

Tetivno-tangencijalni četverokut

Mesić, Kevin

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:229019>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-17**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kevin Mesić

TETIVNO-TANGENCIJALNI
ČETVEROKUT

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, ožujak 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

*Ovaj diplomski rad posvećujem mami Valentini, tati Davoru i sestri Sari.
Hvala vam na svemu što ste mi pružili tijekom studija.
Zahvaljujem svima koji su mi pomogli pri izradi ovog rada svojim savjetima,
a posebno mentorici doc. dr. sc. Mei Bombardelli.*

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 O četverokutima	2
1.1 Tetivni četverokut	2
1.2 Tangencijalni četverokut	5
2 Tetivno-tangencijalni četverokut	17
2.1 Karakterizacije tetivno-tangencijalnog četverokuta	18
2.2 Tetivno-tangencijalni četverokut pomoću inverzije	32
A Potencija točke s obzirom na kružnicu	48
A.1 Definicija potencije točke i svojstva	48
B O inverziji	51
B.1 Definicija inverzije i slika točke pri inverziji	51
B.2 Slika kružnice pri inverziji	53
Bibliografija	59

Uvod

Geometrija se smatra jednom od najstarijih matematičkih disciplina i već se u starom Egiptu i Grčkoj koristila za rješavanje praktičnih problema u graditeljstvu i arhitekturi. Pojmovi kao što su trokut, kružnica i mnogokut igraju ključnu ulogu u euklidskoj geometriji. Tetivni i tangencijalni četverokuti posebne su vrste mnogokuta koji imaju opisanu, odnosno upisanu kružnicu. Oni su od posebnog značaja za istraživanja u geometriji zbog svojih zanimljivih svojstava i njihovog utjecaja na druge pojmove u geometriji.

Ovaj diplomski rad posvećen je temi tetivno-tangencijalnog četverokuta. Iz naziva možemo pretpostaviti da je tetivno-tangencijalni četverokut konveksni četverokut koji je i tetivan i tangencijalan. Istraživanje ovog četverokuta može pomoći u razumijevanju šireg područja geometrije i dati nova saznanja u ovom značajnom području matematike.

Prvo poglavlje ovog rada govori o četverokutima, odnosno svojstvima tetivnog i tangencijalnog četverokuta koji će nam poslužiti za pokazivanje nekih zanimljivih svojstava tetivno-tangencijalnog četverokuta. Također ćemo definirati pojam kontaktnog četverokuta.

U drugom poglavlju definirat ćemo tetivno-tangencijalni četverokut te pokazati neke karakterizacije tetivno-tangencijalnih četverokuta. U ovom poglavlju ćemo, uz svojstva tetivnih i tangencijalnih četverokuta, koristiti inverziju te nekoliko svojstava pravokutnih trokuta kako bismo dokazali Fussov teorem te Yunovu nejednakost za tetivno-tangencijalne četverokute. U dodatku na kraju rada pokazat ćemo osnovna svojstva potencije točke s obzirom na kružnicu i inverzije.

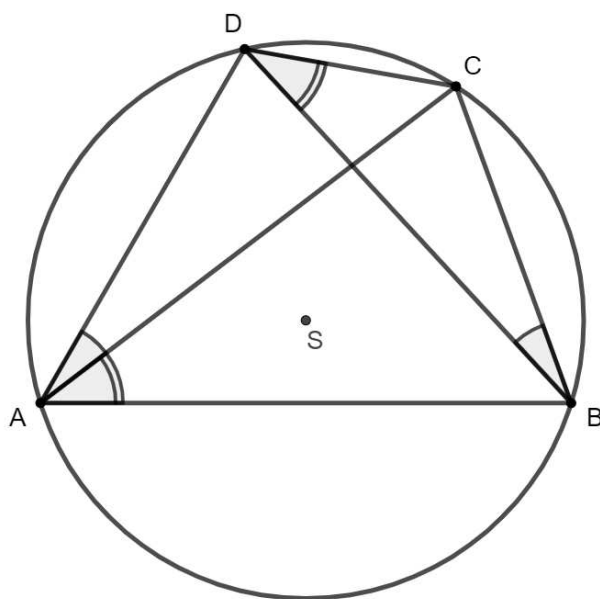
Poglavlje 1

O četverokutima

1.1 Tetivni četverokut

Osnovna svojstva tetivnog četverokuta

Tetivni četverokut je četverokut kojemu se može opisati kružnica.



Slika 1.1: Tetivni četverokut

Dokazat ćemo jednu od najpoznatijih karakterizacija tetivnog četverokuta: Četverokut je tetivan ako i samo ako mu je zbroj mjera parova nasuprotnih kutova jednak 180° .

Teorem 1.1.1. *Neka je $ABCD$ četverokut s kutovima mjera α , β , γ i δ . Tada je $ABCD$ tetivni četverokut ako i samo ako vrijedi*

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

Dokaz. Na slici 1.1 uočimo sukladnost sljedećih obodnih kutova nad istim lukom: $\angle DAC \cong \angle DBC$, $\angle CAB \cong \angle CDB$, $\angle ACD \cong \angle ABD$ i $\angle ACB \cong \angle ADB$. Za unutarnje kutove α , β , γ i δ četverokuta kod vrhova A , B , C i D , redom, vrijedi:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= (\angle DAC + \angle CAB) + (\angle ACD + \angle ACB) \\ &= (\angle DBC + \angle CDB) + (\angle ABD + \angle ADB) \\ &= (\angle ABD + \angle DBC) + (\angle ADB + \angle CDB) \\ &= \beta + \gamma. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Budući da je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$, vrijedi da je $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.

Obratno, promotrimo kružnicu c na kojoj leže točke A , B i C četverokuta $ABCD$ te neka za kutove četverokuta vrijedi $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$. Luk AC kružnice c koji sadrži točku B sadrži i sve točke T za koje vrijedi $|\angle ATC| = |\angle ABC| = \beta$. Luk AC kružnice c koji ne sadrži točku B sadrži sve točke T za koje vrijedi $|\angle ATC| = 180^\circ - \beta$. Budući da za točku D vrijedi

$$|\angle ADC| = \delta = 180^\circ - \beta = |\angle ATC|,$$

točka D se nalazi na luku AC kružnice c koji ne sadrži točku B , odnosno točka D se nalazi na kružnici c koja sadrži točke A , B i C . Dakle, $ABCD$ je četverokut koji ima opisanu kružnicu c , odnosno tetivni četverokut. \square

Središte opisane kružnice tetivnog četverokuta sjecište je simetrala stranica četverokuta. Naime, budući da su stranice tetivnog četverokuta tetive njemu opisane kružnice, a znamo da simetrale tetiva kružnice prolaze kroz njeno središte, zaključujemo da je središte opisane kružnice tetivnog četverokuta sjecište simetrala njegovih stranica.

Nadalje, neka se simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku u točki S . Budući da se točka S nalazi na simetrali stranice \overline{AB} , vrijedi $|SA| = |SB|$. Kako se točka S nalazi i na simetralama stranica \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} vrijedi $|SB| = |SC|$, $|SC| = |SD|$ i $|SD| = |SA|$. Dakle, za točke A , B , C i D četverokuta vrijedi $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$, odnosno točka S je jednako udaljena od točaka A , B , C i D . Točke A , B , C i D leže na kružnici sa središtem u točki S i duljinom radijusa $|SA|$, odnosno, četverokut $ABCD$ je tetivan. Dakle, četverokut je tetivan ako i samo ako mu se simetrale svih stranica sijeku u jednoj točki.

U nastavku ćemo dokazati lemu koju ćemo iskoristiti kako bismo dokazali teorem koji dovodi u omjer duljine dijagonala tetivno-tangencijalnog četverokuta. Lema je karakterizacija tetivnog četverokuta pomoću mjera njegovih kutova i trigonometrijske funkcije tangens.

Lema 1.1.2. *Neka je $ABCD$ proizvoljni konveksni četverokut. Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi*

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}. \quad (1.2)$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $ABCD$ tetivan. Tada vrijedi $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} = 90^\circ$, iz čega slijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 1. \end{aligned}$$

Analogno, vrijedi $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = 1$. Dakle,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = 1.$$

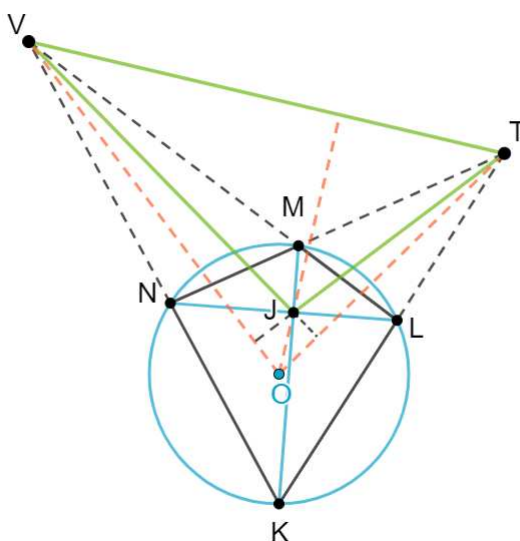
Obratno, pretpostavimo da $ABCD$ nije tetivan. Budući da vrijedi $\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 180^\circ$ te je prema pretpostavci $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \neq 90^\circ$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} > 90^\circ$ i $\frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} < 90^\circ$. Iz

$$0 > \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}$$

i činjenice da su $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\gamma}{2}$ šiljasti kutovi, odnosno $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} > 0$, zaključujemo $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} > 1$. Slično zaključujemo da je $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} < 1$. Dakle, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \neq \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$. □

Teorem 1.1.3. (Brocardov teorem) *Neka je $KLMN$ tetivni četverokut te točka O središte njemu opisane kružnice. Ako se produžeci nasuprotnih stranica sijeku u točkama T i V , a dijagonale četverokuta u točki J kao na slici 1.2, tada je točka O ortocentar trokuta $\triangle JTV$.*

Dokaz Brocardovog teorema može se pronaći u [10].



Slika 1.2: Brocardov teorem

1.2 Tangencijalni četverokut

Osnovna svojstva tangencijalnog četverokuta

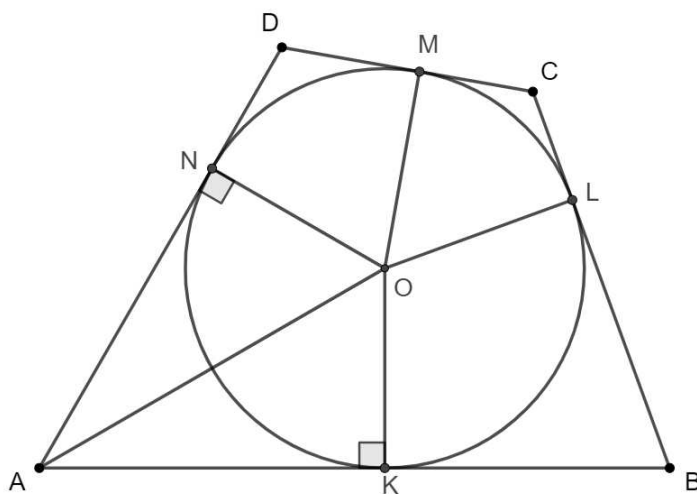
Tangencijalni četverokut je četverokut kojemu se može upisati kružnica. Dokazat ćemo jednu od najpoznatijih karakterizacija tangencijalnog četverokuta.

Teorem 1.2.1. *Zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta jednak je zbroju duljina preostalih dviju stranica tog četverokuta.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut, O središte njemu upisane kružnice c te K, L, M i N dirališta kružnice c sa stranicama četverokuta $ABCD$ kao na slici 1.3. Budući da vrijedi $|OK| = |ON|$ i da su $\angle AKO \cong \angle ANO$ pravi kutovi te \overline{AO} zajednička stranica, prema $SSK^>$ teoremu o sukladnosti trokuta vrijedi $\triangle AKO \cong \triangle ANO$. Slijedi $|AK| = |AN|$. Analogno dobivamo $|BK| = |BL|$, $|CL| = |CM|$ i $|DM| = |DN|$. Dakle,

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= (|AK| + |BK|) + (|CM| + |DM|) \\ &= (|AN| + |BL|) + (|CL| + |DN|) \\ &= (|AN| + |DN|) + (|BL| + |CL|) \\ &= |AD| + |BC|. \end{aligned}$$

Obratno, neka za četverokut $ABCD$ vrijedi $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ te neka je c kružnica koja dira stranice \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{AD} četverokuta $ABCD$ u točkama K, L i N , redom. Središte O



Slika 1.3: Tangencijalni četverokut

kružnice c nalazi se na simetralama kutova $\angle BAD$ i $\angle ABC$.

Budući da su AB , BC i AD tangente na kružnicu c , vrijedi $|AK| = |AN|$ i $|BK| = |BL|$. Odsječke stranica četverokuta $ABCD$ označimo s $e = |AK|$, $f = |BL|$, $g = |CL|$ i $h = |DN|$. Iz pretpostavke slijedi:

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= |AD| + |BC| \\ e + f + |CD| &= e + h + f + g \\ |CD| &= g + h. \end{aligned}$$

Neka tangenta iz vrha D na kružnicu c siječe pravac BC u točki V i dira kružnicu c u točki M . Tada je $ABVD$ tangencijalni četverokut i vrijedi

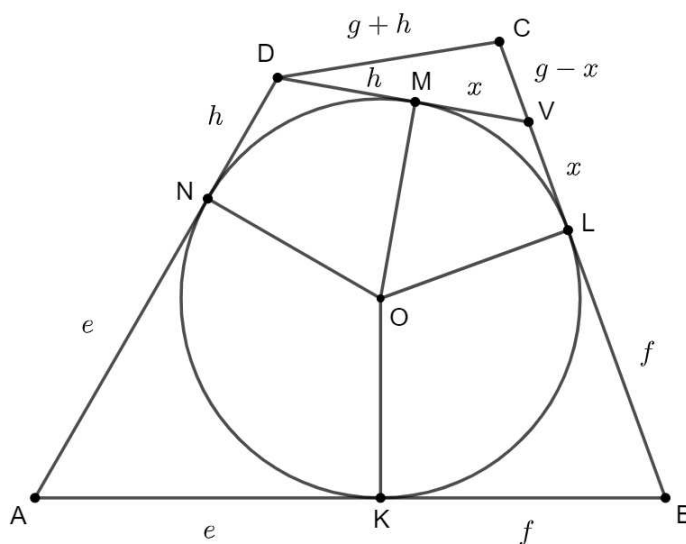
$$|DM| = |DN| = h, \quad |VM| = |VL| = x.$$

Za duljinu dužine \overline{CV} vrijedi

- (i) $|CV| = g - x$, ako je V između točaka C i L ,
- (ii) $|CV| = x - g$, ako je V na produžetku dužine \overline{CL} .

U prvom slučaju je $|CV| = g - x$ kao na slici 1.4 pa u trokutu $\triangle CVD$ vrijedi

$$|DV| + |CV| = h + x + g - x = g + h = |CD|.$$


 Slika 1.4: Slučaj kada je $|CV| = g - x$

Dakle, točka V se nalazi na dužini \overline{CD} . Budući da se točke C i V nalaze na pravcima CD i BC , vrijedi $C = V$.

U drugom slučaju je $|CV| = x - g$ pa u trokutu $\triangle CVD$ vrijedi

$$|CD| + |CV| = g + h + x - g = h + x = |DV|.$$

Dakle, točka C se nalazi na dužini \overline{DV} . Budući da se točke C i V nalaze na pravcima DV i BC , vrijedi $C = V$. Budući da je $ABVD$ tangencijalni četverokut i $C = V$, slijedi da je $ABCD$ tangencijalni četverokut. \square

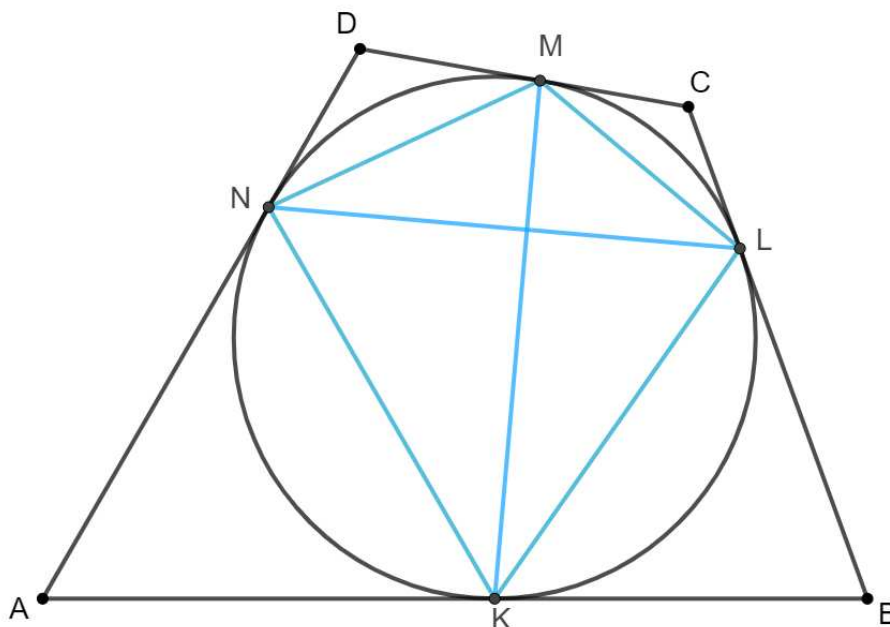
Dokaz obrata prethodnog teorema preuzet je iz [7].

Središte upisane kružnice tangencijalnog četverokuta sjecište je simetrala kutova četverokuta. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut kao na slici 1.3. Budući da su trokuti $\triangle AKO$ i $\triangle ANO$ sukladni, vrijedi $\angle OAK \cong \angle OAN$, odnosno AO je simetrala kuta $\angle KAN$. Analogno vrijedi da središte upisane kružnice leži na preostalim simetralama kutova tangencijalnog četverokuta.

Nadalje, neka je O sjecište simetrala kutova četverokuta $ABCD$. Budući da je O na simetrali kuta $\angle BAC$, vrijedi $d(O, AB) = d(O, AD)$. Također, O se nalazi na simetralama kutova $\angle ABC$, $\angle BCD$ i $\angle ADC$ pa vrijedi $d(O, AB) = d(O, BC)$, $d(O, BC) = d(O, CD)$ i

$d(O, CD) = d(O, AD)$. Iz $d(O, AB) = d(O, BC) = d(O, CD) = d(O, AD)$ slijedi da je točka O jednako udaljena od stranica \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} četverokuta $ABCD$. Neka su K , L , M i N nožišta okomica iz O na stranice \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} četverokuta, redom. Tada vrijedi $|OK| = |OL| = |OM| = |ON|$, odnosno točke K , L , M i N nalaze se na kružnici c sa središtem O i duljinom radijusa $|OK|$ koja dodiruje stranice četverokuta $ABCD$ u točkama K , L , M i N . Četverokut $ABCD$ ima upisanu kružnicu pa je tangencijalan. Dakle, četverokut je tangencijalan ako i samo ako mu se simetrale svih kutova sijeku u jednoj točki.

Neka kružnica upisana četverokutu $ABCD$ dira stranice \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} četverokuta $ABCD$ u točkama K , L , M i N , redom. Dužine \overline{KM} i \overline{LN} nazivamo tangencijalnim tetivama. Četverokut $KLMN$ naziva se kontaktni četverokut tangencijalnog četverokuta $ABCD$.



Slika 1.5: Tangencijalne tetive i kontaktni četverokut

U nastavku ćemo pokazati nekoliko svojstava kontaktnog četverokuta.

Lema 1.2.2. Neka su α , β , γ i δ mjere kutova tangencijalnog četverokuta $ABCD$ te α' , β' , γ' i δ' mjere kutova njegovog kontaktnog četverokuta $KLMN$ u vrhovima K , L , M i N , redom. Tada vrijedi

$$\alpha' = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \beta' = \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \gamma' = \frac{\gamma + \delta}{2}, \quad \delta' = \frac{\delta + \alpha}{2}.$$

Dokaz. Promotrimo trokute $\triangle AKO$ i $\triangle KA'O$ kao na slici 1.6, gdje je $A' = AO \cap KN$. U trokutu $\triangle AKO$ vrijedi

$$|\angle OAK| = \frac{\alpha}{2}, \quad |\angle OKA| = 90^\circ.$$

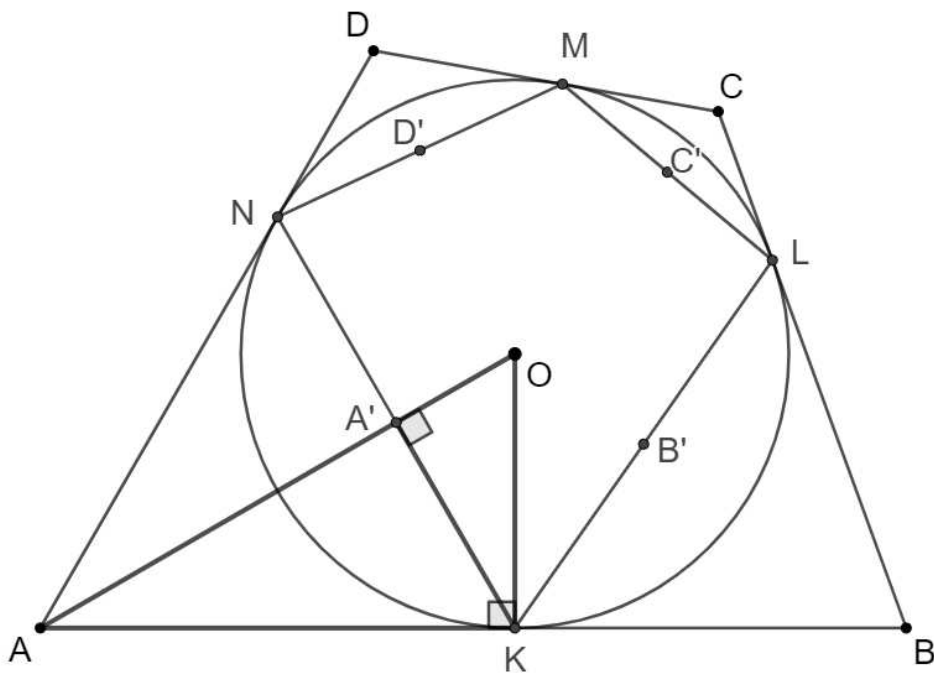
Dakle, $|\angle AOK| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Nadalje, u trokutu $\triangle KA'O$ vrijedi

$$|\angle OA'K| = 90^\circ, \quad |\angle A'OK| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Dakle, $|\angle OKA'| = \frac{\alpha}{2}$. Na analogan način, promatrajući trokute $\triangle BKO$ i $\triangle KOB'$ dobivamo $|\angle OB'K| = \frac{\beta}{2}$. Budući da je $|\angle B'KA'| = |\angle B'KO| + |\angle OKA'|$, vrijedi

$$\alpha' = |\angle B'KA'| = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Analogno dobivamo mjere preostalih kutova kontaktnog četverokuta $KLMN$. □



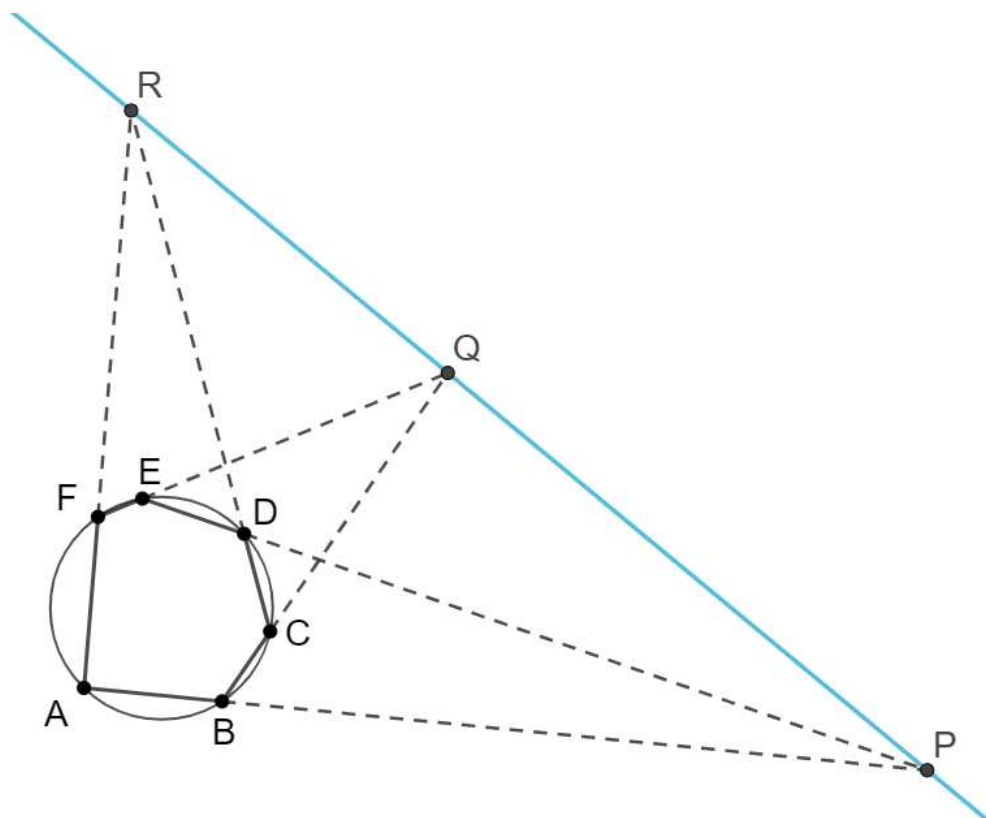
Slika 1.6: Mjere kutova kontaktnog četverokuta

Teorem 1.2.3. (Pascalov teorem) Parovi pravaca na kojima leže nasuprotne stranice šesterokuta upisanog kružnici sijeku se u tri kolinearne točke.

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [1].

Za šesterokut $ABCDEF$, prema Pascalovom teoremu 1.2.3 vrijedi da su točke $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ i $R = CD \cap FA$ kolinearne.

Pascalov teorem možemo koristiti na degeneriranim šesterokutima koje dobivamo kada dva vrha šesterokuta čine jedan vrh trokuta, četverokuta ili peterokuta. Primjerice, ako je $ABCDE$ tetivni peterokut, Pascalov teorem možemo primijeniti na degenerirani šesterokut $AABCDE$. Tada Pascalov teorem tvrdi da su točke $AA \cap CD$, $AB \cap DE$ i $BC \cap EA$ koliearne. Pritom ulogu pravca AA ima tangenta na kružnicu opisanu peterokutu $ABCDE$ u točki A .

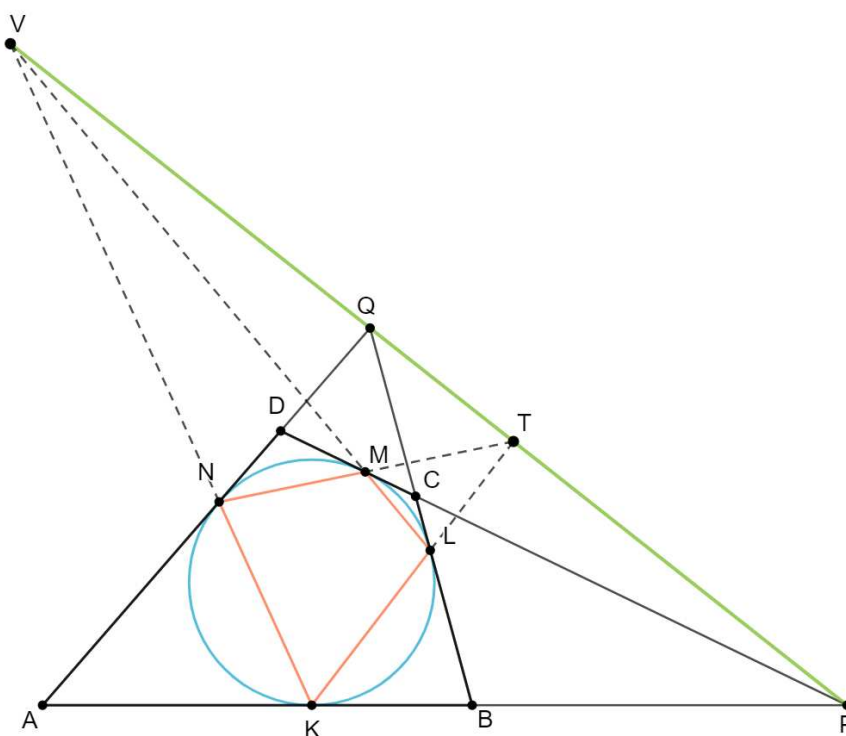


Slika 1.7: Pascalov teorem

Sljedeći korolar i teorem posljedice su Pascalovog teorema primijenjenog na tangencijalni četverokut.

Korolar 1.2.4. *Sjecišta pravaca na kojima leže nasuprotne stranice tangencijalnog četverokuta kolinearna su sa sjecištima pravaca na kojima leže nasuprotne stranice njegovog kontaktnog četverokuta.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut te $KLMN$ njegov kontaktni četverokut. Neka se pravci AB i CD sijeku u točki P , pravci AD i BC u točki Q , pravci KL i MN u točki T te pravci KN i LM u točki V kao na slici 1.8.



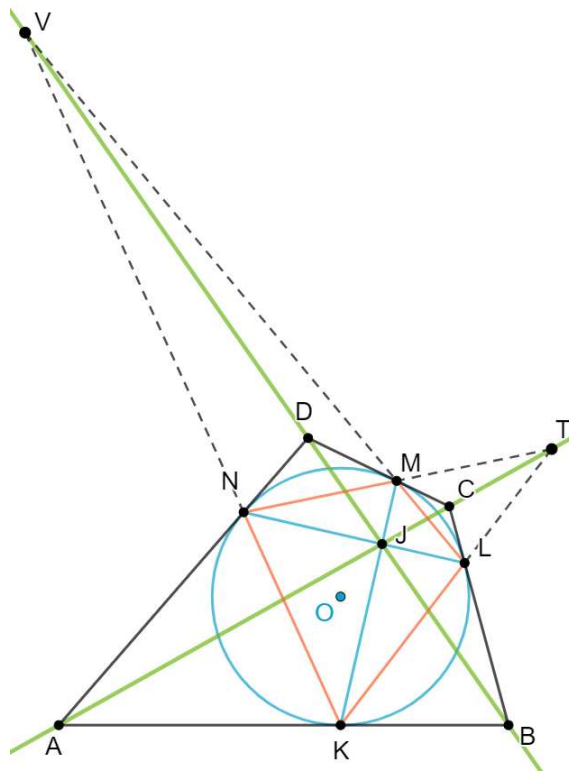
Slika 1.8: Točke P , Q , T i V su kolinearne

Promotrimo degenerirani šesterokut $KKLMMN$, gdje su K i M dvostruki vrhovi. Pravac KK u ovom slučaju je tangenta AB , a pravac MM je tangenta CD na kružnicu opisanu šesterokutu. Prema teoremu 1.2.3, sjecišta $P = KK \cap MM$, $T = KL \cap MN$ i $V = LM \cap KN$ su kolinearna.

Analogno, promatrajući šesterokut $KLLMNN$ dobivamo da su točke $Q = LL \cap NN$, T i V kolinearne. Iz $P \in TV$ i $Q \in TV$ slijedi da su točke P , Q , T i V kolinearne. \square

Teorem 1.2.5. *Dijagonale i tangencijalne tetive tangencijalnog četverokuta sijeku se u jednoj točki.*

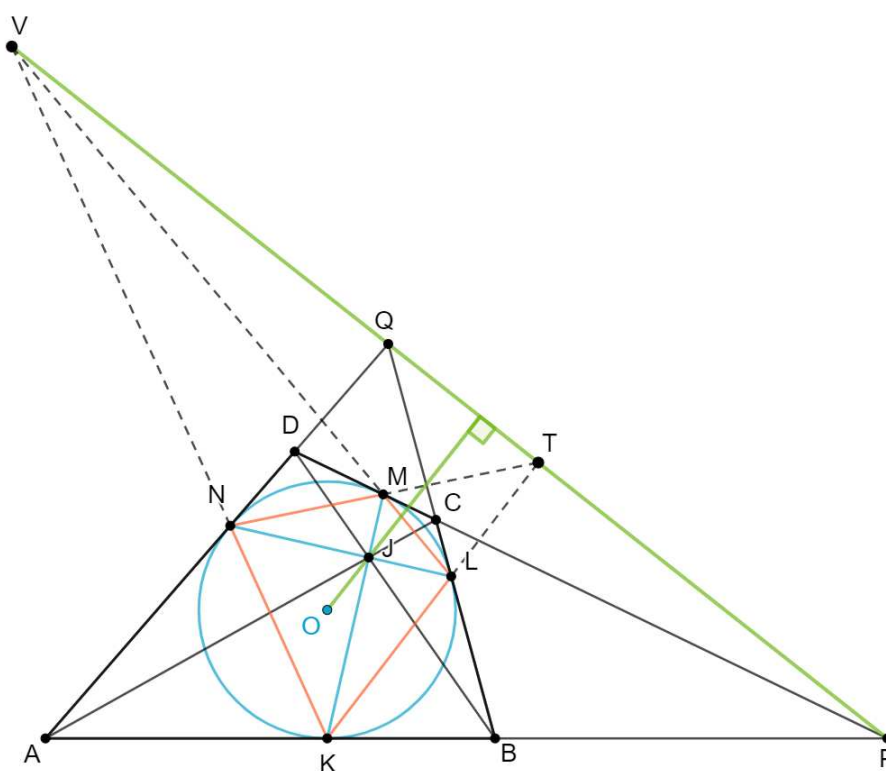
Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut, k njemu upisana kružnica te $KLMN$ njegov kontakti četverokut. Neka se dijagonale \overline{KM} i \overline{LN} kontaktnog četverokuta sijeku u točki J kao na slici 1.9. Promotrimo kontaktni četverokut kao degenerirani šesterokut $KKMLLN$ gdje su $KK = AB$ i $LL = BC$ tangente na kružnicu k u točkama L i M . Prema Pascalovom teoremu 1.2.3, sjecišta $B = KK \cap LL$, $J = KM \cap LN$ i $V = KN \cap LM$ su kolinearne. Nadalje, promotrimo degenerirani šesterokut $KMMLNN$. Ponovno, prema Pascalovom teoremu 1.2.3, sjecišta V , $D = MM \cap NN$ i J su kolinearne. Budući da točke B i D leže na pravcu VJ , točke B , D i J su kolinearne, odnosno dijagonala \overline{BD} četverokuta $ABCD$ prolazi točkom J . Analogno, promatranjem degeneriranih šesterokuta $KKLNNM$ i $KLLNMM$ te korištenjem Pascalovog teorema dobivamo da su točke A , C , J i $T = KL \cap NM$ kolinearne pa dijagonala \overline{AC} četverokuta $ABCD$ prolazi točkom J . \square



Slika 1.9: Tangencijalne tetive i dijagonale sijeku se u jednoj točki

Korolar 1.2.6. *Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut te O središte njemu upisane kružnice. Ako se pravci AB i CD sijeku u točki P , pravci AD i BC u točki Q te dijagonale \overline{AC} i \overline{BD} u točki J , tada je pravac PQ okomit na pravac OJ .*

Dokaz. Kontaktni četverokut $KLMN$ tetivni je četverokut sa središtem O opisane kružnice. Prema teoremu 1.2.5, dijagonale četverokuta $ABCD$ sijeku se s tangencijalnim tetivama u točki J . Ako se produžeci nasuprotnih stranica kontaktnog četverokuta $KLMN$ sijeku u točkama T i V kao na slici 1.10, tada prema teoremu 1.1.3 vrijedi $TV \perp OJ$. Prema korolaru 1.2.4 se pravci TV i PQ podudaraju pa vrijedi $PQ \perp OJ$. \square



Slika 1.10: Pravac PQ okomit je na pravac OJ

Prethodni dokaz preuzet je iz [9]. U nastavku ćemo promatrati tangencijalni četverokut koristeći inverziju s obzirom na njemu upisanu kružnicu. O inverziji se može više pročitati u dodatku na kraju rada.

Lema 1.2.7. *Slike vrhova tangencijalnog četverokuta pri inverziji u odnosu na njemu upisanu kružnicu polovišta su stranica kontaktnog četverokuta.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ proizvoljan tangencijalni četverokut s pripadnom upisanom kružnicom c sa središtem O i kontaktnim četverokutom $KLMN$ kao na slici 1.11. Neka je $A' = AO \cap KN$. Dokažimo da je A' polovište stranice \overline{KN} .

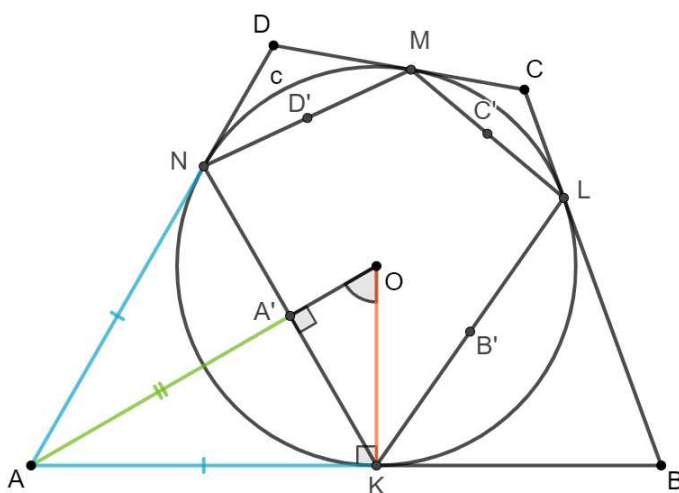
Promotrimo trokut $\triangle AKN$. Budući da vrijedi $|AK| = |AN|$, $|AA'| = |AA'|$ i $|\angle AA'K| = |\angle NA'A|$, prema $SSK^>$ teoremu o sukladnosti trokuta slijedi $\triangle AA'K \cong \triangle AA'N$. Dakle,

$$|A'K| = |A'N|, \quad |\angle AA'K| = 90^\circ.$$

Pokažimo da je A' slika točke A pri inverziji s obzirom na kružnicu c . Promotrimo trokute $\triangle OAK$ i $\triangle OKA'$. Budući da je $|\angle OKA| = |\angle KA'O| = 90^\circ$ i $\angle AOK \cong \angle A'OK$, prema KK teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle OAK \sim \triangle OKA'$. Nadalje, odgovarajuće stranice su proporcionalne, odnosno

$$\begin{aligned} \frac{|OA|}{|OK|} &= \frac{|OK|}{|OA'|} \\ |OA||OA'| &= |OK||OK| \\ |OA||OA'| &= |OK|^2. \end{aligned}$$

Prema definiciji inverzije, točka A' slika je točke A pri inverziji s obzirom na kružnicu c . □



Slika 1.11: Slika vrhova tangencijalnog četverokuta pri inverziji s obzirom na kružnicu c

Lema 1.2.8. *Polovišta stranica svakog četverokuta vrhovi su paralelograma.*

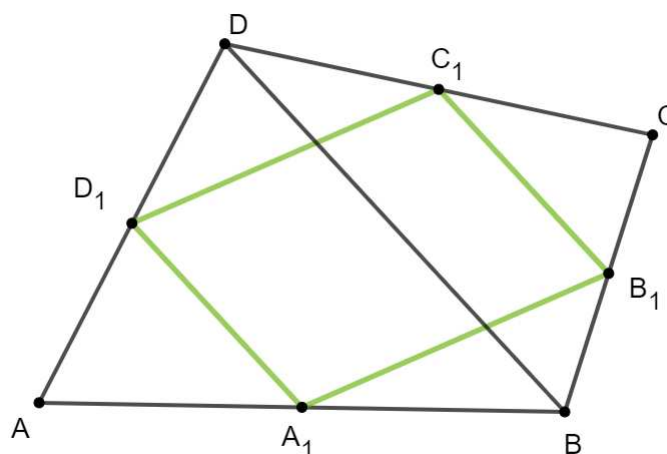
Dokaz. Neka je $ABCD$ četverokut. Označimo polovišta njegovih stranica s A_1 , B_1 , C_1 i D_1 kao na slici 1.12. Budući da su A_1 i D_1 polovišta stranica \overline{AB} i \overline{AD} trokuta $\triangle ABD$, dužina $\overline{A_1D_1}$ srednjica je trokuta $\triangle ABD$ te prema teoremu o srednjici trokuta vrijedi

$$\overline{A_1D_1} \parallel \overline{BD}, \quad |A_1D_1| = \frac{1}{2}|BD|. \quad (1.3)$$

Analogno, $\overline{B_1C_1}$ je srednjica trokuta $\triangle BCD$ i vrijedi

$$\overline{B_1C_1} \parallel \overline{BD}, \quad |B_1C_1| = \frac{1}{2}|BD|. \quad (1.4)$$

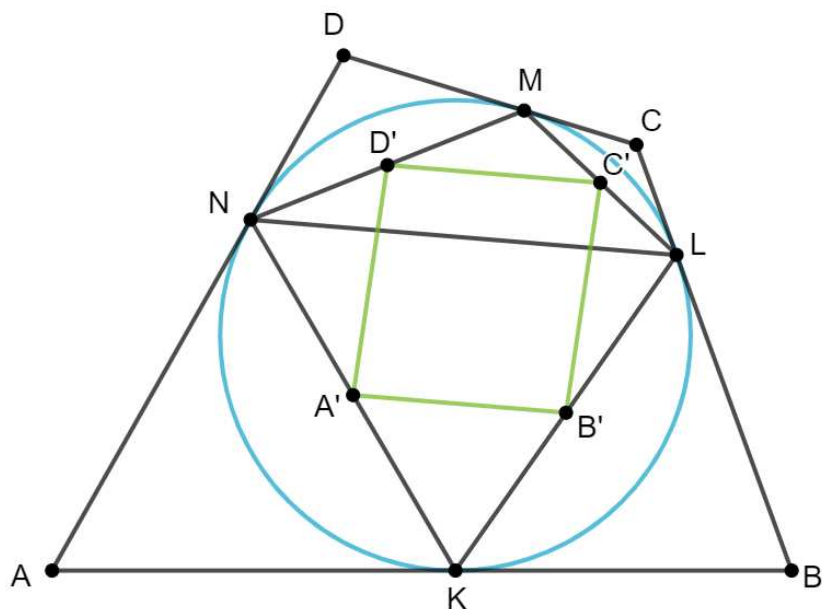
Iz (1.3) i (1.4) slijedi da je $A_1B_1C_1D_1$ paralelogram. \square



Slika 1.12: Polovišta stranica četverokuta vrhovi su paralelograma

Teorem 1.2.9. *Slike vrhova tangencijalnog četverokuta pri inverziji s obzirom na njemu upisanu kružnicu su vrhovi paralelograma.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut s kontaktnim četverokutom $KLMN$. Prema lemi 1.2.7, slike A' , B' , C' i D' točaka A , B , C i D preslikaju se u polovišta stranica kontaktnog četverokuta $KLMN$. Budući da su točke A' , B' , C' i D' polovišta stranica četverokuta $KLMN$, prema lemi 1.2.8 slijedi da su točke A' , B' , C' i D' vrhovi paralelograma, odnosno da je $A'B'C'D'$ paralelogram. \square

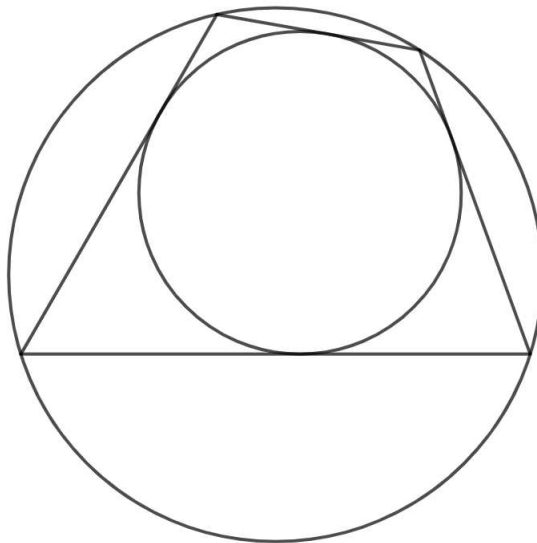


Slika 1.13: $A'B'C'D'$ tvore paralelogram

Poglavlje 2

Tetivno-tangencijalni četverokut

Tetivno-tangencijalni četverokut je četverokut koji ima upisanu i opisanu kružnicu, odnosno četverokut koji je istovremeno tetivan i tangencijalan.



Slika 2.1: Tetivno-tangencijalni četverokut

U ovom će poglavlju promatrani tetivno-tangencijalni četverokut biti četverokut $ABCD$ s kontaktnim četverokutom $KLMN$ tako da su vrhovi K , L , M i N kontaktnog četverokuta na stranicama \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} , redom. Duljine stranica četverokuta $ABCD$ označit ćemo s $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$ i $d = |AD|$ te mjere njegovih kutova s α , β , γ i δ . Kružnicu opisanu četverokutu $ABCD$ duljine radijusa R označit ćemo s k , a upisanu kružnicu duljine radijusa r sa c .

2.1 Karakterizacije tetivno-tangencijalnog četverokuta

Sljedeći teorem prirodna je posljedica najpoznatijih karakterizacija tetivnog i tangencijalnog četverokuta.

Teorem 2.1.1. *Neka je $ABCD$ četverokut sa stranicama duljina a , b , c i d te mjerama kutova α , β , γ i δ . Tada je $ABCD$ tetivno-tangencijalni četverokut ako i samo ako vrijedi*

$$a + c = b + d,$$

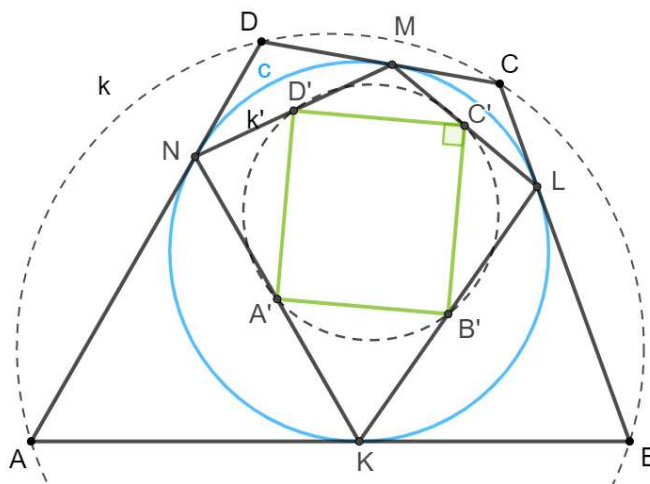
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz teorema 1.1.1 i teorema 1.2.1. □

Odnos tetivno-tangencijalnog četverokuta i njegovog kontaktnog četverokuta

U sljedećim lemapa i teoremima promatrat ćemo tetivno-tangencijalni četverokut, njegov kontaktni četverokut i tangencijalne tetive te ćemo dokazati karakterizacije tetivno-tangencijalnog četverokuta promatrajući kontaktni četverokut i tangencijalne tetive.

Lema 2.1.2. *Tangencijalni četverokut je tetivan ako i samo ako dužine koje spajaju polovišta stranica kontaktnog četverokuta čine pravokutnik.*



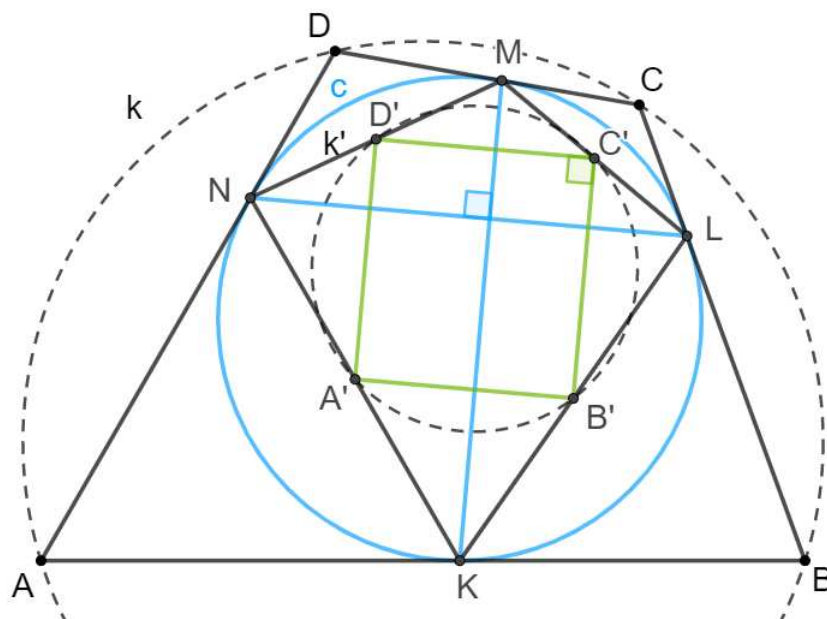
Slika 2.2: $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je $A'B'C'D'$ pravokutnik

Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut. Neka su \overline{KM} i \overline{LN} tangencijalne tetive četverokuta $ABCD$. Neka su A' , B' , C' i D' polovišta stranica kontaktnog četverokuta $KLMN$ kao na slici 2.2. Dokazat ćemo da je četverokut $ABCD$ tetivan ako i samo ako je četverokut $A'B'C'D'$ pravokutnik.

Pretpostavimo da je $ABCD$ tetivni četverokut s opisanom kružnicom k . Prema lemi 1.2.7, vrhovi A , B , C i D pri inverziji s obzirom na kružnicu c preslikaju se u polovišta A' , B' , C' i D' dužina \overline{KN} , \overline{KL} , \overline{LM} i \overline{MN} , redom. Prema lemi 1.2.9 dužine $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ i $\overline{A'D'}$ čine paralelogram jer spajaju polovišta stranica kontaktnog četverokuta $KLMN$. Opisana kružnica k četverokuta $ABCD$ se pri inverziji u odnosu na kružnicu c preslika u kružnicu k' koja je opisana paralelogramu $A'B'C'D'$. Tada je $A'B'C'D'$ paralelogram kojemu se može opisati kružnica, odnosno $A'B'C'D'$ je pravokutnik.

Obratno, pretpostavimo da je četverokut $A'B'C'D'$ pravokutnik. Pravokutnik je tetivni četverokut pa postoji kružnica k' koja sadrži točke A' , B' , C' i D' . Inverzijom u odnosu na kružnicu c kružnica k' preslika se u kružnicu k koja je opisana četverokutu $ABCD$. Dakle, $ABCD$ je tetivni četverokut. \square

Teorem 2.1.3. *Tangencijalni četverokut je tetivan ako i samo ako su njegove tangencijalne tetive međusobno okomite.*



Slika 2.3: Tangencijalne tetive u tetivno-tangencijalnom četverokutu su okomite

Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut. Neka su \overline{KM} i \overline{LN} tangencijalne tetive četverokuta $ABCD$. Neka je c kružnica upisana četverokutu $ABCD$ kao na slici 2.3.

Pretpostavimo da je $ABCD$ tetivni četverokut te da je kružnica k njegova pripadajuća opisana kružnica. Prema teoremu 1.2.9, slike A' , B' , C' i D' vrhova A , B , C i D pri inverziji u odnosu na kružnicu c čine paralelogram i vrijedi

$$A'B' \parallel C'D' \parallel LN, \quad B'C' \parallel A'D' \parallel KM.$$

Prema lemi 2.1.2. paralelogram $A'B'C'D'$ je pravokutnik i vrijedi

$$A'B' \perp B'C'.$$

Iz $A'B' \parallel LN$ i $B'C' \parallel KM$ slijedi

$$KM \perp LN.$$

Obratno, neka su tangencijalne tetive \overline{KM} i \overline{LN} okomite. Neka su točke A' , B' , C' i D' polovišta stranica kontaktnog četverokuta $KLMN$. Prema lemi 1.2.8 znamo da je četverokut $A'B'C'D'$ paralelogram i da su stranice paralelograma $A'B'C'D'$ paralelne dijagonalama četverokuta $KLMN$. Budući da je $\overline{KM} \perp \overline{LN}$, paralelogram $A'B'C'D'$ je pravokutnik. Njegovi vrhovi su slike točaka A , B , C i D pri inverziji s obzirom na kružnicu c . Pravokutnik je tetivni četverokut pa postoji kružnica k' koja sadrži točke A' , B' , C' i D' . Inverzijom u odnosu na kružnicu c kružnica k' preslika se u kružnicu k koja je opisana četverokutu $ABCD$. Dakle, $ABCD$ je tetivni četverokut. \square

Za kolinearne točke A , B i C djelišni omjer (ABC) definiramo kao omjer usmjerenih duljina AC i AB . Dakle,

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}.$$

Teorem 2.1.4. *Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut te $KLMN$ njegov kontaktni četverokut. Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi*

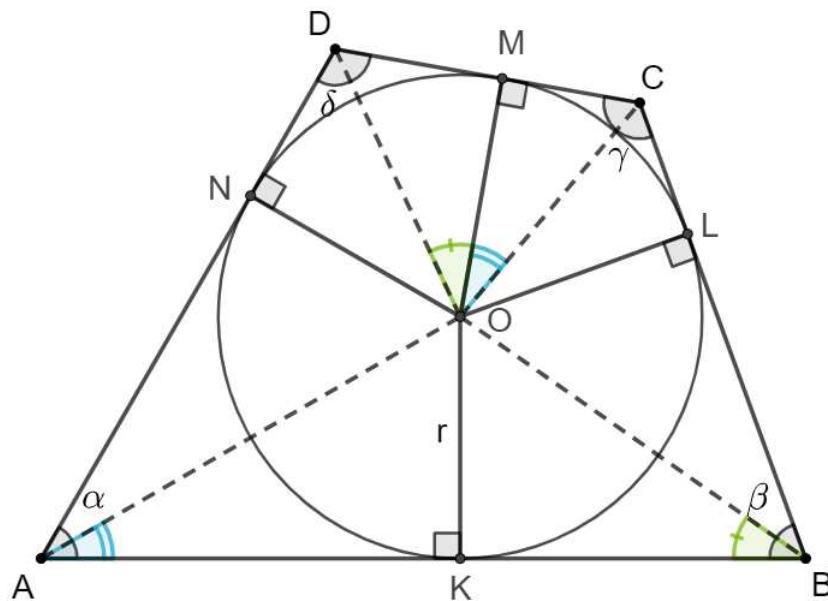
$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|DM|}{|CM|},$$

odnosno $(ABK) = (DCM)$.

Dokaz. Neka je O središte i $r = |OK|$ duljina radijusa upisane kružnice. Pretpostavimo da je $ABCD$ tetivan. Tada vrijedi $\alpha = 180^\circ - \gamma$ i $\beta = 180^\circ - \delta$. Dakle, $|\angle OAK| = \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = |\angle COM|$ i $|\angle OBK| = \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\delta}{2} = |\angle DOM|$.

Iz KK teorema o sličnosti trokuta slijedi $\triangle OAK \sim \triangle COM$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{|OK|}{|AK|} &= \frac{|CM|}{|OM|}, \\ \frac{r}{|AK|} &= \frac{|CM|}{r}. \end{aligned} \tag{2.1}$$



Slika 2.4: $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi $(ABK) = (DCM)$

Analogno, iz KK teorema o sličnosti trokuta slijedi $\triangle OBK \sim \triangle DOM$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{|OK|}{|BK|} &= \frac{|DM|}{|OM|}, \\ \frac{r}{|BK|} &= \frac{|DM|}{r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Iz (2.1) i (2.2) dobivamo $|AK| \cdot |CM| = r^2 = |BK| \cdot |DM|$, odnosno

$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|DM|}{|CM|},$$

tj. $(ABK) = (DCM)$.

Dokažimo sada da ako vrijedi $(ABK) = (DCM)$, tada je četverokut $ABCD$ tetivan četverokut. Pretpostavimo suprotno, odnosno da četverokut $ABCD$ nije tetivan. Tada je zbroj mjera jednog para nasuprotnih kutova manji od 180° , a zbroj mjera drugog para nasuprotnih kutova veći od 180° . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\alpha + \gamma < 180^\circ$ i $\beta + \delta > 180^\circ$.

Tada su $|\angle OAK| = \frac{\alpha}{2} < 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - |\angle OCM| = |\angle COM|$ i $|\angle OBK| = \frac{\beta}{2} > 90^\circ - \frac{\delta}{2} >$

$90^\circ - |\angle ODM| = |\angle DOM|$. Budući da su kutovi $\angle OAK$ i $\angle COM$ šiljasti, zaključujemo

$$\begin{aligned} |\angle OAK| &< |\angle COM| \\ \operatorname{tg}(|\angle OAK|) &< \operatorname{tg}(|\angle COM|) \\ \frac{|OK|}{|AK|} &< \frac{|MC|}{|OM|} \\ \frac{r}{|AK|} &< \frac{|MC|}{r} \\ |AK| \cdot |MC| &> r^2. \end{aligned}$$

Analogno, $|KB| \cdot |DM| < r^2$. Dakle, vrijedi $|AK| \cdot |MC| > r^2 > |KB| \cdot |DM|$, iz čega slijedi

$$\frac{|AK|}{|BK|} > \frac{|DM|}{|MC|},$$

odnosno $(ABK) > (DCM)$. □

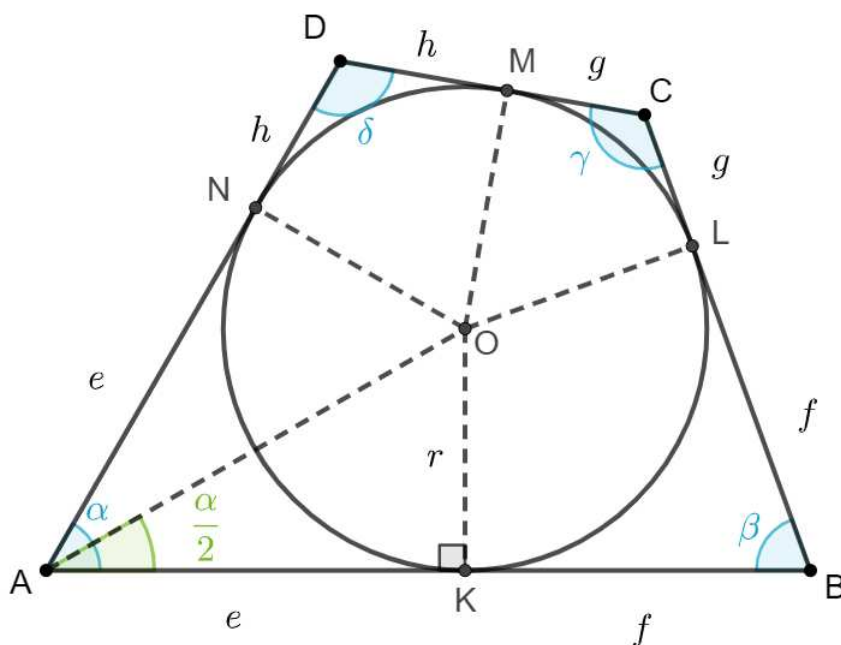
Dokaz prethodnog teorema preuzet je iz [12]. U nastavku ćemo dokazati teorem i leme iz [5] koje ćemo koristiti pri dokazivanju teorema koji dovodi u odnos duljine dijagonala tetivno-tangencijalnog četverokuta s duljinama odsječaka stranica koje vrhovi kontaktnog četverokuta odsjecaju. Promatrat ćemo tetivno-tangencijalni četverokut $ABCD$ s kontakt-nim četverokutom $KLMN$ i središtem O upisane kružnice duljine radijusa $r = |OK|$. Duljine odsječaka stranica četverokuta $ABCD$ označit ćemo s $e = |AK|$, $f = |BL|$, $g = |CM|$ i $h = |DN|$.

Teorem 2.1.5. *Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut te $KLMN$ njegov kontaktni četverokut. Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi $eg = fh$.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut. Pokazat ćemo da je $eg = fh$. Prema lemi 1.1.2 vrijedi

$$\begin{aligned} ABCD \text{ je tetivan} &\iff \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \\ &\iff \frac{r}{e} \cdot \frac{r}{g} = \frac{r}{f} \cdot \frac{r}{h} \\ &\iff eg = fh. \end{aligned}$$

□


 Slika 2.5: $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi $eg = fh$

Lema 2.1.6. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut. Tada vrijedi

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4}, \quad (2.3)$$

gdje su

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta \\ &= \text{zbroj tangensa pojedinačnih kutova,} \\ \varepsilon_2 &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \\ &= \text{zbroj umnožaka tangensa parova kutova,} \\ \varepsilon_3 &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \\ &= \text{zbroj umnožaka tangensa trojki kutova,} \\ \varepsilon_4 &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta. \end{aligned}$$

Dokaz. Definirajmo $\varepsilon_k^{(n)}$ kao sumu umnožaka tangensa k -torki n kutova. Za dva kuta α i β imamo

$$\varepsilon_1^{(2)} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta, \quad \varepsilon_2^{(2)} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Tada je

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\varepsilon_1^{(2)}}{1 - \varepsilon_2^{(2)}}.$$

Također je poznata formula za tri kuta, α , β i γ ,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\varepsilon_1^{(3)} - \varepsilon_3^{(3)}}{1 - \varepsilon_2^{(3)}}.$$

Promotrimo formulu za četiri kuta, α , β , γ i δ . Tada je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) + \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) \operatorname{tg} \delta} \\ &= \frac{\frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} + \operatorname{tg} \delta}{1 - \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} \operatorname{tg} \delta}} \\ &= \frac{\frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) - (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma) + \operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) \operatorname{tg} \delta - (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma) \operatorname{tg} \delta}} \\ &= \frac{\varepsilon_1^{(4)} - \varepsilon_3^{(4)}}{1 - \varepsilon_2^{(4)} + \varepsilon_4^{(4)}}. \end{aligned}$$

Ovime smo dokazali formulu (2.3). □

Lema 2.1.7. *Neka je ABCD tangencijalni četverokut te KLMN njegov kontaktni četverokut. Tada vrijedi*

$$r^2 = \frac{fgh + egh + efg + efg}{e + f + g + h}.$$

Dokaz. Neka su

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \\ \varepsilon_2 &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \\ \varepsilon_3 &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \\ \varepsilon_4 &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Prema lemi 2.1.6 vrijedi

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4}.$$

Budući da je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} = 180^\circ$, dobivamo $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 0$, odnosno, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$. Dakle, vrijedi

$$\frac{r}{e} + \frac{r}{f} + \frac{r}{g} + \frac{r}{h} = \frac{r^3}{fgh} + \frac{r^3}{egh} + \frac{r^3}{efh} + \frac{r^3}{efg} = \frac{r^3}{efgh}(e + f + g + h)$$

pa je

$$\begin{aligned} r^2 &= efgh \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right) \frac{1}{e + f + g + h} \\ &= efgh \cdot \frac{fgh + egh + efh + efg}{efgh} \cdot \frac{1}{e + f + g + h} \\ &= \frac{fgh + egh + efh + efg}{e + f + g + h}. \end{aligned}$$

□

Dokaz prethodne leme preuzet je iz [5].

Lema 2.1.8. *Neka je ABCD tangencijalni četverokut. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= \frac{e + g}{f + h}((e + g)(f + h) + 4fh), \\ |BD|^2 &= \frac{f + h}{e + g}((e + g)(f + h) + 4eg). \end{aligned}$$

Dokaz. Promotrimo sljedeći izraz

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{r^2}{e^2}}{1 + \frac{r^2}{e^2}} = \frac{e^2 - r^2}{e^2 + r^2}.$$

Prema lemi 2.1.7 vrijedi

$$\begin{aligned}
 \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{e^2 - \frac{fgh + egh + efh + efg}{e + f + g + h}}{e^2 + \frac{fgh + egh + efh + efg}{e + f + g + h}} \\
 &= \frac{e^2(e + f + g + h) - (fgh + egh + efh + efg)}{e(e^2 + eg + eh + gh) + f(e^2 + gh + eh + eg)} \\
 &= \frac{e^2(e + f + g + h) - (fgh + egh + efh + efg)}{(e + f)(e^2 + eg + eh + gh)} \\
 &= \frac{e^2(e + f + g + h) - (fgh + egh + efh + efg)}{(e + f)(e + g)(e + h)}.
 \end{aligned}$$

Koristeći poučak o kosinusu u trokutu $\triangle ABD$ dobivamo

$$\begin{aligned}
 |BD|^2 &= (e + f)^2 + (e + h)^2 - 2(e + f)(e + h) \cos(2\alpha') \\
 &= (e + f)^2 + (e + h)^2 - 2(e + f)(e + h) \frac{e^2(e + f + g + h) - (fgh + egh + efh + efg)}{(e + f)(e + g)(e + h)} \\
 &= \frac{1}{e + g} \left((e + g)(e + f)^2 + (e + g)(e + h)^2 - 2(e^3 + e^2f + e^2g + e^2h) \right. \\
 &\quad \left. + 2(fgh + egh + efh + efg) \right) \\
 &= \frac{1}{e + g} (ef^2 + f^2g + eh^2 + gh^2 + 2fgh + 4egh + 2efh + 4efg) \\
 &= \frac{1}{e + g} \left((e + g)(f^2 + h^2) + 4eg(f + h) + 2fh(e + g) \right) \\
 &= \frac{1}{e + g} \left((e + g)(f + h)^2 + 4eg(f + h) \right) \\
 &= \frac{f + h}{e + g} \left((e + g)(f + h) + 4eg \right).
 \end{aligned}$$

Analogno se dobije:

$$|AC|^2 = \frac{e + g}{f + h} \left((e + g)(f + h) + 4fh \right).$$

□

Teorem 2.1.9. *Neka je ABCD tangencijalni četverokut te KLMN njegov kontaktni četverokut. Četverokut ABCD je tetivan ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{e + g}{f + h}.$$

Dokaz. Korištenjem teorema 2.1.5 i leme 2.1.8 dobivamo

$ABCD$ je tetivan $\iff fh = eg$, prema teoremu 2.1.5

$$\iff (e + g)(f + h) + 4fh = (e + g)(f + h) + 4eg$$

$$\iff \frac{e + g}{f + h} \left((e + g)(f + h) + 4fh \right) \frac{f + h}{e + g} = \frac{f + h}{e + g} \left((e + g)(f + h) + 4eg \right) \frac{e + g}{f + h}$$

$$\iff |AC|^2 \frac{f + h}{e + g} = |BD|^2 \frac{e + g}{f + h}, \text{ prema lemi 2.1.8}$$

$$\iff \frac{|AC|^2}{|BD|^2} = \left(\frac{e + g}{f + h} \right)^2$$

$$\iff \frac{|AC|}{|BD|} = \frac{e + g}{f + h}.$$

□

Newtonovi pravci tetivno-tangencijalnog i kontaktnog četverokuta

U nastavku ćemo dokazati jednu od važnih karakteristika tetivno-tangencijalnog četverokuta koja govori o Newtonovim pravcima tetivno-tangencijalnog četverokuta te njemu kontaktnog četverokuta. Za dokaz će nam trebati nekoliko pomoćnih lema. Dokazi sljedeća dva teorema preuzeti su iz [9].

Teorem 2.1.10. *Neka se pravci na kojima leže nasuprotne stranice tangencijalnog četverokuta $ABCD$ sijeku u točkama P i Q . Neka je O središte upisane kružnice četverokuta $ABCD$. Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je kut $\angle POQ$ pravi kut.*

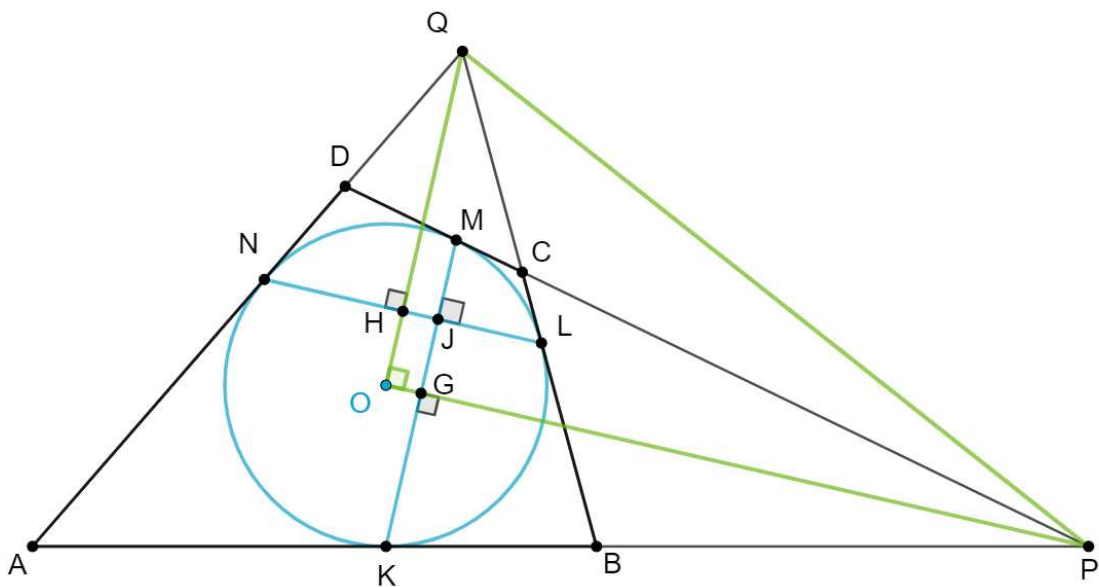
Dokaz. U dokazu koristimo oznake kao na slici 2.6. Neka su G i H polovišta tangencijalnih tetiva \overline{KM} i \overline{LN} , redom te neka se \overline{KM} i \overline{LN} sijeku u točki J . Promotrimo jednakokračne trokute $\triangle KPM$ i $\triangle LQN$. Vrijedi $GP \perp KM$ i $HQ \perp LN$.

Budući da su $\angle JGO$ i $\angle OHJ$ pravi kutovi u četverokutu $OGJH$ te zbroj mjera kutova u četverokutu iznosi 360° , vrijedi

$$|\angle POQ| = |\angle GOH| = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - |\angle HJG|.$$

Tada je $|\angle POQ| = 90^\circ$ ako i samo ako vrijedi $|\angle NJK| = 90^\circ$. No, prema teoremu 2.1.3, kut $\angle NJK$ je pravi kut ako i samo ako je $ABCD$ tetivno-tangencijalni četverokut.

U dokazu ovog teorema također je dokazano da je u svakom tangencijalnom četverokutu $ABCD$ četverokut $OHJG$ tetivan budući da su $\angle JGO$ i $\angle OHJ$ nasuprotni pravi kutovi u četverokutu $OGJH$. \square

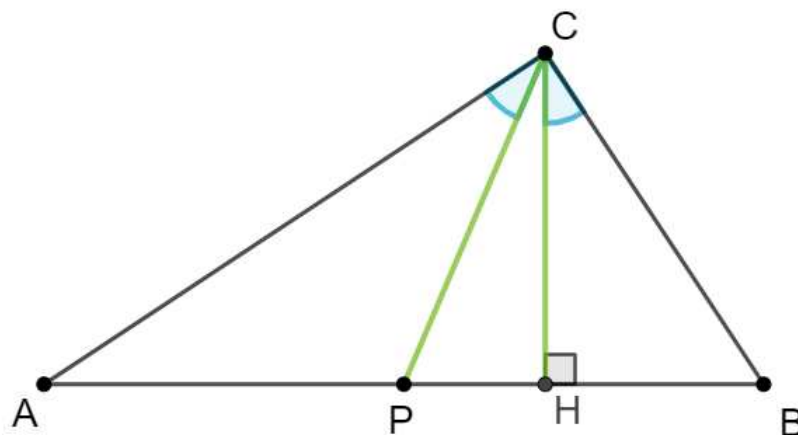


Slika 2.6: $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je $\angle POQ$ pravi kut

Lema 2.1.11. *Neka je ABC raznostranični trokut, P polovište stranice \overline{AB} te H nožište visine iz vrha C na stranicu \overline{AB} . Trokut $\triangle ABC$ je pravokutan ako i samo ako je $\angle ACP \cong \angle HCB$.*

Dokaz. Neka je ABC raznostranični trokut, P polovište stranice \overline{AB} te H nožište visine iz vrha C na stranicu \overline{AB} . Označimo s α , β i γ mjere kutova pri vrhovima A , B i C trokuta ABC . Neka su $|\angle ACP| = \varphi_1$ i $|\angle HCB| = \varphi_2$.

Pretpostavimo da je kut γ pravi, odnosno da je $\triangle ABC$ pravokutan trokut. Tvrdimo da je $\varphi_1 = \varphi_2$. Budući da je $\triangle ABC$ pravokutan trokut, središte njemu opisane kružnice polovište je hipotenuze \overline{AB} . Dakle, središte opisane kružnice je P i slijedi $|AP| = |BP| = |CP|$.



Slika 2.7: Trokut $\triangle ABC$ je pravokutan ako i samo ako je $\angle ACP \cong \angle HCB$

Budući da je $|AP| = |CP|$, trokut $\triangle APC$ je jednakokratan i vrijedi

$$\alpha = \varphi_1. \quad (2.4)$$

Iz $\gamma = |\angle BHC| = 90^\circ$ i $\beta = |\angle CBH|$, prema *KK* teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle ABC \sim \triangle CHB$ te

$$\alpha = \varphi_2. \quad (2.5)$$

Iz (2.4) i (2.5) slijedi

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Obratno, pretpostavimo $|\angle ACP| = |\angle HCB| = \varphi$. Tvrdimo da je $\gamma = 90^\circ$. Prema teoremu o vanjskom kutu trokuta slijedi $|\angle BPC| = \alpha + \varphi$.

Promotrimo trokut $\triangle PCH$. Budući da je $\triangle PCH$ pravokutan trokut, vrijedi

$$\alpha + \varphi + |\angle PCH| = 90^\circ. \quad (2.6)$$

Koristeći teorem o sinusu u trokutu $\triangle APC$ dobivamo $\frac{\sin \varphi}{|AP|} = \frac{\sin \alpha}{|CP|}$, odnosno

$$\frac{|AP|}{|CP|} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}. \quad (2.7)$$

Prema pretpostavci je izraz $|\angle ACP| = |\angle HCB| = \varphi$. Korištenjem teorema o sinusu u trokutu $\triangle PBC$ dobivamo

$$\frac{\sin(\varphi + |\angle PCH|)}{|BP|} = \frac{\sin \beta}{|CP|}.$$

Budući da je P polovište dužine \overline{AB} , odnosno $|AP| = |BP|$, $\beta + \varphi = 90^\circ$ u trokutu $\triangle BCH$ te prema (2.6), iz prethodne jednakosti slijedi

$$\frac{|AP|}{|CP|} = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}. \quad (2.8)$$

Iz (2.7) i (2.8) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} &= \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \\ \sin(2\varphi) &= \sin(2\alpha). \end{aligned}$$

Gornja jednadžba ima dva rješenja: $2\varphi = 2\alpha$ i $2\varphi = 180^\circ - 2\alpha$. Iz drugog rješenja i $\beta + \varphi = 90^\circ$ slijedi $\alpha = \beta$ što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema da je trokut ABC raznostraničan. Dakle, $\varphi = \alpha$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \gamma &= \varphi + |\angle PCH| + \varphi \\ &= \alpha + \varphi + |\angle PCH| \\ &= 90^\circ, \text{ prema (2.6).} \end{aligned}$$

□

Teorem 2.1.12. *Neka je $ABCD$ četverokut i točke P i Q takve da $P = AB \cap CD$ i $Q = AD \cap BC$. Tada su polovišta dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} te polovište dužine \overline{PQ} kolinearna.*

Pravac na kojem leže polovišta dužina \overline{AC} , \overline{BD} i \overline{PQ} iz teorema 2.1.12 zovemo Newtonov pravac. Dokaz ovog teorema može se pronaći u [14].

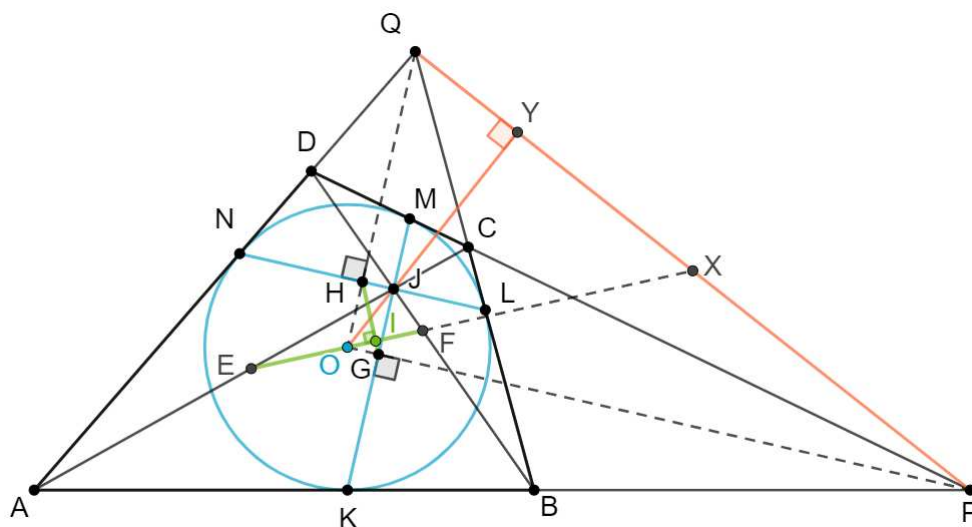
Teorem 2.1.13. (Newtonov teorem) *Ako je $ABCD$ tangencijalan četverokut, onda se središte upisane kružnice također nalazi na Newtonovom pravcu.*

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [2] i [4].

Teorem 2.1.14. *Tangencijalni četverokut je tetivan ako i samo ako mu je Newtonov pravac okomit na Newtonov pravac kontaktnog četverokuta.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut te $KLMN$ njegov kontaktni četverokut. Prema teoremu 1.2.5 dijagonale četverokuta $ABCD$ i $KLMN$ sijeku se u jednoj točki. Nazovimo tu točku J . Uz oznake kao u dokazu teorema 2.1.10, neka je X polovište dužine \overline{PQ} kao na slici 2.8.

Budući da je O središte upisane kružnice četverokuta $ABCD$, prema teoremima 2.1.12 i 2.1.13 točke E , O , F i X su kolinearne točke na Newtonovom pravcu, gdje su E i F polovišta dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} , redom. Neka je Y sjecište pravaca PQ i OJ . Prema korolaru


 Slika 2.8: $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je $EF \perp GH$

1.2.6 vrijedi $PQ \perp OJ$.

Prema dokazu leme 2.1.10, četverokut $OHJG$ je tetivan, dakle vrijedi $\angle HGO \cong \angle HJO$. Neka je I sjecište pravaca EF i GH . Zbog zbroja mjera kutova u trokutu $\triangle OIG$ vrijedi

$$\begin{aligned} |\angle OIG| &= 180^\circ - (|\angle GOI| + |\angle IGO|) \\ &= 180^\circ - (|\angle GOF| + |\angle HGO|) \\ &= 180^\circ - (|\angle POX| + |\angle HJO|), \end{aligned}$$

Budući da je trokut $\triangle HJO$ pravokutan slijedi

$$|\angle OIG| = 180^\circ - |\angle POX| - (90^\circ - |\angle HOJ|) = 90^\circ - |\angle POX| + |\angle QOY|.$$

Dakle, jednakost

$$|\angle OIG| = 90^\circ - |\angle POX| + |\angle QOY|$$

je istinita za sve tangencijalne četverokute kojima ni jedan par nasuprotnih stranica nije paralelan, odnosno u kojima postoje sjecišta P i Q . Nadalje,

$$\begin{aligned} EF \perp GH &\iff |\angle OIG| = 90^\circ \\ &\iff |\angle POX| = |\angle QOY| \end{aligned}$$

U trokutu $\triangle POQ$ vrijedi da je $PQ \perp OJ$ ako i samo ako je \overline{OY} visina trokuta POQ . Budući da je X polovište stranice \overline{PQ} , primijenimo lemu 2.1.11 na trokut $\triangle POQ$. Tada je $|\angle POX| = |\angle QOY|$ ako i samo ako je $|\angle POQ| = 90^\circ$.

Prema teoremu 2.1.10 vrijedi da je $|\angle POQ| = 90^\circ$ ako i samo ako je tangencijalni četverokut $ABCD$ tetivan.

Time je tvrdnja teorema 2.1.14 dokazana ako postoje točke P i Q .

Promotrimo slučaj kada je barem jedan par nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta paralelan. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $AB \parallel CD$.

Tada je $ABCD$ trapez i vrijedi $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ iz čega slijedi

$$\alpha - \beta = \gamma - \delta.$$

Trapez je tetivni četverokut ako i samo ako je $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, odnosno

$$\alpha - \beta = \delta - \gamma.$$

Tada je trapez $ABCD$ tetivno-tangencijalni četverokut ako i samo ako

$$\gamma - \delta = \delta - \gamma \iff \gamma = \delta \iff \alpha = \beta,$$

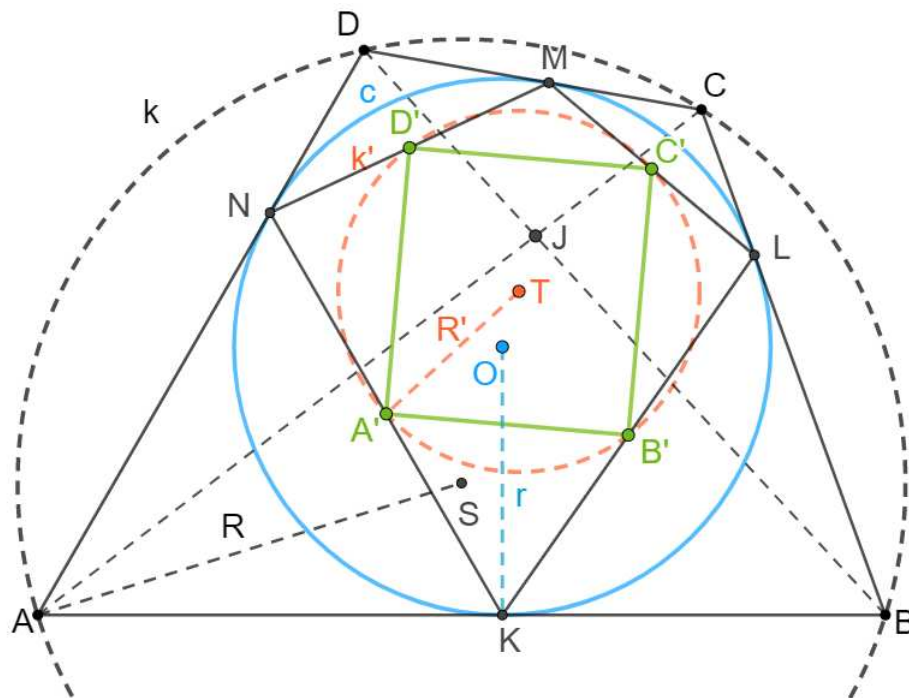
odnosno trapez $ABCD$ je tetivno-tangencijalan ako i samo ako je jednakokračni tangencijalni trapez. Ako je $ABCD$ jednakokračni tangencijalni trapez, onda su dirališta upisane kružnice s osnovicama trapeza polovišta osnovica, a dirališta s krakovima točke koje su međusobno simetrične s obzirom na os simetrije trapeza. Drugim riječima, jedna tangencijalna tetiva je paralelna s osnovicama, a druga je okomita na njih, odnosno $EF \perp GH$. \square

Dokaz prethodnog teorema preuzet je iz [9].

2.2 Tetivno-tangencijalni četverokut pomoću inverzije

U nastavku ćemo proučavati tetivno-tangencijalni četverokut kroz inverziju. Promotrimo sliku 2.9. $ABCD$ je tetivno-tangencijalni četverokut s opisanom kružnicom k sa središtem u točki S i duljinom radijusa R te upisanom kružnicom c sa središtem u točki O i duljinom radijusa r . Neka je $KLMN$ kontaktni četverokut tetivno-tangencijalnog četverokuta $ABCD$. Primijenimo inverziju s obzirom na kružnicu c . Napomenimo da inverzijom nećemo preslikavati stranice četverokuta, nego vrhove te tada slike vrhova spojiti dužinama.

Slike A' , B' , C' i D' točaka A , B , C i D leže na kružnici k' sa središtem T i duljinom radijusa R' . Slika A' točke A leži na polari od A s obzirom na c te je prema lemi 1.2.7 polovište dužine \overline{KN} . Prema lemi 2.1.2 četverokut $A'B'C'D'$ je pravokutnik.

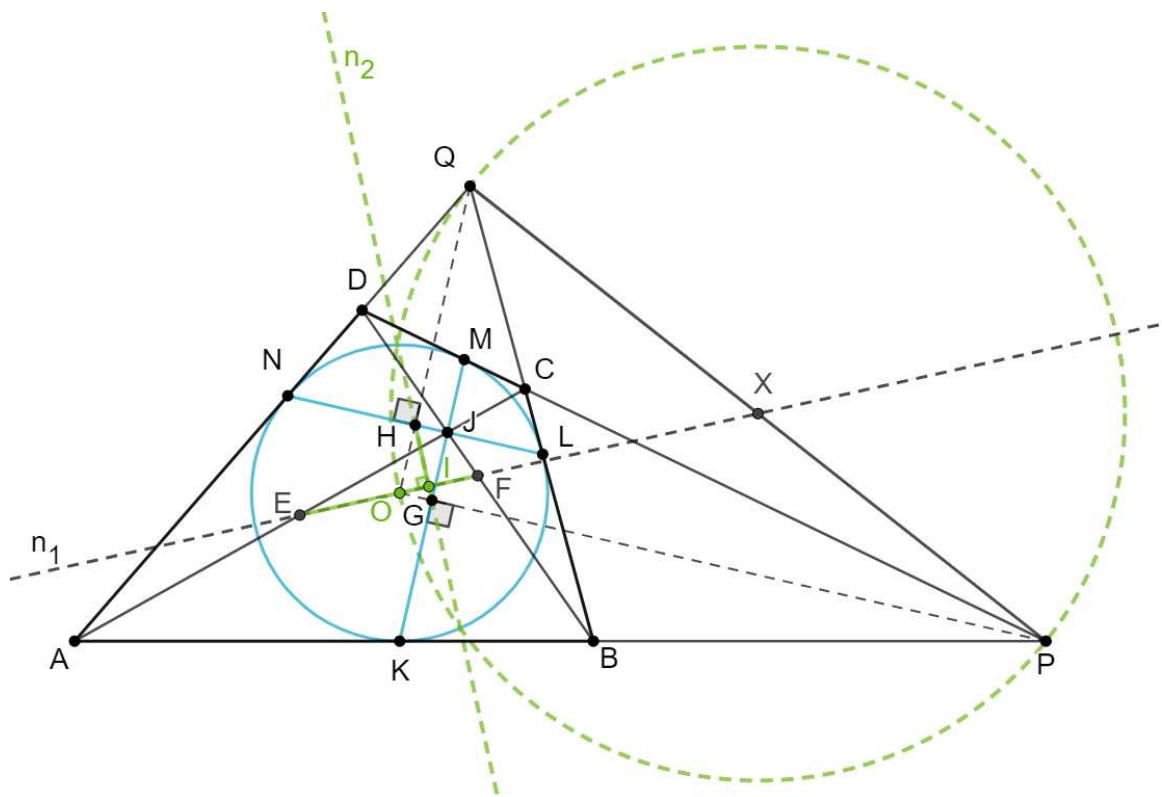


Slika 2.9: Slika tetivno-tangencijalnog četverokuta pri inverziji s obzirom kružnicu c

Dokažimo teorem 2.1.14 koristeći inverziju uz oznake kao u teoremu uz pretpostavku da promatrani tetivno-tangencijalni četverokut nema osi simetrije, odnosno da tetivno-tangencijalni četverokut nije deltoid niti jednakokračni trapez. Dokaz teorema preuzet je iz [6].

Dokaz. Neka je n_1 Newtonov pravac tangencijalnog četverokuta $ABCD$. Pravac n_1 prolazi kroz polovišta E i F dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} , središtem O upisane kružnice c te polovištem X dužine \overline{PQ} gdje su P i Q sjecišta pravaca na kojem leže nasuprotne stranice četverokuta $ABCD$. Neka je n_2 Newtonov pravac kontaktnog četverokuta $KLMN$. Pravac n_2 prolazi kroz polovišta G i H dijagonala \overline{KM} i \overline{LN} četverokuta $KLMN$. Promotrimo inverziju s obzirom na kružnicu c . Budući da pravac n_1 prolazi kroz središte inverzije O , slika pravca n_1 je opet pravac n_1 . Slike P i Q točaka G i H leže na slici pravca n_2 pa je slika n'_2 pravca n_2 kružnica kroz točke O, P i Q .

Pravci n_1 i n_2 okomiti su ako i samo ako su im slike n'_1 i n'_2 pri inverziji međusobno okomite, odnosno ako i samo ako je pravac OX okomit na kružnicu n'_2 . Znamo da je pravac okomit na kružnicu ako i samo ako prolazi njenim središtem. Dakle, pravac OX je okomit



Slika 2.10: $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je $n_1 \perp n_2$

na kružnicu n'_2 ako i samo ako pravac OX prolazi središtem kružnice n'_2 .

Pretpostavimo da su n_1 i n_2 međusobno okomiti, tj. da pravac OX prolazi središtem kružnice n'_2 . Budući da je \overline{PQ} tetiva kružnice n'_2 vrijedi da se pravac OX i simetrala dužine \overline{PQ} sijeku u središtu kružnice n'_2 . Ako se pravac OX i simetrala dužine \overline{PQ} ne podudaraju, točka X je sjecište pravaca OX i simetrale dužine \overline{PQ} pa je X središte kružnice n'_2 . Ako se pravac OX i simetrala dužine \overline{PQ} podudaraju, onda je četverokut $ABCD$ deltoid, no prema pretpostavci, četverokut $ABCD$ nije deltoid. Dakle, vrijedi da je polovište X dužine \overline{PQ} središte kružnice n'_2 , $|\angle POQ| = 90^\circ$ te da je prema teoremu 2.1.10 $ABCD$ tetivan.

Obratno, pretpostavimo da je $ABCD$ tetivan četverokut. Tada prema teoremu 2.1.10 vrijedi da je $\angle POQ$ pravi kut, odnosno da je \overline{PQ} promjer kružnice n'_2 . Tada je polovište X dužine \overline{PQ} središte kružnice n'_2 . Budući da je \overline{OX} polumjer kružnice n'_2 , pravac OX je okomit na kružnicu n'_2 , odnosno pravac n'_1 okomit je na kružnicu n'_2 pa je s time pravac n_1 okomit na pravac n_2 .

□

Za dokaz sljedećih nekoliko teorema trebat će nam tzv. relacija paralelograma.

Lema 2.2.1. (Relacija paralelograma) U svakom paralelogramu vrijedi da je zbroj kvadrata duljina svih stranica paralelograma jednak zbroju kvadrata duljina njegovih dijagonala.

Dokaz. Neka je $ABCD$ paralelogram. Duljine njegovih stranica označimo s $a = |AB| = |CD|$ i $b = |BC| = |AD|$, a njegov kut pri vrhu A s α . Koristeći poučak o kosinusu u trokutu $\triangle BAD$ dobivamo

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) = |BD|^2.$$

U paralelogramu su susjedni kutovi suplementarni, dakle $|\angle ADC| = 180^\circ - \alpha$. Koristeći poučak o kosinusu u trokutu $\triangle ADC$ dobivamo

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) = |AC|^2.$$

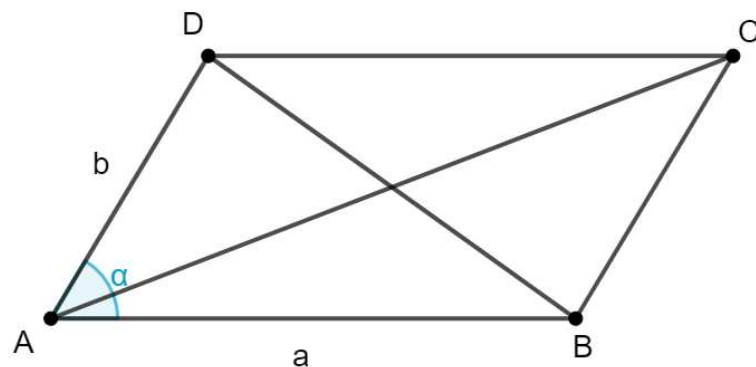
Iz trigonometrijskog identiteta $\cos(180^\circ - x) = -\cos(x)$ slijedi

$$a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha) = |AC|^2.$$

Dakle, zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak je

$$\begin{aligned} |BD|^2 + |AC|^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha) + a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha) \\ &= 2a^2 + 2b^2. \end{aligned}$$

□



Slika 2.11: Paralelogram $ABCD$ s duljinama stranica a i b

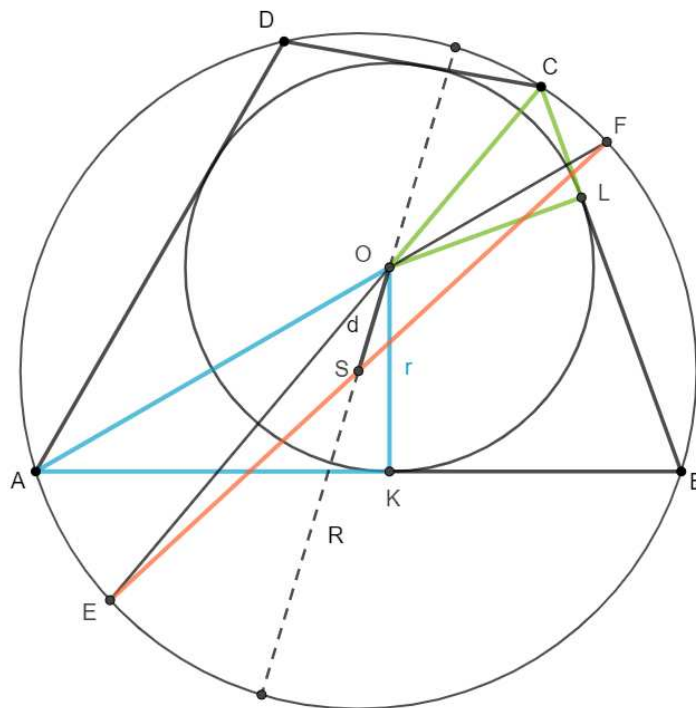
Direktna posljedica relacije paralelograma je formula za duljinu težišnice trokuta.

Korolar 2.2.2. *Neka je ABC trokut te neka je P polovište dužine \overline{AB} . Tada je*

$$|CP|^2 = \frac{1}{2}(|AC|^2 + |BC|^2) - \frac{1}{4}|AB|^2. \quad (2.9)$$

Teorem 2.2.3. (Fussov teorem) *Neka su R duljina radijusa opisane i r duljina radijusa upisane kružnice tetivno-tangencijalnog četverokuta te d udaljenost između središta opisane i upisane kružnice. Tada vrijedi:*

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$



Slika 2.12: Fussov teorem

Dokaz. Neka je O središte upisane kružnice te K i L dirališta upisane kružnice i stranica \overline{AB} i \overline{BC} tetivno-tangencijalnog četverokuta $ABCD$. Za početak ćemo izraziti $\frac{1}{r^2}$ pomoću

duljina $|AO|$ i $|CO|$. Budući da je četverokut $ABCD$ tetivan, kutovi pri vrhovima A i C su suplementarni, odnosno

$$\alpha + \gamma = 180^\circ.$$

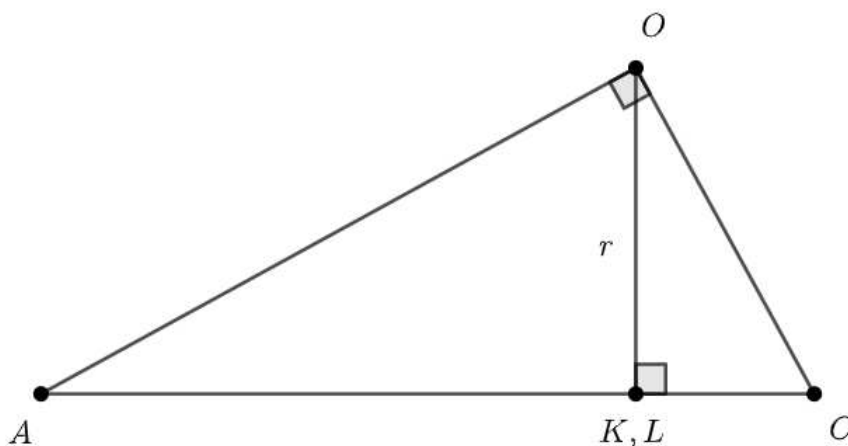
Četverokut $ABCD$ je tangencijalan, dakle vrijedi

$$|\angle BAO| = \frac{\alpha}{2}, \quad |\angle OCB| = \frac{\gamma}{2}.$$

Uvrštavajući gornju jednadžbu u $\alpha + \gamma = 180^\circ$ dobivamo

$$\begin{aligned} |\angle BAO| + |\angle OCB| &= 90^\circ, \\ |\angle AOK| + |\angle LOC| &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Spojimo trokute $\triangle AOK$ i $\triangle OCL$ u pravokutni trokut s katetama \overline{AO} i \overline{CO} kao na slici 2.13.



Slika 2.13: Trokut nastao spajanjem pravokutnih trokuta $\triangle AOK$ i $\triangle OCL$

Njegovu površinu možemo izračunati na dva načina:

$$\frac{1}{2}r(|AK| + |CL|) = \frac{1}{2}|AO||CO|. \quad (2.10)$$

Koristeći Pitagorin poučak dobivamo:

$$(|AK| + |CL|)^2 = |AO|^2 + |CO|^2. \quad (2.11)$$

Uvrstimo (2.11) u (2.10):

$$r^2(|AO|^2 + |CO|^2) = |AO|^2|CO|^2.$$

Iz gornje jednadžbe slijedi

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{|AO|^2} + \frac{1}{|CO|^2}. \quad (2.12)$$

Neka su E i F sjecišta pravaca CO i AO s opisanom kružnicom. Tada je \overline{EF} promjer kružnice jer

$$\begin{aligned} |\angle FSD| + |\angle DSE| &= 2(|\angle FAD| + |\angle DCE|) \\ &= \alpha + \gamma = 180^\circ. \end{aligned}$$

Iskoristimo formulu (2.9) za duljinu težišnice u trokutu EFO :

$$|SO|^2 = \frac{1}{2}(|EO|^2 + |FO|^2) - \frac{1}{4}|EF|^2.$$

Raspisivanjem dobivamo

$$|EO|^2 + |FO|^2 = 2|SO|^2 + \frac{1}{2}|EF|^2 \quad (2.13)$$

$$= 2(d^2 + R^2). \quad (2.14)$$

Koristeći potenciju točke O na opisanu kružnicu dobivamo

$$|AO||FO| = |CO||EO| = (R + d)(R - d). \quad (2.15)$$

Iz (2.13) i (2.15) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{|AO|^2} + \frac{1}{|CO|^2} &= \frac{|FO|^2}{(R^2 - d^2)^2} + \frac{|EO|^2}{(R^2 - d^2)^2} \\ &= \frac{|EO|^2 + |FO|^2}{(R^2 - d^2)^2} \\ &= \frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Iz (2.12) i (2.16) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &= \frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} \\ &= \frac{(R + d)^2 + (R - d)^2}{(R^2 - d^2)^2} \\ &= \frac{1}{(R + d)^2} + \frac{1}{(R - d)^2}. \end{aligned}$$

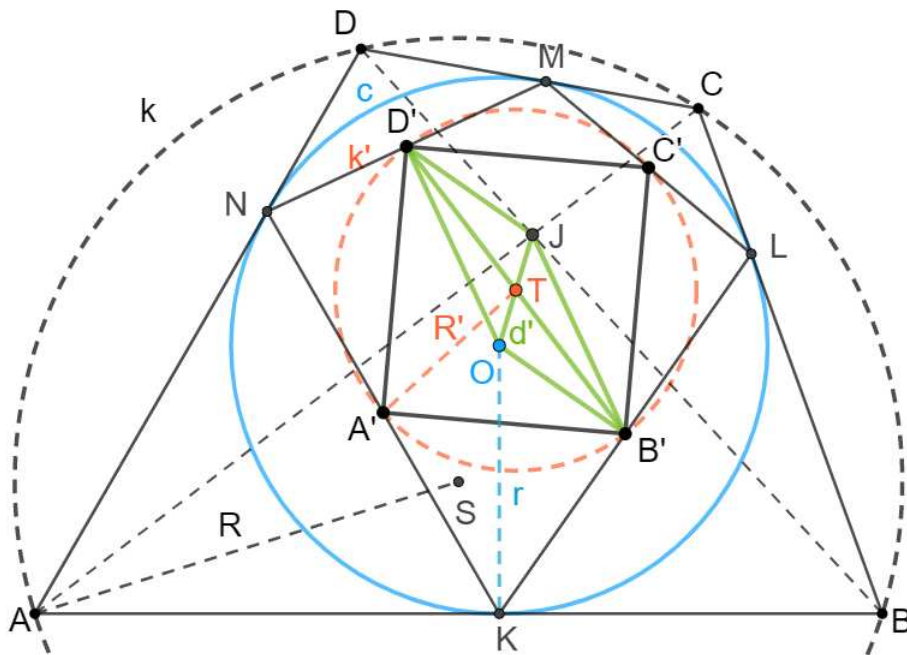
□

Dokaz Fussovog teorema preuzet je iz [3].

Lema 2.2.4. *Neka je $ABCD$ tetivno-tangencijalni četverokut, c njegova upisana kružnica sa središtem O i duljinom radijusa r te k njegova opisana kružnica sa središtem S i duljinom radijusa R . Neka je k' slika kružnice k pri inverziji u odnosu na c . Označimo središte kružnice k' s T , a duljinu njenog radijusa s R' . Neka je $d' = |OT|$. Tada vrijedi*

$$2R'^2 + 2d'^2 = r^2.$$

Dokaz. Neka je J točka takva da je T polovište dužine \overline{OJ} . Budući da je $A'B'C'D'$ tetivni paralelogram čiji vrhovi leže na kružnici k' , odnosno da je $A'B'C'D'$ pravokutnik, dužina $\overline{B'D'}$ je promjer kružnice k' koji prolazi kroz središte T . Točka T polovište je dužina $\overline{B'D'}$ i \overline{OJ} , dakle četverokut $B'JD'O$ je paralelogram.



Slika 2.14: $B'JD'O$ je paralelogram

Promotrimo paralelogram $B'JD'O$ sa slike 2.14. Koristeći lemu 2.2.1 dobivamo

$$\begin{aligned} 2|OD'|^2 + 2|OB'|^2 &= |B'D'|^2 + |OJ|^2 \\ &= (2|TD'|)^2 + (2|OT|)^2 \\ &= 4|TD'|^2 + 4|OT|^2. \end{aligned}$$

Budući da je $|TD'| = R'$ i $|OT| = d'$, slijedi

$$|OD'|^2 + |OB'|^2 = 2R'^2 + 2d'^2. \quad (2.17)$$

Pokažimo da je J sjecište dijagonala četverokuta $ABCD$. Označimo s $d = |OS|$.
Prema teoremu B.2.6 vrijedi

$$d' = d \cdot \frac{r^2}{R^2 - d^2}. \quad (2.18)$$

Iz jednakosti $\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}$ iz teorema 2.2.3 zbrajanjem razlomaka na lijevoj strani dobivamo ekvivalentnu jednakost

$$\frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{1}{r^2}$$

koju transformiramo u oblik

$$\frac{r^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{1}{2(R^2 + d^2)} \quad (2.19)$$

koji ćemo koristiti u nastavku.

Neka je J' slika točke J pri inverziji. Tada vrijedi

$$|OJ'| = \frac{r^2}{|OJ|} = \frac{r^2}{2|OT|} = \frac{r^2}{2d'} \quad (2.20)$$

i duljinu dužine $\overline{TJ'}$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$|TJ'| = |OJ'| - |OT|.$$

Promotrimo izraz $|TO||TJ'|$. Primjenom prethodnih jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} |TO||TJ'| &= |TO|(|OJ'| - |OT|) \\ &= d' \left(\frac{r^2}{2d'} - d' \right) = \frac{r^2}{2} - d'^2. \end{aligned}$$

Koristeći (2.18) dobivamo

$$\begin{aligned} |TO||TJ'| &= \frac{r^2}{2} - \left(\frac{dr^2}{R^2 - d^2} \right)^2 \\ &= \frac{r^2}{2} - \frac{d^2 r^2 r^2}{(R^2 - d^2)^2}. \end{aligned}$$

Iz (2.19) slijedi

$$\begin{aligned} |TO||TJ| &= \frac{r^2}{2} - \frac{d^2 r^2}{2(R^2 + d^2)} \\ &= \frac{r^2 R^2 + r^2 d^2 - r^2 d^2}{2(R^2 + d^2)} \\ &= \frac{r^2 R^2}{2(R^2 + d^2)}. \end{aligned}$$

Ponovo, primjenom (2.19) dobivamo

$$|TO||TJ| = \frac{r^2 R^2 r^2}{(R^2 - d^2)^2}.$$

Prema teoremu B.2.6, iz formule $R' = \frac{r^2 R}{R^2 - d^2}$ za duljinu radijusa slike kružnice pri inverziji slijedi

$$|TO||TJ| = R'^2. \quad (2.21)$$

Budući da vrijedi $|TB'| = |TD'| = R'$, iz (2.21) dobivamo

$$|TB'||TD'| = R'^2 = |TO||TJ|.$$

Pravci OJ' i BD' sijeku se u točki T pa primjenom potencije točke T na kružnicu zaključujemo da su B' , D' , O i J' na istoj kružnici, a to znači da se točke B , D i J nalaze na istom pravcu. Analogno dobivamo da su A , C i J kolinearne. Dakle, J je sjecište dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} četverokuta $ABCD$.

Četverokut $ABCD$ je tetivno-tangencijalni četverokut pa prema teoremu 2.1.3 slijedi su tangencijalne tetive okomite. Tada je kut $\angle KJL$ pravi, odnosno $\triangle JKL$ je pravokutni trokut sa središtem opisane kružnice u B' pa je

$$|KB'| = |JB'|.$$

Četverokut $B'JD'O$ je paralelogram pa vrijedi $|JB'| = |OD'|$ te iz prethodne jednakosti dobivamo

$$|KB'| = |JB'| = |OD'|.$$

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut $\triangle OB'K$ dobivamo

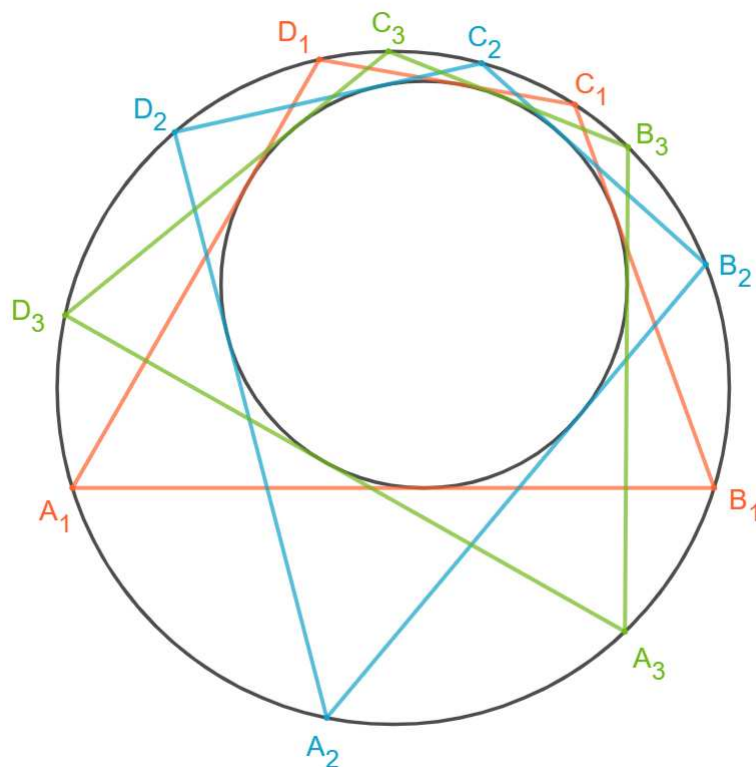
$$\begin{aligned} |KB'|^2 + |OB'|^2 &= |OK|^2 \\ |OD'|^2 + |OB'|^2 &= r^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Iz (2.17) i (2.22) slijedi

$$2R'^2 + 2d'^2 = r^2.$$

□

Teorem 2.2.5. (Ponceletova propozicija) Neka je $ABCD$ tetivno-tangencijalni četverokut s opisanom kružnicom k i upisanom kružnicom c . Tada se iz proizvoljne točke kružnice k može konstruirati tetivno-tangencijalni četverokut s opisanom kružnicom k i upisanom kružnicom c .



Slika 2.15: Ponceletova propozicija

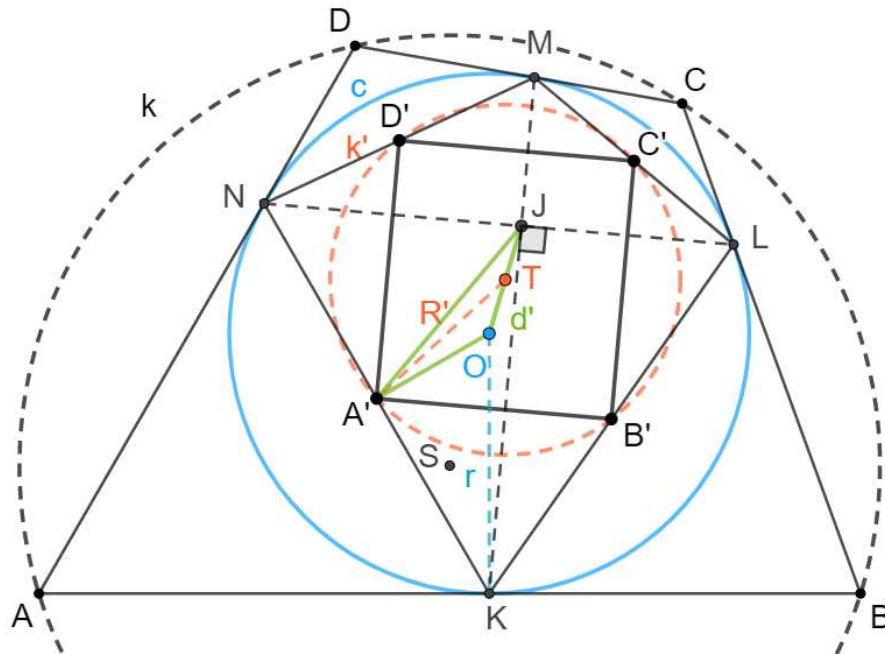
Dokaz. Neka su $k = k(S, R)$ i $c = k(O, r)$ redom opisana i upisana kružnica nekog tetivno-tangencijalnog četverokuta. Neka je $k' = k(T, R')$ slika kružnice k pri inverziji s obzirom na kružnicu c . Označimo s $d = |OS|$ i $d' = |OT|$. Prema lemi 2.2.4 vrijedi

$$2R'^2 + 2d'^2 = r^2. \quad (2.23)$$

Neka je J točka takva da je T polovište dužine \overline{OJ} .

Uzmimo proizvoljnu točku A' s kružnice k' . Neka okomica iz točke A' na pravac OA' siječe kružnicu c u točkama K i N . Tada je \overline{KN} tetiva kružnice c kojoj je polovište točka

A'. Dokažimo da je $\angle KJN$ pravi kut.



Slika 2.16: Ponceletova propozicija

Primjenom formule $|TA'|^2 = \frac{1}{2}(|JA'|^2 + |OA'|^2) - \frac{1}{4}|OJ|^2$ iz korolara 2.2.2 u trokutu $\triangle A'JO$ dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|JA'|^2 + |OA'|^2) &= |TA'|^2 + \frac{1}{4}|OJ|^2 \\ \frac{1}{2}(|JA'|^2 + |OA'|^2) &= R'^2 + \frac{1}{4}(2d')^2 \\ |JA'|^2 + |OA'|^2 &= 2R'^2 + 2d'^2. \end{aligned}$$

Prema lemi 2.2.4 vrijedi $2R'^2 + 2d'^2 = r^2$ pa iz prethodne jednakosti slijedi

$$|JA'|^2 + |OA'|^2 = r^2. \quad (2.24)$$

Koristeći Pitagorin poučak u trokutu $\triangle A'OK$ vrijedi

$$|OK|^2 = |OA'|^2 + |KA'|^2.$$

Budući da je $|OK|^2 = r^2$, uvrštavajući prethodnu jednakost u (2.24) dobivamo

$$|JA'|^2 + |OA'|^2 = |OA'|^2 + |KA'|^2.$$

Dakle,

$$|JA'| = |KA'| = |NA'|.$$

Dužina \overline{KN} je promjer opisane kružnice trokutu $\triangle KJN$ iz čega slijedi da je $\angle KJN$ pravi kut.

Nadalje, neka su M i L redom sjecišta pravaca KJ i NJ sa kružnicom c . Četverokut $KLMN$ ima okomite dijagonale koje se sijeku u točki J , a vrhovi su mu na kružnici c . Neka su B' , C' i D' polovišta stranica \overline{KL} , \overline{LM} i \overline{MN} , redom. Dokažimo da su B' , C' i D' na kružnici k' .

Budući da je $\triangle KJL$ pravokutan, a B' polovište dužine \overline{KL} , vrijedi $|KB'| = |LB'| = |JB'|$. Slično kao za točku A' , primjenom korolar 2.2.2 dobivamo

$$\begin{aligned} (2|TB'|)^2 + (2|OT|)^2 &= 2|JB'|^2 + 2|OB'|^2 \\ &= 2|KB'|^2 + 2|OB'|^2. \end{aligned}$$

Dužina \overline{KL} je tetiva kružnice c sa središtem O i točka B' je polovište tetive \overline{KL} pa je pravac OB' okomit na tetivu \overline{KL} i trokut $\triangle KB'O$ je pravokutan. Primjenom Pitagorinog teorema i uvrštavajući $|KB'|^2 + |OB'|^2 = |OK|^2$ u prethodnu jednakost dobivamo

$$(2|TB'|)^2 + (2|OT|)^2 = 2|OK|^2.$$

Koristeći $d' = |OT|$ i $r = |OK|$ te dijeljenjem s 2 prethodnu jednakost možemo zapisati kao

$$2|TB'|^2 + 2d'^2 = r^2.$$

Prema lemi 2.2.4 iz prethodne jednakosti slijedi

$$|TB'| = R'.$$

Dakle, točka B' se nalazi na kružnici k' . Analogno dobivamo da se točke C' i D' nalaze na kružnici k' .

Neka su točke A , B , C i D slike točaka A' , B' , C' i D' pri inverziji. Točke A , B , C i D se nalaze na kružnici k . Dokažimo da su stranice četverokuta $ABCD$ tangente na kružnicu c .

Pravac AB je slika kružnice opisane trokutu $\triangle A'B'O$ pri inverziji s obzirom na kružnicu c . Budući da je $\triangle KB'O$ pravokutan trokut, središte kružnice opisane trokutu $\triangle KB'O$ je na

polovištu dužine \overline{OK} i duljina njenog radijusa je $\frac{1}{2}|OK|$. Analogno, trokut $\triangle KA'O$ je pravokutan te je središte opisane kružnice trokutu $\triangle KA'O$ polovište dužine \overline{OK} i duljina njenog radijusa je $\frac{1}{2}|OK|$. Dakle, kružnica sa središtem na polovištu dužine \overline{OK} i duljine radijusa $\frac{1}{2}|OK|$ prolazi kroz točke A' , O , B' i K , odnosno, kružnica opisana trokutu $\triangle A'B'O$ sadrži i točku K .

Točka K nalazi se na kružnici c inverzije pa je ona fiksna točka te inverzije, odnosno $K' = K$. Tada se točka K nalazi i na slici kružnice opisane trokutu $\triangle A'B'O$, odnosno na pravcu AB . Budući da je dužina \overline{OK} promjer kružnice opisane trokutu $\triangle A'B'O$, a točka O središte inverzije, pravac AB je tangenta na kružnicu c .

Analogno vrijedi da su ostale stranice četverokuta tangente na kružnicu c . Dakle, četverokut $ABCD$ je tetivno-tangencijalni četverokut s opisanim kružnicom k i upisanom kružnicom c . \square

Propozicija 2.2.6. (Carlitzova nejednakost) *Za duljinu radijusa R opisane kružnice k i radijusa r upisane kružnice c tetivno-tangencijalnog četverokuta vrijedi*

$$R \geq \sqrt{2}r.$$

Dokaz. Iz jednakosti iz leme 2.2.4 dobivamo $\sqrt{2}R' \leq r$. Uvrstimo li prethodnu nejednakost u formulu $R = \frac{r^2 R'}{R'^2 - d'^2}$ za duljinu radijusa R slike kružnice k' s duljinom radijusa R' pri inverziji gdje je d' udaljenost između središta kružnice k' i kružnice inverzije c , dobivamo

$$R = \frac{r^2 R'}{R'^2 - d'^2} \geq \frac{r^2}{R'} \geq \sqrt{2}r.$$

\square

Jednakost se postiže kada je tetivno-tangencijalni četverokut kvadrat. Lako se provjeri da se primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut kojeg čine radijus opisane, radijus upisane kružnice i pola stranice kvadrata dobije $R = \sqrt{2}r$.

Teorem 2.2.7. (Yunova nejednakost za tetivno-tangencijalne četverokute)

U tetivno-tangencijalnom četverokutu vrijedi

$$\frac{r\sqrt{2}}{R} \leq \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \leq 1.$$

Dokaz. Koristeći lemu 1.2.2 i poučak o sinusima dobivamo

$$|LN| = 2r \sin \alpha' = 2r \sin \gamma', \quad |KM| = 2r \sin \beta' = 2r \sin \delta'.$$

Zbrajanjem enakosti

$$\begin{aligned}\frac{|LN|}{2r} &= \sin \alpha' = \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \\ \frac{|KM|}{2r} &= \sin \beta' = \sin \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \\ \frac{|LN|}{2r} &= \sin \gamma' = \sin \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} \right) = \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ \frac{|KM|}{2r} &= \sin \delta' = \sin \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\delta}{2}\end{aligned}$$

te korištenjem činjenice da je $ABCD$ tetivan četverokut, odnosno $\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\gamma}{2}$ te $\sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\delta}{2}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{|LN| + |KM|}{r} &= \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \\ &\quad \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right).\end{aligned}$$

Množenjem jednakosti s $\frac{1}{4}$ dobivamo

$$\frac{1}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{|LN| + |KM|}{4r} \leq \frac{2r + 2r}{4r} = 1,$$

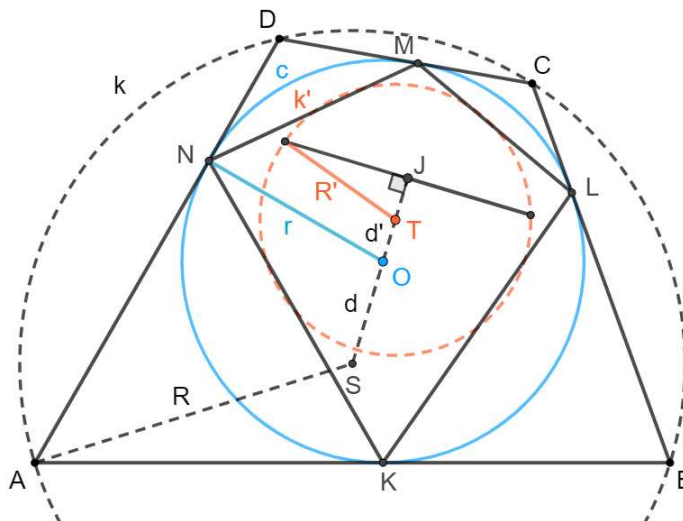
s čime smo dokazali desnu stranu Yunove nejednakosti.

Nadalje, za formulu za duljinu radijusa R slike kružnice duljine radijusa R' pri inverziji s obzirom na kružnicu duljine radijusa r vrijedi

$$R = \frac{r^2 R'}{R'^2 - d^2} \geq \frac{r^2}{\sqrt{R'^2 - d^2}}.$$

Uvrstimo li gornju nejednakost u $\frac{r\sqrt{2}}{R}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{r\sqrt{2}}{R} &\leq \frac{r\sqrt{2R'^2 - 2d'^2}}{r^2}, \\ \frac{r^2\sqrt{2}}{R} &\leq \sqrt{2R'^2 - 2d'^2}.\end{aligned}$$



Slika 2.17: U tetivno-tangencijalnom četverokutu vrijedi Yunova nejednakost

Pomnožimo gornju nejednakost s 2 i iskoristimo formulu $2R'^2 + 2d'^2 = r^2$ iz leme 2.2.4. Tada slijedi

$$\frac{2\sqrt{2}r^2}{R} \leq 2\sqrt{r^2 - (2d')^2}. \quad (2.25)$$

Budući da je vrijednost $2\sqrt{r^2 - (2d')^2}$ duljina najkraće tetive kružnice c kroz točku J , a $\frac{|LN|+|KM|}{2}$ aritmetička sredina duljina bilo koje dvije okomite tetive kroz J , vrijedi

$$2\sqrt{r^2 - (2d')^2} \leq \frac{|LN| + |KM|}{2} \quad (2.26)$$

Iz (2.25) i (2.26) dobivamo

$$\frac{2\sqrt{2}r^2}{R} \leq \frac{|LN| + |KM|}{2}$$

Pomnožimo li gornju nejednakost s $\frac{1}{2r}$ dobivamo:

$$\frac{r\sqrt{2}}{R} \leq \frac{|LN| + |KM|}{4r} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

Dakle, dokazali smo lijevu stranu Yunove nejednakosti.

Jednakost (2.25) se postiže kada je promatrani tetivno-tangencijalni četverokut kvadrat, odnosno $J = O$.

□

Dodatak A

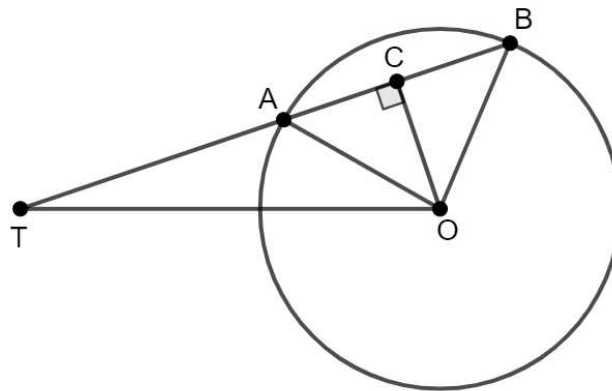
Potencija točke s obzirom na kružnicu

A.1 Definicija potencije točke i svojstva

Teorem A.1.1. *Neka je k kružnica sa središtem O i duljinom radijusa r te T proizvoljna točka ravnine. Neka je p proizvoljni pravac kroz T koji siječe kružnicu k u točkama A i B . Tada je*

$$TA \cdot TB = OT^2 - r^2 = \text{const.},$$

gdje su TA , TB i OT usmjerene duljine.



Slika A.1: Potencija točke T s obzirom na kružnicu

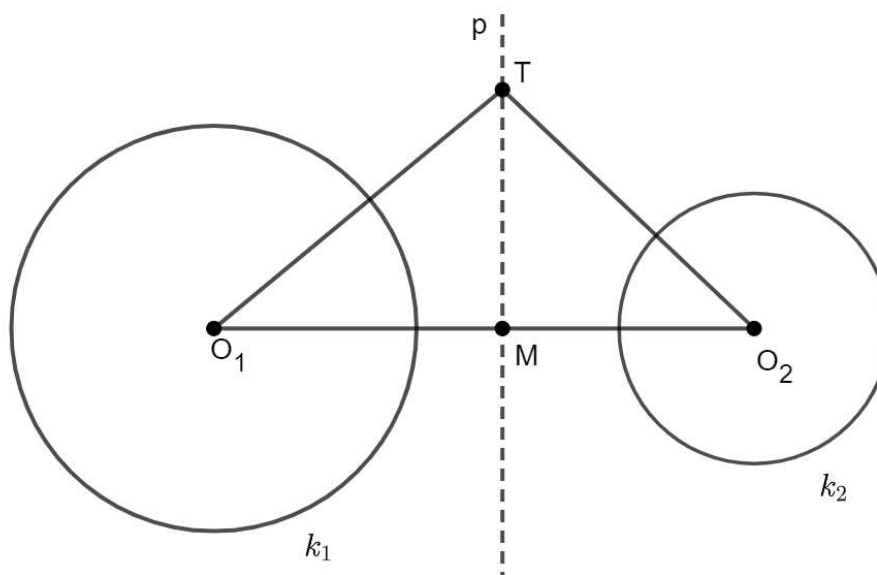
Dokaz. Neka je C polovište tetive \overline{AB} . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} TA \cdot TB &= (TC + CA)(TC + CB) \\ &= (TC + CA)(TC - CA) \\ &= TC^2 - CA^2 \\ &= (TO^2 - OC^2) - (OA^2 - OC^2) \\ &= TO^2 - OA^2 \\ &= OT^2 - r^2. \end{aligned}$$

□

Definicija A.1.2. Potenciju točke T s obzirom na kružnicu k sa središtem O i duljinom radijusa r definiramo kao $p(k, T) = OT^2 - r^2$.

Teorem A.1.3. Neka su dane kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Skup svih točaka s jednakim potencijama s obzirom na kružnice k_1 i k_2 je pravac p okomit na pravac O_1O_2 koji prolazi kroz zajedničke točke kružnica k_1 i k_2 ukoliko ih one imaju.



Slika A.2: Potencijala kružnica

Dokaz. Neka su dane kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Neka je T točka čija je potencija jednaka s obzirom na obje kružnice k_1 i k_2 te M sjecište pravca O_1O_2 i okomice iz točke T

na pravac O_1O_2 . Označimo s $d_1 = O_1M$, $d_2 = O_2M$ te $d = O_1O_2$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} TO_1^2 - r_1^2 &= TO_2^2 - r_2^2 \\ TM^2 + d_1^2 - r_1^2 &= TM^2 + d_2^2 - r_2^2 \\ d_1^2 - d_2^2 &= r_1^2 - r_2^2. \end{aligned}$$

Budući da je $d = O_1O_2 = O_1M + MO_2 = d_1 - d_2$, slijedi

$$d_1 + d_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}.$$

Rješavanjem gornjih dviju jednadžbi dobivamo

$$d_1 = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}, \quad d_2 = -\frac{d^2 + r_2^2 - r_1^2}{2d}.$$

Ni jedna od ovih udaljenosti ne ovisi o položaju točke T , dakle za proizvoljnu točku T čija je potencija jednaka s obzirom na obje kružnice, točka M je fiksna. Dakle, točka T leži na pravcu okomitom na pravac O_1O_2 u točki M . Ako se kružnice k_1 i k_2 sijeku, tada za $T \in k_1 \cap k_2$ vrijedi $p(k_1, T) = 0 = p(k_2, T)$. \square

Definicija A.1.4. *Pravac koji je skup točaka s jednakim potencijama s obzirom na dvije kružnice zovemo potencijalom ili radikalnom osi kružnica.*

Dodatak B

O inverziji

Svojstva tetivno-tangencijalnog četverokuta promatrali smo koristeći inverziju s obzirom na njegovu upisanu kružnicu. U ovom poglavlju definirat ćemo inverziju te pokazati neka svojstva inverzije.

B.1 Definicija inverzije i slika točke pri inverziji

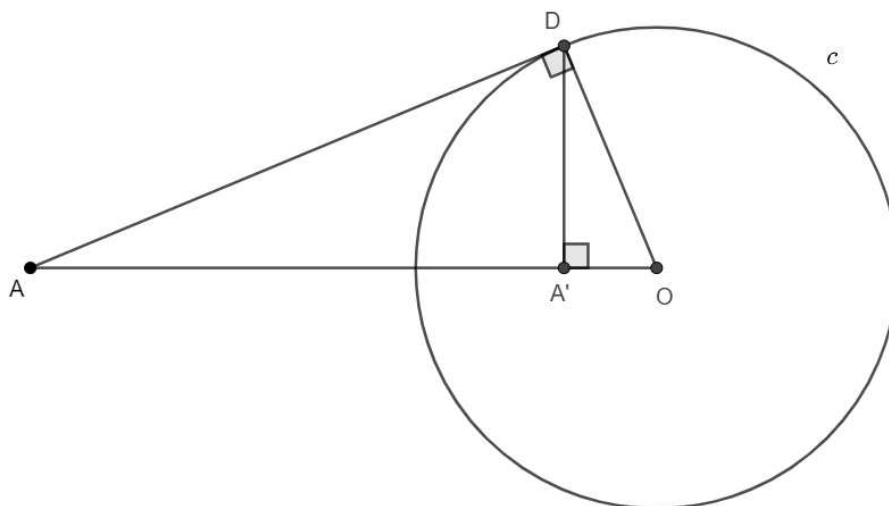
Neka je dana točka O i realni broj p . Inverzija $i[O, p]$ je preslikavanje definirano na skupu $E^2 \setminus \{O\}$ takvo da je $i(A) = A'$, gdje je A' točka na pravcu OA takva da je $|OA||OA'| = p$. Točku O zovemo središtem inverzije, a broj p potencijom inverzije.

Inverzija je involutorno preslikavanje, odnosno iz $i(A) = A'$ slijedi $i(A') = A$. Par točaka A i A' koje su jedna drugoj slike pri inverziji i zvat ćemo inverznim točkama s obzirom na i . Točki O ne pridružujemo niti jednu točku ravnine.

Neka je $r = \sqrt{p}$ broj koji zovemo polumjerom inverzije i . Prema definiciji je $|OA||OA'| = r^2$. Kružnicu $k(O, r)$ zovemo kružnicom inverzije i . Za točku A na toj kružnici je $i(A) = A$. Točka ravnine je fiksna ako i samo ako leži na kružnici inverzije. Inverziju $i[O, r^2]$ zovemo i inverzija s obzirom na kružnicu $k(O, r)$.

Pogledajmo kako konstruirati sliku točke pri inverziji. Neka je dana kružnica $c = k(O, r)$ i točka A . Konstruirajmo točku A' inverznu točki A s obzirom na kružnicu c .

Ako je $A \in c$, tada je $A' = A$. Pretpostavimo da je točka A izvan kružnice c kao na slici B.1. Neka je D diralište tangente iz A na c i A' nožište okomice iz D na OA . Tada iz pravokutnog trokuta $\triangle ODA$ zbog sličnosti trokuta $\triangle ODA$ i $\triangle OA'D$ dobivamo $|OA| \cdot |OA'| = r^2$, odnosno A' je slika točke A pri promatranoj inverziji.



Slika B.1: Slika točke pri inverziji

Ako je točka A unutar kružnice c , neka tada okomica u točki A na pravac OA siječe kružnicu c u točki D i neka tangenta na kružnicu c u točki D siječe pravac OA u točki A' . Tada je točka A' slika od točke A pri inverziji $i[O, r^2]$.

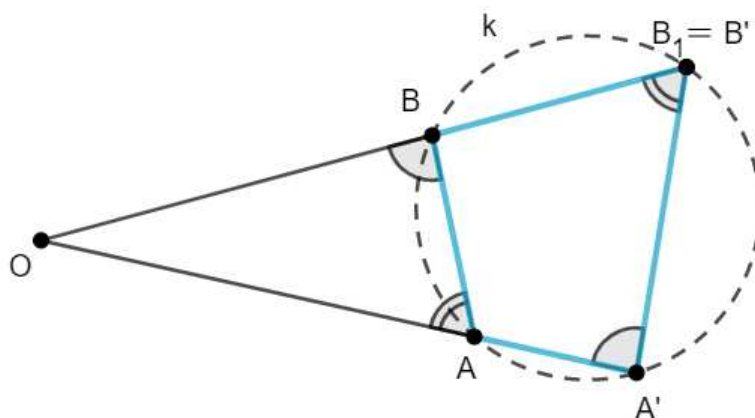
Teorem B.1.1. *Neka su A i A' te B i B' dva para pridruženih točaka inverzije s središtem inverzije O . Tada je $AA'B'B$ tetivni četverokut i vrijedi $\angle OAB \cong \angle OB'A'$ te $\angle OBA \cong \angle OA'B'$.*

Dokaz. Neka je $i[O, r^2]$ dana inverzija. Označimo sa k kružnicu kroz točke A , A' i B . Tvrdimo da je $i B' \in k$. Neka pravac OB siječe kružnicu k u točki $B_1 \neq B$ kao na slici B.2. Tada je zbog potencije točke $|OB||OB_1| = |OA||OA'|$, a iz definicije inverznih točaka vrijedi $|OB||OB'| = r^2 = |OA||OA'|$. Stoga je $|OB_1| = |OB'|$, tj. $B_1 = B'$. Druga tvrdnja slijedi iz svojstva tetivnog četverokuta. \square

U sljedećem teoremu upoznat ćemo se s formulom koja nam daje vezu između udaljenosti dviju točaka i njihovih slika pri inverziji.

Teorem B.1.2. *Ako su A i A' te B i B' dva para pridruženih točaka inverzije $i[O, r^2]$, onda vrijedi*

$$|A'B'| = \frac{r^2}{|OA||OB|} |AB|.$$

Slika B.2: $AA'B'B$ je tetivni četverokut

Dokaz. Prema teoremu B.1.1 vrijedi $\angle OAB \cong \angle OB'A'$ i $\angle OBA \cong \angle OA'B'$. Tada su prema *KK* teoremu o sličnosti trokuta trokuti OAB i $OB'A'$ slični te vrijedi

$$\frac{|A'B'|}{|BA|} = \frac{|OA'|}{|OB|} = \frac{|OA'||OA|}{|OB||OA|} = \frac{r^2}{|OA||OB|}.$$

□

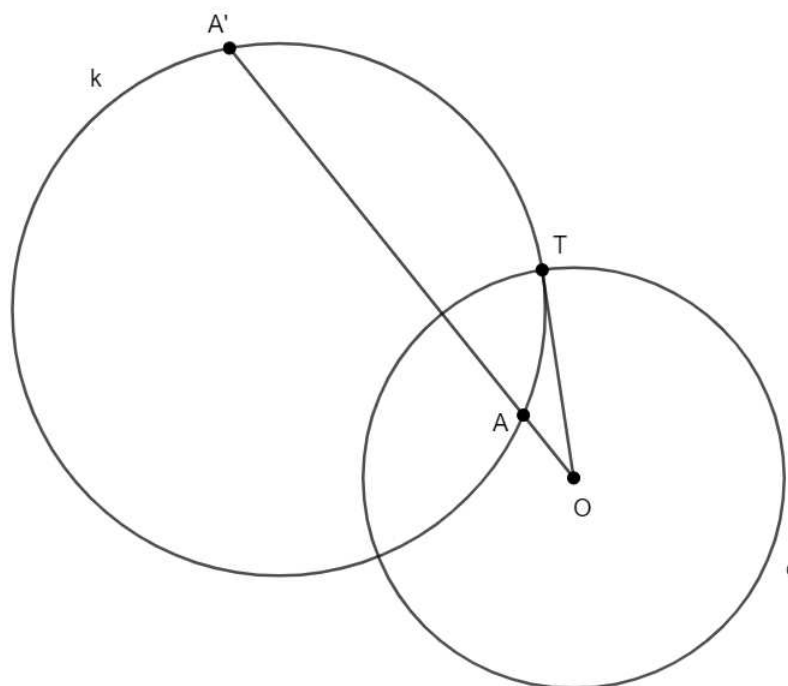
B.2 Slika kružnice pri inverziji

Proučit ćemo sliku kružnice pri inverziji $i[O, r^2]$. Kružnica inverzije $k(O, r)$ preslika se u samu sebe jer joj je svaka točka fiksna za inverziju i . Svaki pravac kroz točku O preslika se sam na sebe.

Teorem B.2.1. *Kružnica ortogonalna na kružnicu inverzije preslika se sama na sebe.*

Dokaz. Neka je kružnica k ortogonalna na kružnicu inverzije c . Neka se k i c sijeku u točki T i neka bilo koja sekanta od k kroz O siječe k u točkama A i A' . Tada je OT tangenta od k zbog ortogonalnosti k i c pa slijedi $|OA||OA'| = |OT|^2 = r^2$, tj. A i A' je par inverznih točaka. Dakle, iz $A \in k$ slijedi $i(A) = A' \in k$ pa je $i(k) = k$. □

Uočimo da ako se kružnica k sa središtem S inverzijom preslika u kružnicu k' , onda slika točke S pri inverziji nije središte kružnice k' .



Slika B.3: Slika ortogonalne kružnice pri inverziji

Teorem B.2.2. Slika pravca p koji ne prolazi središtem O kružnice inverzije $i[O, r^2]$ pri toj inverziji je kružnica koja prolazi točkom O i u toj točki ima tangentu paralelnu s pravcem p .

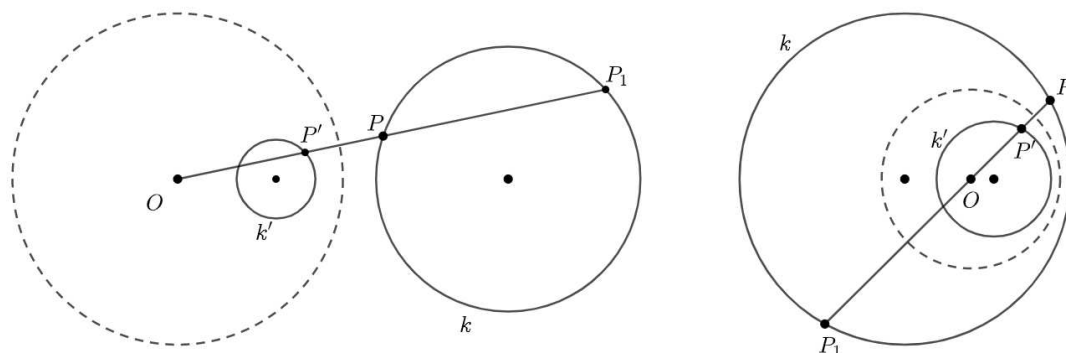
Teorem B.2.3. Slika kružnice koja prolazi centrom O inverzije pri toj inverziji je pravac paralelan s tangentom te kružnice u točki O .

Dokazi prethodna dva teorema mogu se pronaći u [1].

Teorem B.2.4. Slika kružnice k koja ne prolazi kroz središte O inverzije $i[O, r^2]$ pri toj inverziji je opet kružnica k' takva da je točka O središte sličnosti kružnica k i k' i to vanjsko ako je točka O izvan kružnice k , a unutrašnje ako je točka O unutar kružnice k .

Dokaz. Neka je P bilo koja točka kružnice k , zatim $i(P) = P'$ te P_1 drugo sjecište pravca OP s kružnicom k . Tada je $|OP||OP'| = r^2$, gdje je r^2 potencija inverzije i te $|OP||OP_1| = p$, gdje je p potencija točke O s obzirom na kružnicu k . Iz ove dvije jednakosti slijedi $\frac{OP'}{OP_1} = \frac{r^2}{p} = \text{const.}$ pa točka P' opisuje skup točaka k' homotetičan skupu k točaka P_1 u odnosu na homotetiju $(O, \frac{r^2}{p})$. Zato je k' kružnica, a točka O je središte sličnosti kružnica k i k' . To je

središte vanjsko ako i samo ako su P' i P_1 s iste strane točke O na pravcu OP . Budući da su P i P' s iste strane točke O , zadnji uvjet je ekvivalentan tome da su P i P_1 s iste strane od O , odnosno da je O izvan kružnice k . \square



Slika B.4: Slika kružnice koja ne prolazi središtem inverzije

Teorem B.2.5. Ako je k bilo koja kružnica kroz par pridruženih točaka A i A' inverzije $i[O, r^2]$, onda je k ortogonalna na kružnicu inverzije $c = k(O, r)$.

Dokaz. Neka je OT tangenta iz O na k . Tada je $OT^2 = OA \cdot OA'$ zbog potencije točke O s obzirom na kružnicu k . Također vrijedi $OA \cdot OA' = r^2$ jer su A i A' inverzne točke. Zato je $OT = r$ i slijedi da je $T \in c$ te $T \in c \cap k$. Stoga je k ortogonalna na c . \square

Teorem B.2.6. Neka je kružnica $k' = k(T, R')$ slika kružnice $k = k(S, R)$ pri inverziji s obzirom na kružnicu $c = k(O, r)$. Označimo udaljenosti $|OS|$ i $|OT|$ s d i d' , redom. Tada vrijedi:

$$a) R = \frac{R' r^2}{R'^2 - d'^2}, \quad R' = \frac{R r^2}{R^2 - d^2},$$

$$b) d' = \frac{d r^2}{R^2 - d^2}.$$

Dokaz. a) Uočimo da su središta S , O i T kružnica k , c i k' kolinearna. Neka pravac TO siječe kružnicu k u točkama P i Q kao na slici B.5. Neka su P' i Q' slike točaka P i Q pri inverziji $i[O, r^2]$. Primijetimo da su \overline{PQ} i $\overline{P'Q'}$ promjeri kružnica k i k' , redom. Dakle,

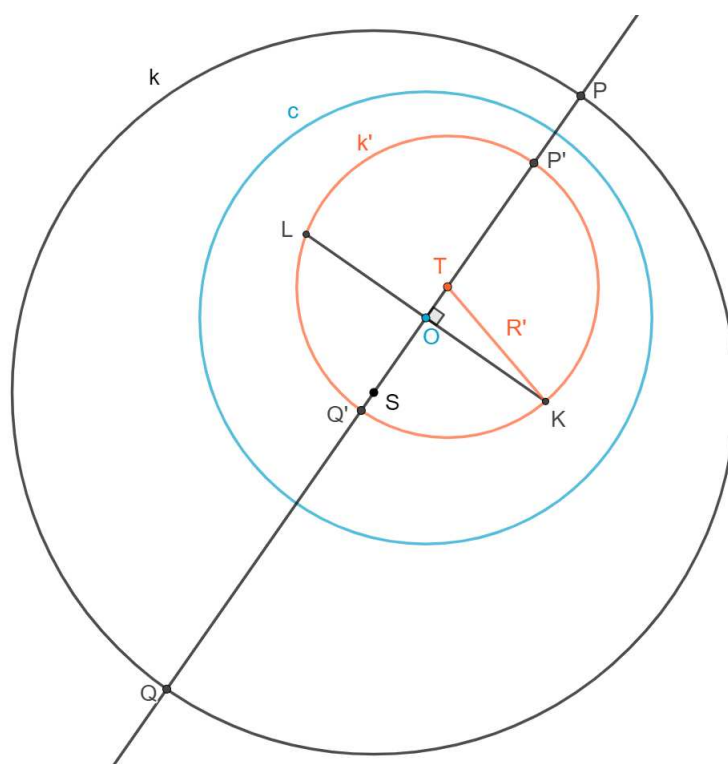
$$2R = |PQ|, \quad 2R' = |P'Q'|.$$

Budući da je inverzija involutorno preslikavanje, točke P i Q slike su točaka P' i Q' pri inverziji $i[O, r^2]$ pa vrijedi

$$2R = |PQ| = \frac{r^2}{|OP'||OQ'|} |P'Q'| = \frac{2R'r^2}{|OP'||OQ'|}. \quad (\text{B.1})$$

Neka okomica iz O na pravac OT siječe kružnicu k' u točkama K i L . Primjenom potencije točke O na kružnicu k' i Pitagorinog poučka na pravokutni trokut $\triangle TOK$ dobivamo

$$|OP'||OQ'| = |OK||OL| = |OK||OK| = |OK|^2 = R'^2 - d'^2.$$



Slika B.5: Kružnica k' je slika kružnice k pri inverziji u odnosu na kružnicu c

Uvrstimo li prethodnu jednakost u (B.1) dobivamo

$$2R = \frac{2R'r^2}{|OP'||OQ'|} = \frac{2R'r^2}{R'^2 - d'^2}.$$

Dakle, vrijedi

$$R = \frac{R'r^2}{R'^2 - d'^2}.$$

Inverzija involutorno preslikavanje iz čega analogno slijedi

$$R' = \frac{Rr^2}{R^2 - d^2}.$$

b) Budući da pravac OS siječe kružnicu k u točkama P i Q , vrijedi

$$|OS| = |SP| - |OP| = |SQ| - |OP| = |OQ| - |OS| - |OP|.$$

Iz prethodne jednakosti slijedi

$$|OS| = \frac{|OQ| - |OP|}{2}. \quad (\text{B.2})$$

Analogno dobivamo

$$|OT| = \frac{|OP'| - |OQ'|}{2}.$$

Uvrstimo u prethodnu jednakost $|OP'| = \frac{r^2}{|OP|}$ i $|OQ'| = \frac{r^2}{|OQ|}$. Tada dobivamo

$$\begin{aligned} |OT| &= \frac{|OP'| - |OQ'|}{2} \\ &= \frac{\frac{r^2}{|OP|} - \frac{r^2}{|OQ|}}{2} \\ &= \frac{r^2(|OQ| - |OP|)}{2|OP||OQ|} \\ &= \frac{r^2(|OQ| - |OP|)}{2|OP||OQ|}. \end{aligned}$$

Iz prethodne jednakosti i (B.2) slijedi

$$|OT| = |OS| \cdot \frac{r^2}{|OP||OQ|}. \quad (\text{B.3})$$

Slično kao u prvom dijelu dokaza pokazuje se da vrijedi

$$|OP||OQ| = R^2 - d^2$$

Budući da su $d = |OS|$ i $d' = |OT|$, uvrštavanjem prethodne jednakosti u (B.3) dobivamo

$$d' = d \cdot \frac{r^2}{|OP||OQ|} = \frac{dr^2}{R^2 - d^2}.$$

□

Teorem B.2.7. *Ako su k' i l' slike krivulja k i l pri inverziji $i[O, r^2]$ i ako je M sjecište krivulja k i l te $M' = i(M)$ odgovarajuće sjecište krivulja k' i l' , onda vrijedi $\angle_{M'}(k', l') = \angle_M(k, l)$, tj. inverzija čuva kutove parova krivulja.*

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [1]. Direktna posljedica teorema B.2.7 je sljedeći teorem.

Teorem B.2.8. *Neka su kružnice k_1 i k_2 ortogonalne. Tada vrijedi:*

- a) *Ako obje kružnice prolaze središtem inverzije, tada su njihove slike okomiti pravci.*
- b) *Ako kružnica k_1 prolazi, a kružnica k_2 ne prolazi središtem inverzije, tada je slika kružnice k_1 pravac k'_1 koji je ortogonalan na sliku kružnice k_2 pri inverziji, odnosno na kružnicu k'_2 .*
- c) *Ako niti jedna kružnica ne prolazi središtem inverzije, tada su njihove slike ortogonalne kružnice.*

Bibliografija

- [1] *Konstruktivne metode u geometriji*, 2020, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/kmg_predavanja.pdf.
- [2] C. Alsina i R. B. Nelsen, *Charming proofs: A journey into elegant mathematics*, br. 42, Mathematical Association of America, 2010.
- [3] A. Bogomolny, *Fuss' Theorem*, <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fuss.shtml#explanation>.
- [4] ———, *Newton's Theorem: What is it*, <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/NewtonTheorem.shtml#explanation>.
- [5] M. Hajja, *A condition for a circumscribable quadrilateral to be cyclic*, *Forum Geom*, sv. 8, 2008, str. 103–106.
- [6] A. Hess, *Bicentric quadrilaterals through inversion*, *Forum Geom*, sv. 13, 2013, str. 11–15.
- [7] R. Honsberger, *In Polya's Footsteps*, Mathematical Association of America, 1997, str. 62–64.
- [8] R. A. Johnson, *Advanced euclidean geometry*, Courier Corporation, 2013.
- [9] M. Josefsson, *Characterizations of bicentric quadrilaterals*, *Forum Geom*, sv. 10, 2010, str. 165–173.
- [10] S. Kar, *Proof of Brocard's Theorem*, <https://www.scribd.com/document/546453956/Brocard-s-Theorem>.
- [11] S. L. Loney, *Plane trigonometry*, University Press, 1893.
- [12] A. Sinefakopoulos i D. Donini, *Cirumscribing an Inscribed Quadrilateral: 10804*, sv. 108, JSTOR, 2001, str. 378.

- [13] Fermat Euler (username), *Prove that cc_1 bisects*, 2005, <https://artofproblemsolving.com/community/c6h55918>.
- [14] P. Yiu, *Euclidean Geometry Notes*, 1998.

Sažetak

U ovom diplomskom radu upoznali smo se s pojmom tetivno-tangencijalnog četverokuta te nekim njegovim značajnim svojstvima i karakterizacijama. Rad je podijeljen u dva poglavlja. U prvom poglavlju dokazujemo svojstva tetivnih i tangencijalnih četverokuta koja nam služe za dokazivanje karakterizacija tetivno-tangencijalnog četverokuta.

U drugom poglavlju definiramo tetivno-tangencijalni četverokut te pokazujemo neke njegove karakterizacije. Nadalje, promatramo odnos Newtonovog pravca tetivno-tangencijalnog četverokuta i Newtonovog pravca njemu kontaktnog četverokuta, dokazujemo Fussov teorem koji pokazuje odnos između radijusa upisane i opisane kružnice tetivno-tangencijalnog četverokuta, Ponceletovu propoziciju te Carlitzovu nejednakost. Zatim dokazujemo Yunovu nejednakost za tetivno-tangencijalne četverokute.

U dodatku rada definiramo i pokazujemo osnovna svojstva potencije točke s obzirom na kružnicu i inverzije.

Summary

In this thesis, we were introduced to the concept of bicentric quadrilateral and some of its significant properties and characterizations. The work is divided into two chapters. In the first chapter, we prove the properties of cyclic and tangential quadrilaterals, which will serve us to prove the characterizations of bicentric quadrilaterals.

In the second chapter, we define the bicentric quadrilateral and show some of its characterizations. Furthermore, we observe the relationship between Newton's line of the bicentric quadrilateral and Newton's line of its contact quadrilateral, we prove Fuss's theorem that shows the relationship between the radius of the inscribed and the radius of the circumscribed circle of the bicentric quadrilateral, Poncelet's proposition and Carlitz's inequality. Then we prove Yun's inequality for bicentric quadrilaterals.

In the appendix of this thesis, we define and show the basic properties of the power of a point with respect to the circle and inversion.

Životopis

Rođen sam 25. 2. 1998. u Slavonskom Brodu. Školovanje sam započeo u osnovnoj školi Bogoslav Šulek u Slavonskom Brodu. Nakon završetka osnovne škole, 2012. godine upisujem prirodoslovno-matematičku gimnaziju Matija Mesić. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2016. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Godine 2020. stječem titulu sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike te iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer: nastavnički.