Struktura Cliffordove algebre pridružene reduktivnoj Liejevoj grupi

Grizelj, Karmen

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Karmen Grizelj

Struktura Cliffordove algebre pridružene reduktivnoj Liejevoj grupi

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2023.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Karmen Grizelj

Struktura Cliffordove algebre pridružene reduktivnoj Liejevoj grupi

DOKTORSKI RAD

Mentor:

prof. dr. sc. Pavle Pandžić

Zagreb, 2023.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Karmen Grizelj

Structure of the Clifford algebra associated to a reductive Lie group

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

prof. dr. sc. Pavle Pandžić

Zagreb, 2023.

ZAHVALA

Najviše hvala Andreyu Krutovu bez kojeg ovaj rad nikad ne bi bio završen, a vjerojatno ni započet. On je u izradi ovog rada bio i kritičar i podrška i prijatelj i partner. Uvijek me motivirao da napravim malo više od onoga što sam smatrala svojim mogućnostima i na taj način izvukao ono najbolje iz mene. Vjerovao je u mene u trenucima kad nisam vjerovala sama u sebe. Uvijek sam ga mogla pitati što god sam htjela, svejedno često nisam dobila odgovor, nego uputu kako riješiti problem. To mi je dalo zadovoljstvo da sam ipak na kraju riješila problem samostalnim razmišljanjem, pa onda i dodatnu dozu samopouzdanja koja mi je bila prijeko potrebna. Iznimka su bila pitanja tipa "što mi nije dobro u ovom dijelu koda, zašto mi javlja grešku" za vrijeme tipkanja ovog rada. U takvim situacijama bi u milisekundi otkrio koji je problem i odmah mi rekao gdje je greška i kako ju ispraviti.

Spomenula sam da je bio kritičar, u tom smislu bio je moj najveći kritičar u vremenu pisanja ove disertacije. Bio je jako strog i često nije prihvaćao moje izlike za nerad. Mislim da je to posljedica stare poznate ruske škole matematike koju je prošao. Koliko god sam smatrala iscrpljujućim slušanje i prihvaćanje tolikih kritika, u konačnici sam uspjela završiti rad koji smatram kvalitetno napisanim i na koji sam ponosna. Andrey nikad nije prihvaćao ništa manje od izvrsnosti i od mene je očekivao izvrsnost, ali sigurno je znao da sam sposobna ponuditi dobre rezultate koji bi bili u skladu s njegovim standardima. Inzistirao je na tome da ono što mogu napraviti danas ne ostavljam za sutra i na taj način me tjerao da uvijek idem dalje, njegov moto je uvijek bio: i sporo kretanje je bolje od stajanja na mjestu.

Jako je teško opisati riječima koliko sam mu zahvalna za sve što je napravio za mene posljednjih nekoliko godina. Ovaj tekst je nekakav pokušaj da izrazim koliko mi je značio cijelo vrijeme i obećanje da nikad neću zaboraviti trud i vrijeme koje je uložio u mene kao osobu i matematičarku. Ironično, sam Andrey će samo djelomično razumjeti ovu zahvalu, ali obećajem i da ću pokušati prevesti ovo sve na engleski najbolje što mogu.

Druga osoba kojoj se imam potrebu zahvaliti je moj mentor Pavle Pandžić. Ova zahvala nije samo dužno poštovanje prema mentoru, ovo je iskrena zahvala onome što je Pavle bio cijelo vrijeme, ne samo kao matematičar, nego i kao čovjek. Nikad nije očekivao od mene da radim kao stroj i uvijek je bio pun razumijevanja za sve probleme koji su mi se pojavljivali u glavi i nikad me nije kritizirao za stvari na koje ne mogu utjecati. Tko god je pokušao pisati doktorsku disertaciju točno zna o kakvim mentalnim problemima pričam. U takvim situacijama Pavle je bio više prijatelj ili roditelj nego mentor. Pavle, hvala što nisi doprinosio razini stresa svih ovih godina, doktorat je dovoljan stres sam po sebi. Srećom, Pavle će razumjeti zahvalu bez prijevoda.

Zadnja osoba kojoj se zahvaljujem je moja mama Mirjana. Mama, hvala što si me budila kada me je bilo nemoguće probuditi i što si me često zvala dvoznamenkasti broj puta kada si bila posebno zabrinuta za mene. Znam koliko ti je to uzrokovalo brige i gubitka vremena, nadam se da smatraš da se na kraju ipak isplatilo.

Hvala i mojoj mački Bubre što se uvijek trudila smanjiti količinu stresa svojim ponašanjem. Ponekad bi legla na papire koje proučavam da mi kaže da je vrijeme za pauzu, čak bi me nekad podsjetila da je vrijeme za leći u krevet kada bih ostala dugo budna radeći.

SAŽETAK

Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija Liejeve algebre pridružene realnoj reduktivnoj grupi G. Pretpostavimo da je $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ simetrični par takav da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija, odnosno takav da za Weylove grupe vrijedi $W_{\mathfrak{k},\mathfrak{t}} = W_{\mathfrak{g},\mathfrak{t}}$, gdje je $\mathfrak{t}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{k}$. U ovom radu pokazat će se analogoni nekih poznatih rezultata u slučajnu relativne Weilove i Cliffordove algebre. Za transgresiju na relativnoj Weilovoj algebri $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) = \left(S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ će se odrediti eksplicitna formula i onda dokazati teorem o transgresiji. Teorem o transgresiji opisuje sliku i jezgru transgresije.

Za simetrični par $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ kao ranije neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ Cartanova dekompozicija. Neka je $\mathfrak{h}$ fundamentalna Cartanova podalgebra, odnosno $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, gdje je $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Drugi cilj ovog rada je uvođenje Harish-Chandrinog preslikavanja na Cliffordovoj algebri $C(\mathfrak{p})$ kao projekcije na $C(\mathfrak{a})$ za neki izbor pozitivnih $(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ korijena.

Pokazat će se da je restrikcija Harish-Chandrinog preslikavanja na $\mathfrak{k}$-invarijante u $C(\mathfrak{p})$ izomorfizam algebri $C(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ i $C(\mathfrak{a})$.

Summary

Let $\mathfrak{g}$ be the complexification of the Lie algebra of a real reductive group G. Assume that $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ is a symmetric pair such that $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ is a primary representation. Put differently, if we denote by $\mathfrak{t}$ Cartan subalgebra of $\mathfrak{k}$, then we have an equality of Weyl groups $W_{\mathfrak{k},\mathfrak{t}} = W_{\mathfrak{g},\mathfrak{t}}$. Main goal of this dissertation is to show some new results in the relative Weil and Clifford algebra, analogous to famous results in the absolute case. First result will be an explicit formula for the transgression in the relative Weil algebra $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) = \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{p}\big)^{\mathfrak{k}}$. Further, the transgression theorem will be proved in this case; this theorem gives us the image and the kernel of the transgression map.

For a symmetric pair $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ as before let $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ be the Cartan decomposition. Let $\mathfrak{h}$ be the fundamental Cartan subalgebra, so $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, where $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Another goal of this dissertation is to introduce Harish-Chandra map on the Clifford algebra $C(\mathfrak{p})$ as a projection to $C(\mathfrak{a})$ for a choice of positive $(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ roots.

It will be shown that the restriction of the Harish-Chandra map to $\mathfrak{k}$-invariants in $C(\mathfrak{p})$ is an algebra isomorphism $C(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}} \to C(\mathfrak{a})$.

Sadržaj

Uvod

Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ njena Cartanova podalgebra. Izaberimo sistem pozitivnih korijena $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ i označimo sa ρ polovinu sume svih pozitivnih korijena.

Kostant je u [Kos1, teorem 35] pokazao da, ako označimo sa $P_\wedge(\mathfrak{g})$ prostor primitivnih invarijanata u $\bigwedge\mathfrak{g}$, Cliffordova algebra od $\mathfrak{g}$ se može rastaviti kao

$$C(\mathfrak{g}) = \operatorname{End} V_\rho \otimes C(P_\wedge(\mathfrak{g})),$$

gdje je V_ρ prostor reprezentacije najveće težine ρ, a $C(P_\wedge(\mathfrak{g}))$ odgovara invarijantama $C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, posebno invarijante imaju strukturu Cliffordove algebre. Ovaj rastav zove se ρ-dekompozicija. Kostant je dio ove tvrdnje zvao Cliffordovim analogonom Hopf-Koszul-Samelsonovog teorema u [Kos2, teorem 10.2.] koji tvrdi da $\mathfrak{g}$-invarijante u vanjskoj algebri, $\left(\bigwedge\mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$, imaju strukturu vanjske algebre nad primitivnim invarijantama. Kostantov rezultat daje da $C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ ima strukturu Cliffordove algebre nad $P_\wedge(\mathfrak{g})$.

Iako imamo ρ-dekompoziciju, ne znamo točno kako su ovi tenzorski faktori smješteni u $C(\mathfrak{g})$. Kostant je uspio u [Kos1, teorem 89] samo djelomično odgovoriti na to pitanje. Korištenjem preslikavanja koje je Chevalley u [Che2] zvao transgresijom Kostant je pokazao da će kontrakcije primitivne invarijante poslati u prvi tenzorski faktor $\operatorname{End} V_\rho$. Koristeći ovaj netrivijalni rezultat u [Kos1, teorem 89] možemo eksplicitno vidjeti ρ-dekompoziciju barem u filtriranom stupnju 1. Konkretnije, ako $\mathfrak{g}$ shvatimo kao uloženu u $C(\mathfrak{g})$, onda svaki $x \in \mathfrak{g}$ znamo prikazati preko ρ-dekompozicije:

$$x = \sum_i a_i \otimes p_i, \quad a_i \in \operatorname{End} V_\rho, p_i \in P_\wedge(\mathfrak{g}).$$

Neka je $W(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge\mathfrak{g}$ Weilova algebra od $\mathfrak{g}$, tenzorski produkt simetrične i vanjske algebre. Weilove algebre je uveo André Weil kao model za algebru diferencijalnih formi na klasifikacijskom svežnju Liejeve grupe, pogledati [Car1].

Označimo diferencijal na Weilovoj algebri sa d_W. Za $S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ vrijedi da je u slici tog diferencijala pa za $x \in S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ možemo definirati njegov kolanac transgresije kao element $C_x \in W(\mathfrak{g})$

za koji je $d_W(C_x) = x$. Označimo sa $\pi : W(\mathfrak{g}) \to \bigwedge \mathfrak{g}$ projekciju na $\bigwedge \mathfrak{g}$ duž $S(\mathfrak{g})$. U tom slučaju transgresiju elementa x definiramo kao $\mathbf{t}(x) = \pi(C_x)$. Ovo preslikavanje je dobro definirano.

Navodimo važan teorem, takozvani teorem o transgresiji; on kaže da je jezgra transgresije jednaka kvadratu domene, $\left(S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\right)^2$, a slika je jednaka prostoru primitivnih invarijanata $P_\wedge(\mathfrak{g})$. Ovaj teorem nam omogućava da račune s primitivnim invarijantama prebacimo iz $\bigwedge \mathfrak{g}$ na simetričnu algebru $S(\mathfrak{g})$ koja je komutativna. Teorem je prvi puta predstavljen u [Che2] od strane Chevalleya, kojemu se pripisuje rezultat, i malo kasnije u Cartanovim predavanjima [Car1]. Dokaz teorema je također dan u Lerayevom članku [Ler].

Postoji i eksplicitna formula za transgresiju koju je Kostant koristio u primjeni ρ-dekompozicije na elemente iz $\mathfrak{g}$ i dobio rezultat [Kos1, teorem 89]. Označimo li sa p_i neku bazu za $P_\wedge(\mathfrak{g})$ i sa q_i njoj dualnu bazu, onda se svaki $x \in \mathfrak{g}$ može zapisati kao

$$x = \sum_i \iota_x p_i \otimes q_i.$$

Definiramo Harish-Chandrino preslikavanje na Cliffordovoj algebri na sljedeći način: neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ trijangularna dekompozicija; imamo rastav

$$C(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{n}^+) \otimes C(\mathfrak{h}) \otimes C(\mathfrak{n}^-).$$

Neka je $\mathbf{hc} : C(\mathfrak{g}) \to C(\mathfrak{h})$ projekcija obzirom na ovu dekompoziciju. Kostant je pokazao i Bazlov kasnije u [Baz] objavio da je restrikcija ovog preslikavanja na $\mathfrak{g}$-invarijante izomorfizam. Koristeći ρ-dekompoziciju, pokazao je i da izomorfizam $\mathbf{hc} : C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to C(\mathfrak{h})$ uspostavlja bijekciju između primitivnih invarijanata $P_\wedge(\mathfrak{g})$ i Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$, što je iznenađujući rezultat obzirom da elemente od $\mathfrak{h}$ u $C(\mathfrak{h})$ smatramo elementima stupnja 1, dok su elementi od $P_\wedge(\mathfrak{g})$ u $C(\mathfrak{g})$ filtriranog stupnja barem 3.

Noviji rezultati su analogoni spomenutih rezultata u relativnom slučaju, odnosno koristeći Cartanovu dekompoziciju $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ umjesto $C(\mathfrak{g})$ i $C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ promatramo $C(\mathfrak{p})$ i $C(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$.

Zanima nas u kojim slučajevima imamo ρ-dekompoziciju za $C(\mathfrak{p})$, odnosno kada imamo analogon Hopf-Koszul-Samelsonovog teorema za $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$. Ispostavlja se da je to slučaj točno kada je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija. Neka je $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{k}$. Reći da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija je isto što i reći da je Weylova grupa za $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ korijene ista kao Weylova grupa za $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ korijene. U radu je navedena lista simetričnih parova $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ za koje to vrijedi i svi novi rezultati u radu imaju pretpostavku da je simetrični par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ jedan od njih.

Prvi rezultat ovog rada će biti definicija transgresije i eksplicitna formula za transgresiju u relativnom slučaju. Imat ćemo $\mathbf{t} : T \to \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$, gdje je T potprostor od $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ kojeg zovemo prostorom transgresije, a dan je kratkim egzaktnim nizom

$$0 \longrightarrow T \hookrightarrow S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_S} S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}} \longrightarrow 0.$$

Sljedeći rezultat bit će teorem o transgresiji u relativnom slučaju, dakle analogon već poznatog teorema o transgresiji. Rezultat će biti da je jezgra transgresije jednaka $TS^{+}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, a sliku čine primitivne invarijante u $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$.

Za posljednji rezultat trebamo definirati Harish-Chandrino preslikavanje u relativnom slučaju. Označimo $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ pa zbog trijangularne dekompozicije možemo pisati

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{n}^{+} \cap \mathfrak{p}) \oplus \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n}^{-} \cap \mathfrak{p}).$$

Korištenjem Poincaré-Birkhoff-Wittove baze za Cliffordovu algebru od $\mathfrak{p}$ imamo dekompoziciju

$$C(\mathfrak{p}) = C(\mathfrak{a}) \oplus ((\mathfrak{n}^{+} \cap \mathfrak{p})C(\mathfrak{p}) + C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^{-} \cap \mathfrak{p})).$$

Harish-Chandrino preslikavanje $\mathbf{hc} : C(\mathfrak{p}) \to C(\mathfrak{a})$ definiramo kao projekciju obzirom na ovu dekompoziciju. Ovo nije homomorfizam algebri, ali restrikcijom na $\mathfrak{k}$-invarijante dobivamo izomorfizam. Drugim riječima, posljednji rezultat ovog rada je teorem da je restrikcija

$$\mathbf{hc} : C(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}} \to C(\mathfrak{a})$$

izomorfizam algebri.

Na kraju se izloženi rezultati promatraju na konkretnim primjerima $SL(3,\mathbb{R})$, $SL(5,\mathbb{R})$ i općenitije $SL(2n+1,\mathbb{R})$.

1. Uvodni primjeri i motivacija

U ovom radu pretpostavlja se da je čitatelj upoznat s osnovnim definicijama i rezultatima vezanim uz Liejeve grupe, algebre i njihove reprezentacije. Ukoliko je potrebno, sve relevantno može se naći u [HP] ili [Hum1].

Ovaj rad se bavi jednom klasom realnih reduktivnih grupa, što će biti definirano u nastavku. Ipak, često je lakše promatrati stvari iz perspektive Liejevih algebri, koje će u našem slučaju biti reduktivne. Zato će u ovom radu fokus biti stavljen na Liejeve algebre pridružene realnim reduktivnim grupama.

1.1. Realne reduktivne grupe

Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Označimo sa $M_n(\mathbb{K})$ prostor svih $n \times n$ matrica nad $\mathbb{K}$ i sa $GL(n,\mathbb{K})$ grupu svih invertibilnih matrica iz $M_n(\mathbb{K})$.

Neka su $f_1, \dots, f_m$ kompleksni polinomi na $M_n(\mathbb{C})$ koji poprimaju realne vrijednosti na $M_n(\mathbb{R})$ i čije zajedničke nultočke u $GL(n,\mathbb{C})$ čine podgrupu $G_{\mathbb{C}}$. Grupu $G_{\mathbb{C}}$ zovemo afinom algebarskom grupom definiranom nad $\mathbb{R}$. Njenu podgrupu $G_{\mathbb{R}} := G_{\mathbb{C}} \cap GL(n,\mathbb{R})$ zovemo grupom realnih točaka.

Ako dodatno vrijedi $g^* \in G_{\mathbb{C}}, \forall g \in G_{\mathbb{C}}$, onda $G_{\mathbb{C}}$ zovemo simetričnom podgrupom od $GL(n,\mathbb{C})$. Definiramo automorfizam Θ na $G_{\mathbb{R}}$ sa $\Theta(g) = (g^{-1})^*$.

Definicija 1.1.1. Neka je $G_{\mathbb{C}}$ simetrična podgrupa od $GL(n,\mathbb{C})$ i $G_{\mathbb{R}}$ grupa realnih točaka. *Realna reduktivna grupa* G je konačni natkrivač otvorene podgrupe od $G_{\mathbb{R}}$.

Liejeve grupe s kojima se obično susrećemo su standardni primjeri realnih reduktivnih grupa.

Primjer 1.1.2. 1. $GL(n,\mathbb{R})$ je očito realna reduktivna grupa.

2. $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ je također primjer realne reduktivne grupe. Ovaj primjer će biti posebno važan u ostatku rada za n neparan.

3. $GL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{C})$, u ovim primjerima se koristi standardna interpretacija prostora $\mathbb{C}^n$ kao $\mathbb{R}^{2n}$.

4. Neka su $p,q \in \mathbb{Z}_+$ i $n = p+q$. Označimo sa $I_{p,q}$ dijagonalnu matricu reda n koja ima 1 na prvih p dijagonalnih mjesta i -1 na preostalih q mjesta. Tada definiramo
$$O(p,q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^* I_{p,q} A = I_{p,q}\}.$$
Umjesto $O(n,0)$ i $O(0,n)$ pišemo $O(n)$; to je jednostavno grupa ortogonalnih matrica reda n.

5. $SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n,\mathbb{R})$; opet koristimo oznaku $SO(n)$ za $SO(n,0)$, grupu specijalnih ortogonalnih matrica.

6. Prelaskom sa $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{C}^n$ dobivamo primjere $U(p,q), U(n)$ (unitarne matrice reda n), $SO(n,\mathbb{C})$, $SU(p,q), SU(n)$.

7. Označimo $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$. Neka je $Sp(2n,\mathbb{K}) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{K}) : A^* J A = J\}$. Ove grupe zovemo simplektičkim grupama jer odgovaraju simplektičkim (koso-simetričnim) bilinearnim formama. Njih ima smisla definirati samo na prostoru parne dimenzije. Za ovakve matrice automatski vrijedi da su determinante 1.

Liejevu algebru realne reduktivne grupe G identificiramo s Liejevom algebrom grupe $G_{\mathbb{R}}$. Kako je već spomenuto, ovaj rad se koncentrira na Liejeve algebre ovakvih grupa pa se čitatelj zainteresiran na daljnju teoriju realnih reduktivnih grupa upućuje na [Wal], knjigu u dva dijela koja se bavi isključivo realnim reduktivnim grupama. Pređimo zato na Liejeve algebre.

Definicija 1.1.3. Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kažemo da je *reduktivna* ako je direktna suma svog centra (komutativne Liejeve algebre) i poluproste Liejeve algebre $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

Konačno, sljedeći rezultat potvrđuje da prelazak na Liejevu algebru čuva reduktivnost.

Propozicija 1.1.4 ([Wal, 2.1.4])**.** Liejeva algebra realne reduktivne grupe je reduktivna.

Primjer 1.1.5. Koristeći ovu propoziciju dobivamo uobičajene primjere reduktivnih Liejevih algebri: $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, $\mathfrak{o}(p,q)$, $\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{K})$. Napomenimo da "specijalni" uvjet koji je u slučaju grupa bio da matrice imaju determinantu 1 sada postaje uvjet da su matrice traga 0.

1.2. Cartanova dekompozicija

Definicije i oznake u ovom poglavlju su preuzete iz [HP], poglavlja 1 i 2.

Neka je G realna reduktivna grupa i $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija njene Liejeve algebre. Na $\mathfrak{g}$ možemo definirati *Cartanovu involuciju* sa

$$\vartheta(X) = -X^*,\ X \in \mathfrak{g}.$$

Općenito, koristeći definiciju iz [Kna], neka je B nedegenerirana simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g}$. U slučaju poluproste $\mathfrak{g}$ obično se za B uzima Killingova forma, a ako je $\mathfrak{g}$ samo reduktivna, onda Killingovu formu proširimo na centar bilo kojom nedegeneriranom simetričnom bilinearnom formom. Involuciju ϑ na $\mathfrak{g}$ zovemo *Cartanovom involucijom* ako je bilinearna forma $B_\vartheta(X,Y) := -B(X,\vartheta Y)$ pozitivno definitna na $\mathfrak{g}$. Gornji izbor Cartanove involucije je standardni izbor za matrične algebre. Ovaj izbor je zapravo potekao od automorfizma Θ na $G_\mathbb{R}$ spomenutog kod definicije realne reduktivne grupe; dobiven je diferenciranjem.

Obzirom da je ϑ involucija, njene svojstvene vrijednosti su ± 1. Označimo sa $\mathfrak{k}$ svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost 1 i sa $\mathfrak{p}$ svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti -1. Tada vrijedi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

i ovaj rastav se zove *Cartanova dekompozicija*.

Kako je Cartanova involucija automorfizam na $\mathfrak{g}$ imamo

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k},\ [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p},\ [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

Iz ovoga vidimo da potprostor $\mathfrak{k}$ ima strukturu Liejeve algebre, dok $\mathfrak{p}$ nije Liejeva algebra. Uz ovaj rastav par $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ se zove *simetričnim parom*, a par $(\mathfrak{k},\mathfrak{p})$ *Cartanovim parom*.

Neka je $\mathfrak{h}$ maksimalna komutativna podalgebra od $\mathfrak{g}$ čiji su svi elementi poluprosti, odnosno za svaki $H \in \mathfrak{h}$ operator $\operatorname{ad} H$ je poluprost (dijagonalizabilan). Onda $\mathfrak{h}$ zovemo *Cartanovom podalgebrom* od $\mathfrak{g}$.

Nas će zanimati posebna vrsta Cartanove podalgebre, takozvana fundamentalna Cartanova podalgebra. Za Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ ćemo reći da je *fundamentalna* ako je $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, gdje je $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, a $\mathfrak{t}$ je Cartanova podalgebra od $\mathfrak{k}$. Za takvu algebru se kaže i da je maksimalno kompaktna.

Uobičajeno je promatrati korijene za par $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, ali u ovom radu ćemo biti zainteresirani za korijene za parove $(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ i $(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$.

Napomena 1.2.1. Općepoznata činjenica u teoriji reprezentacija Liejevih algebri je da su svi korijenski potprostori za par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ jednodimenzionalni. Ovo neće biti slučaj za par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ čim $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{k}$ nisu istog ranga jer tada $\mathfrak{t}$ nije Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$.

1.3. Weylove grupe

Pretpostavlja se da je čitatelj upoznat s konceptom Weylove grupe, za detalje pogledati [Hum2]. Cilj ovog poglavlja je uvesti i objasniti pretpostavku na Liejeve algebre koja će biti krucijalna u rezultatima ovog rada. Kao što je već najavljeno, korijeni koje ćemo promatrati će biti obzirom na $\mathfrak{t}$, Cartanovu podalgebru od $\mathfrak{k}$.

Označimo sa $W_{\mathfrak{g},\mathfrak{t}}$ Weylovu grupu definiranu $(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ korijenima i slično sa $W_{\mathfrak{k},\mathfrak{t}}$ Weylovu grupu pridruženu $(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ korijenima. Jasno je da općenito vrijedi $W_{\mathfrak{k},\mathfrak{t}} \subset W_{\mathfrak{g},\mathfrak{t}}$ i možemo definirati kvocijent

$$W^1 := {}^{W_{\mathfrak{g},\mathfrak{t}}}\!\diagup_{W_{\mathfrak{k},\mathfrak{t}}}.$$

Napomena 1.3.1. Kvocijent koji je upravo definiran općenito nije grupa jer $W_{\mathfrak{k},\mathfrak{t}}$ ne mora biti normalna podgrupa od $W_{\mathfrak{g},\mathfrak{t}}$, ali je uvijek konačan skup jer je $W_{\mathfrak{g},\mathfrak{t}}$ konačna grupa.

Slučaj koji ćemo proučavati je kada je W^1 minimalan, odnosno $|W^1| = 1$. Ovaj slučaj se može opisati na nekoliko zanimljivih načina. Jedna interpretacija je druga krajnost "equal rank" slučaja, odnosno slučaj $|W^1| = 1$ je najdalji mogući od slučaja $\operatorname{rk}\mathfrak{g} = \operatorname{rk}\mathfrak{k}$.

Jedna interpretacija preko korijena bi bila ovakva: $(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ korijena sigurno ima barem koliko i $(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ korijena jer se još neki dodatni korijeni pojavljuju u $\mathfrak{p}$. Ipak, u slučaju $|W^1| = 1$ korijeni koji se pojavljuju u $\mathfrak{p}$ mogu biti samo ponovljeni iz $\mathfrak{k}$ (sjetite se napomene da korijenski potprostori više ne moraju biti jednodimenzionalni) ili eventualno dvostruki korijeni iz $\mathfrak{k}$. Očito dodavanje tih korijena neće povećati broj mogućih refleksija pa su zato Weylove grupe iste.

Zadnja interpretacija koju navodimo je promatranje pozitivnih korijena. Općenito, ako definiramo pozitivne korijene $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$, oni ne određuju jedinstveno sistem pozitivnih korijena $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$. Ipak, u slučaju $|W^1| = 1$ imamo jedinstvenost, odnosno jednom kada smo zadali $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$, onda je definicijom sistema pozitivnih korijena jedinstveno određen $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$. Preciznije, broj mogućih izbora za $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ jednom kada smo fiksirali $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ jednak je točno $|W^1|$.

Primjer 1.3.2. Za $n \in \mathbb{N}$ Liejeva algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2n+1,\mathbb{C})$ uz $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2n+1)$ zadovoljava $|W^1| = 1$. Ovim primjerom ćemo se posebno baviti na kraju rada. Za Liejeve algebre $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2n)$ će uvijek vrijediti $|W^1| > 1$.

Uskoro ćemo navesti listu simetričnih parova $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ za koje je $|W^1| = 1$.

1.4. PRIMARNE REPREZENTACIJE

Za konačnodimenzionalnu potpuno reducibilnu reprezentaciju $\nu : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ ćemo reći da je *primarna* tipa ν_λ ako postoji ireducibilna reprezentacija $\nu_\lambda : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V_\lambda$ takva da je svaka ireducibilna komponenta od ν ekvivalentna ν_λ. Ovdje V_λ označava prostor reprezentacije najveće težine λ.

Nama posebno zanimljiva situacija je kada je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija, taj slučaj je Kostant promatrao u svom članku [Kos1], o tome ćemo reći više nešto kasnije. Kasnije su se Dmitri Panyushev u [Pan] i Gang Han u [Han] bavili ovim slučajem i zahvaljujući njima imamo listu parova $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ za koje je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija.

[Han, lema 4.4] kaže da je Spin_ν primarna reprezentacija ako i samo ako je sistem korijena $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ jednak sistemu korijena $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ ili je reducirani sistem korijena za $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Važno je primijetiti dvije stvari: prvo, imamo nužan i dovoljan uvjet za $|W^1| = 1$ pa možemo govoriti o uvjetu primarne reprezentacije. Drugo, Han je u tom članku pokušao poopćiti rezultate sa adjungirane reprezentacije na bilo koju reprezentaciju $\nu : \mathfrak{k} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{p})$, odnosno proširenje na $\bigwedge \mathfrak{p}$, ali rezultati su ostali potpuno isti kao oni koje je Panyushev dobio u [Pan] za adjungiranu reprezentaciju. Drugim riječima, dovoljno je razumjeti što se događa u slučaju da je ν adjungirana reprezentacija.

Panyushev je odredio koji točno parovi $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ daju da je spin adjungirane reprezentacije primaran, Han je kasnije eksplicitno napisao listu u [Han, teorem 4.13] i tu listu navodimo ovdje.

Teorem 1.4.1 (Han, Panyushev)**.** Neka je $\mathfrak{g}$ reduktivna Liejeva algebra. Weylova grupa $W_{\mathfrak{g},\mathfrak{t}}$ jednaka je Weylovoj grupi $W_{\mathfrak{k},\mathfrak{t}}$ ako i samo ako je par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ jedan od:

1. $(\mathfrak{sl}(2n+1,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}))$, $n \geq 1$,
2. $(\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))$, $n \geq 2$,
3. $(\mathfrak{so}(2n+2,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}))$, $n \geq 3$,
4. $(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{f}_4)$
5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{k} = \{(X,X) : X \in \mathfrak{g}_1\}$, pri čemu je $\mathfrak{g}_1$ prosta kompleksna Liejeva algebra,
6. direktna suma prethodnih slučajeva.

U ostatku rada kada pretpostavimo $|W^1| = 1$ ili kažemo da pretpostavljamo da je spin adjungirane reprezentacije primarna reprezentacija, smatramo da je par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ jedan od upravo navedenih.

1.5. Cliffordove algebre

Cilj ovog poglavlja je navesti neke poznate rezultate o strukturi Cliffordove algebre. Ti rezultati su bili motivacija za istraživanje u ovom radu i glavni rezultati rada će biti njihova generalizacija. Rezultati ovog poglavlja većinom su preuzeti iz Kostantovog članka [Kos1]. Cliffordovu algebru je definirao Clifford u [Cli]; za više detalja o Cliffordovim algebrama pogledati [DK] i [Lou].

Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra i neka je B nedegenerirana invarijantna simetrična bilinearna forma na $\mathfrak{g}$. Tu formu možemo proširiti do nedegeenerirane simetrične bilinearne forme na vanjsku algebru, $\bigwedge\mathfrak{g}$, na sljedeći način: ako je $i \neq j$, onda je $B(\bigwedge^i\mathfrak{g}, \bigwedge^j\mathfrak{g}) = 0$, inače je

$$B(x_1\wedge\cdots\wedge x_k, y_1\wedge\cdots\wedge y_k) = \det[B(x_i,y_j)]_{i,j}, \quad x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_k \in \mathfrak{g}$$

.

Koristeći ovako zadanu bilinearnu formu B na $\bigwedge\mathfrak{g}$ za proizvoljan $\beta \in \operatorname{End}\bigwedge\mathfrak{g}$ definiramo $\beta^\tau \in \operatorname{End}\bigwedge\mathfrak{g}$ tako da zadovoljava $B(\beta x, y) = B(x, \beta^\tau y), \forall x,y \in \bigwedge\mathfrak{g}$.
Za prvi važan teorem u ovom pregledu potrebno je definirati nekoliko endomorfizama od $\bigwedge\mathfrak{g}$. Uzmimo neki $x \in \bigwedge\mathfrak{g}$, tada ćemo sa ε_x i $\varepsilon_R(x)$ označiti endomorfizme lijevog, odnosno desnog vanjskog množenja u $\bigwedge\mathfrak{g}$. Konkretnije,

$$\varepsilon_x y = x\wedge y,$$
$$\varepsilon_R(x)y = y\wedge x, \quad y \in \bigwedge\mathfrak{g}.$$

Nadalje, možemo definirati i preslikavanja $\iota_x, \iota_R(x) \in \operatorname{End}\bigwedge\mathfrak{g}$ sa $\iota_x = \varepsilon_x^\tau, \iota_R(x) = \varepsilon_R(x)^\tau$. Preslikavanje ι_x nazivamo kontrakcijom elementom x. Konačno, označimo sa κ involutorni antiautomorfizam od $\bigwedge\mathfrak{g}$ za koji je $\kappa = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$ na $\bigwedge^k\mathfrak{g}$. Prvi važan rezultat daje vezu između Cliffordovog i vanjskog množenja. Cliffordovu algebru od $\mathfrak{g}$ ćemo označavati sa $C(\mathfrak{g})$ i definirati kao kvocijent tenzorske algebre po idealu generiranom elementima oblika $x\otimes x - B(x,x)$ za $x \in \mathfrak{g}$. Cliffordov produkt elemenata x i y označavat ćemo sa xy.

Teorem 1.5.1 ([Kos1, teorem 16]). Neka su $x,y \in C(\mathfrak{g})$, neka je $\{a_i\}_{i=1,\dots,2^n}$ bilo koja baza za $C(\mathfrak{g})$ i $\{b_j\}_{j=1,\dots,2^n}$ njoj dualna baza obzirom na B. Tada je

$$xy = \sum_{k=1}^{2^n} \iota_R(a_k)x \wedge \iota_{\kappa(b_k)}y.$$

Promotrimo sada adjungiranu reprezentaciju, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}\, SO(\mathfrak{g})$, pri čemu je $SO(\mathfrak{g})$ definiran obzirom na B. Za svaki endomorfizam z od $\mathfrak{g}$ možemo definirati $\xi(z)$ kao jedinstvenu derivaciju stupnja 0 na $\bigwedge \mathfrak{g}$ koja proširuje djelovanje od z. Za $x \in \mathfrak{g}$ stavimo $\vartheta(x) = \xi(\mathrm{ad}\, x)$. Tada reprezentacija $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^0 \bigwedge \mathfrak{g}$ definira strukturu $\mathfrak{g}$-modula na $C(\mathfrak{g})$ i $\bigwedge \mathfrak{g}$. Napomenimo i vezu između spomenute Cliffordove i vanjske algebre: radi se o istom vektorskom prostoru i $\mathfrak{g}$-djelovanje je isto u oba slučaja, ali množenja na tim algebrama su različita pa se ne radi o izomorfnim algebrama.

Isto tako, imamo da je $J = (\bigwedge \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ obzirom na vanjsko množenje graduirana podalgebra od $\bigwedge \mathfrak{g}$.
Ako za $u \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ definiramo $\tau(u) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ sa

$$\tau(u)x = -2\iota_x u, \; x \in \mathfrak{g},$$

onda je $\tau : \bigwedge^2 \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}\, SO(\mathfrak{g})$ izomorfizam Liejevih algebri. Zato postoji jedinstveni $\alpha : \mathfrak{g} \to q\big(\bigwedge^2 \mathfrak{g}\big) \subset C(\mathfrak{g})$ za koji vrijedi $\tau \circ \alpha = \mathrm{ad}$.

Sjetimo se da je $C(\mathfrak{g})$ $\mathbb{Z}_2$-graduirana algebra: $C(\mathfrak{g}) = C^{\bar{0}}(\mathfrak{g}) \oplus C^{\bar{1}}(\mathfrak{g})$. Proširimo α do homomorfizma između univerzalne omotačke algebre i parne graduirane komponente Cliffordove algebre $\alpha : U(\mathfrak{g}) \to C^{\bar{0}}(\mathfrak{g})$. Preciznije $C^{\bar{0}}(\mathfrak{g})$ je podalgebra od $C(\mathfrak{g})$ generirana produktima parno mnogo elemenata iz $\mathfrak{g}$. Označimo sa E sliku tog proširenja od α. Drugim riječima, E je podalgebra od $C^{\bar{0}}(\mathfrak{g})$ generirana sa $\alpha(\mathfrak{g})$. Vrijedi da je J centralizator od E u $C(\mathfrak{g})$ pa centar od E možemo izraziti kao $\mathfrak{z}(E) = E \cap J$.

Neka je $\nu : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ reprezentacija od $\mathfrak{g}$ koja dopušta nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu B_V na V. Neka je $C(V)$ Cliffordova algebra obzirom na tu bilinearnu formu i S_V njen spin modul. Definiramo *spin reprezentacije* ν kao reprezentaciju $\mathrm{Spin}_\nu : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(S_V)$ danu kompozicijom

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{so}(V) \to \bigwedge^2 V \to C(V) \to \mathrm{End}(S_V).$$

U slučaju da je ν adjungirana reprezentacija, njen spin je dan kao kompozicija

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{g}) \to \bigwedge^2 \mathfrak{g} \to C(\mathfrak{g}) \curvearrowright S.$$

Prvo od navedenih preslikavanja, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{g})$, je jednostavno adjungirana reprezentacija, odnosno $x \mapsto [x, \cdot]$. Vrijedi da su $\mathfrak{so}(\mathfrak{g})$ i $\bigwedge^2 \mathfrak{g}$ linearno izomorfni; izomorfizam je za neku ortonormiranu bazu od $\mathfrak{g}$, $\{Z_1, \ldots Z_n\}$, dan sa $Z_i \wedge Z_j \leftrightarrow E_{ij} - E_{ji}$, pritom je s desne strane operator pridružen toj matrici u bazi $\{Z_i\}$. Preslikavanje $\bigwedge^2 \mathfrak{g} \to C(\mathfrak{g})$ je jednostavno Chevalleyevo preslikavanje, a $C(\mathfrak{g}) \curvearrowright S$ djelovanje Cliffordove algebre na spin modul S. Spin modul je definiran kao vektorski prostor $S = \bigwedge \mathfrak{g}^+$, gdje su $\mathfrak{g}^\pm$ maksimalni izotropni potprostori od $\mathfrak{g}$ dualni obzirom na B. Djelovanje Cliffordove algebre je zadano tako da $\mathfrak{g}^+$ djeluje vanjskim produktom, a $\mathfrak{g}^-$ kontrakcijom.

Pretpostavimo sada da je ν primarna tipa ν_λ. Ako stavimo $E_0 = \nu(U(\mathfrak{g}))$, imamo izomorfizam algebri $E_0 \simeq \operatorname{End} V_\lambda$. Nadalje, ako je d multiplicitet od ν_λ u ν i J_0 centralizator od E_0 u $\operatorname{End} W$, onda imamo izomorfizme algebri $J_0 \simeq \operatorname{End} \mathbb{C}^d$ i $E_0 \otimes J_0 \simeq \operatorname{End} W$ (uz $a \otimes b \mapsto ab$).

Ako sa V_λ^* označimo $\mathfrak{g}$-modul dualan V_λ, onda imamo i izomorfizam $\mathfrak{g}$-modula

$$\operatorname{End} W \simeq d^2 V_\lambda \otimes V_\lambda^*.$$

Sada, ako pretpostavimo da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija (što ćemo kasnije vidjeti da vrijedi), onda koristeći gornja razmatranja dobivamo

Propozicija 1.5.2 ([Kos1, propozicija 20]). $C(\mathfrak{g}) \simeq E \otimes J$ kao algebre i postoje $r_0, l_0 \in \mathbb{Z}_+$ takvi da je $\dim V_\lambda = 2^{r_0}$, $\dim J = 2^{l_0}$. E je prosta algebra i $\dim E = 2^{2r_0}$.
Konačno, J je izomorfna matričnoj algebri ako je $\dim \mathfrak{g}$ parna, a izomorfna sumi dvije matrične algebre ako je $\dim \mathfrak{g}$ neparna.

1.5.1. Analogon Hopf-Koszul-Samelsonovog teorema u slučaju Cliffordove algebre

Označimo $n = \dim \mathfrak{g}$ i uzmimo da je bilinearna forma B Killingova forma.

Za bilo koju $\mathbb{Z}_+$-graduiranu algebru A možemo definirati njezin augmentacijski ideal, A^+, kao sumu homogenih potprostora pozitivnog stupnja. Obzirom da je J obzirom na vanjsko množenje graduirana algebra, možemo promatrati J^+. Označimo sa $P_\wedge$ ortogonalni komplement od $J^+ \wedge J^+$ u J^+ obzirom na B. Njegove elemente zovemo *primitivne invarijante*, a sam prostor $P_\wedge(\mathfrak{g})$ prostorom *primitivnih invarijanata*.

Teorem 1.5.3 (Hopf-Koszul-Samelson, [Kos2]). Dimenzija od $P_\wedge(\mathfrak{g})$ jednaka je $\operatorname{rk} \mathfrak{g}$. Nadalje, $P_\wedge(\mathfrak{g}) \subset \bigwedge^{\mathrm{odd}} \mathfrak{g}$ pa primitivni elementi antikomutiraju. Posebno, injektivno preslikavanje $P_\wedge(\mathfrak{g}) \to J$ se proširuje do homomorfizma $\zeta : \bigwedge P_\wedge(\mathfrak{g}) \to J$. Vrijedi da je ζ izomorfizam algebri, pri čemu J ima strukturu podalgebre od $\bigwedge \mathfrak{g}$.

Navedeni teorem iskazan je u terminima vanjskog množenja. Ono što nas zanima je kako to izgleda u slučaju Cliffordovog množenja i to je jedan od važnih Kostantovih rezultata.

Nažalost, za prelazak na Cliffordovu algebru nije dovoljno koristiti jednakost dimenzija vanjske i Cliffordove algebre i jednostavno zaključiti $J \simeq C(P_\wedge(\mathfrak{g}))$. Za taj zaključak trebamo modificirati bilinearnu formu koja će definirati ovu Cliffordovu algebru.

Problem sa dosadašnjom bilinearnom formom B leži u činjenici da za involutorni antiautomorfizan κ definiran na početku $\kappa|_{P_\wedge(\mathfrak{g})}$ nije identiteta, točnije $\kappa = (-1)^m$ na $P_\wedge(\mathfrak{g})^{2m+1}$. Ipak, ispostavlja se da bilinearna forma koja daje traženi izomorfizam nije toliko daleko od naše početne; dovoljno je uzeti u obzir predznak koji potječe od κ. Konkretnije, neka je B_0 bilinearna forma na $P_\wedge(\mathfrak{g})$ zadana sa

$$B_0(p,q) = B(\kappa(p),q).$$

Teorem 1.5.4 ([Kos1, teorem 35]). Linearni izomorfizam $\zeta : C(P_\wedge(\mathfrak{g}),B_0) \to J$ je izomorfizam algebri. Pri tome $J = (\bigwedge \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ promatramo kao podalgebru od $C(\mathfrak{g})$, a $C(P_\wedge(\mathfrak{g}),B_0)$ kao Cliffordovu algebru od $P_\wedge(\mathfrak{g})$ obzirom na bilinearnu formu B_0. Posebno, obzirom na Cliffordovo množenje u $C(\mathfrak{g})$, primitivni elementi se ponašaju kao elementi stupnja 1, preciznije

$$pq + qp = 2B_0(p,q), \forall p,q \in P_\wedge(\mathfrak{g}).$$

1.5.2. Primarnost Spin reprezentacije i ρ-dekompozicija

Do sada smo pretpostavljali da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija, ali da bismo potpuno odredili dekompoziciju od $C(\mathfrak{g})$ moramo vidjeti koji je ν_λ takav da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija tipa ν_λ.

Neka je $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$ i neka je $\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ sistem korijena. Korijenske vektore $e_\varphi, \varphi \in \Delta$ biramo tako da je $B(e_\varphi, e_{-\varphi}) = 1$.

Neka je $\mathfrak{b}$ Borelova podalgebra od $\mathfrak{g}$ tako da vrijedi $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ i neka je $\Delta^+ = \Delta(\mathfrak{b},\mathfrak{h})$. Tada $\Delta^+ \subset \Delta$ daje jedan izbor pozitivnih korijena. Označimo sa $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$ nilradikal od $\mathfrak{b}$ i neka je

$$\mathfrak{b}^- = \mathfrak{h} + \sum_{\varphi \in \Delta^+} \mathbb{C} e_{-\varphi}$$

tako da vrijedi $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{b}^-$. Sada, uz oznaku $r = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$ imamo

$$\dim \mathfrak{n} = \operatorname{card} \Delta^+ = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{b} =: q,$$

$$\dim \mathfrak{b}^- = r + q.$$

Bilinearna forma restringirana na $\mathfrak{h}$ je nedegenerirana pa inducira nedegeneriranu bilinearnu formu na $\mathfrak{h}^*$. Uz tu bilinearnu formu imamo $(\varphi,\varphi) > 0, \forall \varphi \in \Delta$.
Označimo sa Γ aditivnu polugrupu dominantnih integralnih linearnih formi na $\mathfrak{h}$:

$$\Gamma = \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* : \frac{2(\lambda,\varphi)}{(\varphi,\varphi)} \in \mathbb{Z}_+, \forall \varphi \in \Delta^+ \right\}.$$

Skup Γ parametrizira (kao najveće težine) klase ekvivalencije ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$. Konkretnije, za svaki $\lambda \in \Gamma$ neka je $\nu_\lambda : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V_\lambda$ fiksirana ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{g}$ najveće težine λ.

Neka je $\Pi = \{\alpha_1, \dots \alpha_r\} \subset \Delta^+$ skup prostih korijena i $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\varphi\in\Delta^+} \varphi$. Znamo da je $\rho \in \Gamma$, točnije $\frac{2(\rho,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 1, \forall \alpha \in \Pi$. Posebno, ρ je regularan, odnosno nije ortogonalan ni na jedan korijen, i $(\rho,\varphi) > 0, \forall \varphi \in \Delta^+$.

Za svaki $\lambda \in \Gamma$ imamo Weylovu formulu dimenzije

$$\dim V_\lambda = \frac{\prod\limits_{\varphi\in\Delta^+} (\rho+\lambda,\varphi)}{\prod\limits_{\varphi\in\Delta^+} (\rho,\varphi)}.$$

Posebno zanimljiv slučaj je onaj kad je λ baš jednak ρ. U tom slučaju imamo

$$\dim V_\rho = 2^q$$

jer je svaki od q faktora u brojniku duplo veći od pripadnog faktora u nazivniku.

Promotrimo sada jedan poseban element vanjske algebre. Fiksirajmo uređaj na skupu pozitivnih korijena $\{\varphi_1,\dots,\varphi_q\}$ i definirajmo

$$\mu_\mathfrak{n} = e_{\varphi_1} \wedge \cdots \wedge e_{\varphi_q} = e_{\varphi_1} \cdots e_{\varphi_q}.$$

U tom slučaju je $0 \neq \mu_\mathfrak{n} \in \bigwedge^q \mathfrak{n}$.

Sjetimo se, α je bilo preslikavanje pomoću kojeg smo definirali $E = \operatorname{im}\alpha$ koji sudjeluje u dekompoziciji od $C(\mathfrak{g})$.Možemo fiksirati prostor reprezentacije V_ρ tako da $V_\rho = E\mu_\mathfrak{n}$ i da je ν_ρ podreprezentacija potpuno reducibilne reprezentacije $\nu_C : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} C(\mathfrak{g})$ definirane lijevim množenjem sa $\alpha(\mathfrak{g}) \subset \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ na $C(\mathfrak{g})$.

Lijevo Cliffordovo množenje definira homomorfizam $\gamma : E \to \operatorname{End} V_\rho$. Sada samo spremni iskazati što je točno ρ-dekompozicija Cliffordove algebre od $\mathfrak{g}$.

Teorem 1.5.5 ([Kos1, teorem 40]). Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra. Tada je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna tipa ν_ρ, posebno γ je izomorfizam algebri pa možemo identificirati E i $\operatorname{End} V_\rho$.

Nadalje, koristeći izomorfizam ζ možemo identificirati J i $C(P_\wedge(\mathfrak{g}), B_0)$, odnosno $J = (\bigwedge \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ je Cliffordova algebra nad prostorom primitivnih invarijanata. Zato vrijedi jednakost algebri

$$C(\mathfrak{g}) = \operatorname{End} V_\rho \otimes C(P_\wedge(\mathfrak{g}), B_0).$$

Posebno, koristeći ϑ (proširenje adjungirane reprezentacije) imamo jednakost $\mathfrak{g}$-modula

$$\bigwedge \mathfrak{g} = 2^r V_\rho \otimes V_\rho.$$

Pogledajmo sada neke dodatne stvari koje možemo reći u nekim posebnim slučajevima.

Primjer 1.5.6. Neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(k,\mathbb{C})$ i promotrimo $\bigotimes^j \mathbb{C}^k$ kao $\mathfrak{g}$-modul. Vrijedi da je $(\bigotimes^j \mathbb{C}^k)^{\mathfrak{h}}$, odnosno potprostor težine 0, netrivijalan ako i samo ako je j djeljiv sa k. Posebno, najmanji j za koji je to moguće je $j = k$. Za dominantnu integralnu težinu λ označimo sa $m_\lambda(W)$ multiplicitet od E_λ, prostora ireducibilne reprezentacije najveće težine λ, u $\mathfrak{g}$-modulu W. Iz Schur-Young-Weylovog teorema imamo da je broj dominantnih integralnih linearnih formi λ za koje je $m_\lambda(\bigotimes^k \mathbb{C}^k) \neq 0$ jednak broju particija od k. Označimo taj broj sa $p(k)$.

Propozicija 1.5.7 ([Kos1, propozicija 46])**.** Neka je $\lambda \in \Gamma$ takav da je $m_\lambda(\bigotimes^k \mathbb{C}^k) \neq 0$. Tada je $V_\lambda^{\mathfrak{h}} \neq 0$ i

$$m_\lambda(\bigotimes^k \mathbb{C}^k) = \dim V_\lambda^{\mathfrak{h}}.$$

S druge strane, za svaki $\varphi \in \Delta$ je $V_\lambda(2\varphi)$, težinski prostor koji odgovara $2\varphi \in \mathfrak{h}^*$, trivijalan.

Dodatno, vrijedi i

Propozicija 1.5.8 ([Kos1, korolar 48])**.** Neka je ν_λ bilo koja od $p(k)$ ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{g}$ koja se pojavljuje u $\bigotimes^k \mathbb{C}^k$. Tada je $m_\lambda(V_\rho \otimes V_\rho) = \dim V_\lambda^{\mathfrak{h}}$.

Postoji monomorfizam $\mathfrak{g}$-modula

$$\bigotimes^k \mathbb{C}^k \to V_\rho \otimes V_\rho$$

pa onda i monomorfizam $\mathfrak{g}$-modula

$$2^{k-1} \bigotimes^k \mathbb{C}^k \to \bigwedge \mathfrak{g},$$

gdje na $\bigwedge \mathfrak{g}$ promatramo adjungirano djelovanje. Nadalje, ako se ν_λ pojavljuje u $\bigotimes^k \mathbb{C}^k$, onda slike gornja dva monomorfizma sadrže punu primarnu ν_λ komponentu u $V_\rho \otimes V_\rho$ i $\bigwedge \mathfrak{g}$ respektivno.

Primjer 1.5.9. Pretpostavimo da je $\mathfrak{g}$ kompleksna prosta Liejeva algebra; u tom slučaju je adjungirana reprezentacija ireducibilna. Za $\mathfrak{g}$-modul M označimo sa $m_{\mathrm{ad}}(M)$ multiplicitet adjungirane reprezentacije u M.
Za razliku od prethodnog primjera, ovdje nas zanima samo slučaj $\lambda = \rho$ pa imamo da je

$$m_{\mathrm{ad}}(V_\rho \otimes V_\rho) = r$$

i posljedično

$$m_{\mathrm{ad}}(\bigwedge \mathfrak{g}) = 2^r r.$$

1.6. TRANSGRESIJA I PRIKAZ ELEMENATA OD $\mathfrak{g}$ PREKO ρ-DEKOMPOZICIJE. TEOREM O TRANSGRESIJI

Osim motivacije za rezultate u ovom radu, navodimo i jednu zanimljvu posljedicu koja daje motivaciju za buduća istraživanja. Za rezultat je zaslužan Bertram Kostant u [Kos1], kasnije je Echard Meinrenken uvrstio rezultate u svoju knjigu [Mei], tamo se može pronaći drugačiji pristup ovoj teoriji.

Neka je $\mathfrak{g}$ i dalje kompleksna poluprosta Liejeva algebra. *Weilovu algebru* od $\mathfrak{g}$ definiramo kao

$$W(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{g},$$

pri čemu $S(\mathfrak{g})$ označava simetričnu algebru od $\mathfrak{g}$. Weilovom algebrom ćemo se detaljnije baviti u sljedećem poglavlju, za sada je cilj objasniti motivaciju.

Na $W(\mathfrak{g})$ definiramo diferencijal d_W kao zbroj Koszulovog i Chevalley-Eilenbergovog diferencijala. Uz taj diferencijal kompleks $W(\mathfrak{g})$ je aciklički, isto kao i prostor $\mathfrak{g}$-invarijantnih elemenata $W(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Obzirom da d_W iščezava na $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, svaki invarijantni polinom $p \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ pozitivnog stupnja je kociklus, pa onda i korub nekog elementa iz $W(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Za $p \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ pozitivnog stupnja njegov kolanac transgresije definiramo kao element $C_p \in W(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ za koji vrijedi $\mathrm{d}_W C_p = p$.

Označimo sa π projekciju od $W(\mathfrak{g})$ na $\bigwedge \mathfrak{g}$ duž $S^+(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{g}$; taj morfizam se restringira do morfizma diferencijalnih algebri

$$\pi : W(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to \left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}.$$

Ako definiramo *transgresiju* kao preslikavanje $\mathbf{t} : \left(S^+(\mathfrak{g})\right)^{\mathfrak{g}} \to \left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$ sa $\mathbf{t}(p) = \pi(C_p)$, gdje je C_p kolanac transgresije za p, onda je to preslikvanje dobro definirano.

Želimo vidjeti kako transgresija izgleda eksplicitno. U tu svrhu definiramo preslikavanje $\lambda : S(\mathfrak{g}) \to \bigwedge \mathfrak{g}$. Neka je e_i baza od $\mathfrak{g}$ i f_i njoj dualna baza. Definiramo

$$\lambda(x) = \frac{1}{4}\sum_i [x, e_i] \wedge f_i, \quad x \in \mathfrak{g}$$

i proširimo preslikavanje do $S(\mathfrak{g})$ koristeći univerzalno svojstvo simetrične algebre.

Napomena 1.6.1. Za ranije definirano preslikavanje $\alpha : U(\mathfrak{g}) \to C(\mathfrak{g})$ vrijedi da je u stupnju 1 kvantizacija preslikavanja λ, drugim riječima ako je $q : \bigwedge \mathfrak{g} \to C(\mathfrak{g})$ Chevalleyevo preslikavanje (kvantizacija), onda je $\alpha(x) = q \circ \lambda(x)$, $x \in \mathfrak{g}$. Sada vidimo da smo mogli α zadati kao proširenje od

$$\alpha(x) = \frac{1}{4} \sum_i [x, e_i] f_i, \ x \in \mathfrak{g}$$

na univerzalnu omotačku algebru korištenjem univerzalnog svojstva.

Definiramo i simetričnu kontrakciju sa $x \in \mathfrak{g}$ kao $\iota_x^S : S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$, $\iota_x^S(y) = B(x,y)$ na generatorima. Sada transgresiju možemo eksplicitno zapisati.

Propozicija 1.6.2 ([Che2], [Dyn]). Neka je $\{e_i\}$ baza za $\mathfrak{g}$ i $\{f_i\}$ njoj dualna baza. Transgresija homogenog elementa $p \in S^{m+1}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ je dana sa

$$\mathbf{t}(p) = \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \sum_i e_i \wedge \lambda(\iota_{f_i}^S p).$$

Jedan od rezultata u ovom radu bit će analogon ove formule u relativnom slučaju. Jedna od posljedica ove formule je prikaz elemenata od $\mathfrak{g} \subset C(\mathfrak{g})$ obzirom na ρ-dekompoziciju. Sjetimo se da smo za ρ-dekompoziciju trebali modificiranu bilinearnu formu B_0 i uz nju smo imali dekompoziciju $C(\mathfrak{g}) = E \otimes J$.

Teorem 1.6.3 ([Kos1, teorem 89]). Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra, $\{p_i\}$ baza prostora primitivnih invarijanata P i $\{q_i\}$ njoj B_0 dualna baza. Neka je $x \in \mathfrak{g}$. Tada je $\iota_x p_i \in E$ pa je

$$x = \sum_i (\iota_x p_i) q_i$$

rastav elementa x obzirom na ρ-dekompoziciju.

1.6.1. Teorem o transgresiji

Transgresija je alat koji koristimo za prelazak sa simetričnih primitivnih invarijanata na vanjske primitivne invarijante i obratno. Možda se čini besmisleno zaobilaziti računanje u vanjskoj algebri i umjesto toga računati u beskonačnodimenzionalnoj simetričnoj algebri, ali se ispostavlja da komutativnost uvelike doprinosi olakšanju računanja. Očekivano, od tako korisnog alata zahtijevamo da čuva strukturu koliko god je to moguće.

Bilo bi besmisleno zahtijevati od transgresije da bude izomorfizam na invarijantama obzirom da je domena $S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ beskonačnodimenzionalni prostor, a kodomena $\bigwedge \mathfrak{g}$ konačnodimenzionalan. Ono što bi imalo više smisla je promatrati inducirani homomorfizam na kvocijentu po jezgri, ali nije sasvim jasno što bi bila jezgra transgresije. Ono što se lako vidi je da je $\left(S^+(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}\right)^2$ unutar te jezgre. Isti rezultat će vrijediti i u relativnom slučaju pa će analogni dokaz biti prezentiran kasnije. Ono što je netrivijalno za vidjeti je da vrijedi i obrat, odnosno da je to čitava jezgra.

Svejedno, iz $\left(S^+(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}\right)^2 \subset \ker \mathbf{t}$ vidimo da je dobro definiran homomorfizam na kvocijentu pa bi injektivnost tog homomorfizma točno značila $\left(S^+(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}\right)^2 = \ker \mathbf{t}$. Ispostavlja se da će to biti monomorfizam, ali dokaz te činjenice je, neformalno govoreći, zaobilazan. Ekvivalentno bi bilo reći da restrikcijom kodomene dobivamo izomorfizam i to je točno ono što trebamo vidjeti. Naime, ako pravilno naslutimo što bi bila slika transgresije, možemo usporedbom dimenzija relativno lako dobiti da je inducirano preslikavanje izomorfizam.

Sve navedeno bit će precizno navedeno kasnije u slučaju koji nam je od interesa, čitatelj može vidjeti dokaz u [Mei] u poglavlju 10.7. Cilj svega ranije napisanog je bio dočarati da naizgled jednostavna tvrdnja (teorem o transgresiji koji slijedi) u sebi sadrži nekoliko važnih informacija i nipošto nije trivijalan rezultat.

Teorem 1.6.4 (Teorem o transgresiji, [Che2])**.** Neka je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra i $\mathbf{t} : S^+(\mathfrak{g})^\mathfrak{g} \to \bigwedge^+ \mathfrak{g}$ transgresija. Tada je jezgra od $\mathbf{t}$ jednaka $\left(S^+(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}\right)^2$, a slika od $\mathbf{t}$ je $P_\wedge(\mathfrak{g})$, prostor primitivnih invarijanata u $\bigwedge \mathfrak{g}$.

Napomena 1.6.5. Prostor primitivnih elemenata u vanjskoj algebri je jedinstveno određen, barem kada se uzme u obzir razumna pretpostavka da sve invarijante "imaju za faktore" primitivne invarijante, drugim riječima primitivne invarijante možemo zapisati kao produkt dvije invarijante samo ako je jedna od njih skalar. Čitatelja će ovo možda podsjetiti na proste brojeve, za koje se koristi i naziv prim brojevi.

S druge strane, ako promatramo simetričnu algebru, izbor prostora primitivnih invarijanata nije jedinstven, nego trebamo fiksirati neki izbor. Teorem o transgresiji daje motivaciju za jedan izbor, u literaturi se obično naziva *Dynkinov izbor* po uzoru na [Dyn]: u $S^+(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$ pogledamo ortogonalni komplement od $\left(S^+(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}\right)^2$ i taj prostor proglasimo prostorom primitivnih simetričnih invarijanata. Ovaj izbor izgleda kao preuzet iz definicije prostora vanjskih primitivnih invarijanata, ali teorem o transgresiji osigurava da su generatori jednog u bijekciji sa generatorima drugog prostora primitivnih invarijanata.

2. Weilove algebre

Preuzeto iz [Mei].

Weilove algebre je uveo André Weil kao algebarski model za diferencijalne forme na klasifikacijskom svežnju Liejeve grupe. Za više detalja pogledati [Car1].

Čitatelja kojeg zanima daljnje proučavanje Weilovih algebri i primjene upućujemo na [GHV, poglavlje 4] i [GS].

2.1. Diferencijalni prostori

Definicija 2.1.1. *Diferencijalni prostor* je super vektorski prostor $V = V^{\bar{0}} \oplus V^{\bar{1}}$ sa neparnim operatorom $\mathrm{d} : V \to V$ takvim da je $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ (drugim riječima $\mathrm{im}(\mathrm{d}) \subseteq \ker(\mathrm{d})$). Kvocijent

$$H(V, \mathrm{d}) = \frac{\ker(\mathrm{d})}{\mathrm{im}(\mathrm{d})}$$

zovemo kohomologijom diferencijalnog prostora (V, d).

Napomena 2.1.2. Kohomologija diferencijalnog prostora je također super vektorski prostor. Njegova $\mathbb{Z}_2$-gradacija je naslijeđena od V.

Napomena 2.1.3. Analogno možemo definirati graduirane diferencijalne prostore, koji se zovu i kolančani kompleksi. Ako je V graduirani/filtrirani prostor, onda zahtijevamo da je diferencijal d graduiranog/filtriranog stupnja 1.

Za graduirani vektorski prostor V i $n \in \mathbb{Z}$ definiramo graduirani prostor $V[n]$, koji je jednak V kao vektorski prostor, pomicanjem indeksa za n:

$$(V[n])^k = V^{n+k}.$$

Drugim riječima, ako je $v \in V$ stupnja k, onda je njegov stupanj u $V[n]$ jednak $k - n$.

Neka je $\mathscr{A}$ komutativna superalgebra i $\mathfrak{g}$ Liejeva superalgebra. Na prostoru $\mathscr{A} \otimes \mathfrak{g}$ definiramo strukturu Liejeve superalgebre: neka indeksi $\bar{0}$ i $\bar{1}$ označavaju parni i neparni dio algebre respektivno te neka je za homogeni element x njegova oznaka stupnja $|x|$. Komutator na $\mathscr{A} \otimes \mathfrak{g}$ je određen sa

$$[a_1 \otimes g_1, a_2 \otimes g_2] = (-1)^{|g_1| \cdot |a_2|} a_1 \cdot a_2 \otimes [g_1, g_2],$$

za homogene $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$ i $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$. Gradacija na $\mathscr{A} \otimes \mathfrak{g}$ je zadana na očiti način:

$$(\mathscr{A} \otimes \mathfrak{g})_{\bar{0}} = \mathscr{A}_{\bar{0}} \otimes \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathscr{A}_{\bar{1}} \otimes \mathfrak{g}_{\bar{1}},$$
$$(\mathscr{A} \otimes \mathfrak{g})_{\bar{1}} = \mathscr{A}_{\bar{1}} \otimes \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathscr{A}_{\bar{0}} \otimes \mathfrak{g}_{\bar{1}}.$$

Dodatno, ako imamo derivaciju $\mathrm{d}_{\mathscr{A}} \in \mathrm{Der}\,\mathscr{A}$ takvu da je $d_{\mathscr{A}}^2 = 0$, možemo definirati strukturu Liejeve superalgebre na $\mathscr{A} \otimes \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d$ tako da je komutator definiran sa

$$[\mathrm{d}_{\mathscr{A}}, a \otimes g] = \mathrm{d}_{\mathscr{A}}(a) \otimes g, \quad a \in \mathscr{A}, g \in \mathfrak{g}.$$

Konkretna algebra $\mathscr{A}$ koju ćemo koristiti će biti vanjska algebra s jednim generatorom. Preciznije, neka je ω element za koji vrijedi $\omega^2 = 0$ i neka je derivacija $\mathrm{d}_{\mathscr{A}}$ na $\bigwedge[\omega]$ dana sa $\mathrm{d}_{\mathscr{A}}(\omega) = 1, \mathrm{d}_{\mathscr{A}}(1) = 0$ (drugim riječima $\mathrm{d}_{\mathscr{A}} = \frac{\partial}{\partial \omega}$). Označimo ovako dobivenu Liejevu superalgebru sa $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$\hat{\mathfrak{g}} = \bigwedge[\omega] \otimes \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}\mathrm{d}_{\mathscr{A}}.$$

Napomena 2.1.4. Liejeva superalgebra $\hat{\mathfrak{g}}$ je primjer poluproste Liejeve superlagebre. Poluproste Liejeve superalgebre je klasificirao Cheng u [Che1].

Sada smo spremni za definiciju $\mathfrak{g}$-diferencijalnog prostora.

Definicija 2.1.5. Graduirani (filtrirani) $\mathfrak{g}$-*diferencijalni prostor* je graduirani (filtrirani) diferencijalni prostor (V, d) sa reprezentacijom graduirane (filtrirane) Liejeve superalgebre $\hat{\mathfrak{g}}$.

Pogledajmo Liejevu superalgebru $\hat{\mathfrak{g}}$; označimo njene generatore na sljedeći način: za $\xi \in \mathfrak{g}$ neka je I_ξ pripadni neparni element i neka je L_ξ pripadni parni element. Na ovaj način smo dobili diferencijalnu algebru; diferencijal je zadan sa $\mathrm{d}(I_\xi) = L_\xi, \mathrm{d}(L_\xi) = 0, \xi \in \mathfrak{g}$.

Ova definicija $\mathfrak{g}$-diferencijalne algebre nije praktična za korištenje, lakše je promatrati V kao prostor na kojem imamo diferencijal, djelovanje reprezentacije i kontrakcije. Notacija će biti kao u primjeru. Ako označimo sa ι_ξ sliku od I_ξ pod reprezentacijom i sa L_ξ sliku od L_ξ, onda će diferencijal d biti graduiranog (filtriranog) stupnja 1, L_ξ će biti stupnja 0, a ι_ξ će biti stupnja -1. Sada možemo reći da se radi o $\mathfrak{g}$-diferencijalnoj algebri ako za sve $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$ vrijede relacije:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 &= 0, \\
\iota_\xi \mathrm{d} + \mathrm{d}\iota_\xi &= L_\xi, \\
[L_\xi, \mathrm{d}] &= 0, \\
[L_\xi, L_\zeta] &= L_{[\xi,\zeta]}, \\
[L_\xi, \iota_\zeta] &= \iota_{[\xi,\zeta]}, \\
\iota_\xi \iota_\zeta + \iota_\zeta \iota_\xi &= 0.
\end{aligned}$$

Napomena 2.1.6. Sve gore navedene relacije se mogu zapisati koristeći super komutatore, točnije sve relacije su napisane kao uvjeti na super komutatore u terminima "običnih" komutatora.

Vanjska algebra $\bigwedge \mathfrak{g}$ je super komutativna, što znači da za sve $x, y \in \bigwedge \mathfrak{g}$ čistog stupnja k i j (odnosno $x \in \bigwedge^k \mathfrak{g}, y \in \bigwedge^j \mathfrak{g}$) vrijedi $x \wedge y = (-1)^{kj} yx$. Isto tako, pripadni super komutator elemenata je $[x, y] = xy - (-1)^{kj} yx$.

Za naše potrebe V će biti relativna Weilova algebra, L će biti adjungirano djelovanje, a ι će biti kontrakcije. Diferencijal d ćemo zadati nešto kasnije.

Za V ćemo reći da je $\mathfrak{g}$-diferencijalna Liejeva algebra ako je V $\mathfrak{g}$-diferencijalni prostor i Liejeva algebra te vrijedi da su svi $\mathrm{d}, L_\xi, \iota_\xi$ derivacije super Liejeve algebre.

Primjer 2.1.7. Liejeva superalgebra $\hat{\mathfrak{g}}$ je primjer jedne $\mathfrak{g}$-diferencijalne Liejeve algebre. Djelovanje od $\hat{\mathfrak{g}}$ je dano adjungiranom reprezentacijom.

2.2. Horizontalni i bazični potprostor

Definicija 2.2.1. Neka je V $\mathfrak{g}$-diferencijalni prostor. Definiramo njegov *horizontalni potprostor*, V_{hor}, kao sljedeći potprostor:

$$V_{\text{hor}} = \{x \in V : \iota_\xi x = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}\},$$

odnosno kao prostor svih elemenata iz V koji su anihilirani svim kontrakcijama.

Napomena 2.2.2. Horizontalni potprostor $\mathfrak{g}$-diferencijalnog prostora ne mora imati strukturu $\mathfrak{g}$-diferencijalnog prostora. Ako želimo sačuvati tu strukturu, trebamo se ograničiti na $\mathfrak{g}$-invarijante.

Definicija 2.2.3. Neka je V $\mathfrak{g}$-diferencijalni prostor. Njegov *bazični potprostor* se definira kao

$$\begin{aligned} V_{\text{bas}} &= \{x \in V : \iota_\xi x = L_\xi x = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}\} \\ &= V_{\text{hor}} \cap V^{\mathfrak{g}}. \end{aligned}$$

Uvjerimo se da se na ovaj način zaista dobiva $\mathfrak{g}$-diferencijalni prostor.

Lema 2.2.4. Neka je (V, d) $\mathfrak{g}$-diferencijalni prostor. Tada je i $(V_{\text{bas}}, \mathrm{d})$ $\mathfrak{g}$-diferencijalni prostor.

Dokaz. Koristit ćemo karakterizaciju $\mathfrak{g}$-diferencijalnog prostora navedenu ispod definicije jer većinu uvjeta dobivamo automatski. Preciznije, sve relacije koje moraju biti zadovoljene automatski vrijede jer je V_{bas} podskup od V za koji smo pretpostavili da je $\mathfrak{g}$-diferencijalni prostor. Slijedi da jedino trebamo provjeriti da je V_{bas} zatvoren na diferencijal; zatvorenost na L_ξ i ι_ξ je trivijalna jer ove derivacije poništavaju elemente iz V_{bas}.

Uzmimo $x \in V_{\text{bas}}$, dakle $L_\xi x = \iota_\xi x = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}$. Provjeravamo $\mathrm{d}x \in V_{\text{bas}}$, odnosno je li $\mathrm{d}x$ poništen svim L_ξ i ι_ξ. Korištenjem relacija iz karakterizacije $\mathfrak{g}$-diferencijalnog prostora za svaki $\xi \in \mathfrak{g}$ imamo:

$$\begin{aligned} \iota_\xi \mathrm{d}x &= -\mathrm{d}\iota_\xi x + L_\xi x = \mathrm{d}0 + 0 = 0, \\ L_\xi \mathrm{d}x &= \mathrm{d}L_\xi x = \mathrm{d}0 = 0, \end{aligned}$$

odnosno $\mathrm{d}x \in V_{bas}$, što je i trebalo pokazati. ∎

2.3. $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ KAO $\mathfrak{g}$-DIFERENCIJALNA ALGEBRA

Neka je $\mathfrak{g}$ konačnodimenzionalna kvadratična Liejeva algebra, odnosno na $\mathfrak{g}$ postoji nedegenerirana invarijantna simetrična bilinearna forma. Takve su, na primjer, sve reduktivne Liejeve algebre. Označimo jednu takvu bilinearnu formu sa B i fiksirajmo ju; koristeći B možemo identificirati $\mathfrak{g}$ sa dualnim prostorom: $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$. Neka je $\bigwedge \mathfrak{g}$ vanjska algebra od $\mathfrak{g}$. Prostor derivacija te algebre, $\mathrm{Der}(\bigwedge \mathfrak{g})$, je lijevi $\bigwedge \mathfrak{g}$-modul jer je $\bigwedge \mathfrak{g}$ super komutativna algebra. Svaka derivacija od $\bigwedge \mathfrak{g}$ je jedinstveno određena svojom restrikcijom na $\mathfrak{g} \subset \bigwedge \mathfrak{g}$ i obratno, svako linearno preslikavanje $\mathfrak{g} \to \bigwedge \mathfrak{g}$ se na jedinstven način proširuje do derivacije od $\bigwedge \mathfrak{g}$. Zato imamo sljedeći izomorfizam graduiranih super vektorskih prostora:

$$\mathrm{Der}\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right) \cong \mathrm{Hom}\left(\mathfrak{g}, \bigwedge \mathfrak{g}\right).$$

Graduirani stupnjevi na desnoj strani su dani sa

$$\mathrm{Hom}^k\left(\mathfrak{g}, \bigwedge \mathfrak{g}\right) = \mathrm{Hom}\left(\mathfrak{g}, \bigwedge^{k+1} \mathfrak{g}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Posebno, za $k < -1$ imamo $\mathrm{Der}^k\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right) = 0$.

Elemente prostora $\mathrm{Der}^{-1}\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{K}) = \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ zovemo kontrakcijama. Eksplicitno, kontrakcija elementom $\zeta \in \mathfrak{g}$, u oznaci ι_ζ, dana je sa: $\iota_\zeta 1 = 0$ i za $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\iota_\zeta(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} B(\zeta, v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge \widehat{v_i} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_k.$$

Ovdje $\widehat{v_i}$ označava da smo ispustili element v_i iz produkta, iz toga je jasno zašto se ova derivacija naziva kontrakcijom.

Transponirani operator kontrakciji elementom ζ je operator definiran lijevim vanjskim množenjem sa ζ: $\varepsilon_\zeta \in \mathrm{End}\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)$, $\varepsilon_\zeta x = \zeta \wedge x$, $x \in \bigwedge \mathfrak{g}$.

Ovi operatori zadovoljavaju određene super komutacijske relacije. Uočimo da smo jednu od njih, onu za kontrakcije, već vidjeli kod definicije $\mathfrak{g}$-diferencijalnog prostora. Za sve $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_x, \varepsilon_y] &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_x = 0, \\ [\iota_x, \iota_y] &= \iota_x \iota_y + \iota_y \iota_x = 0, \\ [\iota_x, \varepsilon_y] &= \iota_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \iota_x = B(x, y). \end{aligned}$$

Označimo sada sa $\mathrm{d}_\wedge$ preslikavanje dualno Liejevoj zagradi $[\cdot,\cdot] : \bigwedge^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Drugim riječima, $\mathrm{d}_\wedge$ je element od $\mathrm{Hom}\left(\mathfrak{g}, \bigwedge^2 \mathfrak{g}\right) \cong \mathrm{Der}^1\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)$ takav da za sve $\zeta, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\iota_{\xi_1}\iota_{\xi_2}\mathrm{d}_\wedge \zeta = B(\zeta, [\xi_1, \xi_2]).$$

Tada je $\left(\bigwedge \mathfrak{g}, \mathrm{d}_\wedge\right)$ graduirana diferencijalna algebra. Vidimo da vrijedi $\mathrm{d}_\wedge^2 = 0$ na generatorima i pritom iskoristimo da vrijedi $L_\zeta^2 = 0$ (prisjetimo se: definirali smo $L_\zeta = [\zeta, \cdot] = \mathrm{ad}_\zeta$). Kohomologija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je diferencijalna algebra $H\left(\bigwedge \mathfrak{g}, \mathrm{d}_\wedge\right)$ i obično se označava samo kao $H(\mathfrak{g})$.

Oznaka $\mathrm{d}_\wedge$ se trenutno čini kao nepotrebno kompliciranje, ali ovaj diferencijal će biti dio jednog većeg diferencijala kojeg ćemo definirati kasnije i važno je da možemo pratiti na kojem prostoru je koji diferencijal definiran.

Ovaj diferencijal smo mogli zadati eksplicitno koristeći bazu i dualnu bazu. Označimo sa $\{e_i\}$ neku bazu za $\mathfrak{g}$ i neka je $\{f_i\}$ njoj dualna baza. Tada možemo pisati

$$\mathrm{d}_\wedge = \frac{1}{2}\sum_i e_i \circ L_{f_i} = \frac{1}{2}\sum_i e_i \wedge [f_i, \cdot].$$

Iz ovog zapisa vidimo da su sve $\mathfrak{g}$-invarijante kociklusi pa imamo dobro definiran morfizam graduiranih algebri $\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}} \to H(\mathfrak{g})$. Ako je $\mathfrak{g}$ kompleksna reduktivna Liejeva algebra, onda je ovo preslikavanje izomorfizam.

Primjer 2.3.1. Neka je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra Liejeve grupe G. Možemo dualizirati identifikaciju prostora $\mathfrak{g}$ s lijevo invarijantnim vektorskim poljima; dobijemo da se $\mathfrak{g}^*$ može identificirati s lijevo invarijantnim 1-formama. To pak možemo proširiti do izomorfizma $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ i algebre lijevo invarijantnih diferencijalnih formi na G. U tom slučaju diferencijal Liejeve algebre odgovara de Rhamovom diferencijalu. Ako je dodatno G povezana grupa, onda $\left(\bigwedge \mathfrak{g}^*\right)^{\mathfrak{g}} = \left(\bigwedge \mathfrak{g}^*\right)^G$ odgovara biinvarijantnim formama na G.

Da zaključimo: vanjska algebra $\bigwedge \mathfrak{g}$ s diferencijalom $\mathrm{d}_\wedge$, uobičajenim Liejevim derivacijama i operatorima kontrakcije ima strukturu graduirane $\mathfrak{g}$-diferencijalne algebre.

Obzirom da se zajednička jezgra svih kontrakcija sastoji samo od skalara jer su kontrakcije derivacije vanjske algebre, vrijedi da su i horizontalni i bazični potprostor ove diferencijalne algebre jednaki $\mathbb{K}$.

2.3.1. $V \otimes \bigwedge \mathfrak{g}$ kao $\mathfrak{g}$-diferencijalni prostor

Neka je V bilo koji prostor reprezentacije od $\mathfrak{g}$. Želimo prostoru $V \otimes \bigwedge \mathfrak{g}$ dati strukturu $\mathfrak{g}$-diferencijalnog prostora i pri tome koristiti sve što već znamo o $\bigwedge \mathfrak{g}$ kao $\mathfrak{g}$-diferencijalnom prostoru. Ovdje će V biti najopćenitiji mogući, ali slučaj koji će nam kasnije biti posebno zanimljiv je onaj kada je V simetrična algebra od $\mathfrak{g}$. U tom slučaju ćemo dobiti strukturu $\mathfrak{g}$-diferencijalne algebre.

Neka je $L_V : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ reprezentacija od $\mathfrak{g}$ i definiramo kompleks

$$C^\bullet(\mathfrak{g}, V) = V \otimes \bigwedge^\bullet \mathfrak{g}.$$

Graduirani stupnjevi će za sada biti inducirani stupnjevima iz vanjske algebre. Kasnije kada i V bude graduirana algebra ovaj dio će se modificirati.

Na $C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ definiramo diferencijal na sljedeći način: neka je, kao ranije, $\{e_i\}$ neka baza za $\mathfrak{g}$ i $\{f_i\}$ njoj dualna baza. Ranije smo definirali diferencijal $\mathrm{d}_\wedge$ i taj diferencijal ćemo trebati u ovoj definiciji:

$$\mathrm{d}_{CE} = \sum_i L_V(e_i) \otimes f_i + \mathrm{id} \otimes \mathrm{d}_\wedge.$$

Ovaj diferencijal se obično zove *Chevalley-Eilenbergov diferencijal*. Sada $(C^\bullet(\mathfrak{g}, V), \mathrm{d}_{CE})$ ima strukturu graduiranog diferencijalnog prostora. Kohomološke grupe ovog kompleksa se označavaju sa $H^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ i vrijedi $H^0(\mathfrak{g}, V) = V^\mathfrak{g}$.

Još nam nedostaju Liejeve derivacije i kontrakcije. Za $\xi \in \mathfrak{g}$ definiramo

$$\begin{aligned} L_\xi &= L_V(\xi) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes L_\wedge(\xi), \\ \iota_\xi &= \mathrm{id} \otimes \iota_\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Uz ovako definirane L i ι kompleks $C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ dobiva strukturu $\mathfrak{g}$-diferencijalnog prostora. Bazični podkompleks je $V^\mathfrak{g}$ s diferencijalom jednakim 0.

2.4. Weilova algebra $W(\mathfrak{g})$

2.4.1. Koszulove algebre

Neka je V super vektorski prostor i označimo njegove elemente sa μ. Definiramo diferencijalni prostor $\tilde{V} = V \oplus V[-1]$ na sljedeći način: ako sa $\bar{\mu}$ označimo generatore od $V[-1]$ (kao elementi su isti μ, jedina razlika je u stupnju gradacije: parni i neparni dio su zamijenjeni u odnosu na gradaciju na V), onda je diferencijal zadan na generatorima sa $\mathrm{d}\mu = \bar{\mu}, \mathrm{d}\bar{\mu} = 0$.

Ovaj prostor je karakteriziran univerzalnim svojstvom: ako je W graduirani (filtrirani) diferencijalni prostor, onda se svaki morfizam graduiranih (filtriranih) super vektorskih prostora $V \to W$ jedinstveno proširuje do morfizma graduiranih (filtriranih) diferencijalnih prostora $\tilde{V} \to W$.

Uočimo da $\tilde{V}$ ima kohomologiju nula jer vrijedi $\ker(\mathrm{d}) = \mathrm{im}(\mathrm{d}) = V[-1]$.

Definicija 2.4.1. Diferencijalnu algebru $S(\tilde{V})$ zovemo *Koszulovom algebrom* super vektorskog prostora V.

Napomenimo univerzalno svojstvo Koszulove algebre:

Propozicija 2.4.2. Za svaku komutativnu graduiranu (filtriranu) diferencijalnu algebru $(\mathscr{A}, \mathrm{d})$ i morfizam graduiranih (filtriranih) super vektorskih prostora $V \to \mathscr{A}$ postoji jedinstveno proširenje do homomorfizma graduiranih (filtriranih) diferencijalnih algebri $S(\tilde{V}) \to \mathscr{A}$.

Dokaz. Morfizam super vektorskih prostora $V \to \mathscr{A}$ se jedinstveno proširuje do morfizma diferencijalnih prostora $\tilde{V} = V \oplus V[-1] \to \mathscr{A}$. Taj se morfizam jedinstveno proširuje do morfizma super algebri $S(\tilde{V}) \to \mathscr{A}$ zbog univerzalnog svojstva simetrične algebre. Jasno je da ovo preslikavanje isprepliće diferencijale. ■

Napomena 2.4.3. Ovako definirana Koszulova algebra se obično zove komutativnom. Postoji i nekomutativna varijanta Koszulove algebre; u njoj se umjesto simetrične (komutativne) algebre promatra tenzorska algebra, $T(\tilde{V})$. I ova algebra ima slično univezalno svojstvo, ali nama je komutativna varijanta potrebna za određene rezultate pa se nećemo baviti nekomutativnom.

Teorem 2.4.4. Neka je $\mathscr{A}$ komutativna graduirana (filtrirana) diferencijalna algebra. Tada su svaka dva homomorfizma graduiranih (filtriranih) diferencijalnih algebri $\phi_1, \phi_2 : S(\tilde{V}) \to \mathscr{A}$ homotopni.

Dokaz. Definiramo linearno preslikavanje

$$\phi : V \to \mathbb{K}[t, dt] \otimes \mathscr{A}, \quad \phi(v) = (1-t)\phi_1(v) + t\phi_2(v)$$

i proširimo ga do $\phi : S(\tilde{V}) \to \mathscr{A}$ koristeći univerzalno svojstvo Koszulove algebre. Ovo preslikavanje će biti tražena homotopija. ■

Ovaj teorem ima posljedicu koja će se pokazati jako korisnom.

Korolar 2.4.5. Koszulova algebra $S(\tilde{V})$ je aciklička: augmentacijsko preslikavanje $\varepsilon : S(\tilde{V}) \to \mathbb{K}$ i inkluzija skalara $i : \mathbb{K} \to S(\tilde{V})$ su homotopski inverzi.

Dokaz. Trebamo pokazati da je $i \circ \varepsilon : S(\tilde{V}) \to S(\tilde{V})$ homotopno identiteti $\mathrm{id} : S(\tilde{V}) \to S(\tilde{V})$. Međutim, teorem 2.4.4 nam daje da su svaka dva morfizma diferencijalnih algebri $S(\tilde{V}) \to S(\tilde{V})$ homotopna. ■

Posebno, imamo da $i : \mathbb{K} \to S(\tilde{V})$ definira izomorfizam kohomološke algebre od $S(\tilde{V})$ i $\mathbb{K}$.

Napomena 2.4.6. Pretpostavimo da super vektorski prostor V ima i stukturu $\mathfrak{g}$-modula. Tada djelovanje $\mathfrak{g}$ na $\tilde{V}$ komutira s diferencijalom. Onda će i proširenje djelovanja na $S(\tilde{V})$ komutirati s diferencijalom. Sve homotopske ekvivalencije koje smo promatrali su $\mathfrak{g}$-ekvivarijantne. Slijedi da je i $S(\tilde{V})^{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g}$-invarijatni dio Koszulove algebre, aciklički.

U slučaju $V = \mathfrak{g}$ pripadna Koszulova algebra se naziva *Weilovom algebrom* od $\mathfrak{g}$, označava se sa $W(\mathfrak{g})$ i iz [Mei] znamo da ju možemo izraziti kao tenzorski produkt simetrične i vanjske algebre:

$$W(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{g}.$$

Napomena 2.4.7. Znamo da simetrična i vanjska algebra imaju svoje gradacije pa je jasno da na $W(\mathfrak{g})$ možemo uvesti bigradaciju kao uređeni par tih gradacija.

Ono što će se pokazati korisnim je uvesti gradaciju i to na način da se simetrični stupnjevi udvostruče. Konkretno, ako je $x \in S^i(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^j \mathfrak{g} \subset W(\mathfrak{g})$, onda će x u $W(\mathfrak{g})$ biti stupnja $2i + j$.

2.4.2. Diferencijal na Weilovoj algebri

U 2.3.1 smo definirali Chevalley-Eilenbergov diferencijal d_{CE} na Weilovoj algebri i diferencijal $\mathrm{d}_{\wedge}$ na $\bigwedge \mathfrak{g}$. Označimo generatore od $\bigwedge \mathfrak{g}$ sa μ i generatore od $S(\mathfrak{g})$ sa $\bar{\mu}$. Jedni i drugi su elementi od $\mathfrak{g}$ shvaćeni kao elementi stupnja 1 u vanjskoj odnosno simetričnoj algebri.

Napomena 2.4.8. Elementi μ su i u Weilovoj algebri stupnja 1, ali $\bar{\mu}$ su stupnja 2 kao elementi Weilove algebre.

Generatore $\bar{\mu}$ je ponekad korisno zamijeniti generatorima $\widehat{\mu} := \bar{\mu} - \mathrm{d}_{\wedge}\mu$. Uzmemo li μ i $\widehat{\mu}$ za generatore Weilove algebre, dobivamo jednostavnije kontrakcije jer su $\widehat{\mu}$ horizontalni:

$$\iota_\xi \mu = B(\xi, \mu), \quad \iota_\xi \widehat{\mu} = 0.$$

Na ovim generatorima zadajemo *Koszulov diferencijal* sa

$$\mathrm{d}_K \mu = \widehat{\mu}, \quad \mathrm{d}_K \widehat{\mu} = 0.$$

Eksplicitno, neka je $\{e_i\}$ baza za $\mathfrak{g}$ i $\{f_i\}$ njoj dualna baza. Tada je d_K oblika

$$\mathrm{d}_K = \sum_i \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i}.$$

Diferencijal na Weilovoj algebri možemo zadati sa

$$\mathrm{d}_W \mu = \bar{\mu}, \quad \mathrm{d}_W \bar{\mu} = 0.$$

Uz ovaj diferencijal Weilova algebra je $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra: L_ξ su generatori tenzorskog produkta koadjungiranog djelovanja na $S(\mathfrak{g})$ i $\bigwedge \mathfrak{g}$. Kontrakcije su na generatorima dane sa $\iota_\xi \mu = B(\mu, \xi)$ i

$$\iota_\xi \bar{\mu} = \iota_\xi \mathrm{d}_W \mu = L_\xi \mu - \mathrm{d}_W \iota_\xi \mu = L_\xi \mu.$$

Ispostavlja se da je Weilov diferencijal jednak zbroju Chevalley-Eilenbergovog i Koszulovog diferencijala. Naime, lako se provjeri da jednako djeluju na generatorima i još vrijedi da d_{CE} i d_K superkomutiraju pa je $(\mathrm{d}_{CE} + \mathrm{d}_K)^2 = 0$. Dakle, možemo pisati

$$\mathrm{d}_W = \mathrm{d}_{CE} + \mathrm{d}_K,$$

što je korisno kada trebamo eksplicitno računati.

2.5. KONEKSIJA

Definicije i rezultati u ovoj sekciji preuzeti su iz 6. poglavlja u [Mei]. Nama će kasnije trebati rezultati ovog poglavlja u slučaju $\mathfrak{k}$-diferencijalnih algebri.

Definicija 2.5.1. Neka je $\mathscr{A}$ (graduirana ili filtrirana) $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra. *Koneksija* na $\mathscr{A}$ je linearno preslikavanje $\vartheta : \mathfrak{g}^* \to \mathscr{A}$ stupnja 1 za koje vrijedi

- ϑ je $\mathfrak{g}$-ekvivarijantno preslikavanje: $\vartheta(L(\xi)\mu) = L(\xi)\vartheta(\mu)$,
- $\iota(\xi)\vartheta(\mu) = \langle \mu, \xi \rangle$.

Svaka $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra koja dopušta koneksiju zove se *lokalno slobodnom*.

Sljedeća definicija će također biti korisna.

Definicija 2.5.2. *Zakrivljenost koneksije* ϑ na $\mathscr{A}$ je preslikavanje $F^\vartheta : \mathfrak{g}^* \to \mathscr{A}$ stupnja 2 definirano sa

$$F^\vartheta = d\vartheta + \frac{1}{2}[\vartheta, \vartheta].$$

Zakrivljenost koneksije je $\mathfrak{g}$-ekvivarijantna i poprima vrijednosti u $\mathscr{A}_{\mathrm{hor}}$.

Propozicija 2.5.3 (Univerzalno svojstvo Weilove algebre)**.** Za komutativnu (filtriranu, graduiranu) $\mathfrak{g}$-diferencijalnu algebru $\mathscr{A}$ s koneksijom $\vartheta_{\mathscr{A}}$ postoji jedinstveni morfizam (filtriranih, graduiranih) $\mathfrak{g}$-diferencijalnih algebri $c : W(\mathfrak{g}) \to \mathscr{A}$ takav da je $c \circ \vartheta_W = \vartheta_{\mathscr{A}}$.

Dokaz. Neka je $\mathscr{A}$ komutativna $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra s koneksijom $\vartheta_{\mathscr{A}} : \mathfrak{g}^* \to \mathscr{A}$. Zbog univerzalnog svojstva Koszulove algebre $\vartheta_{\mathscr{A}}$ se proširuje do homomorfizma diferencijalnih algebri $c : W(\mathfrak{g}) \to \mathscr{A}$ na jedinstven način. Provjerimo da c isprepliće kontrakcije. Za $\xi \in \mathfrak{g}, \mu \in \mathfrak{g}^*$ imamo

$$\begin{aligned}
\iota_\xi c(\overline{\mu}) &= \iota_\xi \mathrm{d}\vartheta_{\mathscr{A}}(\mu) \\
&= L_\xi \vartheta_{\mathscr{A}}(\mu) - \mathrm{d}\iota_\xi \vartheta_{\mathscr{A}}(\mu) \\
&= \vartheta_{\mathscr{A}}(L_\xi \mu) - \mathrm{d}\langle \mu, \xi \rangle \\
&= c(L_\xi \mu) \\
&= c(\iota_\xi \overline{\mu}).
\end{aligned}$$

Isto tako, vrijedi $\iota_\xi c(\mu) = \iota_\xi \vartheta(\mu) = \langle \mu, \xi \rangle = c(\iota_\xi \mu)$. Iz ovoga zaključujemo da c isprepliće kontrakcije. Obzirom da vrijedi $L_\xi = [\iota_\xi, \mathrm{d}]$, vrijedi i da c isprepliće Liejeve derivacije.

Slijedi da je $c : W(\mathfrak{g}) \to \mathscr{A}$ morfizam $\mathfrak{g}$-diferencijalnih algebri. ■

Napomena 2.5.4. Homomorfizam c iz prethodne propozicije naziva se *karakteristični homomorfizam* za koneksiju $\vartheta_{\mathscr{A}}$.

Uočimo da možemo promatrati i obratno: ako je $\mathscr{A}$ komutativna $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra, onda morfizam $\mathfrak{g}$-diferencijalnih algebri $c : W(\mathfrak{g}) \to \mathscr{A}$ određuje koneksiju na $\mathscr{A}$ sa $\vartheta_{\mathscr{A}} = c \circ \vartheta_W$.

Primjer 2.5.5.

1. Koneksija $\vartheta_{\wedge}$ na $\mathfrak{g}$-diferencijalnoj algebri $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ definira morfizam $\mathfrak{g}$-diferencijalnih algebri $W(\mathfrak{g}) \to \bigwedge \mathfrak{g}^*$. Ovo preslikavanje na generatorima djeluje kao $\mu \mapsto \mu, \widehat{\mu} \mapsto 0$.

2. Za bilo koju komutativnu $\mathfrak{g}$-diferencijalnu algebru $\mathscr{A}$ tenzorski produkt $W(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{A}$ ima koneksiju $\vartheta_W \otimes 1$. Ta koneksija definira morfizam $W(\mathfrak{g}) \to W(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{A}, w \mapsto w \otimes 1$ pa onda inducira preslikavanje na baziičnoj kohomologiji

$$S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} = H_{\mathrm{bas}}(W(\mathfrak{g})) \to H_{\mathrm{bas}}(W(\mathfrak{g}) \otimes \mathscr{A}).$$

Teorem 2.5.6. Neka je $\mathscr{A}$ komutativna (graduirana, filtrirana) $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra. Tada su svaka dva morfizma (graduiranih, filtriranih) $\mathfrak{g}$-diferencijalnih algebri $c_0, c_1 : W(\mathfrak{g}) \to \mathscr{A}$ $\mathfrak{g}$-homotopna.

Dokaz. Neka su $\vartheta_0, \vartheta_1 : \mathfrak{g}^* \to \mathscr{A}$ koneksije definirane restrikcijama od c_0, c_1 respektivno. Tada je

$$\vartheta = (1-t)\vartheta_0 + t\vartheta_1$$

koneksija na $\mathbb{K}[t, \mathrm{d}t] \otimes \mathscr{A}$, a njen karakteristični homomorfizam $c : W(\mathfrak{g}) \to \mathbb{K} \otimes \mathscr{A}$ tražena $\mathfrak{g}$-homotopija. ■

Napomena 2.5.7. Homotopija c iz prethodnog teorema će biti korištena u određivanju formule za transgresiju, ali će biti i važna za dokazivanje teorema o trangresiji.

Korolar 2.5.8. Neka je $\mathscr{A}$ komutativna $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra s koneksijom. Tada pripadni homomorfizam algebri

$$S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} = H_{\mathrm{bas}}(W(\mathfrak{g})) \to H_{\mathrm{bas}}(\mathscr{A})$$

ne ovisi o izabranoj koneksiji.

Zbog ovog rezultata sljedeća definicija je dobra.

Definicija 2.5.9. Neka je $\mathscr{A}$ komutativna $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra s koneksijom. Pripadni morfizam algebri

$$S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \to \mathscr{A}$$

naziva se *Chern-Weilov homomorfizam.*

3. Relativna Weilova algebra

3.1. $\mathfrak{k}$-diferencijalna algebra $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$

Neka je V $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra i $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra od $\mathfrak{g}$. Tada je očito V i $\mathfrak{h}$-diferencijalna algebra: diferencijal je isti, L i ι su isti, ali su primijenjeni samo na elemente iz $\mathfrak{h}$, a ne čitave $\mathfrak{g}$.

Definicija 3.1.1. Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ Cartanova dekompozicija. Definiramo *relativnu Weilovu algebru* simetričnog para $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ kao

$$W(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) = \left(S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}.$$

Na relativnoj Weilovoj algebri definiramo diferencijal d_W na sljedeći način:

$$\mathrm{d}_W = \mathrm{d}_{CE} + \mathrm{d}_K,$$

kao što je bio definiran na $W(\mathfrak{g})$. Na prvi pogled se čini kao da ovo nije dobro definirano preslikavanje, obzirom da Chevalley-Eilenbergov diferencijal koristi čitavu bazu za $\mathfrak{g}$ na tenzorskom faktoru $\bigwedge \mathfrak{p}$ i nije sasvim očito da će vrijediti $\mathrm{d}_W : W(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) \to W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$. Idemo zato provjeriti da je sve dobro definirano. Prema napomeni s početka poglavlja $W(\mathfrak{g})$ ima strukturu $\mathfrak{k}$-diferencijalne algebre.

Propozicija 3.1.2. Relativna Weilova algebra je $\mathfrak{k}$-bazični potprostor apsolutne Weilove algebre, odnosno $W(\mathfrak{g})_{\mathfrak{k}-\mathrm{bas}} = W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$.

Dokaz. Po definiciji, $\mathfrak{k}$-bazični potprostor se sastoji od svih elemenata koji su $\mathfrak{k}$-invarijantni i poništeni su svim kontrakcijama elementima iz $\mathfrak{k}$. Ono što odmah vidimo je

$$W(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}} = \left(S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{k}}.$$

Pronađimo među njima elemente koje poništavaju svi $\iota_\xi, \xi \in \mathfrak{k}$. Prema definiciji kontrakcije na Weilovoj algebri, čitav $S(\mathfrak{g}) \otimes 1$ će biti poništen kontrakcijama. U $\bigwedge \mathfrak{g}$ promotrimo sljedeći rastav:

$$\bigwedge \mathfrak{g} = \bigwedge \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k} \bigwedge \mathfrak{g}.$$

Očito je da će svi ι_ξ poništiti $\bigwedge \mathfrak{p}$; što se tiče drugog sumanda, pogledajmo element $k_1 \wedge g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_j$, gdje je $k_1 \in \mathfrak{k}, g_i \in \mathfrak{g}$ i nije nula, odnosno $k_1, g_1, \ldots, g_j$ je linearno nezavisan skup u $\mathfrak{g}$. Tada ι_{k_1} neće poništiti ovakav element pa on sigurno nije u $\mathfrak{k}$-horizontalnom potprostoru. Slijedi

$$W(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}_{\mathfrak{k}-\mathrm{hor}} = \left(S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}},$$

što je i trebalo pokazati. ■

Korolar 3.1.3. Diferencijal $\mathrm{d}_W = \mathrm{d}_{CE} + \mathrm{d}_K$ je dobro definiran na relativnoj Weilovoj algebri, odnosno $\mathrm{d}_W(W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})) \subseteq W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$.

Dokaz. Iz propozicije 3.1.2 imamo da je $\mathfrak{k}$-bazični potprostor od $W(\mathfrak{g})$ jednak $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$. Lema 2.2.4 osigurava da je $(W(\mathfrak{g},\mathfrak{k}), \mathrm{d}_W)$ $\mathfrak{k}$-diferencijalni prostor. ■

3.2. Projekcija $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$

U Cartanovoj dekompoziciji $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ suma je ortogonalna pa je jasno što je ortogonalna projekcija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na podalgebru $\mathfrak{k}$. Najkraće rečeno, projekcija $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ koju želimo definirati će biti inducirana ortogonalnom projekcijom od $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{k}$. Prva stvar koja bi mogla biti nejasna kod ove konstrukcije je činjenica da nije sasvim očito kako se $S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ ulaže u $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ i je li to uopće moguće napraviti na koristan način.

Prisjetimo se jedne poznate činjenice o induciranom preslikavanju na kohomologiji: ako su (A, d_A) i (B, d_B) diferencijalne algebre i $f : A \to B$ homomorfizam algebri koji isprepliće diferencijale ($f \circ \mathrm{d}_A = \mathrm{d}_B \circ f$), onda je dobro definiran homomorfizam između kohomologija $f^{\#} : H(A, \mathrm{d}_A) \to H(B, \mathrm{d}_B)$.

Preslikavanje $f^{\#}$ je definirano sa $f^{\#}(a + \mathrm{im}\,\mathrm{d}_A) = f(a) + \mathrm{im}\,\mathrm{d}_B$, $a \in A$. Provjerimo da je preslikavanje dobro definirano: neka su $a_1, a_2 \in A$ takvi da je $a_1 + \mathrm{im}\,\mathrm{d}_A = a_2 + \mathrm{im}\,\mathrm{d}_A$, odnosno $a_1 - a_2 \in \mathrm{im}\,\mathrm{d}_A$. Tada postoji $x \in A$ za koji je $\mathrm{d}_A(x) = a_1 - a_2$. Imamo

$$\begin{aligned} f^{\#}(a_1 - a_2 + \mathrm{im}\,\mathrm{d}_A) &= f(a_1 - a_2) + \mathrm{im}\,\mathrm{d}_B \\ &= f(\mathrm{d}_A(x)) + \mathrm{im}\,\mathrm{d}_B \\ &= \mathrm{d}_B(f(x)) + \mathrm{im}\,\mathrm{d}_B \\ &= \mathrm{im}\,\mathrm{d}_B. \end{aligned}$$

Znamo da je

$$W(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}-\mathrm{bas}} = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes 1, \quad W(\mathfrak{g})_{\mathfrak{k}-\mathrm{bas}} = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \textstyle\bigwedge \mathfrak{p}\big)^{\mathfrak{k}}.$$

Sve $\mathfrak{g}$-invarijante su posebno $\mathfrak{k}$-invarijante pa se $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ na očiti način ulaže u $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, odnosno imamo homomorfizam algebri $j : W(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}-\mathrm{bas}} \to W(\mathfrak{g})_{\mathfrak{k}-\mathrm{bas}}$. Koristimo isti diferencijal na obje algebre, d_W, ali uočimo da je na $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ taj diferencijal trivijalan pa je i $j \circ \mathrm{d}_W = 0$ na tom prostoru. Isto tako, očito je i $\mathrm{d}_W \circ j = \mathrm{d}_W = 0$ na $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ pa slijedi da j isprepliće diferencijale.

Iz gornje diskusije vidimo da je onda dobro definiran homomorfizam algebri

$$j^{\#} : H(W(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}-\mathrm{bas}}) \to H(W(\mathfrak{g})_{\mathfrak{k}-\mathrm{bas}}),$$

odnosno

$$j^{\#} : H_{\mathfrak{g}-\mathrm{bas}}(W(\mathfrak{g})) \to H_{\mathfrak{k}-\mathrm{bas}}(W(\mathfrak{g})).$$

Označimo sa $\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}$ ortogonalnu projekciju od $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{k}$ obzirom na Cartanovu dekompoziciju. Ta projekcija inducira projekciju na Weilovim algebrama, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}} : W(\mathfrak{g}) \to W(\mathfrak{k})$; ona je zadana na generatorima sa: ako je $\xi \in \mathfrak{k}$, onda je $\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\xi) = \xi, \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\bar{\xi}) = \bar{\xi}$, a za $\xi \in \mathfrak{p}$ je $\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\xi) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\bar{\xi}) = 0$. Ranije smo u 1.6 definirali preslikavanje λ; od sada ćemo ga označavati sa $\lambda_{\mathfrak{g}}$. Sjetimo se, ako sa $\{e_i\}$ označimo bazu za $\mathfrak{g}$ i sa $\{f_i\}$ njoj dualnu bazu, onda za $x \in \mathfrak{g}$ definiramo

$$\lambda_{\mathfrak{g}}(x) = \frac{1}{4}\sum_i [x, e_i] \wedge f_i \in \bigwedge \mathfrak{g}.$$

Koristeći univerzalno svojstvo simetrične algebre proširimo $\lambda_{\mathfrak{g}}$ na $S(\mathfrak{g})$.

Slično definiramo $\lambda_{\mathfrak{k}}$: neka je sada $\{e_i\}$ neka baza za $\mathfrak{k}$ i $\{f_i\}$ njoj dualna baza. Za $x \in \mathfrak{g}$ stavimo

$$\lambda_{\mathfrak{k}}(x) = \frac{1}{4}\sum_i [x, e_i] \wedge f_i \in \bigwedge \mathfrak{g}$$

i proširimo do $S(\mathfrak{g})$.

Tvrdimo da za sve $\xi \in \mathfrak{g}$ vrijedi

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\lambda_{\mathfrak{g}}(\bar{\xi})) = \lambda_{\mathfrak{k}}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\bar{\xi})).$$

U narednim sumama naznačeno je po kojoj bazi sumiramo, onoj za $\mathfrak{g}$ ili onoj za $\mathfrak{k}$. Kao inače, $\{e_i\}$ označava neku bazu, a $\{f_i\}$ njoj dualnu bazu. Pretpostavimo i da postoji podskup baze za $\mathfrak{g}$ koji je baza za $\mathfrak{k}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\lambda_{\mathfrak{g}}(\bar{\xi})) &= \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\sum_i^{(\mathfrak{g})} [\xi, e_i] \wedge f_i) \\
&= \sum_i^{(\mathfrak{g})} \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}[\xi, e_i] \wedge \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(f_i) \\
&= \sum_i^{(\mathfrak{k})} \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}[\xi, e_i] \wedge f_i.
\end{aligned}$$

Posljednja jednakost slijedi iz činjenice da je za $f_i \in \mathfrak{k}$ projekcija identiteta, a za $f_i \in \mathfrak{p}$ je 0. S druge strane, očito je

$$\lambda_{\mathfrak{k}}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\bar{\xi})) = \begin{cases} 0, & \xi \in \mathfrak{p}, \\ \lambda_{\mathfrak{k}}(\bar{\xi}), & \xi \in \mathfrak{k}. \end{cases}$$

Očito izrazi s obje strane jednakosti ovise samo o bazi za $\mathfrak{k}$ pa neka $\{e_i\}$ nadalje označava bazu za $\mathfrak{k}$. Za $\xi \in \mathfrak{p}$ je $[\xi, e_i] \in \mathfrak{p}$ pa projekcija poništava komutator. Za $\xi \in \mathfrak{k}$ je $[\xi, e_i] \in \mathfrak{k}$ pa je

$$\lambda_{\mathfrak{k}}(\bar{\xi}) = \sum_i^{(\mathfrak{k})} [\xi, e_i] \wedge f_i = \sum_i^{(\mathfrak{k})} \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}[\xi, e_i] \wedge f_i,$$

što je i trebalo pokazati.

Iz ovoga slijedi da i na generatore $\hat{\bar{\xi}} := \bar{\xi} - \lambda_{\mathfrak{g}}(\bar{\xi})$ projekcija djeluje na isti način, odnosno

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\hat{\bar{\xi}}) = \widehat{\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\xi)}.$$

Dobivamo inducirano preslikavanje na kohomologiji

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}} : H_{\mathfrak{k}-\mathrm{bas}}(W(\mathfrak{g})) \to H_{\mathfrak{k}-\mathrm{bas}}(W(\mathfrak{k})) = S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}.$$

Konačno, ako definiramo $\mathrm{pr}_S : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ sa

$$\mathrm{pr}_S = \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}} \circ j^{\#},$$

vidimo da je dobiveno preslikavanje inducirano ortogonalnom projekcijom od $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{k}$.

3.3. Diferencijal na relativnoj Weilovoj algebri

Vidjeli smo kako izgleda diferencijal d_W na Weilovoj algebri $W(\mathfrak{g})$, $\mathrm{d}_W = \mathrm{d}_{CE} + \mathrm{d}_K$. Isto tako, iz korolara 3.1.3 znamo da će d_W biti dobro definiran diferencijal na $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$, odnosno možemo koristiti istu formulu i u relativnoj Weilovoj algebri. Ipak, razumno je očekivati da će restrikcija tog diferencijala imati nešto jednostavniji oblik od onoga na čitavoj $W(\mathfrak{g})$. Ako je $\{e_i\}$ baza za $\mathfrak{g}$ i $\{f_i\}$ njoj dualna baza, onda je diferencijal na $W(\mathfrak{g})$ dan sa

$$\mathrm{d}_W = \sum_i L_{e_i} \otimes f_i + \frac{1}{2}\sum_i 1 \otimes f_i \circ L_{e_i} + \sum_i \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i}.$$

Činjenica da d_W čuva $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ nije vidljiva iz ove formule; to znamo isključivo iz apstraktnih rezultata. Za većinu sumanada u formuli nije jasno zašto bi morali biti unutar $S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{p}$, ovdje je naravno problematična algebra $\bigwedge \mathfrak{p}$ koja nije zatvorena na djelovanje od $\mathfrak{g}$.

Pogledajmo rezultat koji zatvorenost čini očitom.

Lema 3.3.1. Neka je $\{e_i\}$ neka baza za $\mathfrak{p}$ i $\{f_i\}$ njoj dualna baza obzirom na bilinearnu formu B. Tada je diferencijal na $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ jednak

$$\mathrm{d}_W = \sum_i L_{e_i} \otimes f_i + \sum_i \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i}.$$

Dokaz. Pogledajmo kako je d_W zadan na $W(\mathfrak{g})$ i kako možemo iskoristiti činjenicu da djelujemo na elemente koji su $\mathfrak{k}$-invarijantni i $\mathfrak{k}$-horizontalni. Za bazu i dualnu bazu koristimo iste oznake e_i, f_i, ali to sada može označavati baze za $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$. Zato treba posebno označiti koje baze promatramo pa će, na primjer, $\sum\limits_i^{(\mathfrak{g})}$ označavati da u toj sumi koristimo baze za $\mathfrak{g}$. Radi jednostavnosti neka je baza od $\mathfrak{g}$ dana kao unija baze za $\mathfrak{k}$ i baze za $\mathfrak{p}$; ovo možemo pretpostaviti jer je suma $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ direktna. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_W &= \sum_i^{(\mathfrak{g})} L_{e_i} \otimes f_i + \frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{g})} 1 \otimes f_i \circ L_{e_i} + \sum_i^{(\mathfrak{g})} \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i} \\
&= \sum_i^{(\mathfrak{g})} \Big((1 \otimes f_i)(L_{e_i} \otimes 1) + \frac{1}{2}(1 \otimes f_i)(1 \otimes L_{e_i}) + \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i} \Big)
\end{aligned}$$

koristimo $L^W_{e_i} = L_{e_i} \otimes 1 + 1 \otimes L_{e_i}$

$$= \sum_i^{(\mathfrak{g})} \Big((1 \otimes f_i) \circ L^W_{e_i} - \frac{1}{2}(1 \otimes f_i)(1 \otimes L_{e_i}) + \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i} \Big)$$

argumenti su $\mathfrak{k}$-invarijatni pa je $L^W_{e_i} = 0$ na $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ za $e_i \in \mathfrak{k}$

$$= \sum_i^{(\mathfrak{p})} (1 \otimes f_i) \circ L^W_{e_i} + \sum_j^{(\mathfrak{g})} \Big(-\frac{1}{2}(1 \otimes f_j \circ L_{e_j}) + \widehat{e_j} \otimes \iota_{f_j} \Big)$$

argumenti su $\mathfrak{k}$-horizontalni pa je $\iota_{f_j} = 0$ na $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ za $f_j \in \mathfrak{k}$

$$\begin{aligned} &= \sum_i^{(\mathfrak{p})} \Big((1 \otimes f_i) \circ L^W_{e_i} + \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i} \Big) - \frac{1}{2} \sum_j^{(\mathfrak{g})} 1 \otimes f_j \circ L_{e_j} \\ &= \sum_i^{(\mathfrak{p})} \Big(L_{e_i} \otimes f_i + 1 \otimes f_i \circ L_{e_i} + \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i} \Big) - \frac{1}{2} \sum_j^{(\mathfrak{g})} 1 \otimes f_j \circ L_{e_j} \end{aligned}$$

koristimo $\sum\limits_i^{(\mathfrak{g})} = \sum\limits_j^{(\mathfrak{p})} + \sum\limits_k^{(\mathfrak{k})}$ i grupiramo $(\mathfrak{p})$-sume i $(\mathfrak{k})$-sume

$$= \sum_i^{(\mathfrak{p})} \Big(L_{e_i} \otimes f_i + \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i} + \frac{1}{2}(1 \otimes f_i \circ L_{e_i}) \Big) - \frac{1}{2} \sum_j^{(\mathfrak{k})} 1 \otimes f_j \circ L_{e_j}.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$\sum_i^{(\mathfrak{p})} f_i \circ L_{e_i} = \sum_j^{(\mathfrak{k})} f_j \circ L_{e_j};$$

iz toga će slijediti tvrdnja leme.

Provjerimo prvo da je operator $\sum\limits_i^{(\mathfrak{p})} f_i \circ L_{e_i} - \sum\limits_j^{(\mathfrak{k})} f_j \circ L_{e_j}$ $\mathfrak{k}$-horizontalan, odnosno da za svaki $x \in \mathfrak{k}$ vrijedi

$$\iota_x \sum_i^{(\mathfrak{p})} f_i \circ L_{e_i} = \iota_x \sum_j^{(\mathfrak{k})} f_j \circ L_{e_j}.$$

Obzirom da je ι_x derivacija i poništava elemente iz $\bigwedge \mathfrak{p}$, ovu jednakost možemo pisati kao

$$-\sum_i^{(\mathfrak{p})} f_i \wedge \iota_x \circ L_{e_i} = \sum_j^{(\mathfrak{k})} \iota_x(f_j \wedge L_{e_j}).$$

Prikažimo x preko baze za $\mathfrak{k}$, $x = \sum_m^{(\mathfrak{k})} \alpha_m f_m$. Tada je desna strana jednakosti

$$\begin{aligned}
\sum_j^{(\mathfrak{k})} \iota_x(f_j \wedge L_{e_j}) &= \sum_m^{(\mathfrak{k})} \alpha_m \sum_j^{(\mathfrak{k})} \iota_{f_m}(f_j) \wedge L_{e_j} \\
&= \sum_m^{(\mathfrak{k})} \alpha_m L_{f_m} \\
&= L_x.
\end{aligned}$$

Ovdje smo koristili činjenicu da koeficijente u prikazu preko baze možemo dobiti pomoću kontrakcija: $x = \sum_j^{(\mathfrak{k})} B(x, e_j) f_j = \sum_j^{(\mathfrak{k})} \iota_x(e_j) f_j$.

Želimo dobiti isti rezultat s lijeve strane; za to će nam biti potrebne dodatne tvrdnje. U poglavlju 6.9. u [Mei] vidimo da se L_{e_m} može prikazati u obliku

$$L_{e_m} = -\sum_{n,a}^{(\mathfrak{g})} c^a_{m,n} e_a \wedge \iota_{f_n}$$

za strukturne konstante $c^a_{m,n}$. Ovaj prikaz odgovara slučaju $W(\mathfrak{g})$, ali u relativnom slučaju, $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, ova suma je samo $(\mathfrak{p})$-suma: elementi baze e_a očito moraju biti u $\mathfrak{p}$, inače rezultat neće biti unutar $\bigwedge \mathfrak{p}$. Isto tako, f_n će biti elementi od $\mathfrak{p}$ jer će jedino tada komutator elementa $e_m \in \mathfrak{k}$ i f_n biti unutar $\mathfrak{p}$.

Koristimo i jednakost $[L_y, \iota_z] = \iota_{[y,z]}, \forall y, z \in \mathfrak{g}$. Nama, doduše, neće trebati ova činjenica za čitav $\mathfrak{g}$, nego za $y \in \mathfrak{p}, z \in \mathfrak{k}$, ali to svojstvo slijedi iz činjenice da je $W(\mathfrak{g})$ $\mathfrak{g}$-diferencijalna algebra, a onda svojstvo vrijedi i na podalgebri $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Raspisujemo

$$-\sum_i^{(\mathfrak{p})} f_i \wedge \iota_x \circ L_{e_i} = -\sum_i^{(\mathfrak{p})} \left(f_i \wedge L_{e_i} \circ \iota_x - f_i \wedge \iota_{[e_i, x]} \right)$$

prva suma iščezava jer je $\iota_x = 0$ na $\bigwedge \mathfrak{p}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i^{(\mathfrak{p})} f_i \wedge \iota_{[e_i,x]} \\
&= \sum_m^{(\mathfrak{k})} \alpha_m \sum_i^{(\mathfrak{p})} f_i \wedge \iota_{[e_i,e_m]} \\
&= \sum_m^{(\mathfrak{k})} \alpha_m \sum_{i,a}^{(\mathfrak{p})} c^a_{i,m} f_i \wedge \iota_{f_a} \\
&= -\sum_m^{(\mathfrak{k})} \alpha_m \sum_{i,a}^{(\mathfrak{p})} c^a_{m,i} e_i \wedge \iota_{f_a} \\
&= -\sum_m^{(\mathfrak{k})} \alpha_m (-L_{e_m}) \\
&= L_x.
\end{aligned}$$

Dakle, operator $\sum_i^{(\mathfrak{p})} f_i \wedge L_{e_i} - \sum_j^{(\mathfrak{k})} f_j \wedge L_{e_j}$ je $\mathfrak{k}$-horizontalan, što znači da je slika tog operatora sadržana u $\bigwedge \mathfrak{p}$. S druge strane, iz definicije operatora vidimo da je slika sadržana u $\mathfrak{k} \bigwedge \mathfrak{p}$ pa je konačno slika unutar $\bigwedge \mathfrak{p} \cap \mathfrak{k} \bigwedge \mathfrak{p} = \{0\}$. ■

4. TRANSGRESIJA U RELATIVNOJ WEILOVOJ ALGEBRI

Rezultati u ovom poglavlju, ako nije navedeno drugačije, smatraju se originalnim rezultatima.

4.1. DEFINICIJA TRANSGRESIJE

Koliko god prostor vanjskih invarijanata bio malen, u smislu konačnodimenzionalan, s njim je ponekad nezgodno računati. Zato nam je cilj naizgled zakomplicirati cijelu priču s invarijantama i promatrati one u simetričnoj algebri koja je beskonačnodimenzionalna; zauzvrat ćemo imati komutativnost.

Prisjetimo se projekcije $\mathrm{pr}_S : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ inducirane ortogonalnom projekcijom od $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{k}$. Definiramo skup

$$T = \ker \mathrm{pr}_S = \{x \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \subset W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) : \mathrm{pr}_S(x) = 0\},$$

odnosno imamo kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow T \hookrightarrow S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_S} S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}} \longrightarrow 0.$$

Očito je T sadržan u jezgri od d_W. Manje očiti dio je da je sadržan i u slici diferencijala.

Iz propozicije 7.8. u [Mei] znamo da je kohomologija $H(W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}))$ izomorfna $S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$. Izomorfizam je induciran kolančanim preslikavanjem $j : S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}} \to W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ koje je korišteno ranije u 3.2. Drugim riječima, jezgra diferencijala se može prikazati kao direktna suma

$$\ker \mathrm{d}_W = \mathrm{im}\, \mathrm{d}_W \oplus \mathrm{im}\, j.$$

Uzmimo sada neki $x \in T$. Primijetimo da na $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ vrijedi $\mathrm{pr}_S = \eta$, gdje je η homotopski inverz od j. Posebno, jednakost vrijedi na T. Dakle, vrijedi $\eta(x) = 0$.

Iz gornje dekompozicije jezgre od d_W vidimo da postoje $C \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ i $x' \in S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ takvi da je

$$x = \mathrm{d}_W(C) + j(x').$$

Primijenimo η na gornju jednakost pa imamo

$$0 = \eta(\mathrm{d}_W(C)) + \eta \circ j(x') = \eta(\mathrm{d}_W(C)) + x'.$$

Obzirom da je η morfizam $\mathfrak{k}$-diferencijalnih algebri, imamo $\eta \circ \mathrm{d}_W = \mathrm{d}_W \circ \eta$, ali druga kompozicija je trivijalna jer je slika od η unutar $S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ kojega diferencijal poništava. Slijedi da je $x' = 0$ i povratkom na početni rastav od x dobivamo $x = \mathrm{d}_W(C)$, odnosno x je u slici diferencijala.

Napomena 4.1.1. Element $C \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ za koji vrijedi $x = \mathrm{d}_W(C)$ se zove kolanac transgresije za x.

Relativnu Weilovu algebru možemo rastaviti na sljedeći način:

$$W(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) = 1 \otimes \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}} \oplus \left(S^+(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}.$$

Drugi sumand je očito ideal u $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ pa je projekcija $\pi : W(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) \to \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ obzirom na ovu dekompoziciju homomorfizam algebri.

Napomena 4.1.2. U apsolutnom slučaju, gdje se koristi projekcija $\pi : (W(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}} \to \left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$ argument da se radi o homomorfizmu je nešto elegantniji nego ovdje. Naime, koneksija na $\bigwedge \mathfrak{g} \cong \bigwedge \mathfrak{g}^*$ je automatski morfizam graduiranih $\mathfrak{g}$-diferencijalnih algebri. U relativnom slučaju, dakle na $\bigwedge \mathfrak{p}$ kao $\mathfrak{k}$-diferencijalnoj algebri, ne postoji netrivijalna koneksija.

Konačno smo spremni definirati transgresiju. Obzirom da njena dobra definiranost nije očita, definicija će biti dio iskaza sljedeće propozicije. Sjetimo se, ako je $\mathscr{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{A}_n$ graduirana algebra, onda ideal $\bigoplus_{n \geq 1} \mathscr{A}_i$ zovemo *augmentacijskim idealom* i označavamo sa $\mathscr{A}^+$. Ekvivalentno, augmentacijski ideal je jezgra augmentacijskog preslikavanja.

Propozicija 4.1.3. Neka je $\mathbf{t} : T \to \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ preslikavanje definirano na sljedeći način: ako je $C_x \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ kolanac transgresije za $x \in T$ (odnosno $\mathrm{d}_W(C_x) = x$), definiramo $\mathbf{t}(x) = \pi(C_x)$.

Preslikavanje $\mathbf{t}$ je dobro definirano i iščezava na $T \cdot S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Dokaz. Ranije je pokazano da je T sadržan u slici od d_W. Zato za svaki $x \in T$ postoji neki kolanac transgresije.

Pretpostavimo sada da je $x = \mathrm{d}_W(C_1) = \mathrm{d}_W(C_2)$ za neke $C_1, C_2 \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Tada je $C_1 - C_2 \in \operatorname{im} \mathrm{d}_W$ jer je $C_1 - C_2 + \operatorname{im} \mathrm{d}_W = 0 + \operatorname{im} \mathrm{d}_W$.

Preostaje vidjeti da π poništava $\operatorname{im} \mathrm{d}_W$, ali to je očito zbog $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}} \cap \operatorname{im} \mathrm{d}_W = \{0\}$. Slijedi da je transgresija dobro definirana.

Za drugu tvrdnju propozicije uzmimo $x \in T,\ y \in S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, želimo pokazati $\mathbf{t}(xy) = 0$. Neka je $C_x \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ kolanac transgresije za x; tada je $C_x y$ kolanac transgresije za xy jer je $\mathrm{d}_W(y) = 0$. Koristeći da je π homomorfizam algebri računamo:

$$\mathbf{t}(xy) = \pi(C_x y) = \pi(C_x)\pi(y) = \pi(C) \cdot 0 = 0.$$

■

Napomena 4.1.4. Uspoređujući s apsolutnim slučajem, može se primijetiti da smo za domenu transgresije uzimali augmentacijski ideal od $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, odnosno morali smo izbaciti konstante jer nisu u slici diferencijala. Kod transgresije u relativnoj Weilovoj algebri T je jednak svom augmentacijskom idealu, to jest konstante nisu poništene projekcijom pr_S pa se ne nalaze u T.

4.2. Formula za transgresiju

Da bismo detaljnije proučili svojstva transgresije trebamo eksplicitnu formulu. To ćemo dobiti uvođenjem homotopskog operatora $h : T \to W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ za koji će vrijediti

$$\mathbf{t} = \pi \circ h.$$

Potraga neće biti elegantna kao u slučaju $W(\mathfrak{g})$, ali konačni rezultat će biti sličan.

Iz univerzalnog svojstva Weilove algebre znamo da postoji jedinstveno preslikavanje $c : W(\mathfrak{k}) \to W(\mathfrak{g})$ takvo da je $c \circ \vartheta_{\mathfrak{k}} = \vartheta_{\mathfrak{g}}$. To je bila propozicija 2.5.3. Ovdje $\vartheta_{\mathfrak{k}}$ označava koneksiju na $W(\mathfrak{k})$, $\vartheta_{\mathfrak{g}}$ je koneksija na $W(\mathfrak{g})$, a c se naziva karakterističnim homomorfizmom za koneksiju $\vartheta_{\mathfrak{g}}$.

Pogledajmo kako c izgleda na $W(\mathfrak{k})$; posebno nas zanima slika generatora $\widehat{\mu}$ spomenutih ranije. Ovdje treba biti oprezan jer $\widehat{\mu}$ nema isto značenje u $W(\mathfrak{k})$ i $W(\mathfrak{g})$. Konkretno, na $W(\mathfrak{k})$ generatori su oblika $\widehat{\mu} = \bar{\mu} - \lambda_{\mathfrak{k}}(\bar{\mu})$, a na $W(\mathfrak{g})$ su oblika $\widehat{\mu} = \bar{\mu} - \lambda_{\mathfrak{g}}(\bar{\mu})$. Za $\mu \in \mathfrak{k}$ imamo $c(\mu) = \vartheta_{\mathfrak{g}}(\mu) = 1 \otimes \mu$. Za $\overline{\mu} \in S^1(\mathfrak{k})$ imamo

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{k}}\mu = \overline{\mu} \mapsto \vartheta_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu}) = \vartheta_{\mathfrak{g}}(\mathrm{d}_{\mathfrak{k}}\mu) = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}(\vartheta_{\mathfrak{k}}(\mu)).$$

Konačno

$$\overline{\mu} - \lambda_{\mathfrak{k}}(\mu) = \widehat{\mu} \mapsto \overline{\mu} - \lambda_{\mathfrak{k}}(\overline{\mu}) = \overline{\mu} - \lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu}) + \lambda_{\mathfrak{p}}(\overline{\mu}) = \widehat{\mu} + \lambda_{\mathfrak{p}}(\overline{\mu}) = \widehat{\mu} + \lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\mu}).$$

Neka je $\eta : W(\mathfrak{g}) \to W(\mathfrak{k})$ projekcija inducirana ortogonalnom projekcijom $\mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ obzirom na Cartanovu dekompoziciju.

Tvrdimo da su η i c homotopski inverzi. Očito je $\eta \circ c = \mathrm{id}_{W(\mathfrak{k})}$. Što se tiče $c \circ \eta$, primijetimo da je to morfizam diferencijalnih algebri pa prema teoremu 6.1. u [Mei] mora biti homotopno identiteti na $W(\mathfrak{g})$. Preslikavanje h koje tražimo će točno biti restrikcija pripadnog homotopskog operatora.

U dokazu tog teorema vidimo homotopiju između id i $c \circ \eta$; to je

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}[t,dt] \otimes W(\mathfrak{g}), \quad \varphi(x) = (1-t)x + t \cdot c \circ \eta(x).$$

Koristeći univerzalno svojstvo Koszulove algebre φ možemo proširiti do $W(\mathfrak{g})$; uočimo da je φ $\mathfrak{k}$-ekvivarijantno preslikavanje: $L_x \circ \varphi = \varphi \circ L_x$, $x \in \mathfrak{k}$.

Definiramo $J : \mathbb{C}[t,dt] \to \mathbb{C}$, "integriranje na segmentu $[0,1]$", na sljedeći način: elementi od $\mathbb{C}[t,dt]$ su oblika $\sum_i a_i \cdot t^i + \sum_j b_j \cdot t^j dt,\ a_i, b_j \in \mathbb{C}$ pa je na njima J zadan sa

$$J(\sum_i a_i \cdot t^i + \sum_j b_j \cdot t^j dt) = \sum_j \frac{b_j}{j+1}.$$

Sada je traženi homotopski operator $W(\mathfrak{g}) \to W(\mathfrak{g})$ zadan sa

$$h = (J \otimes 1) \circ \varphi.$$

Sjetimo se, želimo eksplicitnu formulu za transgresiju, što znači da trebamo za sva navedena preslikavanja odrediti kako djeluju na generatorima, odnosno bazi.

Označimo sa $\mathrm{d}_\otimes$ diferencijal na $\mathbb{C}[t,dt] \otimes W(\mathfrak{g})$ određen sa $\mathrm{d}_\otimes(t) = dt, \mathrm{d}_\otimes(dt) = 0, \mathrm{d}_\otimes(\mu) = \overline{\mu},\ \mu \in \mathfrak{g}$. Taj diferencijal ćemo trebati za odrediti $\varphi(\overline{\mu})$ i kasnije $\varphi(\widehat{\mu})$. Za $\mu \in \mathfrak{g}$ imamo

$$\varphi(\mu) = (1-t)\mu + t \cdot c \circ \eta(\mu) = (1-t)\mu + t \cdot c \circ \mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\mu) = (1-t)\mu + t \cdot \mu_{\mathfrak{k}} = \mu - t \cdot \mathrm{pr}_{\mathfrak{p}}(\mu).$$

Ovdje smo koristili da je $c \circ \eta = \mathrm{id}$ na $\mathfrak{k}$ i $c \circ \eta = 0$ na $\mathfrak{p}$. Pogledajmo sada kako φ djeluje na $\overline{\mu}$:

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{\mu}) &= \varphi(\mathrm{d}\mu) = \mathrm{d}_\otimes \varphi(\mu) \\ &= \mathrm{d}_\otimes(\mu - t \cdot \mathrm{pr}_{\mathfrak{p}}(\mu)) \\ &= \overline{\mu} - dt \cdot \mathrm{pr}_{\mathfrak{p}}(\mu) - t \cdot \overline{\mathrm{pr}_{\mathfrak{p}}(\mu)}.\end{aligned}$$

Za $\varphi(\widehat{\mu})$ rezultat će ovisiti o tome nalazi li se μ u $\mathfrak{k}$ ili $\mathfrak{p}$. Neka je $\mu \in \mathfrak{g}$; imamo

$$\begin{aligned}\varphi(\widehat{\mu}) &= \varphi(\overline{\mu} - \lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})) \\ &= \varphi(\overline{\mu}) - \varphi(\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})) \\ &= \overline{\mu} - dt \cdot \mathrm{pr}_{\mathfrak{p}}(\mu) - t \cdot \overline{\mathrm{pr}_{\mathfrak{p}}(\mu)} - \varphi(\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})).\end{aligned}$$

Neka je $\{e_i\}$ baza za $\mathfrak{g}$ i $\{f_i\}$ njoj dualna baza; dodatno za svaki i neka vrijedi $e_i \in \mathfrak{k}$ ili $e_i \in \mathfrak{p}$. Ovu pretpostavku trebamo da možemo razdvojiti sumu u sljedećem računu. Kao ranije, iznad sume je naznačeno čije elemente baze promatramo u sumi. Imamo

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})) =& \varphi\Big(\frac{1}{4}\sum_i^{(\mathfrak{g})}[e_i,\mu]\wedge f_i\Big)\\
=&\frac{1}{4}\sum_i^{(\mathfrak{g})}\varphi([e_i,\mu])\wedge\varphi(f_i)\\
=&\frac{1}{4}\sum_i^{(\mathfrak{g})}((1-t)[e_i,\mu]+t\,\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}([e_i,\mu]))\wedge((1-t)f_i+t\,\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(f_i))\\
=&(1-t)^2\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})+\frac{1}{4}\sum_i^{(\mathfrak{k})}t(1-t)[e_i,\mu]\wedge f_i+\frac{1}{4}\sum_i^{(\mathfrak{g})}\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}[e_i,\mu]\wedge f_i+t^2\lambda_{\mathfrak{k}}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\overline{\mu}))\\
=&(1-t)^2\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})+t(1-t)\lambda_{\mathfrak{k}}(\overline{\mu})+\frac{1}{4}\sum_i^{(\mathfrak{k})}t(1-t)[e_i,\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\mu)]\wedge f_i+\\
&+\frac{1}{4}\sum_i^{(\mathfrak{p})}t(1-t)[e_i,\mathrm{pr}_{\mathfrak{p}}(\mu)]\wedge f_i+t^2\lambda_{\mathfrak{k}}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\overline{\mu}))\\
=&(1-t)^2\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})+t(1-t)\lambda_{\mathfrak{k}}(\overline{\mu})+t(1-t)\lambda_{\mathfrak{k}}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\overline{\mu}))+t(1-t)\lambda_{\mathfrak{p}}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{p}}(\overline{\mu}))+t^2\lambda_{\mathfrak{k}}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{k}}(\overline{\mu}))\\
=&\begin{cases}(1-t)^2\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})+2t(1-t)\lambda_{\mathfrak{k}}(\overline{\mu})+t^2\lambda_{\mathfrak{k}}(\overline{\mu}), & \mu\in\mathfrak{k}\\ (1-t)^2\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})+t(t-1)\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu}), & \mu\in\mathfrak{p}\end{cases}\\
=&\begin{cases}(1-t)^2\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})+t(2-t)(\lambda_{\mathfrak{g}}-\lambda_{\mathfrak{p}})(\overline{\mu}), & \mu\in\mathfrak{k}\\ (1-t)\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu}), & \mu\in\mathfrak{p}\end{cases}\\
=&\begin{cases}\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})+t(t-2)\lambda_{\mathfrak{p}}(\overline{\mu}), & \mu\in\mathfrak{k}\\ (1-t)\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu}), & \mu\in\mathfrak{p}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned}
\varphi(\widehat{\mu}) &= \begin{cases}\overline{\mu}-\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu})+t(2-t)\lambda_{\mathfrak{p}}(\overline{\mu}), & \mu\in\mathfrak{k}\\ \overline{\mu}-dt\mu-t\overline{\mu}-(1-t)\lambda_{\mathfrak{g}}(\overline{\mu}), & \mu\in\mathfrak{p}\end{cases}\\
&= \begin{cases}\widehat{\mu}+t(2-t)\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\mu}), & \mu\in\mathfrak{k}\\ (1-t)\widehat{\mu}-dt\mu, & \mu\in\mathfrak{p}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Pogledajmo što je φ na monomu iz $S(\mathfrak{g})$: neka su $\xi_1,\dots,\xi_i\in\mathfrak{k}$ i neka su $\psi_1,\dots,\psi_j\in\mathfrak{p}$. Tada je $\varphi(\widehat{\xi_1}\cdot\ldots\cdot\widehat{\xi_i}\cdot\widehat{\psi_1}\cdot\ldots\cdot\widehat{\psi_j})$ jednako

$$(\widehat{\xi_1}+t(2-t)\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_1}))\cdot\ldots\cdot(\widehat{\xi_i}+t(2-t)\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_i}))\cdot((1-t)\widehat{\psi_1}-dt\psi_1)\cdot\ldots\cdot((1-t)\widehat{\psi_j}-dt\psi_j).$$

Ovaj izraz možemo pojednostaviti da bismo došli do formule za transgresiju. Sjetimo se, transgresiju računamo kao $\pi\circ h$, gdje je π projekcija na $\bigwedge\mathfrak{p}$, a h je "integriranje". Integral će sve generatore $\widehat{\mu}$ tretirati kao konstante, a projekcija π će ih poništiti. Zato od cijelog gornjeg izraza ostaje samo dio

$$t(2-t)\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_1})\cdot\ldots\cdot t(2-t)\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_i})\cdot(-dt\psi_1)\cdot\ldots\cdot(-dt\psi_j)$$

kojeg neće poništiti projekcija. Obzirom da je $(dt)^2=0$, ovaj izraz će biti netrivijalan jedino za $j=1$. Ne možemo imati ni slučaj $j=0$ jer bi onda h poništio ovaj izraz, neformalno govoreći ne bismo imali po čemu integrirati. Slijedi da je jedini netrivijalni član

$$t^i(2-t)^i\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_1})\cdot\ldots\cdot\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_i})(-dt\psi_1)=-\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_1}\cdot\ldots\cdot\widehat{\xi_i})\psi_1 t^i(2-t)^i dt.$$

Dobivamo da je

$$\mathbf{t}(\widehat{\xi_1}\ldots\widehat{\xi_k}\widehat{\psi})=C_k\cdot\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_1}\ldots\widehat{\xi_k})\wedge\psi,$$

pri čemu je

$$C_k=-\int_0^1 t^k(2-t)^k dt.$$

Prije nego eksplicitno izračunamo C_k primijetimo da je sigurno $C_k\neq 0$ jer je $t^k(2-t)^k$ konstantnog predznaka na $\langle 0,1\rangle$. Računamo:

$$\int_0^1 t^k(2-t)^k=(-1)^k\int_0^1 t^k(t-2)^k.$$

Uz supstituciju $x=t-1$ dobivamo

$$(-1)^k\int_{-1}^0(x+1)^k(x-1)^k dx=(-1)^k\int_{-1}^0(x^2-1)^k dx.$$

Ovaj integral ćemo riješiti supstitucijom $x=\cos t$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0(x^2-1)^k dx&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos^2 t-1)^k\cdot(-\sin t)dt\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin^2 t)^k(-\sin t)dt\\&=(-1)^{k+1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2k+1}t\,dt.\end{aligned}$$

Korištenjem parcijalnog integriranja dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2k+1}t\,dt&=\frac{-1}{2k+1}\sin^{2k}t\cdot\cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{2k}{2k+1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2k-1}t\,dt\\&=0+\frac{2k}{2k+1}\Big(0+\frac{2k-2}{2k-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2k-3}t\,dt\Big)\\&=\cdots=\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\,dt\\&=\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1.\end{aligned}$$

Izračunajmo sada ovaj produkt.

$$\begin{aligned}\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3} =&\frac{2^k\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(2k+1)\cdot(2k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}\cdot\frac{2k\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{2k\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\\ =&\frac{2^k\cdot k!}{(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^k\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\\ =&\frac{4^k\cdot(k!)^2}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$C_k=\frac{4^k\cdot(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Prije nego iskažemo eksplicitnu formulu, zapisat ćemo ju malo drugačije, tako da ju možemo koristiti za kasnije rezultate, a i tako da bude zapisana u obliku $\mathbf{t}(p)$ bez pozivanja na prikaz od p. U tu svrhu definirat ćemo novu kontrakciju, ovoga puta na simetričnoj algebri.

Definicija 4.2.1. Neka je $x\in\mathfrak{g}$ shvaćen kao element od $S^1(\mathfrak{g})$. Definiramo $\iota_x^S: S(\mathfrak{g})\to S(\mathfrak{g})$ kao proširenje preslikavanja $y\mapsto\iota_x^S y=B(x,y),\ \mathfrak{g}\to S(\mathfrak{g})$, do derivacije simetrične algebre $S(\mathfrak{g})$.

Formula za transgresiju je bila $\mathbf{t}(\widehat{\xi_1}\ldots\widehat{\xi_k}\widehat{\psi})=C_k\cdot\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_1}\ldots\widehat{\xi_k})\wedge\psi,\ \xi_i\in\mathfrak{k},\psi\in\mathfrak{p}$. Zapišimo ψ preko baze za $\mathfrak{p}$:

$$\psi=\sum_l^{(\mathfrak{p})}\iota_{e_l}\psi f_l$$

i iskoristimo to da raspišemo izraz koji se javlja u transgresiji.

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathfrak{p}}(\widehat{\xi_1}\dots\widehat{\xi_k})\wedge\psi &= \prod_{j=1}^{k}\big(\sum_i^{(\mathfrak{p})}[\xi_j,e_i]\wedge f_i\big)\wedge\psi \\
&= \prod_{j=1}^{k}\big(\sum_i^{(\mathfrak{p})}[\xi_j,e_i]\wedge f_i\big)\wedge\big(\sum_l^{(\mathfrak{p})}\iota_{e_l}\psi f_l\big) \\
&= \prod_{j=1}^{k}\sum_i^{(\mathfrak{p})}\sum_l^{(\mathfrak{p})}\iota_{e_l}\psi[\xi_j,e_i]\wedge f_i\wedge f_l \\
&= \prod_{j=1}^{k}\sum_l^{(\mathfrak{p})}\sum_i^{(\mathfrak{p})}[\iota_{e_l}\psi\,\xi_j,e_i]\wedge f_i\wedge f_l \\
&= \sum_l^{(\mathfrak{p})}\sum_i^{(\mathfrak{p})}[\iota_{e_l}\psi\prod_{j=1}^{k}\xi_j,e_i]\wedge f_i\wedge f_l \\
&= \sum_l^{(\mathfrak{p})}\lambda_{\mathfrak{p}}(\iota_{e_l}^S\widehat{\psi}\cdot\widehat{\xi_1}\dots\widehat{\xi_k})\wedge f_l \\
&= \sum_l^{(\mathfrak{p})}\lambda_{\mathfrak{p}}(\iota_{e_l}^S(\widehat{\psi}\widehat{\xi_1}\dots\widehat{\xi_k}))\wedge f_l \\
&= \sum_l^{(\mathfrak{p})}\lambda_{\mathfrak{p}}(\iota_{e_l}^S(\widehat{\xi_1}\dots\widehat{\xi_k}\widehat{\psi}))\wedge f_l \\
&= \sum_l^{(\mathfrak{p})}\lambda_{\mathfrak{p}}(\iota_{e_l}^S p)\wedge f_l
\end{aligned}$$

Ovime je dokazano:

Propozicija 4.2.2 (Formula za transgresiju)**.** Neka je $p\in T$ homogenog stupnja $k+1$ i oblika $p=p'+p''$, gdje je $p'\in S^k(\mathfrak{k})S^1(\mathfrak{p}),\ p''\in\bigoplus S(\mathfrak{k})S^d(\mathfrak{p}),\ d>1$. Transgresija elementa p dana je izrazom

$$\mathbf{t}(p)=\frac{4^k\cdot(k!)^2}{(2k+1)!}\sum_i^{(\mathfrak{p})}\lambda_{\mathfrak{p}}(\iota_{e_i}^S p')\wedge f_i.$$

Napomena 4.2.3. U iskazu propozicije smo mogli pisati $p''\in S(\mathfrak{k})\oplus S(\mathfrak{k})S^d(\mathfrak{p}),\ d\geq 2$, ali i napisana pretpostavka na p'' je u redu jer vrijedi $\mathrm{pr}_S(T)=\{0\}$.

4.3. Teorem o transgresiji

Pretpostavka u ovom poglavlju je da je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ Cartanova dekompozicija i da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna kao u 1.3 i 1.4.

Prisjetimo se, kohomologija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, $H^\bullet(\mathfrak{g})$, je kohomologija kompleksa $(\bigwedge \mathfrak{g}, \mathrm{d}_\wedge)$. Diferencijal je dan na sljedeći način: ako je e_i baza za $\mathfrak{g}$ i f_i njoj dualna baza, onda je diferencijal zadan sa

$$\mathrm{d}_\wedge = \frac{1}{2}\sum_i e_i \circ L_{f_i} = \frac{1}{2}\sum_i L_{e_i} \circ f_i.$$

Napomena 4.3.1. Jednakost dva izraza za diferencijal imamo u slučaju reduktivne algebre $\mathfrak{g}$.

Dualno, postoji diferencijal $\partial = -\mathrm{d}_\wedge^*$ koji daje homologiju Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Preciznije, ako sa $x_{[0]}$ označimo projekciju elementa $x \in \bigwedge \mathfrak{g}$ na nultu graduiranu komponentu, onda uz sparivanje

$$\langle \psi, \chi \rangle = (\iota_{\psi^\tau} \chi)_{[0]}, \quad \psi, \chi \in \bigwedge \mathfrak{g}$$

diferencijal ∂ možemo definirati uvjetom

$$\langle \psi, \partial \chi \rangle = -\langle \mathrm{d}_\wedge \psi, \chi \rangle, \quad \psi, \chi \in \bigwedge \mathfrak{g}.$$

Napomena 4.3.2. Navedeno sparivanje je isto što i proširenje bilinearne forme B na $\mathfrak{g}$ do $\bigwedge \mathfrak{g}$ opisano u 1.5. Ovaj oblik je ponekad pogodniji za računanje.

U terminima baze za $\mathfrak{g}$, $\{e_i\}$, i njoj dualne baze $\{f_i\}$, u slučaju reduktivne $\mathfrak{g}$ imamo

$$\partial = \frac{1}{2}\sum_i L_{e_i} \circ \iota_{f_i} = \frac{1}{2}\sum_i \iota_{e_i} \circ L_{f_i}.$$

Koristeći diferencijal ∂ možemo vidjeti da $\mathrm{d}_\wedge$ komutira sa ι_ψ ako je $\psi \in \left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 4.3.3 ([Mei, propozicija 10.7]). Za dani $\psi \in \bigwedge \mathfrak{g}$ imamo jednakost operatora

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}_\wedge, \iota_\psi] &= \iota_{\partial\psi} + \sum_i \iota(\iota_{e_i}\psi) L_{f_i} \\ &= \iota_{\partial\psi} + (-1)^{|\psi|} \sum_i \iota_{L_{e_i}\psi} \circ f_i.\end{aligned}$$

Posebno, ako je $\psi \in \left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$, onda je $[\mathrm{d}_\wedge, \iota_\psi] = 0$.

Obzirom da su nas zanimaju restrikcije diferencijala na $\mathfrak{k}$-bazične potprostore, želimo vidjeti što nam ova propozicija može dati za operatore na $\bigwedge \mathfrak{p}$.

Korolar 4.3.4. Za $\psi \in \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ imamo

$$[\mathrm{d}_\wedge, \iota_\psi] = 0$$

kao operatori na $\bigwedge \mathfrak{p}$.

Dokaz. Iz propozicije 4.3.3 za svaki $\psi \in \bigwedge \mathfrak{g}$ imamo

$$[\mathrm{d}_\wedge, \iota_\psi] = \iota_{\partial\psi} + (-1)^{|\psi|} \sum_i^{(\mathfrak{g})} \iota_{L_{e_i}\psi} \circ f_i.$$

Ako je $\psi \in \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$, onda imamo

$$\begin{aligned}
[\mathrm{d}_\wedge, \iota_\psi] &= \iota_{\partial\psi} + (-1)^{|\psi|} \sum_i^{(\mathfrak{g})} \iota_{L_{e_i}\psi} \circ f_i \\
&= \iota_{\partial\psi} + (-1)^{|\psi|} \sum_i^{(\mathfrak{p})} \iota_{L_{e_i}\psi} \circ f_i \\
&= \iota_{\partial\psi} + (-1)^{|\psi|} \sum_i^{(\mathfrak{p})} \iota_{[e_i,\psi]} \circ f_i.
\end{aligned}$$

Za bilo koji $x \in \bigwedge \mathfrak{p}$ i fiksirani i imamo da je $\iota_{[e_i,\psi]} \circ f_i(x) = 0$ jer $[e_i, \psi]$, ako nije 0, ima u svakom sumandu točno jedan faktor iz $\mathfrak{k}$ pa poništava bilo što iz $\bigwedge \mathfrak{p}$.

Slično argumentiramo i za prvi sumand:

$$\iota_{\partial\psi} x = \iota\Big(\frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{p})} \iota_{e_i} L_{f_i}\psi\Big)x = \iota\Big(\frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{p})} (-L_{f_i}\iota_{e_i} + \iota_{[e_i,f_i]})\psi\Big)x.$$

Dovoljno je vidjeti dvije stvari: prvo, sigurno je $\iota_{[e_i,f_i]}\psi = 0$ jer je $[e_i, f_i] \in \mathfrak{k}$. Drugo, L_{f_i} će djelovanjem na bilo što u $\bigwedge \mathfrak{p}$, u ovom slučaju $\iota_{e_i}\psi$, u svakom sumandu dati jedan faktor iz $\mathfrak{k}$ pa će kontrakcija s time biti 0 na $\bigwedge \mathfrak{p}$.

■

Želimo definirati primitivne invarijante u $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$; to radimo analogno apsolutnom slučaju, odnosno u $\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$. Gradacija na $J := \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ je naslijeđena od $\bigwedge \mathfrak{p}$ pa možemo promatrati augmentacijski ideal J^+: on je suma svih graduiranih komponenata pozitivnog stupnja. Sada primitivne invarijante u $\bigwedge \mathfrak{p}$ definiramo kao B-ortogonalni komplement od $J^+ \wedge J^+$ u J^+. Prostor primitivnih invarijanata označit ćemo s $P_\wedge(\mathfrak{p})$.

Koristeći činjenicu da operatori ι_ζ i L_ξ, $\zeta \in \mathfrak{p}, \xi \in \mathfrak{k}$ superkomutiraju s kontrakcijama $\iota_\psi, \psi \in \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ i prethodni korolar, vidimo da je prostor

$$\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}_{P-\mathrm{hor}} = \{x \in \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}} \mid \iota_\psi x = 0, \forall \psi \in P_\wedge(\mathfrak{p})\}$$

jedan $\mathfrak{k}$-diferencijalni prostor.

Napomena 4.3.5. Prostor $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ nije $\mathfrak{k}$-diferencijalni potprostor.

Provjerimo da tvrdnja analogna prethodnom korolaru vrijedi i za diferencijal ∂: neka je $\psi \in \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$. Imamo

$$\begin{aligned}
[\partial, \iota_\psi] &= \frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{g})} L_{e_i}\iota_{f_i}\iota_\psi - \frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{g})} \iota_\psi L_{e_i}\iota_{f_i} \\
&= \frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{g})} L_{e_i}\iota_{f_i}\iota_\psi - \frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{g})} (L_{e_i}\iota_\psi + \iota_{[e_i,\psi]})\iota_{f_i} \\
&\quad [e_i, \psi] \in \mathfrak{k}\textstyle\bigwedge \mathfrak{p} \text{ pa je kontrakcija tim elementom 0 na } \textstyle\bigwedge \mathfrak{p} \\
&= \frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{g})} L_{e_i}\iota_{f_i}\iota_\psi - \frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{g})} L_{e_i}\iota_\psi\iota_{f_i} \\
&= \frac{1}{2}\sum_i^{(\mathfrak{g})} L_{e_i}\iota_{f_i}\iota_\psi + \frac{(-1)^{|\psi|}}{2}\sum_i^{(\mathfrak{g})} L_{e_i}\iota_{f_i}\iota_\psi.
\end{aligned}$$

Ako je ψ neparnog stupnja, gotovi smo. Inače dobivamo

$$[\partial, \iota_\psi] = \sum_i^{(\mathfrak{g})} L_{e_i}\iota_{f_i}\iota_\psi;$$

tvrdimo da vrijedi $L_{e_i}\iota_{f_i} = 0$ kao operator na $\bigwedge \mathfrak{p}$. Ako je $e_i, f_i \in \mathfrak{k}$, onda je $\iota_{f_i} = 0$, inače će L_{e_i} (sada je $e_i \in \mathfrak{p}$) preslikati elemente u $\mathfrak{k}\bigwedge \mathfrak{p}$, ali i u $\bigwedge \mathfrak{p}$, dakle u 0. Zaključujemo $[\partial, \iota_\psi] = 0$. Zbog ovoga se ∂ restringira na operator na $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}_{P-\mathrm{hor}}$.

Lema 4.3.6. Kompleks $\left(\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}_{P-\mathrm{hor}}, \mathrm{d}_\wedge\right)$ je aciklički: augmentacijsko preslikavanje

$$\varepsilon : \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}_{P-\mathrm{hor}} \to \mathbb{C}$$

inducira izomorfizam u kohomologiji. Štoviše, postoji $\mathfrak{k}$-ekvivarijantni homotopski operator $h \in \mathrm{End}^{-1}\left(\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}_{P-\mathrm{hor}}\right)$ takav da vrijedi $[\mathrm{d}_\wedge, h] = \mathrm{id} - \varepsilon$.

Dokaz. U propoziciji 10.9. u [Mei] je konstruiran homotopski operator na $\bigwedge \mathfrak{g}$ između identitete i projekcije na $\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$; restrikciju tog operatora možemo iskoristiti ovdje, koristeći prethodne rezultate.

Konstrukcija je na $\bigwedge \mathfrak{g}$ izgledala ovako: "Laplacijan" $(\mathrm{d}_\wedge + \partial)^2$ ima jezgru $\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$ i invertibilan je na $\mathfrak{g}.\bigwedge \mathfrak{g}$. Neka je $k \in \mathrm{End}^0\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)$ njegov inverz na $\mathfrak{g}.\bigwedge \mathfrak{g}$, a na $\left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$ proširimo nulom. Vrijedi da k komutira s $\mathrm{d}_\wedge$ i ∂. Traženi homotopski operator definiramo kao $h := k \circ \partial$, to je homotopski operator između id i projekcije $\bigwedge \mathfrak{g} \to \left(\bigwedge \mathfrak{g}\right)^{\mathfrak{g}}$ duž $\mathfrak{g}.\bigwedge \mathfrak{g}$. Kako je k $\mathfrak{g}$-ekvivarijantno preslikavanje, takvo je i h.

Vidjeli smo ranije da $\mathrm{d}_\wedge$ i ∂ komutiraju s kontrakcijama elementima iz $\left(\bigwedge\mathfrak{p}\right)^\mathfrak{k}$ pa isto mora vrijediti i za h: naime, ako su A i B dva linearna operatora koji komutiraju i A je invertibilan, onda djelovanjem s A^{-1} s obje strane dobivamo da i A^{-1} komutira s B.

Dakle, h čuva prostor $\left(\bigwedge\mathfrak{p}\right)^\mathfrak{k}_{P-\mathrm{hor}}$ i možemo promatrati restrikciju na taj prostor. Ta restrikcija je je homotopski operator između identitete na $\left(\bigwedge\mathfrak{p}\right)^\mathfrak{k}_{P-\mathrm{hor}}$ i projekcije na $\left(\bigwedge\mathfrak{p}\right)^\mathfrak{k}\cap\left(\bigwedge\mathfrak{p}\right)^\mathfrak{k}_{P-\mathrm{hor}}$. Preostaje vidjeti da je ovaj presjek jednak $\mathbb{C}$.

Prema tablici 1 u [Pan], $\left(\bigwedge\mathfrak{p}\right)^\mathfrak{k}$ ima strukturu vanjske algebre nad prostorom primitivnih invarijanata $P_\wedge(\mathfrak{p})$ za naš izbor simetričnog para $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$. Kontrakcije primitivnim invarijantama su derivacije na $\bigwedge P_\wedge(\mathfrak{p})$ pa im zajednička jezgra sadrži samo konstante. ∎

Lema 4.3.7. Vrijedi $S(\mathfrak{g})^\mathfrak{k}\cap\ker\mathrm{d}_W=S(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$.

Dokaz. Očito vrijedi $S(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}\subset S(\mathfrak{g})^\mathfrak{k}$ i $\mathrm{d}_W\big(S(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}\big)=0$.

Neka je $x\in S(\mathfrak{g})^\mathfrak{k}$ takav da je $\mathrm{d}_W(x)=0$. Uočimo da je diferencijal na $S(\mathfrak{g})^\mathfrak{k}$ jednak

$$\sum_i^{(\mathfrak{p})} L_{e_i}\otimes f_i$$

pa imamo

$$\sum_i^{(\mathfrak{p})} L_{e_i}x\otimes f_i=0.$$

Kako f_i čine bazu za $\mathfrak{p}$, ovo je moguće samo u slučaju $L_{e_i}x\otimes f_i=0,\forall i$, odnosno $L_{e_i}x=0,\forall i$. Sjetimo se da je po pretpostavci x bio $\mathfrak{k}$-invarijantan; slijedi da je x i $\mathfrak{g}$-invarijantan. ∎

Sjetimo se karakterističnog homomorfizma iz 2.5. Weilova algebra koju ćemo sada promatrati će biti $W(\mathfrak{k})$. Primijetimo da i Weilova algebra $W(\mathfrak{g})$ ima strukturu $\mathfrak{k}$-diferencijalne algebre. Ako označimo sa $\vartheta_\mathfrak{k}$ koneksiju na $W(\mathfrak{k})$ i sa $\vartheta_\mathfrak{g}$ koneksiju na $W(\mathfrak{g})$, onda je karakteristični homomorfizam dan kao morfizam $\mathfrak{k}$-diferencijalnih algebri $c:W(\mathfrak{k})\to W(\mathfrak{g})$ takav da je $c\circ\vartheta_\mathfrak{k}=\vartheta_\mathfrak{g}$. Označimo sa c i restrikciju karakterističnog homomorfizma na $\mathfrak{k}$-bazične potprostore, odnosno $c:S(\mathfrak{k})^\mathfrak{k}\to W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$.

Napomena 4.3.8. U 4.1 smo imali preslikvanje $j:S(\mathfrak{k})^\mathfrak{k}\to W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$. Vrijedi da su j i c isto preslikavanje. Razlog što su korištene različite oznake je taj što su j i c definirani na bitno različite načine pa je ponekad lakše gledati jednu od konstrukcija korištenih u definiciji. Od sada nadalje preslikavanje ćemo isključivo označavati sa c.

Također, vrijedi $c\big(S(\mathfrak{k})^\mathfrak{k}\big)\subset S(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$.

Lema 4.3.9. Neka je $x \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ i neka su $x_S \in S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ i $y \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ takvi da je

$$x = c(x_S) + \mathrm{d}_W(y).$$

Tada vrijedi

$$\mathrm{pr}_S(x) = 0 \Leftrightarrow x_S = 0.$$

Posebno, imamo $\mathrm{pr}_S(x) = x_S$.

Dokaz. Uočimo da je $\mathrm{pr}_S \circ \mathrm{d}_W = \mathrm{d}_W \circ \mathrm{pr}_S = 0$ jer je pr_S morfizam diferencijalnih algebri. Isto tako, imamo

$$\mathrm{pr}_S \circ c = \mathrm{id}_{S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}}.$$

Iz ovoga automatski slijedi

$$\mathrm{pr}_S(x) = \mathrm{pr}_S\, c(x_S) + \mathrm{pr}_S\, \mathrm{d}_W(y) = x_S,$$

odnosno $\mathrm{pr}_S(x) = x_S$ i $\mathrm{pr}_S(x) = 0 \Leftrightarrow x_S = 0$. ∎

Propozicija 4.3.10. Neka je

$$W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}} = \{x \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) | \iota_\psi x = 0, \forall \psi \in P_\wedge(\mathfrak{p})\}.$$

Vrijedi:

1. $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$ je diferencijalni prostor.
2. Vrijedi $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}} \cap W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}} = \mathbb{C}$.
3. Diferencijal d_W šalje elemente od $P_\wedge(\mathfrak{p})$ u kocikluse u $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$.
4. Inkluzija $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$ inducira izomorfizam na kohomologiji, odnosno

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \cong H(W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}, \mathrm{d}_W).$$

Dokaz. 1. Primijetimo da za $\xi \in \mathfrak{k}$ i $\psi \in P_\wedge(\mathfrak{p})$ vrijedi da Liejeva derivacija L_ξ superkomutira s kontrakcijom ι_ψ: kako je $\psi \in \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ imamo $[\xi,\psi] = 0$. Posebno će Liejeve derivacije čuvati prostor $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$.

Što se tiče diferencijala, sjetimo se $\mathrm{d}_W = \mathrm{d}_{CE} + \mathrm{d}_K$. Korolar 4.3.4 osigurava da d_{CE} čuva prostor $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$. Što se tiče Koszulovog diferencijala, dovoljno je pogledati kako izgleda na $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$; prema lemi 3.3.1 je

$$\mathrm{d}_K = \sum_i^{(\mathfrak{p})} \widehat{e_i} \otimes \iota_{f_i},$$

a ovaj izraz očito superkomutira s ι_ψ. Slijedi da je $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$ diferencijalni potprostor od $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$.

2. Ova tvrdnja je dio dokaza leme 4.3.6: prema [Pan, tablica 1], $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ ima strukturu vanjske algebre nad prostorom primitivnih invarijanata $P_\wedge(\mathfrak{p})$ za naš izbor simetričnog para $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$. Kontrakcije primitivnim invarijantama su derivacije na $\bigwedge P_\wedge(\mathfrak{p})$ pa im zajednička jezgra sadrži samo konstante.

3. Jedino što treba dokazati je da je za svaki $\phi \in P_\wedge(\mathfrak{p})$ element $\mathrm{d}_W\phi$ $P_\wedge(\mathfrak{p})$-horizontalan. Uzmimo $\psi \in P_\wedge(\mathfrak{p})$ i sjetimo se što znamo o diferencijalu na vanjskoj algebri: d_K superkomutira s kontrakcijom, a Chevalley-Eilenbergov diferencijal je 0 na $\bigwedge \mathfrak{p} \supset P_\wedge(\mathfrak{p})$, odnosno $\mathrm{d}_W = \mathrm{d}_K$. Konačno,

$$\iota_\psi \mathrm{d}_W \phi = \iota_\psi \mathrm{d}_K \phi = (-1)^{|\psi|} d_K \iota_\psi \phi.$$

Prema [Mei, korolar 10.1] $\iota_\psi \phi$ je skalar pa ga diferencijal (posebno, Koszulov diferencijal) poništava.

4. Neka je $b \in W^r(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$ kociklus; napišimo ga u obliku $b = b_0 + b_1 + \ldots + b_r$, pri čemu je $b_i \in \left(S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^i \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$, $i = 0,1,\ldots,r$. Neka je k najveći od tih indeksa za koji je $b_k \neq 0$.

   Uspoređivanjem stupnjeva u vanjskoj algebri iz $\iota_\psi b = 0$ i $\mathrm{d}_W b = 0$ vidimo da mora vrijediti

$$b_k \in W^r(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}, \quad d_\wedge b_k = 0.$$

   Ako je $k > 0$, onda za $a := (\mathrm{id} \otimes h)(b_k)$ vrijedi $d_\wedge(a) = b_k$. Ovdje je h isti homotopski operator kao u lemi prije. Isto tako, vrijedi

$$a \in W^{r-1}(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}},$$
$$b_k + \mathrm{d}_W(a) = b_k - \mathrm{d}_\wedge(a) + \mathrm{d}_K(a) = \mathrm{d}_K(a).$$

   Vidimo da $b_k + \mathrm{d}_W(a)$ leži u $S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{k-1} \mathfrak{p}$ pa možemo promatrati $b' := b + \mathrm{d}_W(a)$ koji je oblika $b' = b'_0 + b'_1 + \ldots + b'_{k-1}$, $b_i \in S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^i \mathfrak{p}$. Isti postupak ponavljamo dok ne dođemo do $S(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^0 \mathfrak{p} = S(\mathfrak{g})$. Slijedi da je b kohomologan elementu iz $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$, odnosno $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ zbog leme 4.3.7. Ovo znači da imamo surjekciju $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to H(W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}, \mathrm{d}_W)$. Želimo pokazati da je ovo preslikavanje i injektivno.

Neka je $x \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ takav da postoji $b \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$ takav da je $x = \mathrm{d}_W(b)$. Kao ranije zapišimo b u obliku $b = b_0 + b_1 + \ldots + b_k$ i zaključimo da je kohomologan nekom elementu iz $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Obzirom da d_W poništava $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, mora vrijediti $x = \mathrm{d}_W(b) = 0$.

■

Konačno smo spremni za glavni rezultat o transgresiji.

Teorem 4.3.11 (Teorem o transgresiji)**.** Neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ Cartanova dekompozicija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ za koju vrijedi $|W^1| = 1$ i

$$\mathbf{t} : T \to \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$$

transgresija u relativnoj Weilovoj algebri. Tada je

$$\ker \mathbf{t} = T \cdot S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}, \quad \operatorname{im} \mathbf{t} = P_\wedge(\mathfrak{p}).$$

Dokaz. Obzirom da $\mathbf{t}$ iščezava na $T \cdot S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, imamo dobro definirano preslikavanje

$$T \big/ \left(T \cdot S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\right) \to \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}. \tag{4.1}$$

Tvrdimo da je ovo preslikavanje izomorfizam $T \big/ \left(T \cdot S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\right) \to P_\wedge(\mathfrak{p})$.

Promotrimo kratki egzaktni niz

$$0 \longrightarrow T \hookrightarrow S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_S} S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}} \longrightarrow 0.$$

Taj niz se cijepa jer pr_S ima lijevi inverz c. Posebno imamo da je

$$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = T \oplus c\left(S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}\right) \cong T \oplus S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}.$$

Onda imamo i

$$\left(S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\right)^2 = T \cdot S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \oplus \left(S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}\right)^2.$$

Očito vrijedi da je $T \cdot S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ ideal u T i da je T ideal u $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Primijetimo da imamo jednakost dimenzija u (4.1): obzirom da je

$$\dim S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \big/ \left(S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\right)^2 = \dim \mathfrak{h}, \quad \dim S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}} \big/ \left(S(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}\right)^2 = \dim \mathfrak{t},$$

imamo

$$\dim T \big/ \left(T \cdot S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\right) = \dim \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{t} = \dim \mathfrak{a} = \dim P_\wedge(\mathfrak{p}).$$

Tvrdnja o dimenzijama kvocijenata je otprije poznati Chevalleyev rezultat, može se pronaći u napomeni 8.2. u [Mei]. Što se tiče dimenzije prostora primitivnih invarijanata, zahvaljujući tablici 1 u [Pan] znamo da je $\dim P_\wedge(\mathfrak{p}) = \dim \mathfrak{a}$.

Zbog jednakosti dimenzija dovoljno je pokazati da slika od T sadrži $P_\wedge(\mathfrak{p})$.

Uzmimo $\psi \in P_\wedge(\mathfrak{p})$. Prema tvrdnji 3 iz prethodne propozicije $\mathrm{d}_W(\psi)$ je kociklus u $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$. Prema tvrdnji 4 iste propozicije taj kociklus je kohomologan nekom $x \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Drugim riječima, postoji kolanac $b \in W(\mathfrak{g},\mathfrak{k})_{P-\mathrm{hor}}$ takav da je

$$\mathrm{d}_W(\psi) = x + \mathrm{d}_W(b).$$

Slijedi

$$x = \mathrm{d}_W(\psi) - \mathrm{d}_W(b) = \mathrm{d}_W(\psi - b).$$

Slijedi da je x u slici od d_W, odnosno u $\mathrm{im}\,\mathrm{d}_W \cap S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Prema lemi 4.3.9 ovaj presjek je jednak T; slijedi $x \in T$.

Definiramo $C_x = \psi - b$, to će biti traženi kolanac transgresije. Zaista, imamo

$$\mathrm{d}_W(C_x) = x$$

i ako se sjetimo da je π označavao projekciju $W(\mathfrak{g},\mathfrak{k}) \to \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$, onda je

$$\pi(C_x) = \psi.$$

Ovo točno znači da vrijedi $\mathbf{t}(x) = \psi$. ∎

5. Harish-Chandrin izomorfizam

Cilj ovog poglavlja je definiranje Harish-Chandrinog preslikavanja, drugačijeg od onog klasičnog $\mathfrak{z}(U(\mathfrak{g})) \to S(\mathfrak{h})^W$ kojeg je Harish-Chandra uveo u [HC], i proučavanje njegovih svojstava. Kao i u prethodnim poglavljima, definicija i poznati rezultati će biti prezentirani prvo za apsolutni slučaj, a nakon toga će se proučavati relativni slučaj i prezentirati novi rezultati.

Ovaj analogon Harish-Chandrinog izomorfizma u svojoj definiciji neće imati djelovanje Weylove grupe, ali će rezultati svejedno biti jako slični onima u klasičnom slučaju.

5.1. Harish-Chandrino preslikavanje $C(\mathfrak{g}) \to C(\mathfrak{h})$

Harish-Chandrino preslikavanje na Cliffordovoj algebri $C(\mathfrak{g})$ ima mnoge primjene; jedna od njih je korištenje u dobivanju lokalizacijskih formula u [AMW].

Neka je $\mathfrak{g}$ poluprosta Liejeva algebra i $\mathfrak{h}$ Cartanova podalgebra od $\mathfrak{g}$. Za fiksirani sistem pozitivnih korijena sa $\mathfrak{n}^+$ označimo potprostor od $\mathfrak{g}$ koji je razapet svim pozitivnim korijenskim vektorima i sa $\mathfrak{n}^-$ potprostor od $\mathfrak{g}$ koji je razapet svim negativnim korijenskim vektorima. Tada je

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$$

i ovaj rastav se zove trijangularna dekompozicija.

U klasičnom slučaju Harish-Chandrinog izomorfizma promatra se univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$. Ovdje želimo promatrati Cliffordovu algebru $C(\mathfrak{g})$, veza između ove dvije algebre je točno preslikavanje α koje smo koristili da iskažemo ρ-dekompoziciju. Preslikavanje α je bilo "kvantizacija" preslikavanja $\lambda : S(\mathfrak{g}) \to \bigwedge \mathfrak{g}$ kojeg smo nešto više koristili.

Trijangularna dekompozicija od $\mathfrak{g}$ povlači da se Cliffordova algebra može zapisati kao

$$C(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{n}^+) \otimes C(\mathfrak{h}) \otimes C(\mathfrak{n}^-),$$

pri čemu je tenzorski produkt dan množenjem u Cliffordovoj algebri.

Neka je

$$\mathbf{hc} : C(\mathfrak{g}) \to C(\mathfrak{h})$$

projekcija na tenzorski faktor $C(\mathfrak{h})$, odnosno $\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \varepsilon$ na $C(\mathfrak{n}^+) \otimes C(\mathfrak{h}) \otimes C(\mathfrak{n}^-)$, gdje je ε augmentacijsko preslikavanje. To preslikavanje zovemo Harish-Chandrinim preslikavanjem.

Primijetimo da ovako definirano preslikavanje nije homomorfizam algebri, odnosno tek će restrikcija od **hc** na $C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ biti homomorfizam. Kao i u klasičnom slučaju, ovo neće predstavljati problem jer će nas zanimati restrikcija ovog preslikavanja na $\mathfrak{g}$-invarijante. O tome nam govori sljedeći teorem, kojeg je Kostant dokazao, a Bazlov kasnije objavio.

Teorem 5.1.1 (Bazlov, [Baz], teorem 4.1.)**.** Restrikcija Harish-Chandrinog preslikavanja

$$\mathbf{hc} : C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to C(\mathfrak{h})$$

je izomorfizam algebri.

Iako dokaz teorema nećemo navoditi, zanimljivo je primijetiti da se Bazlov u svom dokazu poziva na Kostantovu ρ-dekompoziciju $C(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \otimes \alpha(U(\mathfrak{g}))$. Kasnije ćemo vidjeti da se u dokazu našeg analogona ovog teorema ρ-dekompozicija može zaobići, iako uz našu pretpostavku da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna imamo ρ-dekompoziciju za $C(\mathfrak{p})$. O ovome je detaljnije napisano u 1. poglavlju.

Još jedan rezultat koji je Bazlov dobio je bijekcija između primitivnih invarijanta i elemenata Cartanove podalgebre. I ovdje je u nekom smislu bila potrebna eksplicitna ρ-dekompozicija na $\mathfrak{g} \subset C(\mathfrak{g})$: jedan važan i netrivijalan rezultat potreban za prikaz elemenata iz $\mathfrak{g}$ je taj da kontrakcije primitivnih invarijanata elementima iz $\mathfrak{g}$ uvijek pripadaju slici od α. Iskažimo rezultat koji je dobio.

Propozicija 5.1.2 ([Baz, Propozicija 4.5.])**.** Restrikcija Harish-Chandrinog preslikavanja **hc** na prostor primitivnih invarijanata $q(P_\wedge(\mathfrak{g})) \subset q(J)$ je linearna bijekcija između $q(P_\wedge(\mathfrak{g}))$ i Cartanove podalgebre $\mathfrak{h}$.

Ne ulazimo u dokaz same propozicije prvenstveno jer nije konstruktivan. Svejedno, možemo primijetiti da je iskaz propozicije zanimljiv, ako ne i iznenađujući i neočekivan. U ovoj propoziciji Cartanovu podalgebru $\mathfrak{h}$ promatramo kao uloženu u svoju Cliffordovu algebru $C(\mathfrak{h})$ u filtriranom stupnju 1; ako preferirate stupnjeve u gradaciji, $\mathfrak{h}$ se ulaže u $\bigwedge \mathfrak{h}$ tako da je $\mathfrak{h} = \bigwedge^1 \mathfrak{h}$. S druge strane, za primitivne invarijante znamo da imaju puno veće stupnjeve; za početak, u stupnju 1 u $\bigwedge \mathfrak{g}$ nemamo nikakve $\mathfrak{g}$-invarijante, a kamoli primitivne. Isto tako, znamo i da se primitivne invarijante pojavljuju samo u neparnim stupnjevima. Zaključak je da se primitivne invarijante u $P_\wedge(\mathfrak{g}) \subset \bigwedge \mathfrak{g}$ pojavljuju u stupnjevima gradacije koji su barem 3; onda će i u Cliffordovoj algebri nakon Chevalleyevog preslikavanja q biti filtriranog stupnja barem 3. Ovo znači da imamo izomorfizam algebri $\mathbf{hc} : C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to C(\mathfrak{h})$ takav da uspostavlja bijekciju između elemenata stupnja barem 3 i elemenata stupnja 1.

5.2. HARISH-CHANDRINO PRESLIKAVANJE $C(\mathfrak{p}) \to C(\mathfrak{a})$

Cijela ova sekcija smatra se originalnim rezultatima.

Neka je $\mathfrak{g}$ reduktivna algebra, $\mathfrak{h}$ njena fundamentalna Cartanova podalgebra i $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ njena Cartanova dekompozicija. Pretpostavimo još da je simetrični par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ takav da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija. Označimo sa $\mathfrak{t}$ Cartanovu podalgebru od $\mathfrak{k}$, dakle $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ i neka je $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$.

Izaberimo sisteme pozitivnih korijena $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \supset \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ i označimo sa $\mathfrak{n}^+$ linearnu ljusku pozitivnih korijenskih vektora, a sa $\mathfrak{n}^-$ linearnu ljusku negativnih korijenskih vektora. Označimo sa $\{E_1, \dots, E_k\}$ bazu za $\mathfrak{n}^+ \cap \mathfrak{p}$ i sa $\{F_i\}$ bazu za $\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}$ dualnu bazi $\{E_i\}$, odnosno $B(E_i, F_j) = \delta_{ij}$, dodatno uzimamo da su vektori izotropni pa je $B(E_i, E_j) = B(F_i, F_j) = 0, \forall i, j$.

Neka su vektori baze za $\mathfrak{a}$ odabrani ovako: ako je $\dim \mathfrak{p}$ neparna (pa je onda i $\dim \mathfrak{a}$ neparna), uzmimo jedan istaknuti vektor $H_0 \in \mathfrak{a}$ dualan sam sebi i promatramo direktni komplement njegove ljuske u $\mathfrak{a}$, u slučaju parne dimenzije promatramo čitav $\mathfrak{a}$. Sada možemo odabrati maksimalne dualne izotropne potprostore, označimo ih s $\mathfrak{a}^+$ i $\mathfrak{a}^-$ i označimo baze sa $\{H_1^+, \dots, H_l^+\}$ i $\{H_1^-, \dots H_l^-\}$ respektivno. Označimo li $\mathfrak{p}^+ = \mathrm{span}\{E_1, \dots, E_k, H_1^+, \dots, H_l^+\}$, $\mathfrak{p}^- = \mathrm{span}\{F_1, \dots, F_k, H_1^-, \dots, H_l^-\}$, onda je $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ u slučaju parne dimenzije od $\mathfrak{p}$, u slučaju neparne dimenzije trebamo još dodati H_0, odnosno $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^- \oplus \mathrm{span}\{H_0\}$.

Označimo sa $S = \bigwedge \mathfrak{p}^+$ spin modul za $\mathfrak{p}$. Ako sa λ označimo njegovu najveću težinu, onda S možemo rastaviti kao sumu izomorfnih ireducibilnih $\mathfrak{k}$-modula

$$S = 2^{\lfloor \frac{1}{2} \dim \mathfrak{a} \rfloor} V_\lambda. \tag{5.1}$$

U slučaju da je $\dim \mathfrak{p}$ neparna, dobivamo istu stvar jer ako gledamo kako $\mathfrak{t}$ djeluje na $\bigwedge \mathfrak{p}^+$, u izrazu za $\alpha(\mathfrak{t})$ će sumand $[X, H_0]H_0$ nestati jer X i H_0 komutiraju.

U dokazu teorema važna će nam biti sljedeća propozicija.

Propozicija 5.2.1. Svi vektori iz $\bigwedge a^+$ su vektori najmanje težine za S.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da tvrdnja vrijedi za svaki od monoma $v = H_{i_1}^+ \wedge H_{i_2}^+ \wedge \cdots \wedge H_{i_j}^+ \in \bigwedge \mathfrak{a}^+$ pa uzmimo jedan takav, trebamo pokazati da za $X \in \mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{k}$ vrijedi $\alpha(X).v = 0$.

Radi jednostavnosti označimo sa $\{u_i\}$ bazu za $\mathfrak{p}^+$, radi se o istoj bazi koju smo odabrali ranije, i sa $\{u_i^*\}$ njoj dualnu bazu za $\mathfrak{p}^-$. Sada je

$$\alpha(X).v = -\frac{1}{4}\sum_i([X,u_i]u_i^*.v + [X,u_i^*]u_i.v + [X,H_0]H_0.v),$$

pri čemu u slučaju parne dimenzije od $\mathfrak{p}$ nema zadnjeg sumanda. Pokažimo da svaki od ovih sumanada mora biti 0.

$u_i^*.v \neq 0$ jedino u slučaju da je u_i sadržan u monomu v, ali to znači da je u_i^* vektor težine 0. Onda je i $u_i^*.v$ vektor težine 0. Uočimo da se $[X,u_i]$ nalazi u $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}^-$, posebno ima neku težinu koja nije 0. Zato mora vrijediti $[X,u_i]u_i^*.v = 0$.

Prelazimo na drugi sumand, $u_i.v$ je vektor iste težine kao u_i, a težina od $[X,u_i^*]$ je suma težina od X i u_i^*, pri tome je težina od u_i^* suprotna težini od u_i. Zato cijeli sumand iščezava osim ako je težina od X jednaka 0 (što je ekvivaletno tome da $[X,u_i^*]$ i u_i imaju suprotne težine), ali to nije slučaj obzirom da je $X \in \mathfrak{n}^-$.

Konačno, u slučaju neparne dimanzije od $\mathfrak{p}$ preostaje komentirati $[X,H_0]H_0.v$. Obzirom kako H_0 djeluje na spin modulu, ovo je do na konstantu $\pm i$ jednako $[X,H_0].v$. Sada možemo koristiti isti argument kao ranije, v je težine 0, a $[X,H_0]$ se nalazi u $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}^-$ pa posebno nije težine 0. Zato cijeli izraz mora biti jednak nuli. ■

Neka je $\{b_1,\ldots,b_m\}$ baza za $\mathfrak{p}$. Koristeći Poincaré-Birkhoff-Wittov teorem za $C(\mathfrak{p})$ imamo da bazu za $C(\mathfrak{p})$ čine monomi oblika

$$b_1^{\varepsilon_1} b_2^{\varepsilon_2} \cdots b_m^{\varepsilon_m}, \quad \varepsilon_i \in \{0,1\}.$$

Uzmimo da je ta baza za $\mathfrak{p}$ točno baza $\{E_1,\ldots,E_k,H_1^+,\ldots,H_l^+,H_0,H_1^-,\ldots,H_l^-,F_1,\ldots,F_k\}$, naravno H_0 se opet pojavljuje samo u slučaju neparne dimenzije od $\mathfrak{p}$. U svakom slučaju slijedi

$$C(\mathfrak{p}) = C(\mathfrak{a}) \oplus ((\mathfrak{n}^+ \cap \mathfrak{p})C(\mathfrak{p}) + C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p})). \tag{5.2}$$

Označimo sa **hc** : $C(\mathfrak{p}) \to C(\mathfrak{a})$ pripadnu projekciju od $C(\mathfrak{p})$ na $C(\mathfrak{a})$. Kao i ranije, ovo preslikavanje je analogon Harish-Chandrinog preslikavanja i nije homomorfizam algebri dok se ne restringira na $\mathfrak{t}$-invarijante. Ipak, restringiranjem na $\mathfrak{k}$-invarijante opet možemo dobiti homomorfizam, čak i izomorfizam, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 5.2.2. Neka je $\mathfrak{g}$ reduktivna algebra, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ Cartanova dekompozicija i simetrični par $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ takav da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija. Restrikcija preslikavanja **hc** : $C(\mathfrak{p}) \to C(\mathfrak{a})$ na $C(\mathfrak{p})^K = C(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ je izomorfizam algebri $C(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}}$ i $C(\mathfrak{a})$.

Dokaz. Elementi iz $C(\mathfrak{p})^K$ su linearne kombinacije monoma iz Poincaré-Birkhoff-Wittovog teorema i imaju $\mathfrak{t}$-težinu 0. Zato i svaki od monoma M u kombinaciji mora imati $\mathfrak{t}$-težinu 0. Slijedi da za M vrijedi sljedeća ekvivalencija

$$M \in (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p})C(\mathfrak{p}) \Leftrightarrow M \in (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p})C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}) \Leftrightarrow M \in C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p})$$

uspoređivanjem $\mathfrak{t}$-težina. Iz ovoga ćemo dobiti da je $\ker \mathbf{hc}\big|_{C(\mathfrak{p})^K}$ obostrani ideal u $C(\mathfrak{p})^K$ pa ćemo imati da je $\mathbf{hc}\big|_{C(\mathfrak{p})^K}$ homomorfizam algebri. Pokažimo da se radi o lijevom idealu, analogno bi se provjerilo da je i desni ideal: neka je $x \in C(\mathfrak{p})^K$ i $y \in \ker \mathbf{hc}\big|_{C(\mathfrak{p})^K}$. Prema definiciji od $\mathbf{hc}$, y se nalazi u $(\mathfrak{n}^+ \cap \mathfrak{p})C(\mathfrak{p}) + C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p})$ pa unutar $C(\mathfrak{p})^K$ imamo

$$\begin{aligned} xy &\in C(\mathfrak{p})^K(\mathfrak{n}^+ \cap \mathfrak{p})C(\mathfrak{p}) + C(\mathfrak{p})^K C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}) \\ &= C(\mathfrak{p})^K C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}) + C(\mathfrak{p})^K C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}) \\ &= C(\mathfrak{p})^K C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}) \\ &\subseteq C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}) \\ &\subseteq (\mathfrak{n}^+ \cap \mathfrak{p})C(\mathfrak{p}) + C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}), \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Za sljedeći dio dokaza razlikujemo dva slučaja obzirom na parnost dimenzije od $\mathfrak{p}$. Neka je $\dim \mathfrak{p}$ parna. Tada iz leme 2.2.4. u [HP] slijedi da je $C(\mathfrak{p}) = \operatorname{End} S$ pa je onda

$$C(\mathfrak{p})^K = (\operatorname{End} S)^K = \operatorname{End}_K S.$$

Koristeći (6.2), Schurovu lemu i propoziciju 5.2.1 vidimo da se restrikcije elemenata iz $C(\mathfrak{p})^K$ na $\bigwedge \mathfrak{a}^+$ mogu identificirati sa $\operatorname{End} \bigwedge \mathfrak{a}^+$, što je zapravo $C(\mathfrak{a})$ jer je $\bigwedge \mathfrak{a}^+$ spin modul za $\mathfrak{a}$.

Isti zaključak dobijemo i u slučaju neparne dimenzije od $\mathfrak{p}$, samo je u ovom slučaju Cliffordova algebra suma dvije proste algebre (ranije je ona sama već bila prosta). Preciznije, neka su S_1 i S_2 dva spin modula za $\mathfrak{p}$ koji nisu izomorfni kao $C(\mathfrak{p})$-moduli, ali jesu kao $\mathfrak{k}$-moduli. Do na izomorfizam $C(\mathfrak{p})$-modula to su jedine dvije mogućnosti. U ovom slučaju vrijedi $C(\mathfrak{p}) = \operatorname{End} S_1 \oplus \operatorname{End} S_2$. Sve navedeno može se naći u poglavlju 2.2.7. u [HP]. Imamo

$$C(\mathfrak{p})^K = (\operatorname{End} S_1 \oplus \operatorname{End} S_2)^K = \operatorname{End}_K S_1 \oplus \operatorname{End}_K S_2.$$

Vidimo da se restrikcije elemenata od $C(\mathfrak{p})^K$ na $\bigwedge \mathfrak{a}^+$ mogu identificirati sa $\operatorname{End} \bigwedge \mathfrak{a}^+ \oplus \operatorname{End} \bigwedge \mathfrak{a}^+$. Sada za $C(\mathfrak{a})$ koristimo rastav kakav smo ranije imali za $C(\mathfrak{p})$ (u ovom slučaju je i $\dim \mathfrak{a}$ neparna): neka su $S_1^{\mathfrak{a}}$ i $S_2^{\mathfrak{a}}$ dva različita spin modula za $\mathfrak{a}$, dakle kao vektorski prostori su jednaki

$\bigwedge \mathfrak{a}^+$. Sada je

$$\operatorname{End} \bigwedge \mathfrak{a}^+ \oplus \operatorname{End} \bigwedge \mathfrak{a}^+ = \operatorname{End} S_1^{\mathfrak{a}} \oplus \operatorname{End} S_2^{\mathfrak{a}} = C(\mathfrak{a}).$$

Konačno, neovisno o $\dim \mathfrak{p}$, vidimo da svaki monom u $(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p})C(\mathfrak{p})(\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p})$ djeluje nulom na $\bigwedge \mathfrak{a}^+$ jer $\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}$ šalje u 0 sve vektore najmanje težine. Zato svaki $a \in C(\mathfrak{p})^K$ djeluje sa $\mathbf{hc}(a)$ na $\bigwedge \mathfrak{a}^+$. ∎

Po uzoru na analogni rezultat u slučaju Harish-Chandrinog izomorfizma u apsolutnom slučaju $\mathbf{hc} : C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to C(\mathfrak{h})$, propoziciju 5.1.2, vjerujemo da Harish-Chandrin izomorfizam u relativnom slučaju, $\mathbf{hc} : C(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}} \to C(\mathfrak{a})$, uspostavlja linearnu bijekciju između primitivnih $\mathfrak{k}$-invarijanata u $C(\mathfrak{p})$ i elemenata iz $\mathfrak{a}$.

Slutnja 5.2.3. Harish-Chandrin izmorfizam $\mathbf{hc} : C(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}} \to C(\mathfrak{a})$ uspostavlja linearnu bijekciju između primitivnih invarijanata $q(P_\wedge(\mathfrak{p}))$ i elemenata iz $\mathfrak{a}$.

Dokaz ove slutnje bi mogao izgledati jako slično onome u apsolutnom slučaju, tamo se koristio teorem 1.6.3 koji je, između ostalog, davao i da je za svaki $x \in \mathfrak{g}$ i $p \in q(P_\wedge(\mathfrak{g}))$ kontrakcija $\iota_x p$ sadržana u slici od α. Zato je izraz

$$x = \sum_i \iota_x p_i \otimes q_i$$

iz 1.6.3 zaista izraz obzirom na ρ-dekompoziciju.

Ono što očekujemo da vrijedi je analogon ovog rezultata u relativnom slučaju, odnosno da se na analogan način mogu prikazati svi elementi iz $\mathfrak{p} \subset C(\mathfrak{p})$ korištenjem primitivnih invarijanata $P_\wedge(\mathfrak{p})$. Konkretno, očekujemo da će kontrakcije primitivnih Cliffordovih invarijanata elementima iz $\mathfrak{p}$ biti u slici od α. Tvrdnja je provjerena na nekim konkretnim primjerima realne reduktivne grupe za koje vrijedi, ako je $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija njene Liejeve algebre i $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ Cartanova dekompozicija te Liejeve algebre, onda je $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ simetrični par takav da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija. Među takve primjere spadaju $SL(3,\mathbb{R})$ i $SL(5,\mathbb{R})$. Ovu slutnju je lakše iskazati u terminima vanjskih invarijanata: ako je $x \in \mathfrak{p}$ i $p \in P_\wedge(\mathfrak{p})$, onda je $\iota_x p \in \operatorname{im} \lambda_{\mathfrak{p}}$. Preslikavanje $\lambda_{\mathfrak{p}}$ je korišteno u 4.2 i zapravo formula za transgresiju koju smo tamo dobili bi mogla biti ključ dokaza ove tvrdnje. Iz toga bi trebala slijedili eksplicitna ρ-dekompozicija elemenata iz $\mathfrak{p}$, što bi bio važan rezultat sam po sebi, nevezano za primjenu na prethodnu slutnju. Konačno, iskažimo što očekujemo da vrijedi.

Slutnja 5.2.4. Neka je $\{p_i\}$ neka baza za primitivne invarijante $q(P_\wedge(\mathfrak{p}))$ i $\{q_i\}$ njoj dualna baza. Tada se svaki $x \in \mathfrak{p}$ može zapisati u obliku

$$x = \sum_i \iota_x p_i \otimes q_i.$$

6. PRIMJERI

6.1. $SL(3,\mathbb{R})$

Neka je $G = SL(3,\mathbb{R})$ i $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija od $\mathfrak{g}_0 = \operatorname{Lie} G$. U tom slučaju je $K = SO(3)$ maksimalna kompaktna podgrupa od G, a $\mathfrak{k}_0 = \operatorname{Lie} K = \mathfrak{so}(3)$ Liejeva algebra koja se sastoji od realnih antisimetričnih matrica. Za Cartanovu involuciju uzimamo $\vartheta(X) = -X^\tau, X \in \mathfrak{g}$. U Cartanovoj dekompoziciji $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ tada imamo $\dim \mathfrak{k} = 3$, $\dim \mathfrak{p} = 5$. $\mathfrak{k}$ je Liejeva algebra koja se sastoji od antisimetričnih matrica, a $\mathfrak{p}$ prostor koji se sastoji od simetričnih matrica nad $\mathbb{C}$. Eksplicitno, baza za $\mathfrak{g}$ s kojom radimo će biti

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_1 = \frac{1}{2}\overline{E_1},$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \frac{1}{2}\overline{E_2},$$

$$E_3 = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_3 = \frac{1}{2}\overline{E_3}.$$

Ako je $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ fundamentalna Cartanova podalgebra, onda uz navedene vektore baze imamo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \operatorname{span}\{H_1, H_2\},\\
\mathfrak{t} &= \operatorname{span}\{H_1\},\\
\mathfrak{a} &= \operatorname{span}\{H_2\}\\
\mathfrak{k} &= \operatorname{span}\{E_1, H_1, F_1\},\\
\mathfrak{p} &= \operatorname{span}\{E_2, E_3, H_2, F_2, F_3\}.
\end{aligned}$$

Prema [OV, stranica 289 i tablica 4] imamo da su eksponenti od $\mathfrak{g}$ jednaki 1 i 2 pa generatore invarijanata u simetričnoj algebri $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ treba tražiti u čistim stupnjevima 2 i 3. Računanjem se dobiju sljedeći generatori:

$$\begin{aligned}
p_2 &= E_1F_1 - \frac{1}{8}H_1^2 - E_2F_2 - E_3F_3 - \frac{1}{24}H_2^2,\\
p_3 &= -E_1^2F_2 - E_1H_1F_3 + \frac{1}{3}E_1F_1F_3 + \frac{1}{12}H_1^2H_2 + E_3H_1F_1 - 2E_2F_1^2 + \frac{2}{3}E_2H_2F_2 + 2E_2F_3^2 +\\
&\quad + E_3^2F_2 - \frac{1}{3}E_3H_2F_3 - \frac{1}{108}H_2^3.
\end{aligned}$$

Od ova dva generatora zanima nas samo p_3 jer je on u domeni transgresije, dok p_2 nije u T jer je $\mathrm{pr}_S(p_2) \neq 0$. Želimo izračunati $\mathbf{t}(p_3)$; primijetimo da će transgresija poništiti sumande

$$\frac{2}{3}E_2H_2F_2 + 2E_2F_3^2 + E_3^2F_2 - \frac{1}{3}E_3H_2F_3 - \frac{1}{108}H_2^3.$$

Tu činjenicu vidimo iz formule za transgresiju, posebno iz dokaza propozicije: jedini homogeni elementi koji neće biti poništeni transgresijom su oni koji sadrže točno jedan element baze od $\mathfrak{p}$. U slučaju p_3 to automatski znači da takvi homogeni sumandi sadrže točno dva faktora iz $\mathfrak{k}$, ne nužno različita.

U formuli za transgresiju trebamo bazu za $\mathfrak{p}$ i njoj dualnu bazu: ako za bazu uzmemo kao gore, $\{E_2, E_3, H_2, F_2, F_3\}$, onda će njoj dualna baza biti $\{2F_2, 2F_3, \frac{1}{6}H_2, 2E_2, 2E_3\}$.

Koristeći sve navedeno i formulu za transgresiju izračunamo

$$\mathbf{t}(p_3) = \frac{-4}{3}E_2 \wedge E_3 \wedge H_2 \wedge F_2 \wedge F_3.$$

Ovaj rezultat je sasvim očekivan jer je prostor primitivnih $\mathfrak{k}$-invarijanata u $\bigwedge\mathfrak{p}$ jednodimenzionalan i razapet je vektorom $E_2 \wedge E_3 \wedge H_2 \wedge F_2 \wedge F_3$, generatorom najvećeg stupnja u $\bigwedge\mathfrak{p}$. Isto tako, uočimo da je prostor transgresije T glavni ideal u $S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ generiran elementom p_3, zato je dimenzija od ${}^{T}\!/\!_{T \cdot S^+(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}}$ jednaka 1, što ovdje vidimo eksplicitno, za razliku od dokaza teorema o transgresiji.

Za generatora najvećeg stupnja u $\bigwedge \mathfrak{p}$ će uvijek vrijediti da je $\mathfrak{k}$-invarijantan, ali općenito neće vrijediti da je primitivna invarijanta kao ovdje. Jedan primjer toga možete pronaći u sljedećem primjeru, $SL(5,\mathbb{R})$. Tamo je invarijanta stupnja 14 umnožak primitivnih invarijanata stupnja 5 i 9 pa ne može biti primitivna invarijanta.

6.2. $SL(5,\mathbb{R})$

Neka je $G = SL(5,\mathbb{R})$ i $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija od $\mathfrak{g}_0 = \operatorname{Lie} G$. U tom slučaju je $K = SO(5)$ maksimalna kompaktna podgrupa od G, a $\mathfrak{k}_0 = \operatorname{Lie} K = \mathfrak{so}(5)$ Liejeva algebra koja se sastoji od realnih antisimetričnih matrica. Za Cartanovu involuciju uzimamo $\vartheta(X) = -X^\tau, X \in \mathfrak{g}$. U Cartanovoj dekompoziciji $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ tada imamo $\dim \mathfrak{k} = 10$, $\dim \mathfrak{p} = 14$. $\mathfrak{k}$ je Liejeva algebra koja se sastoji od antisimetričnih matrica, a $\mathfrak{p}$ prostor koji se sastoji od simetričnih matrica nad $\mathbb{C}$. Eksplicitno, baza za $\mathfrak{g}$ s kojom radimo će biti

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = -\frac{1}{2}\overline{E_1}, \quad E_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = -\frac{1}{2}\overline{E_1},$$

$$E_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = -\overline{E_3}, \quad E_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -1 & -i & 0 \end{bmatrix}, \quad F_4 = -\overline{E_4},$$

$$E_5 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_5 = \overline{E_5}, \quad E_6 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_6 = \overline{E_6},$$

$$E_7 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_7 = \frac{1}{2}\overline{E_7}, \quad E_8 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_8 = \frac{1}{2}\overline{E_8},$$

$$E_9 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_9 = \overline{E_9}, \quad E_{10} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{10} = \overline{E_{10}}.$$

Ako je $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ fundamentalna Cartanova podalgebra, onda uz navedene vektore baze imamo

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h} = \text{span}\{H_1, H_2, H_3, H_4\},\\
&\mathfrak{t} = \text{span}\{H_1, H_2\},\\
&\mathfrak{a} = \text{span}\{H_3, H_4\}\\
&\mathfrak{k} = \text{span}\{H_1, H_2, E_1, F_1, E_2, F_2, E_3, F_3, E_4, F_4\},\\
&\mathfrak{p} = \text{span}\{H_3, H_4, E_5, F_5, E_6, F_6, E_7, F_7, E_8, F_8, E_9, F_9, E_{10}, F_{10}\}.
\end{aligned}$$

Odaberimo pozitivan sistem korijena $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) \supset \Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$. Neka je $\mathfrak{n}$ linearna ljuska pozitivnih korijenskih vektora, a $\mathfrak{n}^-$ linearna ljuska negativnih korijenskih vektora. Tada je

- baza za $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}$ sastavljena od korijenskih vektora E_1, E_2, E_3, E_4 koji odgovaraju korijenima $(1,1), (1,-1), (1,0), (0,1)$ respektivno
- baza za $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}$ je sastavljena od korijenskih vektora $E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}$ koji odgovaraju korijenima $(2,0), (0,2), (1,1), (1,-1), (1,0), (0,1)$ respektivno

Tada će baza za $\mathfrak{n}^-$ biti $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_8, F_9, F_{10}\}$, baza dualna bazi za $\mathfrak{n}$, sastavljena od negativnih korijenskih vektora.
Neka su H^+ i H^- dualni izotropni vektori u $\mathfrak{a}$, eksplicitno

$$\begin{aligned}
H^+ &= (\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{20} i) H_3 + (-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{20} i) H_4,\\
H^- &= (\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10}}{20} i) H_3 + (-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10}}{20} i) H_4.
\end{aligned}$$

Izaberimo maksimalne izotropne dualne potprostore od $\mathfrak{p}$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}^+ &= \text{span}\{H^+, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}\},\\
\mathfrak{p}^- &= \text{span}\{H^-, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}\}.
\end{aligned}$$

Sada možemo promatrati spin modul za $\mathfrak{p}$:

$$S = \bigwedge \mathfrak{p}^+$$

Označimo li $S^+ = \bigwedge^{\text{even}} \mathfrak{p}^+$ i $S^- = \bigwedge^{\text{odd}} \mathfrak{p}^+$, onda su S^+ i S^- izomorfni ireducibilni $\mathfrak{k}$-moduli. Njihova najveća težina je $\rho_n := \rho_{\mathfrak{g}} - \rho_{\mathfrak{k}} = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ pa imamo

$$S = S^+ \oplus S^- = V_{(\frac{5}{2},\frac{3}{2})} \oplus V_{(\frac{5}{2},\frac{3}{2})}. \tag{6.1}$$

Ovdje V_λ kao i ranije označava $\mathfrak{k}$-modul najveće težine λ.
Vektori najmanje težine su 1 za S^+ i H^+ za S^-. Zato je prostor svih vektora najmanje težine u S dan sa span $\{1, H^+\}$.

Za Cliffordovu algebru $C(\mathfrak{p})$ vrijedi da je dimenzije 2^{14}, ali iz teorema 5.2.2 znamo da je dimenzija od $C(\mathfrak{p})^\mathfrak{k}$ svega 4, baza tog vektorskog prostora je $\{1, H_3, H_4, H_3H_4\}$.

Iste rezultate imamo i u vanjskoj algebri, $\dim \bigwedge \mathfrak{p} = 2^{14}$ i $\dim \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^\mathfrak{k} = 4$. Ipak, obzirom da je vanjska algebra graduirana, u ovom slučaju možemo govoriti o stupnju u gradaciji. Računom se dobije da se invarijante pojavljuju u stupnjevima $0, 5, 9$ i 14. Od njih se za bazu primitivnih invarijanata $P_\wedge(\mathfrak{p})$ mogu uzeti elementi čistog stupnja 5 i 9.

Primitivna invarijanta stupnja 5 u vanjskoj algebri dobivena je kao slika po transgresiji elementa iz $S(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$ stupnja 3. Primitivna invarijanta stupnja 9 je slika po transgresiji simetrične invarijante stupnja 5. Dovoljno je vidjeti formulu za transgresiju 4.2.2 da bismo došli do tog zaključka.

Napomena 6.2.1. Primijetimo da se u ovom primjeru primitivne invarijante pojavljuju u neparnim stupnjevima i slutnja je da to nije slučajnost. Konkretnije, u apsolutnom slučaju primitivne $\mathfrak{g}$-invarijante u $\bigwedge \mathfrak{g}$ su se pojavljivale samo u neparnim stupnjevima i slutnja je da će to biti slučaj u $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^\mathfrak{k}$ kad god imamo simetrični par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ takav da je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija.

U ovom slučaju smo se ponovno ograničili na pretpostavku o primarnosti, ali provjeravanjem na primjerima vidi se da bez te pretpostavke slutnja sigurno ne vrijedi. Konkretno, problem je što u ρ-dekompoziciji

$$E \otimes J = \operatorname{im} \alpha \otimes \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^\mathfrak{k}$$

više nemamo kao ranije $E \cap J = \mathbb{C}$ nego je presjek veći. Sjetimo se da preslikavanje α uvijek ima sliku sadržanu u parnom dijelu algebre.

6.3. $SL(2n+1,\mathbb{R})$

Neka je sada $G = SL(2n+1,\mathbb{R})$ i $\mathfrak{g}$ kompleksifikacija njene Liejeve algebre. Slično kao u slučaju $SL(5,\mathbb{R})$ imamo: označimo sa $K = SO(2n+1)$ maksimalnu kompaktnu podgrupu i neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ Cartanova dekompozicija. Vrijedi $\dim \mathfrak{k} = n(2n+1)$, $\dim \mathfrak{p} = n(2n+3)$ i primijetimo da je parnost ovih dimenzija točno parnost od n. Neka je $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + \mathfrak{a}$ fundamentalna Cartanova podalgebra.

Izaberimo sisteme pozitivnih korijena $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) \supset \Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ i označimo sa $\mathfrak{n}^+$ linearnu ljusku pozitivnih korijenskih vektora, a sa $\mathfrak{n}^-$ linearnu ljusku negativnih korijenskih vektora. Označimo sa $E_1,\ldots,E_k$ bazu za $\mathfrak{n}^+ \cap \mathfrak{p}$ i sa F_i bazu za $\mathfrak{n}^- \cap \mathfrak{p}$ dualnu bazi E_i, odnosno $B(E_i,F_j) = \delta_{ij}$, dodatno vektori su izotropni pa je $B(E_i,E_j) = B(F_i,F_j) = 0, \forall i,j$.

Neka su vektori baze za $\mathfrak{a}$ odabrani ovako: ako je $\dim \mathfrak{p}$ neparna (pa je onda i $\dim \mathfrak{a}$ neparna), uzmimo jedan istaknuti vektor $H_0 \in \mathfrak{a}$ dualan sam sebi i promatramo direktni komplement njegove ljuske u $\mathfrak{a}$, u slučaju parne dimenzije promatramo čitav $\mathfrak{a}$. Sada možemo odabrati maksimalne dualne izotropne potprostore, označimo ih s $\mathfrak{a}^+$ i $\mathfrak{a}^-$ i označimo baze sa $\{H_1^+,\ldots,H_l^+\}$ i $\{H_1^-,\ldots H_l^-\}$ respektivno. Označimo li $\mathfrak{p}^+ = \operatorname{span}\{E_1,\ldots,E_k,H_1^+,\ldots,H_l^+\}$, $\mathfrak{p}^- = \operatorname{span}\{F_1,\ldots,F_k,H_1^-,\ldots,H_l^-\}$, onda je $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ ako je $\dim \mathfrak{p}$ parna, u slučaju neparne dimenzije je $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^- \oplus span\{H_0\}$.

Označimo sa $S = \bigwedge \mathfrak{p}^+$ spin modul za $\mathfrak{p}$. Ako sa λ označimo njegovu najveću težinu, onda S možemo rastaviti kao sumu izomorfnih ireducibilnih $\mathfrak{k}$-modula

$$S = 2^{\lfloor \frac{1}{2} \dim \mathfrak{a} \rfloor} V_\lambda. \tag{6.2}$$

U slučaju da je $\dim \mathfrak{p}$ neparna, dobivamo istu stvar jer ako gledamo kako $\mathfrak{t}$ djeluje na $\bigwedge p^+$, u izrazu za $\alpha(\mathfrak{t})$ će sumand $[X,H_0]H_0$ nestati jer X i H_0 komutiraju.

Pogledajmo sada što možemo reći o $\mathfrak{k}$-invarijantama. Ranije smo vidjeli da za $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2n+1,\mathbb{C})$ i $\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(2n+1)$ vrijedi $\dim \mathfrak{p} = n\cdot(2n+3)$. Isto tako, imamo da je $\dim \mathfrak{a} = \operatorname{rk} \mathfrak{g} - \operatorname{rk} \mathfrak{k} = n$. Slijedi da je

$$\dim C(\mathfrak{p}) = 2^{n(2n+3)}, \quad \dim C(\mathfrak{p})^{\mathfrak{k}} = \dim \left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}} = 2^n.$$

Vidjeli smo kod dokaza teorema o transgresiji da u ovom slučaju $\left(\bigwedge \mathfrak{p}\right)^{\mathfrak{k}}$ ima strukturu vanjske algebre nad $P_\wedge(\mathfrak{p})$ jer je $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija. U tablici 1 u [Pan] vidimo i stupnjeve u kojima se pojavljuju primitivne invarijante, a ima ih $n = \dim \mathfrak{a}$. Stupnjevi su

$$5, 9, \ldots, 4n+1.$$

Gledajući formulu za transgresiju vidimo da ako je primitivna invarijanta $p \in P_{\wedge}(\mathfrak{p})$ stupnja $4i+1$, onda ona inverzom transgresije odgovara elementu stupnja $2i+1$ u simetričnoj algebri.

ZAKLJUČAK

Ovaj rad donosi nove rezultate o strukturi Cliffordove algebre pridružene realnoj reduktivnoj grupi u slučaju kada je $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ simetrični par takav da je $Spin_{\mathrm{ad}}$ primarna reprezentacija. U ovom slučaju daje se eksplicitna formula za transgresiju na relativnoj Weilovoj algebri. Dalje, dokazuje se teorem o transgresiji koji daje jezgru i sliku transgresije. Konačno, pokazuje se da je restrikcija Harish-Chandrinog preslikavanja $C(\mathfrak{p}) \to C(\mathfrak{a})$ na $\mathfrak{k}$-invarijante izomorfizam algebri.

Mogući nastavak istraživanja je eksplicitni prikaz elemenata od $\mathfrak{p} \subset C(\mathfrak{p})$ u skladu s ρ-dekompozicijom. U tome će pomoći eksplicitna formula za transgresiju u relativnom slučaju koja je navedena kao jedan od rezultata ovog rada.

Slutnja je da Harish-Chandrin izomorfizam uspostavlja bijekciju između primitivnih invarijanata $P_{\wedge}(\mathfrak{p})$ i elemenata iz $\mathfrak{a} \subset C(\mathfrak{a})$. Dodatnim proučavanjem ρ-dekompozicije i posebno ponašanja primitivnih invarijanata u odnosu na kontrakcije mogla bi se dokazati navedena slutnja.

U slučaju kada $\mathrm{Spin}_{\mathrm{ad}}$ nije primarna reprezentacija struktura je složenija pa se nema smisla nadati analognim rezultatima. Jedan od razloga je što Harish-Chandrino preslikavanje nije jedinstveno, točnije ima ih $|W^1|$ različitih. Ipak, u tom slučaju je moguće promatrati neke drugačije dekompozicije.

Jedan mogući nastavak istraživanja, jednom kada se provjere ranije navedene slutnje, je provjera Kostantove slutnje o Cliffordovoj algebri u relativnom slučaju. Za dokaz slutnje u apsolutnom slučaju zaslužni su Alekseev i Moreau u [AM] i Joseph u [Jos]. Slutnja kaže da se dvije naizgled različite filtracije na Cartanovoj podalgebri $\mathfrak{h}$ poklapaju. Prva filtracija potječe od Harish-Chandrinog izomorfizma $\mathbf{hc} : C(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to C(\mathfrak{h})$, odnosno slike primitivnih invarijanata, a druga od identifikacije $\check{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}^*$ i adjungiranog djelovanja glavne $\mathfrak{sl}_2$-trojke. Ovdje $\check{\mathfrak{h}}$ označava Cartanovu podalgebru od $\check{\mathfrak{g}}$, koja odgovara dualnom sistemu korijena. Ideja je definirati analogne filtracije na $\mathfrak{a}$ i provjeriti jesu li jednake.

Bibliografija

[AM] A. Alekseev and A. Moreau, *On the Kostant conjecture for Clifford algebras*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), no. 1-2, 13–18.

[AMW] A. Alekseev, E. Meinrenken, and C. Woodward, *Group-valued equivariant localization*, Invent. Math. **140** (2000), no. 2, 327–350.

[Baz] Y. Bazlov, *The Harish-Chandra isomorphism for Clifford algebras*, `arXiv:0812.2059 [math.RT]`, 2008.

[Car1] H. Cartan, *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*, Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris, 1951, pp. 57–71.

[Car2] H. Cartan, *Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*, Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris, 1951, pp. 15–27.

[Che1] S.-J. Cheng, *Differentiably simple Lie superalgebras and representations of semisimple Lie superalgebras*, J. Algebra **173** (1995), no. 1, 1–43.

[Che2] C. Chevalley, *The Betti numbers of the exceptional simple Lie groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1952, pp. 21–24.

[Cli] W. K. Clifford, *Mathematical papers*, Chelsea Publishing Co., New York, 1968, Edited by Robert Tucker, with an introduction by H. J. Stephen Smith.

[CS] S. S. Chern and J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Ann. of Math. (2) **99** (1974), 48–69.

[DK] A. Diek and R. Kantowski, *Some Clifford algebra history*, Clifford algebras and spinor structures, Math. Appl., vol. 321, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, pp. 3–12.

[Dyn] E. B. Dynkin, *Topological characteristics of homomorphisms of compact Lie groups*, Mat. Sb. N.S. **35(77)** (1954), 129–173.

[GHV] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone, *Connections, curvature, and cohomology*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 47-III, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1976, Volume III: Cohomology of principal bundles and homogeneous spaces.

[GS] V. W. Guillemin and S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Mathematics Past and Present, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Han] G. Han, *A class of primary representations associated with symmetric pairs and restricted root systems*, Pacific J. Math. **225** (2006), no. 1, 33–51.

[HC] Harish-Chandra, *On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 28–96.

[HP] J.-S. Huang and P. Pandžić, *Dirac operators in representation theory*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.

[Hum1] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

[Hum2] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Jos] A. Joseph, *Zhelobenko invariants, Bernstein-Gelfand-Gelfand operators and the analogue Kostant Clifford algebra conjecture*, Transform. Groups **17** (2012), no. 3, 781–821.

[Kna] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, Progress in Mathematics, vol. 140, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[Kos1] B. Kostant, *Clifford algebra analogue of the Hopf-Koszul-Samelson theorem, the ρ-decomposition $C(\mathfrak{g}) = \operatorname{End} V_\rho \otimes C(P)$, and the $\mathfrak{g}$-module structure of $\bigwedge \mathfrak{g}$*, Adv. Math. **125** (1997), no. 2, 275–350.

[Kos2] J.-L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 65–127.

[Ler] J. Leray, *Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espaces fibrés principaux*, Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris, 1951, pp. 101–115.

[Lou] P. Lounesto, *Clifford algebras and spinors*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 239, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Mei] E. Meinrenken, *Clifford algebras and Lie theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 58, Springer, Heidelberg, 2013.

[OV] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1990, Translated from the Russian and with a preface by D. A. Leites.

[Pan] D. I. Panyushev, *The exterior algebra and "spin" of an orthogonal $\mathfrak{g}$-module*, Transform. Groups **6** (2001), no. 4, 371–396.

[Ree] M. Reeder, *Exterior powers of the adjoint representation*, Canad. J. Math. **49** (1997), no. 1, 133–159.

[Wal] N. R. Wallach, *Real reductive groups. II*, Pure and Applied Mathematics, vol. 132, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

Životopis

Karmen Grizelj rođena je dana 12.7.1991. u Zagrebu. U Zagrebu pohađa Osnovnu školu Josipa Jurja Strossmayera od 1997. do 2005. godine. 2005. godine upisuje opću gimnaziju, II gimnaziju u Zagrebu. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjeluje na brojnim natjecanjima. Od državnih natjecanja sudjeluje na onima iz matematike, kemije, fizike, latinskog i grčkog jezika. 2007. godine dobiva pohvalu Povjerenstva, a 2008. godine treću nagradu na natjecanjima iz matematike.

Gimnaziju završava 2009. godine i tada upisuje Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Studij završava 2012. godine i nastavlja obrazovanje upisom Diplomskog studija Teorijske matematike na istom fakultetu. Tijekom tog studija radi kao mentorica za matematička natjecanja učenicima II gimnazije s kojima postiže zavidne rezultate na natjecanjima.

Diplomski studij završava 2014. godine obranom diplomskog rada magna cum laude s naslovom "Reprezentacije poluprostih Liejevih algebri" pod mentorstvom prof. dr. sc. Pavla Pandžića. Iste godine upisuje Doktorski studij Matematike Sveučilišta u Zagrebu. Od upisa do danas sudjelovala je na 14 znanstvenih konferencija, od toga je na njih 5 održala predavanje. Konferencije su se održavale u gradovima: Batumi (Gruzija), Dubrovnik, Klosterneuburg (Austrija), Metz (Francuska), Salt Lake City (Utah, SAD) Srní (Češka) i Zagreb.

Rezultat posjeta Batumiju 2021. je objavljivanje u "Lecture notes: Algebra, Topology and Analysis: C^* and A^∞ algebras" bilješki s naslovom "Harish-Chandra map and primitive invariants" (2023.).

Od 2014. godine radi kao asistentica na Fakultetu kemijskog inženjerstva i tehnologije, Prirodoslovno-matematičkom fakultetu i Fakultetu strojarstva i brodogradnje.