

Egzaktna simulacija trajektorija difuzija

Knežević, Marin

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:856220>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marin Knežević

EGZAKTNA SIMULACIJA
TRAJEKTORIJA DIFUZIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, ožujak 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj	iii
Uvod	1
1 Teorijska pozadina	2
1.1 Slučajni procesi s neprekidnim vremenom	2
1.2 Brownovo gibanje	3
1.3 Itôv diferencijalni račun	4
1.4 Linearne stohastičke diferencijalne jednačbe	6
1.5 Girsanovljev teorem	8
2 Metoda prihvaćanja i odbacivanja	10
2.1 Klasičan pristup	10
2.2 Alternativan pristup	13
3 Simulacija trajektorija difuzija	14
3.1 Eulerova metoda	14
3.2 Egzaktna metoda	16
4 Primjene	24
4.1 Usporedba metoda na primjeru	24
4.2 Simulacija prvog vremena prelaska	29
Bibliografija	32

Uvod

Stohastički fenomeni su sveprisutni u brojnim sferama ljudskog djelovanja. Evoluciju jednog takvog fenomena u stanovitom vremenskom razdoblju proučava matematička teorija slučajnih procesa. Prilikom analize procesa redovito se koriste modeli bazirani na linearnim stohastičkim diferencijalnim jednažbama. Upravo su oni od esencijalne važnosti u financijskoj matematici kao teorijska podloga Black-Scholes-Mertonovog modela određivanja cijena izvedenica te kod modeliranja kamatnih stopa (npr. Vasičekov model). No, primjene nisu ograničene isključivo na matematičke discipline, koriste se u fizici, meteorologiji, a sve češće i u biologiji.

U svakoj od gornjih primjena bitno je pouzdano i efikasno znati simulirati trajektorije slučajnog procesa koji zadovoljava danu stohastičku diferencijalnu jednažbu. Međutim, samo u rijetkim slučajevima postoje zatvorene formule koje opisuju distribuciju procesa, stoga moramo pribjeći numeričkim aproksimacijama trajektorija. To je upravo predmet proučavanja ovog rada, predstaviti ćemo dvije metode koje generiraju uzorke iz traženih distribucija. Tradicionalnu Eulerovu shemu, nasuprot novijoj i bržoj egzaktnoj metodi temeljenoj na uzorkovanju s odbacivanjem, razvijenoj u radovima [2] i [3].

Poglavlje 1

Teorijska pozadina

1.1 Slučajni procesi s neprekidnim vremenom

Fiksirajmo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Podsjetimo se što to znači (i) Ω je neprazan skup čije elemente zovemo elementarnim događajima; (ii) \mathcal{F} je σ -algebra događaja na Ω , odnosno neprazna familija podskupova od Ω koja sadrži Ω , te je zatvorena na komplementiranje i prebrojive unije; (iii) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ je σ -aditivna funkcija na \mathcal{F} takva da je $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ koju zovemo *vjerojatnost*.

Nadalje, označimo s $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovu σ -algebru na \mathbb{R} . To je najmanja σ -algebra podskupova od \mathbb{R} koja sadrži sve poluotvorene intervale $(a, b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$.

Definicija 1.1.1. Slučajna varijabla na izmjerivom prostoru (Ω, \mathcal{F}) je funkcija $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ izmjeriva u paru σ -algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$.

Definicija 1.1.2. Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vjerojatnost inducirana slučajnom varijablom X , ili **distribucija** od X , je funkcija $\mathbb{P}_X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ definirana formulom

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}.$$

Drugim riječima, \mathbb{P}_X je slika vjerojatnosne mjere \mathbb{P} po funkciji X .

Definicija 1.1.3. Neka je (Ω, \mathcal{F}) izmjeriv prostor, te neka je za svaki $t \in \mathbb{R}_+$ X_t slučajna varijabla na (Ω, \mathcal{F}) . Familija $X = (X_t : t \geq 0)$ naziva se **slučajni proces (s neprekidnim vremenom)**.

Za $\omega \in \Omega$ (neprekidnu) funkciju $t \mapsto X_t(\omega)$ s \mathbb{R}_+ u \mathbb{R} zovemo **put** (trajektorija) slučajnog procesa za dani ω .

1.2 Brownovo gibanje

Jednodimenzionalno Brownovo gibanje ima fundamentalnu ulogu u teoriji proučavanja realnih slučajnih procesa u neprekidnom vremenu. Koristeći njegovu jednostavnost možemo precizno opisati znatno kompleksnije slučajne procese.

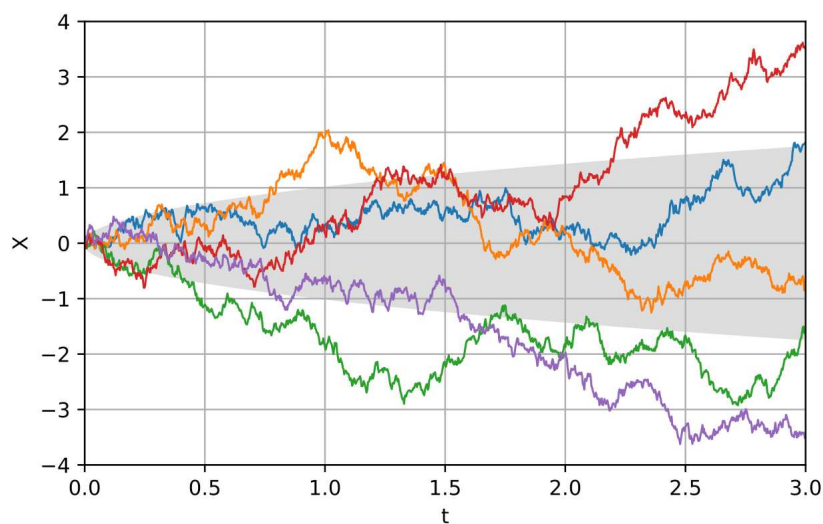
Definicija 1.2.1. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $B = (B_t, t \geq 0)$ je **Brownovo gibanje** ako vrijedi:

- (i) Putovi $t \mapsto B_t(\omega)$ su neprekidne funkcije sa \mathbb{R}_+ u \mathbb{R} (za g.s. $\omega \in \Omega$).
- (ii) $B_0 = 0$.
- (iii) Za sve $m \in \mathbb{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ su prirasti

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni.

- (iv) Za sve $0 \leq s < t$ je prirast $B_t - B_s$ normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom $t - s$.



Slika 1.1: Pet trajektorija Brownog gibanja, sa standardnim devijacijama u sivom

Osim samog slučajnog procesa, bit će nam potrebna i informacija vezana uz taj proces.

Definicija 1.2.2. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $B = (B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje na tom prostoru. **Filtracija** za Brownovo gibanje je familija $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ σ -algebri koja zadovoljava

- (i) Za sve $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ (informacija kasnije ne može biti manja od informacije ranije).
- (ii) (Adaptiranost) Za svaki $t \geq 0$, B_t je \mathcal{F}_t -izmjeriva slučajna varijabla (informacija dostupna u trenutku t dovoljna je za računanje Brownovog gibanja u tom trenutku).
- (iii) (Nezavisnost budućih prirasta) Za sve $0 \leq s < t$, prirast $B_t - B_s$ nezavisan je od \mathcal{F}_s (svaki prirast Brownovog gibanja nakon vremena s nezavisan je od informacije dostupne u trenutku s).

Tipičan primjer filtracije za Brownovo gibanje je prirodna filtracija Brownovog gibanja definirana s $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$. U tom slučaju, informacija u trenutku t sadrži informaciju o Brownovom gibanju do trenutka t i ništa više.

1.3 Itôv diferencijalni račun

Fiksirajmo pozitivno vrijeme $T > 0$. Neka je $B = (B_t : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje zajedno s Brownovskom filtracijom $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$. Neka je $H = (H_t : t \in [0, T])$ adaptiran slučajni proces obzirom na \mathbf{F} . Dati ćemo definiciju i pregled osnovnih svojstava Itôvog integrala

$$\int_0^T H_t dB_t.$$

Definicija 1.3.1. Adaptiran slučajni proces $H = (H_t : t \in [0, T])$ zove se **jednostavan proces** ako je

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1})}(t), \quad (1.1)$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ intervala $[0, T]$, i omeđene slučajne varijable ϕ_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$, takve da je ϕ_j \mathcal{F}_{t_j} -izmjeriva. S \mathcal{E}_T označimo familiju svih adaptiranih jednostavnih slučajnih procesa na $[0, T]$.

Definicija 1.3.2. Za slučajni proces $H \in \mathcal{E}_T$ definiran s (1.1) definiramo slučajni proces $I = (I_t : t \in [0, T])$ s

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}).^1$$

¹ $a \wedge b = \min\{a, b\}$

Proces I zovemo **Itôv integral** jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B i označavamo ga s

$$I_t = \int_0^t H_s dB_s = (H \cdot B)_t.$$

U diferencijalnom obliku bismo pisali

$$dI_t = H_t dB_t.$$

Sada definiciju proširujemo na familiju \mathbf{F} -adaptiranih slučajnih procesa koji zadovoljavaju tehnički uvjet:

$$\mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt < \infty.$$

Ovu familiju procesa ćemo označavati s $\mathcal{L}_{\text{ad}}^2$.

Glavna ideja za proširenje definicije Itôvog integrala je aproksimacija procesa $H \in \mathcal{L}_{\text{ad}}^2$ nizom jednostavnih procesa $H^{(n)} \in \mathcal{E}_T$. U [9] se detaljno pokazuje kako Itôv integral u širem slučaju možemo konzistentno definirati kao limes integrala jednostavnih integranada uz profinjivanje particija.

$$\int_0^t H_u dB_u = (L^2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t H_u^{(n)} dB_u.$$

Definicija 1.3.3. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ pridružena filtracija. **Itôv proces** je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ oblika

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds, \quad (1.2)$$

gdje je $X_0 \in \mathbb{R}$, a $H = (H_t : t \geq 0)$ i $V = (V_t : t \geq 0)$ su adaptirani procesi t.d. $H \in \mathcal{L}_{\text{ad}}^2$ i $\int_0^t |V_s| ds < \infty$ g.s. za sve $t \geq 0$.

Jednadžbu (1.2) u diferencijalnom obliku pišemo kao

$$dX_t = H_t dB_t + V_t dt.$$

Također možemo definirati stohastički integral u odnosu na proizvoljni Itôv proces.

Definicija 1.3.4. Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (1.2), te neka je $K = (K_t : t \geq 0)$ adaptiran proces koji zadovoljava sljedeće tehničke uvjete:

$$\mathbb{E} \int_0^t K_s^2 H_s^2 ds < \infty \text{ i } \int_0^t |K_s V_s| ds < \infty$$

za sve $t \geq 0$. Stohastički integral od K s obzirom na Itôv proces X definiran je formulom

$$\int_0^t K_s dX_s = \int_0^t K_s H_s dB_s + \int_0^t K_s V_s ds.$$

Teorem 1.3.5. (Itôva formula za Itôv proces) Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom (1.2) i neka je $f(t, x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ i $f_{xx}(t, x)$. Tada za svaki $T \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(T, X_T) = & f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) H_t dB_t \\ & + \int_0^T f_x(t, X_t) V_t dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) H_t^2 dt. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dokaz se nalazi u [9].

1.4 Linearne SDJ

Primjer 1.4.1. (Geometrijsko Brownovo gibanje) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, kao osnovni primjer navodimo proces X_t dan stohastičkom diferencijalnom jednačinom

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

čije je rješenje za konstante $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ dano s

$$X_t = X_0 e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, \quad t \in [0, T]. \quad (1.4)$$

Ovaj proces predstavlja najvažniji model kretanja cijena dionica u neprekidnom vremenu.

Primjer 1.4.2. (Vasičekov model kamatnih stopa) Vasičekov model procesa kamatnih stopa $R = (R_t : t \geq 0)$ dan je stohastičkom diferencijalnom jednačinom

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t) dt + \sigma dB_t, \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

gdje su $\alpha, \beta, \sigma > 0$. Pozivajući se na teoriju ponovo navodimo rješenje u zatvorenoj formi,

$$R_t = e^{-\beta t} R_0 + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dB_s. \quad (1.6)$$

Štoviše znamo da je R_t normalno distribuirana slučajna varijabla, te vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R_t &= e^{-\beta t} R_0 + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}), \\ \text{Var}R_t &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}). \end{aligned}$$

Odavde vidimo da, bez obzira kako odabrali parametre modela α , β i σ , s pozitivnom vjerojatnošću R_t može biti manji od nule. To je loše svojstvo predloženog modela. Dobro svojstvo modela je da se kamatne stope vraćaju prema srednjem (*mean-reverting property*). U slučaju $R_t = \frac{\alpha}{\beta}$, član uz dt u (1.5) (tzv. drift), jednak je nuli. U slučaju $R_t > \frac{\alpha}{\beta}$, član uz dt je negativan, te gura R_t natrag prema $\frac{\alpha}{\beta}$. U slučaju $R_t < \frac{\alpha}{\beta}$, član uz dt je pozitivan, te opet gura R_t natrag prema $\frac{\alpha}{\beta}$. Uočimo još da ako je $R_0 = \frac{\alpha}{\beta}$, tada je $\mathbb{E}R_t = \frac{\alpha}{\beta}$ za sve $t \geq 0$. Ako je $R_0 \neq \frac{\alpha}{\beta}$, tada je $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}R_t = \frac{\alpha}{\beta}$.

Primjer 1.4.3. (Cox-Ingersoll-Ross-ov (CIR) model kamatnih stopa) Cox-Ingersoll-Rossov model procesa kamatnih stopa R_t zadan je stohastičkom diferencijalnom jednačjom

$$dR_t = (\alpha - \beta R_t) dt + \sigma \sqrt{R_t} dB_t. \quad (1.7)$$

Nedostatak CIR modela je da se rješenje stohastičke diferencijalne jednačbe (1.7) ne može zapisati u zatvorenoj formi. Stoga ga jedino možemo simulirati numeričkim metodama. Međutim, prednost CIR modela u odnosu na Vasičekov je taj da R_t nikad nije negativan. Heurističko objašnjenje te činjenice je da kada se R_t približava nuli, član uz dB_t postaje mali (volatilnost teži prema nuli), dok se član uz dt približava $\alpha > 0$. U takvoj situaciji dominantan je pozitivan drift koji R_t gura dalje od nule. Slično kao i Vasičekov model, CIR model ima svojstvo vraćanja prema srednjem.

Definicija 1.4.4. Linearna stohastička diferencijalna jednačba (SDJ) je stohastička jednačba oblika

$$X_t = Y_t + \int_0^t X_s dZ_s$$

odnosno zapisano u diferencijalnom obliku

$$dX_t = dY_t + X_t dZ_t, \quad X_0 = Y_0,$$

gdje su $Y = (Y_t : t \geq 0)$ i $Z = (Z_t : t \geq 0)$ Itôvi procesi.

Naša daljnja razmatranja ćemo ograničiti na jednadžbe oblika

$$dX_t = \alpha(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \quad (1.8)$$

za prikladne $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$ te početan uvjet $X_0 = x_0$. Odnosno u integralnom obliku

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s. \quad (1.9)$$

Proces X_t je njeno jako rješenje ako je adaptiran s obzirom na Brownovo gibanje (tj. njegovu prirodnu filtraciju), ako su gornji integrali dobro definirani, te zadovoljava (1.8). Adaptiranost povlači da je za sve $t \in [0, T]$, X_t izmjeriva funkcija od B_s , $s \leq t$. S druge strane, postoje i tzv. slaba rješenja koja su potencijalno definirana na drugom vjerojatnosnom prostoru. Oba tipa rješenja nazivaju se *difuzijama*. Egzistencija i jedinstvenost rješenja je garantirana ako su funkcije α i σ Lipschitz neprekidne (dokaz se nalazi u četvrtom poglavlju [4]).

1.5 Girsanovljev teorem

Za početak promotrimo jednostavnu proceduru *zamjene mjere*, kojom možemo promijeniti distribuciju slučajne varijable. Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ promotrimo nenegativnu slučajnu varijablu Z takva da je $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo $\mathbb{P}^* : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ formulom

$$\mathbb{P}^*(A) := \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[1_A Z], \quad A \in \mathcal{F}. \quad (1.10)$$

Tada je \mathbb{P}^* vjerojatnost na (Ω, \mathcal{F}) . Štoviše, ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, tada je i $\mathbb{P}^*(A) = 0$. Kažemo da je \mathbb{P}^* apsolutno neprekidna u odnosu na \mathbb{P} i pišemo $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$.

Teorem 1.5.1. (*Girsanovljev teorem*) *Neka je $B = (B_t : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ filtracija za to Brownovo gibanje. Za adaptiran slučajni proces $\Theta = (\Theta_t : 0 \leq t \leq T)$ takav da je*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \Theta_s^2 ds \right] < \infty^2$$

definiramo

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp \left\{ - \int_0^t \Theta_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta_u^2 du \right\}, \quad Z = Z_T \\ B_t^* &= B_t + \int_0^t \Theta_u du. \end{aligned} \quad (1.11)$$

²Zapravo je dovoljno pretpostaviti da vrijedi $\int_0^T \Theta_s^2 ds < \infty$ \mathbb{P} -g.s. i koristiti općenitiju definiciju Itôvog integrala za tu klasu integranada.

Ako vrijedi

$$\mathbb{E} \int_0^T \Theta_u^2 Z_u^2 du < \infty$$

tada je slučajni proces $B^* = (B_t^* : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje s obzirom na vjerojatnost \mathbb{P}^* definiranu formulom (1.10).

Poglavlje 2

Metoda prihvatanja i odbacivanja

2.1 Klasičan pristup

Pretpostavimo da želimo simulirati slučajnu varijablu s gustoćom f , ali to nije moguće (jednostavno) napraviti metodama transformacije. Osnovna ideja metode prihvatanja i odbacivanja (engl. *accept-reject method* ili *rejection sampling*) je simulirati iz neke druge gustoće g (što znamo efikasno napraviti), ali odbaciti realizacije koje su "manje vjerojatne" za originalnu gustoću f (u odnosu na gustoću g).

Lema 2.1.1. *Pretpostavimo da su f i g funkcije gustoće na \mathbb{R} te $M \in [1, \infty)$ takav da je*

$$f(x) \leq Mg(x), \text{ za sve } x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Neka je $X \sim g, Y \sim f$, te $U \sim \text{Unif}(0,1)$ nezavisna od X . Tada je

$$\mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(X)}{Mg(X)}\right) = \frac{1}{M} \quad (2.2)$$

te

$$\mathbb{P}\left(X \leq t \mid U \leq \frac{f(X)}{Mg(X)}\right) = \mathbb{P}(Y \leq t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Drugim riječima, uvjetno na $UMg(X) \leq f(X)$, distribucija od X jednaka je bezuvjetnoj distribuciji od Y .

Dokaz. Neka je $t \in \mathbb{R}$ proizvoljan i $E = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$. Budući da su X i U nezavisne slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X \leq t, U \leq \frac{f(X)}{Mg(X)}\right) &= \int_{-\infty}^t g(x)1_E(x) \int_0^{\frac{f(x)}{Mg(x)}} du dx = \int_{-\infty}^t \frac{f(x)}{Mg(x)} g(x)1_E(x) dx \\ &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^t f(x)1_E(x) dx = \frac{1}{M} \mathbb{P}(Y \leq t). \end{aligned}$$

Uočite da smo u prvoj jednakosti iskoristili da je $\mathbb{P}(X \in E^c) = 0$ te da je $f(x)/[g(x)M] \leq 1$ za sve $x \in E$, a u četvrtoj da je $f(x) = 0$ za sve $x \in E^c$. Na isti način (ili puštanjem $t \rightarrow \infty$) se pokaže da vrijedi (2.2), a onda odmah slijedi i (2.3). \square

Ako vrijede uvjeti iz prethodne leme, dolazimo do tzv. *accept-reject* algoritma za simuliranje iz gustoće f koristeći gustoću g kao tzv. predlagajuću gustoću (engl. *proposal density*):

-
- 1: Generiraj $X \sim g$ i $U \sim \text{Unif}(0, 1)$
 - 2: Ako je $U \leq \frac{f(X)}{g(X)M}$ vrati X , inače vrati se na 1.
-

Uvjetno na $X = x$, $V := UMg(x)$ ima uniformnu razdiobu na $[0, Mg(x)]$ te prihvaćamo x ako je $V \leq f(x)$, kao što je vidljivo na Slici 2.1.

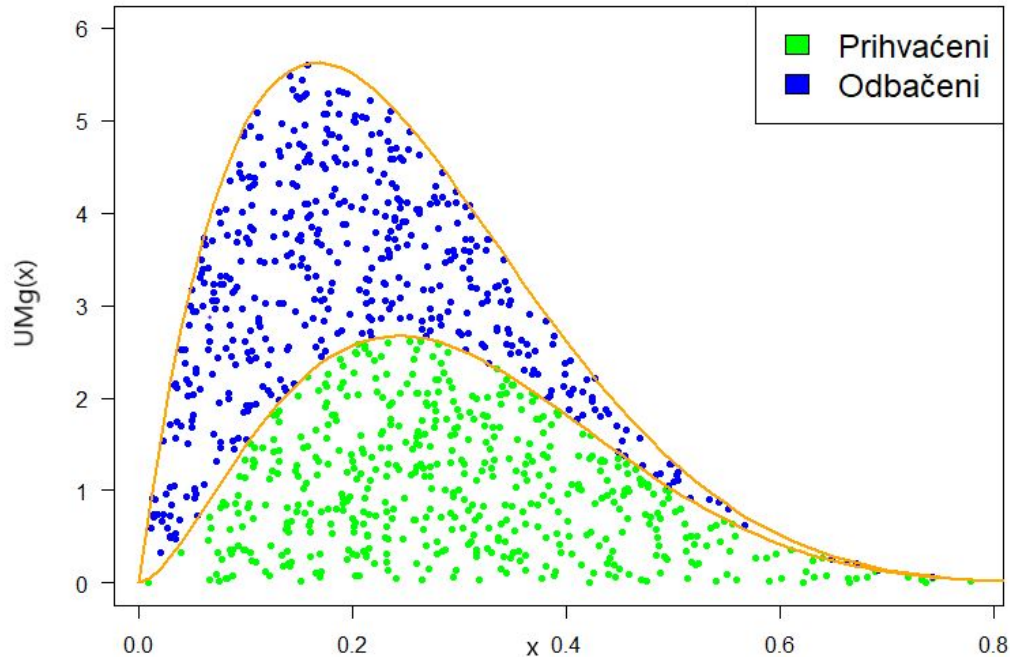
Vjerojatnost prihvaćanja generiranog $X \sim g$ je

$$p = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(X)}{Mg(X)}\right) = \frac{1}{M}.$$

Dakle, broj pokušaja do prvog prihvaćanja N ima $G(p)$ razdiobu pa je specijalno

$$\mathbb{E}[N] = M.$$

Iz tog razloga, za efikasnu predlagajuću gustoću g , uzimamo M što je manji mogući (ali takav da vrijedi (2.1)).



Slika 2.1: Grafički prikaz *rejection sampling* algoritma na primjeru dvije beta razdiobe

U svrhu ilustracije htjeli smo generirati uzorak iz $Beta(2.7, 6.3)$ distribucije s gustoćom f . Kao predlagajuću distribuciju smo odabrali $Beta(2, 6)$ distribuciju (gustoća g). Prvotno generiramo uzorak $(X_i, U_i), i = 1, \dots, 1000$ pri čemu su $X_i \sim Beta(2, 6)$ i $U_i \sim Unif(0, 1)$ nezavisne. Grafički smo prikazali točke $(X_i, V_i), i = 1, \dots, 1000$ gdje je $V_i = U_i M g(X_i)$. Točke koje se nalaze ispod grafa gustoće f (tj. za koje je $V_i \leq f(X_i)$) predstavljaju točke koje prihvaćamo u *accept-reject* algoritmu, vidi Sliku 2.1 (narančastom bojom naznačeni su grafovi funkcija f i Mg).

Također važno svojstvo *accept-reject* algoritma je da je za njegovu provedbu dovoljno znati gustoću f samo do na multiplikativnu konstantu. Zaista, ako je $f = c\tilde{f}$ za neku (nepoznatu) konstantu $c \geq 0$ i (poznatu) funkciju \tilde{f} , te za $\tilde{M} \geq 0$ vrijedi $\tilde{f} \leq \tilde{M}g$, tada za $M := c\tilde{M}$ vrijedi $f \leq Mg$ te

$$\frac{f(x)}{g(x)M} = \frac{c\tilde{f}(x)}{g(x)c\tilde{M}} = \frac{\tilde{f}(x)}{g(x)\tilde{M}}$$

2.2 Alternativan pristup

Ova metoda nije ograničena samo na simuliranje slučajnih varijabli. U iznimnim je slučajevima moguće konstruirati alternativan uvjet za prihvaćanje ili odbacivanje predloženog elementa X na temelju minimalno raspoloživih informacija o njemu. To se pokazuje esencijalnim kod primjene algoritma u kontekstu difuzija, gdje je nemoguće pohraniti potpunu informaciju o njenoj **neprekidnoj** trajektoriji.

Jedan takav algoritam možemo iskoristiti pod sljedećim uvjetima. Neka je (S, \mathcal{S}) dovoljno regularan izmjeriv prostor s vjerojatnosnim mjerama ν i μ , takvima da je μ apsolutno neprekidna u odnosu na ν . Pretpostavimo dalje kako postoji $\epsilon > 0$ takav da

$$f := \epsilon \frac{d\mu}{d\nu} \leq 1, \nu - g.s.$$

Također pretpostavljamo kako je jednostavno generirati uzorke iz ν . U ovoj interpretaciji vjerojatnosne mjere ν i μ na (S, \mathcal{S}) poistovjećujemo s distribucijama nekih slučajnih varijabli dok su $d\mu$ i $d\nu$ upravo funkcije gustoće tih varijabli. Tada nam iduća lema govori kako generirati uzorak iz μ .

Lema 2.2.1. *Neka je $(X_n, I_n)_{n \geq 1}$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih elemenata koji poprimaju vrijednosti u $S \times \{0, 1\}$ takvih da $X_1 \sim \nu$ i*

$$\mathbb{P}(I_1 = 1 | X_1 = x) = f(x), \text{ za svaki } x \in S.$$

Uz $\tau := \min\{i \geq 1 : I_i = 1\}$, $\mathbb{P}(X_\tau \in dx) = \mu(dx)$, odnosno $X_\tau \sim \mu$.

Dokaz. Za svaki $i = 1, 2, \dots$ dobivamo

$$\mathbb{P}(I_i = 1) = \int_S \mathbb{P}(I_i | X_i = x) \nu(dx) = \int_S f(x) \nu(dx) = \int_S \epsilon \mu(dx) = \epsilon.$$

Trivijalno, za svaki $F \in \mathcal{S}$ vrijedi:

$$\mathbb{P}(X_\tau \in F) = \mathbb{P}(X_\tau \in F, I_1 = 1) + \mathbb{P}(X_\tau \in F | I_1 = 0) \mathbb{P}(I_1 = 0).$$

Iz nezavisnosti članova niza $(X_n, I_n)_{n \geq 1}$ slijedi

$$\mathbb{P}(X_\tau \in F | I_1 = 0) = \mathbb{P}(X_\tau \in F).$$

Dalje nastavljamo na sljedeći način:

$$\mathbb{P}(X_\tau \in F, I_1 = 1) = \int_F \mathbb{P}(I_1 = 1 | X_1 = x) \nu(dx) = \int_F f(x) \nu(dx) = \epsilon \mu(F).$$

Kombinacijom gornjih rezultata dobivamo

$$\mathbb{P}(X_\tau \in F) = \epsilon \mu(F) + (1 - \epsilon) \mathbb{P}(X_\tau \in F).$$

Odnosno $\mathbb{P}(X_\tau \in F) = \mu(F)$. □

Poglavlje 3

Simulacija trajektorija difuzija

3.1 Eulerova metoda

Pretpostavimo da imamo SDJ kao (1.8)

$$dX_t = \alpha(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t.$$

U praktičnim primjenama nas često zanimaju stohastička svojstva rješenja $\{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ gornje jednačbe. Na primjer, možemo se pitati koliko iznosi $\mathbb{E}[g(\{X_t\}_t)]$ pri čemu je g funkcija koja ovisi o cijeloj trajektoriji procesa. Ako ne znamo ili nije moguće analitički pronaći rješenje, možemo iskoristiti Monte Carlo simulacije. U tom je slučaju potrebno znati simulirati trajektorije procesa X_t . To možemo jednostavno napraviti koristeći numeričke aproksimacije.

Numeričko rješenje SDJ je slučajni proces $\{X_t^n\}_{t \in [0, T]}$ koji aproksimira pravo rješenje na $[0, T]$, pri tome koristeći particiju $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ u kojoj računamo vrijednosti procesa $\{X_t^n\}$. Tipično uzimamo $t_i = \frac{iT}{n}, i = 0, 1, \dots, n$. Neka je općenito $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ i $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ za sve $i = 1, \dots, n$, također uočimo da je $\Delta_i B \sim N(0, \Delta_i)$.

Stavimo $X_0^n = x_0$ te za $i = 1, \dots, n$

$$X_{t_i}^n = X_{t_{i-1}}^n + \alpha(X_{t_{i-1}}^n) \Delta_i + \sigma(X_{t_{i-1}}^n) \Delta_i B. \quad (3.1)$$

Između točaka particije proces $\{X_t^n\}$ interpoliramo linearno. Proces $\{X_t^n; 0 \leq t \leq T\}$ naziva se Eulerova aproksimacija rješenja jednačbe (1.8), a simulirati ga možemo sljedećim algoritmom:

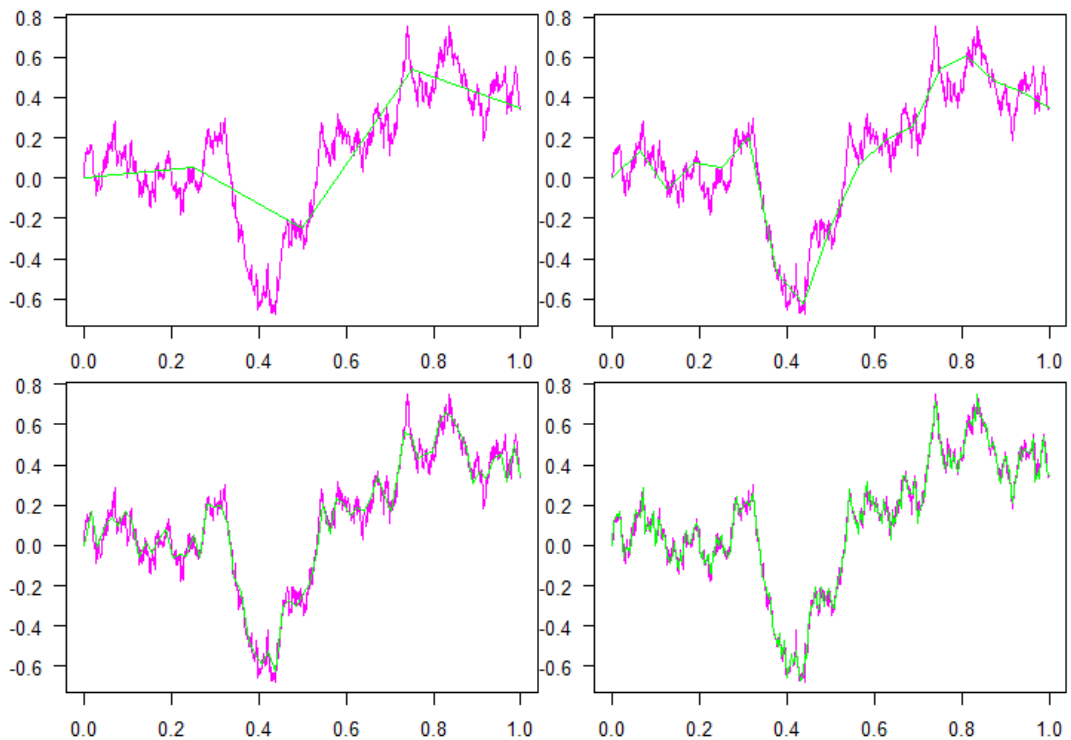
```

1:  $x_0^n = x_0$ 
2: for  $i = 1, \dots, n$  do
3:   generiraj  $\Delta_i b \sim N(0, \Delta_i)$ 
4:    $x_i^n = x_{i-1}^n + \alpha(x_{i-1}^n)\Delta_i + \sigma(x_{i-1}^n)\Delta_i b$ 
5: end for
6: vrati  $(x_0^n, \dots, x_n^n)$ 

```

Kvaliteta aproksimacije ovisi o tome koliko je gusta diskretizacijska mreža, odnosno o tome koliko je n velik. No, s većim n pada efikasnost algoritma.

S time na umu na idućom slici prikazujemo kolika greška nastaje kada odaberemo širinu ekvidistantne mreže $\Delta_i = \frac{1}{2^k}$ za $k = 2, 4, 6, 8$.



Slika 3.1: Greška Eulerove sheme(zelena) u odnosu na egzaktnu trajektoriju(roza)

3.2 Egzaktna metoda

3.2.1 Uvod

Ponovo počinjemo od SDJ (1.8)

$$dX_t = \alpha(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad t \in [0, T], \quad X_0 = x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

No, algoritam i teoriju ćemo razvijati uz dodatnu pretpostavku $\sigma \equiv 1$, odnosno promatrat ćemo

$$dX_t = \alpha(X_t) dt + dB_t, \quad t \in [0, T], \quad X_0 = x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Time nismo smanjili općenitost jer (3.3) možemo dobiti transformacijom (3.2) koristeći proces $Y = (Y_t : t \in [0, T])$ definiran s

$$Y_t = \int_z^{X_t} \frac{1}{\sigma(u)} du,$$

gdje je z proizvoljan element iz skupa stanja X , kao što je pojašnjeno u [3].

Napomena 3.2.1. Kako namjeravamo koristiti metodu prihvaćanja i odbacivanja, zgodno je neprekidan slučajan proces X poistovjetiti s vjerojatnosnom mjerom na skupu $C = \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ neprekidna}\}$ koju inducira njegova distribucija. Za $\omega \in C$ možemo definirati koordinatnu funkciju $B_t(\omega) = \omega(t), t \in [0, T]$ kao i filtraciju $\mathcal{D} = \sigma(\{B_t : 0 \leq t \leq T\})$. Konačno, neka je \mathbb{W} Wienerova mjera na (C, \mathcal{D}) uz koju je $B = \{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ Brownovo gibanje.

Posebno će nas zanimati vjerojatnosna mjera \mathbb{Q} na (C, \mathcal{D}) povezana s rješenjem SDJ (3.3) $X = \{X_t; 0 \leq t \leq T\}$. Prvi korak metode je izvršiti Girsanovljevu transformaciju mjera.

Propozicija 3.2.2. *Pretpostavimo da koeficijent drifta iz (3.3) zadovoljava Novikovov uvjet:*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{W}} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \alpha^2(B_t) dt \right\} \right] < \infty.$$

Tada za $\omega \in C$ vrijedi

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{W}} = \exp \left\{ \int_0^T \alpha(B_t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T \alpha^2(B_t) dt \right\} =: G(B). \quad (3.4)$$

Tvrđnja je dokazana u [7]. Cilj nam je pomoću (3.4) konstruirati *accept-reject* mehanizam.

Međutim, često $G(B)$ nije moguće egzaktno izračunati. Stoga uvodimo niz pretpostavki na koeficijent drifta. Uz uvjet da je α svugdje diferencijabilna funkcija i uzimajući $A(u) = \int_0^u \alpha(y)dy, u \in \mathbb{R}$ Itôva formula (1.3) daje

$$G(B) = \exp \left\{ A(B_T) - A(B_0) - \frac{1}{2} \int_0^T (\alpha^2(B_t) + \alpha'(B_t))dt \right\}.$$

Definicija 3.2.3. Pristrano Brownovo gibanje $\overline{BM} = \{\overline{BM}_t : 0 \leq t \leq T\}$ heuristički definiramo kao $(BM|BM_T = \rho)$ gdje je ρ distribuirana prema nekoj funkciji gustoće $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$.

Propozicija 3.2.4. Neka je \mathbb{Z} vjerojatnosna mjera inducirana pristranim Brownovim gibanjem \overline{BM} na (C, \mathcal{D}) . Ako je nosač od h cijeli \mathbb{R} , tada je \mathbb{Z} ekvivalentna s \mathbb{W} i

$$\frac{d\mathbb{Z}}{d\mathbb{W}} = \frac{h(B_T)}{(1/\sqrt{2\pi T}) \exp(-B_T^2/(2T))}.$$

Tvrđnja je pokazana u [2]. Sada trivijalno slijedi

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Z}} &= \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{W}} \frac{d\mathbb{W}}{d\mathbb{Z}} \\ &\propto \exp \left\{ A(B_T) - \frac{B_T^2}{2T} - \frac{1}{2} \int_0^T (\alpha^2(B_t) + \alpha'(B_t))dt \right\} / h(B_T), \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdje \propto označava kako izostavljeni faktori ne ovise o ω .

Dalje, pretpostavljamo kako je

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\{A(u) - u^2/(2T)\}du =: c < \infty,$$

tada kao funkciju gustoće možemo odabrati $h(u) = \exp\{A(u) - u^2/(2T)\}/c$ te (3.5) postaje

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Z}} \propto \exp \left\{ - \int_0^T \left(\frac{1}{2} \alpha^2(B_t) + \frac{1}{2} \alpha'(B_t) \right) dt \right\}. \quad (3.6)$$

Konačno zahtijevamo ograničenost integranda u (3.6), odnosno da postoje konstante $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ takve da $k_1 \leq \frac{1}{2} \alpha^2(u) + \frac{1}{2} \alpha'(u) \leq k_2$ za svaki $u \in \mathbb{R}$. (3.6) se može tada zapisati kao

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Z}} \propto \exp \left\{ - \int_0^T \phi(B_t) dt \right\}, \quad (3.7)$$

za $\phi \geq 0$, koju definiramo kao $\phi(u) = \frac{1}{2} \alpha^2(u) + \frac{1}{2} \alpha'(u) - k_1, u \in \mathbb{R}$.

Sada je ideja koristiti distribuciju \mathbb{Z} kao predlagajuću u *accept-reject* shemi koja generira uzorak iz \mathbb{Q} . Također, uvijek možemo odabrati vremenski interval $T > 0$ takav da je $0 \leq \phi(u) \leq T^{-1}$ za proizvoljni $u \in \mathbb{R}$. Dovoljno je uzeti $T \leq 1/(k_2 - k_1) = 1/R$.

3.2.2 Algoritam

Neka je $H = \int_0^T \phi(B_t) dt$. Dalje, pretpostavimo kako smo u stanju simulirati potpune trajektorije $\omega \sim \mathbb{Z}$ pristranog Brownovog gibanja. To možemo napraviti za bilo koji konačni skup vremenskih trenutaka simulirajući prvo završnu vrijednost $\omega_T \sim h$ i zatim ostatak kostura prateći dinamiku Brownovih mostova.

Pretpostavke gornjeg pododjeljka, skupa s Lemom 2.2.1, daju idući algoritam za simulaciju trajektorija difuzije X primjenjiv samo u teoriji:

-
- 1: Generiraj neprekidnu trajektoriju $\omega \sim \mathbb{Z}$
 - 2: Izračunaj $H(\omega)$
 - 3: Konstruiraj binarni indikator I takav da $\mathbb{P}[I = 1 | \omega] = \exp\{-H(\omega)\}$
 - 4: Ako je $I = 0$, vrati se na 1.
 - 5: Vrati ω
-

U praksi ω možemo simulirati samo u konačno mnogo instanci $0 \leq t_1, t_2, \dots \leq T$ stoga je nemoguće egzaktno izračunati integral $H(\omega)$. Međutim, postoji zanimljiviji algoritam sličan gornjemu koji zaobilazi korake 1 i 2, ali i dalje uspješno provodi 3 i 4 koristeći pritom samo konačni slučajni kostur od ω .

Napomena 3.2.5. Jedna od glavnih ideja algoritma se temelji na činjenici da se za ograničenu funkciju $0 \leq \phi(u) \leq T^{-1}$ događaji vjerojatnosti $\int_0^T \phi(u) du$ mogu konstruirati jednostavno simulirajući slučajne točke $(V, W) \sim Unif[(0, T) \times (0, T^{-1})]$. Upravo će događaj $\{\phi(V) \geq W\}$ imati traženu vjerojatnost.

Tu ideju možemo proširiti na događaje vjerojatnosti $\exp(-H)$ koristeći Taylorov razvoj. On daje zapis događaja vjerojatnosti $\exp(-H)$ u ovisnosti o prebrojivo mnogo događaja vjerojatnosti H . Nadalje, ispada da je moguće taj događaj prikazati na dva načina; kao prebrojivu uniju rastućih i kao prebrojivi presjek padajućih događaja. I ono najbitnije, istinitost događaja u gornjem razvoju se može provjeriti konačnim kosturom trajektorije $\omega \sim \mathbb{Z}$, stoga se možemo uvjeriti i u istinitost početnog događaja vjerojatnosti $\exp\{-H(\omega)\}$ u konačno mnogo koraka.

Gornje su ideje objedinjene u sljedećem teoremu. Neka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor koji sadrži sve potrebne slučajne elemente korištene u teoremu.

Teorem 3.2.6. *Neka je $\omega \sim \mathbb{Z}$ trajektorija pristranog Brownovog gibanja \overline{BM} na $[0, T]$. Neka je $\tau = (V_i, W_i)_{i \geq 1}$ niz nezavisnih točaka uniformno distribuiranih na $[0, T] \times [0, 1/T]$. Dalje uzмимо $U \sim \text{Unif}(0, 1)$. Pretpostavimo da su ω, τ i U nezavisne. Definirajmo sljedeće događaje:*

$$\Gamma_0 = \Omega \quad \Gamma_n = \left\{ \phi(B_{V_1}(\omega)) \geq W_1, \dots, \phi(B_{V_n}(\omega)) \geq W_n, U \leq \frac{1}{n!} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Zatim definiramo niz događaja $(E_n)_{n \geq 1}$ kao

$$E_{2n+1} = (\Gamma_0 - \Gamma_1) + (\Gamma_2 - \Gamma_3) + \dots + (\Gamma_{2n} - \Gamma_{2n+1}), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$E_{2n+2} = (\Gamma_0 - \Gamma_1) + (\Gamma_2 - \Gamma_3) + \dots + (\Gamma_{2n} - \Gamma_{2n+1}) + \Gamma_{2n+2}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

gdje $(+)$ koristimo za uniju disjunktih skupova i $D - F = D \cap F^c$ za skupove $F \subseteq D$.

Tada:

- (i) $(E_{2n+1})_{n \geq 0}, (E_{2n+2})_{n \geq 0}$ su nizovi rastućih i padajućih događaja takvih da je $E_{2\kappa+1} \subseteq E_{2\lambda+2}$ za bilo koje $\kappa, \lambda \in \{0, 1, \dots\}$ te $\mathbb{P}[\cap_0^\infty E_{2n+2} - \cup_0^\infty E_{2n+1}] = 0$.
- (ii) Neka je $E = \cup_0^\infty E_{2n+1}$. Ako je I binarni indikator takav da $I = 1$ ukoliko se E dogodi i 0 inače, tada

$$\mathbb{P}[I = 1 | \omega] = \exp \left\{ - \int_0^T \phi(B_t(\omega)) dt \right\}.$$

Dokaz. (i) Iz definicije događaja odmah dobivamo $E_1 \subseteq E_3 \subseteq \dots \subseteq E_{2n+1} \subseteq E_{2n+2}$ za $n \in \{0, 1, \dots\}$. Iz $E_{2n} = E_{2n+2} + (\Gamma_{2n+1} - \Gamma_{2n+2})$, slijedi $E_{2n+2} \subseteq E_{2n} \subseteq \dots \subseteq E_2$. Očito vrijedi i $E_{2\kappa+1} \subseteq E_{2\lambda+2}$ za sve $\kappa, \lambda \in \{0, 1, \dots\}$.

Iz definicije $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$ zaključujemo $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma_n$ te $\Gamma_{2n+2} = E_{2n+2} - E_{2n+1}$. Također kako je $\Gamma_n \subseteq \{U \leq \frac{1}{n!}\}$ slijedi $\cap_n \Gamma_n \subseteq \cap_n \{U \leq \frac{1}{n!}\}$ i oba događaja su vjerojatnosti nula. Stoga:

$$\left(\bigcap_n E_{2n+2} \right) - \left(\bigcup_n E_{2n+1} \right) = \bigcap_n (E_{2n+2} - E_{2n+1}) = \bigcap_n \Gamma_{2n+2}.$$

Trivijalno, $\cup_n E_{2n+1} \subseteq \cap_n E_{2n+2}$ te njihova razlika $\cap_n E_{2n+2} - \cup_n E_{2n+1}$ ima vjerojatnost nula.

(ii) Kako $E_{2n+1} \uparrow E$ slijedi

$$\mathbb{P}[I = 1 \mid \omega] = \mathbb{P}[E \mid \omega] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_{2n+1} \mid \omega].$$

Koristeći $E_{2n+1} = \sum_{k=0}^n (\Gamma_{2k} - \Gamma_{2k+1})$, dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E_{2n+1} \mid \omega] &= \sum_{k=0}^n (\mathbb{P}[\Gamma_{2k} \mid \omega] - \mathbb{P}[\Gamma_{2k+1} \mid \omega]) \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \mathbb{P}[\Gamma_k \mid \omega]. \end{aligned}$$

Zbog činjenice da su $\tau = (V_n, W_n)_{n \geq 1}$ nezavisne i jednakodistribuirane, te da su τ, U i ω nezavisne slijedi

$$\mathbb{P}[\Gamma_k \mid \omega] = \mathbb{P}\left[U \leq \frac{1}{k!} \mid \omega\right] \prod_{i=1}^k \mathbb{P}[\phi(B_{V_i}(\omega)) \geq W_i \mid \omega]. \quad (3.8)$$

$\mathbb{P}[\phi(B_{V_i}(\omega)) \geq W_i \mid \omega]$ je vjerojatnost da se, uz dani $\omega \sim \mathbb{Z}$, slučajno izabrana točka iz $[0, T] \times [0, 1/T]$ nađe ispod grafa $\{(t, \phi(B_t(\omega))) : t \in [0, T]\}$. Sada iz $B_t = \omega(t)$, $t \in [0, T]$ slijedi

$$\mathbb{P}[\phi(B_{V_k}(\omega)) \geq W_k \mid \omega] = \int_0^T \phi(B_t(\omega)) dt.$$

Očito $\mathbb{P}[U \leq \frac{1}{k!} \mid \omega] = \frac{1}{k!}$, stoga (3.8) postaje

$$\mathbb{P}[\Gamma_k \mid \omega] = \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^T \phi(B_t(\omega)) dt \right\}^k.$$

Konačno dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[I = 1 \mid \omega] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \int_0^T \phi(B_t(\omega)) dt \right\}^k \\ &= \exp \left\{ - \int_0^T \phi(B_t(\omega)) dt \right\}. \end{aligned}$$

□

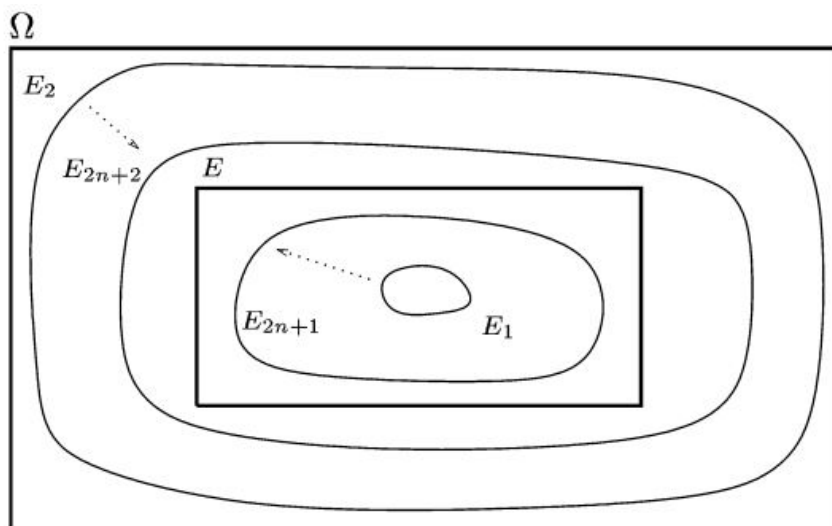
Napomena 3.2.7. Teorem 3.2.6 ne nameće nikakva ograničenja vezana uz redosljed generiranja slučajnih elemenata u njemu. Kako bi ga preoblikovali u *accept-reject* shemu nužno je da prvo vučemo U , a zatim paralelno generiramo trajektoriju $\omega \sim \mathbb{Z}$ i niz τ .

Algoritam ćemo svesti na iterativan postupak simuliranja prvo (V_i, W_i) uniformno na $[0, T] \times [0, 1/T]$ te simuliranja $\omega(V_i)$ uvjetno na već dobiveni uzorak $\omega(V_1), \omega(V_2), \dots, \omega(V_{i-1})$. Sjetimo se i da jednostavno možemo konstruirati \overline{BM} koje prolazi nekim točkama vodeći pritom računa da počinjemo od završne točke $\omega(T) \sim h$. Ostaje samo Brownovim mostovima spojiti vrijednosti $\{\omega(V_1), \dots, \omega(V_{i-1}), \omega(T)\}$. Preciznije za dobiveni V_i koristimo formulu:

$$\omega(V_i) \sim \mathcal{N}\left(\omega(V_-^i) + \frac{\omega(V_+^i) - \omega(V_-^i)}{V_+^i - V_-^i}(V_i - V_-^i), \frac{(V_+^i - V_i)(V_i - V_-^i)}{V_+^i - V_-^i}\right), \quad (3.9)$$

gdje definiramo $V_-^i = \max\{0, V_j, j = 1, \dots, i-1 : V_j < V_i\}$ i $V_+^i = \min\{T, V_j, j = 1, \dots, i-1 : V_j > V_i\}$. Korištenje ovih formula je opravdano na stranici 360 u [6].

Iz definicije $(E_i)_{i \geq 1}$ je jasno kako nakon j iteracija imamo dovoljno informacija zaključiti jesu li se događaji E_1, E_2, \dots, E_j dogodili ili nisu. Uvjet zaustavljanja našeg algoritma je onda upravo prvi put kada smo sigurni da se neparni E_i dogodio ili kada se parni E_i nije dogodio. Teorem 3.2.6 nam kaže da u prvom slučaju mora biti $I = 1$ dok je u drugom $I = 0$. Daljnje iteracije ne mijenjaju odluku o indikatoru I .



Slika 3.2: Prikaz skupova E_i , $i \geq 1$. Ako se ne dogodi neki paran E_i ne dogodi se ni E . Analogno, dovoljno je da se dogodi neki neparni E_i kako bi znali da se dogodio E . (Preuzeto iz [2])

Konačno, prezentiramo algoritam koji implementira uzorkovanje s odbacivanjem uz Teorem 3.2.6 u obliku pseudokoda:

-
- 1: Postavi rubove \overline{BM} : $\omega(0) = 0$ i $\omega(T) \sim h$.
 - 2: Simuliraj $U \sim Unif(0, 1)$. Postavi $i = 0$.
 - 3: Simuliraj $(V, W) \sim Unif[(0, T) \times (0, 1/T)]$. Postavi $i = i + 1$.
 - 4: Konstruiraj $\omega(V)$ uzimajući u obzir dosadašnji kostur ω .
 - 5: Ako $\phi(\omega(V)) < W$ ili $U > 1/i!$ onda
Ako je i paran postavi $I = 0$ i vrati se na 1.
Ako je i neparan postavi $I = 1$ i odi na 7.
 - 6: Inače odi na 3.
 - 7: Vrati dosad simulirani dio trajektorije ω .
-

3.2.3 Efikasnost algoritma

Potrebno je komentirati dva aspekta efikasnosti egzaktnog algoritma. Prvi se odnosi na vjerojatnost prihvatanja jednom predložene trajektorije \overline{BM} . Dok se drugi pobliže tiče samog algoritma i govori o očekivanom broju točaka iz $(0, T) \times (0, 1/T)$ koji je potreban da bi donijeli odluku o trajektoriji koju gradimo.

Izraz (3.7) možemo zapisati kao

$$\epsilon(T) \frac{dQ}{dZ} = \exp \left\{ - \int_0^T \phi(B_t) dt \right\}, \quad (3.10)$$

za prikladan $\epsilon(T)$. Iz dokaza Leme 2.2.1 slijedi da je $\epsilon(T)$ upravo vjerojatnost da će proizvoljna trajektorija $\omega \sim \mathbb{Z}$ biti prihvaćena. Drugim riječima, $\epsilon(T) = \mathbb{P}[I = 1]$, za indikator I iz Teorema 3.2.6.

Propozicija 3.2.8. *Za $T \leq 1/(k_2 - k_1)$, vjerojatnost $\epsilon(T)$ događaja $\{I = 1\}$ je barem e^{-1} i padajuća je funkcija s obzirom na T , posebno $\lim_{T \downarrow 0} \epsilon(T) = 1$.*

Dokaz. Kako $0 \leq \phi \leq T^{-1}$, vjerojatnost prihvatanja proizvoljne trajektorije $\omega \sim \mathbb{Z}$ iznosi $\exp \left\{ - \int_0^T \phi(B_t) dt \right\} \geq \exp(-1)$.

Nadalje, po pretpostavci $T \leq T_0 = \frac{1}{k_2 - k_1}$. Kako bi naglasili ulogu varijable vremena definirajmo $p : [0, T_0] \times C \rightarrow [0, 1]$

$$p(T, \omega) = \exp \left\{ - \int_0^T \phi(B_t(\omega)) dt \right\}.$$

Iz Teorema 3.2.6 (ii) slijedi

$$\epsilon(T) = \int_C p(T, \omega) \mathbb{Z}(d\omega). \quad (3.11)$$

Trivijalno, p je padajuća funkcija u ovisnosti o T i $\lim_{T \downarrow 0} p(T, \omega) = 1$, oba svojstva vrijede \mathbb{Z} -g.s. Iz (3.11) sada vidimo da je i $\epsilon(T)$ također padajuća u T . Dalje, kako $\lim_{n \rightarrow \infty} p(1/n, \omega) = 0$ i $p(\frac{1}{n}, \omega) \leq p(\frac{1}{n+1}, \omega)$ teorem o monotonij konvergenciji povlači

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C p(1/n, \omega) \mathbb{Z}(d\omega) = \int_C \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} p(1/n, \omega) \right\} \mathbb{Z}(d\omega) = 1.$$

Iz monotonosti $\epsilon(T)$ slijedi $\lim_{T \downarrow 0} \epsilon(T) = 1$. \square

Kao i očekivano, vjerojatnost prihvatanja predložene trajektorije \overline{BM} raste kada smanjimo vremenski period kojeg promatramo.

Propozicija 3.2.9. *Definirajmo slučajnu varijablu $N : \Omega \rightarrow 1, 2, \dots, s$*

$$N(\omega) = \begin{cases} \min\{n = 2, 4, \dots : \omega \notin E_n\}, & \text{za } \omega \in E^c, \\ \min\{n = 1, 3, \dots : \omega \in E_n\}, & \text{za } \omega \in E. \end{cases}$$

Tada je $\mathbb{E}[N] \leq e$.

Dokaz. Primijetimo da $\mathbb{P}[N \geq n] \leq \mathbb{P}[U \leq \frac{1}{(n-1)!}]$, pa odmah dobivamo

$$\mathbb{E}[N] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e.$$

\square

Slučajna varijabla N predstavlja broj događaja E_n koje moramo provjeriti prije no što možemo ocijeniti pripada li ω u E ili E^c . Iznenađujuć je rezultat da za bilo koji prikladan T i koeficijent drifta α očekujemo da će nam biti dovoljne manje od 3 točke za prosudbu.

Poglavlje 4

Primjene

4.1 Usporedba metoda na primjeru

U ovom poglavlju smo egzaktni algoritam, koji je do sada bio obrađen samo s teoretske strane, implementirali u R-u te primijenili na prikladnoj difuziji. Dobivene rezultate, odnosno dobivene distribucije usporedili smo s onima generiranim Eulerovom metodom. Pritom stavljajući poseban naglasak na usporedbu efikasnosti dviju metoda, u vidu potrebnog vremena za izvršenje algoritama. Preciznije, željeli smo rekreirati rezultate prezentirane u [2] vezane uz jednodimenzionalnu distribuciju difuzije u nekoj vremenskoj točki. Kao podobnu stohastičku diferencijalnu jednadžbu za tu svrhu prepoznajemo

$$dX_t = (1 + \sin(X_t)) dt + dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = 0. \quad (4.1)$$

Ona je odabrana jer koeficijent drifta $\alpha(x) = 1 + \sin(x)$ zadovoljava nužne pretpostavke komentirane u prošlom poglavlju:

i) α je svugdje derivabilna funkcija.

ii) Vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\{A(u) - u^2/(2T)\} du =: c < \infty,$$

$$\text{za } A(u) = \int_0^u \alpha(s) ds.$$

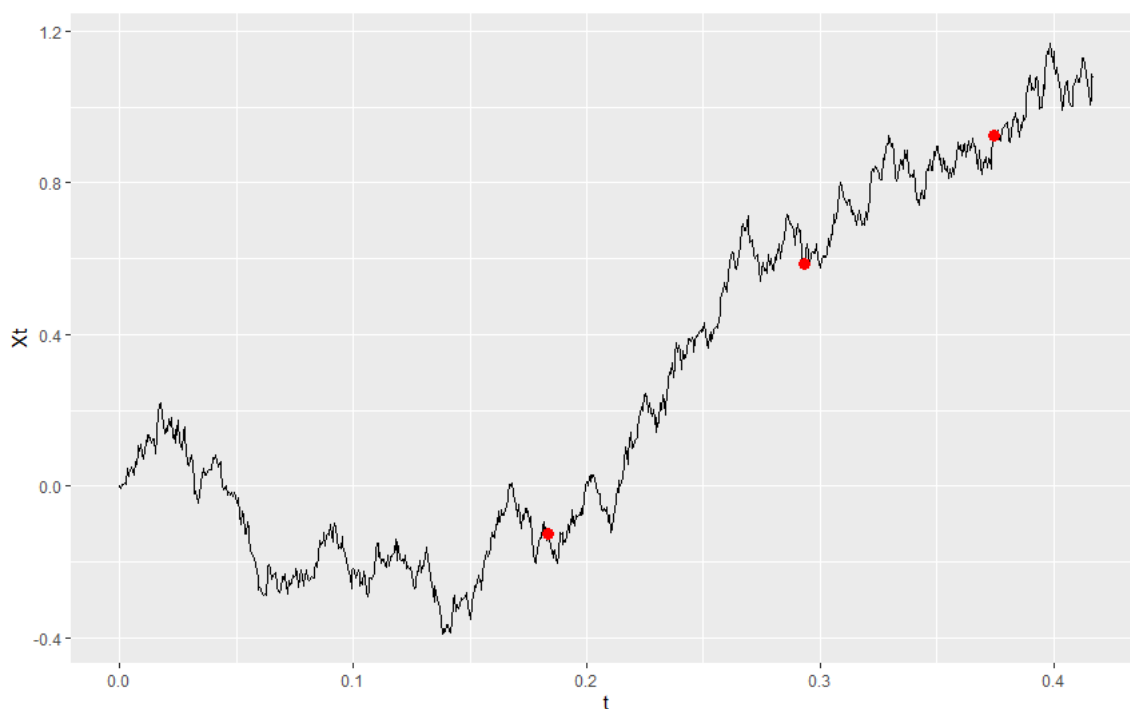
iii) Postoje $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ takvi da

$$k_1 \leq \frac{1}{2}\alpha^2(u) + \frac{1}{2}\alpha'(u) \leq k_2, \quad \text{za svaki } u \in \mathbb{R}.$$

U našem slučaju možemo uzeti $k_1 = -0.33$ i $k_2 = 2.07$. Prateći oznake prethodnog poglavlja imamo $\phi(u) = \frac{1}{2}((1 + \sin(u))^2 + \cos(u)) + 0.33$ i završno vrijeme $T = 1/(k_2 - k_1) = 0.417$. Vrijedi $0 \leq \phi(u) \leq T^{-1}$ za sve realne u .

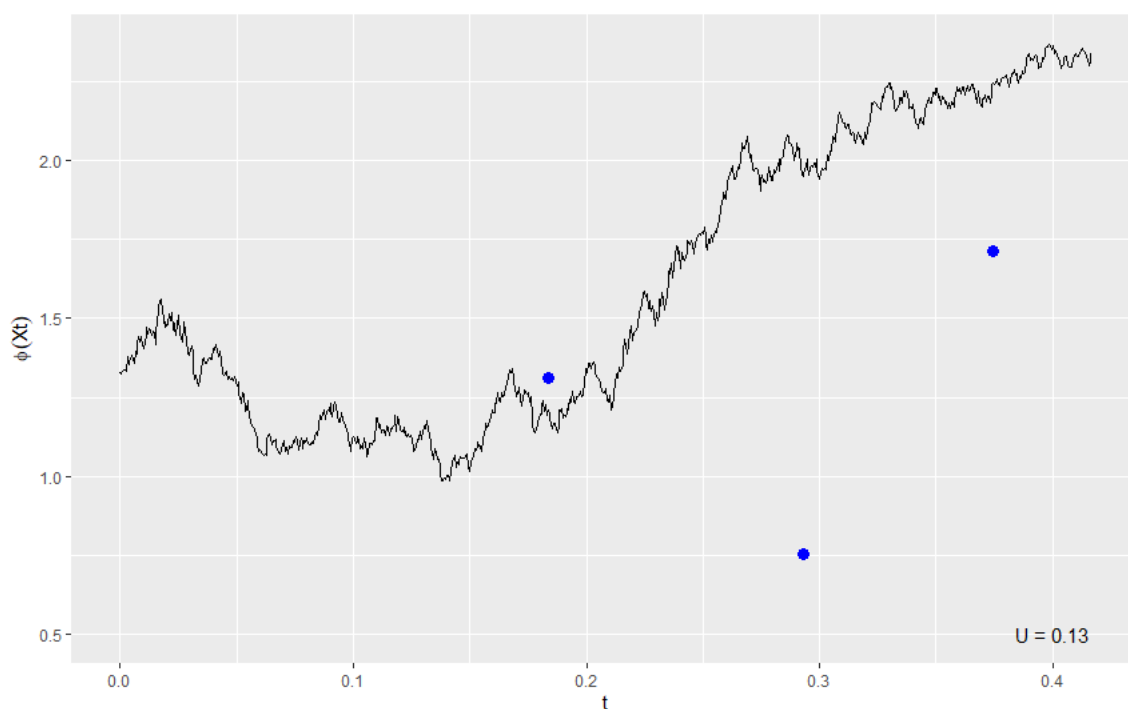
Dalje, za proces $\overline{BM} = (BM|BM_T = \rho)$ vrijedi $\rho \sim h \propto \exp\{u - \cos(u) - u^2/(2T)\}$. Kako nam je u algoritmu potrebno simulirati jedino BM_T možemo pribjeći običnom *rejection-samplingu* s jediničnom normalnom predlagajućom distribucijom. Konkretno, koristili smo paket *AR* dostupan u R-u.

Algoritmom smo generirali 5000 egzaktnih trajektorija difuzije iz (4.1). U tu smo svrhu morali predložiti 9700 putanja \overline{BM} , što znači da je vjerojatnost prihvatanja $\mathbb{P}[I = 1]$ iz Teorema 3.2.6 otprilike 0.515. To se poklapa i s teorijskom ocjenom iz Propozicije 3.2.8 jer $0.515 > e^{-1}$ kao i s $\lim_{T \downarrow 0} \epsilon(T) = 1$. Kod 76% predloženih trajektorija bilo je dovoljno generirati manje od 3 točke iz $[0, T] \times [0, 1/T]$ za donošenje odluke o prihvatanju. Najviše je bilo potrebno simulirati 7 točaka.



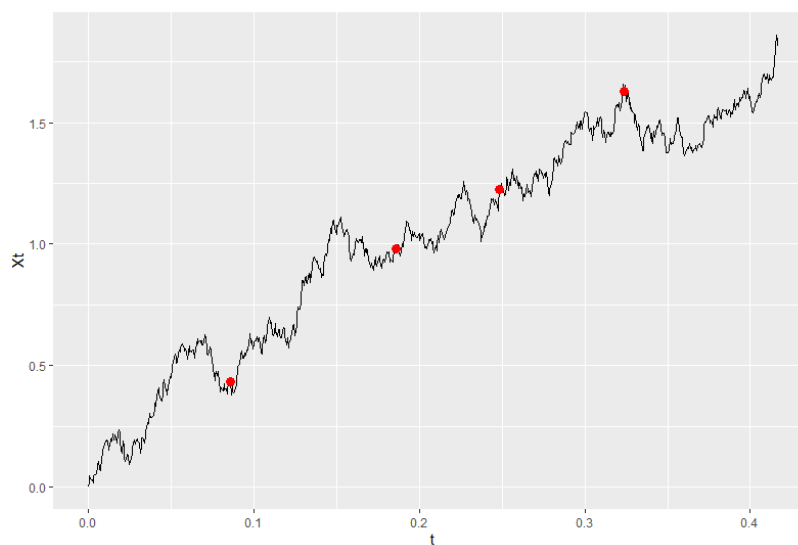
Slika 4.1: Primjer trajektorije koja je prihvaćena u egzaktnom algoritmu. Crvenim točkama je naznačen kostur iz Teorema 3.2.6.

Na istom primjeru možemo i zornije objasniti tijek algoritma. Prvo je potrebno transformirati trajektoriju djelovanjem funkcije $x \mapsto \phi(x)$. Dovoljno je sada prikazati dio ravnine $[0, T] \times [0, 1/T]$, na njemu se nalaze sve simulirane točke (V, W) , kao i po definiciji, cijela slika trajektorije $\phi(X_t)$. Prvi put kad se neka točka nađe iznad grafa funkcije $\phi(X_t)$ algoritam staje. Isto tako ne smijemo zaboraviti vrijednost slučajne varijable $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ koja također može uzrokovati odbacivanje trajektorije.

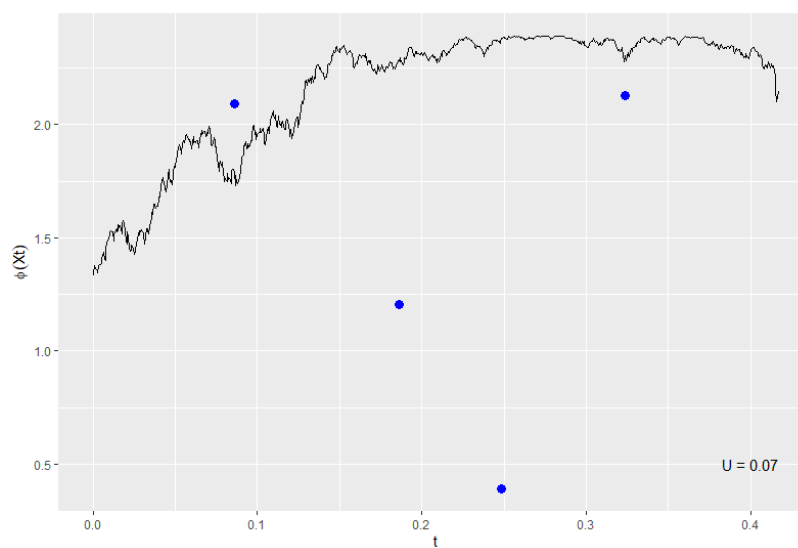


Slika 4.2: Za prihvaćanje trajektorije sa Slike 4.1 dovoljno je bilo simulirati 3 točke iz $[0, T] \times [0, 1/T]$. Treća točka (V_3, W_3) se nalazi iznad grafa $\phi(X_t)$, što je prema Teoremu 3.2.6 dovoljno da zaključimo da se dogodio E_3 pa i E , odnosno $I = 1$.

No nisu sve trajektorije bile prihvaćene, stoga su iduće slike posvećene slučajevima u kojima odbacujemo predloženu putanju. Odabrali smo primjer u kojem $U \sim (0, 1)$ nije odigrala presudnu ulogu.

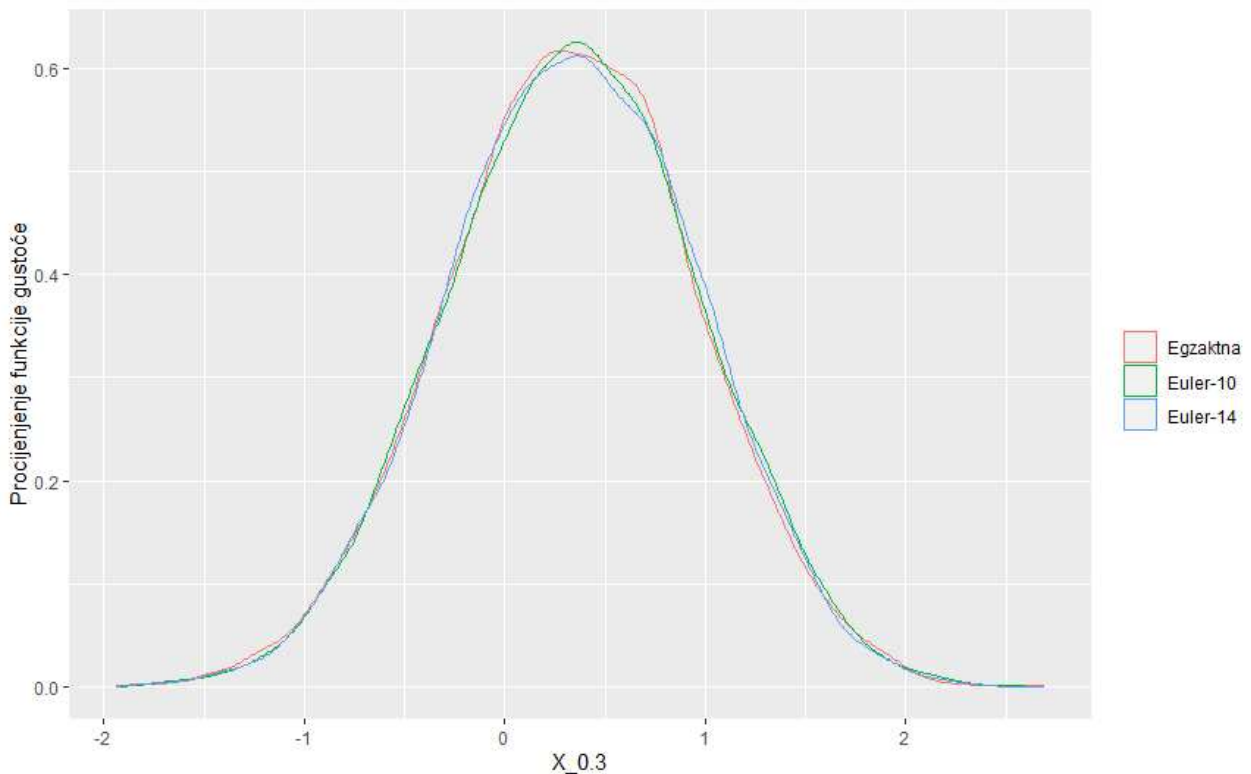


Slika 4.3: Primjer trajektorije koja nije prihvaćena u egzaktnom algoritmu. Crvenim točkama je ponovno naznačen kostur iz Teorema 3.2.6.



Slika 4.4: Za odbacivanje gornje trajektorije dovoljno je bilo simulirati 4 točke iz $[0, T] \times [0, 1/T]$. Četvrta točka (V_4, W_4) se nalazi iznad grafa $\phi(X_t)$, što je prema Teoremu 3.2.6 dovoljno da zaključimo da se ne dogodi E_4 pa ni E , odnosno $I = 0$.

Konačno, usporedili smo distribuciju egzaktno generiranih trajektorija s onima dobivenim standardnom Eulerovom metodom. U tu smo svrhu generirali uzorak od 10000 trajektorija egzaktnim algoritmom te 10000 trajektorija Eulerovom shemom s različitim vremenskim diskretizacijama. Promatrali smo jednodimenzionalnu distribuciju slučajne varijable $X_{0.3}$, odnosno gdje se nalazi proces u trenutku $t = 0.3$.



Slika 4.5: Procijenjene funkcije gustoće $X_{0.3}$ iz uzoraka duljina 10000 generiranih egzaktnom i Eulerovom metodom (s vremenskim inkrementima 2^{-10} i 2^{-14}).

Dobivene distribucije su vrlo slične te bi za konkretniji zaključak trebalo generirati opsežnije uzorke. Egzaktnom algoritmu je bilo potrebno 58 sekundi, što je brže od gušće Eulerove sheme kojoj je bilo potrebno 159 sekundi, ali ne i od rjeđe Eulerove sheme koja je završila za samo 11 sekundi. Međutim, kada bismo željeli simulirati trajektoriju u daljoj budućnosti egzaktnom algoritmu bi potreban broj operacija rastao linearno [2], dok bi zbog akumulacije grešaka Eulerova metoda morala imati sve gušće vremenske inkremente te drastično veći broj operacija.

4.2 Simulacija prvog vremena prelaska

U nekim primjenama nam nije od interesa čitava trajektorija, već samo neke njene karakteristike. Na primjer, maksimalna ili minimalna vrijednost koju poprima na intervalu $[0, T]$ ili primjerice prvi trenutak kada prijeđe razinu $\gamma > 0$.

Umjesto da simuliramo čitavu trajektoriju dovoljno je generirati kosture iz Teorema 3.2.6 te traženo svojstvo ispitati na Brownovim mostovima među čvorovima kostura. Na taj način inicijalni problem vezan uz egzotičnu difuziju svodimo na jednostavan zadatak koji se tiče Brownovih procesa.

Proceduru ćemo demonstrirati simulirajući prvo vrijeme prelaska razine $\gamma = 0.4$ već spomenute difuzije

$$dX_t = (1 + \sin(X_t)) dt + dB_t, \quad X_0 = 0. \quad (4.2)$$

Kako bismo odredili prvo vrijeme prelaska počinjemo od egzaktnog algoritma kojim dobivamo poznati kostur. Zatim za svaki od Brownovih mostova provjeravamo pogađa li razinu $\gamma = 0.4$ te za prvog takvog računamo točno vrijeme pogađanja. Naravno, može se dogoditi da niti jedan most u kosturu ne dođe do tražene razine te tada moramo generirati novi kostur kojeg lijepimo na prijašnji.

U trenutku kada pažnju prebacimo na izdvojeni Brownov most možemo se osloniti na već postojeću teoriju vezanu uz vremena prelazaka Brownovog gibanja. Označimo s $BM(\delta) = \{BM_s(\delta) : 0 \leq s \leq t\}$ Brownovo gibanje koje u trenutku t poprima vrijednost δ te s $BM = \{BM_s : s \geq 0\}$ obično Brownovo gibanje. Neka su dana vremena prelazaka $\tau_\gamma(\delta) = \inf\{s \in [0, t] : BM_s(\delta) \geq \gamma\}$ i $\tau_{\eta, \zeta} = \inf\{s \geq 0 : BM_s \geq \eta + \zeta s\}$ uz konvenciju $\inf \emptyset = \infty$. Tada za svaki $s \in [0, t]$ vrijedi

$$\mathbb{P}[\tau_\gamma(\delta) > s] = \mathbb{P}\left[\tau_{\eta, \zeta} > \frac{s}{t-s}\right]. \quad (4.3)$$

Dokaz je u [2].

Uzmemo li $\eta = \gamma / \sqrt{t}$ i $\zeta = (\gamma - \delta) / \sqrt{t}$ dobivamo

$$\tau_\gamma(\delta) \stackrel{d}{=} g(\tau_{\eta,\zeta}) \quad \text{za } g(u) = \begin{cases} tu/(u+1), & 0 < u < \infty, \\ \infty, & u = \infty. \end{cases} \quad (4.4)$$

Poznato je da je funkcija gustoće $\tau_{\eta,\zeta}$ dana s Bachier-Levyjevom formulom (vidi [2]):

$$p^{\eta,\zeta}(u) = \frac{|\eta|}{u^{3/2} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\zeta u + \eta)^2}{2u}\right\}, \quad u > 0. \quad (4.5)$$

Označimo li sada s $IG(\mu, \lambda)$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$, inverznu Gaussovu distribuciju čija funkcija gustoće iznosi:

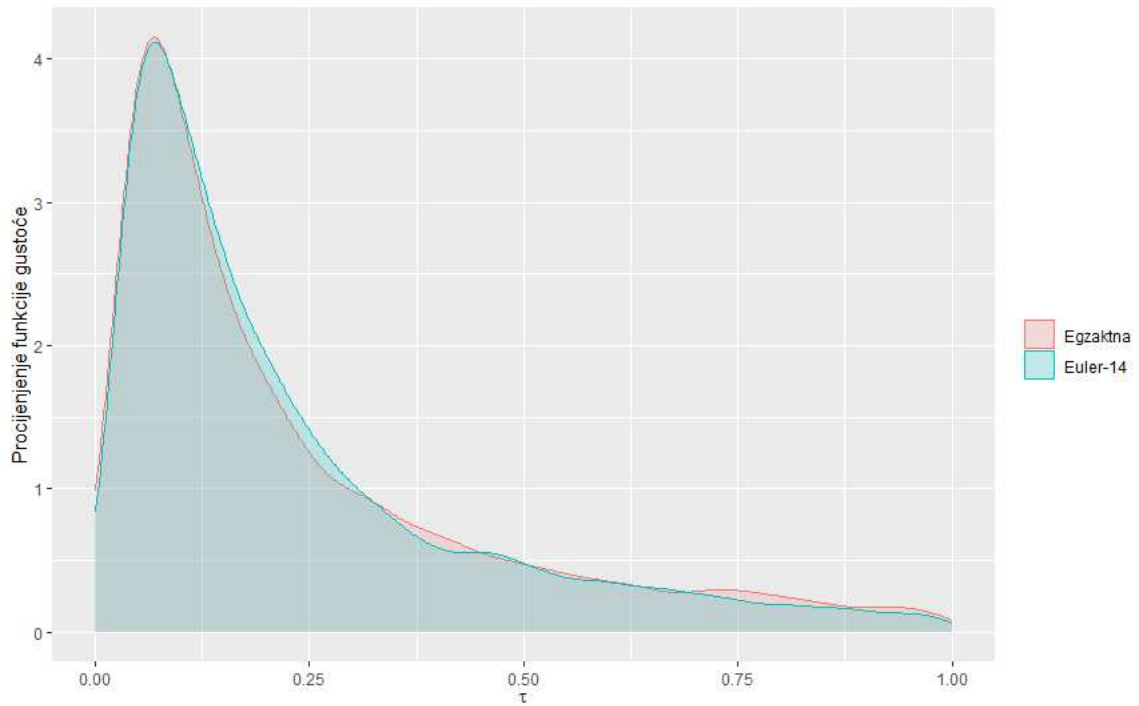
$$IG(\mu, \lambda, u) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi u^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda(u - \mu)^2}{2\mu^2 u}\right\}, \quad u > 0, \quad (4.6)$$

prepoznamo da je za $\eta\zeta < 0$ gustoća (4.5) zapravo $IG(-\eta/\zeta, \eta^2)$. To je slučaj u kojem BM_s sigurno prelazi linearno ograničenje $\eta + \zeta t$. Inače, vrijedi $\eta\zeta \geq 0$ i tada se (4.5) može zapisati kao $\exp(-2\zeta\eta)IG(\eta/\zeta, \eta^2, u)$. Što ima interpretaciju da BM_s prelazi danu linearnu granicu s vjerojatnošću $\exp(-2\zeta\eta)$ te je u tom slučaju vrijeme prelaska distribuirano prema gustoći $IG(\eta/\zeta, \eta^2)$. Dakle, za simulaciju $\tau_{\eta,\zeta}$ dovoljno je znati simulirati iz $IG(\mu, \lambda)$, a koristeći (4.4) jednostavno možemo dobiti i $\tau_\gamma(\delta)$.

Uz ovaj teorijski osvrt imamo sve što je potrebno za simulaciju vremena prelaska (4.2). U prezentaciji algoritama sa $\mathcal{S}\{x_0; t_1, t_2, \dots, t_n\}$ označavamo kostur promatranog procesa X u vremenskim trenucima $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ koji počinje u x_0 . Algoritam glasi:

-
- 1: Postavi $i = 0$, $y = 0$.
 - 2: Egzaktnim algoritmom generiraj kostur $\mathcal{S}\{y; t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,n_i}\}$.
 - 3: Za svaki Brownov most u kosturu provjeri pogađa li razinu γ i zapamti prvi takav.
 - 4: Ako nijedan most nije pogodio γ postavi $y = X_T$, $i = i + 1$ i ođi na 2.
 - 5: Inače, odredi prvo vrijeme prelaska τ i vrati $(i - 1) * T + \tau$
-

Kao što smo najavili gornji algoritam smo implementirali u R-u i primijenili na (4.2) uz $\gamma = 0.4$. Na taj način smo generirali uzorak prvih vremena pogađanja duljine 10000 čiju smo empirijsku distribuciju ponovno usporedili s uzorkom dobivenim Eulerovom metodom s vremenskim inkrementom od 2^{-14} .



Slika 4.6: Usporedba distribucija $\tau_{0.4}$ dobivenih egzaktnom i Eulerovom metodom na temelju procijenjenih funkcija gustoće

Bibliografija

- [1] Aurelien Alfonsi, *Affine Diffusions and Related Processes: Simulation, Theory and Applications*, Springer, 2015.
- [2] Alexandros Beskos i Gareth O. Roberts, *Exact simulation of diffusions*, The Annals of Applied Probability **15** (2005), br. 4, 2422 – 2444.
- [3] Samuel Herrmann i Cristina Zucca, *Exact simulation of the first-passage time of diffusions*, Journal of Scientific Computing **79** (2019), 1477 – 1504.
- [4] P. E. Kloeden i E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, 1995.
- [5] B. Basrak i H. Planinić, *Financijski praktikum, nastavni materijali*, zadnje pristupanje: ožujak 2021., https://www.pmf.unizg.hr/images/50025954/SimuliranjeSlVar_rejection_notes.pdf.
- [6] I. Karatzas i S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1991.
- [7] B.K. Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer, 1998.
- [8] Zoran Vondraček, *Slučajni procesi, nastavni materijali*, zadnje pristupanje: veljača 2010., <https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp-p01.pdf>.
- [9] Vanja Wagner, *Financijsko modeliranje 2, nastavni materijali*, zadnje pristupanje: lipanj 2021., https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm2_p12.pdf.

Sažetak

U ovome radu proučavamo metode simulacija trajektorija difuzija određenih stohastičkim diferencijalnim jednažbama s posebnim naglaskom na egzaktnu metodu koja se temelji na uzorkovanju s odbacivanjem.

U prvom poglavlju dajemo pregled teorije slučajnih procesa i Itôvog diferencijalnog računa potrebnog za sva daljnja razmatranja.

U drugom poglavlju predstavljamo klasičnu metodu prihvaćanja i odbacivanja odnosno *rejection sampling* uvodeći pritom i alternativan pristup korišten u egzaktnoj metodi.

Nadalje, u trećem poglavlju iz teoretske perspektive prezentiramo metode za simulaciju trajektorija difuzija, prvo Eulerovu metodu i zatim egzaktnu metodu. Također, dajemo ocjenu efikasnosti egzaktnog algoritma.

Konačno, u četvrtom poglavlju obje metode implementiramo u matematičkom programskom okruženju R te vršimo usporedbe na konkretnoj stohastičkoj diferencijalnoj jednažbi.

Summary

In this thesis, we study different methods of simulating diffusion trajectories determined by stochastic differential equations with special emphasis on the exact method based on rejection sampling.

In the first chapter, we give an overview of the theory behind stochastic processes and Itô's differential calculus necessary for all further considerations.

In the second chapter, we present the standard method of rejection sampling, while also introducing an alternative approach used in the exact method.

Furthermore, in the third chapter, from a theoretical perspective, we present methods for simulating diffusion trajectories, first the Euler method and then the exact method. We also evaluate the efficiency of the exact algorithm.

Finally, in the fourth chapter, we implement both methods using the mathematical programming environment R and perform comparisons given a fixed stochastic differential equation.

Životopis

Rođen sam 18. kolovoza 1998. u Zagrebu. Srednjoškolske dane sam proveo u zagrebačkoj XV. gimnaziji, gdje sam rado sudjelovao u natjecanjima znanja, posebice onima iz matematike i programiranja. Po završetku srednje škole upisujem preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu gdje upisujem i diplomski studij Financijska i poslovna matematika.