostima zasjenjeni [58].

### 1.2.6 Alternativne teorije

Kao i modificirana gravitacija, i sve ostale teorije koje ne uključuju tamnu energiju motivirane su idejom da uvođenjem tamne energije, kako bi se objasnilo ubrzano širenje svemira, zapravo ništa nije objašnjeno: jednostavno je jedna misterija zamijenjena drugom [59]. Jedan od popularnijih alternativnih koncepata predstavio je Mordehai Milgrom 1983. godine pod nazivom MOND (Modified Newtonian Dynamics) [60]. Ovaj je koncept prvotno predstavljen kao alternativa tamnoj materiji, ali je kasnije proširen i na tamnu energiju [61]. Riječ je o ideji po kojoj se ponašanje orbitalnih brzina na rubovima galaktika, kao i gibanje jata galaktika pod utjecajem gravitacije, objašnjavaju drugačijom dinamikom na malim ubrzanjima. U sklopu MOND-a uvodi se akceleracijska konstanta  $a_0$  koja predstavlja granicu klasične mehanike. Sustavi kod kojih je akceleracija veća od  $a_0$  ponašaju se po pravilima Newtonove dinamike, dok oni gdje su akceleracije manje postaju invarijantni na promjenu skale vremena i udaljenosti [60]. Kao rezultat, povećavanje orbitalnog radijusa četiri puta rezultiralo bi povećanjem ophodnog vremena također četiri puta, a ne osam, kako diktiraju Keplerovi zakoni. Upravo je ova pojava "izravnavanja orbitalne brzine" uočena kod vanjskih dijelova galaktika.

Temelj ove klase teorija je da se, umjesto Newtonovog zakona gravitacije, primjerice, za sferno simetrični sustav

$$a = M \frac{G}{r^2}, \quad (1.29)$$

predlaže:

$$a\mu(a/a_0) = M \frac{G}{r^2}, \quad (1.30)$$

takav da je za velike akceleracije, gdje je  $a$  puno veći od  $a_0$ ,  $\mu$  blizu jedinice, dok je za male akceleracije  $\mu(x) = x$ .

Još jedna teorija koja zaobilazi pojmove tamne materije i tamne energije je pojavna gravitacija ("emergent gravity"), usko vezana uz teoriju struna i holografski princip [62]. Ova teorija opisuje gravitaciju kao posljedicu količine informacije vezane uz materiju u nekom dijelu prostora, mjerena entropijom. Po tom principu, gravitacijska sila bila bi posljedica promjene entropije u slučaju kad masa mijenja položaj.

Također, teorija nesimetrične gravitacije (NGT), nastala još krajem 1970-ih, pokušava objasniti rotacijske krivulje galaktika korekcijom Opće relativnosti [63].

Ovdje su spomenuti samo neki prijedlozi kojima se pokušavaju razjasniti tamna energija - i samo ubrzano širenje svemira - te tamna materija. Naravno, modela i teorija je previše da bi ih se nabrojalo sve, zato su ovdje navedene samo njihove najvažnije klase. U ostatku rada izložen je konkretni formalizam proučavanja tamne energije preko kvadrata brzine zvuka kao funkcije parametra jednadžbe stanja uz proučavanje određenog broja pokaznih primjera i donošenje zaključaka na temelju tih primjera, a u svrhu prikazivanja korisnosti metode.

### **1.3 Metoda modeliranja brzina zvuka kao funkcije parametra $w$**

Parametar jednadžbe stanja  $w = p/\rho$  jedan je od ključnih parametara koji se razmatraju u ovom radu. Njegova važnost ogleda se već u Friedmannovoj jednadžbi akceleracije

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3}(1 + 3w),$$

gdje je jasno da upravo taj parametar diktira ponašanje ekspanzije svemira. Ako je

$w > -1/3$ , širenje će usporavati, a ako je  $w < -1/3$ , širenje će ubrzavati. Zbog toga velik broj modela u sklopu analize provjerava kako se ovaj parametar ponaša s protokom vremena, to jest promjenom faktora skale  $a$ , odnosno crvenog pomaka  $z$ .

Najjednostavniji slučaj,  $\Lambda$ CDM, pretpostavlja da je  $w = -1$  kroz cijelu povijest sve-mira, no već je spomenuto da taj model dolazi u tenziju s nekim rezultatima promatranja [64, 65]. Zbog toga se razmatraju i složeniji modeli na način da se pokušava konstruirati funkcija  $w(z)$  (ili  $w(a)$ ) pri čemu se postavlja određen broj parametara koji se onda pokušavaju odabrati tako da dobivena funkcija što više odgovara rezultatima promatranja.

Ovaj smjer analize provodi se usporedno s proučavanjem brzine zvuka uz pretpostavku da se tamna energija ponaša kao barotropski fluid (ili bar da se neka njena svojstva mogu izraziti preko brzine zvuka). Zbog toga će se u ovom radu veličine  $w$  i  $c_s^2$  neprestano ispreplitati. Barotropski fluid definiran je kao onaj fluid čiji tlak ovisi isključivo o gustoći.

U konstruiranju i analizi parametarskih jednadžbi korisno će biti nekoliko izraza [66] koji se izvode iz definicije brzine zvuka

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (1.31)$$

i općeg oblika jednadžbe stanja

$$F(\rho, p) = 0. \quad (1.32)$$

Koristeći gornje izraze i jednadžbu kontinuiteta fluida (1.15) dobivamo

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dw}{c_s^2 - w} \quad (1.33)$$

i

$$\frac{dw}{(c_s^2 - w)(1 + w)} = -3\frac{da}{a}. \quad (1.34)$$

Prilikom modeliranja  $c_s^2$  kao  $c_s^2(w)$ , s obzirom da je riječ o brzini zvuka fluida, ključno je nekoliko svojstava [66]:

- $c_s^2$  mora biti pozitivan i manji od kvadrata brzine svjetlosti  $c^2$ ;

- Svojstva rješenja (1.34) ovisit će o nultočkama funkcije  $c_s^2 - w$ ;
- Dinamika funkcije  $w(z)$  događa se u intervalu između nultočaka funkcije  $c_s^2 - w$  i  $w = -1$ ;
- Zbog faktora  $1 + w$  u nazivniku, u točki  $w = -1$  će najčešće dolaziti do singulariteta, čije će prelaženje biti jedno od pitanja u ovom radu.

## 1.4 Ciljevi, hipoteze i struktura disertacije

S obzirom da se o prirodi tamne energije još uvijek zna jako malo, postoji velik broj metoda kojima se pokušavaju odrediti njezina svojstva. Jedan od njih temelji se na mogućnosti da se tamna energija ponaša kao barotropski fluid. S tim u vezi razmatra se jednačba stanja takvog fluida. Međutim, za razliku od uobičajenijih pristupa, kad se jednačba stanja definira više ili manje eksplicitno, gdje je tlak funkcija gustoće ili obrnuto, ovdje će se naglasak staviti na implicitnu jednačbu stanja gdje će se brzina zvuka  $c_s$  (to jest, njezin kvadrat) promatrati kao funkcija omjera tlaka i gustoće, što se definira kao parametar  $w$ . Dalje, kako se ne bi ograničavalo na, za sada, još uvijek neprovjerljivi koncept tamne energije kao barotropskog fluida, formalizam je ustanovljen na općenitijoj razini pri čemu se  $dp/d\rho$ , bez obzira je li riječ o fizikalnoj veličini kvadrata brzine zvuka ili samo o apstraktnijem računskom konstrukt, proučava kao funkcija parametra  $w$ , to jest  $p/\rho$ .

Dakle, treba imati na umu da svaki put kad se spomene "implicitna jednačba stanja tamnog fluida", općenito se misli na funkciju

$$c_s^2(w) = \frac{dp}{d\rho} \left( \frac{p}{\rho} \right). \quad (1.35)$$

Cilj je ovog rada istražiti svojstva  $c_s^2(w)$  formalizma, utvrditi koja su njegova ograničenja, kao i kakvi se sve rezultati njime mogu postići.

Istraživanje formalizma izvodi se proučavanjem određenog broja modela tamne materije i tamne energije s određenim svojstvima i razmatranjem prihvatljivosti rezultata. Primjeri modela koji će se ovdje razmatrati obuhvaćaju modele u kojima se događa prijelaz granice kozmološke konstante, kao i neke modele ujedinjenja tamne materije i tamne energije.

Također, jedan od ciljeva ovog rada je istražiti vezu uvedenih modela s mikroskopskim formulacijama, osobito s formalizmom teorije polja. Jedno od najvećih otvorenih pitanja u modernoj kozmologiji je povezivanje istraživanja i rezultata na ekstremno malim i ekstremno velikim skalama. Zbog toga se formalizam  $c_s^2(w)$  promatra i kroz formulaciju Lagrangeove teorije polja.

U svjetlu modela ujedinjenja tamne materije i tamne energije koji su dobiveni u ovom formalizmu, sljedeći cilj je razmatranje primjene tih modela u modeliranju i analizi sferno simetričnih sustava. Naime, poznato je da se tamna materija okuplja u sferno simetrične sustave reda veličine galaktika i grozdova galaktika i zanimljivo je istražiti poklapanje dobivenih modela s ovakvim ponašanjem.

S obzirom da su tamna materija i tamna energija u ovom trenutku u najvećem dijelu u svojoj biti nerazjašnjene pojave, a istovremeno čine oko 95% građe svemira, od velikog je značaja razvijanje novih pristupa njihovom proučavanju. Predloženi formalizam preko brzine zvuka kao funkcije parametra jednadžbe stanja trebao bi dati novi uvid u rezultate kozmoloških promatranja i omogućiti usporedbu brojnih skupova podataka koji su danas dostupni s fundamentalnim pristupima u teorijskoj fizici.

Uz navedene ciljeve u istraživanju modela i svojstava tamne energije, jedan od ključnih ciljeva ovog rada je metodološko uvođenje novog tipa modeliranja tamne energije i tamne materije. Tako će se provesti će se demonstracija pristupa na većem broju primjera i grupama primjera i na njihovim rezultatima pokazati dometi pristupa i njegova primjena na spomenuta važna pitanja u kozmologiji. Također, bit će i riječi o samim modelima koji su ovim pristupom uspostavljeni.

Hipoteze koje se ovim radom žele dokazati obuhvaćaju metodološku vrijednost formalizma  $c_s^2(w)$ : njegovo otvaranje mogućnosti za modeliranje tamne energije, tamne materije i njihovog eventualnog ujedinjenja. Također, želi se ispitati mogu li modeli u ovom formalizmu dati bolja objašnjenja rezultata promatranja u odnosu na postojeće modele. Isto tako, želi se ispitati hipoteza da se u okviru ovog formalizma mogu pronaći ekvivalentne mikroskopske formulacije u formalizmu teorije polja. Ovaj rad ima sljedeću strukturu:

U uvodnom dijelu dan je pregled dosadašnjih istraživanja i spoznaja vezanih uz tamnu materiju i tamnu energiju.

U drugom poglavlju uveden je generalizirani model prijelaza granice kozmološke

konstante, iznesena je analiza modela i fizikalnih veličina od interesa - tlaka i gustoće tamne energije te parametra  $w$  i kvadrata same brzine zvuka - i proučeni su parametarski režimi za određen broj kombinacija analitičkih parametara. Pokazano je kako u nekim parametarskim režimima dolazi do prijelaza granice kozmološke konstante i teorijske reprodukcije rezultata kozmoloških promatranja. Također, u ovom su dijelu neke kombinacije parametara uspoređene s istraživanjem [67] u kojemu je na temelju većeg broja skupova podataka napravljena modelski neovisna prilagodba podacima.

U trećem poglavlju uz pomoć uvedenog formalizma  $c_s^2(w)$  konstruira se model ujedinjenja tamne materije (DM) i tamne energije (DE) i analiziraju se njegova svojstva. Model, opet u ovisnosti o parametrima, pokazuje različite modalitete ovog ujedinjenja: fantomska energija - tamna materija, tamna materija - tamna energija koja simptomski teži prema  $w_*$  i tamna materija - tamna energija - tamna materija. Također, u određenim parametarskim režimima ovaj model za vrijednosti  $a$  blizu  $a_0$  ponaša slično modelu  $\Lambda$ CDM u smislu da se njegovi parametri - najvažnije, parametar  $w$  - ponašaju u skladu s  $\Lambda$ CDM modelom. Također, određena su i ograničenja parametara ovog modela.

U četvrtom poglavlju iznesena je analiza tridesetak postojećih parametrizacija tamne energije u danom  $c_s^2(w)$  formalizmu i provjera zadovoljavaju li svojstva barotropskog fluida. Ovdje je kroz nekoliko analitičkih metoda razvijen postupak utvrđivanja dozvoljava li bilo koji model, ukoliko je definiran preko  $c_s^2$  i parametra jednadžbe stanja  $w$ , da se tamna energija ponaša kao barotropski fluid preko standardnih uvjeta: da brzina zvuka ni u jednom trenutku ne bude veća od brzine svjetlosti te da njen kvadrat ni u jednom trenutku ne bude manji od nule.

U petom poglavlju formalizam  $c_s^2$  povezan je s Lagrangeovom teorijom polja i modelima k-esencije. Uspostavljena je procedura računanja gustoće Lagrangiana čisto kinetičke k-esencije iz modela definiranog u  $c_s^2(w)$  formalizmu i konstruirano je nekoliko analitički rješivih modela za kinetičku k-esenciju.

U šestom poglavlju obavljena je analiza mjerenja orbitalnih brzina objekata u galaktici Mliječni put objavljenih u [68]. Provedena je analiza rezultata na modelski neovisan način. Pronađene su vrijednosti za  $c_s^2$  i izračunati pripadajući intervali pouzdanosti te su rezultati uspoređeni s temeljnim uvjetima za tamnu materiju kao barotropski fluid.

U posljednjem, sedmom poglavlju, sumiraju se rezultati i zaključci te se navode neriješena pitanja i mogući daljnji i novi smjerovi istraživanja.

## 2 Tranzijentna tamna energija i prijelaz granice kozmološke konstante

U ovom poglavlju prati se izlaganje istraživanja objavljenih u [69]. Ovdje ćemo uspostavljeni formalizam upotrijebiti u praksi, proučavajući nekoliko modela i analizirajući dobivene rezultate. Prvi model koji se koristi kao primjer je primjer tranzijentne tamne energije. Također, ovdje ćemo se dotaknuti i nekoliko mogućih budućih ishoda kao što su budućí singulariteti, tj. Veliko razdiranje ("Big Rip") [70], te Malo razdiranje ("Small Rip") [71]. Veliko razdiranje podrazumijeva singularitet u nekom konačnom vremenu, to jest singularno povećanje faktora u nekom konkretnom trenutku u budućnosti. S druge strane, kod Malog razdiranja ne bi došlo do singulariteta u nekom konačnom vremenu, ali bi se rast svemira i dalje ubrzavao što bi također u budućnosti za posljedicu imalo raspad struktura. No, prije toga treba utvrditi hoće li se, po ovim modelima, akceleracija uopće nastaviti ili postoje slučajevi kad je riječ o prolaznoj pojavi.

Tranzijentna kozmička akceleracija već je obrađena u više radova [72–76]. Ono što je opći slučaj je da se komponente kozmičkih fluida izmjenjuju u tome koja je dominantna. Tako je, s obzirom na prijelaz širenja svemira s usporavanja na ubrzavanje, do sada slučaj da se dominacija premješta prema komponentama s manjim parametrom jednadžbe stanja: od radijacije preko nerelativističke materije do tamne energije, pri čemu se njihova gustoća konzistentno mijenja s faktorom skale.

Međutim, u ovom poglavlju bavit ćemo se i takvim razvojem svemira u kojemu će gustoća tamne energije najprije rasti, a onda se smanjivati. Zbog toga ćemo je nazvati tranzijentna tamna energija. Ono što treba razjasniti je da se tranzijentna akceleracija i tranzijentna tamna energija ne moraju uvijek poklapati: pojam tranzijentne tamne energije odnosi se na slučaj kad se gustoća tamne energije povećava do nekog maksimuma, a onda, dalje s vremenom, opet opada. Tranzijentna akceleracija označava pojavu kad ekspanzija svemira ubrzava unutar ograničenog perioda, a onda ponovo prijeđe u usporeno širenje. Hoće li svemir ubrzavati ovisit će, o fazi u razvoju svemira, ali i o gustoći ostalih komponenti: za akceleraciju svemira bitno je da je ukupni parametar  $w$  - dakle težinski sumiran kroz sve komponente - manji od  $-1/3$ .

Ako se jednadžba kontinuiteta (1.15) napiše kao

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{da}{a},$$

jasno je da se ekstremna vrijednost funkcije gustoće događa kad je  $w = -1$ . Zbog toga ćemo se ovdje baviti upravo prijelazom parametra jednadžbe stanja preko ove vrijednosti, i ne samo to: zbog ove činjenice pokazuje se da svako proučavanje tranzijentne tamne energije mora uzeti u obzir prijelaz granice kozmološke konstante.

Više o samom prijelazu kozmološke konstante može se naći u [77]. U [78] pokazano je da je i uz implicitno definiranje jednadžbe stanja moguć prijelaz granice kozmološke konstante. Međutim, ovaj pristup nije uvijek praktičan. Zato ćemo ovdje upotrijebiti modeliranje brzine zvuka kozmičkog fluida kao funkcije parametra jednadžbe stanja, dakle  $c_s^2 = c_s^2(w)$ .

Ovakvim modeliranjem želimo postići nekoliko stvari: istražiti pojavu prijelaza kozmološke konstante, konstruirati model tranzijentne tamne energije te usporediti svojstva dobivenog modela s rezultatima promatranja objavljenima i obrađenima u [67].

Također, u proučavanju tamne energije, oslanjat ćemo se na opis ove komponente kao barotropskog fluida. Razlog tome je što je riječ o najjednostavnijoj opciji s obzirom da je barotropski fluid opis koji se koristi i kod ostalih komponenti: zračenja i nerelativističke materije. Također, na ovaj ćemo način provjeriti konzistentnost ovog pristupa te provjeriti njegove eventualne slabe točke. Isto tako, ovakav se opis veže i na druge smjere istraživanja: pošto je barotropski fluid koncept koji je već poprilično proučen kroz razvoj fizike, potvrda da i tamna energija spada u ovu kategoriju dala bi informaciju o mnogim drugim njenim svojstvima koja za sada nisu potvrđena.

## 2.1 Formalizam

Sama funkcija je nadogradnja modela s konstantnim parametrom jednadžbe stanja, to jest njegove generalizirane korekcije:

$$c_s^2(w) = w + A(1+w)^B. \quad (2.36)$$

Naime, uz dovoljno mali  $A$ , dolazimo do  $c_s^2(w) = w$  što onda vodi do konstantnog  $w$ . U proučavanju ovog modela pokazalo se da je iznimno korisno ograničiti parametar



$B$  na omjer dva neparna broja, to jest  $B = \frac{2n+1}{2m+1}$ . Ovo ograničenje će omogućiti da sve funkcije budu dobro definirane za cijeli interval koji proučavamo. S druge strane, ovakav postupak omogućuje da svaka iracionalna vrijednost parametra  $B$  bude predstavljena dovoljno bliskom aproksimacijom s obzirom da za svaki iracionalan broj možemo pronaći dovoljno blizak racionalan broj ovog oblika.

Ako model (2.36) uvrstimo u (1.15), dobit ćemo

$$a \frac{dw}{da} = -3A(1+w)^{B+1}. \quad (2.37)$$

Za  $B$  definiran kao  $B = \frac{2n+1}{2m+1}$  dobit ćemo eksponent  $B+1 = \frac{2(m+n+1)}{2n+1}$ . S obzirom da je riječ o parnom eksponentu, jasno je da jednačba i  $\frac{dw}{da}$  ne mijenjaju predznak čak ni prelaskom  $w$  preko vrijednosti  $-1$  gdje faktor  $(1+w)$  mijenja predznak.

Za  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  i  $B \neq 1$  dobivamo

$$w = -1 + \left[ (1+w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a}{a_0} \right]^{-\frac{1}{B}}. \quad (2.38)$$

Integracijom (1.33) dobivamo

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{(1+w)^{-B+1} - (1+w_0)^{-B+1}}{A(-B+1)}}. \quad (2.39)$$

Kombiniranjem dva prethodna izraza dobivamo jednačbu za ovisnost gustoće energije o faktoru skale:

$$\rho = \rho_0 e^{\left[ \frac{1}{A(1-B)} \left[ (1+w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a}{a_0} \right]^{-\frac{B-1}{B}} - (1+w_0)^{-B+1} \right]}. \quad (2.40)$$

Za posebne slučajeve vrijede druga rješenja. Konkretno,  $B = 0$  se uopće ne razmatra jer ne ulazi u skup  $B = \frac{2n+1}{2m+1}$ , dok su rješenja za  $B = 1$  jednostavnija:  $w(a)$  se dobiva izravno iz jednačbe (2.38), a integracija daje

$$\rho = \rho_0 \left| \frac{1+w}{1+w_0} \right|. \quad (2.41)$$

Na kraju, za brzinu zvuka dobivamo

$$c_s^2 = -1 + \left[ (1 + w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a}{a_0} \right]^{-\frac{1}{B}} + A \left[ (1 + w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a}{a_0} \right]^{-1}. \quad (2.42)$$

S obzirom da se bavimo analitičkim funkcijama, od najvećeg su interesa ponašanje gustoće tamne energije, kao i faktora skale s vremenom.

Ukoliko tamna energija dominira, u Friedmannovoj jednačini

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (2.43)$$

možemo zanemariti ostale komponente i tada je se, uz pomoć eksplicitnog rješenja iz (2.40), može napisati kao

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \frac{a}{a_0} \right) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_0} e^{\frac{1}{2A(1-B)}} \left[ \left[ (1+w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a}{a_0} \right]^{\frac{B-1}{B}} - (1+w_0)^{1-B} \right]. \quad (2.44)$$

Radi lakšeg rješavanja i analize, napraviti ćemo supstituciju

$$y = (1 + w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a}{a_0},$$

tako da (2.44) sada glasi

$$\frac{dy}{dt} = 3AB \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_0} e^{-\frac{(1+w_0)^{1-B}}{2A(1-B)}} e^{\frac{1}{2A(1-B)} y} \frac{B-1}{B}. \quad (2.45)$$

Naravno, ono što nas najviše zanima je ovisnost  $a(t)$  koja se ne može dobiti analitički.

Umjesto toga, tražimo  $t(a)$

$$t - \tilde{t} = \frac{1}{3AB} \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_0}} e^{\frac{(1+w_0)^{1-B}}{2A(1-B)}} \int_{(1+w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{\tilde{a}}{a_0}}^{(1+w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a}{a_0}} e^{-\frac{1}{2A(1-B)} y} \frac{B-1}{B} dy. \quad (2.46)$$

Ovaj rezultat vrijedi za interval  $(\tilde{a}, a)$  u kojemu je komponenta tamne energije dominantna. Također,  $\tilde{t}$  je vrijeme koje odgovara faktoru skale  $\tilde{a}$ .

U ovom modelu uočeno je nekoliko mogućih rješenja za dinamiku svemira. Jedna mogućnost je ravnomjeran rast faktora skale s vremenom pri čemu u konačnom vre-

menu ne dolazi do singulariteta pri čemu je, ovisno o konkretnim vrijednostima parametara, moguće da dođe do Malog razdiranja. Međutim, druga mogućnost je da u nekom konačnom trenutku  $a$  postigne beskonačnu vrijednost što bi onda dovelo do Velikog razdiranja.

Radi jednostavnosti, prilikom računanja možemo postaviti konstante na način da je  $\tilde{a} = a_*$ , gdje je  $(1 + w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a_*}{a_0} = 0$ . S obzirom da iz  $B = \frac{2n+1}{2m+1}$  proizlazi  $(-1)^{\frac{B-1}{B}} = 1$ , možemo napisati:

$$t_\infty - t_* = \frac{1}{3|AB|} \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0}} e^{\frac{(1+w_0)^{1-B}}{2A(1-B)}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2A(1-B)}y} y^{\frac{B-1}{B}} dy. \quad (2.47)$$

Iz ovoga se može izvesti nekoliko zaključaka o ovisnosti rješenja o vrijednostima  $A$  i  $B$ :

1. za  $A(1 - B) < 0$  (to jest  $A > 0$  i  $B > 1$  ili  $A < 0$  i  $B < 1$ )

$$t_\infty = \infty.$$

Dakle, nema singulariteta, a rast u konačnom vremenu je monoton i nesingularan.

2. za  $A(1 - B) > 0$  imamo dva slučaja:

- (a) za  $\frac{B-1}{B} > 0$  (to jest  $A < 0$  i  $B > 1$  ili  $A > 0$  i  $B < 0$ ) dobivamo

$$t_\infty = t_* + \frac{1}{3|AB|} \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0}} e^{\frac{(1+w_0)^{1-B}}{2A(1-B)}} \frac{B}{B-1} (2A(1-B))^{\frac{B}{B-1}} \Gamma\left(\frac{B}{B-1}\right). \quad (2.48)$$

Dakle, u konačnom vremenu faktor skale će postati beskonačan, to jest u nekom trenutku dolazi do singulariteta.

- (b) za  $\frac{B}{B-1} < 0$  (to jest  $A > 0, 0 < B < 1$ )

$$t_\infty = \infty.$$

Kao i u prvom slučaju, vrijeme potrebno za postizanje beskonačnog faktora skale je beskonačno, dakle u ovom slučaju nema singulariteta.

## 2.2 Reprezentacija preko skalarnog polja

U dosadašnjem razmatranju bavili smo se ovim modelom u smislu proučavanja eksplicitnih i implicitnih funkcija gustoće tamne energije i faktora skale u ovisnosti o vremenu. Međutim, ovaj pristup govori o ponašanju relevantnih veličina samo na velikoj skali. Ukoliko želimo ovaj model povezati s mikroskopskim veličinama, treba ovaj model sagledati u okviru teorije polja. U razmatranju ćemo opet krenuti od jednadžbe (2.36).

Za minimalno vezano skalarno polje kvintesencije ( $w > -1$ ), gustoća Lagrangiana ima oblik

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi),$$

a gustoća energije i tlak izražavaju se kao

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (2.49)$$

i

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (2.50)$$

Uvrštavanjem ove dvije jednadžbe u (1.34) dolazimo do izraza koji povezuje  $\phi$  i  $w$ :

$$d\phi = \mp \frac{1}{\sqrt{24\pi G} (c_s^2 - w)\sqrt{1+w}}, \quad (2.51)$$

i, za naš model

$$\phi - \phi_0 = \mp \frac{1}{\sqrt{24\pi G A} (-B + \frac{1}{2})} \left( (1+w)^{-B+\frac{1}{2}} - (1+w_0)^{-B+\frac{1}{2}} \right). \quad (2.52)$$

Ono što nam treba je izraz za  $w$ :

$$w = -1 + \left( (1+w_0)^{-B+\frac{1}{2}} \mp \sqrt{24\pi G A} \left( -B + \frac{1}{2} \right) (\phi - \phi_0) \right)^{\frac{1}{-B+\frac{1}{2}}}. \quad (2.53)$$

Na kraju za potencijal dobivamo izraz

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= \frac{\rho_0}{2} \left[ 2 - \left[ (1+w_0)^{-B+\frac{1}{2}} \mp \sqrt{24\pi GA} \left( -B + \frac{1}{2} \right) (\phi - \phi_0) \right]^{\frac{1}{-B+\frac{1}{2}}} \right] \\
&\times e^{\frac{1}{A(1-B)} \left[ \left[ (1+w_0)^{-B+\frac{1}{2}} \mp \sqrt{24\pi GA} \left( -B + \frac{1}{2} \right) (\phi - \phi_0) \right]^{\frac{-B+1}{-B+\frac{1}{2}}} - (1+w_0)^{-B+1} \right]}. \quad (2.54)
\end{aligned}$$

Sličnu analizu provodimo za skalarno polje kad tamna energija ima svojstva fantomske energije ( $w < -1$ ). Ovdje gustoća Lagrangiana ima oblik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi).$$

Gustoća energije i tlak su sada

$$\rho_\phi = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (2.55)$$

i

$$p_\phi = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (2.56)$$

Uvrštavanjem ovih izraza u (1.34) dobivamo

$$d\phi = \pm \frac{1}{\sqrt{24\pi G}} \frac{dw}{(c_s^2 - w)\sqrt{-1 - w}}. \quad (2.57)$$

Uz  $(-1)^B = -1$ , integracija prethodnog izraza daje

$$\phi - \phi_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{24\pi GA}} \frac{1}{-B + \frac{1}{2}} \left( (-1 - w)^{-B+\frac{1}{2}} - (-1 - w_0)^{-B+\frac{1}{2}} \right), \quad (2.58)$$

i

$$w = -1 - \left( (-1 - w_0)^{-B+\frac{1}{2}} \pm \sqrt{24\pi GA} \left( -B + \frac{1}{2} \right) (\phi - \phi_0) \right)^{\frac{1}{-B+\frac{1}{2}}}, \quad (2.59)$$

tako da je na kraju potencijal skalarnog polja dan izrazom

$$V(\phi) = \frac{\rho_0}{2} \left[ 2 + \left[ (-1 - w_0)^{-B+\frac{1}{2}} \pm \sqrt{24\pi GA} \left( -B + \frac{1}{2} \right) (\phi - \phi_0) \right]^{\frac{1}{-B+\frac{1}{2}}} \right] \\ \times e^{\frac{1}{A(1-B)} \left[ \left[ (-1 - w_0)^{-B+\frac{1}{2}} \pm \sqrt{24\pi GA} \left( -B + \frac{1}{2} \right) (\phi - \phi_0) \right]^{\frac{-B+1}{-B+\frac{1}{2}}} - (-1 - w_0)^{-B+1} \right]}. \quad (2.60)$$

Dobro je još jednom naglasiti da su ovo parcijalni efektivni opisi: prvi vrijedi samo ako je  $w > -1$ , a drugi samo ako je  $w < 1$ .

### 2.3 Analiza modela po parametarskom prostoru i prijelaz granice kozmološke konstante

Model koji se ovdje analizira ima nekoliko slobodnih parametara:  $A$ ,  $B$  i  $w_0$ . U ovisnosti o tim parametrima, funkcije gustoće, tlaka, parametra jednadžbe stanja  $w$  i brzine zvuka  $c_s^2$  imaju više različitih oblika ponašanja. Dalje, ova tri parametra daju ukupno 12 relevantnih područja u parametarskom prostoru.

1. Za  $A$  može vrijediti:  $A > 0$  ili  $A < 0$
2. Za  $B$  može vrijediti:  $B > 1$ ,  $0 < B < 1$  ili  $B < 0$
3. Za  $w_0$  može vrijediti:  $w_0 < -1$  ili  $w_0 > -1$

Također, posebno nam je zanimljiva vrijednost faktora skale  $a$  za koju vrijedi

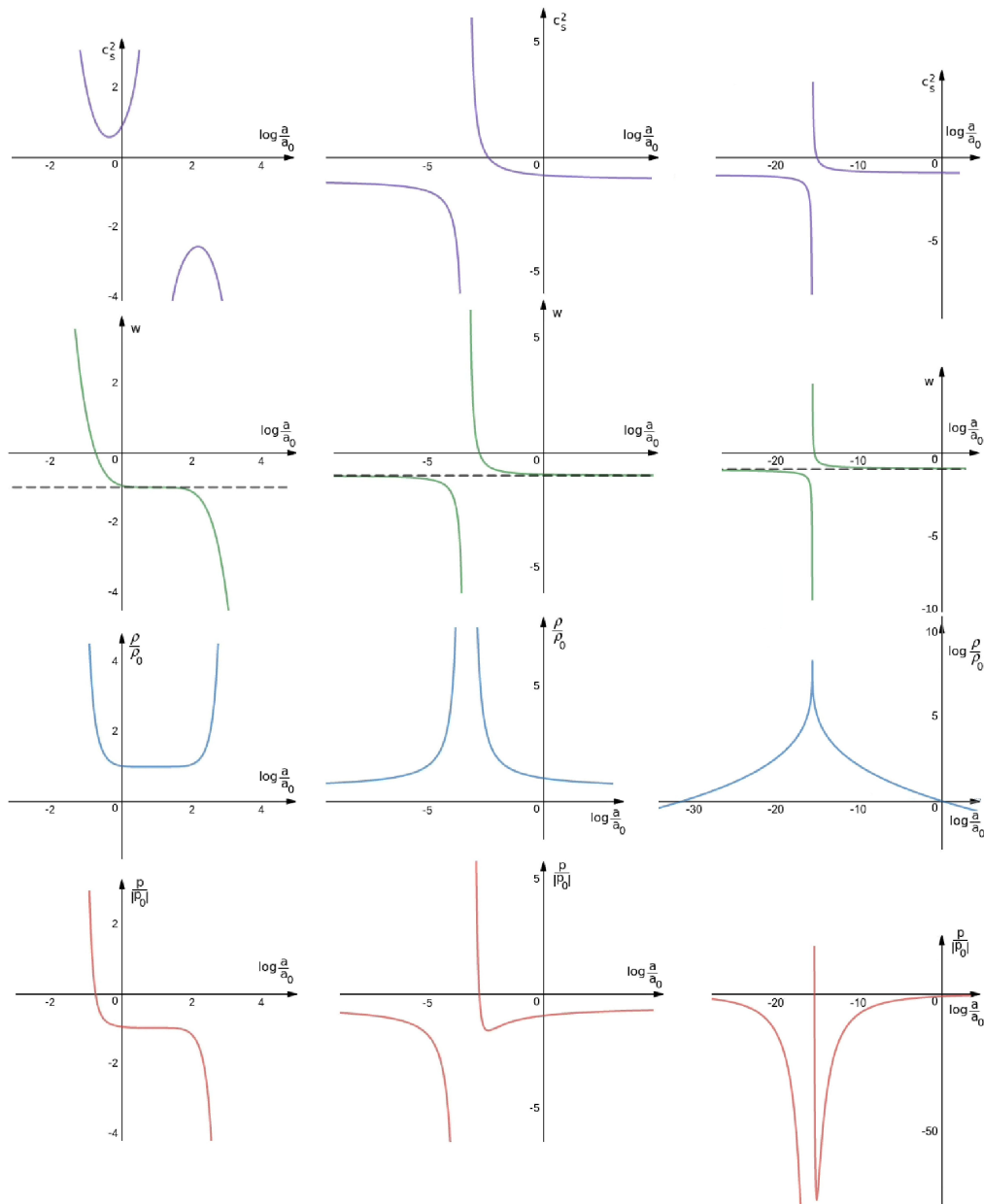
$$(1 + w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a_*}{a_0} = 0$$

to jest

$$a_* = a_0 e^{-\frac{(1+w_0)^{-B}}{3AB}}. \quad (2.61)$$

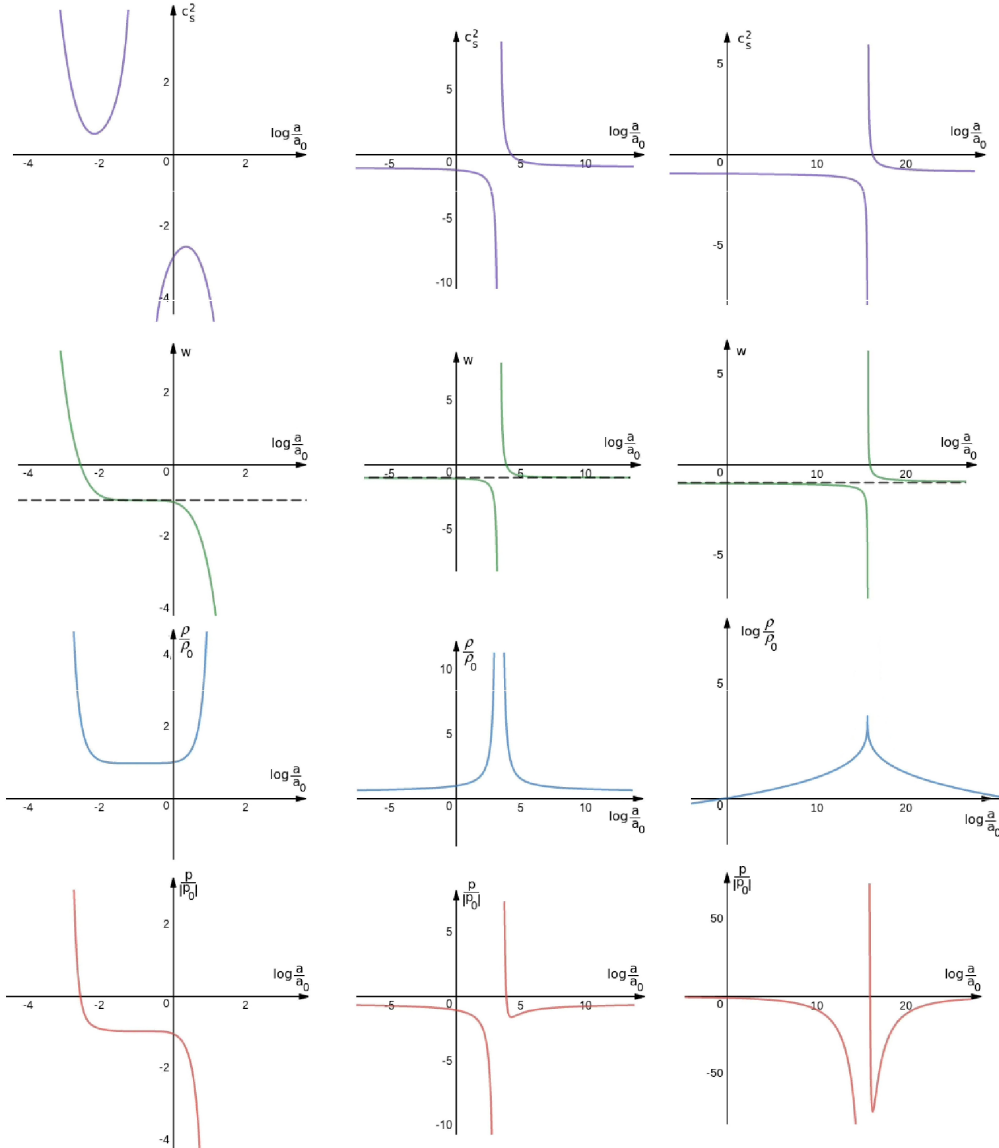
Uvidom u grafove vidljivo je da varijacija parametra  $w_0$  za posljedicu ima samo translaciju ove četiri vrijednosti ( $\rho$ ,  $p$ ,  $c_s^2$  i  $w$ ) po osi  $x$ . Zbog toga ćemo više pažnje posvetiti ovisnosti općeg ponašanja ovih funkcija o parametarskom prostoru  $A$  i  $B$ . Ovdje postoji šest kombinacija:

- $A > 0$ ,  $B < 0$



Slika 2.2: Grafički prikaz kozmičkih veličina u ovisnosti o parametrima i faktoru skale  $a$ . Prvi red: kvadrat brzine zvuka  $c_s^2$ . Drugi red: parametar jednadžbe stanja  $w$ . Treći red: gustoća energije normalizirana na današnju vrijednost  $\rho/\rho_0$ . Četvrti red: tlak normaliziran na sadašnju apsolutnu vrijednosti  $p/|p_0|$ . Parametri:  $A = 1$  i  $w_0 = -0.95$ . Za lijevi stupac vrijedi  $B = -1/5$ , za srednji stupac vrijedi  $B = 3/5$  dok za desni stupac vrijedi  $B = 7/5$ . Na svim grafovima os  $x$  je izražena u logaritamskoj skali, a os  $y$  u linearnoj, osim posljednjeg stupca za  $\rho(a)$  kod kojeg je i os  $y$  izražena u logaritamskoj skali kako bi se pokazala konačnost  $\rho$  u  $a_*$ .

Na slikama 2.2 i 2.3 ova se situacija vidi u prvom stupcu. Kao što je vidljivo, ovdje dolazi do prijelaza kozmološke konstante iz područja  $w > -1$  u  $w < -1$  pri čemu  $w$  ide iz  $+\infty$  u  $-\infty$ , a relativno dugo se zadržava oko vrijednosti  $-1$ .

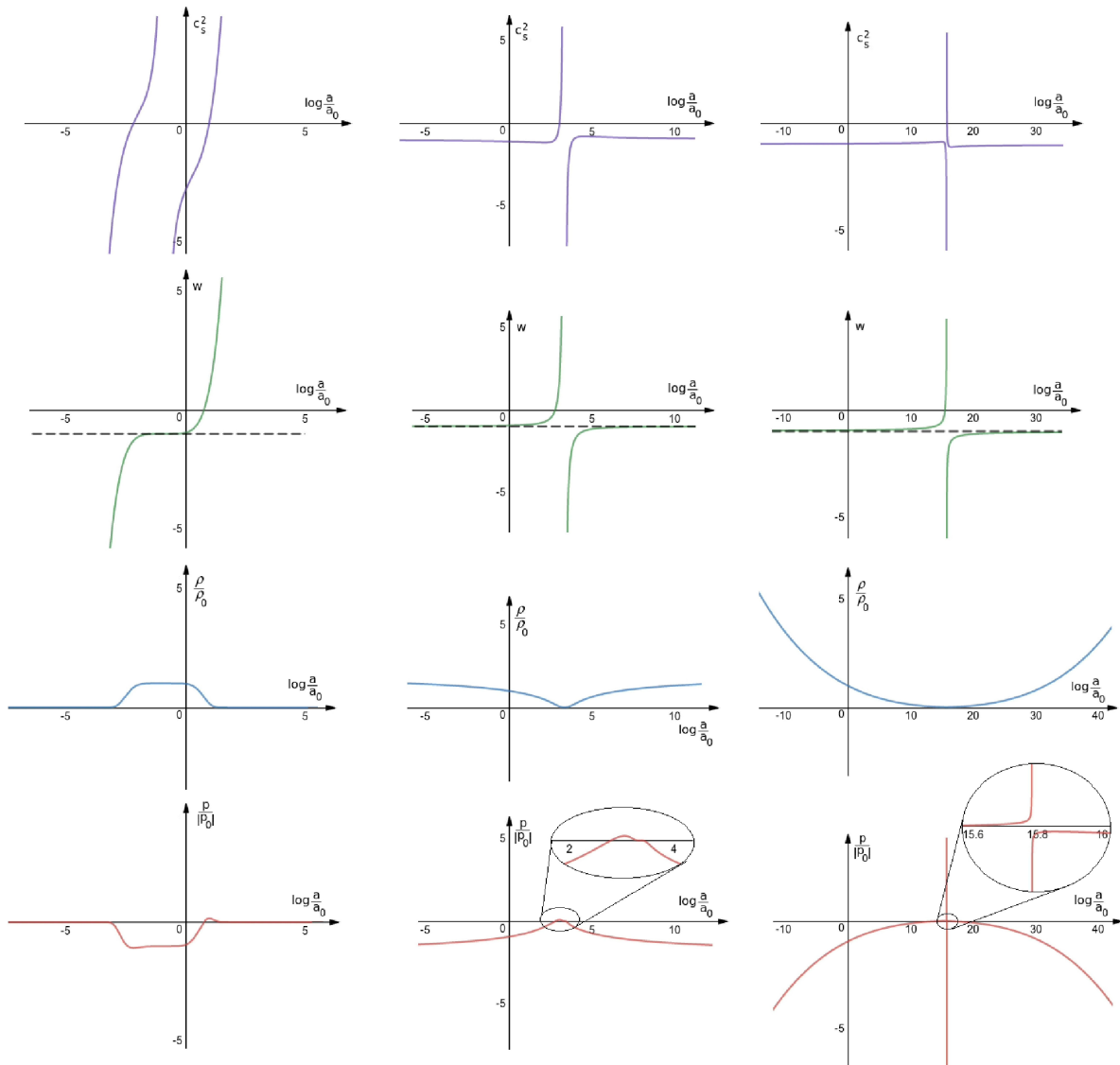


Slika 2.3: Grafički prikaz kozmičkih veličina u ovisnosti o parametrima i faktoru skale  $a$ . Prvi red: kvadrat brzine zvuka  $c_s^2$ . Drugi red: parametar jednadžbe stanja  $w$ . Treći red: gustoća energije normalizirana na današnju vrijednost  $\rho/\rho_0$ . Četvrti red: tlak normaliziran na sadašnju apsolutnu vrijednosti  $p/|p_0|$ . Parametri:  $A = 1$  i  $w_0 = -1.05$ . Za lijevi stupac vrijedi  $B = -1/5$ , za srednji stupac vrijedi  $B = 3/5$  dok za desni stupac vrijedi  $B = 7/5$ . Na svim grafovima os  $x$  je izražena u logaritamskoj skali, a os  $y$  u linearnoj, osim posljednjeg stupca za  $\rho(a)$  kod kojeg je i os  $y$  izražena u logaritamskoj skali kako bi se pokazala konačnost  $\rho$  u  $a_*$ .

Gustoća tamne energije ide iz visokih vrijednosti ( $\lim_{a \rightarrow 0} \rho = +\infty$ ) do minimuma  $\lim_{a \rightarrow a_*} \rho = \rho_0 e^{-\frac{(1+w_0)^{-B}}{A(1-B)}}$  na kojemu se zadržava u periodu koji odgovara zadržavanju parametru  $w$  oko vrijednosti  $-1$ , a zatim se vraća u područje visokih vrijednosti.

Korespondirajući s ponašanjem  $w$  i  $\rho$  (zbog  $p = w\rho$ ), tlak je u ranoj fazi svemira

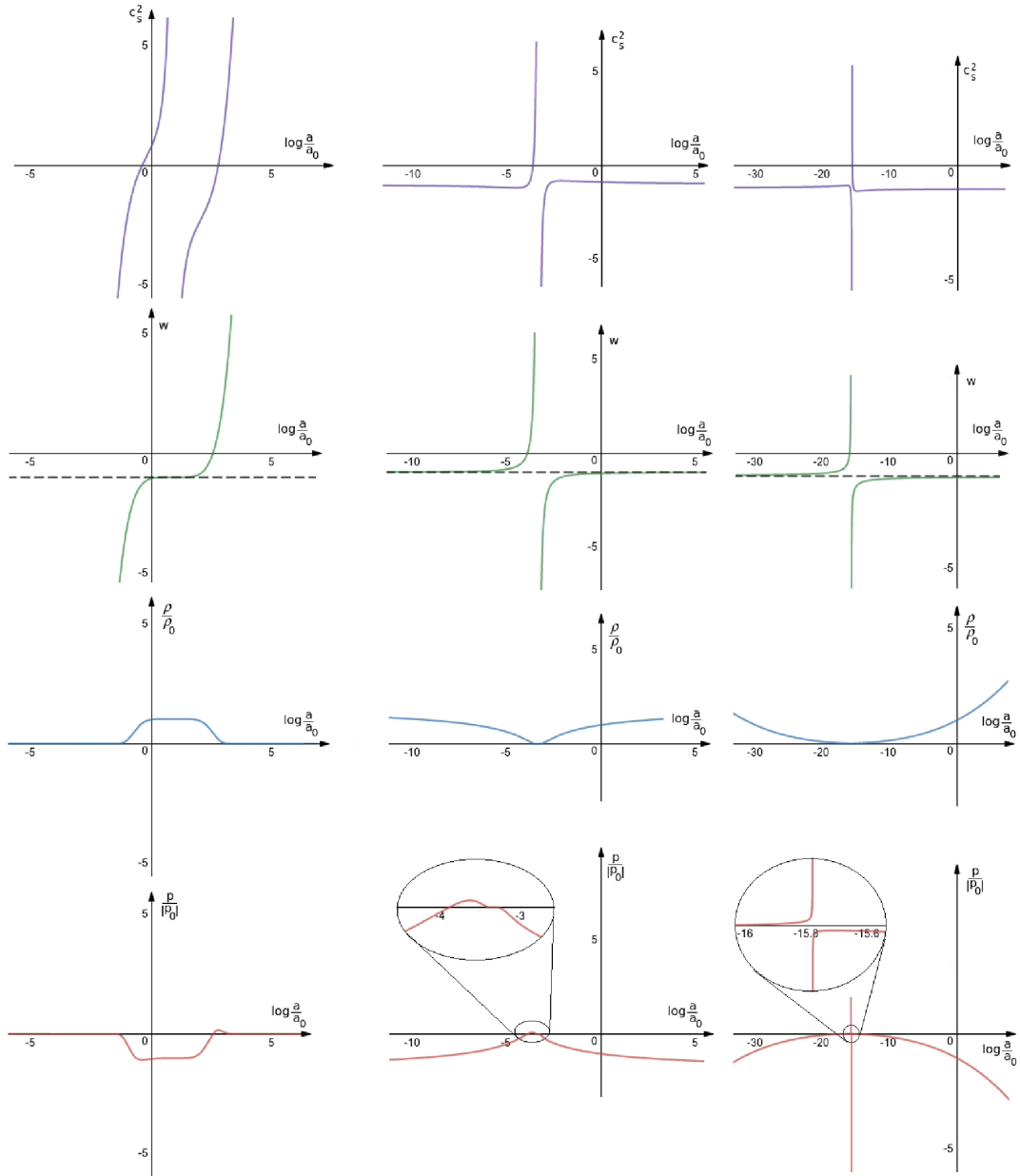




Slika 2.4: Grafički prikaz kozmičkih veličina u ovisnosti o parametrima i faktoru skale  $a$ . Prvi red: kvadrat brzine zvuka  $c_s^2$ . Drugi red: parametar jednadžbe stanja  $w$ . Treći red: gustoća energije normalizirana na današnju vrijednost  $\rho/\rho_0$ . Četvrti red: tlak normaliziran na sadašnju apsolutnu vrijednost  $p/|p_0|$ . Parametri:  $A = -1$  i  $w_0 = -0,95$ . Za lijevi stupac vrijedi  $B = -1/5$ , za srednji stupac vrijedi  $B = 3/5$  dok za desni stupac vrijedi  $B = 7/5$ . Na svim grafovima os  $x$  je izražena u logaritamskoj skali, a os  $y$  u linearnoj, osim posljednjeg stupca za  $\rho(a)$  kod kojeg je i os  $y$  izražena u logaritamskoj skali kako bi se pokazala konačnost  $\rho$  u  $a_*$ .

vrlo velik, zatim se neko vrijeme zadržava na platou, da bi zatim otišao u jako negativne vrijednosti.

U ovoj kombinaciji dolazi do singulariteta u  $a(t)$  u konačnom vremenu s obzirom da je  $t_\infty$  konačan. Riječ je o klasi modela kojima je zajedničko Veliko razdiranje.



Slika 2.5: Grafički prikaz kozmičkih veličina u ovisnosti o parametrima i faktoru skale  $a$ . Prvi red: kvadrat brzine zvuka  $c_s^2$ . Drugi red: parametar jednačbe stanja  $w$ . Treći red: gustoća energije normalizirana na današnju vrijednost  $\rho/\rho_0$ . Četvrti red: tlak normaliziran na sadašnju apsolutnu vrijednosti  $p/|p_0|$ . Parametri:  $A = -1$  i  $w_0 = -1,05$ . Za lijevi stupac vrijedi  $B = -1/5$ , za srednji stupac vrijedi  $B = 3/5$  dok za desni stupac vrijedi  $B = 7/5$ . Na svim grafovima os  $x$  je izražena u logaritamskoj skali, a os  $y$  u linearnoj, osim posljednjeg stupca za  $\rho(a)$  kod kojeg je i os  $y$  izražena u logaritamskoj skali kako bi se pokazala konačnost  $\rho$  u  $a_*$ .

Slično ponašanje - privremeni režim kozmološke konstante s prijelazom - opisano je u [73], dok su još neki modeli koji uspijevaju objasniti izmjerene vrijednosti predstavljeni u [79] [80] [81].

- $A > 0, 0 < B < 1$

Na slikama 2.2 i 2.3 ova je situacija vidljiva u srednjem stupcu. Ova kombinacija parametara za sve funkcije daje singularitet u  $a \rightarrow a_*$ . Međutim, isto tako, za sve funkcije u limesima za  $a \rightarrow 0$  i  $a \rightarrow +\infty$  dobivamo konačne vrijednosti, konkretno  $w \rightarrow -1$  i  $\rho \rightarrow \rho_0 e^{-\frac{(1+w_0)^{-B}}{A(1-B)}}$ , što su vrijednosti koje korespondiraju s kozmološkom konstantom. Također, ovo vrijedi i za sve vrijednosti  $a$  koje nisu blizu singulariteta. Ono na što možda treba obratiti pažnju je integracija iz (2.48), s obzirom da je jedna od granica integracije upravo singularitet, gdje  $\rho$  divergira. No, integracijom (2.46) oko vrijednosti  $a_*$  dobiva se konačna vrijednost što znači da i dalje vrijedi  $t_\infty = \infty$ , dakle ovdje je riječ o Malom razdiranju.

- $A > 0, B > 1$

Na slikama 2.2 i 2.3 ova kombinacija vidljiva je u desnom stupcu. Funkcija  $w(a)$  u  $a_*$  ide u singularitet, dok u  $a = 0$  i  $-\infty$  asimptotski teži u -1. Energija asimptotski ide u nulu, dok u  $a_*$  ima vrijednost  $\rho(a_*) = \rho_0 e^{-\frac{(1+w_0)^{-B}}{A(1-B)}}$ . Treba primijetiti da je  $\rho$  definirana na cijelom području iako  $w(a)$  ima singularitet. Kao što se vidi, i ovdje je riječ o tranzijentnoj tamnoj energiji. Analizom po  $t(a)$  vidimo da  $t_\infty \rightarrow \infty$ , dakle gustoća energije ne daje singularitet u budućnosti.

- $A < 0, B < 0$

Ovaj slučaj se može vidjeti u lijevom stupcu na slikama 2.4 i 2.5. Kod funkcije  $w(a)$  ovdje vidimo primjer prelaska granice kozmološke konstante, to jest prijelaza iz režima fantomske energije u područje kvintesencije pri čemu  $\lim_{a \rightarrow 0} w = -\infty$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} w = +\infty$  dok je  $w(a_*) = -1$ . Gustoća energije kreće iz nule i vraća se u nulu (tranzijentna tamna energija) dok za  $a = a_*$  vrijedi  $\lim_{a \rightarrow a_*} \rho = \rho_0 e^{-\frac{(1+w_0)^{-B}}{A(1-B)}}$ . Tlak tamne energije ide iz nule, neko se vrijeme zadržava na konačnoj negativnoj vrijednosti, zatim prelazi u pozitivnu vrijednost da bi na kraju opet asimptotski završio u nuli. Najvažnija karakteristika ovog režima je velik raspon faktora skale  $a$  tokom kojeg su vrijednosti  $w$ ,  $\rho$  i  $p$  gotovo konstantne i odgovaraju kozmološkoj konstanti, kao i pojavi tranzijentne tamne energije. Ovaj dio modela ćemo kasnije spomenuti i u usporedbi s novijom prilagodbom  $w(z)$  koja se spominje u obradi podataka dobivenih promatranjima u [67].

- $A < 0, 0 < B < 1$

Primjeri ove kombinacije parametara nalaze se u srednjem stupcu na slikama 2.4 i 2.5. Funkcija  $w(a)$  na krajevima asimptotski teži u  $-1$ , dok u  $a = a_*$  ima singularitet, dakle  $\lim_{a \rightarrow a_*^-} w = +\infty$  i  $\lim_{a \rightarrow a_*^+} w = -\infty$ . Gustoće energije u limesima u  $0$  i  $+\infty$  ima vrijednost  $\rho = \rho_0 e^{-\frac{(1+w_0)^{-B}}{A(1-B)}}$ , dok u  $a = a_*$  iznosi  $0$ . Za razliku od nekih dosadašnjih slučajeva, tlak nema singularitet, dok je singularitet u  $w$  uzrokovan time što je  $\rho(a_*) = 0$ . Za faktor skale opet vrijedi  $t_\infty = \infty$ .

- $A < 0, B > 1$

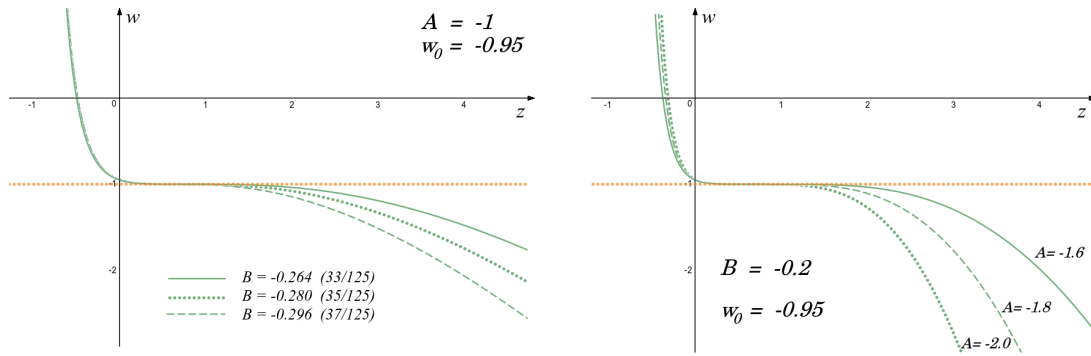
Ova kombinacija parametara može se vidjeti u desnom stupcu na slikama 2.4 i 2.5. Ovdje funkcija  $w(a)$  na krajevima, to jest u  $0$  i  $+\infty$ , asimptotski teži prema  $-1$ , a singularitet ima u  $a_*$ , to jest  $\lim_{a \rightarrow a_*^-} w = +\infty$  i  $\lim_{a \rightarrow a_*^+} w = -\infty$ . Gustoća energije najprije opada iz  $\infty$  do  $\rho(a_*) = \rho_0 e^{-\frac{(1+w_0)^{-B}}{A(1-B)}}$ , a onda opet raste u beskonačnost. Tlak ima singularitet u  $a_*$ , dok analiza faktora skale pokazuje da je  $t(a_\infty)$  konačna vrijednost, dakle opet dolazi do Velikog razdiranja.

Ako promatramo područje za koje vrijedi  $B < 0$ , jednadžba (2.37) daje nam dodatne informacije o svojstvima funkcije  $w(a)$  prilikom prelaska granice kozmološke konstante. Konkretno, vrijednost koju treba posebno promotriti je  $B = -1$ . U točki prijelaza vrijedi  $1 + w = 0$  i zbog toga derivacija  $a \frac{dw}{da}$  iznosi:

- $0$  za  $B > -1$ ,
- $-3A$  za  $B = -1$ ,
- $-\text{sign}(A) \cdot \infty$  za  $B < -1$ .

Ovisnost funkcije  $w(a)$  o parametru  $B$  u području  $B < 0$  prikazano je na slici 2.6.

Posebnu pažnju trebalo bi obratiti na ponašanje funkcije  $c_s^2$  definirane u jednadžbi (2.42). U slikama 2.2-2.5 vidljiva je njena ovisnost o faktoru skale. Ovdje je vidljivo da u svim slučajevima dolazi do nekakvog singulariteta što može imati utjecaja na kauzalnost i stabilnost teorije, s obzirom da u više kombinacija parametara dolazi do vrijednosti  $c_s^2 < 0$ . Ono što je zanimljivo je da se singularitet pojavljuje u svim slučajevima, kako za  $B > 0$ , tako i za  $B < 0$ , dakle i kad funkcija  $w(a)$  prolazi kroz singularitet i kad je kontinuirana. U prvom slučaju ( $B > 0$ ), singularitet se iz  $w(a)$  izravno prenosi



Slika 2.6: Ovisnost parametra jednadžbe stanja o crvenom pomaku  $w(z)$  u slučaju  $A < 0, B < 0$ . Ovdje se reproduciraju svojstva funkcije prilagođene  $w(z)$  iz [67]. Lijevi graf pokazuje rezultat varijacija parametra  $B$ , dok desni graf prikazuje posljedice varijacije parametra  $A$ .

u  $c_s^2$ , dok se u drugom slučaju ( $B < 0$ ), singularitet pojavljuje kad  $w(a)$  prijeđe granicu  $w = -1$ . Ono što je dobro napomenuti je da je dosadašnja analiza provedena isključivo na modelu (2.36) od kojeg je analiza i započeta. Međutim, iz jednadžbe (1.34) vidljivo je da će se sličan problem pojaviti i u razmatranjima svih ostalih modela koje ćemo analizirati ovom metodom - u kojima se prijelaz granice kozmološke konstante opisuje u okvirima jedne komponente. Također,  $c_s^2$  u nekim periodima poprima negativnu vrijednost što kod savršenih fluida dovodi do nestabilnosti perturbacija na malim skalama. Zbog svega ovoga, moguće je da  $c_s^2$  ne treba shvaćati kao fizičku brzinu zvuka, nego da ovaj pristup može poslužiti kao metoda modeliranja  $dp/d\rho$  kao funkcije  $p/\rho$ ; pritom nećemo strogo definirati što  $dp/d\rho$  zapravo znači, to jest iznositi njegovu egzaktnu fizičku interpretaciju, nego ćemo uz pomoć ove metode pokušati otkriti općenita svojstva modela koje analiziramo.

Iz svega ovoga, to jest iz nekoliko jednadžbi u kojima se nalazi faktor  $(1 + w)$ , na prvi pogled izgleda kao da je vrijednost  $w = -1$  zaista posebna točka u razvoju komponente tamne energije i da se ona ne može prijeći, između ostalog i zbog toga što se ovaj singularitet ne može integrirati. Međutim, neka rješenja za  $B < 0$  pokazala su konačno ponašanje (u smislu da ne dolazi do beskonačnosti, to jest do singulariteta u nekim bitnim funkcijama kao što su  $\rho(a)$  i  $w(a)$ ), što znači da je u došlo do međusobnog poništavanja (kraćenja) singularnih ili iščezavajućih izraza u brojniku i nazivniku modela koje smo konstruirali.

## 2.4 Prilagodba parametara modela rezultatima promatranja

Analiza izvršena u prethodnom odjeljku može dovesti do modela koji se onda mogu usporediti s realnim rezultatima promatranja. Jedan takav primjer je rad [67] u kojemu su se autori pozabavili smanjenjem tenzije u procjeni vrijednosti kozmoloških parametara dobivenih iz opažanja različitih kozmičkih fenomena. Početna točka u ovome bila je pretpostavka ovisnosti parametra jednadžbe stanja o crvenim pomaku, to jest  $w(z)$ . Raspon crvenih pomaka podijeljen je u podintervale unutar kojih je pretpostavljeno da je  $w$  konstantan. Tada su te konstantne vrijednosti parametra  $w$  postavljene kao parametri modela.

Ovakva statistička analiza proizvela je oscilirajuću funkciju  $w(z)$  koja nekoliko puta siječe pravac  $w = -1$ , kao što se vidi na Slici 2 u [67], što bi moglo biti tema istraživanja samo po sebi, ali ako promatramo odstupanje  $w(z)$  od  $-1$ , interval crvenog pomaka koji se ovdje proučava mogli bismo podijeliti na podintervale  $0 < z \leq 1.2$  gdje je  $w \approx -1$  i  $z > 1,2$  gdje  $w(z)$  ide u vrijednosti značajno negativnije od  $-1$ .

Ovdje je vidljivo da je ovakvo ponašanje funkcije  $w(z)$  (vrlo blizu vrijednosti  $-1$  za vrijednosti  $z$  blizu 0, a zatim pad prema sve negativnijim vrijednostima za veće vrijednosti  $z$ ) karakteristično za model analiziran u prethodnim poglavljima za parametre  $A < 0$  i  $B < 0$ , kao što se vidi u lijevim stupcima slika 2.4 i 2.5. Ponašanje ove funkcije u ovom parametarskom režimu detaljnije je prikazano na Slici 2.6, gdje su parametri odabrani kako bi rezultat bio što sličniji dobivenoj funkciji iz [67].

Ono što je također vrlo zanimljivo je da upravo dio parametarskog prostora  $A < 0, B < 0$  odgovara tranzijentnoj tamnoj energiji: kao što se vidi na Slikama 2.4 i 2.5, za ove vrijednosti gustoća tamne energije kreće iz nule, zatim kroz ograničen interval (koji odgovara intervalu kad je  $w \approx -1$ ) ima neku konačnu, gotovo konstantnu vrijednost, da bi nakon toga opet asimptotski otišla u nulu.

### 3 Ujedinjenje tamne materije i tamne energije

Ovo poglavlje prati prikaz rezultata istraživanja objavljenih u [82]. Uobičajeni pristup objašnjavanju tamne materije i tamne energije te proučavanju njihovih svojstava je razmatranje ovih komponenti kao odvojenih pojava. Dok još uvijek nema jasnih dokaza o prirodi tamne energije, iznesene su neke pretpostavke o tamnoj materiji u okviru slabo međudjelujućih masivnih čestica (weakly interacting massive particles - WIMP). Međutim, još jedan pristup je promatranje ove dvije pojave kao dva iskaza iste kozmičke komponente. Najpoznatiji model ujedinjenja svakako je model Čapljiginovog plina [83] [84] i generaliziranog Čapljiginovog plina [85], no oni nisu jedini.

U ovom poglavlju uvest će se neki novi modeli koristeći metodu izražavanja adijabatske brzine zvuka kozmičkog fluida  $c_s^2$  (ili, općenitije,  $dp/d\rho$ ) kao funkcije parametra jednadžbe stanja  $w = p/\rho$ , prvi put uvedenu u [66]. U spomenutom radu pokazano je da model  $c_s^2(w) = \alpha(-w)^\gamma$  vodi do ujedinjenja tamne materije i tamne energije pri čemu se Čapljiginov plin i generalizirani Čapljiginov plin pojavljuju kao posebni slučajevi.

#### 3.1 Model

U ovom poglavlju analizirat ćemo model:

$$c_s^2 = w + Aw \frac{\left(-\ln \frac{w}{w_*}\right)^C}{1+w}, \quad (3.62)$$

gdje su  $A$ ,  $w_*$  i  $C$  parametri modela.

Jedna bitna pozitivna strana ovakvog odabira je svakako mogućost da se iz ovog izraza na jednostavan analitički način dobiju rješenja koja će prikazati više zanimljivih svojstava.

Za  $C \neq 0$  ovaj se model može napisati implicitno:

$$\left[ \frac{(c_s^2 - w)(1+w)}{Aw} \right]^{1/C} = -\ln \frac{w}{w_*}. \quad (3.63)$$

Uvjet za ovakav oblik je da  $C$  bude racionalan broj. Uzimamo da oznaka  $x^C$  predstavlja sve moguće grane (na primjer,  $x^{1/2}$  pokriva i  $\sqrt{x}$  i  $-\sqrt{x}$ ). Zbog ovoga, ovdje će se koristiti obje reprezentacije: i implicitna i eksplicitna, ovisno koja će u kom trenutku

biti pogodnija za diskusiju.

Vrijednosti za  $w$  i  $\rho$  dobivamo istim računskim postupkom kao i u prethodnom poglavlju: definiciju adijabatske brzine zvuka  $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$  kombiniramo s parametrom jednadžbe stanja  $p = w\rho$  i jednadžbom kontinuiteta  $d\rho + 3\rho(1+w)\frac{da}{a} = 0$ . Uz glavnu pretpostavku da je brzina zvuka funkcija parametra jednadžbe stanja, dobivamo jednadžbu za  $w$  kao funkciju faktora skale  $a$ :

$$\frac{dw}{(c_s^2(w) - w)(1+w)} = -3\frac{da}{a}. \quad (3.64)$$

Uvrštavanjem (3.62) u (3.64) i integriranjem dolazimo do rješenja  $w(a)$  za  $C \neq 1$ :

$$w = w_* e^{-[3A(1-C)\ln\frac{a}{a_0} + (-\ln\frac{w_0}{w_*})^{1-C}]^{\frac{1}{1-C}}}. \quad (3.65)$$

Ovdje  $a_0$  i  $w_0$  označavaju trenutne vrijednosti faktora skale i parametra jednadžbe stanja ujedinjenog fluida. U analizi ćemo pretpostaviti da je  $w_0 < 0$ .

Za  $C = 1$  rješenje ima oblik

$$w = w_* e^{(\ln\frac{w_0}{w_*})\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3A}}. \quad (3.66)$$

Za posebne vrijednosti parametara  $A$ ,  $w_*$  i  $C$ , model pokazuje nekoliko načina nestandardnog ujedinjenja tamnog sektora. Posebnu pažnju ćemo obratiti na tri specifična režima:

- Za  $C = 0$  model predstavlja ujedinjenje tamne materije i fantomske energije;
- Za  $C = 1$ , model se ponaša kao ujedinjeni fluid čija je vrijednost parametra  $w$  između onih za tamnu materiju i tamnu energiju s konstantnim  $w = w_*$ ;
- Slučaj  $C = 1/2$ , gdje, krenuvši od (3.63), dolazi do ujedinjenja u režimu *tamna materija - tamna energija - tamna materija*.

### 3.2 Primjeri različitih modela ujedinjenja u ovisnosti o parametrima

Ni ovdje cilj nije detaljna analiza gore navedenih modela, nego ilustracija koji se sve rezultati mogu postići istraživanjem preko proučavanja funkcije  $c_s^2(w)$ , pri čemu ćemo



u ovom odjeljku predstaviti nestandardne oblike ujedinjenja tamnih fluida. Slučajevi ujedinjenja o kojima će ovdje biti riječ su:

- tamna materija - fantomska energija;
- tamna materija - tamna energija pri čemu parametar  $w$  tamne energije asimptotski teži prema  $w_*$ ;
- ujedinjenje tamna materija - tamna energija - tamna materija.

### 3.2.1 Tamna materija - fantomska energija

Krećemo od vrijednosti  $C = 0$ . Prilikom rješavanja (3.65) dobivamo posebno jednostavno rješenje:

$$w = w_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3A}, \quad (3.67)$$

pri čemu je jednadžba za brzinu zvuka:

$$c_s^2 = w_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3A} + Aw_0 \frac{\left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3A}}{1 + w_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3A}}. \quad (3.68)$$

Iz ovoga možemo dobiti ukupnu gustoću energije ujedinjenog fluida:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} e^{\frac{w_0}{A} \left[ \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3A} - 1 \right]}, \quad (3.69)$$

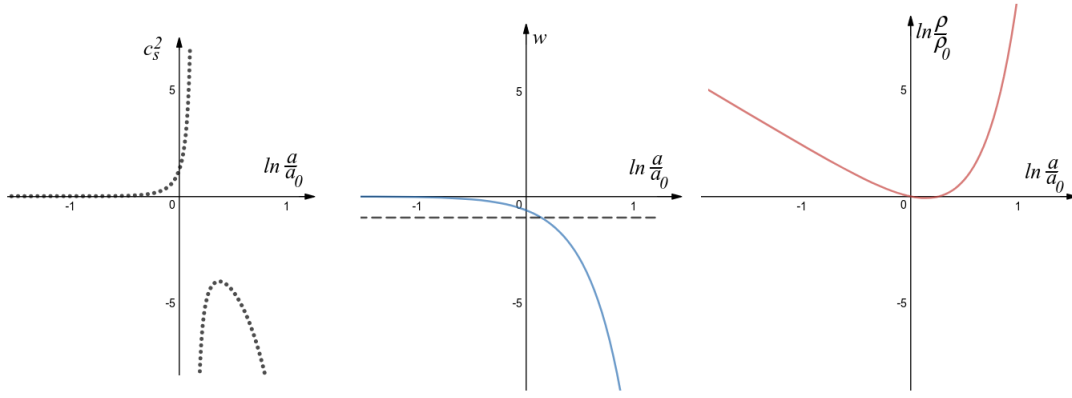
gdje je  $\rho_0$  vrijednost gustoće energije u sadašnjem vremenu.

Iz izraza (3.67) vidljivo je da se prijelaz granice kozmološke konstante događa na

$$a_\Lambda = a_0 \left( -\frac{1}{w_0} \right)^{-\frac{1}{3A}}. \quad (3.70)$$

Iz jednadžbi (3.67) i (3.68) može se izvući nekoliko zaključaka vezanih uz njihovo asimptotsko ponašanje:

- Za  $A > 0$ : parametar jednadžbe stanja ima limese  $\lim_{a \rightarrow 0} w = -\infty$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} w = 0$ . Međutim, kod kvadrata brzine zvuka u trenutku prelaska granice kozmološke konstante dolazi do singulariteta, uz sljedeće limese:  $\lim_{a \rightarrow 0} c_s^2 = -\infty$ ,  $\lim_{a \rightarrow a_0} c_s^2 =$



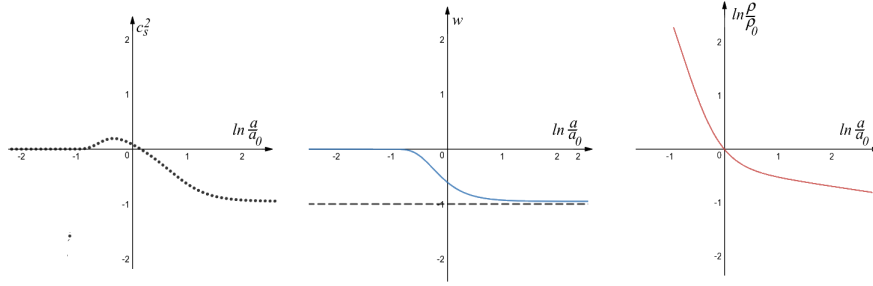
Slika 3.7: Kvadrat brzine zvuka i gustoće energije za  $C = 0$ ,  $w_0 = -0.65$  i  $A = -1$ .

$w_0 \frac{1+w_0+A}{1+w_0}$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} c_s^2 = 0$ . Limesi u singularitetu su  $\lim_{a \rightarrow a_\Lambda^-} c_s^2 = \infty$ ,  $\lim_{a \rightarrow a_\Lambda^+} c_s^2 = -\infty$ . Ovaj slučaj može biti zanimljiv i kao model ujedinjenja fantomske energije u ranom svemiru (rana inflacija) i tamne materije u kasnoj fazi svemira.

- Za  $A < 0$ : Limesi za  $w$  iznose  $\lim_{a \rightarrow 0} w = 0$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} w = -\infty$ . Kod kvadrata brzine zvuka i ovdje dolazi do singulariteta u trenutku prelaska granice kozmološke konstante uz limese:  $\lim_{a \rightarrow 0} c_s^2 = 0$ ,  $\lim_{a \rightarrow a_0} c_s^2 = w_0 \frac{1+w_0+A}{1+w_0}$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} c_s^2 = -\infty$ . I na kraju, u točki singulariteta imamo  $\lim_{a \rightarrow a_\Lambda^-} c_s^2 = \infty$  i  $\lim_{a \rightarrow a_\Lambda^+} c_s^2 = -\infty$ .

Vidljivo je da se u limesima ujedinjena tamna materija/energija ponaša tako da s jedne strane odgovara nerelativističkoj materiji, a s druge fantomskoj energiji. Jedino što ovisi o predznaku parametra  $A$  je koje će se od ta dva ponašanja dogoditi u  $a \rightarrow 0$ , a koja u  $a \rightarrow +\infty$ .

Fizikalno, slučaj  $A < 0$  je zanimljiviji jer se u ranom svemiru ujedinjeni tamni fluid ponaša kao hladna tamna materija, dok s vremenom prelazi u fantomsku energiju što je prikazano na Slici 3.7. Također, za ovaj slučaj može se dogoditi da se  $c_s^2$  nalazi u intervalu  $[0, 1]$  za sve vrijednosti  $a \leq a_0$  i tada se prijelaz granice kozmološke konstante događa u budućnosti. Dakle, ovaj model s ovim skupom parametara može biti konzistentan s podacima. Međutim, prilikom prelaska barijere kozmološke konstante pojavljuje se singularitet, nakon čega vrijednost  $c_s^2$  postaje negativna što, ako se dogodilo u vrijeme ranog svemira, dovodi do nestabilnosti u stvaranju struktura. U tom slučaju ovaj model treba promatrati kao funkciju ovisnosti  $dp/d\rho$  o  $p/\rho$ .



Slika 3.8: Ponašanje  $c_s^2$  parametra jednačbe stanja  $w$  i gustoće energije za vrijednosti  $C = 1$ ,  $A = -1$ ,  $w_0 = -0,6$   $w_* = -0,95$ .

### 3.2.2 Tamna materija - tamna energija koja asimptotski teži prema $w_*$

Za slučaj  $C = 1$  promatramo rješenje  $w(a)$ .

$$w = w_* e^{\left(\ln \frac{w_0}{w_*}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3A}}, \quad (3.71)$$

Iz ovog dobivamo i rješenje za  $c_s^2$ :

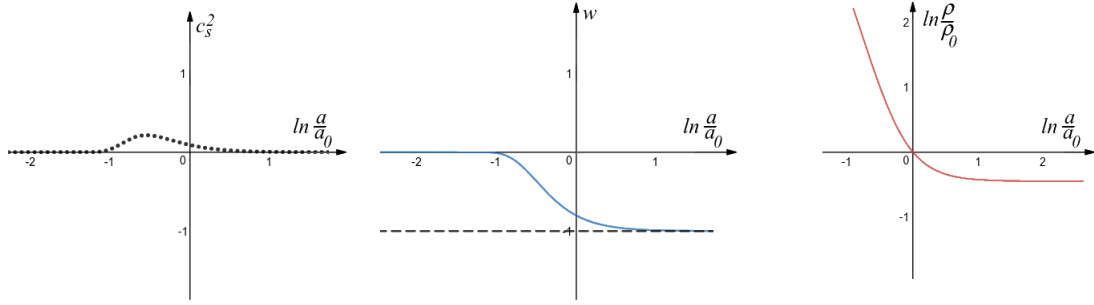
$$c_s^2 = w_* e^{\left(\ln \frac{w_0}{w_*}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3A}} \left[ 1 - \frac{A \left(\ln \frac{w_0}{w_*}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3A}}{1 + w_* e^{\left(\ln \frac{w_0}{w_*}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3A}}} \right]. \quad (3.72)$$

Ponašanje ovog modela ovisi o tome je li  $A$  veći ili manji od nule:

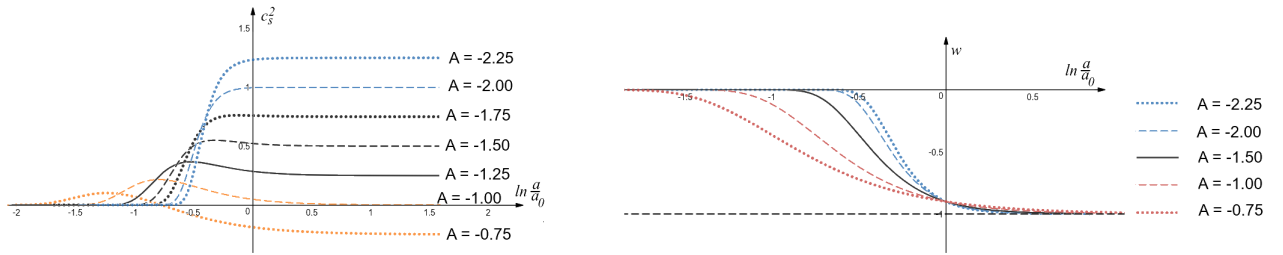
- Za  $A > 0$  parameter  $w$  ima limese  $\lim_{a \rightarrow 0} w = w_*$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} w = 0$ , dok su limesi  $c_s^2$ :  $\lim_{a \rightarrow 0} c_s^2 = w_*$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} c_s^2 = 0$ .
- Za  $A < 0$  limesi parametra  $w$  su  $\lim_{a \rightarrow 0} w = 0$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} w = w_*$ , dok  $c_s^2$  ide u  $\lim_{a \rightarrow 0} c_s^2 = 0$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} c_s^2 = w_*$ .

Daljnje razmatranje ovisi o vrijednostima za  $w_*$ :  $w_* > -1$ ,  $w_* = -1$  i  $w_* < -1$ . Tipičan primjer ponašanja modela za  $w_* > -1$  može se vidjeti na Slici 3.8. Posebnu pažnju treba pokloniti situaciji kad je  $A < 0$ , a asimptotska vrijednost parametra  $w$  je  $w_* > -1$ . U ovom slučaju  $w$  nikad neće dostići  $-1$  i ponaša se kao tamna energija.

Na prvi pogled, ovo je u suprotnosti s tvrdnjama iz [86] da se modeli tamne energije kao fluida moraju ponašati asimptotski kao kozmološka konstanta. Međutim, ovo vrijedi samo pod pretpostavkom da  $c_s^2 > 0$  (ili, zapravo,  $dp/d\rho > 0$ ) vrijedi kroz cijeli razvoj svemira dok ovdje to nije slučaj: ovdje  $c_s^2$  postaje negativan kad se  $w$  približi  $w_*$  što se



Slika 3.9: Ponašanje kvadrata brzine zvuka, parametra jednadžbe stanja i gustoće energije za  $C = 1$ ,  $A = -1$ ,  $w_0 = -0,8$  i  $w_* = -1$ .



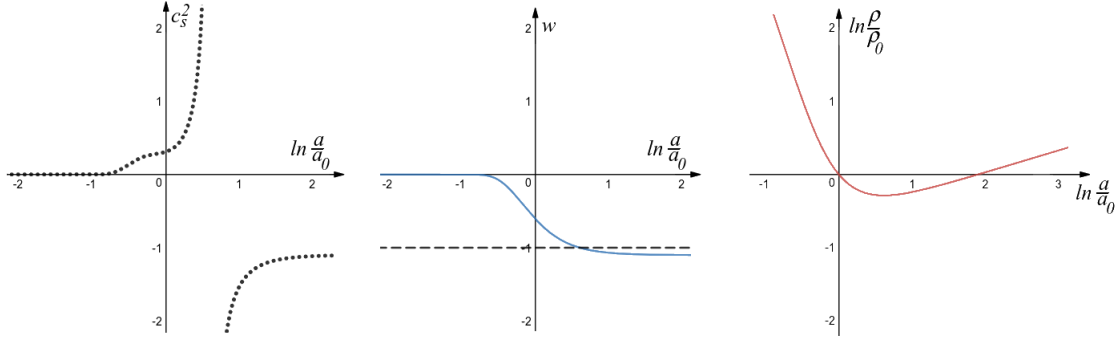
Slika 3.10: Kvadrat brzine zvuka i parametra jednadžbe stanja za  $C = 1$ ,  $w_0 = -0.9$  i  $w_* = -1$  za različite vrijednosti parametra  $A$ .

vidi i na Slici 3.8. Ključno je da se prijelaz u negativni  $dp/d\rho$  može dogoditi u budućnosti tako da ovaj model nije nužno u kontradikciji s promatranjima.

U kontekstu ovih rezultata vrijedi razmisliti o budućoj evoluciji svemira, s obzirom da u nekom trenutku  $c_s^2$  zaista i postaje negativan što bi onda značilo poprilično drugačije ponašanje struktura od onoga u dosadašnjem razvoju svemira.

Za vrijednosti parametara  $w_* = -1$  i  $A = -1$  razmatramo fizikalno zanimljiv slučaj (Slika 3.9) koji se ponaša kao unificirana tamna materija/tamna energija pri čemu se parametar  $w$  drži između 0 i  $-1$ . Kvadrat brzine zvuka cijelo je vrijeme između 0 i 1 te asimptotski ide u nulu i u prošlosti i u budućnosti. Jasno je da je ovaj model sličan  $\Lambda$ CDM-u što ga čini pogodnim za usporedbu, a istovremeno u odnosu na  $\Lambda$ CDM ima svoje posebnosti koje bi se mogle razlučiti promatranjima.

Ostaje otvoreno pitanje je li ovakav rezultat posljedica finog podešavanja parametara ili se ovo ponašanje može dobiti kroz širi interval parametarskog prostora. Ako pogledamo jednadžbu (3.72), vidljivo je da iz  $w_* = -1$  slijedi  $\lim_{a \rightarrow \infty} c_s^2 = -1 - A$ . Na Slici 3.10 prikazan je ovaj model uz raspon parametra  $A$ . Pokazuje se da je kvadrat



Slika 3.11: Parametar  $w$ , kvadrat brzine zvuka i gustoća energije za  $C = 1$ ,  $A = -1$ ,  $w_0 = -0.6$  i  $w_* = -1.1$ .

brzine zvuka nalazi između 0 i 1 za cijelu prošlost i budućnost svemira dok god vrijedi  $-2 \leq A \leq -1$ . Izvan ovog intervala,  $c_s^2$  postaje superluminalan kad je  $A < -2$  i manji od nule kad je  $A > -1$ .

Sljedeći zanimljivi primjer ujedinjenja tamne materije i fantomske tamne energije ( $w < -1$ ) vidi se za vrijednosti  $C = 1$  i  $w_* < -1$ . Jednadžba (3.71) pokazuje sljedeća asimptotska ponašanja:

- Za  $A > 0$ :  $\lim_{a \rightarrow 0} w = w_*$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} w = 0$ ;
- Za  $A < 0$ :  $\lim_{a \rightarrow 0} w = 0$  i  $\lim_{a \rightarrow \infty} w = w_*$ .

Posebno zanimljiv slučaj vidimo za  $A < 0$  gdje se u ranom svemiru ujedinjena komponenta ponaša kao hladna tamna materija, dok se u budućnosti asimptotski ponaša kao fantomska energija. Problem prelaska granice kozmološke konstante vidljiv je i ovdje, međutim, parametri modela mogu se odabrati tako da ovaj prijelaz bude u budućnosti tako da nema diskrepancije s promatranjima. Ovaj slučaj vidljiv je na Slici 3.11.

### 3.2.3 Ujedinjenje tamna materija - tamna energija - tamna materija

Ovdje ćemo obratiti pažnju na model s parametarskom vrijednošću  $C = 1/2$ .

Iz (3.62) dolazimo do jednadžbe za  $w(a)$ :

$$a \frac{dw}{da} = -3Aw \left( -\ln \frac{w}{w_*} \right)^{1/2}. \quad (3.73)$$

Iz ovog izraza vidljivo je da je desna strana jednadžbe definirana samo za  $w_* < w < 0$  tako da ćemo razmatrati dinamiku u tom intervalu. Pošto će predznak  $a \frac{dw}{da}$ , kao i

parametra  $w$ , cijelo vrijeme biti nepromijenjen, ova varijanta modela ne može opisati tranzijentnu tamnu energiju, to jest varijantu gdje se tamna materija pretapa u tamnu energiju i zatim vraća u formu tamne materije.

Rješenje jednadžbe (3.73) izgleda ovako:

$$w = w_* e^{-[\frac{3}{2}A \ln \frac{a}{a_0} + (-\ln \frac{w_0}{w_*})^{1/2}]^2} . \quad (3.74)$$

Ovo rješenje nije definirano za cijeli vremenski interval svemira. Za slučaj  $A > 0$  faktor skale nalazi se u intervalu  $[a_*, \infty)$ , dok je za  $A < 0$  definiran u  $\langle 0, a_*]$ , pri čemu je

$$a_* = a_0 e^{-\frac{2}{3A} (-\ln \frac{w_0}{w_*})^{1/2}} . \quad (3.75)$$

Dalje, ako krenemo od implicitne reprezentacije modela (3.63), dobit ćemo ove dvije jednadžbe:

$$a \frac{dw}{da} = \pm 3Aw \left( -\ln \frac{w}{w_*} \right)^{1/2} . \quad (3.76)$$

Ovdje je također riječ o modelu s dvije fiksne točke  $w = 0$  i  $w = w_*$ . Međutim, derivacije  $w(a)$  u ova dva slučaja imaju suprotne predznake.

Imamo i dva rješenja:

$$w_+(a) = w_* e^{-[\frac{3}{2}A \ln \frac{a}{a_+} + (-\ln \frac{w_+}{w_*})^{1/2}]^2} \quad (3.77)$$

i

$$w_-(a) = w_* e^{-[\frac{3}{2}A \ln \frac{a}{a_-} + (-\ln \frac{w_-}{w_*})^{1/2}]^2} . \quad (3.78)$$

Unutar intervala  $[w_*, 0]$  predznak od  $a \frac{dw}{da}$  se ne mijenja za svako pojedino rješenje. Imamo dva slučaja:

- Ako je  $A > 0$ ,  $w_+(a)$  je definiran u intervalu  $\langle 0, a_*^+]$ , dok je  $w_-(a)$  definiran u intervalu  $[a_*^-, \infty)$ ,
- Ako je  $A < 0$   $w_+(a)$ , je definiran u intervalu  $[a_*^+, \infty)$ , a  $w_-(a)$  je definiran u intervalu  $\langle 0, a_*^-]$ ,

pri čemu vrijedi

$$a_*^+ = a_+ e^{\frac{2}{3A} (-\ln \frac{w_+}{w_*})^{1/2}} \quad (3.79)$$

i

$$a_*^- = a_- e^{-\frac{2}{3A}(-\ln \frac{w_-}{w_*})^{1/2}}. \quad (3.80)$$

Uvrštavanjem u (3.77) i (3.78), dobivamo

$$w_+(a) = w_* e^{-[\frac{3}{2}A \ln \frac{a}{a_*^+}]^2}, \quad (3.81)$$

i

$$w_-(a) = w_* e^{-[\frac{3}{2}A \ln \frac{a}{a_*^-}]^2}, \quad (3.82)$$

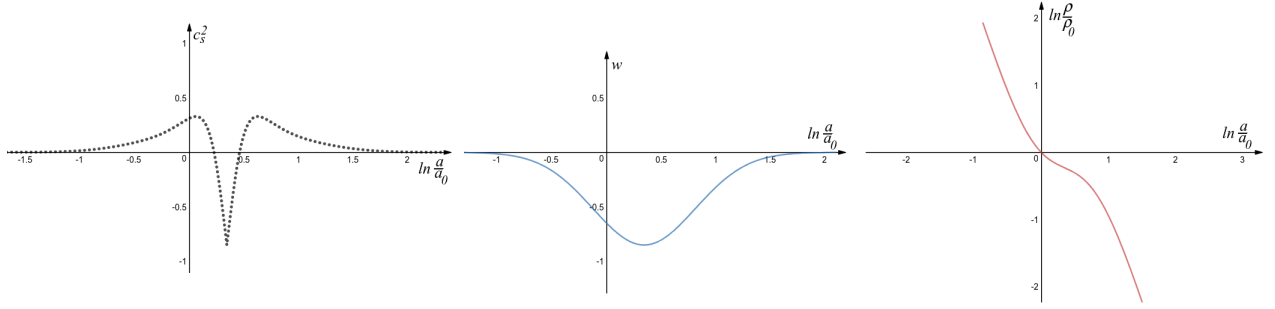
Oba ova izraza su rješenja jednadžbe stanja (3.63), pa zbog toga isto vrijedi i za njihovu kombinaciju. Ukoliko cijeli interval faktor skale od 0 do  $\infty$  podijelimo u podintervale, u svakom od tih intervala za  $w(a)$  možemo uzeti  $w_{\pm}(a)$  kao rješenje pri čemu je jedino na što treba paziti u kojem podintervalu je koji dio rješenja definiran. Najjednostavniji slučaj je podijeliti cijelu skalu na dva podintervala gdje će biti definirano jedno od rješenja  $w_+(a)$  i  $w_-(a)$ . Također, uzet ćemo u obzir samo kontinuirana rješenja. U ovisnosti o tome koliki su  $a_*^+$  i  $a_*^-$ , moguće su tri situacije:

- a) intervali gdje su  $w_+(a)$  i  $w_-(a)$  definirani se ne preklapaju;
- b) intervali gdje se  $w_+(a)$  i  $w_-(a)$  susreću u jednoj točki;
- c) intervali gdje su  $w_+(a)$  i  $w_-(a)$  definirani se preklapaju.

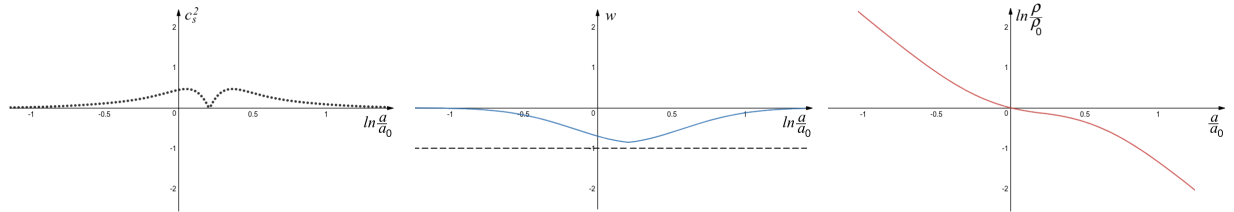
Slučaj a) nije pogodan za modeliranje funkcije  $w(a)$  na cijelom intervalu faktora skale i zato ga nećemo razmatrati.

Slučaj b) se ostvaruje ako postavimo  $a_*^+ = a_*^-$  i ilustriran je na Slici 3.12. U ovom slučaju  $w(a)$  i  $\rho(a)$  su kontinuirane funkcije (s također neprekinutim prvim derivacijama). Funkcija  $c_s^2(a)$  postaje negativna u intervalu oko  $a_*^+ = a_*^-$  što na prvi pogled može predstavljati problem, Međutim, kao što je ranije napomenuto, ovo ne mora biti u suprotnosti s promatranjima ukoliko se dogodi u budućnosti, kao što je prikazano na Slici 3.12. Ono na što ovdje vrijedi skrenuti pažnju je da se, ukoliko je  $w_* < -1$ , prijelaz granice kozmološke konstante događa dva puta.

Slučaj c) prikazan je na Slici 3.13. Kako bi cijelo rješenje  $w(a)$  bilo kontinuirano,



Slika 3.12: Ujedinjenje tamna materija - tamna energija - tamna materija. Na slici su prikazana rješenja koja se spajaju u jednoj točki. Ovisnost kvadrata brzine zvuka  $c_s^2$ , parametra jednadžbe stanja  $w$  i gustoće energije (normalizirana po  $\rho/\rho_0$  u sadašnjosti). Slika je konstruirana za vrijednosti  $A = -1$ ,  $C = 1/2$ ,  $w_0 = -0.65$  i  $w_* = -0.85$ .



Slika 3.13: Ujedinjenje tamna materija - tamna energija - tamna materija. Na slici su prikazana rješenja koja se preklapaju. Ovisnost kvadrata brzine zvuka  $c_s^2$ , parametra jednadžbe stanja  $w$  i gustoće energije (normalizirana po  $\rho/\rho_0$  u sadašnjosti). Slika je konstruirana za vrijednosti  $A = -1$ ,  $C = 1/2$ ,  $w_{+,0} = -0.845$ ,  $w_{-,0} = -0.72$  i  $w_* = -0.88$ .

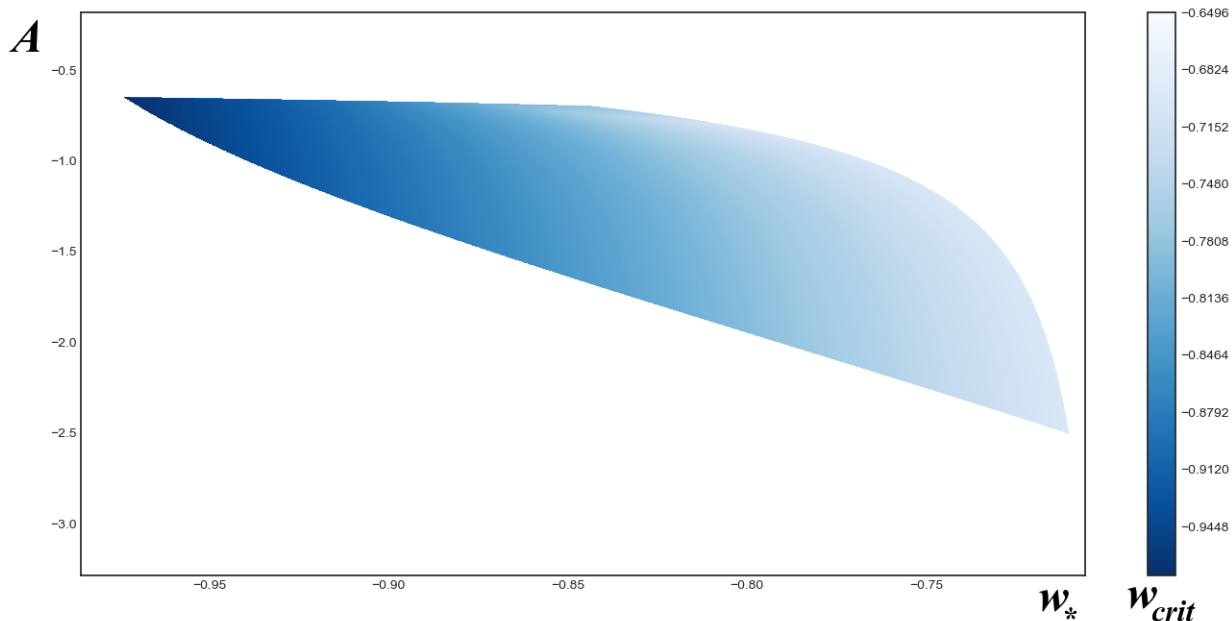
potrebno je da se intervali gdje je  $w(a)$  prikazan s  $w_+(a)$  ili  $w_-(a)$  spoje u

$$\tilde{a} = \sqrt{a_*^+ a_*^-}. \quad (3.83)$$

Može se pokazati da ovakvo rješenje  $w(a)$  više nema kontinuiranu prvu derivaciju u točki spoja lijeve i desne grane. Međutim, parametri se mogu postaviti tako da  $c_s^2$  bude pozitivan u cijelom intervalu faktora skale od 0 do  $\infty$ .

I ovdje je bitno razjasniti je li ponašanje ovog modela postignuto pažljivim odabirom parametara, ili je takvo ponašanje moguće za širi spektar parametara. Ovo se može utvrditi analizom vrijednosti parametara  $A$  i  $w_*$  za koje vrijedi  $0 \leq c_s^2 \leq 1$  za sve  $a$ . Dio parametarskog prostora gdje ovo vrijedi za konstantan  $w_0$  prikazan je na Slici 3.14. Ovdje za svaku kombinaciju  $A$  i  $w_*$  možemo izračunati najnižu vrijednost  $w(a)$  - označeni kao  $w_{crit}$  - za koju je ovo ispunjeno. Vrijednosti  $w_{crit}$  je također i vrijednost  $w$  u kojoj su





Slika 3.14: Ujedinjenje tamna materija - tamna energija - tamna materija: područje parametara  $w_*$  i  $A$  za koje vrijedi  $1 \leq c_s^2 \leq 0$  za  $w_0 = -0.7$ . Skala prikazana s desne strane prikazuje vrijednost  $w_{crit}$  što je najmanja vrijednost parametra jednadžbe stanja za koju se  $w_{\pm}(a)$  mogu poklopiti.

dva rješenja  $w_{\pm}(a)$  spojena.

### 3.2.4 Zaključak

Kroz analizu  $c_s^2(w)$  i implicitno zadane jednadžbe stanja pokazali smo da konkretan model (3.62) i njegova implicitno definirana varijanta (3.63) mogu pokazati zanimljiva svojstva ujedinjenja tamne materije i tamne energije, a sve to u različitim parametarskim režimima. Konkretno, demonstrirali smo modele ujedinjenja tamna materija - fantomska energija, tamna materija - tamna energija s konstantnim  $w$  i tamna materija - tamna energija - tamna materija.

Posebno zanimljiv slučaj događa se za vrijednosti  $C = 1$ ,  $A = -1$  i  $w_* = -1$  gdje se u prošlosti model asimptotski ponaša kao tamna materija, u budućnosti asimptotski teži ka kozmološkoj konstanti, a u uskom intervalu u sredini kvadrat brzine zvuka postaje značajno veći od nule, ali i dalje ostaje u intervalu  $[0, 1]$ .

## 4 Primjena modeliranja $c_s^2(w)$ na rezultatima iz literature i provjera suglasnosti sa svojstvima barotropskog fluida

U dosadašnjem tekstu predloženi su neki originalni modeli tamne materije i tamne energije koji su analizirani primjenom modeliranja preko  $c_s^2$  pri čemu su istražena neka njihova svojstva. U sljedećem odjeljku provest ćemo analizu većeg broja već postojećih modela tamne energije nastalih u proteklih dvadeset godina i provjeriti za koje od njih vrijede svojstva barotropskog fluida. Ova analiza prati istraživanja objavljena u [87].

### 4.1 Metodologija i neki analitički rezultati

Dosad je za objašnjavanje ekspanzije svemira predložen velik broj fizikalno različitih parametrizacija tamne energije. Međutim, kod mnogo njih te se razlike ne reflektiraju u dovoljno različitim oblicima evolucije tamne energije koji bi pomogli u usporedbi s rezultatima promatranja. Pokazalo se korisnim uspostaviti takve modele usmjerene na parametar jednadžbe stanja  $w$  kao funkciju faktora skale  $a$  ili crvenog pomaka  $z$ , a u svrhu jednostavnije usporedbe s promatranjima. No, prije same usporedbe, bilo bi korisno provjeriti svojstva samih matematičkih modela i vidjeti ima li njihova reprezentacija neka fizikalna ograničenja. Jedna takva provjera je upravo ponaša li se pojedini model tako da se tamnu energiju može promatrati kao barotropski fluid pri čemu pod barotropskim fluidom smatramo onaj čiji je tlak funkcija isključivo njegove gustoće energije. Ovdje se još nećemo baviti usporedbom s empirijskim podacima, nego isključivo konzistentnošću modela sa zadanim uvjetima koji se tiču brzine zvuka.

S obzirom da se modeli razvijaju uz korištenje jednog ili više slobodnih parametara, u sustavu jedinica gdje je brzina svjetlosti  $c = 1$  provjeravamo zadovoljava li brzina zvuka uvjet  $0 \leq c_s^2 \leq 1$  za cijeli interval kozmičke prošlosti  $[0, a_0]$ , i ako zadovoljava, za koje vrijednosti parametara. U sljedećim odjeljcima pozabavit ćemo se najprije analitičkim rješenjima dvaju modela, a zatim prijeći na numerička rješenja.

## 4.2 Analitički pristupi

Analitička rješenja su, naravno, najpoželjnija. Ako ih uspijemo dobiti, riješili smo cijeli interval koji istražujemo i olakšali posao provjeravanja slaže li se model s promatranjima. Međutim, zbog prirode i kompleksnosti nekih funkcija, to neće uvijek biti moguće, a i u slučajevima gdje je moguće, rezultat neće uvijek biti potpuno pregledan. U svakom slučaju, pronalaženje analitičkih rješenja vrlo je korisno ako želimo provjeriti ostale metode.

Kao primjer, ovdje ćemo prikazati analitičko rješavanje za jedan jednoparametarski [88] i jedan dvoparametarski model [40, 41].

### 4.2.1 Opći analitički pristup

Prije nego što krenemo na analitičko rješavanje modela, bilo bi dobro uspostaviti opći analitički mehanizam koji olakšava proračune. Konkretno, model koji se analizira u sljedećem odjeljku jednostavan je i može ga se riješiti i bez ovog pristupa, ali ovaj mehanizam možda može biti koristan i za neke druge modele.

Počinjemo s određivanjem analitičkih ograničenja iz uvjeta za barotropski fluid  $0 \leq c_s^2 \leq 1$  [86]. Konkretno, za  $1 + w > 0$  barotropski uvjet se može napisati kao

$$-(1 - w)(1 + w) \leq \frac{a}{3} \frac{dw}{da} \leq w(1 + w), \quad (4.84)$$

dok za  $1 + w < 0$ , uvjet glasi

$$w(1 + w) \leq \frac{a}{3} \frac{dw}{da} \leq -(1 - w)(1 + w). \quad (4.85)$$

Također, jasno je da se uvjet  $0 \leq c_s^2 \leq 1$  može napisati i kao

$$c_s^2(c_s^2 - 1) \leq 0, \quad (4.86)$$

što se, opet, može napisati i kao

$$\frac{f(a)g(a)}{9(1 + w)^2} \leq 0. \quad (4.87)$$

Uzimajući u obzir da parametar  $w$  promatramo kao funkciju faktora skale  $a$ , ove funkcije

možemo napisati kao

$$f(a) = 3w(1+w) - a \frac{dw}{da} \quad (4.88)$$

i

$$g(a) = 3(w-1)(1+w) - a \frac{dw}{da}. \quad (4.89)$$

Iz gornjeg postupka, a posebno iz jednadžbe (4.87) moguće je konstruirati parametarski prostor uz ograničenje  $f(a)g(a) \leq 0$  za sve  $a \in [0, a_0]$ . Ukoliko  $a \frac{dw}{da}$  promatramo kao funkciju  $w$ , ovaj uvjet možemo napisati i kao

$$f(w)g(w) \leq 0. \quad (4.90)$$

Za najveći broj parametrizacija ovaj analitički postupak se ne može provesti. Međutim, u sljedećem odjeljku primijenit ćemo ovaj postupak na modelu  $w = w_0 \frac{a}{a_0}$  i CPL modelu  $w = w_0 + w_1(1 - \frac{a}{a_0})$ .

#### 4.2.2 Model $w = w_0 \frac{a}{a_0}$

Ako krenemo od parametrizacije [88]

$$w = w_0 \frac{a}{a_0}, \quad (4.91)$$

iz (1.31) dobivamo

$$c_s^2 = w_0 \frac{a}{a_0} \frac{2 + 3w_0 \frac{a}{a_0}}{3(1 + w_0 \frac{a}{a_0})} = w \frac{2 + 3w}{3(1 + w)} = w \left( 1 - \frac{1}{3(1 + w)} \right). \quad (4.92)$$

Računamo derivacije  $c_s^2$  po  $w$ :

$$\frac{dc_s^2}{dw} = 1 - \frac{1}{3(1 + w)^2}, \quad (4.93)$$

$$\frac{d^2c_s^2}{dw^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{(1 + w)^3}. \quad (4.94)$$

Ekstremi funkcije  $c_s^2$  nalaze se u  $w_1 = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$  (maksimum) i  $w_2 = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$  (minimum). U oba ekstrema vrijedi  $w < 0$ . Za vrijednost  $w = -1$  kvadrat brzine zvuka  $c_s^2$  ima

singularitet što, kao što je dosad raspravljano, odgovara prijelazu granice kozmološke konstante.

Kako vrijeme protječe, parametar jednadžbe stanja  $w$  (4.91) ne mijenja predznak: kako  $a$  ide iz nule u  $a_0$  (sadašnjost),  $w$  prelazi iz 0 u  $w_0$ . Izgled funkcije, naravno, ovisi o  $w_0$ : ako je ovaj parametar pozitivan,  $w$  raste, a ako je negativan,  $w$  opada.

Za  $w_0 < 0$  (i, posljedično,  $w < 0$ ), iz jednadžbe (4.92) vidljivo je da je  $c_s^2$  negativan za  $-\frac{2}{3} < w < 0$ . Dakle, ako je  $w_0 > -\frac{2}{3}$ ,  $c_s^2$  je manji od nule tokom cijele kozmičke prošlosti, dok je za  $w_0 < -\frac{2}{3}$ ,  $c_s^2$  negativan za  $a$  od 0 do nekog konačnog  $a_* < a_0$ . U oba slučaja uvjet  $c_s^2 \geq 0$  nije ispunjen za cijelu kozmičku prošlost što znači da za  $w_0 < 0$  ovo nije prihvatljiv model tamne energije kao barotropskog fluida.

Za  $w_0 > 0$  funkcija  $c_s^2(a)$  nema ekstreme kad je  $w$  između 0 i  $w_0$ . Iz jednadžbe (4.93) vidljivo je da je  $\frac{dc_s^2}{dw}$  pozitivan kad je  $0 < w < w_0$ , a  $c_s^2(w)$  raste. Izraz (4.92) pokazuje da je  $c_s^2$  pozitivan u cijelom intervalu koji promatramo. Dakle, da bi  $0 \leq c_s^2 \leq 1$  bilo zadovoljeno u cijeloj kozmičkoj prošlosti, dovoljno je da vrijedi  $c_s^2(w_0) \leq 1$ . Jednostavnim računom dobivamo da je ovaj uvjet zadovoljen za

$$0 \leq w_0 \leq \frac{1 + \sqrt{37}}{6}. \quad (4.95)$$

S obzirom da cijeli ovaj interval vrijedi samo za  $w \geq 0$ , ova parametrizacija očito nije pogodna za model tamne energije kao barotropskog fluida.

### 4.2.3 Model CPL

Ovdje ćemo pokazati koliko se sam postupak komplicira ako uzmemo jedan samo malo složeniji, ali i dalje na prvi pogled iznimno jednostavan model: Chevallier-Polarski-Linder (CPL) [40, 41]. U ovom slučaju funkcije  $f(w)$  i  $g(w)$  su kvadratne funkcije po  $w$ . Konkretno:

$$c_s^2 \geq 0 : f(w) = 3w^2 + 2w + w_0 + w_1$$

i

$$c_s^2 \leq 1 : g(w) = 3w^2 - w + w_0 + w_1 - 3.$$

Za njihove nultočke dobivamo

$$f(w) = 0 : w_{\pm}^0 = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{1 - 3(w_0 + w_1)}}{3},$$

za  $1 - 3(w_0 + w_1) \geq 0$  i

$$g(w) = 0 : w_{\pm}^1 = \frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{37 - 12(w_0 + w_1)}}{6},$$

ako vrijedi  $37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0$ .

Sada treba definirati uvjete za  $f(w)$  i  $g(w)$ , konkretnije, hoće li ove funkcije biti veće ili manje od nule. Uvjeti, to jest skupovi vrijednosti, označavat će se slovom  $S$  i indeksima koji će prikazivati njihov položaj u ravnini  $w_0 - w_1$ .

Uvjet

$$\boxed{f(w) \geq 0}$$

vrijedi u dva slučaja. Ako funkcija  $f(w)$  nema nultočke, uvjet pišemo kao:

$$S_{01} : 1 - 3(w_0 + w_1) < 0 \Rightarrow w \in \langle -\infty, +\infty \rangle,$$

dok u suprotnom, ako imamo nultočke, vrijedi

$$S_{02} : 1 - 3(w_0 + w_1) \geq 0 \Rightarrow w \in \langle -\infty, w_-^0 \rangle \cup [w_+^0, +\infty).$$

Uvjet

$$\boxed{f(w) \leq 0}$$

može se napisati kao

$$S_{03} : 1 - 3(w_0 + w_1) \geq 0 \Rightarrow w \in [w_-^0, w_+^0].$$

Sljedeći uvjet

$$\boxed{g(w) \geq 0}$$

također ima dva slučaja. Ako funkcija  $g(w)$  nema nultočke, dobivamo

$$S_{11} : 37 - 12(w_0 + w_1) < 0 \Rightarrow w \in \langle -\infty, +\infty \rangle,$$

a ako  $g(w)$  ima nultočke, dobivamo

$$S_{12} : 37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \Rightarrow w \in \langle -\infty, w_-^1 \rangle \cup [w_+^1, +\infty).$$

S druge strane,

$$\boxed{g(w) \leq 0}$$

daje

$$S_{13} : 37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \Rightarrow w \in [w_-^1, w_+^1].$$

Dodatni uvjet je da sve vrijednosti  $w$  u intervalu  $[0, a_0]$  moraju biti unutar ovih intervala koje smo dosad dobili. S obzirom da je  $w(0) = w_0 + w_1$  i  $w(a_0) = w_0$ , vidljivo je da će daljnji postupak ovisiti o predznaku  $w_1$ . (Vrijednost  $w_1 = 0$  ne uzimamo u obzir jer podrazumijeva trivijalan slučaj  $w = w_0$ ).

Krećemo s

$$\boxed{S^+ : w_1 > 0}$$

Dakle, interval za  $w$  je

$$\boxed{w \in [w_0, w_0 + w_1]}$$

Uvjeti za nenegativni  $f(w)$  sada glase

$$S_{01}^+ : 1 - 3(w_0 + w_1) < 0$$

i

$$S_{02}^+ : [w_0, w_0 + w_1] \subseteq \langle -\infty, w_-^0 \rangle \cup [w_+^0, +\infty).$$

Iz ovoga slijedi

$$1 - 3(w_0 + w_1) \geq 0 \cap ((w_0 + w_1 \leq w_-^0) \cup (w_0 \geq w_+^0)).$$

Uvjet za nepozitivni  $f(w)$  glasi

$$S_{03}^+ : [w_0, w_0 + w_1] \subseteq [w_-^0, w_+^0],$$

što daje

$$1 - 3(w_0 + w_1) \geq 0 \cap (w_0 \geq w_-^0) \cap (w_0 + w_1 \leq w_+^0).$$

Uvjeti za nenegativni  $g(w)$  su

$$S_{11}^+ : 37 - 12(w_0 + w_1) < 0$$

i

$$S_{12}^+ : [w_0, w_0 + w_1] \subseteq \langle -\infty, w_-^1 \rangle \cup [w_+^1, +\infty),$$

iz čega slijedi

$$37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \cap ((w_0 + w_1 \leq w_-^1) \cup (w_0 \geq w_+^1)).$$

Za nepozitivni  $g(w)$  mora vrijediti

$$S_{13}^+ : [w_0, w_0 + w_1] \subseteq [w_-^1, w_+^1],$$

što daje

$$37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \cap (w_0 \geq w_-^1) \cap (w_0 + w_1 \leq w_+^1).$$

Za drugi dio razmatranja uzimamo

$$\boxed{S^- : w_1 < 0}$$

Interval u kojem se  $w$  mijenja sada je

$$\boxed{w \in [w_0 + w_1, w_0]}.$$

Uvjeti za nenegativni  $f(w)$  su

$$S_{01}^- : 1 - 3(w_0 + w_1) < 0$$



i

$$S_{02}^- : [w_0 + w_1, w_0] \subseteq \langle -\infty, w_-^0 \rangle \cup [w_+^0, +\infty),$$

što daje

$$1 - 3(w_0 + w_1) \geq 0 \cap ((w_0 \leq w_-^0) \cup (w_0 + w_1 \geq w_+^0)).$$

Uvjet za nepozitivni  $f(w)$  daje

$$S_{03}^- : [w_0 + w_1, w_0] \subseteq [w_-^0, w_+^0],$$

to jest

$$1 - 3(w_0 + w_1) \geq 0 \cap (w_0 + w_1 \geq w_-^0) \cap (w_0 \leq w_+^0).$$

Uvjeti za nenegativni  $g(w)$  su

$$S_{11}^- : 37 - 12(w_0 + w_1) < 0$$

i

$$S_{12}^- : [w_0 + w_1, w_0] \subseteq \langle -\infty, w_-^1 \rangle \cup [w_+^1, +\infty),$$

iz čega slijedi

$$37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \cap ((w_0 \leq w_-^1) \cup (w_0 + w_1 \geq w_+^1)).$$

Uvjet za nepozitivni  $g(w)$  je

$$S_{13}^- : [w_0 + w_1, w_0] \subseteq [w_-^1, w_+^1],$$

iz čega slijedi

$$37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \cap (w_0 + w_1 \geq w_-^1) \cap (w_0 \leq w_+^1).$$

Ukoliko sve ove rezultate sažmemo u skup uvjeta koji će ograničiti parametarski prostor  $w_0 - w_1$ , to se može napisati kao

$$S^+ \cap \left( [(S_{01}^+ \cup S_{02}^+) \cap S_{13}^+] \cup [(S_{11}^+ \cup S_{12}^+) \cap S_{03}^+] \right)$$

∪

$$S^- \cap \left( [(S_{01}^- \cup S_{02}^-) \cap S_{13}^-] \cup [(S_{11}^- \cup S_{12}^-) \cap S_{03}^-] \right).$$

Međutim, ovaj se izraz može pojednostavniti. Ako krenemo od prvog dijela, njegova druga polovica glasi

$$\tilde{S}^+ = S^+ \cap [(S_{11}^+ \cup S_{12}^+) \cap S_{03}^+],$$

što je jednako

$$(S^+ \cap S_{11}^+ \cap S_{03}^+) \cup (S^+ \cap S_{12a}^+ \cap S_{03}^+) \cup (S^+ \cap S_{12b}^+ \cap S_{03}^+),$$

pri čemu su

$$S_{12a}^+ = 37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \cap w_0 + w_1 \leq \frac{1 - \sqrt{37 - 12(w_0 + w_1)}}{6},$$

$$S_{12b}^+ = 37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \cap w_0 \geq \frac{1 + \sqrt{37 - 12(w_0 + w_1)}}{6}.$$

Krenimo redom. Odmah je jasno da  $w_0 + w_1 > \frac{37}{12}$  iz  $S_{11}^+$  nije kompatibilno s  $w_0 + w_1 \leq \frac{1}{3}$  iz  $S_{03}^+$ . Dakle

$$S^+ \cap S_{11}^+ \cap S_{03}^+ = \emptyset.$$

Dalje, možemo pokazati da je  $S_{12a}^+$  ekvivalentno

$$w_0 + w_1 \leq -1.$$

Za sve  $S^+$  vrijedi  $w_1 > 0$ , što se može napisati i kao  $w_0 + w_1 > w_0$ . U kombinaciji s drugim dijelom  $S_{03}^+$  dobivamo

$$3(w_0 + w_1) + 1 > -\sqrt{1 - 3(w_0 + w_1)},$$

što je ekvivalentno

$$w_0 + w_1 > -1.$$

Ove dvije nejednadžbe su očito u kontradikciji, dakle

$$S^+ \cap S_{12a}^+ \cap S_{03}^+ = \emptyset.$$

I konačno, za treći dio  $S_{03}^+$  može se pokazati da je ekvivalentan

$$w_0 + w_1 \leq 0,$$

što, s obzirom na opći uvjet ovog dijela  $w_1 > 0$  daje

$$w_0 < 0.$$

Drugi dio  $S_{12}^b$  daje

$$w_0 \geq \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{37 - 12(w_0 + w_1)}}{6}.$$

tako da i ovdje imamo kontradikciju, dakle

$$S^+ \cap S_{12b}^+ \cap S_{03}^+ = \emptyset.$$

Sve ovo zajedno znači  $\tilde{S}^+ = \emptyset$ .

Na isti način provjeravamo

$$\tilde{S}^- = S^- \cap [(S_{11}^- \cup S_{12}^-) \cap S_{03}^-],$$

što možemo raspisati kao

$$(S^- \cap S_{11}^- \cap S_{03}^-) \cup (S^- \cap S_{12a}^- \cap S_{03}^-) \cup (S^- \cap S_{12b}^- \cap S_{03}^-),$$

gdje su

$$S_{12a}^- = 37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \cap w_0 \leq \frac{1 - \sqrt{37 - 12(w_0 + w_1)}}{6},$$

$$S_{12b}^- = 37 - 12(w_0 + w_1) \geq 0 \cap w_0 + w_1 \geq \frac{1 + \sqrt{37 - 12(w_0 + w_1)}}{6}.$$

Kao i u prethodnom dijelu,  $S_{11}^-$  daje  $w_0 + w_1 > \frac{37}{12}$  što je u kontradikciji s  $w_0 + w_1 \leq \frac{1}{3}$  iz  $S_{03}^-$  tako da je

$$S^- \cap S_{11}^- \cap S_{03}^- = \emptyset.$$

Što se tiče drugog izraza, drugi dio  $S_{03}^-$  daje  $w_0 + w_1 \geq -1$ , to jest  $w_0 > -1$ . Međutim, i ovo daje kontradikciju s drugim dijelom  $S_{12a}^-$ :

$$w_0 \leq \frac{1 - \sqrt{37 - 12(w_0 + w_1)}}{6}$$

što sve zajedno daje

$$S^- \cap S_{12a}^- \cap S_{03}^- = \emptyset.$$

I na kraju, drugi dio  $S_{12b}^-$  daje  $w_0 + w_1 \geq 1$  što je u kontradikciji s  $w_0 + w_1 \leq 1/3$  i daje

$$S^- \cap S_{12b}^- \cap S_{03}^- = \emptyset.$$

Sve ovo zajedno daje rezultat  $\tilde{S}^- = \emptyset$ .

Na kraju, ukupno parametarsko područje može se napisati kao

$$\left( S^+ \cap [(S_{01}^+ \cup S_{02}^+) \cap S_{13}^+] \right) \cup \left( S^- \cap [(S_{01}^- \cup S_{02}^-) \cap S_{13}^-] \right).$$

Ovi uvjeti u potpunosti odgovaraju parametarskom području koje je dobiveno na grafu a) na Slici 4.15.

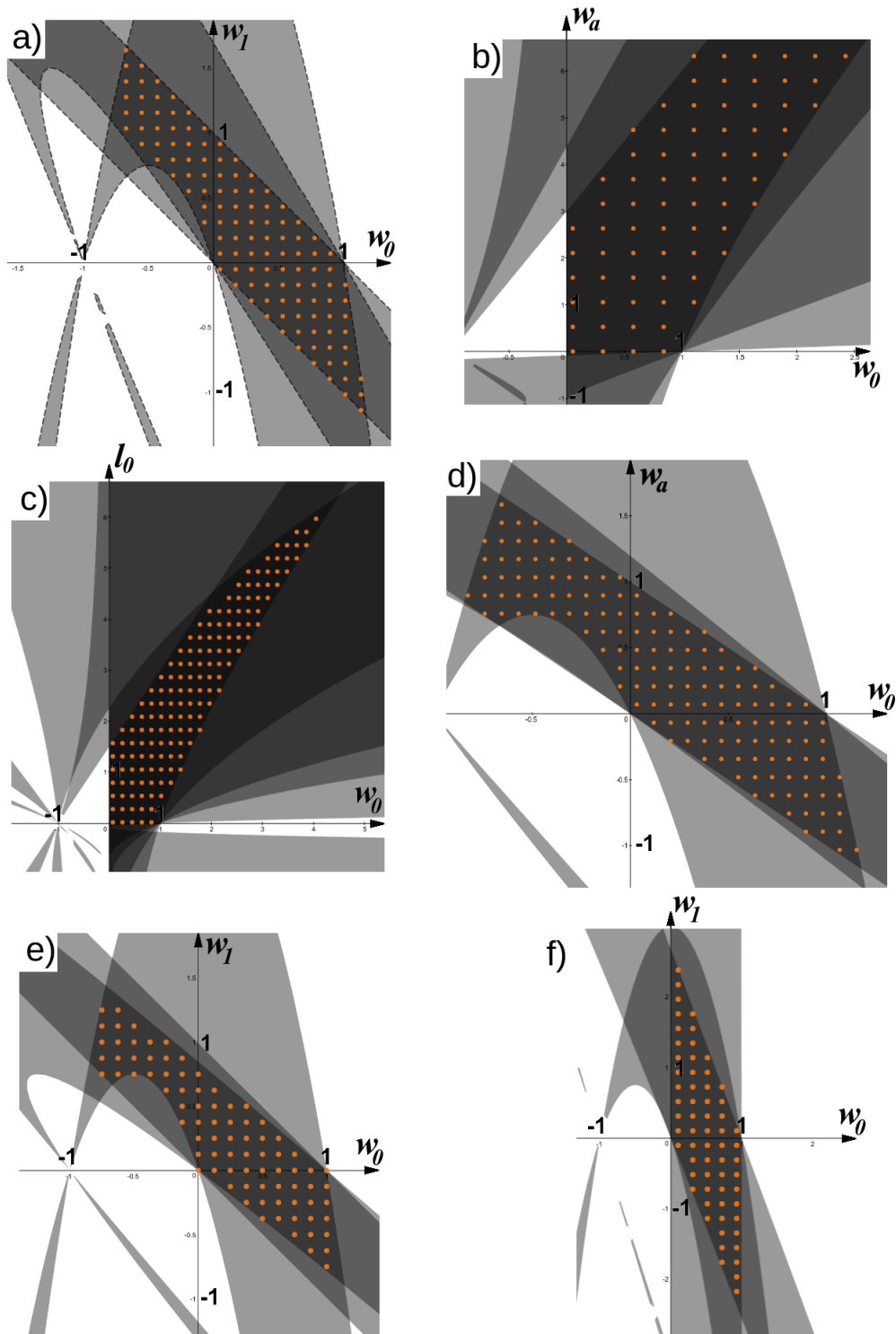
### 4.3 Pregled numeričkih rezultata

Iz prethodnog odlomka vidljivo je koliko analitičko računanje čak i jednog od najjednostavnijih modela može biti složeno, a u mnogim slučajevima i nemoguće. Zbog toga će daljnja analiza biti napravljena samo numerički.

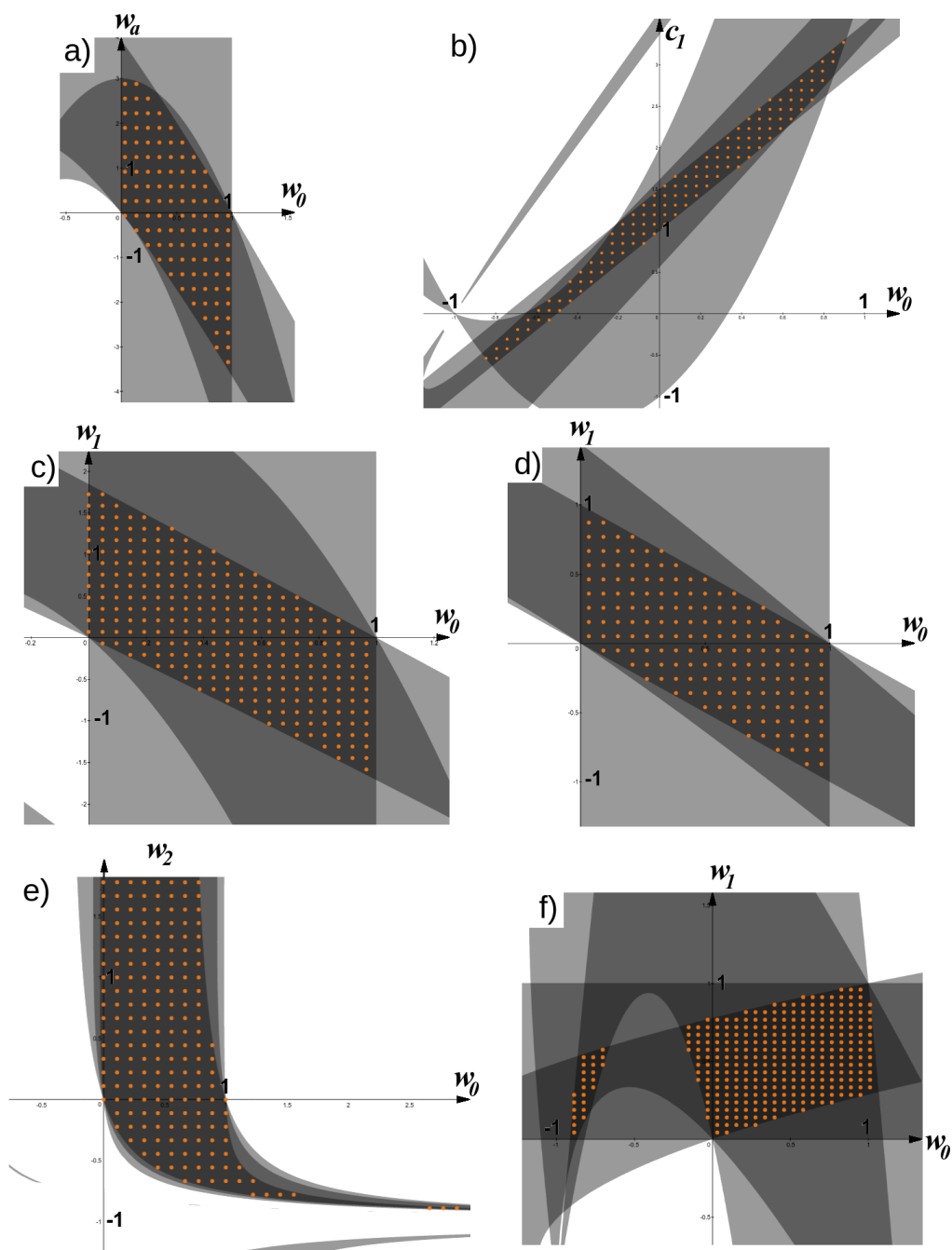
Kao što je već napomenuto, da bi se tamna energija mogla smatrati barotropskim fluidom, osnovni uvjet je da kvadrat brzine zvuka bude veći od nule i manji od jedan, to jest  $0 \leq c_s^2(a) \leq 1$ , za cijeli interval  $0 \leq a \leq a_0$ .

Za odabrane parametrizacije odabrane su dvije metode<sup>1</sup>. U obje metode dobivene su točke i područja u parametarskom prostoru razapetom između dva parametra.

<sup>1</sup>Grafovi su napravljeni uz pomoć grafičkog alata Desmos, <https://www.desmos.com/>

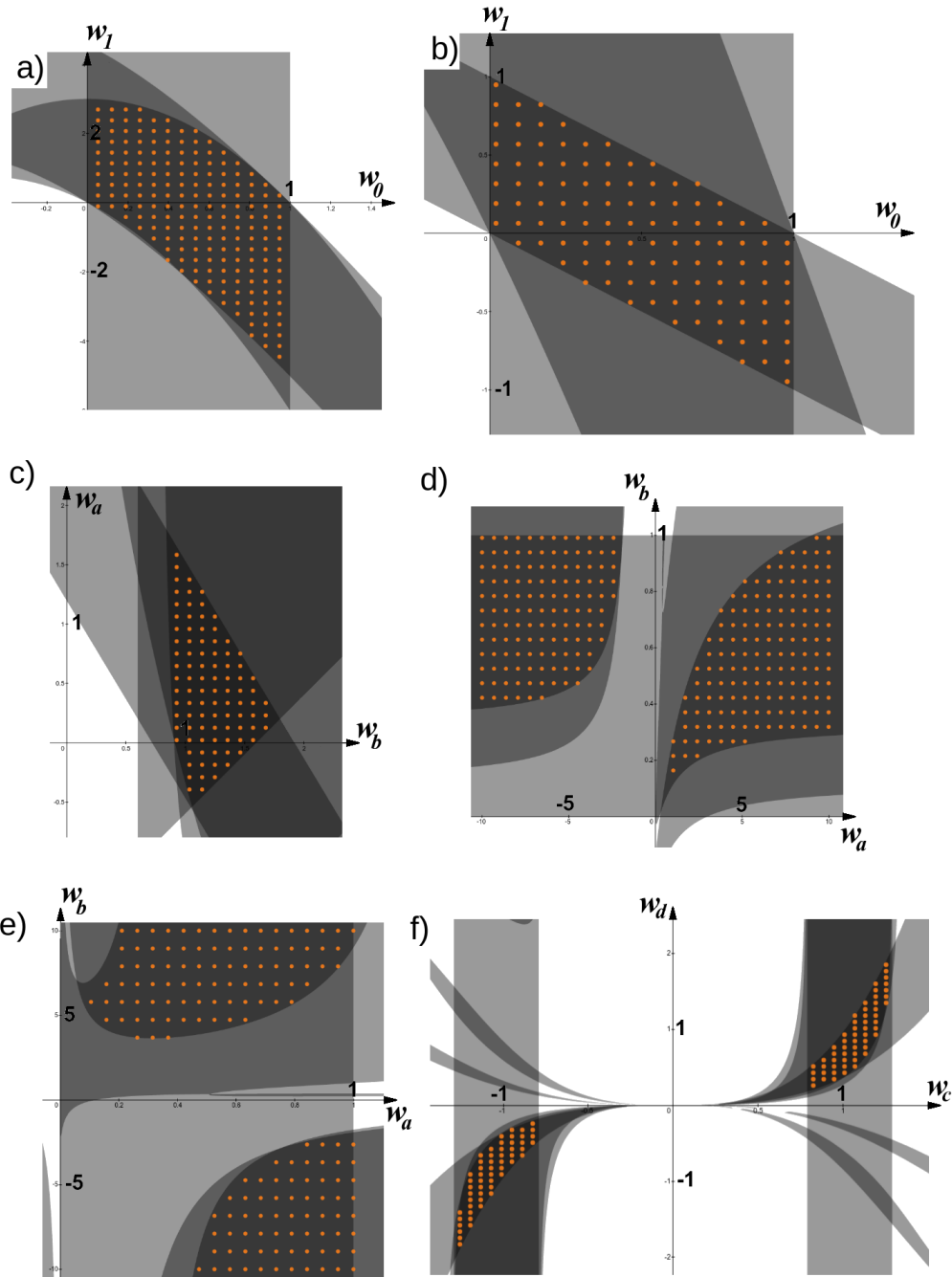


Slika 4.15: Dvoparametarski modeli i njihovi dozvoljeni parametarski prostori: [40, 41] na grafu a), [43] (model 1) na grafu b), [43] (model 2) na grafu c), [112] (model 1) na grafu d), [44] na grafu e) i [120] na grafu f). Oznaka  $w_0$  na svim grafovima označava trenutnu vrijednost funkcije  $w(a)$ . Ostale oznake odnose se na parametre u njihovim parametrizacijama.



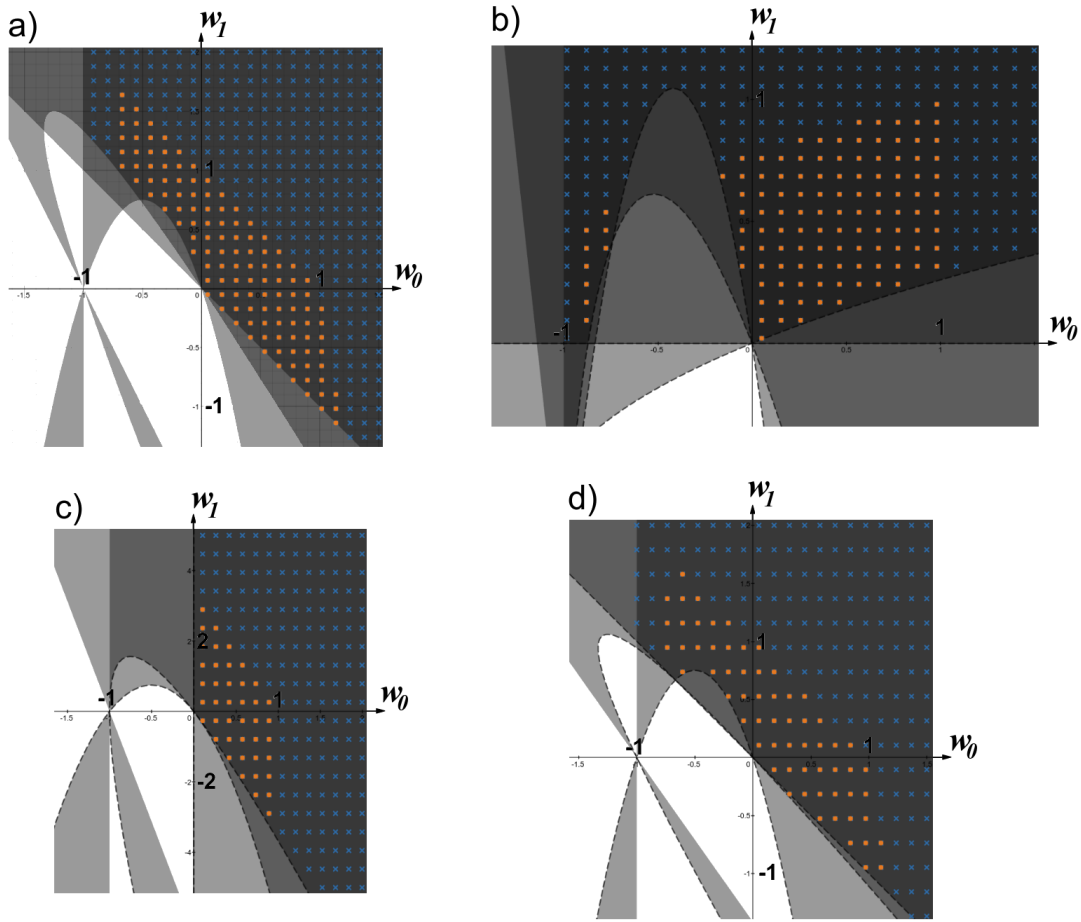
Slika 4.16: Dvoparametarski modeli i njihovi dozvoljeni parametarski prostori: [45] na grafu a), [107] na grafu b), [108] (model 1) na grafu c), [108] (model 2) na grafu d), [111] na grafu e) i troparametarski model [104] za  $a_* = a_0/3$  na grafu f). Oznaka  $w_0$  na svim grafovima označava trenutnu vrijednost funkcije  $w(a)$ . Ostale oznake odnose se na parametre u njihovim parametrizacijama.

1. Osjenčana područja predstavljaju dio prostora dobiven iz analitičkog rješenja za tri ili četiri vrijednosti faktora skale  $a$ : 0,  $a_0$  i jedna ili dvije između (najčešće, ali



Slika 4.17: Troparametarski modeli i njihovi dozvoljeni parametarski prostori: [105] (model 1) za  $n = 3$  na grafu a), [112] (model 2) i [105] za  $n = 3$  na grafu b) i [110] za  $w_0 = -0.6$  na grafu c) te četveroparametarski modeli [101] za  $p = 1$ ,  $w_0 = -0.6$  i  $(\frac{a_s}{a_0})^p = \frac{w_b w_a - w_0}{w_a w_0 - w_b}$  na grafu d), [102] za  $p = 1$ ,  $w_0 = -0.6$  i  $(\frac{a_c}{a_0})^p = \frac{w_a w_b - w_0}{w_0 - w_a}$  na grafu e) i [119]  $w_0 = -0.6$  i  $w_b = -1$  na grafu f). Oznaka  $w_0$  na svim grafovima označava trenutnu vrijednost funkcije  $w(a)$ . Ostale oznake odnose se na parametre u njihovim parametrizacijama.

ne uvijek,  $a = a_0/2$ , u ovisnosti o tome koja vrijednost je dala najbolju ilustraciju).



Slika 4.18: Grafovi parametarskih prostora za  $0 \leq c_s^2 \leq 1$  (točke) i  $0 \leq c_s^2$  (točke i križići) za modele: [40, 41] na grafu a), [104] za  $a_* = a_0/3$  na grafu b), [45] na grafu c) i [112] (model 1) za  $n = 3$  na grafu d). Oznaka  $w_0$  na svim grafovima označava trenutnu vrijednost funkcije  $w(a)$ . Ostale oznake odnose se na parametre u njihovim parametrizacijama.

Presjek ovih područja otprilike daje rješenje vrijednosti  $0 \leq c_s^2(a) \leq 1$  za  $0 \leq a \leq a_0$

2. Točke su dobivene numerički. Uvjet  $0 \leq c_s^2(a) \leq 1$  za  $0 \leq a \leq a_0$  provjeren je za veći broj vrijednosti faktora skale  $a$ . U najvećem broju slučajeva, uzete su vrijednosti  $a = a_0 e^{i/10}$  za  $i$  kao cijeli broj od -100 do 0 kako bi se što bolje provjerilo područje oko  $a = 0$ , dok su vrijednosti oko  $a = a_0$  bile rjeđe. Ukoliko je za svaki  $a$  bio zadovoljen gornji uvjet, u graf parametarskog prostora ucrtana je točka na koordinatama parametara koji su provjeravani.

Nakon što je proveden ovaj test, uvjet je ublažen tako da se provjeravalo za koje parametre modela vrijedi samo  $c_s^2 > 0$  bez uvjeta  $c_s^2 < 1$ . Dobivena su šira područja



parametara uz sljedeće karakteristike:

1. Ukoliko je uvjet  $c_s^2(a) \in [0, 1]$  vrijedio samo za vrijednosti  $w_0 > 0$ , područje u parametarskom prostoru za koje je uvjet zadovoljen proširilo se isključivo u smjeru  $w_0 > 0$ .
2. Ukoliko se dobiveno područje nalazilo u dijelu prostora  $w_0 < 0$  bez da je došlo do vrijednosti  $w_0 = -1$ , proširilo se prema vrijednosti  $w_0 = -1$ , ali je nije prešlo.

Na slikama su prikazani modeli za koje postoje kombinacije parametara za koje vrijedi uvjet  $0 \leq c_s^2 \leq 1$  za  $0 \leq a \leq a_0$ . Na Slikama 4.15 i 4.16 prikazani su dvoparametarski modeli kod kojih je  $w_0$ , prikazan na osi  $x$ , vrijednost današnjeg  $w_0$ . S grafova je odmah vidljivo koji modeli omogućuju ubrzanu ekspanziju svemira, a to su oni kod kojih postoji područje  $w < -1/3$ .

Na slici 4.17 prikazani su troparametarski i četveroparametarski modeli, dok su dozvoljena parametarska područja s ublaženim uvjetom prikazana na Slici 4.18.

Kao što je vidljivo iz ovih rezultata, velik broj modela zadovoljava uvjet  $0 \leq c_s^2 \leq 1$  za  $0 \leq a \leq a_0$  za neku kombinaciju parametara. I to, logično, što je veći broj parametara, to je veći i udio takvih modela. Međutim, samo manji broj dvoparametarskih modela sadrži vrijednosti koje se podudaraju s činjenicom da se širenje svemira ubrzava ( $w < -1/3$ ) - na slici 4.15 to su grafovi a), d) i e) (modeli [40, 41, 44, 112]), a na slici 4.16 to je graf b) (model [108]) - dok gotovo nijedan nije blizu vrijednosti  $w_0 = -1$ . Ova se situacija malo popravlja ukoliko ukinemo uvjet  $c_s^2 < 1$  jer tada vrijednosti  $w_0$  mogu doći znatno bliže vrijednosti  $-1$ .

U Tablici 4.1 prikazani su sumarni rezultati ovog pregleda, to jest odgovor na pitanje koji od istraženih modela prikazuje komponentu koja ima svojstva barotropskog fluida, a koji ne. U prvom stupcu tablice navedena je formula parametrizacije koja se istražila, u drugom stupcu referenca na rad u kojem je parametrizacija uvedena, dok su u trećem i četvrtom stupcu prikazani rezultati: prikazuje li pojedina parametrizacija komponentu sa svojstvima barotropskog fluida i, ako da, pod kojim parametarskim uvjetima.

Formula modela $w(a)$	Referenca	$0 \leq c_s^2 \leq 1$ za $0 \leq a \leq a_0$	Parametarsko područje
<b>Jednparametarski modeli</b>			
$w(a) = \frac{w_0}{a_0} a$	[88]	da	$w_0 \in [0, \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{37}}{6}]$
$w(a) = \frac{w_0}{a_0} a e^{1 - \frac{a}{a_0}}$	[88]	da	$w_0 \in [0, 1]$
$w(a) = -1 + \frac{\frac{2\alpha}{3} \frac{a}{a_0} (1 - \frac{a}{a_0})}{1 + \alpha (1 - \frac{a}{a_0})^2}$	[113]	ne	
<b>Dvoparametarski modeli</b>			
$w(a) = w_0 + w_a \ln \frac{a}{a_0}$	[99]	ne	
$w(a) = w_0 + w_a (\frac{a_0}{a} - 1)$	[100]	ne	
$w(a) = w_0 + w_1 (1 - \frac{a}{a_0})$	[40, 86]	da	Slika 4.15a
$w(a) = \frac{w_0}{1 - w_a \ln \frac{a}{a_0}}$	[43]	da	Slika 4.15b
$w(a) = \frac{w_0}{(1 - l_0 \ln \frac{a}{a_0})^2}$	[43]	da	Slika 4.15c
<b>"Sqrt model"</b> $w(a) = w_0 + w_a \frac{\frac{a_0}{a} - 1}{\sqrt{1 + (\frac{a_0}{a} - 1)^2}}$	[112]	da	Slika 4.15d
$w(a) = w_0 + w_1 \frac{\frac{a_0}{a} (\frac{a_0}{a} - 1)}{1 + (\frac{a_0}{a} - 1)^2}$	[44]	da	Slika 4.15e
$w(a) = w_0 - w_1 \frac{a}{a_0} \ln \frac{a}{a_0}$	[120]	da	Slika 4.15f
$w(a) = w_0 + w_a \frac{a}{a_0} (1 - \frac{a}{a_0})$	[45]	da	Slika 4.16a
$w(z) = w_0 + w_a (\frac{\ln(2+z)}{1+z} - \ln 2)$	[106]	ne	
$w(a) = w_0 + w_1 (\frac{a}{a_0} \sin(\frac{a_0}{a}) - \sin 1)$	[106]	ne	
$w(a) = -1 + c_1 (2 - \frac{a}{a_0}) + c_2 (2 - \frac{a}{a_0})^2$	[107]	da	Slika 4.16b za $c_2 = w_0 - c_1 + 1$
$w(a) = w_0 + w_1 \frac{\frac{a_0}{a} - 1}{1 + (\frac{a_0}{a} - 1)^2}$	[108]	da	Slika 4.16c
$w(a) = w_0 + w_1 \frac{(\frac{a_0}{a} - 1)^2}{1 + (\frac{a_0}{a} - 1)^2}$	[108]	da	Slika 4.16d
$w(z) = w_0 + w_a (\frac{\ln \sqrt{1+z^2} - \ln \sqrt{z}}{1+z} + \ln \sqrt{2})$	[109]	ne <sup>2</sup>	
$w(a) = w_1 + \frac{1}{3} \frac{\frac{a_0}{a}}{w_2 + \frac{a_0}{a}}$	[111]	da	Slika 4.16e za $w_1 = w_0 - \frac{1}{3} \frac{1}{w_2 + 1}$

<sup>2</sup> $c_s^2 < 0$  za male vrijednosti  $a$  ( $\frac{a}{a_0} < 10^{-8}$  ili manje, u ovisnosti o parametrima)

Troparametarski modeli			
$w(a) = w_0 + w_a \left( \frac{\ln(\xi + \frac{a_0}{a})}{\xi + \frac{a_0}{a} - 1} - \frac{\ln(\xi + 1)}{\xi} \right)$	[109]	ne <sup>3</sup>	
$w(a) = w_0 + \frac{w_1 - w_0}{z_*} \left( \frac{a_0}{a} - 1 \right), a > a_*$ $w(a) = w_1, a < a_*$	[104]	da	Slika 4.16f za $a_* = a_0/3$
$w(a) = w_0 + w_1 \left( 1 - \frac{a}{a_0} \right) \left( \frac{a}{a_0} \right)^{n-1}$	[105]	da	Slika 4.17a za $n = 3$
”Generalizirani CPL” $w(a) = w_0 + w_1 \left( 1 - \frac{a}{a_0} \right)^n$	[105, 112]	da	Slika 4.17b za $n = 3$
$w(z) = \frac{a_1 + 3(\Omega_{m0} - 1) - 2a_1 z - a_2(z^2 + 2z - 2)}{3(1 - \Omega_{m0} + a_1 z + 2a_2 z + a_2 z^2)}$	[103]	ne	
$w = \frac{w_0 + (w_0 + w_a) \left( \frac{a_0}{a} - 1 \right)}{1 + (1 + w_b) \left( \frac{a_0}{a} - 1 \right)}$	[110]	da	Slika 4.17c za $w_0 = -0.6$
$w(a) = \frac{w_0 + w_1 \ln \frac{a}{a_0}}{1 + w_2 \ln \frac{a}{a_0}}$	[110]	ne	
Četveroparametarski modeli			
$w(a) = w_a w_b \frac{\left( \frac{a}{a_0} \right)^p + \left( \frac{a_*}{a_0} \right)^p}{w_b \left( \frac{a}{a_0} \right)^p + w_a \left( \frac{a_*}{a_0} \right)^p}$	[101]	da	Slika 4.17d za $p = 1$ , $w_0 = -0.6$ $\left( \frac{a_*}{a_0} \right)^p = \frac{w_b w_a - w_0}{w_a w_0 - w_b}$
$w(a) = w_a \frac{w_b \left( \frac{a}{a_0} \right)^p + \left( \frac{a_c}{a_0} \right)^p}{\left( \frac{a}{a_0} \right)^p + \left( \frac{a_c}{a_0} \right)^p}$	[102]	da	Slika 4.17e za $p = 1$ , $w_0 = -0.6$ $\left( \frac{a_c}{a_0} \right)^p = \frac{w_a w_b - w_0}{w_0 - w_a}$
$w(a) = w_a + \frac{w_b}{\left( w_c + w_d \left( \frac{a_0}{a} - 1 \right) \right)^2}$	[119]	da	Slika 4.17f za $w_0 = -0.6$ , $w_a = w_0 - \frac{w_b}{w_c^2}$ i $w_b = -1$

Tablica 4.1: Pregled analiziranih modela, parametrizacija  $w(a)$  (ili  $w(z)$ ) i dozvoljena parametarska područja.

<sup>3</sup>  $c_s^2 < 0$  za male vrijednosti  $a$  ( $\frac{a}{a_0} < 10^{-8}$  ili manje, u ovisnosti o parametrima)

Ono što treba napomenuti je da je ovo isključivo teorijsko razmatranje, ali od značaja za usporedbu s opažaćkim rezultatima. Precizniji i konkretniji rezultati mogli bi se dobiti usporedbom onih modela kod kojih se tamna energija ponaša kao barotropski fluid s izravnim rezultatima promatranja. To bi vjerojatno dodatno suzilo parametarske prostore koji su ovdje prikazani.

## 5 Opis modela barotropskih fluida preko kinetičke k-esencije

U ovom poglavlju prate se rezultati istraživanja objavljeni u [114]. Opis tamne energije preko skalarnog polja svoje korijene ima još u modelima rane inflacije i tek se kasnije započelo s njegovom primjenom u pokušajima objašnjavanja kasne ekspanzije svemira. Ovdje ćemo pokušati povezati koncept k-esencije s metodom proučavanja tamne energije preko kvadrata brzine zvuka i parametra jednadžbe stanja kako bismo povezali njezina makroskopska i mikroskopska svojstva. Ovaj pristup omogućava formulaciju modela u okviru Lagrangeove teorije polja što povezuje kozmologiju s drugim područjima fizike. Također, ukoliko nam je poznat razvoj  $c_s^2$  i  $w$  kroz povijest svemira, rezultati se mogu usporediti s rezultatima promatranja i moći će se postaviti neke granice na postojeće modele.

U dijelu koji slijedi, iskoristit ćemo model čisto kinetičke k-esencije gdje je gustoća Lagragiana isključivo funkcija kinetičkog člana

$$\mathcal{L} = F(X) \quad (5.96)$$

i

$$X = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \quad (5.97)$$

i uspostaviti neke modele preko kojih ćemo pokušati dobiti funkcije  $X$  i  $F$  u ovisnosti o parametru  $w$  i zatim izračunati funkciju  $F(X)$ .

Počinjemo s pronalaženjem reprezentacije funkcije  $F(X)$  ekvivalentne savršenom fluidu [115–118]. U ovoj reprezentaciji četverobrzina fluida jednaka je  $u_\mu = \frac{\nabla_\mu\phi}{\sqrt{2X}}$ , dok gustoća energije ima oblik

$$\rho = 2XF_X - F, \quad (5.98)$$

gdje indeksom  $X$  označavamo derivaciju po  $X$ . Tlak je

$$p = F. \quad (5.99)$$

Brzina zvuka je, zbog toga,

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{p_X}{\rho_X} = \frac{F_X}{F_X + 2XF_{XX}}, \quad (5.100)$$

a parametar jednadžbe stanja

$$w = -\frac{F}{F - 2XF_X}. \quad (5.101)$$

### 5.1 Prikaz modela $c_s^2(w)$ kao preko čisto kinetičke $k$ -esencije

Uvrštavanjem definicije (kvadrata) brzine zvuka u jednadžbu kontinuiteta

$$d\rho + 3(p + \rho)\frac{da}{a} = 0 \quad (5.102)$$

dobivamo:

$$a\frac{dp}{da} = -3(1 + w)c_s^2\rho. \quad (5.103)$$

Kombiniranjem s (5.99) dobivamo

$$a\frac{dF}{da} = -3\frac{1 + w}{w}c_s^2F. \quad (5.104)$$

Međutim, iz već dobivenog (5.101) proizlazi

$$XF_X = \frac{1 + w}{2w}p. \quad (5.105)$$

S obzirom da je cilj razmatranje  $c_s^2 = c_s^2(w)$ , preformulirat ćemo izraz (5.104). Jednadžba kontinuiteta može se napisati kao

$$\frac{dw}{(1 + w)(c_s^2 - w)} = -3\frac{da}{a}, \quad (5.106)$$

što nam omogućava da uklonimo faktor skale  $a$  iz izraza (5.104) tako da dobivamo

$$\frac{dF}{F} = \frac{c_s^2}{w(c_s^2 - w)}dw, \quad (5.107)$$

$$\frac{dX}{X} = 2 \frac{c_s^2}{(1+w)(c_s^2-w)} dw. \quad (5.108)$$

Ovo su općeniti izrazi koji predstavljaju temelj ovog pristupa. Predloženi su u [114] kao posebno odgovarajući za modele  $c_s^2(w)$ , a kad su integrabilni, omogućavaju definiranje modela k-esencije kao  $(F(w), X(w))$ . Ukoliko se  $X(w)$  može invertirati, to znači da je lako doći do eksplicitnog oblika  $F = F(X)$ .

U sljedećem odjeljku iznijet ćemo nekoliko primjera gdje se ovaj pristup može najbolje pokazati.

Izrazi (5.107) i (5.108) se mogu napisati i kao

$$\frac{dF}{F} = \left[ \frac{1}{c_s^2-w} + \frac{1}{w} \right] dw, \quad (5.109)$$

$$\frac{dX}{X} = 2 \left[ \frac{1}{c_s^2-w} + \frac{1}{1+w} - \frac{1}{(1+w)(c_s^2-w)} \right] dw. \quad (5.110)$$

Njihovim kombiniranjem dobivamo jednadžbu

$$2 \frac{dF}{F} - \frac{dX}{X} = 2 \frac{dw}{w} - 2 \frac{dw}{1+w} + 2 \frac{dw}{(c_s^2-w)(1+w)}. \quad (5.111)$$

Korištenjem (5.106) ovo se može transformirati u

$$2 \frac{dF}{F} - \frac{dX}{X} = 2 \frac{dw}{w} - 2 \frac{dw}{1+w} - 6 \frac{da}{a}, \quad (5.112)$$

što se može integrirati tako da dobivamo

$$\left( \frac{F}{F_0} \right)^2 \frac{X_0}{X} = \left( \frac{w}{w_0} \right)^2 \left( \frac{1+w_0}{1+w} \right)^2 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-6}, \quad (5.113)$$

pri čemu indeks 0 vrijednosti parametara u sadašnjem trenutku.

U onim modelima za koje možemo dobiti analitički  $w = w(a)$ , jednadžba (5.113) daje  $F^2/X$  kao funkciju od  $a$ .

## 5.2 Analitička rješenja za modele $c_s^2(w)$

Nakon uvođenja metodologije, u nastavku će biti predstavljena i neka rješenja koja demonstriraju koji se rezultati ovom metodom mogu dobiti.

### 5.2.1 Model prelaska granice kozmološke konstante

Već je pokazano da model [69]

$$c_s^2 = w + A(1+w)^B, \quad (5.114)$$

u nekim parametarskim kombinacijama može dobro opisati prelazak granice kozmološke konstante. Treba napomenuti da je ograničenje ovog modela to što, ako ga razmatramo kao model savršenog fluida, dobivena brzina zvuka bi prolazila kroz singularitete. Zato ovaj model treba promatrati prvenstveno kao efektivni pristup.

Za vrijednosti parametara  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  i  $B \neq 1$ , ovisnost parametra jednadžbe stanja o faktoru skale iznosi

$$w = -1 + \left[ (1+w_0)^{-B} + 3AB \ln \frac{a}{a_0} \right]^{-\frac{1}{B}}. \quad (5.115)$$

Uvrštavanjem modela u jednadžbe (5.107) i (5.108) dobivamo:

$$F = F_0 \frac{w}{w_0} e^{\frac{1}{A(1-B)}[(1+w)^{-B+1} - (1+w_0)^{-B+1}]}, \quad (5.116)$$

$$X = X_0 \left( \frac{1+w}{1+w_0} \right)^2 e^{\frac{2}{A(1-B)}[(1+w)^{-B+1} - (1+w_0)^{-B+1]} + \frac{2}{AB}[(1+w)^{-B} - (1+w_0)^{-B}]}, \quad (5.117)$$

što predstavlja konačno parametarsko rješenje ovog modela.

### 5.2.2 Model CPL

Isti postupak upotrijebit ćemo na model Chevalier-Polarski-Linder [40, 41]. Osnovna jednadžba modela glasi

$$w(a) = w_0 + w_1 \left( 1 - \frac{a}{a_0} \right), \quad (5.118)$$



Ovisnost kvadrata brzine zvuka ovdje iznosi

$$c_s^2 = \frac{3w^2 + 2w + w_0 + w_1}{3(1+w)}. \quad (5.119)$$

Uvrštavanjem jednadžbe ovog modela u (5.107) i (5.108) opet dobivamo rješenja u parametarskom obliku:

$$X = X_0 e^{-6(w-w_0)} \left( \frac{w_0 + w_1 - w}{w_1} \right)^{-6(w_0+w_1)} \left( \frac{1+w}{1+w_0} \right)^2, \quad (5.120)$$

$$F = F_0 \frac{w}{w_0} \left( \frac{w_0 + w_1 - w}{w_1} \right)^{-3(1+w_0+w_1)} e^{-3(w-w_0)}. \quad (5.121)$$

Vrijedi napomenuti da ova rješenja odgovaraju onima dobivenima u [121] s tom razlikom da su u navedenom radu funkcije  $X$  i  $F$  izražene u ovisnosti o faktoru skale  $a$ .

### 5.2.3 Primjeri eksplicitnih rješenja

Za daljnju diskusiju navodimo primjere četiri modela kod kojih je moguće doći do punog analitičkog rješenja. Treba napomenuti da modeli prikazuju različite vrste ovisnosti  $c_s^2(a)$ .

U prvom modelu (Slika 5.19), parametar jednadžbe stanja  $w$  ima vrijednosti između  $\frac{\alpha}{1-\alpha}$  za  $a \rightarrow 0$  i  $-1$  za  $a \rightarrow \infty$ , dok  $c_s^2$  ima vrijednost između  $\frac{\alpha}{1-\alpha}$  za  $a \rightarrow 0$  i  $0$  za  $a \rightarrow \infty$ .

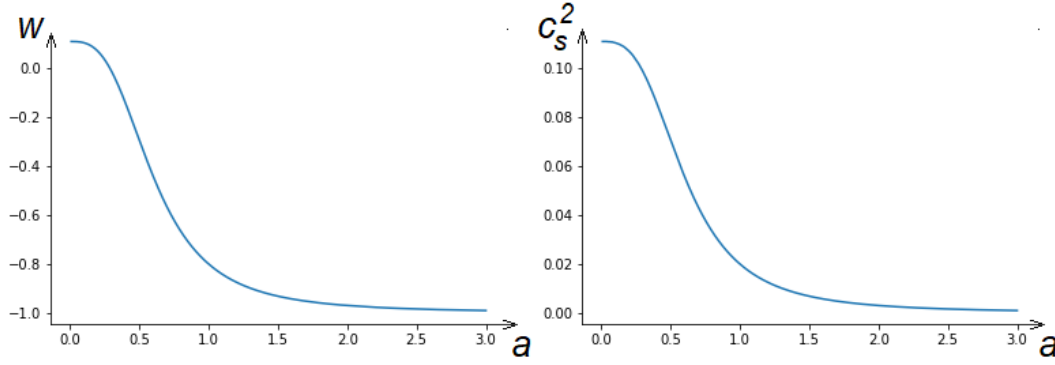
Modeli 2 i 3 prikazani su na Slikama 5.20 i 5.21. Parametar  $w$  ima vrijednost između  $0$  za  $a \rightarrow 0$  i  $-1$  za  $a \rightarrow \infty$ , dok  $c_s^2$  asimptotski teži prema  $0$  i za  $a \rightarrow 0$  i za  $a \rightarrow \infty$ . No, u oba modela  $c_s^2$  ima maksimum za neku vrijednost faktora skale  $a$ .

Model 4 prikazan je na Slici 5.22 s parametrom  $w$  koji zauzima vrijednosti između  $0$  za  $a \rightarrow 0$  i  $-1$  za  $a \rightarrow \infty$ , a  $c_s^2$  se nalazi između  $0$  za  $a \rightarrow 0$  i  $\alpha$  za  $a \rightarrow \infty$ .

### 5.2.4 Model 1

Krećemo od modela koji je definiran formulom

$$c_s^2 = \alpha(1+w). \quad (5.122)$$



Slika 5.19: Parametar  $w$  i kvadrat brzine zvuka u Modelu 1 uz vrijednosti  $w_0 = -0.8$  i  $\alpha = 0.1$ .

Najprije razmatramo opći slučaj  $\alpha \neq 1$ . Uvrštavanjem (5.122) u (5.106) dobiva se

$$w = -\frac{1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{1+w_0}{w_0 + \frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}}{1 - \frac{1+w_0}{w_0 + \frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}}. \quad (5.123)$$

Posebnost ovog modela ogleda se u tome što je brzina zvuka u ranom svemiru različita od 0, pri čemu parametar  $\alpha$  diktira kolika je ta razlika, dok u kasnom svemiru brzina zvuka teži prema 0, a parametar  $w$  teži prema  $-1$ .

Po metodi razvijenoj u prethodnim odlomcima, dolazimo do funkcije  $X(w)$

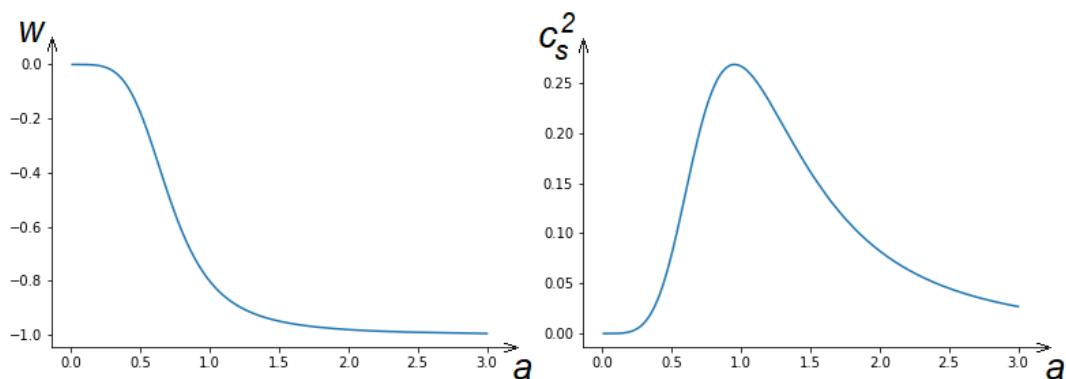
$$X = X_0 \left( \frac{w + \frac{\alpha}{\alpha-1}}{w_0 + \frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}, \quad (5.124)$$

iz koje invertiranjem dobivamo

$$w = -\frac{\alpha}{\alpha-1} + \left( w_0 + \frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \left( \frac{X}{X_0} \right)^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}. \quad (5.125)$$

Za funkciju  $F(w)$  dobivamo

$$F = F_0 \frac{w}{w_0} \left( \frac{w + \frac{\alpha}{\alpha-1}}{w_0 + \frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (5.126)$$



Slika 5.20: Ponašanje parametra  $w$  i kvadrata brzine svjetlosti za Model 2, uz vrijednosti  $w_0 = -0.8$ ,  $\alpha = 0.5$  i  $w_* = -1.1$ .

Uvrštavanje (5.125) u (5.126) daje

$$F(X) = F_0 \left( \frac{X}{X_0} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \left[ -\frac{\alpha}{w_0(\alpha - 1)} + \left( 1 + \frac{\alpha}{w_0(\alpha - 1)} \right) \left( \frac{X}{X_0} \right)^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} \right]. \quad (5.127)$$

Za poseban slučaj  $\alpha = 1$  vrijedi

$$w = -1 + (1 + w_0) \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} \quad (5.128)$$

i

$$X = X_0 e^{2(w-w_0)}. \quad (5.129)$$

Ovaj izraz može se invertirati, tako da dobivamo

$$w = w_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{X}{X_0}. \quad (5.130)$$

Za funkciju  $F(w)$  dobivamo

$$F = F_0 \frac{w}{w_0} e^{w-w_0}, \quad (5.131)$$

što konačno daje

$$F(X) = F_0 \left( \frac{X}{X_0} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{2w_0} \ln \frac{X}{X_0} \right). \quad (5.132)$$

### 5.2.5 Model 2

Ovaj model predstavljen je jednađžbom

$$c_s^2 = \alpha \frac{w(1+w)}{w_* - w}. \quad (5.133)$$

Za  $w_* \neq -1$ ,  $\alpha \neq -1$  i  $\alpha \neq w_*$  rješenja funkcije  $w(a)$  glase

$$\left(\frac{w}{w_0}\right)^{\frac{w_*}{\alpha-w_*}} \left(\frac{w+w_1}{w_0+w_1}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha-w_*}} \frac{1+w}{1+w_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}, \quad (5.134)$$

gdje je  $w_1 = \frac{\alpha-w_*}{1+\alpha}$ .

Ako jednađžbu (5.107) integriramo, dobivamo

$$X = X_0 \left( \frac{w + \frac{\alpha-w_*}{1+\alpha}}{w_0 + \frac{\alpha-w_*}{1+\alpha}} \right)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}. \quad (5.135)$$

Invertiranjem dobivamo funkciju  $w(X)$  :

$$w = -\frac{\alpha-w_*}{1+\alpha} + \left( w_0 + \frac{\alpha-w_*}{1+\alpha} \right) \left( \frac{X}{X_0} \right)^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}}. \quad (5.136)$$

Dalje, iz (5.108) proizlazi

$$F = F_0 \left( \frac{w}{w_0} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-w_*}} \left( \frac{w + \frac{\alpha-w_*}{1+\alpha}}{w_0 + \frac{\alpha-w_*}{1+\alpha}} \right)^{-\frac{\alpha(1+w_*)}{(1+\alpha)(\alpha-w_*)}}, \quad (5.137)$$

što na kraju daje jednađžbu za  $F(X)$ :

$$F(X) = F_0 \left( \frac{X}{X_0} \right)^{-\frac{1+w_*}{2(\alpha-w_*)}} \left[ \frac{w_* - \alpha}{w_0(1+\alpha)} + \left( 1 - \frac{w_* - \alpha}{w_0(1+\alpha)} \right) \left( \frac{X}{X_0} \right)^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-w_*}}. \quad (5.138)$$

Is ovog rješenja isključeni su neke vrijednosti parametara. Za  $w_* = -1$  ovaj je model ekvivalentan  $c_s^2 = -\alpha w$  što predstavlja generalizirani Čapljiginov plin tako da se tim posebnim slučajem nećemo dalje baviti. Za  $w_* \neq \alpha$  i  $\alpha = -1$  dobivamo rezultate:

$$\left(\frac{w}{w_0}\right)^{-\frac{w_*}{1+w_*}} \frac{1+w}{1+w_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}, \quad (5.139)$$

$$F = F_0 \left( \frac{w}{w_0} \right)^{\frac{1}{1+w_*}} e^{\frac{w-w_0}{1+w_*}}, \quad (5.140)$$

i

$$X = X_0 e^{\frac{2}{1+w_*}(w-w_0)}. \quad (5.141)$$

Posljednji izraz možemo invertirati pri čemu dobivamo

$$w = w_0 + \frac{1+w_*}{2} \ln \frac{X}{X_0}, \quad (5.142)$$

što na kraju daje

$$F = F_0 \left( \frac{X}{X_0} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{1+w_*}{2w_0} \ln \frac{X}{X_0} \right)^{\frac{1}{1+w_*}}. \quad (5.143)$$

Na kraju dolazimo do slučaja  $w_* = \alpha \neq -1$ . Ovisnost parametra  $w$  faktora skale  $a$  dana je izrazom

$$\frac{w_0}{w} \frac{1+w}{1+w_0} e^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}(\frac{1}{w} - \frac{1}{w_0})} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3}. \quad (5.144)$$

Funkcije  $F(w)$  i  $X(w)$  dane su izrazima

$$F = F_0 \left( \frac{w}{w_0} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}(-\frac{1}{w} + \frac{1}{w_0})} \quad (5.145)$$

i

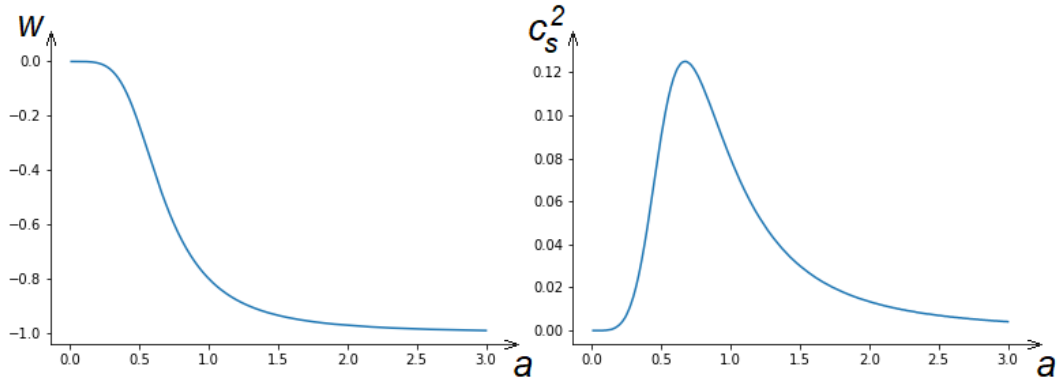
$$X = X_0 \left( \frac{w}{w_0} \right)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}. \quad (5.146)$$

Ovaj izraz možemo invertirati i dobivamo

$$w = w_0 \left( \frac{X}{X_0} \right)^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}}, \quad (5.147)$$

što vodi do konačnog rješenja

$$F = F_0 \left( \frac{X}{X_0} \right)^{1/2} e^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)w_0} \left( 1 - \left( \frac{X}{X_0} \right)^{-\frac{1+\alpha}{2\alpha}} \right)}. \quad (5.148)$$



Slika 5.21: Parametar  $w$  i kvadrat brzine zvuka u Modelu 3 uz vrijednosti  $w_0 = -0.8$  i  $\alpha = -0.5$ .

### 5.2.6 Model 3

Sljedeći model definiran je jednačbom za kvadrat brzine zvuka

$$c_s^2 = \alpha w(1 + w), \quad (5.149)$$

Posebno razmatramo slučajeve za  $\alpha \neq 1$  i  $\alpha = 1$ .

Za  $\alpha \neq 1$  formula za funkciju  $w(a)$  glasi

$$\left(\frac{w}{w_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{1+w}{1+w_0} \left(\frac{w+1-\frac{1}{\alpha}}{w_0+1-\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}. \quad (5.150)$$

Izrazi za  $X(w)$  i  $F(w)$  daju

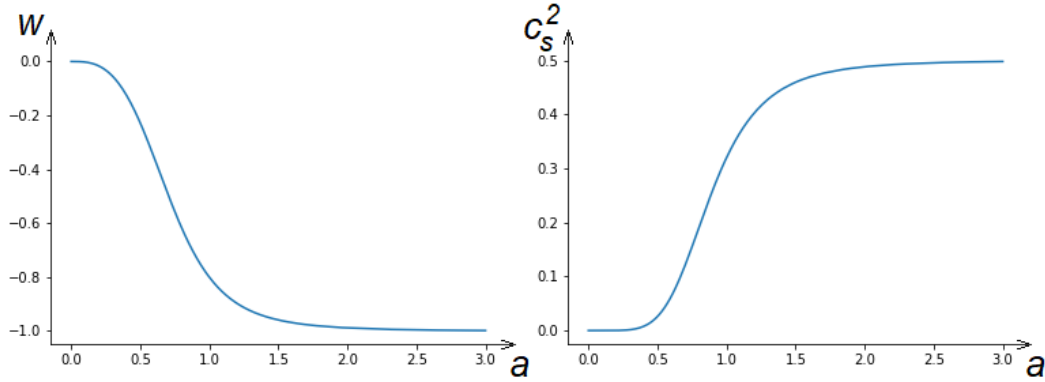
$$X = X_0 \left(\frac{w+1-\frac{1}{\alpha}}{w_0+1-\frac{1}{\alpha}}\right)^2. \quad (5.151)$$

Ako ove izraze invertiramo

$$w = -1 + \frac{1}{\alpha} + \left(w_0 + 1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{X}{X_0}\right)^{1/2} \quad (5.152)$$

i

$$F = F_0 \left(\frac{w}{w_0}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{w+1-\frac{1}{\alpha}}{w_0+1-\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (5.153)$$



Slika 5.22: Parametar  $w$  i kvadrat brzine zvuka za Model 4 uz vrijednosti  $w_0 = -0.8$ ,  $\alpha = 0.5$  i  $\gamma = 2$ .

što daje

$$F = F_0 \left( \frac{X}{X_0} \right)^{-\frac{1}{2(\alpha-1)}} \left[ -\frac{\alpha-1}{\alpha w_0} + \left( 1 + \frac{\alpha-1}{\alpha w_0} \right) \left( \frac{X}{X_0} \right)^{1/2} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \quad (5.154)$$

Za vrijednost  $\alpha = 1$ , funkcija  $w(a)$  glasi

$$\frac{w+1}{w} e^{-\frac{1}{w}} = \frac{w_0+1}{w_0} e^{-\frac{1}{w_0}} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3}. \quad (5.155)$$

Iz ovoga dobivamo formule za  $F(w)$  i  $X(w)$ :

$$F = F_0 \frac{w}{w_0} e^{-\frac{1}{w} + \frac{1}{w_0}}, \quad (5.156)$$

$$X = X_0 \left( \frac{w}{w_0} \right)^2. \quad (5.157)$$

Invertiranje  $X(w)$  daje

$$w = w_0 \left( \frac{X}{X_0} \right)^{1/2}. \quad (5.158)$$

Na kraju, konačni rezultat glasi

$$F = F_0 \left( \frac{X}{X_0} \right)^{1/2} e^{\frac{1}{w_0} \left[ 1 - \left( \frac{X}{X_0} \right)^{-1/2} \right]}. \quad (5.159)$$

### 5.2.7 Model 4

Četvrti model razmatran je u [66]:

$$c_s^2 = \alpha(-w)^\gamma. \quad (5.160)$$

Za  $\gamma = 1$  ovaj model odgovara generaliziranom Čapljiginovom plinu, dok za vrijednosti  $\gamma = 1$  i  $\alpha = 1$  imamo originalni model Čapljiginovog plina.

Za vrijednosti  $\gamma = 2$  i  $\alpha \neq -1$ , za ovisnost  $w$  o  $a$  vrijedi

$$\frac{w_0}{w} \left( \frac{w - \frac{1}{\alpha}}{w_0 - \frac{1}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left( \frac{1+w}{1+w_0} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3}. \quad (5.161)$$

Za jednadžbe za  $X(w)$  i  $F(w)$  dobivamo

$$X = X_0 \left( \frac{w - \frac{1}{\alpha}}{w_0 - \frac{1}{\alpha}} \right)^{\frac{2}{1+\alpha}} \left( \frac{w+1}{w_0+1} \right)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}, \quad (5.162)$$

i

$$F = F_0 \frac{w - \frac{1}{\alpha}}{w_0 - \frac{1}{\alpha}}. \quad (5.163)$$

Invertiranjem dobivamo

$$w = \frac{1}{\alpha} + \left( w_0 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{F}{F_0}, \quad (5.164)$$

što vodi do implicitne jednadžbe za  $F(X)$ :

$$X = X_0 \left( \frac{F}{F_0} \right)^{\frac{2}{1+\alpha}} \left( \frac{1 + \frac{1}{\alpha} + \left( w_0 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{F}{F_0}}{1 + w_0} \right)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}. \quad (5.165)$$

Za slučaj  $\alpha = 1$ , iz (5.165) dobivamo eksplicitni izraz za  $F(X)$

$$\left( \frac{F}{F_0} \right)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (w_0^2 - 1) \frac{X}{X_0}}}{w_0 - 1}. \quad (5.166)$$

Kombinacija parametara  $\gamma = 2$  i  $\alpha = -1$  daje funkciju za  $w(a)$

$$\frac{w}{1+w} e^{\frac{1}{1+w}} = \frac{w_0}{1+w_0} e^{\frac{1}{1+w_0}} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3. \quad (5.167)$$



Izraz za  $F(w)$  je

$$F = F_0 \frac{1+w}{1+w_0}. \quad (5.168)$$

Invertiranje daje

$$w = -1 + (1+w_0) \frac{F}{F_0}. \quad (5.169)$$

Za  $X(w)$  dobivamo

$$X = X_0 \left( \frac{1+w}{1+w_0} \right)^2 e^{2\left(\frac{1}{1+w} - \frac{1}{1+w_0}\right)}. \quad (5.170)$$

Uvrštavanjem (5.169) u (5.170) daje implicitno konačno rješenje za  $F(X)$ :

$$X = X_0 \left( \frac{F}{F_0} \right)^2 e^{\frac{2}{1+w_0} \left( \frac{F_0}{F} - 1 \right)}. \quad (5.171)$$

Sljedeći slučaj koji nas zanima je  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Najprije promatramo opći slučaj za  $\alpha \neq \pm 1$ .

Ovisnost parametra  $w$  o faktoru  $a$  može se prikazati implicitno:

$$\left[ \frac{(-w)^{1/2} + \alpha}{(-w_0)^{1/2} + \alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha^2}} \left[ \frac{(-w)^{1/2} + 1}{(-w_0)^{1/2} + 1} \right]^{\frac{1}{2(\alpha-1)}} \left[ \frac{1 - (-w)^{1/2}}{1 - (-w_0)^{1/2}} \right]^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{3/2}. \quad (5.172)$$

Funkcija  $X(w)$  je

$$X = X_0 \left[ \frac{(-w)^{1/2} + \alpha}{(-w_0)^{1/2} + \alpha} \right]^{\frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2}} \left[ \frac{(-w)^{1/2} + 1}{(-w_0)^{1/2} + 1} \right]^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \left[ \frac{1 - (-w)^{1/2}}{1 - (-w_0)^{1/2}} \right]^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}. \quad (5.173)$$

Izraz za  $F(w)$  glasi

$$F = F_0 \frac{w}{w_0} \left[ \frac{(-w_0)^{1/2} + \alpha}{(-w)^{1/2} + \alpha} \right]^2. \quad (5.174)$$

Invertiranjem ove funkcije dobivamo

$$w = - \frac{\alpha^2 \frac{F}{F_0}}{\left( 1 + \frac{\alpha}{(-w_0)^{1/2}} - \left( \frac{F}{F_0} \right)^{1/2} \right)^2}. \quad (5.175)$$

Izravnim uvrštavanjem (5.175) u (5.173) dobivamo implicitni oblik funkcije  $F(X)$ . Ovdje ga nećemo navesti zbog duljine.

Sljedeći slučaj odnosi se na vrijednost  $\alpha = 1$  pri čemu funkcija  $w(a)$  postaje:

$$\left( \frac{(-w)^{1/2} - 1}{(-w_0)^{1/2} - 1} \right)^{1/2} \left( \frac{(-w)^{1/2} + 1}{(-w_0)^{1/2} + 1} \right)^{-1/2} e^{\frac{1}{(-w)^{1/2} + 1} - \frac{1}{(-w_0)^{1/2} + 1}} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3}. \quad (5.176)$$

Za  $F(w)$  vrijedi

$$F = F_0 \frac{w}{w_0} \left[ \frac{(-w_0)^{1/2} + 1}{(-w)^{1/2} + 1} \right]^2. \quad (5.177)$$

Invertiranje daje

$$w = - \left[ -1 + \frac{1}{1 - \frac{(-w_0)^{1/2}}{1 + (-w_0)^{1/2}} \left( \frac{F}{F_0} \right)^{1/2}} \right]^2. \quad (5.178)$$

Za  $X(w)$  dobivamo

$$X = X_0 \frac{1 - (-w)^{1/2}}{1 - (-w_0)^{1/2}} \frac{1 + (-w_0)^{1/2}}{1 + (-w)^{1/2}} e^{-2 \left( \frac{1}{1 + (-w)^{1/2}} - \frac{1}{1 + (-w_0)^{1/2}} \right)}. \quad (5.179)$$

Uvrštavanjem (5.178) u (5.179) dobivamo funkciju  $F(X)$ .

Posljednji slučaj koji ovdje obrađujemo je za  $\alpha = -1$ . Ovisnost  $w(a)$  nam daje

$$\left( \frac{(-w)^{1/2} - 1}{(-w_0)^{1/2} - 1} \right)^{-1/2} \left( \frac{1 + (-w)^{1/2}}{1 + (-w_0)^{1/2}} \right)^{1/2} e^{-\left( \frac{1}{(-w)^{1/2} - 1} - \frac{1}{(-w_0)^{1/2} - 1} \right)} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3}. \quad (5.180)$$

Jednadžba za  $F(w)$  glasi

$$F = F_0 \frac{w}{w_0} \left[ \frac{(-w_0)^{1/2} - 1}{(-w)^{1/2} - 1} \right]^2. \quad (5.181)$$

Invertiranje daje

$$w = - \left[ 1 + \frac{1}{-1 + \frac{(-w_0)^{1/2}}{-1 + (-w_0)^{1/2}} \left( \frac{F}{F_0} \right)^{1/2}} \right]^2. \quad (5.182)$$

Za  $X(w)$  dobivamo

$$X = X_0 \frac{(-w_0)^{1/2} - 1}{(-w)^{1/2} - 1} \frac{1 + (-w_0)^{1/2}}{1 + (-w)^{1/2}} e^{2 \left( \frac{1}{(-w)^{1/2} - 1} - \frac{1}{(-w_0)^{1/2} - 1} \right)}. \quad (5.183)$$

Implicitna funkcija za  $F(X)$  dobiva se uvrštavanjem (5.182) u (5.183).

Kao i u većem dijelu dosadašnjih razmatranja, dometi i ovih analiza ovise o integra-

bilnosti osnovnih izraza od kojih analiza kreće. Ukoliko to nije slučaj, rješenja se mogu dobiti i numerički. Ovdje je posebno pogodna činjenica da se parametar  $w$  često drži unutar ograničenog intervala, a često i striktno između  $-1$  i  $0$ .

Dodatna pogodnost sastoji se u tome da se, ako se  $c_s^2$  ne može pronaći analitički, analiza se može sastojati u ispitivanju funkcije  $X(w)$ . Međutim, još uvijek nije ispitano može li se ova metoda koristiti za proučavanje općenitijih modela k-esencije, dakle onih koji nisu čisto kinetički.

## 6 Rotacijske krivulje

Ovo poglavlje prati rezultate istraživanja prikazane u [122]. Još prije nego što se ubrzana ekspanzija svemira pokušala objasniti tamnom energijom, drugi dio "tamnog sektora" - tamna materija - već je neko vrijeme bila predmet istraživanja kao objašnjenje gibanja u većim gravitacijskim sustavima, od galaksija pa nadalje. Prva naznaka da bi mogla postojati dosad neotkrivena i neobjašnjena vrsta materije pojavila se prilikom proučavanja rotacijskih krivulja objekata u galaksiji Mliječni put: brzine gibanja objekata udaljenijih od središta galaksije bile su veće nego što bi se to očekivalo s obzirom na dotad poznatu masu kao i proračune temeljene na Newtonovskoj mehanici.

Kao što je dosad već rečeno, rezultati promatranja još uvijek ne mogu nedvojbeno utvrditi je li riječ o nepoznatom obliku materije ili o modifikaciji dosad poznatih i korištenih zakonitosti koje upravljaju gibanjem kozmoloških objekata. Zbog toga je dobro uspostaviti neke neovisne metode provjere prirode tamne materije koje neće ovisiti o samim modelima.

Analizom i u ovom dijelu istraživanja pokušava se utvrditi ponaša li se tamna materija kao barotropski fluid, to jest da možemo definirati brzinu zvuka  $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$  pri čemu mora vrijediti uvjet  $0 \leq c_s^2 \leq c^2$ .

U ovom dijelu rada bavit ćemo se provjerom gornje hipoteze (o tamnoj materiji kao barotropskom fluidu) na temelju podataka o rotacijskim brzinama objekata u Mliječnom putu.

Ovdje je potrebno uvesti nekoliko pretpostavki:

- Sustav je sferno simetričan;
- Sve komponente su barotropski fluidi;
- Komponente ne međudjeluju;
- Relativističke korekcije u Tolman-Oppenheimer-Volkoff jednadžbi se mogu zanemariti;
- Podaci o rotacijskoj krivulji su dostupni i zadovoljavajuće kvalitete.

## 6.1 Poveznica veličina vezanih uz tamnu materiju sa svojstvima rotacijske krivulje

U ravnoteži, relativistički fluid u sferno-simetričnoj konfiguraciji ponaša se po zakonu koji je prikazan Tolman-Oppenheimer-Volkoffovom jednažbom:

$$-r^2 \frac{dp(r)}{dr} = G\mathcal{M}(r) \left( \rho(r) + \frac{p(r)}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{2G\mathcal{M}}{c^2 r} \right)^{-1}, \quad (6.1)$$

Ukoliko promatramo sferno simetričan sistem u hidrodinamičkoj ravnoteži, u nerelativističkom limesu njegove varijable povezane su jednažbom

$$-r^2 \frac{dp(r)}{dr} = G\mathcal{M}(r)\rho(r), \quad (6.2)$$

gdje je  $\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr'$  masa unutar radijusa  $r$ . Koristeći definiciju brzine zvuka barotropskog fluida, gornja jednažba može se napisati kao

$$-r^2 c_s^2 \frac{d\rho(r)}{dr} = G\mathcal{M}(r)\rho(r). \quad (6.3)$$

Nerelativistička jednažba za kružne orbite glasi

$$\frac{mv(r)^2}{r} = G \frac{m\mathcal{M}(r)}{r^2}. \quad (6.4)$$

gdje je  $r$  radijus orbite, a  $m$  masa tijela u orbiti.

Iz gornje jednažbe dobivamo izraz za masu unutar radijusa  $r$ :

$$\mathcal{M}(r) = \frac{rv(r)^2}{G}. \quad (6.5)$$

Pošto je  $\mathcal{M}$  integral gustoće po volumenu, u sferno simetričnom sustavu vrijedi

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi Gr^2} \left( v^2 + r \frac{dv(r)^2}{dr} \right). \quad (6.6)$$

Za derivaciju gustoće po radijusu dobivamo

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{4\pi G} \left( -\frac{2v(r)^2}{r^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 v(r)^2}{dr^2} \right). \quad (6.7)$$

Uvrštavanjem ovih izraza u (6.3), dobivamo konačnu jednažbu za brzinu zvuka u

barotropskom fluidu:

$$c_s^2 = v(r)^2 \frac{v(r)^2 + r \frac{dv(r)}{dr}}{2v(r)^2 - r^2 \frac{d^2 v(r)}{dr^2}}. \quad (6.8)$$

Dobili smo konačni izraz kod kojeg se na lijevoj strani nalazi brzina zvuka fluida, a s desne su veličine koje se izravno mjere astronomskim promatranjima: orbitalne brzine i udaljenosti od središta orbite, dakle središta Mliječne staze.

Ukoliko promatramo sustav s dvije komponente, promatramo sferno simetrični sustav u kojemu one međudjeluju gravitacijski. Formula za hidrostatsku ravnotežu glasi

$$-r^2 \frac{d p_{1,2}(r)}{dr} = G \mathcal{M}(r) \rho_{1,2}(r), \quad (6.9)$$

pri čemu indeksi 1 i 2 označavaju različite komponente, a  $\mathcal{M}(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$  je njihova zajednička ukupna masa unutar sfere radijusa  $r$ . Ukupna gustoća je njihov zbroj  $\rho(r) = \rho_1(r) + \rho_2(r)$  i  $\mathcal{M}(r) = \mathcal{M}_1(r) + \mathcal{M}_2(r)$ , pri čemu je  $\mathcal{M}_{1,2}(r) = 4\pi \int_0^r \rho_{1,2}(r') r'^2 dr'$ .

Kružna orbita (6.4) daje

$$\mathcal{M}(r) = \mathcal{M}_1(r) + \mathcal{M}_2(r) = \frac{rv(r)^2}{G} \quad (6.10)$$

iz čega proizlazi

$$\rho(r) = \rho_1(r) + \rho_2(r) = \frac{1}{4\pi G r^2} \left( v^2 + r \frac{dv(r)^2}{dr} \right). \quad (6.11)$$

Uvrštavanjem komponenti odvojeno dobivamo

$$-r^2 \left( c_{s,1}^2 \frac{d\rho_1(r)}{dr} + c_{s,2}^2 \frac{d\rho_2(r)}{dr} \right) = G \mathcal{M}(r) \rho(r). \quad (6.12)$$

Kao što je već navedeno,  $G \mathcal{M}(r) \rho(r)$  se može izraziti kao funkcija mjerljivih vrijednosti  $v(r)^2$  i  $r$ .

U nekim područjima promatranja jednu komponentu možemo zanemariti. Konkretno, na većim udaljenostima od središta Mliječnog puta gustoća komponente barionske mase postaje značajno manja od gustoće tamne materije, tako da izraz (6.12) možemo pojednostavniti:

$$-r^2 c_{s,1}^2 \frac{d\rho_1(r)}{dr} = G (\mathcal{M}_1(r) + \mathcal{M}_2) \rho_1(r), \quad (6.13)$$

gdje je  $\mathcal{M}_2$  ukupna masa komponente 2 u sustavu.

Također, preciznije podatke raspodjele gustoće jedne od komponenti može se dobiti ukoliko je poznata raspodjela druge, dakle, ukoliko se uspije izračunati doprinos koji orbitalnoj brzini daje barionska materija, iz toga se onda može izračunati doprinos tamne materije: iz  $v_{1,2}^2 = \frac{G\mathcal{M}_{1,2}}{r}$  proizlazi da je

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2. \quad (6.14)$$

Ove formule postaju vrlo korisne ukoliko je poznat raspored gustoće jedne komponente. Tada se s nešto većom pouzdanošću može utvrditi doprinos druge (tamne) komponente orbitalnim brzinama. Najprije treba izračunati

$$v_1^2 = v^2 - v_2^2, \quad (6.15)$$

a onda se može dobiti kvadrat brzine zvuka prve komponente:

$$c_{s,1}^2 = v(r)^2 \frac{v_1(r)^2 + r \frac{dv_1(r)^2}{dr}}{2v_1(r)^2 - r^2 \frac{d^2 v_1(r)^2}{dr^2}}. \quad (6.16)$$

i samim tim provjeriti nekoliko hipoteza vezanih uz gustoću tamne materije i brzine zvuka barotropskog fluida. Konkretno, koristeći jednadžbu (6.6) možemo provjeriti hoće li se na bilo kojem radijusu dogoditi da gustoća energije padne ispod nule ( $\rho \geq 0$ ) bez statistički značajnog odstupanja, što bi, uz tamnu materiju, ukazivalo na neke alternativne ili dodatne mehanizme koji se moraju uključiti kako bi se objasnile izmjerene rotacijske krivulje.

Također, koristeći izraz (6.8), može se istražiti ponašanje kvadrata brzine zvuka: ukoliko se pokaže da vrijednost  $c_s^2$  u području koje promatramo statistički značajno izlazi izvan intervala  $0 \leq c_s^2 \leq c^2$ , onda se komponenta koja izaziva takvo ponašanje rotacijske krivulje ne može smatrati barotropskim fluidom.

Uz gustoću i brzinu zvuka, treća veličina koja se ovom metodom može istražiti je tlak. Integracijom jednadžbe (6.2) dobiva se

$$p(r) = p_0 - \int_{r_0}^r \frac{v(r')^2}{4\pi G r'^3} \left( v(r')^2 + r' \frac{dv(r')^2}{dr'} \right) dr', \quad (6.17)$$

gdje  $p_0$  označava tlak u nekoj proizvoljnoj točki. Ukoliko bi se nekom metodom utvrdila

ta vrijednost, bilo bi moguće izračunati vrijednosti tlaka tamnog fluida uzduž cijelog radijusa galaksije.

Također, računski se iz jednadžbe za tlak možemo riješiti derivacije orbitalne brzine po radijusu i dobiti integral:

$$p(r) = p_0 - \frac{1}{8\pi G} \left[ \frac{v(r)^4}{r^2} - \frac{v(r_0)^4}{r_0^2} + 4 \int_{r_0}^r \frac{v(r')^4}{r'^3} dr' \right]. \quad (6.18)$$

Naime, kao što će se vidjeti kasnije u ovom radu, derivacija orbitalne brzine (to jest, njenog kvadrata) manje je stabilna i prilikom računanja iz mjerenih podataka integral bi se mogao pokazati pouzdanijim.

## 6.2 Mjerni podaci i izračun

U ovom radu uspostavlja se metoda proučavanja tamnog sektora preko kvadrata brzine zvuka barotropskog fluida. Kako bi se ova metoda demonstrirala na primjeru rotacijskih krivulja, uzeli smo javno dostupne podatke iz [68]. U tom radu izmjerene su rotacijske brzine na udaljenostima od  $\sim 0,2$  kpc do  $\sim 200$  kpc. Ovdje posebno treba napomenuti da je rotacijska krivulja dobivena potpuno empirijski, bez razmatranja modela tamne materije ili strukture haloa. Posebno je pogodno to što se podaci protežu na velike udaljenosti od središta galaksije gdje je utjecaj barionske materije značajno smanjen, kao i to što je riječ o jedinstvenom skupu podataka, a ne konglomeraciji nekoliko skupova od kojih je svaki načinjen vlastitom metodologijom.

Kako bi se što više umanjio utjecaj barionskog diska, u ovom istraživanju uzeti su podaci s udaljenosti većih od 30 kpc.

Kako bi se izračunali svi parametri vezani uz  $\rho$  i  $c_s^2$ , potrebno je uspješno preračunati izmjerene statističke pogreške u nesigurnost konačnog rezultata, pri čemu je najvažnije napraviti račun derivacije izmjerenih vrijednosti. Bitno je znati koliko su rezultati osjetljivi s obzirom na metodu računanja. U izračunu smo koristili nekoliko metoda kako bismo provjerili koliko će se kod koje od njih rezultati promijeniti ukoliko se promijene ulazni parametri. Također, dodatnu je pažnju trebalo pokloniti nesigurnosti mjerenja i preračunavanju te nesigurnosti u nesigurnost rezultata.

Jednadžba (6.8) obrađena je numerički tako da je  $v^2$  prikazan kao Lagrangeov interpolacijski polinom drugog ili četvrtog reda. Odnosno, izračun je obavljen najprije preko



tri, a onda i preko pet točaka.

Polinom s tri točke napisan je kao

$$\begin{aligned}
v^2(r) &= \frac{(r - r_i)(r - r_{i+1})}{(r_{i-1} - r_i)(r_{i-1} - r_{i+1})} v_{i-1}^2 + \frac{(r - r_{i-1})(r - r_{i+1})}{(r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1})} v_i^2 + \\
&+ \frac{(r - r_{i-1})(r - r_i)}{(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)} v_{i+1}^2,
\end{aligned} \tag{6.19}$$

dok je za polinom s pet interpolacijskih točaka dobiven izraz

$$\begin{aligned}
v^2(r) &= \frac{(r - r_{i-2})(r - r_{i-1})(r - r_i)(r - r_{i+1})}{(r_{i+2} - r_{i-2})(r_{i+2} - r_{i-1})(r_{i+2} - r_i)(r_{i+2} - r_{i+1})} v_{i+2}^2 \\
&+ \frac{(r - r_{i-2})(r - r_{i-1})(r - r_i)(r - r_{i+2})}{(r_{i+1} - r_{i-2})(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} - r_{i+2})} v_{i+1}^2 \\
&+ \frac{(r - r_{i-2})(r - r_{i-1})(r - r_{i+1})(r - r_{i+2})}{(r_i - r_{i-2})(r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1})(r_i - r_{i+2})} v_i^2 \\
&+ \frac{(r - r_{i-2})(r - r_i)(r - r_{i+1})(r - r_{i+2})}{(r_{i-1} - r_{i-2})(r_{i-1} - r_i)(r_{i-1} - r_{i+1})(r_{i-1} - r_{i+2})} v_{i-1}^2 \\
&+ \frac{(r - r_{i-1})(r - r_i)(r - r_{i+1})(r - r_{i+2})}{(r_{i-2} - r_{i-1})(r_{i-2} - r_i)(r_{i-2} - r_{i+1})(r_{i-2} - r_{i+2})} v_{i-2}^2.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Sve derivacije dobivene su analitičkim deriviranjem prethodna dva izraza.

Radi usporedbe, napravljena je i izgladnena krivulja metodom pomičnog ponderiranog prosjeka. Prozor unutar kojeg se računala vrijednost prosjeka je 20 kpc, a statističke težine podataka postavljene su linearno tako da je vrijednost na rubu prozora (10 kpc od središta) imala statističku težinu 0 (nula), vrijednost u središtu prozora je imala maksimalnu statističku težinu, dok je, na primjer, vrijednost na pola udaljenosti do ruba prozora (5 kpc od središta) imala polovicu maksimalne statističke težine.

Ovako su dobivena četiri skupa vrijednosti - s tri i pet točaka, izgladnjeni i originalni podaci iz kojih su dobivene vrijednosti gustoće i kvadrata brzine zvuka na danim radijusima. Prilikom izračuna s tri točke, dobivene su sve vrijednosti osim onih na prvom i posljednjem radijusu, dok su prilikom izračuna s pet točaka, dobivene sve vrijednosti osim na prva dva i posljednja dva radijusa. Skup vrijednosti za računanje intervala pouzdanosti svih vrijednosti za svaki pojedini radijus dobiven je iz normalne distribucije koristeći standardnu devijaciju iz originalnih mjerenja orbitalnih brzina. Dobivene su vrijednosti za medijan i intervale pouzdanosti od 68%, 95% i 99%.

## 6.3 Vrijednosti gustoće i $c_s^2$ za rotacijsku krivulju Mliječnog puta

Opisanom procedurom dobili smo rezultate koje ćemo iznijeti u sljedećim poglavljima. Najprije treba proučiti derivacije kvadrata orbitalne brzine po radijusu ( $dv^2/dr$  i  $d^2v^2/dr^2$ ) i usporediti ove veličine s obzirom na metodu računanja Lagrangeovog polinoma s 3 ili s 5 točaka. Nakon toga smo izračunali vrijednosti gustoće energije iz (6.6), a na kraju smo dobili  $c_s^2$  po formuli (6.8).

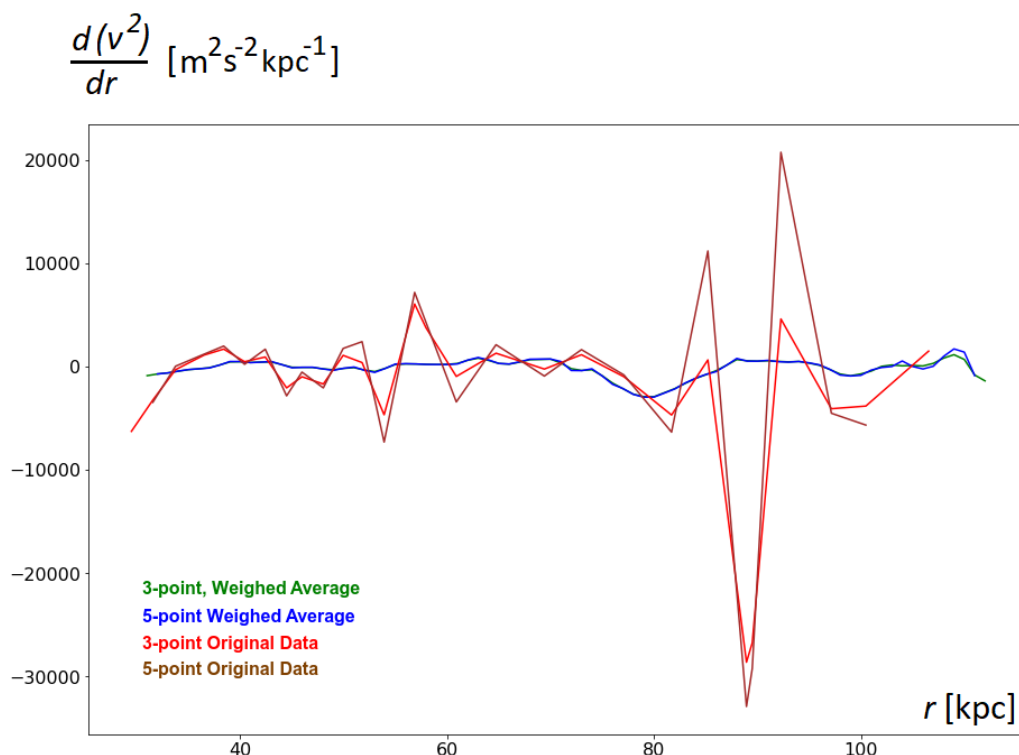
### 6.3.1 Derivacije

S obzirom da su ponašanja prve i druge derivacije iznimno bitna za izračun  $\rho(r)$  i  $c_s^2(r)$ , vrijedi provjeriti kako se ove funkcije ponašaju u ovisnosti o tome kako ih se računa. Na slici (6.1) vidi se usporedba prvih derivacija, dok je na slici (6.2) međusobna usporedba drugih derivacija. Vidljivo je nekoliko stvari. Kao prvo, derivacije izglađene funkcije se znatno razlikuju od derivacija dobivenih iz originalnih podataka, što je za očekivati s obzirom da je riječ o rezultatima promatranja čije derivacije su izračunate numerički. No, s druge strane, pokazuje se da najčešće nema velikih razlika između derivacija dobivenih preko Lagrangeovih polinoma s 3 i s 5 točaka, a posebno je bitno da je predznak derivacija dobivenih s ove dvije metode uvijek međusobno isti.

U nastavku rada analiza je obavljena uglavnom na originalnim podacima, dok je izglađena krivulja tu najviše samo kao ilustracija. Naime, iako bi analiza izglađene krivulje možda dala preglednije rezultate, uvijek se možemo zapitati je li izglađivanje prebrisalo neki bitan fizikalni aspekt ili neku pojavu koja bi mogla biti bitna za određivanje veličina koje istražujemo. Također, ovdje je primarno riječ o demonstraciji metode, dok je traženje preciznih rezultata u drugom planu. Zbog toga je bolje obaviti izračune na originalnim podacima.

### 6.3.2 Gustoća energije

Iz izraza (6.6) numeričkom metodom dobiveni su rezultati za gustoću materije koji su vidljivi na slikama 6.3 (metoda s tri točke) i 6.4 (metoda s pet točaka). Na slikama se nalaze tri grafa za različite početne vrijednosti udaljenosti Zemlje od središta galaksije i različite brzine Zemlje, po podacima iz [68]. Na slikama su prikazani medijan i intervali pouzdanosti od 68%, 95% i 99% .



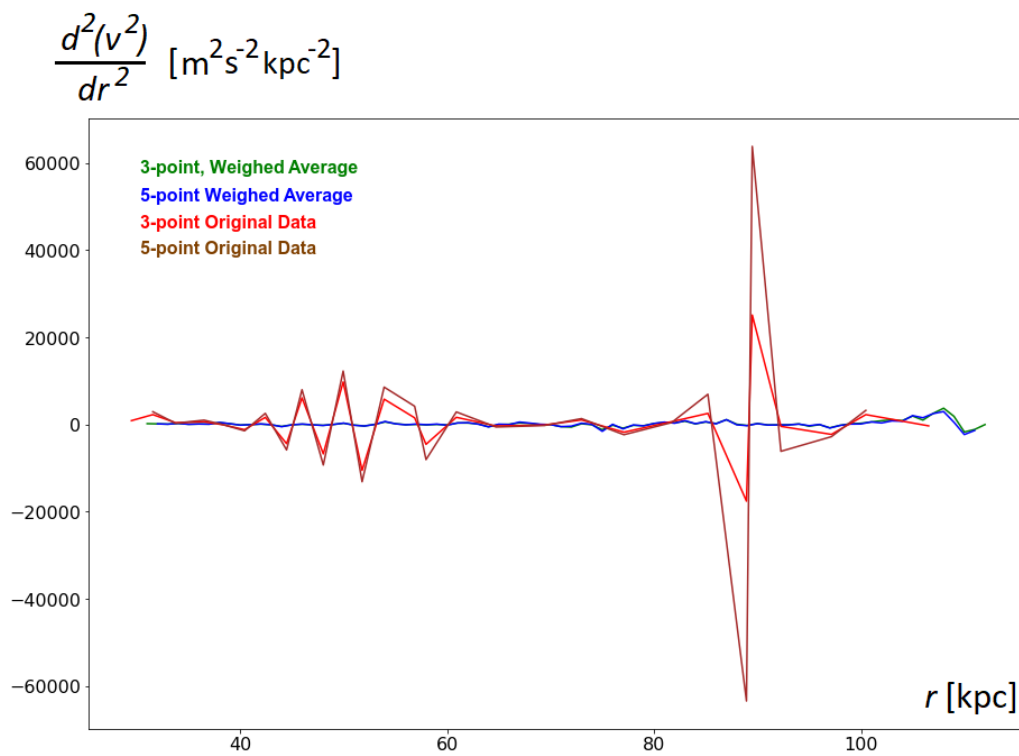
Slika 6.1: Prve derivacije kvadrata brzine zvuka po radijusu,  $\frac{d(v^2)}{dr}$ , izračunate: preko Lagrangeovog polinoma s tri i pet točaka te s i bez izgladivanja.

### 6.3.3 Brzina zvuka

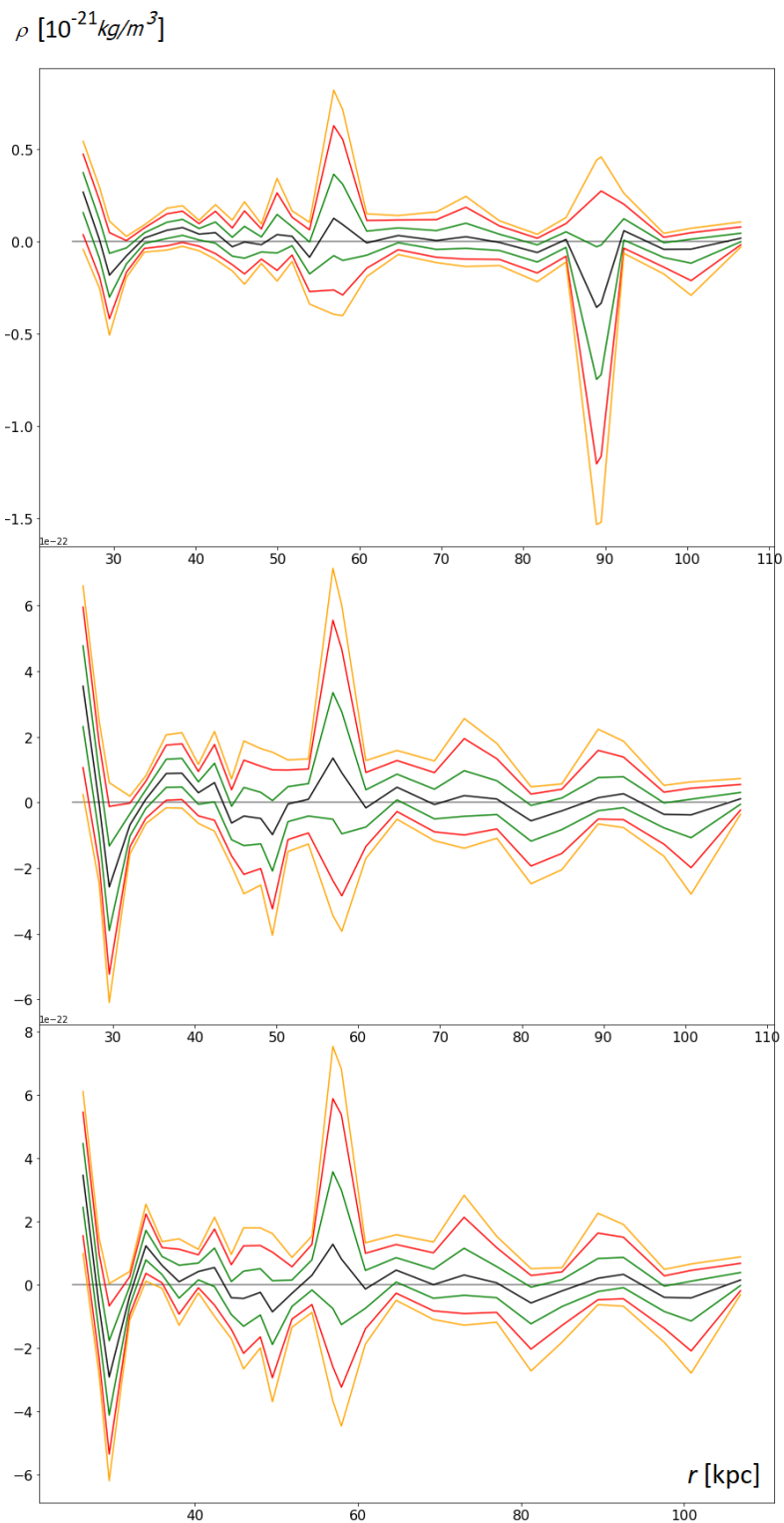
Iznosi dobiveni za kvadrat brzine zvuka prikazani su na slikama 6.5 i 6.6. S obzirom da su originalni podaci iz [68] dobiveni za tri vrijednosti udaljenosti Sunca od središta galaksije i različite brzine Zemlje, napravljena su po tri grafa. Rezultati su dobiveni iz originalnih podataka, bez izgladivanja. Prikazani su intervali pouzdanosti od 68%, 95% i 99%. Slika 6.5 prikazuje izračun preko tri točke, dok slika 6.6 prikazuje izračun preko pet točaka. Na kraju, slika 6.7 prikazuje usporedbu medijana kvadrata brzine zvuka dobivenih metodom s tri i s pet točaka kako bi se pokazalo poklapanje i stabilnost metode.

### 6.3.4 Rezultati i zaključci

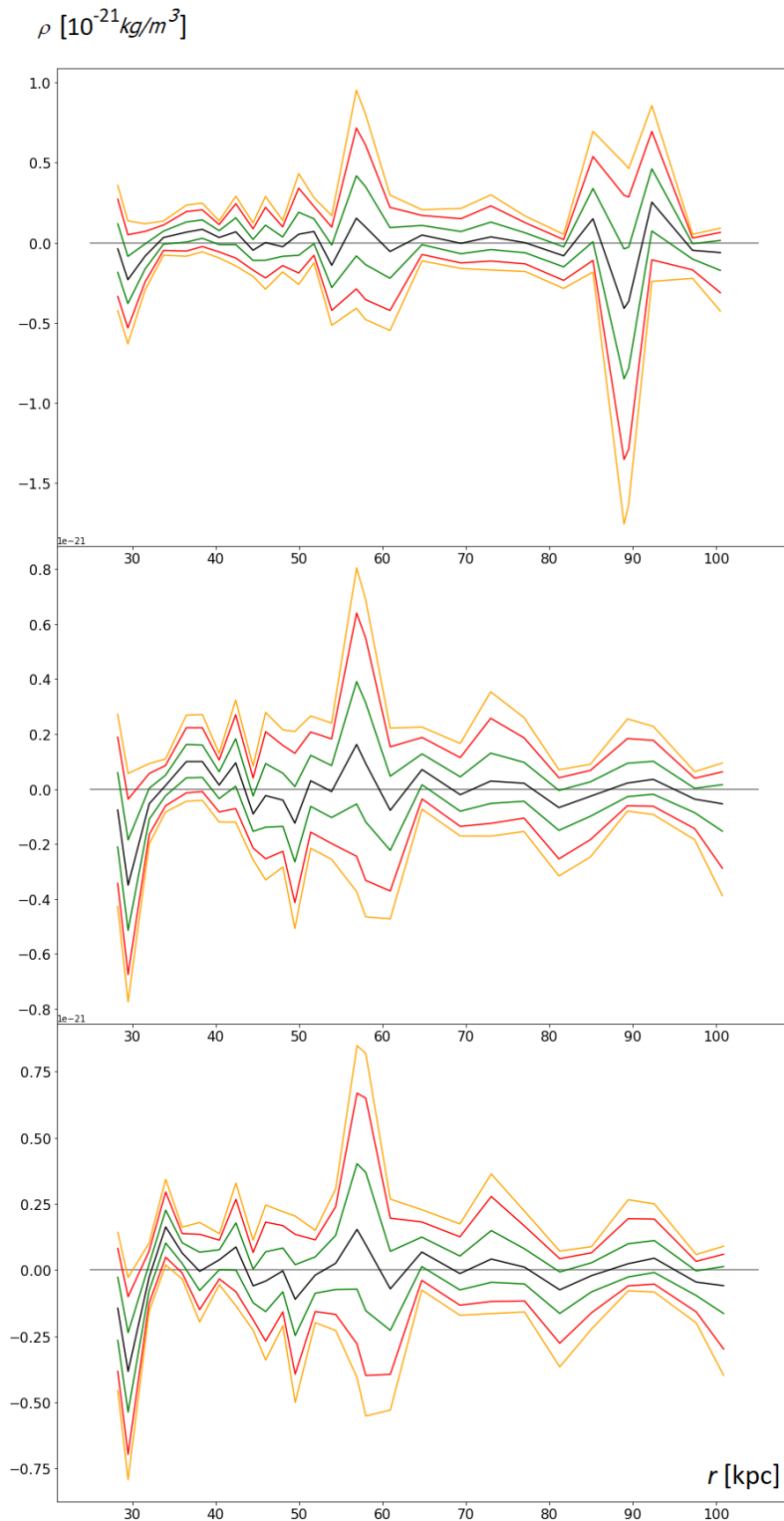
Svrha ove metode je testiranje ima li tamna materija svojstva barotropskog fluida i u svjetlu toga su dobiveni rezultati u prethodnom poglavlju. Treba obratiti pažnju da su na nekim radijusima vrijednosti za  $\rho$  i  $c_s^2$  negativne, uključujući i intervale pouzdanosti



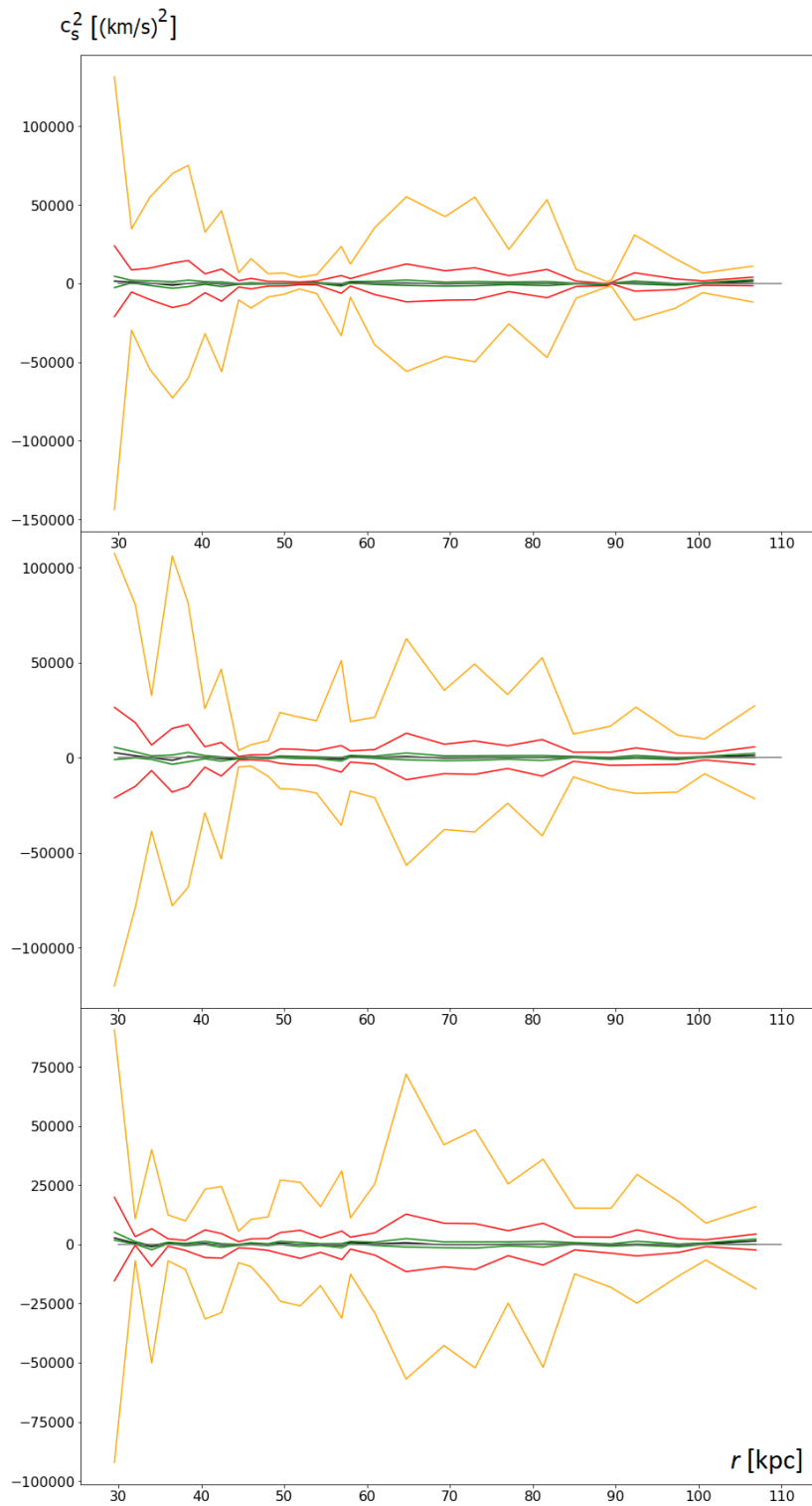
Slika 6.2: Druge derivacije kvadrata brzine zvuka po radijusu  $\frac{d^2 v^2}{dr^2}$  izračunate: metodom s tri i pet točaka te s izglađenim i originalnim podacima



Slika 6.3: Medijan gustoće materije s intervalima pouzdanosti od 68%, 95% i 99% izračunato metodom s tri točke i tri vrijednosti orbitalne brzine Sunca i udaljenosti od središta galaksije: ( $R_0 = 8.0 \text{ kpc}$ ,  $v_0 = 200 \text{ km/s}$ ) (gore), ( $R_0 = 8.3 \text{ kpc}$ ,  $v_0 = 244 \text{ km/s}$ ) (sredina), ( $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$ ,  $v_0 = 220 \text{ km/s}$ ) (dolje).



Slika 6.4: Medijan gustoće materije s intervalima pouzdanosti od 68%, 95% i 99% uz korištenje metode s pet točaka za tri vrijednosti orbitalne brzine Sunca i udaljenosti od središta galaksije: ( $R_0 = 8.0$  kpc,  $v_0 = 200$  km/s) (gore), ( $R_0 = 8.3$  kpc,  $v_0 = 244$  km/s) (sredina), ( $R_0 = 8.5$  kpc,  $v_0 = 220$  km/s) (dolje)

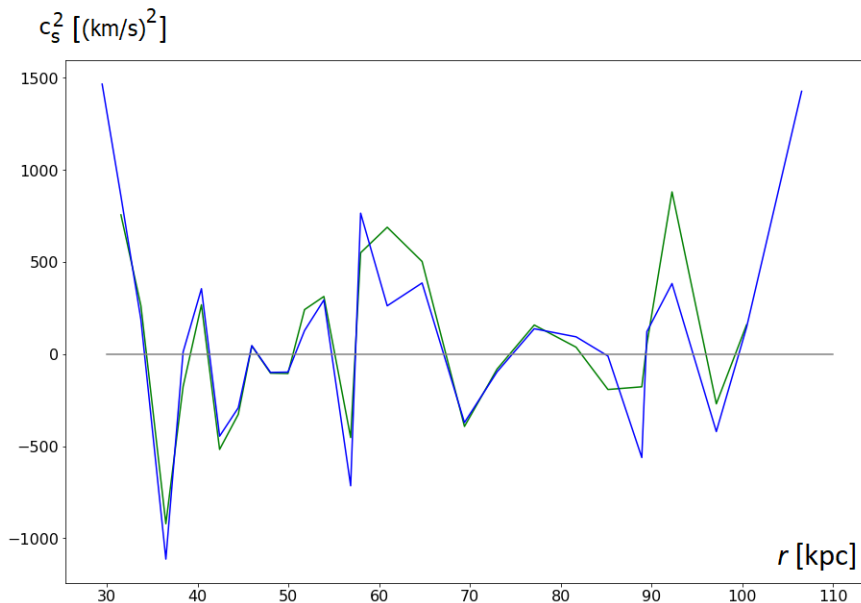


Slika 6.5: Medijan i intervali pouzdanosti  $c_s^2$  od 68%, 95% i 99%. Računanje je napravljeno metodom s tri točke za tri različite vrijednosti orbitalne brzine Sunca i udaljenosti od središta galaksije: ( $R_0 = 8.0$  kpc,  $v_0 = 200$  km/s) (gore), ( $R_0 = 8.3$  kpc,  $v_0 = 244$  km/s) (sredina), ( $R_0 = 8.5$  kpc,  $v_0 = 220$  km/s) (dolje).



Slika 6.6: Medijan i intervali pouzdanosti  $c_s^2$  od 68%, 95% i 99%. Računanje je napravljeno metodom s pet točaka za tri različite vrijednosti orbitalne brzine Sunca i udaljenosti od središta galaksije: ( $R_0 = 8.0$  kpc,  $v_0 = 200$  km/s) (gore), ( $R_0 = 8.3$  kpc,  $v_0 = 244$  km/s) (sredina), ( $R_0 = 8.5$  kpc,  $v_0 = 220$  km/s) (dolje).





Slika 6.7: Usporedba medijana kvadrata brzine zvuka  $c_s^2$  izračunati metodom s tri i pet točaka za udaljenost Sunca od centra galaksije od  $R_0 = 8.0$  kpc i orbitalne brzine Sunca od  $v_0 = 200$  km/s.

od 68% i 95%. Više je mogućih razloga. Prije svega, u izračun je uključena gustoća sve prisutne materije, dakle i barionskog diska. Ovdje problem nije samo radijalno simetrični doprinos, nego i eventualne varijacije u lokalnoj gustoći. Bolji rezultati će se vjerojatno moći dobiti sa skupovima podataka iz kojih je izuzeta barionska gustoća za što su potrebni točniji podaci o distribuciji barionske mase. U tom slučaju u računu bi bilo dobro upotrijebiti osno simetrični model. Također, značajno poboljšanje bi predstavljala i gušće izmjerena rotacijska krivulja, s manjim razmacima između pojedinih točaka. Ovaj pristup bi se mogao pokazati korisnim i u sustavima s jednom komponentom ili u kojima barionska komponenta ima značajno manji utjecaj na orbitalne brzine, kao što su ultradifuzne galaksije [123–125]

Pošto je ovdje riječ o pristupu koji je neovisan o modelima, podaci kao što je gustoća fluida tamne materije i kvadrat brzine zvuka mogu se dobiti na temelju isključivo rotacijske krivulje. Iako je dosad bilo pokušaja računanja gustoće materije iz podataka za rotacijsku krivulju, na primjer [126], dobivanje brzine zvuka je novitet ovog rada. S obzirom da je ovdje riječ o pojednostavljenoj analizi, svrha nije toliko utvrđivanje je li tamna materija zaista barotropski fluid, koliko istraživanje mogu li se ovom metodom dobiti relevantni rezultati.

## 7 Zaključak

Usprkos više od dva desetljeća istraživanja, do danas se nismo značajno približili konkretnom odgovoru na pitanje što uzrokuje ubrzano širenje svemira - u smislu da, ako je odgovor na to pitanje: "zbog tamne energije", još uvijek nemamo odgovor na pitanje: što je onda tamna energija. Otkako je otkriveno ubrzano širenje kasnog svemira, uspostavljen je velik broj metoda analize dobivenih rezultata promatranja, razvijenih modela i njihove usporedbe, ali još nijedna nije dala rezultate koje bismo mogli nazvati konačnima.

Formalizam temeljen na brzini zvuka tamne energije i tamne materije kao barotropskog fluida novi je pristup kojim su, dosad nekorištenom metodom, dobiveni novi modeli koji pokazuju zanimljivo ponašanje u evoluciji tamne energije, tamne materije i jednadžbe stanja tamnih fluida.

U ovom radu dobiveni su neki relevantni rezultati. Analiziran je veći broj modela s različitim svojstvima:

- prijelaz granice kozmološke konstante u raznim parametarskim režimima, od kojih su se neki dogodili bez singulariteta u slučaju gustoće i parametra  $w$ ;
- ujedinjenje tamne materije i tamne energije u nekoliko kombinacija i redoslijeda, od kojih se neke pokazuju kao dobra nadogradnja modela  $\Lambda$ CDM;
- utvrđeno je ponašanje nekih modela u budućnosti svemira i analiza po parametarskim režimima; utvrđivanje parametarskih uvjeta za Veliko razdiranje i Malo razdiranje.

Također, analizirano je tridesetak modela tamne energije iz literature, uspostavljenih kroz prethodnih dvadesetak godina, i utvrđeno je koji od njih nisu kompatibilni s opisom tamne energije kao barotropskog fluida. Za preostale, utvrđeni su parametarski režimi i ograničenja parametara unutar kojih bi se tamna energija ponašala kao barotropski fluid. Kao što se moglo i očekivati, što je veći broj parametara, to je lakše bilo doći do njihove kombinacije koja bi omogućila ponašanje tamne energije kao barotropskog fluida.

Uspostavljen je formalizam i poveznica između kozmološki-makroskopske i mikroskopske slike svemira preko gustoće Lagrangijana čisto kinetičke  $k$ -esencije.

Analizirane su orbitalne brzine zvijezda u galaksiji Mliječni put i iz dobivenih je podataka izračunata krivulja  $c_s^2$  u ovisnosti o udaljenosti od središta galaksije. Na temelju toga omogućena je procjena ponaša li se tamna materija u našoj galaktici kao barotropski fluid.

Sumarno, uspostavljen je novi formalizam i na većem broju primjera demonstriran novi analitički aparat pomoću kojeg se mogu analizirati dosad uspostavljeni modeli, kao i oni koji će se tek pojaviti, te rezultati promatranja, konkretno, rotacijskih brzina naše, ali i udaljenih galaktika.

U kombinaciji s nekim drugim računskim postupcima - konkretno, odračunavanja utjecaja barionske materije, što u ovom radu nije napravljeno jer je naglasak bio na ilustraciji cijelog postupka - mogao bi se dobiti preciznija informacija o prostornoj distribuciji svojstava tamnog sektora i, ukoliko je zaista riječ o jedinstvenom fluidu, jasnijem definiranju situacija u kojima su istaknutija svojstva tamne materije odnosno tamne energije.

Ova metoda pokazuje potencijal za dodatna istraživanja i analizu podataka dobivenih iz promatranja kako bi se dobile jasnije informacije o nekim procesima kao što je, na primjer, rast struktura. Također bi mogla pomoći u modeliranju galaktika i grozdova galaktika. Isto tako, u ovom radu još nisu istražene sve kombinacije parametara za koje je moguće da neke od njih pokažu zanimljive rezultate. Na primjer, kod modela ujedinjenja prikazanih u 3. poglavlju napravljena je analiza samo za neke vrijednosti parametra  $C$ , a bilo bi zanimljivo istražiti što je s ostalim vrijednostima.

Ova metoda predstavlja novu rutu istraživanja koja dosad nije korištena i pomoću koje se mogu uspostaviti novi modeli i klase modela. U primjerima korištenja ovog formalizma već su postignuti konkretni rezultati i dobivena su analitička rješenja za konkretne modele. Jedan od rezultata uključuje mogućnost da se tamni sektor zapravo nalazi u obliku tranzijentne tamne energije što otvara još jedan smjer mogućih istraživanja.

Neke od ovdje istraženih modela bilo bi zanimljivo detaljnije usporediti s rezultatima promatranja. Također, kad je riječ o  $k$ -esenciji, ova bi metodologija mogla pomoći u numeričkom računanju funkcije  $F(X)$  pri čemu je  $w$  vrlo pogodan parametar s obzirom da je u mnogim modelima njegova vrijednost ograničena na konačan interval.

## Literatura

- [1] A. G. Riess et al., Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *Astron. J.* 116 (1998) 1009.
- [2] S. Perlmutter et al., Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae, *Astrophys. J.* 517 (1999) 565.
- [3] D. N. Spergel et al., (WMAP collaboration) Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology, *Astrophys. J. Suppl. S.* 170 (2007) 377.
- [4] P. Astier et al. (Supernova Legacy Survey), The Supernova legacy survey: Measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set, *Astron. Astrophys.* 447 (2006) 31.
- [5] Planck collaboration, Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.* 594 (2016).
- [6] A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Ann. Phys.-Berlin* 354 (1916).
- [7] A. Friedman, Über die Krümmung des Raumes, *Z. Phys.* 10 (1922) 377.
- [8] G. Lemaître, Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques, *Ann. Soc. Sci. Brux. A47* (1927) 49.
- [9] H. P. Robertson, Kinematics and world structure, *Astrophys. J.* 82 (1935) 284.
- [10] A. G. Walker, On Milne's theory of world-structure, *P. Lond. Math. Soc., Series 2*, 42 (1937) 90.
- [11] W. T. Kelvin, Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light, (1904) 274.
- [12] H. Poincare, La Voie lactée et la théorie des gaz, *Bulletin de la Société astronomique de France* 20 (1906) 153.

- [13] J. C. Kapteyn, First Attempt at a Theory of the Arrangement and Motion of the Sidereal System, *Astrophys. J.*, vol. 55 (1922) 302.
- [14] J. H. Oort, The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems, *B. Astro. I. Neth.* 6 (1932) 249.
- [15] F. Zwicky, Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln, *Helv. Phys. Acta* 6 (1933) 110.
- [16] Babcock H. W., The rotation of the Andromeda Nebula, *Lick Observatory Bulletin* 19 (1939) 41.
- [17] E. Komatsu et al, Results from the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 6 (2014) 06B102.
- [18] C. Alcock et al., Experimental Limits on the Dark Matter Halo of the Galaxy from Gravitational Microlensing, *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 2867.
- [19] A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, *Sitzber. K. Preuss. Aka.* (1917) 142.
- [20] H. Kragh, Preludes to dark energy: zero-point energy and vacuum speculations, *Arch. Hist. Exact Sci.* 66 (3) (2012) 199.
- [21] S. M. Carroll, The Cosmological Constant, *Living Rev. Relativ.* 4 (2001) 1.
- [22] B. Ratra, P. J. E. Peebles, Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field, *Phys. Rev. D* 37 (1988) 3406.
- [23] A. H. Guth, Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, *Phys. Rev. D* 23 (1981) 347.
- [24] A. D. Linde, A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems, *Phys. Lett. B* 108 (1982) 389.
- [25] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1220.

- [26] R. R. Caldwell, R. Dave, P. J. Steinhardt, Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 1582.
- [27] S. Tsujikawa, Quintessence: A Review, *Class. Quantum Grav.* 30 (2013) 214003.
- [28] R. R. Caldwell and E. V. Linder, Limits of Quintessence, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 141301.
- [29] L. A. Ureña-López, N. Roy, Generalized tracker quintessence models for dark energy, *Phys. Rev. D* 102 (2020) 063510.
- [30] T. Chiba, Equation of state of tracker fields, *Phys. Rev. D* 81 (2010) 023515.
- [31] T. Barreiro, E. J. Copeland, N. J. Nunes, Quintessence arising from exponential potentials, *Phys. Rev. D* 61 (2000) 127301.
- [32] J. A. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins, I. Waga, Cosmology with Ultralight Pseudo Nambu-Goldstone Bosons, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 2077.
- [33] R. R. Caldwell, A Phantom Menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state, *Phys. Lett. B* 545 (2002) 23.
- [34] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, Paul J. Steinhardt, Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration, *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000) 4438.
- [35] V. Poitras, Can the coincidence problem be solved by a cosmological model of coupled dark energy and dark matter?, *Gen. Relat. Gravit.* 46.6 (2014) 1732.
- [36] V. Poitras, Constraints on  $\Lambda(t)$ -cosmology with power law interacting dark sectors, *J. Cosmol. Astropart. P.* 6 (2012) 039.
- [37] W. Yang, S. Pan, E. Di Valentino, Nunes R. C., Vagnozzi S., Mota D. F., Tale of stable interacting dark energy, observational signatures and the  $H_0$  tension, *J. Cosmol. Astropart. P.* 9 (2018) 019.
- [38] W. Yang, S. Pan, J. D. Barrow, Large-scale stability and astronomical constraints for coupled dark-energy models, *Phys. Rev. D* 97 (2018) 043529.

- [39] W. Yang, S. Pan, D. F. Mota, Novel approach toward the large-scale stable interacting dark-energy models and their astronomical bounds, *Phys. Rev. D* 96, 12 (2017) 123508.
- [40] M. Chevallier, D. Polarski, Accelerating Universes with Scaling Dark Matter, *Int. J. Mod. Phys. D* 10 (2001), 213.
- [41] E. V. Linder, Exploring the Expansion History of the Universe, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003), 091301.
- [42] A. R. Cooray, D. Huterer, Gravitational lensing as a probe of quintessence, *Astrophys. J.* 513 (1999) L95.
- [43] C. Wetterich, Phenomenological parameterization of quintessence, *Phys. Lett. B* 594 (2004) 17.
- [44] E. M. Barboza, J. S. Alcaniz, A parametric model for dark energy, *Phys. Lett. B* 666 (2008) 415.
- [45] H. K. Jassal, J. S. Bagla, T. Padmanabhan, Understanding the origin of CMB constraints on Dark Energy, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 405 (2010) 2639.
- [46] S. Perlmutter, B. P. Schmidt, Measuring Cosmology with Supernovae, *Lect. Notes Phys.* 598 (2003) 195.
- [47] P. Jain, J. P. Ralston, Evidence for Evolution or Bias in Host Extinctions of Type 1a Supernovae at High Redshift, *Astrophys. J.* 637 (2006) 91.
- [48] H. K. Jassal, J. S. Bagla, T. Padmanabhan, Observational constraints on low redshift evolution of dark energy: How consistent are different observations?, *Phys. Rev. D* 72 (2005) 103503.
- [49] Astier P. et al. The Supernova Legacy Survey: Measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the First Year Data Set, *Astron. Astrophys.* 447 (2006) 31.
- [50] A. Joyce, L. Lombriser, F. Schmidt, Dark Energy vs. Modified Gravity, *Ann. Rev. Nuc. Part. Sc.* (2016) 1.

- [51] C. Brans, R. H. Dicke, Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation, *Phys. Rev.* 124 (1961) 925.
- [52] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, C. Skordis, Modified Gravity and Cosmology, *Phys. Rept.* 513 (2012) 1.
- [53] M. Fierz, W. Pauli, On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A173 (1939) 211.
- [54] C. de Rham, G. Gabadadze, A. J. Tolley, Resummation of Massive Gravity, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 231101.
- [55] N. Arkani-Hamed, H. Georgi, M. D. Schwartz. Effective Field Theory for Massive Gravitons and Gravity in Theory Space, *Annals Phys.* 305 (2003) 96.
- [56] P. Creminelli, A. Nicolis, M. Papucci, E. Trincherini, Ghosts in Massive Gravity, *J. High Energy Phys.* 9 (2005) 003.
- [57] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, 4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space, *Phys. Lett.* B485 (2000) 208.
- [58] C. M. Will, The Confrontation between General Relativity and Experiment, *Living Rev. Rel.* 17 (2014).
- [59] D. Merritt, "Cosmology and convention". *Stud. Hist. Philos. M. P.* 57 (2017) 41.
- [60] M. Milgrom, A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis, *Astrophys. J.* 270, (1983) 365.
- [61] M. Sami, R. Myrzakulov, Late time cosmic acceleration: ABCD of dark energy and modified theories of gravity, *Int. J. Mod. Phys. D.* 25 (2016) 1630031.
- [62] E. Verlinde, On the origin of gravity and the laws of Newton, *J. High Energy Phys.*, 29 (2011).
- [63] J. W. Moffat, New theory of gravitation, *Phys. Rev.* 19 (1979) 3554.
- [64] P. A. R. Ade et al., Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.* 571 (2014).



- [65] E. Di Valentino et al, In the Realm of the Hubble tension – a Review of Solutions, *Class. Quantum Grav.* 38 (2021) 153001.
- [66] N. Čaplar, H. Štefančić, Generalized models of unification of dark matter and dark energy, *Phys. Rev. D* 87, 023510.
- [67] G-B. Zhao et al, Dynamical dark energy in light of the latest observations, *Nature Astronomy* 1 (2017) 627.
- [68] P. Bhattacharjee, S. Chaudhury, S. Kundu, Rotation Curve of the Milky Way out to  $\sim 200$  kpc, *Astrophys. J.* 785 (2014) 63.
- [69] D. Perković, H. Štefančić, Transient dark energy, cosmological constant boundary crossing and dark energy  $w(z)$  data fits, *Int. J. Mod. Phys. D* 28, (2019) 1950045.
- [70] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, N. N. Weinberg, Phantom Energy and Cosmic Doomsday, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 071301.
- [71] I. Brevik, E. Elizalde, S. Nojiri, S.D. Odintsov, Viscous Little Rip Cosmology, *Phys. Rev. D* 84 (2011).
- [72] R. Bean, J. Magueijo, Dilaton-derived quintessence scenario leading naturally to the late-time acceleration of the Universe, *Phys. Lett. B* 517 (2001) 177.
- [73] J. G. Russo, Exact solution of scalar field cosmology with exponential potentials and transient acceleration, *Phys. Lett. B* 600 (2004) 185.
- [74] A. Fuzfa, J.-M. Alimi, Dark Energy as a Born-Infeld Gauge Interaction Violating the Equivalence Principle, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 061301.
- [75] F. C. Carvalho, J. S. Alcaniz, J. A. S. Lima, R. Silva, Scalar-Field-Dominated Cosmology with a Transient Acceleration Phase, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 081301.
- [76] T. S. Koivisto, N. J. Nunes, Three-form cosmology, *Phys. Lett. B* 685 (2010) 105.
- [77] Y.-F. Cai, E. N. Saridakis, M. R. Setare, J.-Q. Xia, Quintom Cosmology: Theoretical implications and observations, *Phys. Rept.* 493 (2010) 1.

- [78] H. Stefancic, Dark energy transition between quintessence and phantom regimes - an equation of state analysis, *Phys. Rev. D* 71 (2005) 124036.
- [79] J. Sola, Gomez-Valent, J. de Cruz Perez, The  $H_0$  tension in light of vacuum dynamics in the Universe, *Phys. Lett. B* 774 (2017) 317.
- [80] A. Gomez-Valent, J. Sola, Relaxing the  $\sigma_8$ -tension through running vacuum in the Universe, *Europhys. Lett.* 120 (2017) 39001.
- [81] A. Gomez-Valent, J. S. Peracaula, Density perturbations for running vacuum: a successful approach to structure formation and to the  $\sigma_8$ -tension, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 478 (2018) 126.
- [82] D. Perković, G. Štefančić, Dark sector unifications: Dark matter-phantom energy, dark matter - constant w dark energy, dark matter-dark energy-dark matter, *Phys. Lett. B* 797, (2019) 134806.
- [83] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, An alternative to quintessence, *Phys. Lett. B* 511 (2001) 265.
- [84] N. Bilic, G. B. Tupper, R. D. Viollier, Dark Matter, Dark Energy and the Chaplygin Gas, *Phys. Lett. B* 535 (2002) 17.
- [85] M.C. Bento, O. Bertolami, A.A. Sen, Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification, *Phys. Rev. D* 66 (2002) 043507.
- [86] E. V. Linder, R. J. Scherrer, Aetherizing Lambda: Barotropic fluids as dark energy, *Phys. Rev. D* 80 (2009) 023008.
- [87] D. Perković, H. Štefančić, Barotropic fluid compatible parametrizations of dark energy, *Eur. Phys. J. C* 80 (2020), 7; 629.
- [88] Y. Gong, Y.-Z. Zhang, Probing the curvature and dark energy, *Phys. Rev. D* 72 (2005) 043518.
- [89] D. Huterer, D. L. Shafer, Dark energy two decades after: observables, probes, consistency tests , *Rept. Prog. Phys.* 81 (2018) 016901.

- [90] P. Brax, What makes the Universe accelerate? A review on what dark energy could be and how to test it, *Rept. Prog. Phys.* 81 (2018) 016902.
- [91] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, Dynamics of dark energy, *Int. J. Mod. Phys. D* 15 (2006) 1753.
- [92] J. Frieman, M. Turner, D. Huterer, Dark Energy and the Accelerating Universe, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 46 (2008) 385.
- [93] K. Bamba, S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov, Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests, *Astrophys. Space Sci.* 342 (2012) 155.
- [94] J. Solà, A. Gómez-Valent, J. de Cruz Pérez, First evidence of running cosmic vacuum: challenging the concordance model, *Astrophys. J.* 836 (2017) 43.
- [95] S. Nojiri, S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution, *Phys. Rept.* 692 (2017) 1.
- [96] A. De Felice, S. Tsujikawa,  $f(R)$  theories, *Living Rev. Relativ.* 13 (2010) 3.
- [97] T. P. Sotiriou, V. Faraoni,  $f(R)$  theories of gravity, *Rev. Mod. Phys.* 82 (2010) 451.
- [98] E. Di Valentino, A. Melchiorri, O. Mena, S. Vagnozzi, Nonminimal dark sector physics and cosmological tensions, *Phys. Rev. D* 101 (2020) 063502.
- [99] G. Efstathiou, Constraining the equation of state of the Universe from distant Type Ia supernovae and cosmic microwave background anisotropies, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 310 (1999) 842.
- [100] A. R. Cooray, D. Huterer, Gravitational lensing as a probe of quintessence, *Astrophys. J.* 513 (1999) L95.
- [101] S. Hannestad, E. Mortsell, Cosmological constraints on the dark energy equation of state and its evolution, *J. Cosmol. Astropart. P.* 0409 (2004) 001.
- [102] S. Lee, Constraints on the dark energy equation of state from the separation of CMB peaks and the evolution of  $\Omega_m$ , *Phys. Rev. D* 71 (2005) 123528.

- [103] S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, Comparison of the Legacy and Gold SnIa Dataset Constraints on Dark Energy Models, *Phys. Rev. D* 72 (2005) 123519.
- [104] K. Ichikawa, T. Takahashi, Dark energy parametrizations and the curvature of the universe, *J. Cosmol. Astropart. P.* 0702 (2007) 001.
- [105] D.-J. Liu, X.-Z. Li, J. Hao, X.-H. Jin, Revisiting the parametrization of equation of state of dark energy via SNIa data, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 388 (2008) 275.
- [106] J.-Z. Ma, X. Zhang, Probing the dynamics of dark energy with novel parametrizations, *Phys. Lett. B* 699 (2011) 233.
- [107] I. Sendra, R. Lazkoz, Supernova and baryon acoustic oscillation constraints on (new) polynomial dark energy parametrizations: current results and forecasts, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 422 (2012) 776.
- [108] C.-J. Feng, X.-Y. Shen, P. Li, X.-Z. Li, A new class of parametrization for dark energy without divergence, *J. Cosmol. Astropart. P.* 1209 (2012) 023.
- [109] S. Sello, A general parametric model for the dynamic dark energy, arXiv:1308.0449.
- [110] H. Wei, X.-P. Yan, Y.-N. Zhou, Cosmological applications of Padé approximant, *J. Cosmol. Astropart. P.* 1401 (2014) 045.
- [111] Q. Zhang, G. Yang, Q. Zou, X. Meng, K. Shen, Exploring the low redshift universe: two parametric models for effective pressure, *Eur. Phys. J. C* 75 (2015) 300.
- [112] G. Pantazis, S. Nesseris, L. Perivolaropoulos, Comparison of thawing and freezing dark energy parametrizations, *Phys. Rev. D* 93 (2016) 103503.
- [113] A. Al Mamon, A new parametrization for dark energy density and future deceleration, *Mod. Phys. Lett. A* 33 (2018) 20, 185011333.
- [114] D. Perkovic, H. Stefancic, Purely kinetic k-essence description of  $c_s^2(w)$  barotropic fluid models, *Phys. Dark Universe* 32 (2021) 100827.
- [115] A. Diez-Tejedor, A. Feinstein, Relativistic hydrodynamics with sources for cosmological K-fluids, *Int. J. Mod. Phys. D* 14 (2005) 1561.

- [116] F. Arroja, M. Sasaki, A note on the equivalence of a barotropic perfect fluid with a K-essence scalar field, *Phys. Rev. D* 81 (2010) 107301.
- [117] V. M. C. Ferreira, P. P. Avelino, R. P. L. Azevedo, Lagrangian description of cosmic fluids: Mapping dark energy into unified dark energy, *Phys. Rev. D* 102 (2020) 063525.
- [118] R. J. Scherrer, Purely Kinetic k-Essence as Unified Dark Matter, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 011301.
- [119] S. Das, A. Al Mamon, M. Banerjee, A new parametrization of dark energy equation of state leading to double exponential potential, *Res. Astron. Astrophys.* 18 (2018) 131.
- [120] W. Yang, S. Pan, A. Paliathanasis, Latest astronomical constraints on some non-linear parametric dark energy models, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 475 (2018) 2605.
- [121] V. H. Cárdenas, N. Cruz, S. Munoz, J.R. Villanueva, Reconstruction of a kinetic k-essence Lagrangian from a modified of dark energy equation of state, *Eur. Phys. J. C* 78 (2018) 7, 591.
- [122] D. Perkovic, H. Stefancic, Dark matter fluid constraints from galaxy rotation curves, [arXiv:2205.10211](https://arxiv.org/abs/2205.10211).
- [123] P. G. van Dokkum et al., Forty-Seven Milky Way-Sized, Extremely Diffuse Galaxies in the Coma Cluster, *Astrophys. J. Lett.* 798 (2015)
- [124] D. Zaritsky et al., Systematically Measuring Ultra-diffuse Galaxies (SMUDGes). I. Survey Description and First Results in the Coma Galaxy Cluster and Environs, *Astrophys. J. Suppl. S* 240 (2019) 1.
- [125] P. G. van Dokkum et al., A galaxy lacking dark matter, *Nature* 555 (2018) 62.
- [126] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic dynamics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

## Životopis i popis radova

Dalibor Perković rođen je 1974. godine. Prirodoslovno-matematičku gimnaziju pohađao je u Sisku i završio u Samoboru, nakon čega je upisao Prirodoslovno-matematički fakultet. Diplomirao je 2005. godine. Kao nastavnik fizike radio je u desetak osnovnih i srednjih škola u Zagrebu i okolici. Zaposlen je kao profesor fizike na Zdravstvenom veleučilištu u Zagrebu.

- D. Perković, H. Štefančić, Transient dark energy, cosmological constant boundary crossing and dark energy  $w(z)$  data fits, Int. J. Mod. Phys. D28 (2019) 1950045.
- D. Perković, G. Štefančić, Dark sector unifications: Dark matter-phantom energy, dark matter - constant  $w$  dark energy, dark matter-dark energy-dark matter, Phys Let B797 (2019) 134806.
- D. Perković, H. Štefančić, Barotropic fluid compatible parametrizations of dark energy, Eur. Phys. J. C80 (2020) 7; 629.
- D. Perković, H. Štefančić, Purely kinetic k-essence description of  $c_s^2(w)$  barotropic fluid models, Phys. Dark Universe 32 (2021) 100827.
- D. Perković, H. Štefančić, Dark matter fluid constraints from galaxy rotation curves, arXiv:2205.10211