Baricentrične koordinate - primjena na geometriju trokuta

Klarin, Tina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tina Klarin

BARICENTRIČNE KOORDINATE - PRIMJENA NA GEOMETRIJU TROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, veljača, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

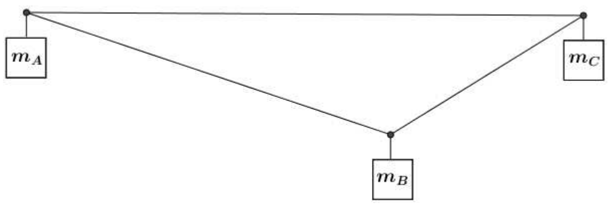
Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Iz samog je naslova jasno da ćemo se u ovom radu baviti temom iz analitičke geometrije. Analitička geometrija je grana matematike u kojoj se geometrijski problemi opisuju i rješavaju algebarskim metodama. U radu ćemo se upoznati s baricentričnim koordinatama koje su manje poznati, ali ne i manje korisni koordinatni prikaz točaka u ravnini. Baricentrične koordinate kao vrstu homogenih koordinata prvi je predstavio njemački matematičar August Möbius 1827. godine u svom dijelu *Der barycentrische Calcul*. Radi se o jednom od važnijih dijela za projektivnu geometriju koja se tada počela razvijati te su upravo homogene koordinate koordinate koje se najčešće koriste za koordinatizaciju projektivne ravnine iz razloga što se one ne određuju samo realnim točkama već i beskonačno dalekim točkama ravnine.
Za razliku od nama dobro poznatog Kartezijevog koordinatnog sustava, u sustavu homogenih koordinata točki dvodimenzionalnog prostora pridružujemo trojku brojeva pri čemu taj koordinatni prikaz nije jedinstven. Naime ako je točki pridružena trojka (x, y, z) za svaki realni broj λ različit od nule trojka $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ predstavlja istu tu točku. Opisano svojstvo naziva se homogenost. Primijetimo da je tako svaka točka prostora određena klasom uređenih trojki pa se uvodi zapis pomoću jednog predstavnika te klase oblika $(x : y : z)$. Zapis pomoću dvotočja umjesto zareza u uređenoj trojki asocira na razmjer u kojem se sve trojke koje predstavljaju istu točku odnose.
Möbius u izvornoj definiciji baricentričnih koordinata proizvoljnu točku prostora opisuje



Slika 0.1: Möbiusov model

kao težište fiksnog trokuta s masama smještenim u vrhovima tog trokuta. Pretpostavimo da na vrhove fiksnog trokuta ABC postavimo mase m_A, m_B i m_C. Tada točki težišta tog

sustava pridružujemo uređenu trojku (m_A, m_B, m_C).
Ovakav model možemo povezati s principom poluge. Prvi koji je strogo matematički opisao i formulirao princip poluge bio je starogrčki matematičar i fizičar Arhimed. Prema principu poluge poluga je u ravnoteži kada je umnožak sile i njezina kraka s jedne strane oslonca jednak umnošku sile i njezina kraka s druge strane oslonca poluge. Ako na krajeve poluge objesimo mase m_A i m_B, točki u kojoj se nalazi oslonac poluge pridružujemo uređeni par (m_A, m_B). Pomnožimo li iznose masa skalarom različitim od nule položaj oslonca se neće promijeniti. Analogno vrijedi i kod trokuta kojume se središte mase neće promjeniti ako iznose masa u njegovim vrhovima pomnožimo s nenul skalarom. Tako vrijedi da je $(m_A, m_B, m_C) = (k \cdot m_A, k \cdot m_B, k \cdot m_C)$ pri čemu je $k \neq 0$ pa su iz tog razloga ovako definirane koordinate zaista vrsta homogenih koordinata. Točkama unutar trokuta odgovaraju trojke pozitivnih masa, dok su točke izvan trokuta opisane dopuštanjem negativnih masa.
Kao što to najčešće biva nove ideje nisu lako prihvaćene. Tako je i Möbius naišao na mnoge kritike svojih suvremenika kao što je Cauchy koji je u svojoj recenziji napisao kako autor mora biti u potpunosti siguran da radi veliki korak u znanosti prije nego što odluči predstaviti novu teoriju s puno novih pojmova i izazova [6]. U daljnjem tekstu rada nastojat ćemo prikazati neke od prednosti baricentričnih koordinata u geometriji trokuta. U prvom poglavlju rada baricentrične koordinate definirat ćemo strogo matematički, najprije pomoću vektorskog računa, a zatim pomoću orijentiranih površina. Definirat ćemo baricentrični koordinatni sustav te izvesti jednadžbu pravca i kružnice u njemu. U drugom poglavlju primijeniti ćemo baricentrične koordinate u dokazu nekih od teorema geometrije trokuta, izvesti koordinate karakterističnih točaka trokuta te izotomičnih i izogonalnih točaka. U trećem poglavlju komentirat ćemo prednosti i nedostatke baricentričnih koordinata u koordinatnoj metodi rješavanja zadataka te ćemo riješiti nekoliko odabranih zadataka s većih matematičkih natjecanja.
Sve slike u ovom radu izrađene su u programu dinamičke geometrije *GeoGebra*.
Zahvaljujem svojoj mentorici, doc. dr. sc. Mei Bombardelli, na trudu, savjetima i razumijevanju tijekom izrade ovog rada.

Poglavlje 1

Baricentrične koordinate

1.1 Baricentrične koordinate

Neka su A, B i C tri nekolinearne točke. Skup vektora $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ je linearno nezavisan te se svaki vektor ravnine može prikazati kao linearna kombinacija vektora tog skupa. Neka je točka P proizvoljna točka ravnine ABC. Tada postoje realni brojevi y i z takvi da je

$$\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}.$$

Nadalje, neka je O točka ravnine ABC. Tada je $\left\{O; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ koordinatni sustav s ishodištem O. Prema pravilu zbrajanja radijus-vektora imamo da je

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = y\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + z\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right),$$

odnosno,

$$\overrightarrow{OP} = (1 - y - z)\,\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Uvedimo sada da je $x = 1 - y - z$ pa je

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Budući da je ishodište O proizvoljno odabrana točka ravnine, imamo da brojevi x, y i z ne ovise o izboru točke O, odnosno, ovise samo o točkama A, B, C i P. Time zaključujemo da su za svaku točku P ravnine ABC na jedinstveni način određeni realni brojevi x, y i z takvi da je $x + y + z = 1$ i

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

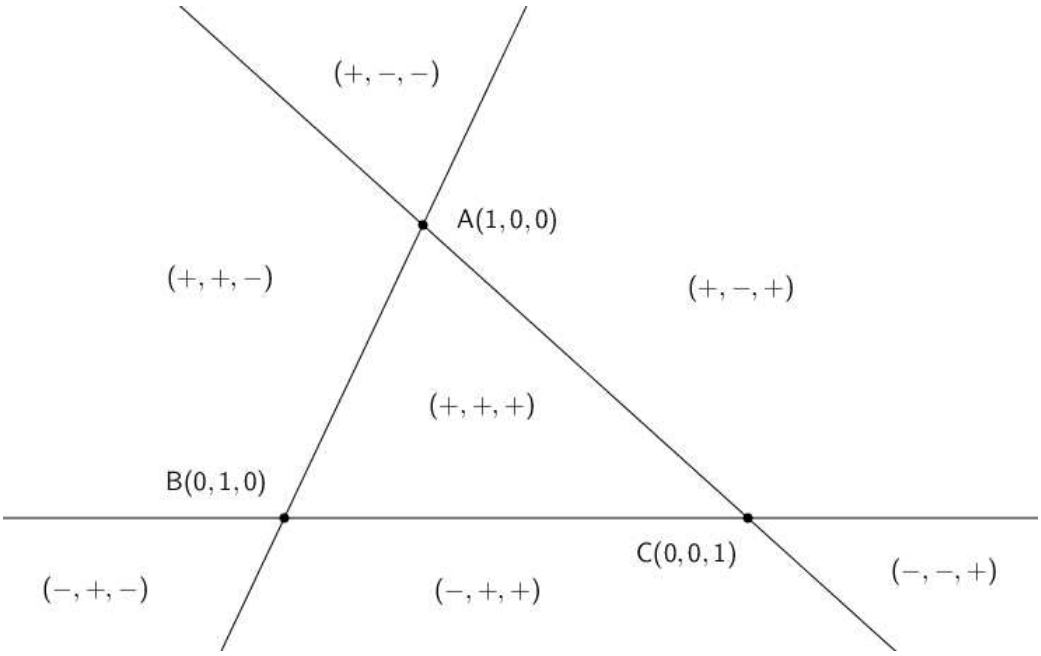
neovisno o izboru ishodišta O. Vrijedi i obrat, odonosno, svaka trojka realnih brojeva x, y i z čiji je zbroj 1 određuju jedinstvenu točku P ravnine ABC takvu da je

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Skalare x, y i z nazivamo **apsolutne ili normalizirane baricentrične koordinate** točke P u odnosu na uređenu trojku točaka (A, B, C). Točku $P(x, y, z)$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju

$$P = xA + yB + zC.$$

Očito je $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ i $C(0, 0, 1)$. Potpuni dokaz postojanja i jedinstvenosti apsolutnih baricentričnih koordinata nalazi se u [7]. Nadalje, lako se vidi da sve točke pravca BC imaju x koordinatu 0. Također, sve točke koje se nalaze s iste strane pravca BC kao i točka A imaju pozitivnu x koordinatu dok sve točke koje se nalaze s druge strane pravca BC imaju negativnu x koordinatu. Analogno vrijedi i za y i z koordinate.



Slika 1.1: Dijagram predznaka apsolutnih baricentričnih koordinata

Prema geometrijskoj interpretaciji modula vektorskog umnoška [5] nekolinearnih vektora imamo da je

$$P(PBC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP}\right\|.$$

Uočimo da jednakost vrijedi i u slučaju kad su vektori kolinearni budući da je vektorski umnožak tada jednak $\overrightarrow{0}$. Nadalje imamo da je

$$P(PBC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC} \times \left(x\overrightarrow{BA} + z\overrightarrow{BC}\right)\right\|.$$

Koristeći distributivnost vektorskog umnoška prema zbrajanju imamo da je

$$P(PBC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC} \times x\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \times z\overrightarrow{BC}\right\|.$$

Kako su vektori $\overrightarrow{BC}$ i $z\overrightarrow{BC}$ kolinearni njihov je vektorski umnožak $\overrightarrow{0}$ pa je

$$P(PBC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC} \times x\overrightarrow{BA}\right\|.$$

Primjenom kvaziasocijativnosti vektorskog umnoška dobivamo da je

$$P(PBC) = \frac{1}{2}\left\|x\left(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right)\right\|,$$

odnosno,

$$P(PBC) = \frac{1}{2}|x|\left\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\right\|.$$

Sada prepoznajemo formulu za površinu trokuta ABC i imamo

$$P(PBC) = |x|\, P(ABC).$$

Time smo dobili apsolutnu vrijednost koordinate x

$$|x| = \frac{P(PBC)}{P(ABC)}.$$

Analogno dobivamo

$$|y| = \frac{P(APC)}{P(ABC)} \quad \text{i} \quad |z| = \frac{P(ABP)}{P(ABC)}.$$

Definirajmo sada pojam orijentirane površine trokuta. Kažemo da je trokut pozitivno orijentiran ukoliko su mu vrhovi postavljeni obrnuto od smjera kazaljke na satu. Orijentirana površina trokuta je pozitivna ako je trokut pozitivno orijentiran, 0 ako je trokut degeneriran te manja od 0 ako je trokut negativno orijentiran. Za sada ćemo pretpostaviti da je trokut ABC pozitivno orijentiran te je tako njegova orijentirana površina strogo pozitivna. Sada možemo iskoristiti ranije opisanu vezu predznaka pojedine koordinate točke P s obzirom na položaj točke u odnosu na trokut ABC. Ukoliko se točka P nalazi na pravcu BC njena x koordinata je 0, a trokut PBC je degeneriran te je njegova površina također jednaka

0. Ako se točka P nalazi s iste strane pravca BC kao i vrh A njena x koordinata je pozitivna, a trokut PBC je pozitivno orijentiran pa je njegova orijentirana površina pozitivna. Konačno kada se točka P i vrh A nalaze s različitih strana pravca BC, x koordinata točke je negativna, a trokut PBC je negativno orijentiran te je njegova orijentirana površina negativna.
Iz toga možemo zaključiti da je

$$x = \frac{P(PBC)}{P(ABC)},$$

gdje su $P(PBC)$ i $P(ABC)$ orijentirane površine trokuta. Analogno vrijedi i za koordinate y i z. U radu nećemo uvoditi posebnu oznaku već, ako nije naglašeno drugačije, podrazumjevamo da se radi o orijentiranoj površini. Prema tome imamo da je

$$P(x, y, z) = \left(\frac{P(PBC)}{P(ABC)}, \frac{P(APC)}{P(ABC)}, \frac{P(ABP)}{P(ABC)}\right).$$

Definicija 1.1.1. *Kažemo da točka P u ravnini trokuta ABC ima baricentrične koordinate x, y i z ako je*

$$x : y : z = P(PBC) : P(APC) : P(ABP)$$

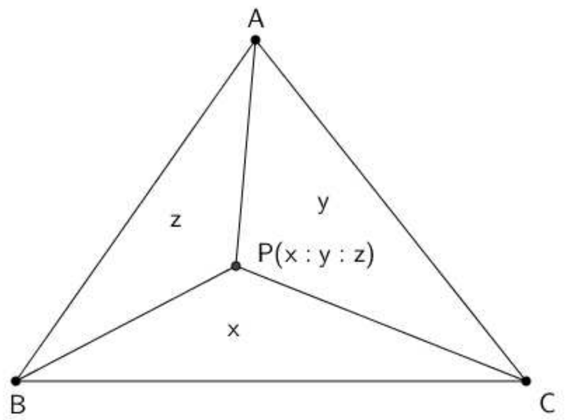
gdje su $P(PBC)$, $P(APC)$ i $P(ABP)$ orijentirane površine. Pišemo $P(x : y : z)$.

Referentni sustav baricentričnog koordinatnog sustava je trokut koji nazivamo **referentni trokut**. Kao pozitivnu orijetaciju trokuta u baricentričnom koordinatnom sustavu uzimamo orijentaciju referentnog trokuta neovisno o tome jesu li njegovi vrhovi postavljeni obrnuto od smjera kazaljke na satu ili ne. Time je orijentirana površina referentnog trokuta uvijek pozitivna. U ovom radu referentni trokuta bit će trokut ABC, osim u slučajevima kada je naglašeno drugačije. Također ćemo koristit uobičajene oznake za duljine stranica i mjere kutova. Duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ ćemo redom označiti s a, b i c te mjere unutarnjih kutova pri vrhu A, B, C redom α, β, γ.
Ako je $x + y + z = 1$ kažemo da su koordinate normalizirane i to su upravo ranije vektorski opisane apsolutne baricentrične koordinate i pišemo $P(x, y, z)$. Ako je $x + y + z \neq 1$ kažemo da su to relativne baricentrične koordinate te je

$$P(x : y : z) = \left(\frac{x}{x + y + z}, \frac{y}{x + y + z}, \frac{z}{x + y + z}\right).$$

Primijetimo da je postupak normalizacije koordinata vrlo jednostavan, samo sve koordinate podijelimo njihovim zbrojem. Iz definicije 1.1.1 je očito da je jedan od mogućih koordinatnih prikaza svake točke ravnine

$$P\Big(P(PBC) : P(APC) : P(ABP)\Big).$$



Slika 1.2: Veza orijentiranih površina i baricentričnih koordinata

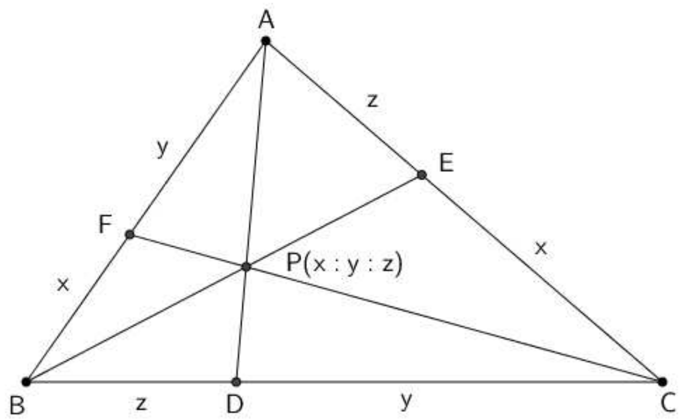
U sljedećem teoremu, kao i u daljnjem tekstu rada, koristit ćemo orijentirane duljine i njihove omjere. Neka je točka D proizvoljna točka pravca BC. Dužine $\overline{BD}$ i $\overline{DC}$, ovisno o položaju točke D, mogu biti iste ili suprotne orijentacije. Ukoliko su dužine $\overline{BD}$ i $\overline{DC}$ iste orijentacije, odnosno, ako se točka D nalazi na dužini $\overline{BC}$, omjer njihovih orijentiranih duljina biti će pozitivan $BD : DC > 0$ Kada su dužine $\overline{BD}$ i $\overline{DC}$ suprotnih orijentacija, odnosno, kada se točka D ne nalazi na dužini $\overline{BC}$ omjer njihovih orijentiranih duljina biti će negativan $BD : DC < 0$. Ako se točke B i D, podudaraju omjer tih orijentiranih duljina je 0. Primijetimo da za niti jednu realnu točku D pravca $\overline{BC}$ nije istina da je $BD : DC = -1$ (da su suprotnih orijentacija i jednakih duljina), ali taj omjer vrijedi kada je D beskonačno daleka točka pravca BC.

Teorem 1.1.2. *Dan je trokut ABC. Neka je točka P proizvoljna točka ravnine te neka pravci AP, BP i CP redom sijeku pravce BC, CA, AB u točkama D, E i F. Tada za baricentrične koordinate točke $P(x : y : z)$ u ravnini trokuta ABC vrijedi da je*

$$AF : FB = y : x, \; BD : DC = z : y, \; CE : EA = x : z.$$

Dokaz. Neka je $P(x : y : z)$ te neka pravci AP, BP, CP redom sijeku pravce BC, CA, AB u točkama D, E i F. Dovoljno je dokazati $BD : DC = z : y$. Preostali razmjeri dokazuju se analogno.
Kako trokuti ABD i ABP imaju zajedničku visinu iz vrha B, njihove orijentirane površine se odnose kao orijentirane duljine tom vrhu nasuprotnih stranica pa imamo da je

$$P(ABD) : P(ABP) = AD : AP.$$



Slika 1.3: Veza baricentričnih koordinata i orijentiranih duljina

Analogno vrijedi i za trokute ADC i APC gdje imamo da je

$$P(ADC) : P(APC) = AD : AP.$$

Slično za ADC i ABD

$$P(ADC) : P(ABD) = CD : DB.$$

Jednakost desnih strana jednakosti povlači jednakost lijevih, stoga imamo da je

$$P(ABD) : P(ABP) = P(ADC) : P(APC)$$

odnosno,

$$P(APC) : P(ABP) = P(ADC) : P(ABD).$$

I konačno dobivamo da je

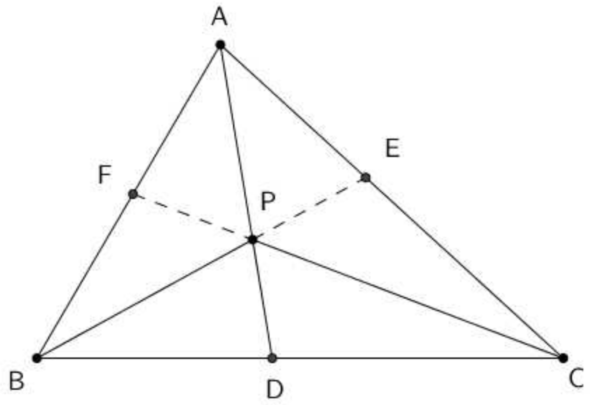
$$P(APC) : P(ABP) = CD : DB$$

te primjenom definicije imamo da je

$$y : z = CD : DB.$$

□

Sljedeći korisni teorem inačica je van Aubelovog teorema o trokutu. Originalni iskaz teorema glasi



Slika 1.4: Van Aubelov teorem

Teorem 1.1.3. ***(Van Aubelov teorem)*** *Neka su D, E i F točke na pravcima BC, CA i AB, tim redom, takve da se pravci AD, BE i CF sijeku u točki P. Tada je*

$$\frac{|AP|}{|DP|} = \frac{|AF|}{|BF|} + \frac{|AE|}{|CE|}.$$

Van Aubelov teorem nećemo dokazivati u njegovom originalnom iskazu već ćemo najprije na njegovu tvrdnju primijeniti definiciju baricentričnih koordinata 1.1.1 te dati alternativni iskaz te njegov dokaz.
Neka je točka P zadana svojim koordinatnim prikazom $(x : y : z)$. Prema teoremu 1.1.2 imamo da je

$$\frac{y}{x} = \frac{AF}{FB} \text{ i } \frac{z}{x} = \frac{AE}{EC}.$$

Uvrstimo li to u jednakost iz teorema 1.1.3 dobivamo

$$\frac{AP}{PD} = \frac{y+z}{x}.$$

Teorem 1.1.4. *Neka je dan trokut ABC te neka su D, E i F redom točke na pravcima BC, AC i AB takve da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki P sa baricentričnim koordinatama $(x : y : z)$. Tada vrijedi da je*

$$\frac{AP}{PD} = \frac{y+z}{x}, \quad \frac{BP}{PE} = \frac{x+z}{y} \quad i \quad \frac{CP}{PF} = \frac{x+y}{z}.$$

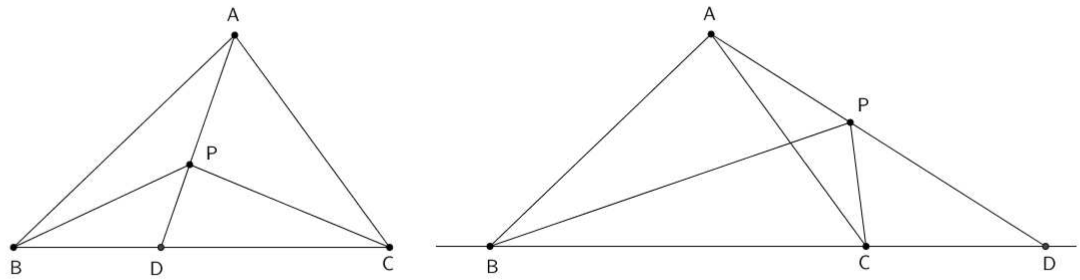
Dokaz. Neka je $P(x : y : z)$. Zbog simetričnosti izraza dovoljno je dokazati prvu relaciju, a ostale se dokazuju analogno.

Kako trokuti ABP i PBD imaju zajedničku visinu iz vrha B, omjer njihovih orijentiranih površina jednak je omjeru orijentiranih duljina tom vrhu nasuprotnih stranica, odnosno, imamo da je

$$\frac{AP}{PD} = \frac{P(ABP)}{P(PBD)}.$$

Sasvim analogno promatrajući trokute APC i PDC dobivamo da je

$$\frac{AP}{PD} = \frac{P(APC)}{P(PDC)}.$$



Slika 1.5: Teorem 1.1.4

Prema tome imamo da je

$$\frac{AP}{PD} = \frac{P(ABP) + P(APC)}{P(PBD) + P(PDC)}.$$

Ako se točka D nalazi na stranici $\overline{BC}$ trokuta (slika 1.5 lijevo), onda se je trokut PBC sastavljen od nepreklapajućih trokuta PBD i PDC pa je $P(PBD) + P(PDC) = P(PBC)$. U slučaju kada se točka D ne nalazi na stranici $\overline{BC}$ (slika 1.5 desno) trokuti PBD i PDC imaju suprotne orijentacije te za njihove orijentirane površine također vrijedi jednakost $P(PBD) + P(PDC) = P(PBC)$. Iskoristimo li to u nazivniku

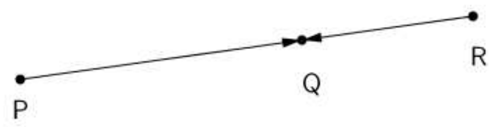
$$\frac{AP}{PD} = \frac{P(ABP) + P(APC)}{P(PBC)}.$$

Iz definicije baricentričkih koordinata te njihove homogenosti slijedi

$$\frac{AP}{PD} = \frac{y+z}{x}$$

što smo i trebali dokazati. $\square$

U ovom trenutku možemo se na tren osvrnuti na Möbiusovu originalnu definiciju baricentričnih koordinata točke kao težišta trokuta s masama x, y i z smještenim u vrhovima trokuta i povezati treorem 1.1.4 s principom poluge. Kako je prema principu poluge točka $D(0 : y : z)$ težište dužine $\overline{BC}$, znamo da će se težište trokuta ABC nalaziti negdje na pravcu AD. Primijenimo li na dužinu $\overline{AD}$ princip poluge tako da točku D gledamo s masom $y + z$ dobivamo da će težište biti točka P takva da je $AP : PD = (y + z) : x$ što je u skladu s teoremom 1.1.4.



Slika 1.6: Kolinearni vektori

Teorem 1.1.5. *Neka su $P(x_1, y_1, z_1)$ i $R(x_2, y_2, z_2)$ točke zadane svojim apsolutnim baricentričnim koordinatama te neka je točka Q takva da je $\overrightarrow{PQ} = \lambda\,\overrightarrow{RQ}$ gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je*

$$Q = \left(\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}\right)$$

odnosno

$$Q = \Big((x_1 - \lambda x_2) : (y_1 - \lambda y_2) : (z_1 - \lambda z_2)\Big).$$

Dokaz teorema slijedi prema [9].

Dokaz. Neka su P, Q i R tri kolinearne točke. Tada postoji realni broj λ takav da je

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda\,\overrightarrow{RQ}.$$

Neka je O točka ravnine. Prema pravilu zbrajanja vektora vrijedi

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \lambda\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}\right),$$

a odavde slijedi najprije

$$(1 - \lambda)\,\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \lambda\overrightarrow{OR}$$

i zatim

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{1 - \lambda}\overrightarrow{OP} - \frac{\lambda}{1 - \lambda}\overrightarrow{OR}.$$

Kako baricentrične koordinate ne ovise o izboru ishodišta, točku Q možemo zapisati kao linearnu kombinaciju točaka P i R

$$Q = \frac{P - \lambda R}{1 - \lambda}. \tag{1.1}$$

□

Primjer 1.1.6. *Određivanje baricentričnih koordinata polovišta stranica referentnog trokuta.*

Rješenje: Neka su P_a, P_b i P_c redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Imamo da je

$$\overrightarrow{BP_a} = -\overrightarrow{CP_a}.$$

Prema formuli (1.1) za $\lambda = -1$ imamo da je

$$P_a = \frac{B + C}{2},$$

odnosno, apsolutne baricentrične koordinate polovišta stranice $\overline{BC}$ su

$$P_a = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

pa je

$$P_a = (0 : 1 : 1)\,.$$

Analogno dobivamo $P_b = (1 : 0 : 1)$ i $P_c = (1 : 1 : 0)$.

□

Primjer 1.1.7. *Koordinate točaka na pravcima određenim vrhovima trokuta.*

Rješenje: Neka je točka D realna točka pravca BC. Trokut DBC je degeneriran s površinom 0 pa je x koordinata točke D također 0. Znamo da za apsolutne baricentrične koordinate vrijedi da je $x + y + z = 1$ iz čega slijedi da je $z = 1 - y$ tj. $D(0, y, 1 - y)$. Analogno vrijedi i za točke E i F na pravcima CA i AB. Općenito, sve točke pravca BC imaju baricentrične koordinate $(0 : d : 1 - d)$, točke pravca CA $(e : 0 : 1 - e)$,a točke pravca AB $(1 - f : f : 0)$ gdje su d, e, $f \neq 0$.

□

Beskonačno daleka točka

Kao što smo spomenuli u uvodu, baricentrične koordinate možemo pridružiti i beskonačno dalekim točkama ravnine. Iz vektorskog računa na početku ovog poglavlja možemo zaključiti da za apsolutne baricentrične koordinate svih realnih točaka vrijedi da je $x+y+z=1$, odnosno, općenito za baricentrične koordinate realnih točaka da je $x+y+z \neq 0$. Beskonačno dalekim točkama pridružujemo koordinate za koje je $x+y+z=0$. Koordinate beskonačno daleke točke ne mogu se normalizirati.

Primjer 1.1.8. *Koordinate beskonačno dalekih točaka pravaca određenih vrhovima referentnog trokuta.*

Rješenje:

$$AF : FB = y : x, CC : CA = x : z$$

Neka je točka D beskonačno daleka točka pravca BC. Znamo da za beskonačno daleku točku pravca BC vrijedi $z : y = BD : DC = -1$. Nadalje pravac BD siječe pravac CA u točki C pa je

$$x : z = CC : CA = 0$$

tj. imamo da je x koordinata 0. Stoga imamo da je $D(0 : 1 : -1)$. Analogno dobivamo da je točka $E(-1 : 0 : 1)$ beskonačno daleka točka pravca CA, a točka $F(1 : -1 : 0)$ pravca AB.

□

1.2 Jednadžba pravca i kružnice u baricentričnom koordinatnom sustavu

Prije nego što izvedemo opću jednadžbu pravca definirat ćemo cevijane trokuta.

Definicija 1.2.1. *Pravce koji prolaze jednim vrhom trokuta nazivamo cevijanama tog trokuta. Ako cevijana AP trokuta ABC siječe pravac BC u točki D tada kažemo da je točka D trag točke P.*

Neka je $D(0 : y : z)$ točka pravca BC te neka je P proizvoljna točka cevijane AD. Prema teoremu 1.1.2 slijedi da se sve točke cevijane AD mogu parametarski prikazati kao $T(t : y : z)$ za $t \in \mathbb{R}$. Naime, pomičemo li točku T duž cevijane AD omjer $CD : BD$ ostaje isti te time svim točkama cevija AD y i z koordinate se odnose u istom omjeru.

Primjer 1.2.2. *Neka je dan trokut ABC. Neka je $D(0 : 1 : 2)$ i $E(3 : 0 : 4)$. Odredite koordinate točke P u kojoj se sijeku cevijane AD i BE.*

Rješenje: Neka je točka $P(x : y : z)$ točka u kojoj se sijeku cevijane AD i BE. Kako se točka P nalazi na cevijani AD za njene koordinate vrijedi $y : z = 1 : 2$. Također, kako se točka P nalazi na cevijani BE za njene koordinate vrijedi $x : z = 3 : 4$. Želimo odrediti čemu je jednako $x : y : z$. Koordinata koja se pojavljuje u oba dobivena razmjera je koordinata z. Želimo namjestiti razmjere tako da član s desne strane jednakosti koji odgovara z koordinati bude jednak u oba razmjera. Desnu stranu prvog razmjera proširit ćemo s 2. Sada imamo da je $y : z = 2 : 4$ i $x : z = 3 : 4$ što znači da je $x : y : z = 3 : 2 : 4$ odnosno, $P(3 : 2 : 4)$.

□

Jednadžba pravca

Neka su točke $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$ zadane svojim kartezijevim koordinatama. Tada je površina trokuta ABC jednaka

$$P(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

Neka su $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ i $R(x_3, y_3, z_3)$ proizvoljne točke ravnine ABC zadane svojim apsolutnim baricentričnim koordinatama u odnosu na trokut ABC. Točku P možemo zapisati kao linearnu kombinaciju

$$P = x_1A + y_1B + z_1C,$$

odnosno,

$$P = x_1(a_1, a_2) + y_1(b_1, b_2) + z_1(c_1, c_2).$$

Sada imamo da je

$$P = \big(x_1a_1 + y_1b_1 + z_1c_1, x_1a_2 + y_1b_2 + z_1c_2\big).$$

Analogno dobivamo

$$Q = \big(x_2a_1 + y_2b_1 + z_2c_1, x_2a_2 + y_2b_2 + z_2c_2\big) \text{ i } R = \big(x_3a_1 + y_3b_1 + z_3c_1, x_3a_2 + y_3b_2 + z_3c_2\big).$$

Prema formuli (1.2) imamo da je

$$P(PQR) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1a_1 + y_1b_1 + z_1c_1 & x_2a_1 + y_2b_1 + z_2c_1 & x_3a_1 + y_3b_1 + z_3c_1 \\ x_1a_2 + y_1b_2 + z_1c_2 & x_2a_2 + y_2b_2 + z_2c_2 & x_3a_2 + y_3b_2 + z_3c_2 \end{vmatrix}.$$

Kako su točke P, Q i R zadane svojim normaliziranim baricentričnim koordinatama vrijedi da je $x_i + y_i + z_i = 1$ za $i = 1, 2, 3$. Stoga prethodnu determinantu možemo zapisati kao

$$P(PQR) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1a_1 + y_1b_1 + z_1c_1 & x_2a_1 + y_2b_1 + z_2c_1 & x_3a_1 + y_3b_1 + z_3c_1 \\ x_1a_2 + y_1b_2 + z_1c_2 & x_2a_2 + y_2b_2 + z_2c_2 & x_3a_2 + y_3b_2 + z_3c_2 \end{vmatrix}.$$

Prema pravilu množenja matrica i Binet-Caushyjevom teoremu o determinanti umnoška ($\det AB = \det A \det B$) imamo da je

$$P(PQR) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

gdje prepoznajemo formulu za površinu trokuta ABC pa je

$$P(PQR) = P(ABC) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Budući da je determinanta matrice jednaka determinanti njoj trransponirane matrice slijedi da je

$$P(PQR) = P(ABC) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

čime smo dobili formulu za površinu proizvoljnog trokuta ravnine ABC. Budući da je površina apsolutna veličina, formula (1.3) zahtjeva normalizaciju baricentričnih koordinata. Pomoću izvedene formule lako dobivamo kriterij kolinearnosti tri točke.

Teorem 1.2.3. *Tri točke $P(x_1 : y_1 : z_1)$, $Q(x_2 : y_2 : z_2)$ i $R(x_3 : y_3 : z_3)$ su kolinearne ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokaz. Neka je $P(x_1 : y_1 : z_1)$, $Q(x_2 : y_2 : z_2)$ i $R(x_3 : y_3 : z_3)$. Normalizacijom koordinata dobivamo

$$P\left(\frac{x_1}{x_1 + y_1 + z_1}, \frac{y_1}{x_1 + y_1 + z_1}, \frac{z_1}{x_1 + y_1 + z_1}\right),$$

$$Q\left(\frac{x_2}{x_2 + y_2 + z_2}, \frac{y_2}{x_2 + y_2 + z_2}, \frac{z_2}{x_2 + y_2 + z_2}\right)$$

i
$$R\left(\frac{x_3}{x_3+y_3+z_3}, \frac{y_3}{x_3+y_3+z_3}, \frac{z_3}{x_3+y_3+z_3}\right).$$
Tri točke su kolinearne ako i samo ako je trokut koje one određuju degeneriran, odnosno, ako mu je površina 0. Budući da je u baricentričnom koordinatnom sustavu površina referentnog trokuta ABC uvijek strogo pozitivna prema formuli (1.3) slijedi da je površina trokuta PQR jednaka 0 ako i samo ako je
$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1+y_1+z_1} & \frac{y_1}{x_1+y_1+z_1} & \frac{z_1}{x_1+y_1+z_1} \\ \frac{x_2}{x_2+y_2+z_2} & \frac{y_2}{x_2+y_2+z_2} & \frac{z_2}{x_2+y_2+z_2} \\ \frac{x_3}{x_3+y_3+z_3} & \frac{y_3}{x_3+y_3+z_3} & \frac{z_3}{x_3+y_3+z_3} \end{vmatrix} = 0.$$
Iz područja linearne algebre poznata je tvrdnja: ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem nekog retka nenul skalarom λ, onda je $\det B = \lambda \det A$. Primjenom te tvrdnje dobivamo
$$\frac{1}{x_1+y_1+z_1}\cdot\frac{1}{x_2+y_2+z_2}\cdot\frac{1}{x_3+y_3+z_3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$
Slijedi da su točke P, Q i R kolinearne ako i samo ako je
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$
□

Zamijenimo li koordinate jedne od točaka općim koordinatama u kriteriju kolinearnosti dobivamo jednadžbu pravca kroz dvije točke o kojoj govori sljedeći teorem.

Teorem 1.2.4. *Jednadžba pravca određenog točkama $P(x_1 : y_1 : z_1)$ i $Q(x_2 : y_2 : z_2)$ dana je s*
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$
odnosno
$$(y_1z_2 - y_2z_1)x + (z_1x_2 - z_2x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)z = 0.$$
Općenito, pravac u baricentričnom koordinatnom sustavu ima jednadžbu oblika
$$ux + vy + wz = 0,$$
gdje su u, v i w realni brojevi.

Definicija 1.2.5. *Funkcija $f(x, y, z)$ je homogena reda $n \in \mathbb{N}$ u x, y i z ako za svaku uređenu trojku $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ i $t \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z).$$

Za jednadžbu $f(x, y, z) = 0$ kažemo da je homogena ako je funkcija f homogena.

Homogenost jednadžbe pravca omogućuje nam korištenje nenormaliziranih baricentričnih koordinata.
Primijetimo da realni pravac ne može imati jednadžbu u kojoj su koeficijenti u, v i w svi međusobno jednaki. Kada je $u = v = w$ dobivamo jednadžbu $x+y+z = 0$ što je u kontradikciji sa svojstvom baricentričnih koordinata realnih točaka za koje vrijedi da je $x+y+z \neq 0$. Ipak imamo da je $x + y + z = 0$ je svojstvo baricentričnih koordinata beskonačno dalekih točaka. Prema tome možemo zaključiti da je jednadžba beskonačno dalekog pravca $x + y + z = 0$.

Kriterij paralelnosti

Podsjetimo se nekih osnovnih pojmova i tvrdnji iz linearne algebre [3].
Rang matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ je dimenzija linearne ljuske razapete skupom redaka matrice A u oznaci $r(A) = \dim[R_1, R_2, R_3]$. Kažemo da je matrica A reda n punog ranga ako joj je rang jednak n. Vrijedi da je matrica reda n punog ranga ako i samo ako je regularna, odnosno, ako i samo ako je determinanta matrice različita od 0. Ove tvrdnje omogućuju nam sljedeći korolar:

Korolar 1.2.6. *Determinanta matrice jednaka je 0 ako i samo ako se neki redak (stupac) matrice može prikazati kao linearna kombinacija preostalih redaka (stupaca) te matrice.*

Teorem 1.2.7. *Neka su l_1 i l_2 pravci zadani redom jednadžbama $ux + vy + wz = 0$ i $px + qy + rw = 0$. Pravci l_1 i l_2 su paralelni ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

Dokaz. Dva pravca u ravnini su paralelni ako se podudaraju ili ako se ne sijeku u realnoj točki. Drugim riječima, pravci su paralelni ako i samo ako nemaju točno jednu zajedničku točku. Time vrijedi da su pravci l_1 i l_2 paralelni ako i samo ako sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ux + vy + wz = 0 \\ px + qy + rw = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

nema jedinstveno rješenje. Kako se radi o nehomogenom sustavu tri jednadžbe s tri nepoznanice, ovaj sustav neće imati jedinstveno rješenje ako i samo ako pripadna matrica sustava nije punog ranga. Matrica nije punog ranga ako i samo ako je njena determinanta jednaka 0 iz čega slijedi tvrdnja koju smo htjeli dokazati. □

Teorem 1.2.8. *Pravci l_1 i l_2 zadani redom jednadžbama $ux+vy+wz=0$ i $px+qy+rw=0$ su paralelni ako i samo ako postoji realni broj k takav da vrijedi*

$$p : q : r = (u + k) : (v + k) : (w + k).$$

Dokaz. Prema teoremu 1.2.7 i korolaru 1.2.6 pravci su paralelni ako i samo ako postoje realni brojevi α i β takvi da je

$$[p, q, r] = \alpha\,[u, v, w] + \beta\,[1, 1, 1]\,.$$

Budući da nema smisla govoriti o pravcu paralelnom beskonačno dalekom pravcu možemo pretpostaviti da su pravci l_1 i l_2 realni pravci te time koeficijenti p, q i r nisu svi međusobno jednaki iz čega slijedi da je $\alpha \neq 0$. Ako stavimo da je $k = \frac{\beta}{\alpha}$ dobivamo da vrijedi

$$p : q : r = (u + k) : (v + k) : (w + k)$$

što smo i htjeli dokazati. □

Primjer 1.2.9. *Pravci paralelni pravcu BC.*

Rješenje: Lako dobivamo da je jednadžba pravca BC $x = 0$, pravca CA $y = 0$ i pravca AB $z = 0$. Prema teoremu 1.2.8 slijedi da svi pravci paralelni pravcu BC imaju jednadžbu oblika

$$(1 + k)x + ky + kz = 0.$$

Posebno, pravac paralelan pravcu BC koji prolazi vrhom $A(1 : 0 : 0)$ ima jednadžbu

$$y + z = 0$$

što smo dobili tako što smo u opću jednadžbu uvrstili koordinate točke A i tako odredili k. Isto tako dobivamo da pravac na kojem leži srednjica trokuta ABC paralelna s pravcem BC ima jednadžbu

$$x - y - z = 0$$

što smo dobili tako što smo u opću jednadžbu uvrstili koordinate točke $P_b(1 : 0 : 1)$.

□

Teorem 1.2.10. *Neka su pravci l_1 i l_2 zadani redom jednadžbama $ux + vy + wz = 0$ i $px + qy + rw = 0$. Ako l_1 i l_2 nisu paralelni, onda se sijeku u točki*

$$\big((vr - wq) : -(ur - wp) : (uq - pv)\big).$$

Dokaz. Kako l_1 i l_2 nisu paralelni pravci, prema teoremu 1.2.7 slijedi da je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} \neq 0.$$

Slijedi da je pripadna matrica punog ranga, a time da je (1.4) Cramerov sustav. Prema Cramerovoj metodi riješavanja sustava imamo da je rješenje sustava (1.4)

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} v & w \\ q & r \end{vmatrix}}{D}, -\frac{\begin{vmatrix} u & w \\ p & r \end{vmatrix}}{D}, \frac{\begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix}}{D} \right),$$

gdje je $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix}$. Primjenom homogenosti baricentričnih koordinata dobivamo da je točka presjeka

$$\left(\begin{vmatrix} v & w \\ q & r \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} u & w \\ p & r \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix} \right)$$

čime je tvrdnja dokazana. □

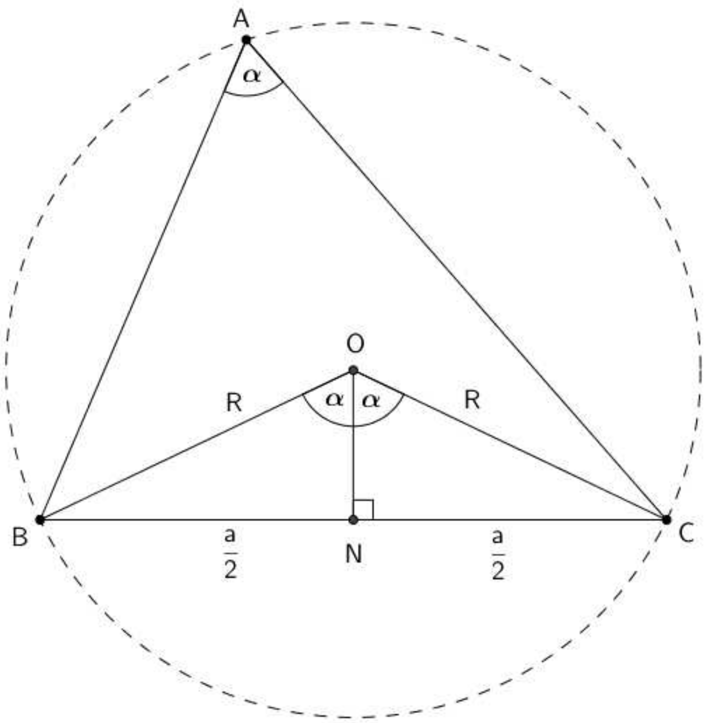
Kriterij okomitosti

Neka su $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$ proizvoljne točke ravnine trokuta ABC zadane svojim apsolutnim (normaliziranim) baricentričnim koordinatama. Tada je koordinatni prikaz vektora

$$\overrightarrow{PQ} = (x, y, z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\,.$$

Primijetimo da je zbroj baricentričnih koordinata svakog vektora $x + y + z = 0$. U ovom dijelu rada koristit ćemo skalarne produkte i skalarne kvadrate radijus-vektora vrhova referentnog trokuta. Prema [8] izvodimo formule za skalarne produkte i skalarne kvadrate radijus-vektora vrhova referentnog trokuta. Budući da apsolutne baricentrične koordinate ne ovise o izboru ishodišta, u ovom trenutku nam je najpogodnije za ishodište odabrati središte opisane kružnice trokuta ABC. Time smo osigurali da je

$$|OA| = |OB| = |OC| = R$$



Slika 1.7: Skalarni umnožak vektora

gdje je R radijus opisane kružnice.

Budući da je $\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \overrightarrow{PQ}^2$ slijedi da je

$$\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 = R^2.$$

Nadalje, prema formuli za skalarni umnožak imamo da je

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = |OB|\,|OC| \cos \measuredangle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}).$$

Prema poznatoj tvrdnji da je mjera središnjeg kuta nad nekim lukom jednaka dvostrukoj mjeri obodnog kuta nad tim istim lukom imamo da je $|\measuredangle BOC| = 2\alpha$. Stoga je

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2 \cos 2\alpha.$$

Primijetimo da formula vrijedi i u slučaju kada je O izvan trokuta ABC budući da je $\cos(360^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha$. Kako bi dodatno sredili izraz koristimo trigonometrijski identitet $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ te time dobivamo

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2\left(1-2\sin^2\alpha\right)$$

Primjenom trigonometrijskih omjera na trokut ONC slijedi da je $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$ pa je

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2\left(1-2\left(\frac{a}{2R}\right)^2\right),$$

odnosno

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2-\frac{a^2}{2}.$$

Analognim postupkom se pokazuje da je

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = R^2-\frac{c^2}{2} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = R^2-\frac{b^2}{2}.$$

Dobivene jednakosti bit će nam potrebne u dokazu teorema o kriteriju okomitosti vektora.

Teorem 1.2.11. *Vektori $\overrightarrow{PQ}=(x_1,y_1,z_1)$ i $\overrightarrow{MN}=(x_2,y_2,z_2)$ su okomiti ako i samo ako je*

$$a^2\left(y_1z_2+y_2z_1\right)+b^2\left(x_1z_2+x_2z_1\right)+c^2\left(x_1y_2+x_2y_1\right)=0$$

Napomena 1.2.12. *U dokazu teorema i daljnjem tekstu rada koristit ćemo cikličke sume. Cikličke sume kraći su zapis zbroja algebarskih izraza u kojemu se varijable ciklički izmjenjuju. U našem slučaju imamo varijable a, b i c te varijable x, y i z. Posebno imamo da je*

$$\sum_{cyc} ax = ax+by+cz$$

te

$$\sum_{cyc} ayz = ayz+bzx+cxy.$$

Dokaz. Vektori $\overrightarrow{PQ}=(x_1,y_1,z_1)$ i $\overrightarrow{MN}=(x_2,y_2,z_2)$ su okomiti ako i samo ako je

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}=0,$$

odnosno,

$$\left(x_1\overrightarrow{OA}+y_1\overrightarrow{OB}+z_1\overrightarrow{OC}\right)\left(x_2\overrightarrow{OA}+y_2\overrightarrow{OB}+z_2\overrightarrow{OC}\right)=0.$$

Izmnožimo li zagrade dobivamo

$$\sum_{cyc} x_1x_2\overrightarrow{OA}^2+\sum_{cyc}(x_1y_2+x_2y_1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0.$$

gdje uvrstimo ranije dobivene izraze

$$\sum_{cyc} x_1x_2R^2 + \sum_{cyc}(x_1y_2 + x_2y_1)\left(R^2 - \frac{c^2}{2}\right) = 0.$$

Sređivanjem lijeve strane jednakosti dobivamo

$$R^2\left(\sum_{cyc} x_1x_2 + \sum_{cyc}(x_1y_2 + x_2y_1)\right) = \frac{1}{2}\sum_{cyc} c^2(x_1y_2 + x_2y_1)$$

te zatim

$$R^2(x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2) = \frac{1}{2}\sum_{cyc} c^2(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Kako je $x_i + y_i + z_i = 0$, lijeva strana jednakosti je 0 pa imamo

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc} c^2(x_1y_2 + x_2y_1) = 0$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Jednadžba kružnice

Kako bismo izveli jednadžbu kružnice najprije moramo doći do formule za udaljenost dviju točaka u ravnini. Budući da se radi o udaljenosti, što je apsolutna veličina, u izvodu formule koristimo apsolutne (normalizirane) baricentrične koordinate. Neka su $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$ proizvoljne točke ravnine trokuta ABC zadane svojim apsolutnim (normaliziranim) baricentričnim koordinatama. Neka je $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ i $z = z_2 - z_1$ pa time imamo da je $\overrightarrow{PQ} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ i pišemo $\overrightarrow{PQ} = (x, y, z)$.
Kao i kod kriterija okomitosti koristit ćemo skalarni kvadrat vektora odnosno jednakost $\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \overrightarrow{PQ}^2$ pa imamo da je

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left(x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OC}\right)\left(x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB} + z\,\overrightarrow{OC}\right).$$

Množenjem zagrada i sređivanjem izraza dobivamo

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \sum_{cyc} x^2\overrightarrow{OA}^2 + \sum_{cyc} 2xy\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

Uvrštavanjem ranije izvedenih izraza imamo

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \sum_{cyc} x^2R^2 + \sum_{cyc} 2xy\left(R^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

te konačno

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy + R^2(x+y+z)^2 .$$

Kako je $x + y + z = 0$ to je

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy.$$

Kako dobivena formula za modul vektora u svom izrazu ima mnogo minusa zanimljivo je provjeriti poprima li zaista taj izraz samo nenegativne vrijednosti, odnosno, ako je $\overrightarrow{PQ} = (x, y, z)$ je li

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy \geq 0?$$

Budući da je $x + y + z = 0$ tj. $z = -x - y$ uvrštavanjem dobivamo

$$-a^2y(-x-y) - b^2x(-x-y) - c^2xy.$$

Zatim

$$a^2yx + (ay)^2 + (bx)^2 + b^2xy - c^2xy$$

te konačno

$$(ay)^2 + xy(a^2 + b^2 - c^2) + (bx)^2.$$

Prema poučku o kosinusu vrijedi $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
tj. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$ pa imamo

$$(ay)^2 + 2abxy\cos\gamma + (bx)^2.$$

Znamo da je $\cos\gamma \in [-1, 1]$ pa izraz možemo ograničiti odozdo i odozgo

$$0 \leq (a|y| - b|x|)^2 \leq (ay)^2 + 2abxy\cos\gamma + (bx)^2 \leq (a|y| + b|x|)^2$$

čime smo dokazali da je izraz zaista nenegativan.

Teorem 1.2.13. *(Udaljenost dvije točke) Neka su $P(x_1, y_1, z_1)$ i $Q(x_2, y_2, z_2)$ proizvoljne točke ravnine trokuta ABC. Tada je*

$$d(P, Q) = \sqrt{-a^2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) - b^2(x_2 - x_1)(z_2 - z_1) - c^2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}.$$

Sada možemo izvesti jednadžbu kružnice u baricentričnom koordinatnom sustavu. Neka je kružnica k zadana svojim središtem $S(i : j : k)$ i radijusom $r > 0$ te neka je $P(x : y : z)$ po volji odabrana točka kružnice zadana svojim apsolutnim baricentričnim koordinatama. Točka P je točka kružnice ako i samo ako je

$$d(S, P)^2 = r^2,$$

odnosno, prema teoremu 1.2.13 jednadžba kružnice glasi

$$-a^2(j-y)(k-z)-b^2(i-x)(k-z)-c^2(i-x)(j-y)=r^2.$$

Izmnožimo li zagrade i grupiramo li pribrojnike taj uvjet poprima sljedeći oblik

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy+R_1x+R_2y+R_3z=R$$

gdje je $R_1=b^2k+c^2j$, $R_2=a^2k+c^2i$, $R_3=a^2j+b^2i$ i $R=r^2+a^2jk+b^2ik+c^2ij$. Kako je $x+y+z=1$ imamo da je

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy+ux+vy+wz=0$$

gdje je $u=R_1-R$, $v=R_2-R$ i $w=R_3-R$. Time smo dobili da će kružnica u baricentričnom koordinatnom sustavu imati jednadžbu oblika

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy+ux+vy+wz=0$$

gdje su u, v, i w neki realni brojevi. Jednadžba kružnice u ovom obliku vrijedi samo za normalizirane koordinate točaka, što možemo vidjeti iz samog izvoda, ali iz činjenice što jednadžba nije homogena. Kako bismo i kod jednadžbe kružnice dobili stupanj slobode korištenja relativnih baricentričnih koordinata možemo jednadžbu "homogenizirati". Kako je $x+y+z=1$ imamo da je

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(ux+vy+wz)(x+y+z)=0$$

tim postupkom smo dobili homogeni oblik jedndažbe kružnice te s njom možemo računati i koristeći nenormalizirane koordinate točaka.

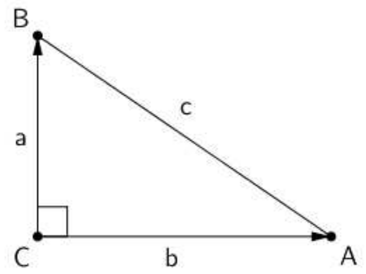
Poglavlje 2

Primjena na geometriju trokuta

U ovom poglavlju dokazat ćemo neke poznate, ali i manje poznate teoreme iz geometrije.

Teorem 2.0.1. *(Pitagorin teorem) Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C ako i samo ako je*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Slika 2.1: Pravokutni trokut

Dokaz. Neka je u baricentričnom koordinatnom sustavu referentni trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{CA} = (1, 0, -1)$ i $\overrightarrow{CB} = (0, 1, -1)$ međusobno okomiti. Prema teoremu 1.2.11 vektori $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ su okomiti ako i samo ako je

$$a^2\,(0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)) + b^2\,(1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)) + c^2\,(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = 0,$$

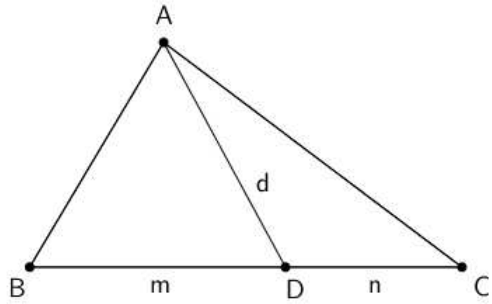
odnosno,

$$-a^2 - b^2 + c^2 = 0,$$

i time smo dokazali tvrdnju teorema. $\square$

Teorem 2.0.2. *(Stewartov teorem) Dan je trokut ABC. Neka je D točka na pravcu BC. Ako je $AD = d$, $BD = m$ i $CD = n$, onda je*

$$b^2m + c^2n = (d^2 + mn)a.$$



Slika 2.2: Stewartov teorem

Dokaz. Neka je trokut ABC referentni trokut baricentričnog sustava. Imamo da je $A(1 : 0 : 0)$, $B(0 : 1 : 0)$ i $C(0 : 0 : 1)$. Prema teoremu 1.1.2 slijedi da je $D(0 : n : m) = \left(0, \frac{n}{a}, \frac{m}{a}\right)$. Prema teoremu 1.2.13 je

$$d^2 = -a^2\left(\frac{n}{a} - 0\right)\left(\frac{m}{a} - 0\right) - b^2(0-1)\left(\frac{m}{a} - 0\right) - c^2(0-1)\left(\frac{n}{a} - 0\right),$$

odnosno,

$$d^2 = -a^2 \cdot \frac{n}{a} \cdot \frac{m}{a} + b^2 \cdot \frac{m}{a} + c^2 \cdot \frac{n}{a},$$

te konačno

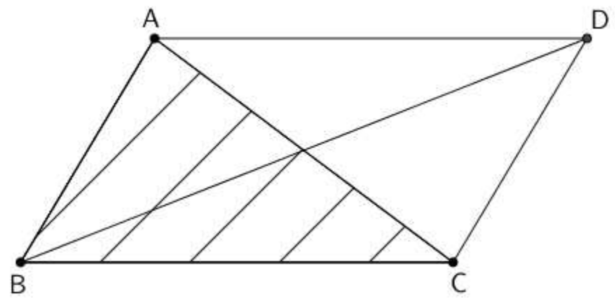
$$(d^2 + nm)a = b^2m + c^2n.$$

□

Teorem 2.0.3. *Četverokut $ABCD$ je paralelogram ako i samo ako je $A + C = B + D$.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ četverokut. Koristit ćemo baricentrične koordinate u odnosu na trokut ABC. S P označimo orijentiranu površinu trokuta ABC.
Pretpostavimo da je $ABCD$ paralelogram. Kako dijagonala paralelograma paralelogram dijeli na dva sukladna trokuta imamo da su površine trokuta ABC, ADC, ABD i DCB jednake polovini površine paralelograma. Kako se točke B i D nalaze s različitih strana pravca AC, trokut ADC je negativno orijentiran pa mu je orijentirana površina negativna

$$P(ADC) = -P.$$



Slika 2.3: Paralelogram

Trokuti DBC i ABD su pozitivno orijentirani pa je

$$P(DBC) = P(ABD) = P.$$

Prema definiciji 1.1.1 slijedi

$$D = \left(\frac{P(DBC)}{P(ABC)}, \frac{P(ADC)}{P(ABC)}, \frac{P(ABD)}{P(ABC)}\right) = \left(\frac{P}{P}, \frac{-P}{P}, \frac{P}{P}\right) = (1, -1, 1).$$

Prema vektorskom izvodu apsolutnih baricentričnih koordinata imamo da je $D = A - B + C$ iz čega slijedi da je $A + C = B + D$.
Obratno, pretpostavimo da je $A + C = B + D$. Tada je $D = A - B + C$ pa je $D = (1, -1, 1)$. Prema teoremu 1.2.13 lako se izračuna $|AD| = a = |BC|$ i $|CD| = c = |AB|$. Time smo dobili da su četverokutu $ABCD$ nasuprotne stranice sukladne što je karakterizacija paralelograma.

□

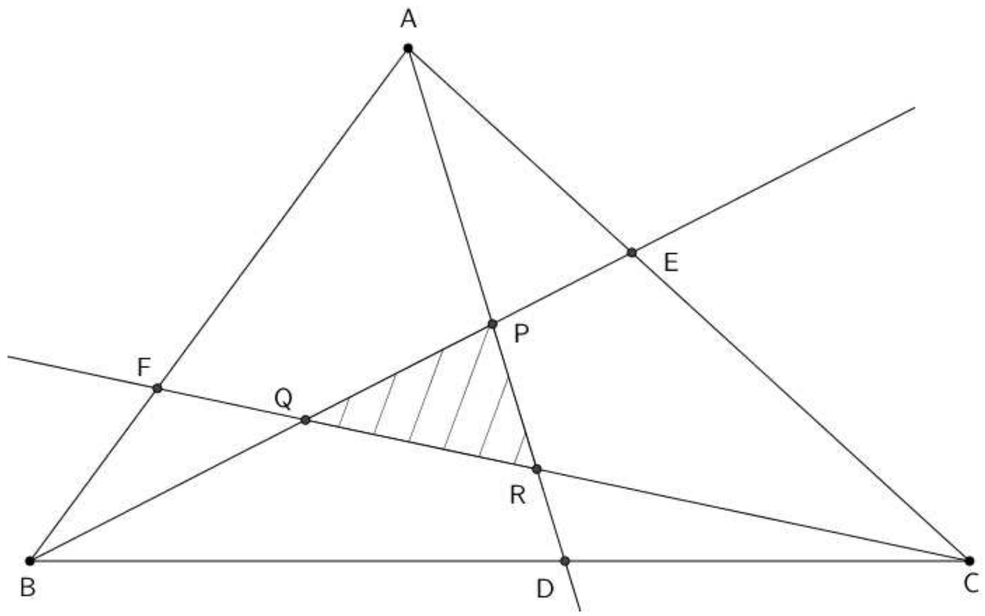
2.1 Kolinearnost i konkurentnost

Teorem 2.1.1. *(Routhov teorem) Neka je dan trokut ABC, te neka su D, E i F redom točke na pravcima BC, CA i AB. Neka se pravci AD i BE sijeku u točki P, pravci BE i CF u točki Q te pravci CF i AD u točki R.*
Ako je $BD : DC = d$, $CE : EA = e$ i $AF : FB = f$, tada za orijentirane površine trokuta DEF i PQR vrijede sljedeće formule

$$P(DEF) = P(ABC) \cdot \frac{def + 1}{(1 + d)(1 + e)(1 + f)}$$

i

$$P(PQR) = P(ABC) \cdot \frac{(def - 1)^2}{(1 + e + ed)(1 + f + fe)(1 + d + df)}$$



Slika 2.4: Routhov teorem

Dokaz. Prema teoremu 1.1.2 imamo da je $D(0:1:d)$, $E(e:0:1)$ i $F(1:f:0)$. Kao što smo napomenuli za računanje površine trokuta potrebno je normalizirati baricentrične koordinate. Dakle, imamo da je

$$D\left(0, \tfrac{1}{1+d}, \tfrac{d}{1+d}\right), E\left(\tfrac{e}{1+e}, 0, \tfrac{1}{1+e}\right) \text{ i } F\left(\tfrac{1}{1+f}, \tfrac{f}{1+f}, 0\right).$$

Prema formuli (1.3) za površinu trokuta DEF imamo da je

$$P(DEF) = P(ABC) \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{1+d} & \frac{d}{1+d} \\ \frac{e}{1+e} & 0 & \frac{1}{1+e} \\ \frac{1}{1+f} & \frac{f}{1+f} & 0 \end{vmatrix}.$$

Kada iz prvog retka determinante izlučimo skalar $\frac{1}{1+d}$, iz drugog $\frac{1}{1+e}$ te iz trećeg $\frac{1}{1+f}$ dobivamo da je

$$P(DEF) = P(ABC) \cdot \frac{1}{(1+d)(1+e)(1+f)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & d \\ e & 0 & 1 \\ 1 & f & 0 \end{vmatrix}$$

Preostalo nam je još izračunati dobivenu determinantu. Laplaceovim razvojem po prvom retku matrice lako vidimo da je

$$P(DEF) = P(ABC) \cdot \frac{def + 1}{(1+d)(1+e)(1+f)}$$

što smo i htjeli dokazati. Nadalje, točke P, Q i R definirane su presjekom cevijana trokuta ABC te ćemo njihove koordinate odrediti na način opisan u primjeru 1.2.2. Kako je točka $P(x : y : z)$ sjecište cevijana AD i BE za njene koordinate vrijede omjeri

$$y : z = 1 : d \text{ i } x : z = e : 1.$$

Koordinata koja se pojavljuje u oba razmjera je koordinata z. Ako proširimo desnu stranu drugog razmjera brojem d dobivene razmjere možemo spojiti u prošireni razmjer

$$x : y : z = de : 1 : d$$

odnosno imamo da je $P = (de : 1 : d)$. Analogno dobivamo da je $Q = (e : ef : 1)$ i $R = (1 : f : fd)$.
Postupkom normalizacije dobivamo da je

$$P\left(\tfrac{ed}{1+d+de}, \tfrac{1}{1+d+de}, \tfrac{d}{1+d+de}\right), Q\left(\tfrac{e}{1+e+ef}, \tfrac{fe}{1+e+ef}, \tfrac{1}{1+e+ef}\right) \text{ i } R\left(\tfrac{1}{1+f+fd}, \tfrac{f}{1+f+fd}, \tfrac{df}{1+f+fd}\right).$$

Prema formuli (1.3) za površinu trokuta PQR imamo da je

$$P(PQR) = P(ABC)\begin{vmatrix} \frac{ed}{1+d+de} & \frac{1}{1+d+de} & \frac{d}{1+d+de} \\ \frac{e}{1+e+ef} & \frac{fe}{1+e+ef} & \frac{1}{1+e+ef} \\ \frac{1}{1+f+fd} & \frac{f}{1+f+fd} & \frac{df}{1+f+fd} \end{vmatrix},$$

odnosno,

$$P(PQR) = P(ABC) \cdot \frac{1}{(1+e+ed)(1+f+fe)(1+d+df)} \begin{vmatrix} ed & 1 & d \\ e & fe & 1 \\ 1 & f & df \end{vmatrix}.$$

Kada izračunamo dobivenu determinantu dobivamo da je

$$P(PQR) = P(ABC) \cdot \frac{(def-1)^2}{(1+e+ed)(1+f+fe)(1+d+df)}$$

što smo i htjeli pokazati. □

Pomoću Routhovog teorema 2.1.1 dokazat ćemo dva klasična teorema geometrije, Cevin i Menelajev teorem.

Cevin teorem

Teorem 2.1.2. *(Cevin teorem) Neka su D, E, F redom točke na pravcima BC, CA, AB. Pravci AD, BE i CF su konkurentni ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Dokaz. Kao i u iskazu Routhova teorema 2.1.1 stavimo da je

$$BD : DC = d, CE : EA = e \text{ i } AF : BF = f$$

te neka se pravci AD i BE sijeku u točki P, pravci BE i CF u točki Q te pravci CF i AD u točki R. Pravci AD, BE i CF se sijeku u jednoj točki ako i samo ako se točke P, Q i R podudaraju, odnosno, ako i samo ako je površina trokuta PQR jednaka 0. Prema Routhovom teoremu imamo da je $P(PQR) = 0$ ako i samo ako je

$$P(ABC) \cdot \frac{(def - 1)^2}{(1 + e + ed)(1 + f + fe)(1 + d + df)} = 0$$

odnosno

$$def = 1.$$

□

Iako je Cevin teorem u svom originalnom obliku izuzetno koristan u euklidskoj geometriji, kada računamo s baricentričnim koodinatama i želimo provijeriti konkurentnost tri cevijane pogodniji nam je sljedeći teorem koji direktno slijedi iz teorem 1.1.2.

Teorem 2.1.3. *Neka su D, E i F redom točke na pravcima BC, CA, AB. Pravci AD, BE i CF se sijeku u jednoj točki* $P(x : y : z)$ *ako i samo ako je* $D(0 : y : z)$*,* $E(x : 0 : z)$ *i* $F(x : y : 0)$.

Dokaz. Prema teoremu 1.1.2 imamo da je trag točke P na pravcu BC točka $D(0 : y : z)$, na pravcu CA točka $E(x : 0 : y)$ i na pravcu AB točka $F(x : y : 0)$.
Obratno, neka je $D(0 : y : z)$, $E(x : 0 : z)$ i $F(x : y : 0)$. Cevijane AD i BE se sijeku u točki $P(x : y : z)$ koja se prema teoremu 1.1.2 nalazi na cevijani CE. □

Primjer 2.1.4. *Neka je dan trokut ABC te neka je* $D(0 : 1 : 2)$*,* $E(3 : 0 : 4)$ *i* $F(9 : 6 : 0)$*. Jesu li cevijane AB, BE i CF konkurentne?*

Rješenje: Pomnožimo li koordinate točke D s 2 te koordinate točke F podijelimo s 3 imamo

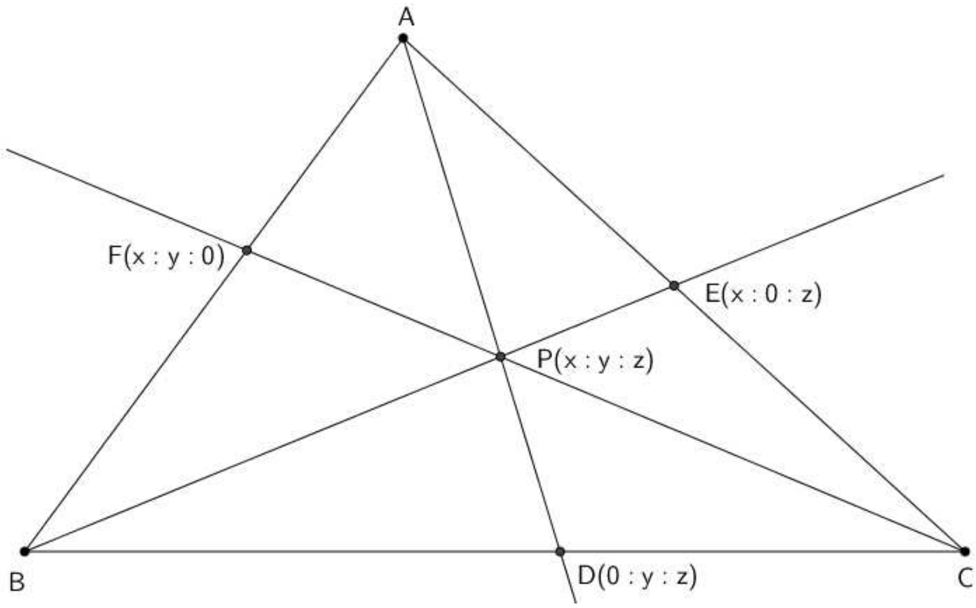
$$D(0 : 2 : 4),$$

$$E(3 : 0 : 4),$$

$$F(3 : 2 : 0).$$

Prema teoremu 2.1.3 imamo da se cevijane AB, BE i CF sijeku u točki $P(3 : 2 : 4)$.

□



Slika 2.5: Konkurentnost cevijana

Menelajev teorem

Teorem 2.1.5. *(Menelajev teorem) Neka su D, E, F redom točke na pravcima BC, CA, AB. Točke D, E i F su kolinearne ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$

Dokaz. Ponovno stavimo da je

$$BD : CD = d, CE : AE = e \text{ i } AF : FB = f$$

i neka se pravci AD i BE sijeku u točki P, pravci BE i CF u točki Q te pravci CF i AD u točki R.
Točke D, E i F su kolinearne ako i samo ako je površina trokuta DEF jednaka 0. Prema Routhovom teoremu imamo da je $P(DEF) = 0$ ako i samo ako je

$$P(ABC) \cdot \frac{def + 1}{(1 + d)(1 + e)(1 + f)} = 0$$

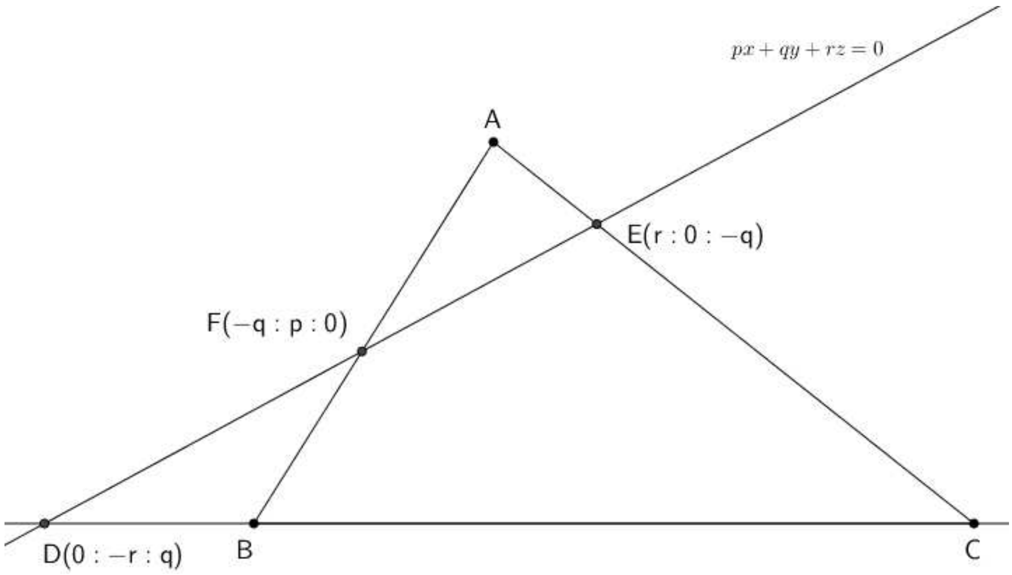
odnosno

$$def = -1.$$

□

Slično kao i kod Cevinog teorema, definicija baricentričnih koordinata i jednadžba pravca u baricentričnom koordinatnom sustavu osiguravaju nam pogodniji nužan i dovoljan uvijet za kolinearnost tri točke koje leže na pravcima određenim vrhovima referentnog trokuta.

Teorem 2.1.6. *Točke D, E i F na pravcima BC, CA i AB, redom, su kolinearne i leže na pravcu* $px + qy + rz = 0$ *ako i samo ako vrijedi da je* $D(0 : -r : q)$, $E(r : 0 : -p)$ *i* $F(-q : p : 0)$.



Slika 2.6: Kolinearnost

Dokaz. Pravac $px + qy + rz = 0$ siječe pravac BC u točki $D(0 : -r : q)$, CA u točki $E(r : 0 : -p)$ i AB u točki $F(-q : p : 0)$. Obratno, točke $D(0 : -r : q)$, $E(r : 0 : -p)$ i $F(-q : p : 0)$ zadovoljavaju jednadžbu $px + qy + rz = 0$. □

Primjer 2.1.7. *Odredite jesu li točke* $D(0 : 3 : 2)$, $E(2 : 0 : 1)$ *i* $F(-4 : 3 : 0)$ *kolinearne?*

Rješenje: Podijelimo li koordinate točke D s 2 i koordinate točke E s 3 imamo da je $D(0 : 6 : 4)$, $E(6 : 0 : 3)$. Prema teoremu 2.1.6 točke D, E i Fsu kolinearne i leže na pravcu $3x + 4y - 6z = 0$.

□

2.2 Karakteristične točke trokuta

Jedna od zanimljivijih tema geometrije trokuta su centri trokuta. Američki matematičar Clark Kimberling osnovao je web enciklopediju Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) [4] u kojoj definira i sistematizira već poznate i novootkrivene centre trokuta. Krajem 2022. godine enciklopedija broji 52440 točaka. Najpoznatije centre trokuta nazivamo karakteristične točke trokuta. To su središte trokutu opisane kružnice, središte trokutu upisane kružnice, težište trokuta i ortocentar trokuta.U ovom dijelu rada opisat ćemo karakteristične točke trokuta te odrediti njihove baricentrične koordinate. Za početak bit će nam korisno navesti neke od formula za površinu trokuta budući da ćemo ih često koristiti u daljnjem tekstu.
Ako nam je poznat radijus upisane kružnice i poluopseg trokuta onda je $P = rs$. Nadalje, imamo da je $P = \frac{abc}{4R}$, gdje je R radijus opisane kružnice trokuta. Ako su nam poznate duljine dviju stranica trokuta (npr. a i b) i mjera kuta koje one zatvaraju (γ) imamo da je $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
Također će nam biti korisne još dvije tvrdnje, a to su poučak o sinusima i poučak o kosinusu. Prema poučku o sinusima imamo da je

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

a prema poučku o kosinusima vrijedi da je

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Središte trokutu upisane kružnice

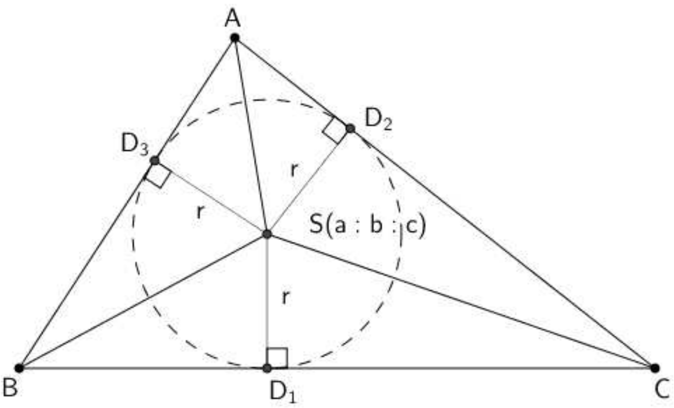
Definicija 2.2.1. *Kružnicu koja dira svaku od stranica danog trokuta ABC s unutarnje strane nazivamo tom trokutu upisanom kružnicom.*

Primijetimo najprije da se središte S trokutu upisane kružnice uvijek nalazi unutar trokuta pa su mu time sve baricentrične koordinate istog predznaka, odnosno, orijentirane površine $P(SBC)$, $P(ASC)$ i $P(ABS)$ su sve strogo pozitivne. Kako je središte trokutu upisane kružnice jednako udaljeno od stranica trokuta, trokuti SBC, ASC i ABS imaju sukladne visine iz zajedničkog vrha S pa se njihove površine odnose kao duljine tom vrhu nasuprotnih stranica, odnosno, imamo da je

$$P(SBC) : P(ASC) : P(ABS) = a : b : c.$$

Stoga je

$$S = (a : b : c).$$



Slika 2.7: Upisana kružnica

Teorem 2.2.2. *Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.*

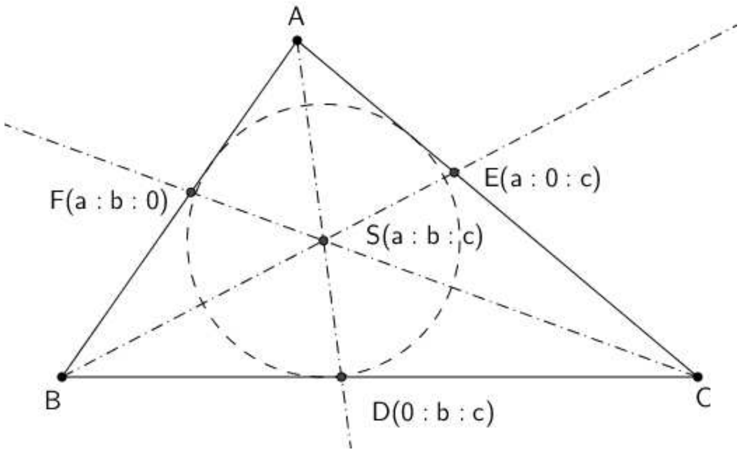
Dokaz. Poznato je da se simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku u središtu S tom trokutu upisane kružnice. Tako je cevijana AS simetrala kuta pri vrhu A, cevijana BS simetrala kuta pti vrhu B te cevijana CS simetrala pri vrhu C trokuta. Neka simetrale AS, BS i CS sijeku nasuprotne stranice trokuta redom u točkama D, E i F. Kako je $S = (a : b : c)$, prema teoremu 2.1.3 slijedi da je $D(0 : b : c)$, $E(a : 0 : c)$ i $F(a : b : 0)$. Prema teoremu 1.1.2 imamo da je $|CD| : |BD| = b : c$, $|CE| : |AE| = a : c$ i $|BF| : |AF| = a : b$ čime je dokazana tvrdnja teorema. □

Teorem 2.2.3. *Simetrala vanjskog kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu izvana u omjeru preostalih stranica.*

Dokaz. Neka je D' točka pravca BC takva da je pravac AD' simetrala vanjskog kuta pri vrhu A. Najprije primijetimo da se točka D' nalazi izvan dužine $\overline{BC}$ te će time jedan od trokuta ABD' i $AD'C$ biti negativno orijentiran. Nadalje, kako se točka D' nalazi na simetrali vanjskog kuta pri vrhu A ona je jednako udaljena od pravaca AB i CA. Stoga, trokuti ABD' i $AD'C$ imaju sukladne visine iz zajedničkog vrha D' te se time njihove površine odnose kao duljine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, odnosno, za njihove orijentirane površine vrijedi

$$P(AD'C) : P(ABD') = b : (-c)$$

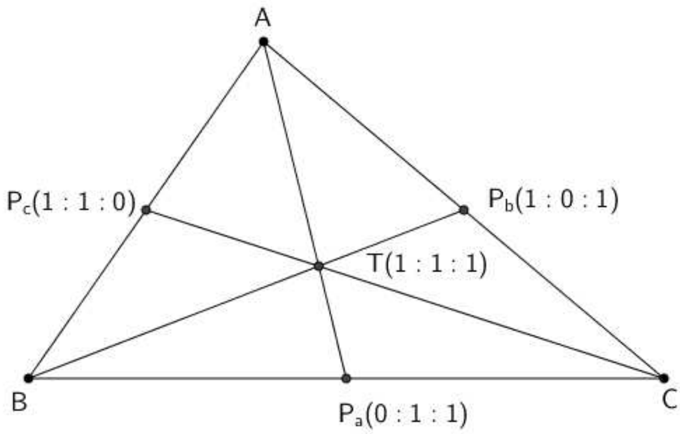
te je time $D'(0 : b : -c)$. Prema teoremu 1.1.2 imamo da je $|CD'| : |BD'| = b : (-c)$. Čime smo dokazali tvrdnju za jedan kut, za preostale se tvrdnja dokazuje analogno. □



Slika 2.8: Upisana kružnica i simetrale kutova

Težište trokuta

Definicija 2.2.4. *Spojnicu nekog vrha danog trokuta ABC s polovištem nasuprotne stranice zovemo težišnica trokuta.*



Slika 2.9: Težište trokuta

Teorem 2.2.5. *Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki koju nazivamo težište. Težište T dijeli svaku od težišnica u omjeru 2:1 računajući od vrha trokuta, tj.*

$$|AT| : |TP_a| = |BT| : |TP_b| = |CT| : |TP_c| = 2 : 1,$$

gdje su P_a, P_b, P_c polovišta stranica BC, CA, AB, redom.

Dokaz. Neka su P_a, P_b, P_c polovišta stranica trokuta ABC. Lako se vidi sa je $P_a(0 : 1 : 1)$, $P_b(1 : 0 : 1)$ i $P_c(1 : 1 : 0)$. Prema teoremu 2.1.3 pravci AD, BE i CF se sijeku u točki

$$T(1 : 1 : 1).$$

Prema teoremu 1.1.4 imamo da je

$$\frac{|AT|}{|TP_a|} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}.$$

□

Središte trokutu opisane kružnice

Definicija 2.2.6. *Kružnicu koja prolazi vrhovima danog trokuta ABC nazivamo tom trokutu opisanom kružnicom.*

Označimo s O središte opisane kružnice trokuta ABC, a s R njezin radijus. Kako je središte opisane kružnice jednako udaljeno od vrhova trokuta vrijedi da je $|OA| = |OB| = |OC| = R$.
Kako bismo odredili baricentričke koordinate točke O najprije ćemo odrediti orijentirane površine trokuta OBC, AOC i ABO. Pretpostavimo za početak da je trokut ABC šiljastokutan. Tada je točka O unutar trokuta pa su joj sve baricentrične koordinate istog predznaka, odnosno, orijentirane površine trokuta OBC, AOC i ABO su sve storgo pozitivne.

Poznato je da za obodni kut ABC i njemu pripadni središnji kut AOB vrijedi da je $|\measuredangle AOB| = 2|\measuredangle ABC|$ odnosno $|\measuredangle AOB| = 2\alpha$. Budući da su nam u trokutu OBC poznate duljine dviju stranica i mjera kuta kojeg one zatvaraju prema poznatoj formuli za površinu trokuta imamo da je

$$P(OBC) = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha. \tag{2.1}$$

Analogno dobivamo da je

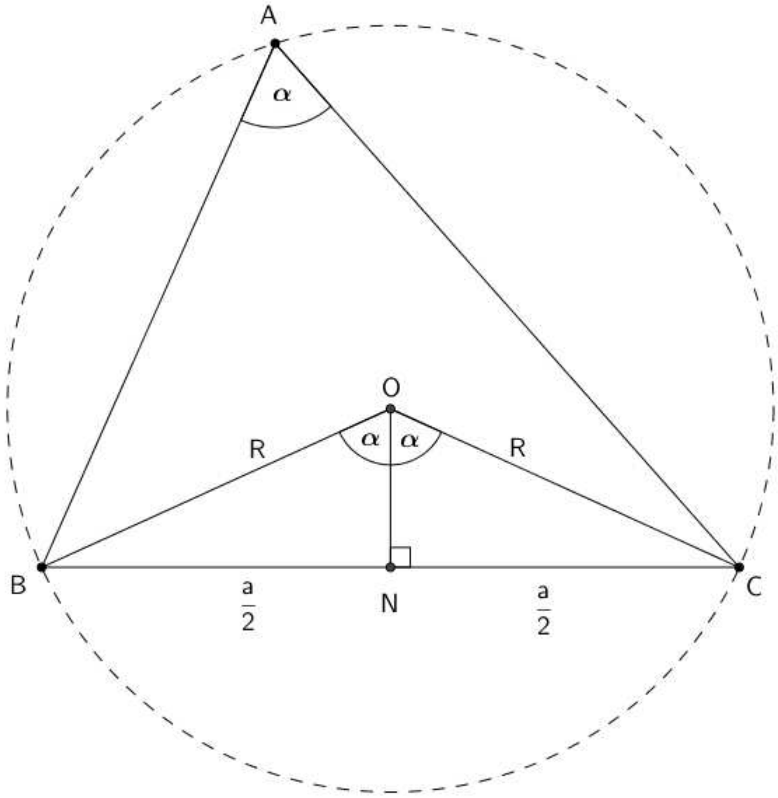
$$P(AOC) = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\beta \tag{2.2}$$

i

$$P(ABO) = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\gamma. \tag{2.3}$$

Prema tome

$$P(OBC) : P(AOC) : P(ABO) = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha : \frac{1}{2}R^2 \sin 2\beta : \frac{1}{2}R^2 \sin 2\gamma,$$



Slika 2.10: Opisana kružnica

odnosno,

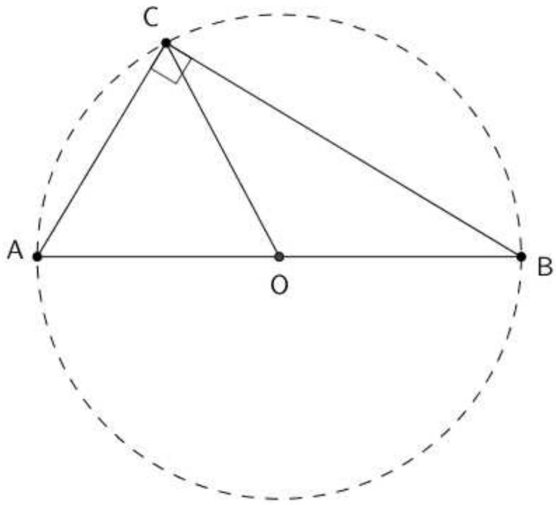
$$P(OBC) : P(AOC) : P(ABO) = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

Stoga je središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta točka

$$O(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma).$$

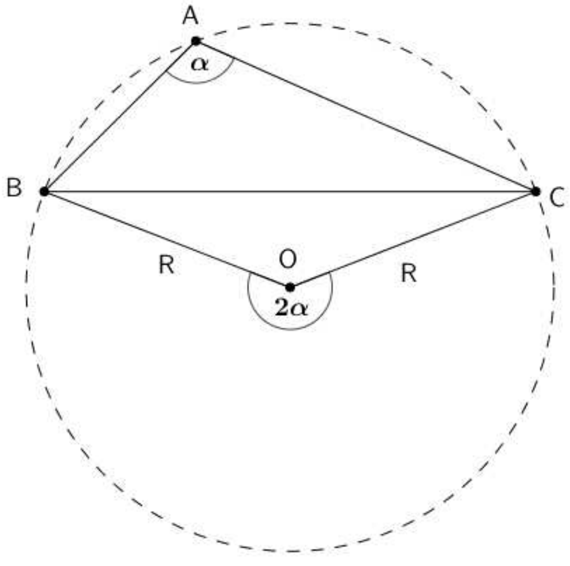
Preostaje nam još provjeriti vrijede li dobivene formule i u slučaju kada je trokut ABC pravokutan odnosno tupokutan.
Neka je sada trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C.

Za trokute OBC i AOC izvedene formule očito ostaju vrijediti dok je za trokut ABO potrebna kratka diskusija. Kao posljedica Talesovog teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice, imamo da se središte opisane kružnice pravokutnog trokuta nalazi na polovištu hipotenuze, odnosno, stranice $\overline{AB}$. U tom slučaju trokut ABO je degeneriran te je njegova



Slika 2.11: Opisana kružnica pravokutnog trokuta

površina jednaka 0, a time je i z koordinata točke O jednaka 0. Budući da je sinus ispruženog kuta 0 imamo da formule vrijede i u slučaju pravokutnog trokuta.
U slučaju kada je trokut tupokutan, središte opisane kružnice nalazi se izvan trokuta.



Slika 2.12: Opisana kružnica tupokutnog trokuta

Neka je trokut ABC tupokutan s tupim kutom pri vrhu A. Tada se središte opisane kružnice i vrh A nalaze na suprotnim stranama pravca BC (slika 2.2) što znači da je orijentirana površina trokuta OBC negativna. Imamo da je orijentirana površina trokuta OBC jednaka

$$P(OBC) = -\frac{1}{2}R^2\sin(360^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha.$$

Uočimo da je orijentirana površina računata ovom formulom uistinu negativna budući da je $\alpha > 90^\circ$ te $2\alpha > 180^\circ$ pa je $\sin 2\alpha < 0$. Time smo dokazali da izvedene formule uistinu daju orijentirane površine trokuta OBC, AOC i ABC neovisno o vrsti trokuta te je središte opisane kružnice proizvoljnog trokuta točka

$$O(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma).$$

Iz ranije izvedenog znamo da kružnica u baricentričnom koordinatnom sustavu ima jednadžbu oblika

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0.$$

Uvrštavanjem koordinata točke $A(1 : 0 : 0)$ dobivamo da je $u = 0$, točke $B(0 : 1 : 0)$ da je $v = 0$ te konačno točke $C(0 : 0 : 1)$ da je $w = 0$. Time imamo da je jednadžba opisane kružnice referentnog trokuta

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0.$$

Ortocentar trokuta

Definicija 2.2.7. *Visina trokuta je dužina čije su krajnje točke vrh trokuta i točka u kojoj okomica iz tog vrha siječe pravac na kojem leži nasuprotna stranica.*

Neka je $N_a(0 : y : z)$ nožište visine iz vrha A trokuta ABC. Promotrimo najprije slučaj kada su kutovi pri vrhovima B i C šiljasti, odnosno kada se nožište visine iz vrha A nalazi u unutrašnjasti stranice $\overline{BC}$. Primjenom trigonometrijskih omjera na trokut ABN_a i trokut AN_aC dobivamo da je

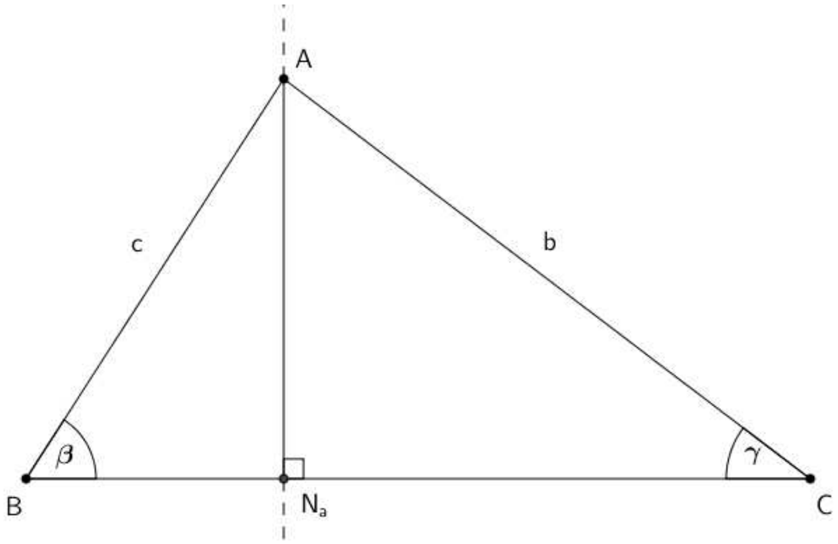
$$|CN_a| = b\cos\gamma \text{ i } |BN_a| = c\cos\beta.$$

Prema teoremu o sinusima imamo da je $b = 2R\sin\beta$ i $c = 2R\sin\gamma$ pa kada to uvrstimo u gornje jednakosti dobivamo da je

$$|CN_a| = 2R\sin\beta\cos\gamma$$

i

$$|BN_a| = 2R\sin\gamma\cos\beta.$$



Slika 2.13: Visina trokuta

Dobivene izraze stavimo u omjer

$$\frac{|CN_a|}{|BN_a|} = \frac{2R\sin\beta\cos\gamma}{2R\sin\gamma\cos\beta}$$

pa je

$$\frac{|CN_a|}{|BN_a|} = \frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\gamma\cos\beta}.$$

Za koordinate točke N_a vrijedi da je

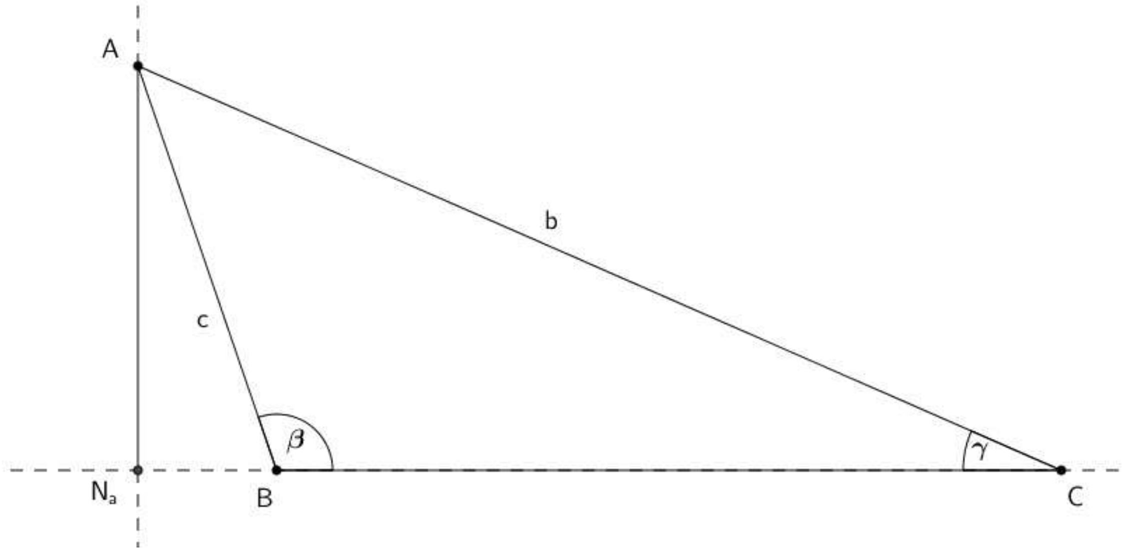
$$y : z = \sin\beta\cos\gamma : \sin\gamma\cos\beta$$

stoga je

$$N_a(0 : \sin\beta\cos\gamma : \sin\gamma\cos\beta).$$

Preostaje nam još provjeriti vrijede li dobivene formule i u slučaju kada je trokut pravokutan ili tupokutan s pravim, odnosno, tupim kutom pri vrhu B ili C.

Neka je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Tada znamo da se nožište visine iz vrha A podudara s vrhom C te je time $N_a(0 : 0 : 1)$. Kako je $\cos 90^\circ = 0$ imamo da dobivene formule vrijede u slučaju pravokutnog trokuta.
U slučaju da je ABC tupokutan trokut s tupim kutom pri vrhu B (slika 2.14) imamo da se nožište visine iz vrha A nalazi izvan trokuta pa su time $\overline{BN_a}$ i $\overline{N_aC}$ suprotno orijentirne i



Slika 2.14: Visina trokuta - tupi kut

omjer njihovih orijentiranih duljina je negativan. Dok se za $\overline{N_aC}$ lako vidi da vrijedi gore izvedena formula, za $\overline{BN_a}$ ipak moramo napraviti mali izvod. Kako se u ovom slučaju trokut ABN_a nalazi izvan referentnog trokuta imamo da je

$$|BN_a| = 2R\sin\gamma\cos(180^\circ - \beta) = -2R\sin\gamma\cos\beta$$

jer je $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta$. Pa je time omjer orijentiranih duljina

$$BN_a : N_aC = 2R\sin\gamma\cos\beta : \sin\beta\cos\gamma.$$

Uočimo da ovom formulom zaista dobivamo negativan omjer budući da je kosinus tupog kuta negativan. Time smo pokazali da dobivene formule vrijede neovisno o vrsti trokuta.
Analogno dobivamo formule i za preostala nožišta

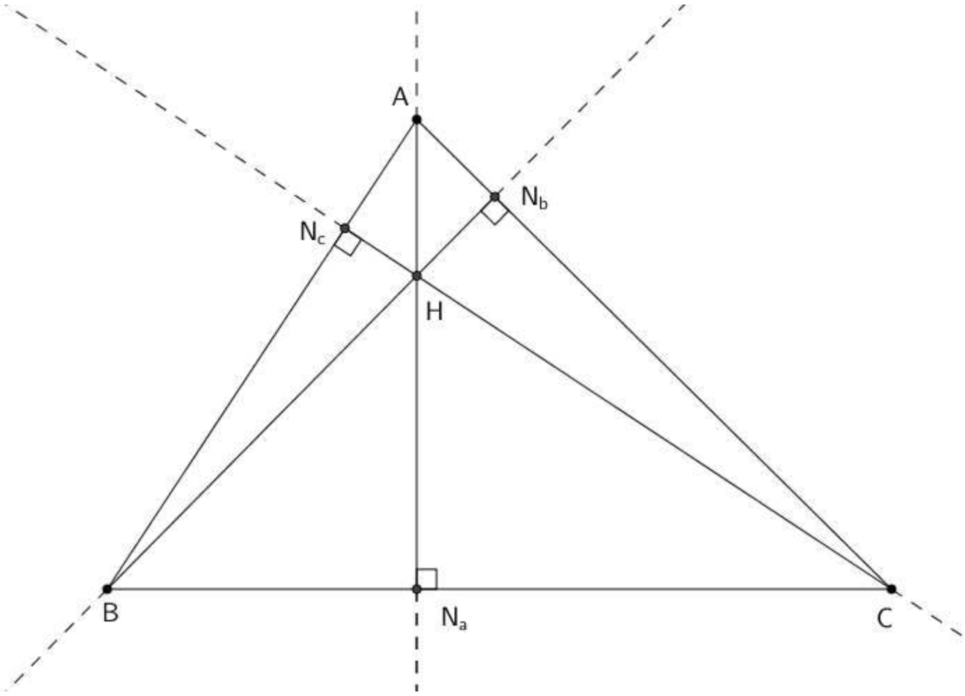
$$N_b(\sin\alpha\cos\gamma : 0 : \sin\gamma\cos\alpha) \;\text{ i }\; N_c(\sin\alpha\cos\beta : \sin\beta\cos\alpha : 0).$$

Teorem 2.2.8. *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Prema teoremu 2.1.3 pravci AN_a, BN_b i CN_c se sijeku u točki

$$H(\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma : \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma : \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta).$$

□



Slika 2.15: Ortocentar trokuta

Točku H iz teorema nazivamo ortocentar trokuta. Ukoliko trokut ABC nije pravokutan koordinate ortocentra možemo podijeliti s $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \neq 0$ čime dobivamo da u tom slučaju ortocentar trokuta ima koordinate

$$H(\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma).$$

Teorem 2.2.9. *(Eulerov pravac) Središte O opisane kružnice trokutu, težište T i ortocentar H leže na jednom pravcu pri čemu vrijedi $\overrightarrow{HT} = -2\overrightarrow{OT}$.*

Dokaz teorema slijedi prema [1]

Dokaz. Točke O, T i H su kolinearne ako i samo ako se točka T može zapisati kao linearna kombinacija točaka O i H. Nadalje, $\overrightarrow{HT} = -2\overrightarrow{OT}$ ako i samo ako je

$$T = \frac{H + 2O}{3}.$$

Kako bismo dokazali obje tvrdnje teorema dovoljno je pokazati da je

$$3T = H + 2O.$$

Najprije moramo normalizirati koordinate točaka O, T i H. Za težište trokuta normalizirane baricentrične koordinate su nam već poznate i to su

$$T = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Za središte opisane kružnice normalizirane baricentrične koordinatena dane su sa

$$O = \frac{1}{P(ABC)}\,(P(OBC), P(AOC), P(ABO))$$

Ranije smo izveli formule (2.1), (2.2) i (2.3) za orijentirane površine

$$P(OBC) = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha, \quad P(AOC) = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\beta \quad \text{i} \quad P(ABO) = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\gamma$$

te za površinu referentnog trokuta znamo formulu $P(ABC) = rs$. Prema tome imamo da je

$$O = \frac{1}{rs}\Big(\frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha, \frac{1}{2}R^2 \sin 2\beta, \frac{1}{2}R^2 \sin 2\gamma\Big),$$

odnosno,

$$O\Big(\frac{1}{2rs}R^2 \sin 2\alpha, \frac{1}{2rs}R^2 \sin 2\beta, \frac{1}{2rs}R^2 \sin 2\gamma\Big).$$

Ranije smo pokazali da je

$$H(\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma : \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma : \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta).$$

Koordinate ortocentra ćemo normalizirati tako što ćemo ih podijeli s njihovom sumom. Imamo da je

$$\begin{aligned}
x + y + z &= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\\
&= \cos\gamma\,(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\\
&= \cos\gamma\sin(\alpha+\beta) + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\\
&= \cos\gamma\sin(180^\circ - \gamma) + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\\
&= \cos\gamma\sin\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta\\
&= \sin\gamma\,(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)\\
&= \sin\gamma\,(\cos(180^\circ - (\alpha+\beta)) + \cos\alpha\cos\beta)\\
&= \sin\gamma\,(-\cos(\alpha+\beta) + \cos\alpha\cos\beta)\\
&= \sin\gamma\,(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta)\\
&= \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.
\end{aligned}$$

U raspisu smo koristili trigonometrijske identitete za sinus zbroja i kosinus zbroja te parnost i periodičnost kosinusa. Sada imamo da je

$$H = \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}(\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma, \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma, \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta).$$

Prema poučku o sinusima imamo da je $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, $\sin\beta = \frac{b}{2R}$ i $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$, pa je

$$H = \frac{8R^3}{abc}\left(\frac{a}{2R}\cos\beta\cos\gamma, \frac{b}{2R}\cos\alpha\cos\gamma, \frac{c}{2R}\cos\alpha\cos\beta\right),$$

odnosno,

$$H = \frac{4R^2}{abc}\left(a\cos\beta\cos\gamma, b\cos\alpha\cos\gamma, c\cos\alpha\cos\beta\right).$$

Poznate su nam formule za površinu trokuta $P = rs$ i $P = \dfrac{abc}{4R}$ pa je $\dfrac{1}{rs} = \dfrac{4R}{abc}$ time imamo da je

$$H = \frac{R}{rs}\left(a\cos\beta\cos\gamma, b\cos\alpha\cos\gamma, c\cos\alpha\cos\beta\right).$$

Konačno, normalizirane koordinate ortocentra su

$$H\left(\frac{aR}{rs}\cos\beta\cos\gamma, \frac{bR}{rs}\cos\alpha\cos\gamma, \frac{cR}{rs}\cos\alpha\cos\beta\right).$$

Sada imamo normalizirane koordinate sve tri točke pa možemo dokazati jednakost $3T = H + 2O$. Primijetimo da je dovoljno provjeriti vrijedi li jednakost za x koordinate. Zbog simetričnosti izraza, jednakost za y i z koordinate dokazuje se analogno. Želimo pokazati da vrijedi jednakost

$$3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{aR}{rs}\cos\beta\cos\gamma + 2 \cdot \frac{R^2}{2rs}\sin 2\alpha.$$

Primjenom trigonometrijskih identiteta, formula i relacija raspisat ćemo desnu stranu jednakosti.

Vrijedi da je $\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$ i $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ pa je

$$\frac{aR}{rs}\cos\beta\cos\gamma + 2 \cdot \frac{R^2}{2rs}\sin 2\alpha = \frac{aR}{rs}(\cos(\beta+\gamma) + \sin\beta\sin\gamma) + \frac{R^2}{rs}2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Iz zbroja mjera unutarnjih kutova trokuta slijedi da je $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ te prema poučku o sinusima imamo da je $a = 2R\sin\alpha$. Uvrštavanjem dobivenih izraza imamo

$$\frac{aR}{rs}\cos\beta\cos\gamma + 2 \cdot \frac{R^2}{2rs}\sin 2\alpha = \frac{aR}{rs}(\cos(180^\circ - \alpha) + \sin\beta\sin\gamma) + \frac{aR}{rs}\cos\alpha.$$

Kako je $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ imamo

$$\begin{aligned}\frac{aR}{rs}(\cos(180^\circ - \alpha) + \sin\beta\sin\gamma) + \frac{aR}{rs}\cos\alpha &= \frac{aR}{rs}(-\cos\alpha + \sin\beta\sin\gamma) + \frac{aR}{rs}\cos\alpha \\ &= \frac{aR}{rs}\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}$$

Ponovo iskoristimo poučak o sinusima pa imamo

$$\frac{aR}{rs}\sin\beta\sin\gamma = \frac{aR}{rs}\frac{bc}{4R^2}.$$

gdje prepoznajemo formule za površinu trokuta $P = rs$ i $P = \frac{abc}{4R}$

$$\frac{aR}{rs}\frac{bc}{4R^2} = \frac{1}{rs}\frac{abc}{4R}.$$

pa je time izraz konačno jednak

$$\frac{1}{rs}\frac{abc}{4R} = 1.$$

čime smo pokazali da jednakost vrijedi i dokazali tvrdnju teorema. □

2.3 Izotomične i izogonalne točke

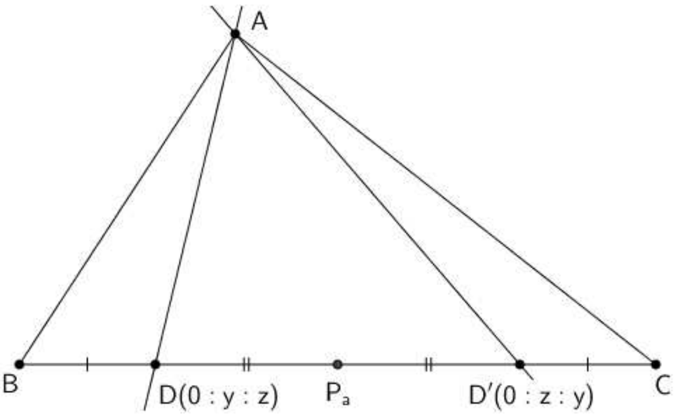
Izotomične točke

Definicija 2.3.1. *Neka je dan trokut ABC, te neka su D i D' točke na pravcu BC simetrične u odnosu na polovište P_a dužine $\overline{BC}$. Za pravce AD i AD' kažemo da su izotomični.*

Neka je $D(0 : y : z)$ točka na pravcu BC. Neka je D' točka na pravcu BC takva da su pravci AD i AD' izotomični. Kako su D i D' po definiciji simetrične u odnosu na točku P_a vrijedi $DP_a = P_aD'$. Budući da se radi o polovištu stranice imamo da je $D'C = BD$ i $BD' = DC$. Prema tome vrijedi $BD' : D'C = DC : BD$. Prema teoremu 1.1.2 imamo da je $BD : DC = z : y$ pa je $BD' : D'C = y : z$. Stoga su baricentrične koordinate točke

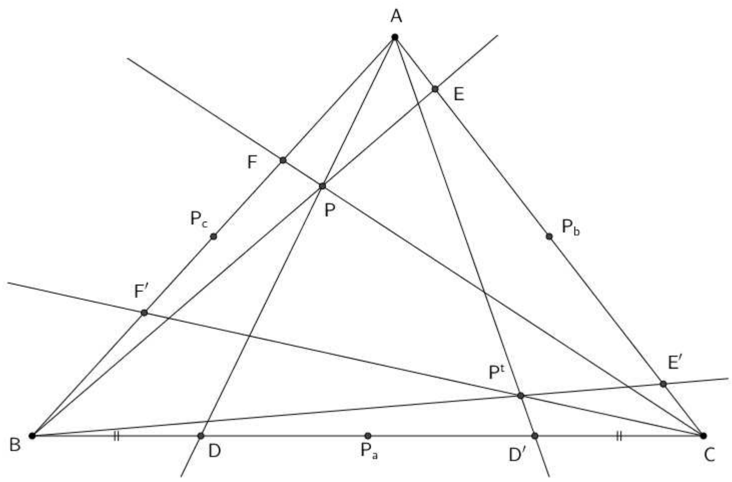
$$D'(0 : z : y).$$

Teorem 2.3.2. *Neka je dan trokut ABC te neka su D, E i F redom točke na stranicama BC, AC i AB takve da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki P. Tada se njima izotomični pravci AD', BE' i CF' također sijeku u jednoj točki.*



Slika 2.16: Izotomični pravci trokuta

Dokaz. Neka je $P = (x : y : z)$ prema teoremu 2.1.3 vrijedi $D = (0 : y : z)$, $E = (x : 0 : z)$ i $F = (x : y : 0)$. Prema ranije izvedenom imamo da je $D' = (0 : z : y)$, $E' = (z : 0 : x)$ i $F' = (y : x : 0)$.
Prema teoremu 2.1.3 pravci AD', BE' i CF' se sijeku u točki $P^t(yz : xz : xy)$. □



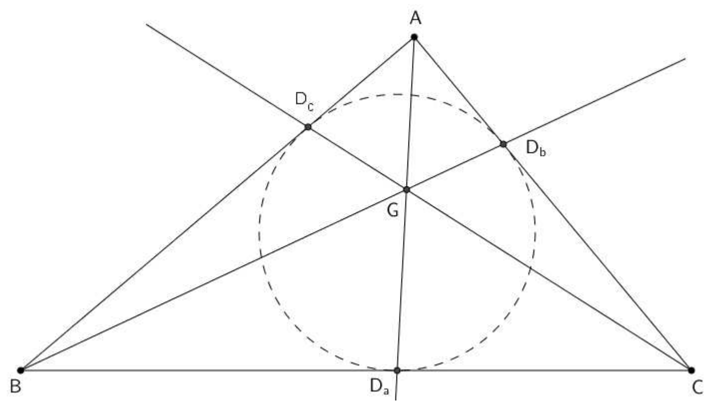
Slika 2.17: Izotomično konjugirani par točaka

Definicija 2.3.3. *Za točke P i P^t opisane u teoremu 2.3.2 kažemo da su izotomično konjugirani par točaka, odnosno, kažemo da je točka P^t izotomični konjugat točki P.*

Teorem 2.3.4. *Izotomični konjugat točke $P(x : y : z)$ je točka $P^t(yz : xz : xy)$.*

Iz definicije izotomično konjugiranih točaka lako vidi da je svim točkama pravca BC izotomično konjugirani par točka A, točkama pravca CA točka B te točkama pravca AB točka C. Neka je točka $P(x : y : z)$ točka koja ne leži na pravcima određenim vrhovima trokuta ABC, $x, y, z \neq 0$. Budući da je $x, y, z \neq 0$, koordinate njoj izotomičnoj točki $P^t(yz : xz : xy)$ možemo podjeliti s $xyz \neq 0$. Time dobivamo da je $P^t\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right)$.
Zanimljivo je spomenuti da je težište $T(1 : 1 : 1)$ jedina točka ravnine koja je sama sebi izotomična. Također, karakteristične točke trokuta Gergonneova i Nagelova točka su međusobno izotomične točke. U nastavku ćemo odrediti baricentrične koordinate Gergonneove točke, a zatim ćemo pomoću teorema 2.3.4 odrediti koordinate Nagelove točke.

Teorem 2.3.5. *(Gergonne) Neka su D_a, D_b i D_c dirališta upisane kružnice trokuta ABC redom sa stranicama BC, CA i AB. Tada se pravci AD_a, BD_b, CD_c sijeku u jednoj točki.*



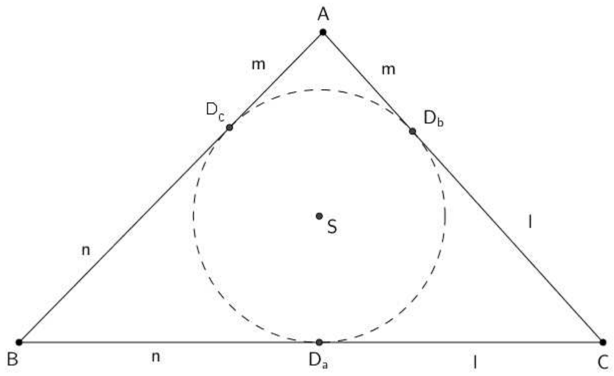
Slika 2.18: Gergonneova točka

Dokaz. Promotrimo upisanu kružnicu trokuta. Neka su D_a, D_b i D_c dirališta upisane kružnice sa stranicama trokuta. Kako su pravci AB, BC i CA tangente trokutu upisane kružnice te kako su odsječci tangenata povučenih iz neke točke na kružnicu sukladni imamo da je $|AD_b| = |AD_c| = m$, $|BD_c| = |BD_a| = n$ i $|CD_a| = |CD_b| = l$, gdje su m, n i l realni brojevi. Odavde slijedi da za opseg trokuta vrijedi

$$O = 2(m + n + l).$$

Ako prethodnu jednakost podijelimo s 2 imamo da je

$$s = m + n + l,$$



Slika 2.19: Dirališta upisane kružnice

gdje je s poluopseg trokuta. Kako je $n + l = a$, $m + l = b$ i $m + n = c$ vrijedi da je $m = s - a$, $n = s - b$ i $l = s - c$. Prema teoremu 1.1.2 slijedi da je $D_a(0 : s-c : s-b)$, $D_b(s-c : 0 : s-a)$ i $D_c(s - b : s - a : 0)$. Primjenom svojstva homogenosti koordinata imamo da je

$$D_a\left(0 : \tfrac{1}{s-b} : \tfrac{1}{s-c}\right),\ D_b\left(\tfrac{1}{s-a} : 0 : \tfrac{1}{s-c}\right) \text{ i } D_c\left(\tfrac{1}{s-a} : \tfrac{1}{s-b} : 0\right)$$

Prema teoremu 2.1.3 pravci AD_a, BD_b i CD_c sijeku u točki

$$G\left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}\right).$$

□

Točku $G\left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}\right)$ iz prethodnog teorema nazivamo Gergonneova točka.

Teorem 2.3.6. *(Nagel) Neka su D'_a, D'_b i D'_c dirališta pripisanih kružnica trokuta ABC redom sa stranicama BC, CA i AB. Tada se pravci AD'_a, BD'_b , CD'_c sijeku u jednoj točki.*

Slično kao u dokazu teorema 2.3.5 dobiva se

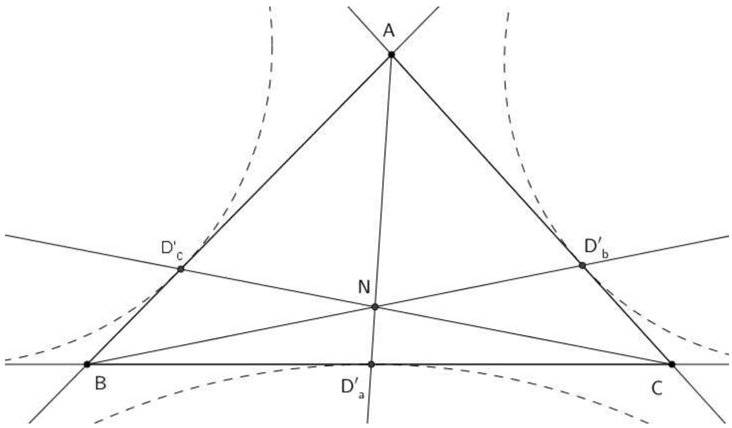
$$\left|CD'_b\right| = \left|BD'_c\right| = s - a,$$

$$\left|AD'_c\right| = \left|CD'_a\right| = s - b$$

i

$$\left|BD'_a\right| = \left|AD'_b\right| = s - c$$

iz čega se zatim lako vidi da su pravci AD'_a, BD'_b , CD'_c izotomični redom pravcima AD_a, BD_b , CD_c. Točka u kojoj se sijeku pravci AD'_a, BD'_b , CD'_c iz teorema zove se Nagelova točka te je ona prema teoremu 2.3.2 izotomičan konjugat Gergonneove točke. Prema teoremu 2.3.4 i teoremu 2.3.5 imamo da je $N\big((s - a) : (s - b) : (s - c)\big)$.



Slika 2.20: Nagelova točka

Izogonalne točke

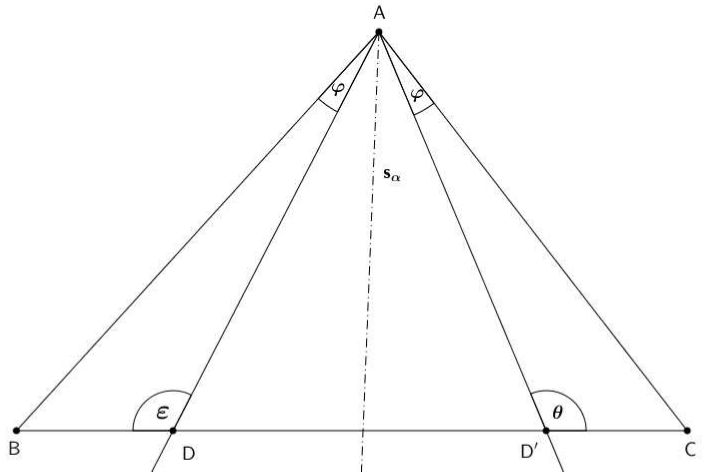
Definicija 2.3.7. *Neka je dan trokut ABC i pravac p koji prolazi vrhom A. Neka je q osnosimetrična slika pravca p s obzirom na simetralu kuta* $\measuredangle BAC$*. Par pravaca p i q nazivamo izogonalama kuta* $\measuredangle BAC$ *te kažemo da je pravac q izogonalan pravcu p u odnosu na kut* $\measuredangle BAC$*, i obratno.*

Simetričnost pravaca p i q s obzirom na simetralu kuta trokuta ABC povlači da izogonalni pravci sa simetralom zatvaraju sukladne kutove, a budući da se radi o simetrali kuta to imamo da su kutovi koje izogonalni pravci zatvaraju sa stranicama trokuta također sukladni.

Teorem 2.3.8. *Neka su D, E, F redom točke na pravcima BC, CA, AB. Ako su pravci AD, BE i CF konkurentni, tada su i njima izogonalni pravci također konkurentni.*

Dokaz. Neka je $P(x : y : z)$ točka u kojoj se sijeku pravci AD, BE i CF. Prema teoremu 2.1.3 imamo da je $D(0 : y : z)$, $E(x : 0 : y)$ i $F(x : y : 0)$. Neka je D' točka na pravcu BC takva da su pravci AD i AD' izogonalni u odnosu na kut $\measuredangle BAC$.
Označimo sa φ orijentiranu mjeru sukladnih kutova $\measuredangle BAD$ i $\measuredangle D'AC$. Za pozitivnu orijentaciju kutova u baricentričnom koordinatnom sustavu uzimamo orijentaciju kutova $\measuredangle BAC$, $\measuredangle CBA$ i $\measuredangle ACB$. Sa θ označimo mjeru kuta $\measuredangle ADB$, a s ε mjeru kuta $\measuredangle CD'A$. Primjenom poučka o sinusima na trokute ABD i ADC te na trokute $AD'C$ i ABD' dobivamo redom jednakosti

$$\frac{\sin\varphi}{BD} = \frac{\sin\theta}{c},$$



Slika 2.21: Izogonale trokuta

$$\frac{DC}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{b}{\sin(180^\circ-\theta)},$$
$$\frac{CD'}{\sin\varphi} = \frac{b}{\sin\varepsilon},$$
$$\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{BD'} = \frac{\sin(180^\circ-\varepsilon)}{c}$$

odakle množenjem sve četiri jednakosti slijedi da je

$$\frac{CD}{BD}\cdot\frac{CD'}{BD'} = \frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{\sin(180^\circ-\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(180^\circ-\theta)}.$$

Zbog jednakosti sinusa suplementarnih kutova imamo da je

$$\frac{CD}{BD}\cdot\frac{CD'}{BD'} = \frac{b^2}{c^2}.$$

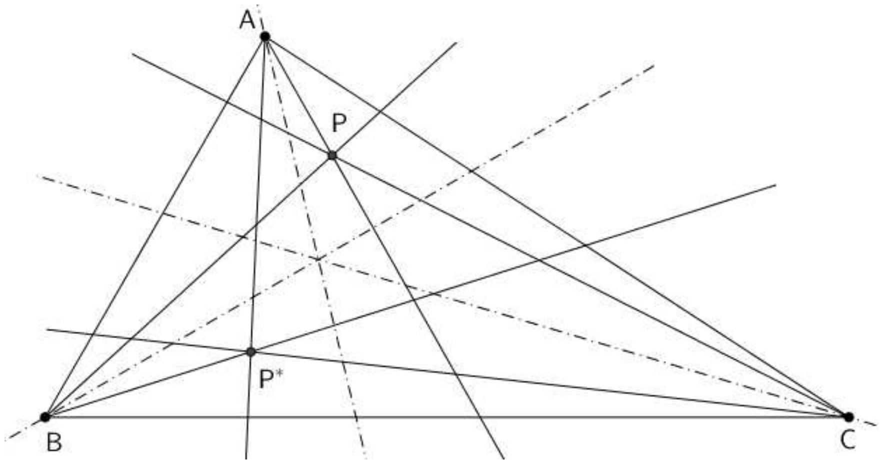
Kako je $CD : BD = y : z$ slijedi da je

$$\frac{CD'}{BD'} = \frac{b^2 z}{c^2 y}$$

te time dobivamo da su baricentričke koordinate točke $D'\left(0 : b^2 z : c^2 y\right)$. Analogno dobivamo da je $E'\left(a^2 z : 0 : c^2 x\right)$ i $F'\left(a^2 y : b^2 x : 0\right)$. Prema teoremu 2.1.3 slijedi da se pravci AD', BE' i CF' sijeku u točki

$$P^*\left(a^2 yz : b^2 xz : c^2 xy\right).$$

□



Slika 2.22: Izogonalni konjugati

Teorem 2.3.9. *Izogonalni konjugat točke $P(x : y : z)$ je točka $P^*\left(a^2yz : b^2xz : c^2xy\right)$.*

Neka je točka P točka koja ne leži na pravcima određenim vrhovima trokuta ABC, tada su baricentričke koordinate njoj izogonalno konjugirane točke

$$P^*\left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right).$$

Izogonale pravaca na kojima leže težišnice trokuta nazivaju se simedijane trokuta, a točka u kojoj se sijeku Lemoineova točka koja je time izogonalno konjugirana točka težišta. Kako je težište trokuta točka

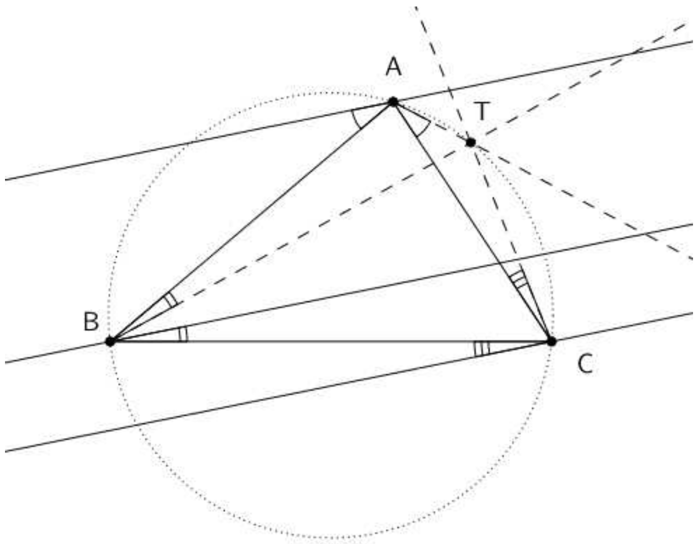
$$T(1 : 1 : 1)$$

prema teoremu 2.3.9 slijedi da je Lemoineova točka točka

$$L(a^2 : b^2 : c^2)$$

Teorem 2.3.10. *Izogonalno konjugirane točke točaka opisane kružnice trokuta različite od vrhova tog trokuta su beskonačno daleke točke.*

Dokaz. Neka je točka $T(x : y : z)$ proizvoljna točka opisane kružnice trokuta ABC različita od vrhova tog trokuta. Tada vrijedi da je $xyz \neq 0$. Kako točka T pripada opisanoj kružnici



Slika 2.23: Izogonalno konjugirane točke točaka opisane kružnice

trokuta njene koordinate zadovoljavaju jednadžbu $a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$ odnosno, kada jednadžbu podijelimo s $xyz \neq 0$ imamo da za koordinate točke T vrijedi

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0.$$

Primijetimo da je lijeva strana jednakosti zapravo suma koordinata točke T^* što znači da se radi o beskonačno dalekoj točki. □

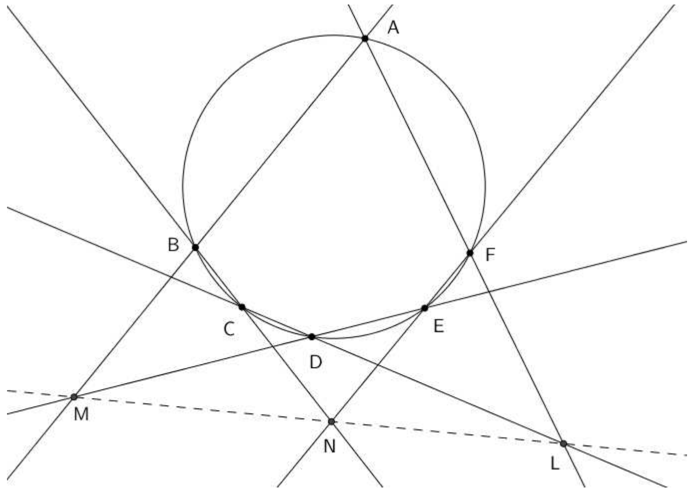
2.4 Pascalov teorem

Teorem 2.4.1. *(Pascalov teorem) Neka su A, B, C, D, E i F proizvoljne točke na kružnici k. Tada se parovi pravaca AB i DE, BC i EF, CD i FA sijeku u tri kolinearne točke.*

Dokaz teorema slijedi prema [2].

Dokaz. U dokazu ovog teorema izbor trokuta ABC kao referentnog trokuta u baricentričnom sustavu nije najbolje rješenje. Kako bismo olakšali određivanje presjeka navedenih pravcaca, za vrhove referentnog trokuta želimo odabrati točke takve da barem neki od tih pravaca budu cevijane referentnog trokuta. Odabirom trokuta AEC za referentni trokut imamo da su svi navedeni pravci cevijane. Neka je $|EC| = a$, $|CA| = e$ i $|AE| = c$.

$$A(1:0:0),\ E(0:1:0),\ C(0:0:1)$$



Slika 2.24: Pascalov teorem

Neka je $B(x_1 : y_1 : z_1)$, $D(x_2 : y_2 : z_2)$ i $F(x_3 : y_3 : z_3)$. Kako su vrhovi referentnog trokuta jedine točke na njemu opisanoj kružnici kojima je barem jedna koordinata 0, znamo da za koordinate točaka B, D i F vrijedi $x_i y_i z_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Definirajmo točke

$$M \in AB \cap ED,$$

$$N \in CB \cap EF,$$

$$L \in CD \cap FA.$$

Tada je

$$M\left(\frac{x_2}{z_2} : \frac{y_1}{z_1} : 1\right),\ N\left(1 : \frac{y_1}{x_1} : \frac{z_3}{x_3}\right),\ L\left(\frac{x_2}{y_2} : 1 : \frac{z_3}{y_3}\right).$$

Prema kriteriju kolinearnosti tri točke, točke M, N i L su kolinearne ako i samo ako je

$$\begin{vmatrix} \frac{x_2}{z_2} & \frac{y_1}{z_1} & 1 \\ 1 & \frac{y_1}{x_1} & \frac{z_3}{x_3} \\ \frac{x_2}{y_2} & 1 & \frac{z_3}{y_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Kako bi dokazali da je determinanta uistinu jednaka 0 iskoristit ćemo činjenicu da točke A, B, C, D, E i F leže na kružnici k. Budući da je k kružnica opisana referentnom trokutu AEC, koordinate točaka B, D i F zadovoljavaju jednadžbu

$$a^2yz + e^2xz + c^2xy = 0.$$

Kada jednadžbu podijelimo s umnoškom $xyz \neq 0$, dobivamo da za točke B, D i F vrijedi

$$a^2\frac{1}{x} + e^2\frac{1}{y} + c^2\frac{1}{z} = 0.$$

Promotrimo sada sustav jednadžbi

$$\begin{cases} a^2\frac{1}{x_1} + e^2\frac{1}{y_1} + c^2\frac{1}{z_1} = 0 \\ a^2\frac{1}{x_2} + e^2\frac{1}{y_2} + c^2\frac{1}{z_2} = 0 \\ a^2\frac{1}{x_3} + e^2\frac{1}{y_3} + c^2\frac{1}{z_3} = 0 \end{cases}$$

u kojemu su a^2, e^2, c^2 nepoznanice.
Budući da su brojevi a, e i c duljine stranica trokuta AEC te koordinate točaka $B(x_1 : y_1 : z_1)$, $D(x_2 : y_2 : z_2)$ i $F(x_3 : y_3 : z_3)$ zadovoljavaju jednadžbu kružnice opisane trokutu AEC predhodni sustav je očito rješiv i ima netrivijalno rješenje (a^2, e^2, c^2). Iz područja linearne algebre nam je poznato da homogeni sustav ima netrivijalno rješenje ako i samo ako pripadna matrica sustava nije punog ranga, odnosno, ako i samo ako je determinanta matrice sustava jednaka 0. Stoga imamo da je

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{y_1} & \frac{1}{z_1} \\ \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{z_2} \\ \frac{1}{x_3} & \frac{1}{y_3} & \frac{1}{z_3} \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno,

$$\frac{1}{y_1x_2z_3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 1 & \frac{y_1}{z_1} \\ 1 & \frac{x_2}{y_2} & \frac{x_2}{z_2} \\ \frac{z_3}{x_3} & \frac{z_3}{y_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

što smo dobili kad smo iz prvog reda determinante izlučili $\frac{1}{y_1}$, iz drugog $\frac{1}{x_2}$, a iz trećeg $\frac{1}{z_3}$.
Prema tome vrijedi

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 1 & \frac{y_1}{z_1} \\ 1 & \frac{x_2}{y_2} & \frac{x_2}{z_2} \\ \frac{z_3}{x_3} & \frac{z_3}{y_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Znamo da za determinante ekvivalentnih matrica vrijedi da su ili obje jednake 0 ili obje različite od 0. Sada prethodnoj determinanti zamjenimo drugi i treći, a zatim prvi i drugi stupac čime dobivamo da je

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1}{z_1} & \frac{y_1}{x_1} & 1 \\ \frac{x_2}{z_2} & 1 & \frac{x_2}{y_2} \\ 1 & \frac{z_3}{x_3} & \frac{z_3}{y_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Sada zamjenimo prvi i drugi redak

$$\begin{vmatrix} \frac{x_2}{z_2} & 1 & \frac{x_2}{y_2} \\ \frac{y_1}{z_1} & \frac{y_1}{x_1} & 1 \\ 1 & \frac{z_3}{x_3} & \frac{z_3}{y_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Kako se transponiranjem matrice determinanta ne mijenja, slijedi da je

$$\begin{vmatrix} \frac{x_2}{z_2} & \frac{y_1}{z_1} & 1 \\ 1 & \frac{y_1}{x_1} & \frac{z_3}{x_3} \\ \frac{x_2}{y_2} & 1 & \frac{z_3}{y_3} \end{vmatrix} = 0$$

što smo i htjeli. I time smo dokazali kolinearnost točaka M, N i L. □

Primijetimo da nigdje u iskazu ili dokazu Pacsalovog teorema nismo stavili uvjet na pravce ili točke M, N i L, odnosno, na njihove koordinate pa smo ovim dokazom pokazali da Pascalov teorem vrijedi i za parove paralelnih pravaca koji se sijeku u beskonačno dalekoj točki.

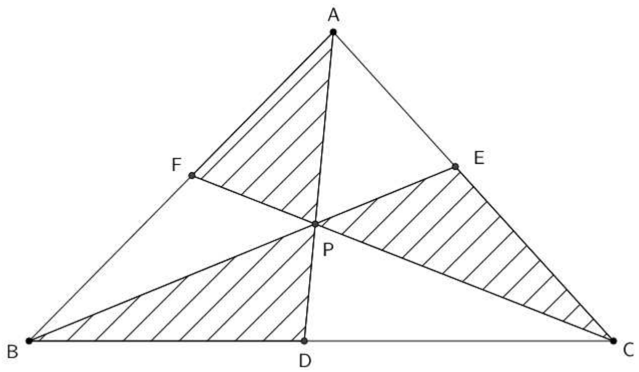
Poglavlje 3

Zadaci

U analitičkoj geometriji koordinatna metoda je osnovna metoda dokazivanja tvrdnji i rješavanja zadataka. Koordinatna metoda s baricentričnim koordinatama može se pokazati vrlo korisnom u geometriji trokuta budući da je upravo trokut referentni sustav u baricentričnom koordinatnom sustavu. Odabirom ove metode postižemo da vrhovi referentnog trokuta, kao i točke pravaca na kojima leže stranice referentnog trokuta, imaju vrlo jednostavne koordinate. Ako se odlučimo za ovu metodu riješavanja zadataka prvi i osnovni izazov je odabir referentnog trokuta. Za vrhove referentnog trokuta najčešće odabiremo neke od istaknutih točaka u zadatku takve da većina preostalih elementa u zadatku imaju "posebnu ulogu" s obzirom na taj trokut. Drugim riječima, želimo da su barem neki od spomenutih pravaca cevijane tog trokuta te ako je moguće da su kružnice u zadatku opisane ili upisane tom trokutu. Baricentrični koordinatni sustav nam također omogućuje jednostavan način određivanja presjeka dvije cevijane te konkurentnosti tri cevijane. Homogenost baricentričnih koordinata nam omogućuje različite načine određivanja koordinata pojedinih točaka te je još jedna prednost ove metode što većina karakterističnih točaka trokuta ima jednostavne koordinate. Homogenost jednadžbe pravca i kružnice uvelike olakšava njihovo određivanje i računanje njima. Kriterij kolinearnosti tri točke i kriterij paralelnosti pravaca svodi se na računanje determinante trećeg reda što isto tako ne predstavlja veliki problem. Nadalje, iako je jedna prednost jednadžbe kružnice u baricentričnom koordinatnom sustavu njena homogenost, sama jednadžba nije uvijek najjednostvanija, pogotovo u slučajevima kada se radi o kružnici koja ne sadrži vrhove trokuta ili ne siječe pravce na kojima leže stranice trokuta. U nastavku rada riješit ćemo tri zadatka s matematičkih natjecanja koordinatnom metodom u baricentričnom koordinatnom sustavu.

Primjer 3.0.1. *(USA The Team Selection Test 2003) Neka je ABC trokut te neka je P točka u njegovoj unutrašnjosti. Neka pravci AP, BP, CP sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u točkama D, E, F redom. Dokažite da je $P(PAF) + P(PBD) + P(PCE) = \frac{1}{2}P(ABC)$ ako i samo ako P leži na jednoj od težišnica trokuta ABC.*

Rješenje:



Slika 3.1: Primjer 3.0.1

Neka je $P(x, y, z)$. Kako se točka P po pretpostavci zadatka nalazi u unutrašnjosti trokuta vrijedi $x, y, z > 0$.
Tada je $P(ABP) = zP(ABC)$. Kako je $AF : FB = y : x$, vrijedi $AF : AB = y : (y + x)$ pa je

$$P(PAF) = \frac{y}{x+y}P(PAB).$$

Kako je $P(PAB) = zP(ABC)$ imamo da je

$$P(PAF) = \frac{yz}{x+y}P(ABC).$$

Analogno dobivamo

$$P(PBD) = \frac{zx}{y+z}P(ABC) \quad \text{i} \quad P(PCE) = \frac{xy}{z+x}P(ABC).$$

Pretpostavimo da je

$$P(PAF) + P(PBD) + P(PCE) = \frac{1}{2}P(ABC).$$

Uvrstimo li ranije obivene izraze u jednakost imamo

$$\frac{yz}{x+y}P(ABC) + \frac{zx}{y+z}P(ABC) + \frac{xy}{z+x}P(ABC) = \frac{1}{2}P(ABC).$$

Dijeljenjem jednakosti s $P(ABC) \neq 0$ dobivamo

$$\frac{yz}{x+y} + \frac{xz}{y+z} + \frac{xy}{z+x} = \frac{1}{2}.$$

Kako je točka P zadana normaliziranim baricentričnim koordinatama, tj. vrijedi da je $x + y + z = 1$, prethodnu jednakost možemo zapisati kao

$$\frac{y(1-x-y)}{x+y} + \frac{(1-y-z)z}{y+z} + \frac{x(1-x-z)}{z+x} = \frac{1}{2}.$$

Sređivanjem jednakosti najprije dobivamo

$$y\left(\frac{1}{x+y} - 1\right) + z\left(\frac{1}{y+z} - 1\right) + x\left(\frac{1}{z+x} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

zatim

$$\frac{y}{x+y} - y + \frac{z}{y+z} - z + \frac{x}{z+x} - x = \frac{1}{2}$$

te konačno

$$\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} = \frac{1}{2} + (x+y+z).$$

Ponovo iskoristimo da je $x + y + z = 1$ pa je

$$\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} = \frac{3}{2}. \tag{3.1}$$

Raspisivanjem lijeve strane (3.1) dobivamo

$$\frac{y+x-x}{x+y} + \frac{z+y-y}{y+z} + \frac{x+z-z}{z+x} = \frac{3}{2}$$

pa

$$1 - \frac{x}{x+y} + 1 - \frac{y}{y+z} + 1 - \frac{z}{z+x} = \frac{3}{2},$$

i konačno

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} = \frac{3}{2}. \tag{3.2}$$

Iz (3.1) i 3.2 slijedi

$$\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x},$$

odnosno,

$$\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = 0.$$

Svođenjem lijeve strane jednakosti na zajednički nazivnik te faktoriziranjem brojnika dobivamo
$$\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 0.$$
Jednakost vrijedi ako i samo ako

$$y - z = 0 \text{ ili } z - x = 0 \text{ ili } x - y = 0,$$

odnosno, ako i samo ako

$$D(0:1:1) \text{ ili } E(1:0:1) \text{ ili } F(1:1:0).$$

Prema 1.1.6 točke $D(0 : 1 : 1)$, $E(1 : 0 : 1)$ i $F(1 : 1 : 0)$ su polovišta stranica trokuta, a pravci AD, BE i CF pravci na kojima leže težišnice trokuta. Time je tvrdnja dokazana.

Obratno, pretpostavimo da točka $P(x, y, z)$ leži na jednoj od težišnica trokuta ABC. Prema ranije dokazanom imamo da je

$$P(PAF) + P(PBD) + P(PCE) = \frac{yz}{x+y}P(ABC) + \frac{zx}{y+z}P(ABC) + \frac{xy}{z+x}P(ABC),$$

odnosno,

$$P(PAF) + P(PBD) + P(PCE) = \Big(\frac{yz}{x+y} + \frac{zx}{y+z} + \frac{xy}{z+x}\Big)P(ABC).$$

Želimo dokazati da je
$$\frac{yz}{x+y} + \frac{zx}{y+z} + \frac{xy}{z+x} = \frac{1}{2}.$$
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se točka P nalazi na težišnici $\overline{AP_a}$. Kako je $P_a(0 : 1 : 1)$ imamo da je $y = z$, odnosno, $P(x, y, y)$. Kako je točka P zadana svojim apsolutnim koordinatama vrijedi da je $x + y + z = 1$, tj. $x = 1 - 2y$ pa je $P(1 - 2y, y, y)$. Kako je $z = y$ i $x = 1 - 2y$ imamo da je

$$\frac{yz}{x+y} + \frac{zx}{y+z} + \frac{xy}{z+x} = \frac{y^2}{1-y} + \frac{y(1-2y)}{2y} + \frac{(1-2y)y}{1-y}$$

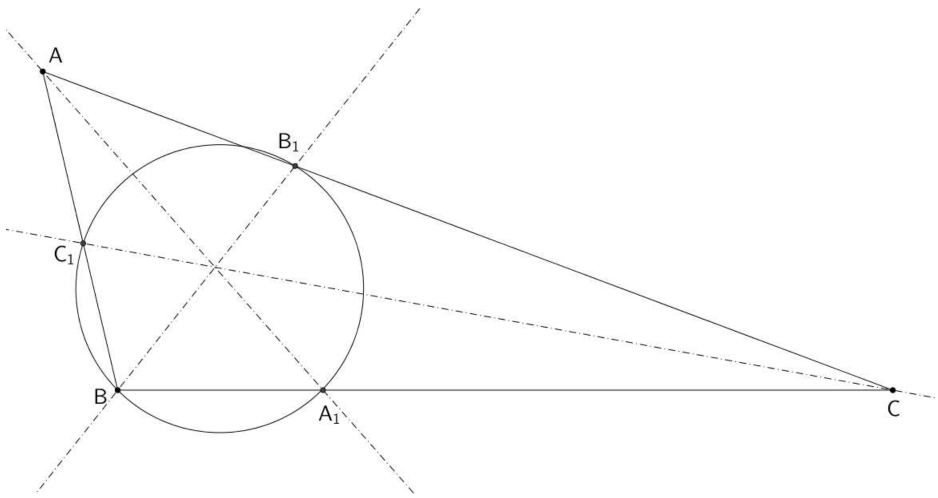
Sređivanjem izraza dobivamo

$$\frac{y(1-y)}{1-y} + \frac{y(1-2y)}{2y} = y + \frac{1-2y}{2} = \frac{2y+1-2y}{2} = \frac{1}{2}$$

čime je tvrdnja dokazana.

Primjer 3.0.2. *(Mongolia TST 2000) Neka simetrale kutova pri vrhovima A, B, C trokuta ABC sijeku nasuprotne stranice redom u točkama A_1, B_1 i C_1. Dokažite da ako se četverokutu $BA_1B_1C_1$ može opisati kružnica, tada je*

$$\frac{|CA|}{|BC| + |AB|} = \frac{|AB|}{|BC| + |AC|} + \frac{|BC|}{|AC| + |BA|}.$$



Slika 3.2: Primjer 3.0.2

Rješenje: Za početak odredit ćemo koordinate ključnih točaka u zadataku. Znamo da je

$$B(1 : 0 : 0).$$

Nadalje, kako su točke A_1, B_1 i C_1 točke u kojima simetrale kutova trokuta sijeku nasuprotnu stranicu trokuta njihove baricentrične koordinate su

$$A_1(0 : b : c)$$

$$B_1(a : 0 : c)$$

$$C_1(a : b : 0)$$

uz standardne oznake za duljine stranica tokuta ABC. Sada ćemo odrediti jednadžbu kružnice određene točkama B, A_1 i C_1. Znamo da kružnica ima jednadžbu oblika

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

gdje su u, v i w realni brojevi. Uvrstimo li u jednadžbu koordinate točke B dobivamo da je

$$v = 0.$$

Zatim, uvrštavanjem koordinata točke A_1 dobivamo da je

$$w = \frac{c^2 b}{a+b}$$

te uvrštavanjem koordinata točke C_1 da je

$$u = \frac{a^2 b}{b+c}.$$

Time smo odredili jednadžbu kružnice određene točkama B, A_1 i C_1

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + \left(\frac{c^2b}{a+b}x + \frac{a^2b}{b+c}z\right)(x+y+z) = 0.$$

Točka B_1 nalazi se na toj kružnici ako i samo ako je

$$-b^2ac + \left(\frac{c^2b}{a+b}a + \frac{a^2b}{b+c}c\right)(a+c) = 0.$$

Podijelimo li cijelu jednadžbu s $abc(a+c) \neq 0$ dobivamo

$$-\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = 0.$$

I konačno

$$\frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c}$$

što je trebalo dokazati.

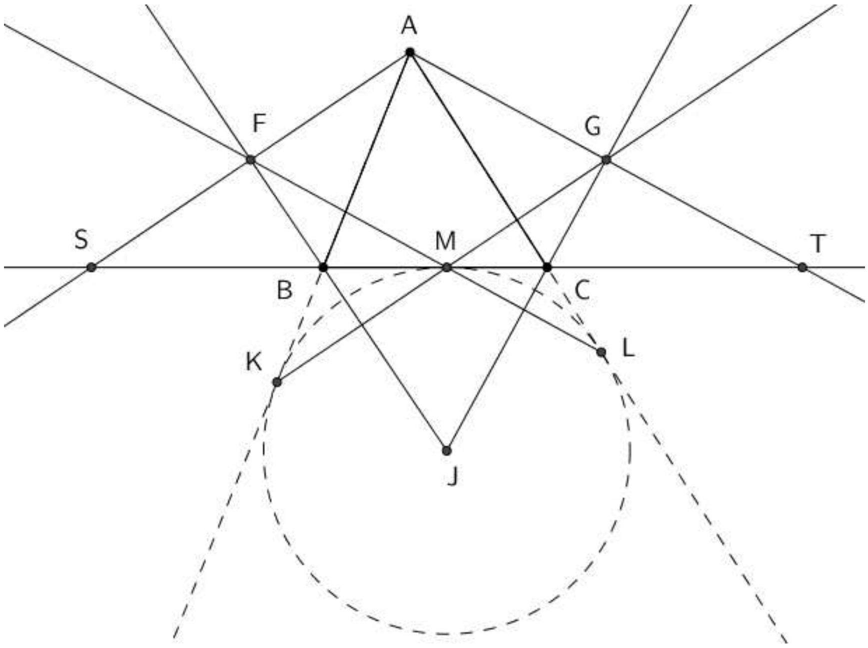
Primjer 3.0.3. *(IMO 2012) Neka je J središte pripisane kružnice trokuta ABC koja dira stranicu $\overline{BC}$ u točki M, a pravce AB i AC u točkama K i L redom. Pravci LM i BJ sijeku se u F, a pravci KM i CJ u točki G. Neka je S sjecište pravaca AF i BC te T sjecište pravaca AG i BC. Dokažite da je točka M polovište dužine $\overline{ST}$.*

Rješenje: Točka J kao središte pripisane kružnice trokuta ABC nasuprot vrha A leži na simetrali unutarnjeg kuta trokuta pri vrhu A te na simetrali vanjskog kuta trokuta pri vrhu B. Prema 2.2.2 za koordinate točke J vrijedi da je $y : z = b : c$, a prema teoremu 2.2.3 slijedi da je $x : z = -a : b$. Stoga imamo da je

$$J(-a : b : c).$$

Kako vrijedi da je $|BK| = |BM| = s - c$ i $|CL| = |CM| = s - b$, koordinate točaka su

$$M(0 : s-b : s-c),\ \ L(s-b : 0 : -s)\ \text{ i }\ K(s-c : -s : 0).$$



Slika 3.3: Primjer 3.0.3

Nadalje, odredimo koordinate točaka F i G. Imamo da je $F \in BJ \cap LM$ i $G \in CJ \cap KM$. Kako se točka F nalazi na cevijani BJ imamo da za njene koordinate vrijedi da je $x : z = -a : c$. Prema teoremu 1.2.4 jednadžba pravca LM je $sx - (s-c)y + (s-b)z = 0$. Rješavanjem sustava dobivamo da je

$$F\left(-a : \frac{(s-b)c - as}{s-c} : c\right).$$

Analognim postupkom dobivamo da je

$$G\left(-a : b : \frac{(s-c)b - as}{s-b}\right).$$

Kako je točka S na pravcu BC trag točke F, a točka T na pravcu BC trag točke G imamo da je

$$S\left(0 : \frac{(s-b)c - as}{s-c} : c\right)$$

i

$$T\left(0 : b : \frac{(s-c)b - as}{s-b}\right).$$

Postupkom normalizacije koordinata imamo da je

$$S\left(0 : \frac{(s-b)c - as}{-a(s-c)} : \frac{c}{-a}\right)$$

i

$$T\left(0 : \frac{b}{-a} : \frac{(s-c)b - as}{-a(s-b)}\right).$$

Sada odredimo koordinate polovišta dužine $\overline{ST}$. Neka je točka P polovište dužine $\overline{ST}$ prema teoremu 1.1.5 imamo da je $P = \frac{1}{2}(S + T)$, odnosno,

$$P\left(0, \frac{1}{2}\left(\frac{(s-b)c - as}{-a(s-c)} + \frac{b}{-a}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{c}{-a} + \frac{(s-c)b - as}{-a(s-b)}\right)\right)$$

svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo

$$P\left(0, \frac{(s-b)c - as + b(s-c)}{-2a(s-c)}, \frac{c(s-b) + (s-c)b - as}{-2a(s-b)}\right)$$

te sređivanjem brojnika

$$P\left(0, \frac{s(b+c-a) - 2bc}{-2a(s-c)}, \frac{s(b+c-a) - 2bc}{-2a(s-b)}\right).$$

Pomnožimo li koordinate točke P sa $\frac{-2a(s-b)(s-c)}{s(b+c-a) - 2bc} \neq 0$ imamo da je

$$P\big(0 : (s-b) : (s-c)\big).$$

Zbog jedinstvenosti baricentričnih koordinata imamo da je $M = P$, odnosno, dokazali smo da je točka M polovište dužine $\overline{ST}$.

Bibliografija

[1] Z. Abel, *Barycentric Coordinates*, (2007), `http://zacharyabel.com/papers/Barycentric_A07.pdf`.

[2] E. Chen, *Euclidean geometry in mathematical olympiads*, sv. 27, American Mathematical Society, (2021).

[3] Z. Franušić i J. Šiftar, *Linearna algebra 1, skripta za nastavničke studije na PMF-MO*, Sveučilište u Zagrebu (2018).

[4] C. Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*, `https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html`.

[5] Ž. Milin Šipuš i M. Bombardelli, *Analitička geometrija, skripta za nastavničke studije na PMF-MO*, Sveučilište u Zagrebu (2016).

[6] D. Pedoe, *Notes on the history of geometrical ideas I. Homogeneous coordinates*, Mathematics Magazine **48** (1975), br. 4, 215–217.

[7] M. Polonijo, M. Bombardelli, Z. Franušić i Z. Iljazović, *Euklidski prostori, skripta za nastavničke studije na PMF-MO*, Sveučilište u Zagrebu (2018).

[8] M. Schindler i E. Chen, *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*, Olympiad Articles (2012), 1–40.

[9] V. Volenec, *Baricentričke koordinate 1 – Afina svojstva*, Osječki matematički list **15** (2015), br. 1, 1–11.

Sažetak

Baricentrične koordinate vrsta su homogenih koordinata koje se pridružuju točki ravnine s obzirom na referentni trokut sustava. Baricentrične koordinate možemo definirati pomoću vektorskog računa ili pomoću orijentiranih površina i orijentiranih duljina što se može vidjeti u prvom dijelu ovog rada. Karakteristično svojstvo jednadžbe pravca i kružnice u baricentričnom koordinatnom sustavu je homogenost što nam uvelike olakšava njihovo određivanje i računanje njima. Budući da je upravo trokut referentni sustav baricentričnog koordinatnog sustava, baricentrične koordinate pokazuje se pogodnim izborom u dokazivanju teorema i rješavanju zadataka geometrije trokuta. U drugom poglavlju ovog rada iskazani su i dokazani neki poznati teoremi i tvrdnje geometrije trokuta, a u trećem je poglavlju koordinatnom metodom riješeno nekoliko zadataka s matematičkih natjecanja.

Summary

Barycentric coordinates are a type of homogeneous coordinates that are assigned to a point of the plane with respect to the reference triangle. We can define barycentric coordinates using vector calculus or using oriented surfaces and oriented lengths, which can be seen in the first part of this paper. A characteristic property of the equation of a line and the equation of a circle in the barycentric coordinate system is homogeneous, which greatly facilitates their determination and calculation. Since the triangle is the reference system of the barycentric coordinate system, barycentric coordinates prove to be a suitable choice for proving theorems and solving triangle geometry problems. In the second chapter of this paper, we presented and proved some well-known theorems of the triangle geometrie, and in the third chapter, we solved several problems from mathematical competitions using the coordinate method.

Životopis

Rođena sam 7. travnja 1999. godine u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 2006. godine u Osnovnoj školi Zapruđe. 2013. godine upisujem prirodoslovnu gimnaziju Prirodoslovne škole Vladimira Preloga u Zagrebu. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja 2017. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija 2020. godine na istom fakultetu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.