Granični teorem za procese rizika

Puščak, Lana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lana Puščak

GRANIČNI TEOREM ZA PROCESE RIZIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, ožujak 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Posebno se zahvaljujem svojim roditeljima, sestri i njenoj obitelji na velikoj podršci, vjetru u leđa i razumijevanju koje sam imala za vrijeme studiranja. Zahvaljujem se i prijateljima koji su me uvijek bodrili i poticali na mojem putu prema uspjehu.

Sadržaj

Uvod

Teorija kolektivnog rizika bavi se nasumičnim fluktuacijama pričuva rizika osiguravajućeg društva te koristi matematičke modele kako bi opisala izloženost osiguravajućih društava gubitku i insolventnosti do kojih dolazi ako osiguravatelj nema dovoljno sredstava za naknadu šteta. Jedna od osnovnih zadaća teorije rizika je modeliranje i izračun šteta i rizika, njihove distribucije, vremenske dinamike, ukupne sume, kao i vjerojatnosti propasti odnosno gubitka u portfelju polica osiguranja. Razmotrimo osiguravajuće društvo koje piše samo obične police osiguranja kao što su osiguranje u slučaju nezgode, osiguranje u slučaju požara, zdravstveno osiguranje itd. Osiguranici plaćaju premije redovito i u određena slučajna vremena imaju potraživanja od tvrtke. Premija osiguranika, **bruto premija rizika**, je pozitivan iznos sastavljen od dvije komponente. Jedna od njih je **neto premija rizika** te je izračunata za pokrivanje isplata potraživanja u prosjeku, dok je **premija sigurnosnog rizika** komponenta koja štiti poduzeće od velikih odstupanja potraživanja od prosjeka i također omogućuje akumulaciju kapitala. Kada se dogodi šteta, tvrtka plaća osiguraniku pozitivan iznos koji se naziva **iznos pozitivnog rizika**.

S druge strane, osiguravajuće društvo koje samo piše police životnih renti zrcalna je slika gore opisane situacije. U ovom slučaju tvrtka redovito isplaćuje rentu osiguraniku dok smrt osiguranika stavlja odgovarajuću pričuvu na raspolaganje tvrtki. Za ovaj slučaj govorimo o negativnim premijama rizika i negativnim sumama rizika.

Za mnoga osiguravajuća društva, naravno, pristune su pozitivne i negativne premije rizika. Kao matematički model za ovaj diplomski rad pretpostavit ćemo da se potraživanja javljaju kao skokovi procesa obnove $\{N(t) : t \geqq 0\}$. Često se u teoriji kolektivnog rizka pretpostavlja da proces obnove ima Poissonovu distribuciju. Međutim ono što će nama biti u interesu u ovom diplomskom radu je generalizirani proces obnove. Razmatrat ćemo uzastopne sume rizika koje čine niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli, $\{X_i : i = 1, 2, ...\}$ s očekivanjem $\mu > 0$. Nadalje, pretpostavit ćemo da je $u > 0$ inicijalna rezerva rizika te da osiguranici plaćaju bruto premiju rizika $a > 0$ po jedinici vremena. Rezervu rizika u trenutku $t > 0$ označit ćemo s $X(t)$ te definirati ukupni iznos rizika s $S_0 = 0$, $S_i = X_1 + X_2 + ... + X_i$. Proces rizika definirat ćemo s:

$$X(t) = u + at - S_{N(t)}, \ t > 0 \tag{1}$$

Također definirat ćemo slučajnu varijablu T, odnosno prvo vrijeme kada osiguravajuće drušvo ima negativnu rezervu riziku:

$$T = \inf\{t > 0 : X(t) \leqq 0\} \tag{2}$$

Glavni problem teorije kolektivnog rizika je izračunati distribucije slučajnih varijabli $X(t)$ i T. Međutim, mnogi rezultati dobiveni za navedene distribucije su izrazito komplicirani izrazi. Osnovni cilj ovog diplomskog rada je dobiti aproksimacije za $X(t)$, T i druge funkcionale od $X(t)$ koristeći teoriju slabe konvergencije vjerojatnosnih mjera na funkcijskim prostorima.

Rad je podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju uvodimo neke osnovne pojmove i rezultate vezane uz metričke prostore koji će nam biti potrebni za daljnje razmatranje.Također, definiramo pojam slabe konvergencije te konvergencije po distribuciji i vjerojatnosti. Zatim definiramo metričke prostore C i D te uvodimo pojam Brownovog gibanja i Wienerove mjere. Na kraju prvog poglavlja bavimo se nekim rezultatima iz teorije obnove koji će nam biti od važnosti za dokaz glavnog rezultata.

U drugom poglavlju konstruiramo niz procesa rezerve rizika te dokazujemo da oni slabo konvergiraju. Nadalje, proširujemo dobivene rezultate razmatranjem slabe konvergencije procesa rizika na polubeskonačnim intervalima.

U trećem poglavlju definiramo vrijeme propasti i vjerojatnosti propasti procesa rizika. Navodimo granične teoreme te time dolazimo do glavnog cilja i rezultata ovog rada.

Poglavlje 1

Koncepti teorije slabe konvergencije

U ovom poglavlju skupit ćemo one koncepte i rezultate iz teorije slabe konvergencije koji će nam trebati za našu primjenu na teoriju kolektivnog rizika.

1.1 Osnovne definicije

U ovom potpoglavlju prisjetit ćemo se nekih osnovnih pojmova koji će nam biti potrebni za daljnje razumijevanje i dokazivanje glavnih rezultata (pogledati [5]).

Definicija 1.1.1. *Neka je $X \neq 0$ neprazan skup i $d{:}X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje s Kartezijevog produkta $X \times X$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ za koje vrijedi:*

1) $d(a,b) \geq 0$ (pozitivnost)

2) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (strogost)

3) $d(a,b) = d(b,a)$, $\forall\ a,b \in X$ (simetričost)

4) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)\ \forall\ a,b,c \in X$ (nejednakost trokuta)

*Kažemo da je d funkcija udaljenosti ili razdaljinska funkcija, odnosno metrika na skupu X. Uređeni par (X,d) nazivamo **metrički prostor**.*

Definicija 1.1.2. *Kažemo da je prostor (X,d) **separabilan** ako sadrži prebrojiv gust podskup, tj. ako postoji $D \subseteq X$ takav da je $cardD \leq \aleph_0$ i $Cl(D) = X$.*

Definicija 1.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ njegova točka, a $r \in \mathbb{R},\ r > 0$, realan broj. Pod otvorenom kuglom u skupu X sa središtem x_0 i radijusom r podrazumijevamo skup $U(x_0, r) = \{x \in X;\ d(x, x_0) < r\}$*

Definicija 1.1.4. *Neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u prostoru (X,d) ako se može prikazati kao unija otvorenih kugala iz tog prostora.*

Definicija 1.1.5. *Familija $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zove se* ***topologija*** *prostora (X, d).*

Definicija 1.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, a $\mathcal{U}$ topologija na njemu. σ-algebru generiranu otvorenim skupovima (dakle, familijom $\mathcal{U}$) nazivamo Borelovom σ-algebrom na X i označavamo s $\mathcal{B}(X)$, a njene elemente nazivamo Borelovim skupovima.*

Neka je (S, d) metrički prostor i neka je $\mathscr{S}$ (klasa Borelovih skupova) σ-algebra generirana otvorenim skupovima iz S.

Definicija 1.1.7. *Neka su P_n i P vjerojatnosne mjere definirane na $\mathscr{S}$ koje zadovoljavaju sljedeće:*

$$lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP$$

za svaku ograničenu, neprekidnu realnu funkciju f na S. Kažemo da P_n ***slabo konvergira*** *prema P kada $n \to \infty$ i pišemo $P_n \Rightarrow P$.*

U sljedećem teoremu navodimo ekvivalentne karakterizacije slabe konvergencije.

Teorem 1.1.8 (Portmanteau)**.** .
i) $P_n \Rightarrow P$.
ii) $\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP$ *za sve ograničene i uniformno neprekidne funkcije f.*
iii) $limsup_n P_n(F) \leq P(F)$ *za sve zatvorene skupove F.*
iv) $\lim\inf_n P_n(G) \geqq P(G)$ *za sve otvorene skupove G.*
v) $P_n(A) \to P(A)$ *za sve skupove A takve da vrijedi* $P(\partial A) = 0$

Napomena 1.1.9. *U slučaju kada je $S = R^k$, k-dimenzionalan Euklidski prostor, slaba konvergencija je ekvivalentna standardnoj slaboj konvergenciji distribucija P_n prema distribuciji P.*

1.2 Konvergencija po distribuciji

Teorija slabe konvergencije može se parafrazirati kao teorija konvergencije po distribuciji. Koncept konvergencije po distribuciji bazira se na intuiciji da su dvije slučajne varijable "blizu" jedna drugoj ako su njihove funkcije distribucije blizu jedna drugoj. Iako se govori o konvergenciji niza slučajnih varijabli po distribuciji, to zapravo označava konvergenciju funkcija distribucije, a ne slučajnih varijabli.

Definicija 1.2.1. *Neka je X izmjerivo preslikavanje s vjerojatnosnog prostora* $(\Omega, \mathscr{B}, \mathscr{P})$ *na metrički prostor S, odnosno vrijedi* $X^{-1}\mathscr{S} \subset \mathscr{B}$. *Ovako definirano preslikavanje X nazivamo* ***slučajnim elementom***.

Napomena 1.2.2. *Posebno, ako je* $S = R^1$ *onda X nazivamo slučajnom varijablom, ako je* $S = R^k$ *slučajnim vektorom, a ako je S funkcijski prostor X nazivamo slučajnom funkcijom.*

Distribucija od X je vjerojatnosna mjera $P = \mathscr{P}X^{-1}$ na $(S, \mathscr{S})$ definirana s

$$P(A) = \mathscr{P}(X^{-1}A) = \mathscr{P}[\omega : X(\omega) \in A] = \mathscr{P}[X \in A]$$

Primjetimo da je $\mathscr{P}$ vjerojatnosna mjera na proizvoljnom izmjerivom prostoru dok je P uvijek definirana na Borelovoj σ-algebri metričkog prostora. Definirajmo sada konvergenciju po distribuciji.

Definicija 1.2.3. *Neka je* $\{X_n\}$ *niz slučajnih elemenata u S. Za niz* $\{X_n\}$ *kažemo da konvergira po distribuciji prema slučajnom elementu X i pišemo* $X_n \Rightarrow X$ *ako distribucija* P_n *od* X_n *slabo konvergira prema distribuciji P od X* $(P_n \Rightarrow P)$

Iako definicija zahtijeva da su kodomena S i topologija na njoj iste za slučajne elemente $X, X_1, X_2, ...$, domene $(\Omega, \mathscr{B}, \mathscr{P})$ mogu biti različite. Jedan od najkorisnijih rezultata iz teorije slabe konvergencije za primjenu je teorem o neprekidnom preslikavanju. Neka je h izmjerivo preslikavanje sa skupa S u drugi metrički prostor S' sa σ-algebrom $\mathscr{S}'$ Borelovih skupova. Svaka vjerojatnosna mjera P na $(S, \mathscr{S})$ inducira na $(S', \mathscr{S}')$ jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru $P(h^{-1}A)$ za $A \in \mathscr{S}'$. Neka je D_h skup prekida od h. Teorem o neprekidnom preslikavanju glasi:

Teorem 1.2.4. *Ako vrijedi* $P_n \Rightarrow P$ *i* $P(D_h)=0$ *tada vrijedi* $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$.

Dokaz. Neka je F skup u S'. Ako je $x \in Cl(h^{-1}F)$ tada $x_n \to x$ za neki niz $\{x_n\}$ takav da $hx_n \in F$, tada ako je $x \in D_h^c$, hx leži u $Cl(F)$. Stoga vrijedi $D_h^c \cap Cl(h^{-1}F) \subset h^{-1}Cl(F)$. Ako je F zatvoreni skup u S', onda iz $PD_h^c = 1$ slijedi

$$\limsup_n P_n(h^{-1}F) \leq \limsup_n P_n(Cl(h^{-1}F)) \leq P(Cl(h^{-1}F))$$

$$= P(D_h^c \cap Cl(h^{-1}F) \leq P(h^{-1}Cl(F)) = P(h^{-1}F).$$

Sada tvrdnja slijedi iz Teorema 1.1.8. (iii)

□

1.3 Konvergencija po vjerojatnosti

Definicija 1.3.1. *Neka je S separabilni metrički prostor s metrikom d. Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih varijabli u S i X slučajni element u S s istom domenom* $(\Omega, \mathscr{B}, \mathscr{P})$. *Kako je S separabilan,* $d(X_n, X)$ *je slučajna varijabla. Kažemo da* $d(X_n, X)$ ***konvergira po vjerojatnosti*** *prema 0 i pišemo* $d(X_n, X) \xrightarrow{P} 0$ *ako*

$$\mathscr{P}\{d(X_n, X) \geq \epsilon\} \xrightarrow{n} 0$$

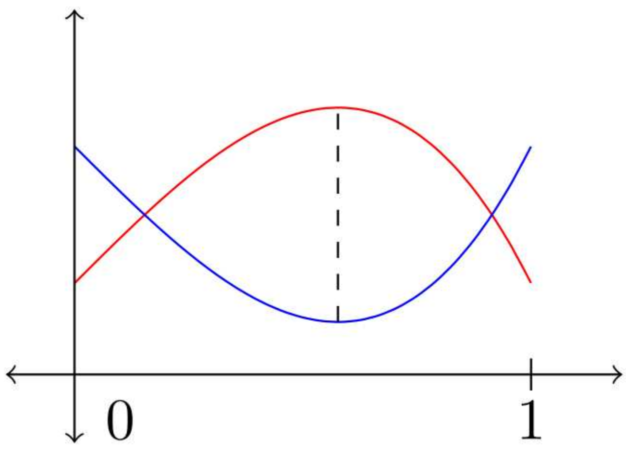
za svaki $\epsilon > 0$.

Dakle konvergencija po vjerojatnosti u osnovi znači da vjerojatnost da $d(X_n, X)$ prelazi određenu, strogo pozitivnu vrijednost konvergira u nulu.

Teorem 1.3.2. *Neka su* $\{X_n\}$ *i* $\{Y_n\}$ *nizovi slučajnih varijabli u S. Ako* $X_n \Rightarrow X$ *i* $d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$ *tada vrijedi* $Y_n \Rightarrow X$.

1.4 Metrički prostori C[0,1] i D[0,1]

Metrički prostori koji će nam biti od interesa u ovom radu su $C[0,1]$ i $D[0,1]$. Prostor C=$C[0,1]$ je prostor neprekidnih, realnih funkcija na [0,1] s uniformnom metrikom definiranom s $\rho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$. Neka $\mathscr{C}$ označava klasu Borelovih skupova od C. Tako definiran skup C je potpuni separabilni metrički prostor.



Slika 1.1: Uniformna metrika

Napomena 1.4.1. *Na slici 1.1 vidimo da je uniformna metrika najveća udaljenost između grafova funkcija.*

Prostor D=D[0,1] je prostor realnih funkcija x(t) na [0,1] koje su neprekidne s desna i imaju lijevi limes:
(i) *za* $0 < t < 1$, $x(t+) = \lim_{s\searrow t} x(s)$ postoji i vrijedi $x(t) = x(t+)$
(ii) *za* $0 < t \leq 1$, $x(t-) = \lim_{s\nearrow t} x(s)$ postoji

Sljedeću topologiju na skupu D uveo je Skorohod (1956), [1].

Definicija 1.4.2. *Neka* Λ *označava klasu strogo rastućih, neprekidnih preslikavanja* λ*: [0,1]* $\rightarrow$ *[0,1],* $\lambda(0)=0$*,* $\lambda(1)=1$*.*

$$\textit{Za } \lambda \in \Lambda, \ \textit{neka je } \|\lambda\| = \sup_{s\neq t} |\log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s}|.$$

Metrika $d(x, y)$*, za* x *i* y *u skupu D definirana je kao infimum pozitivnih vrijednosti* ε *za koje postoji* $\lambda \in \Lambda$ *takav da*

$$\|\lambda\| \leq \varepsilon$$

i

$$\sup_t |x(t) - y(\lambda t)| \leq \varepsilon.$$

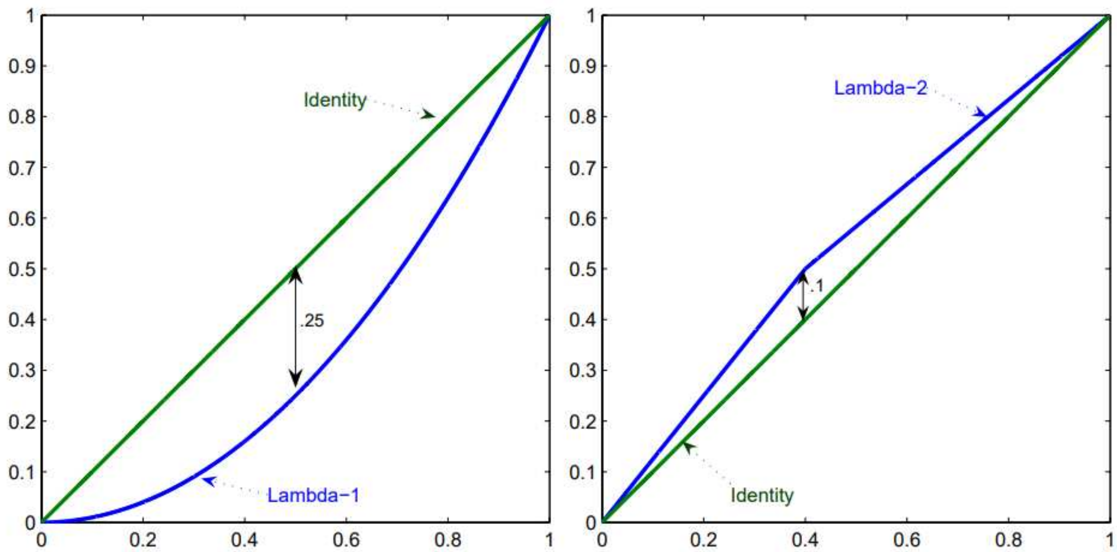
ili ekvivalentno,

$$d(x, y) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\{\sup_{s\neq t} |\log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s}| \vee \sup_t |x(t) - y(\lambda t)|\}$$

Metrika $d(x, y)$ *naziva se* ***Skorokhodova metrika*** *i ona definira Skorokhodovu topologiju.*

Tako definiran skup D je potpuni separabilni metrički prostor.

Napomena 1.4.3. *Slika 1.2 prikazuje grafove funkcija* $\lambda_1 \in \Lambda$ *i* $\lambda_2 \in \Lambda$*. Skorokhodova metrika u definiciji zahtijeva postojanje funkcije* λ *tako da bude blizu funkcije identiteta.*



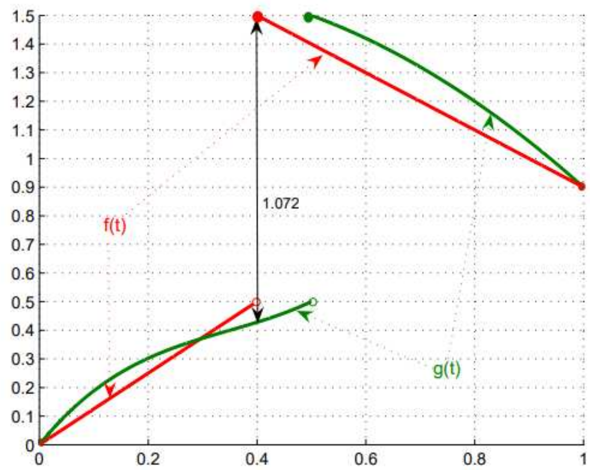
Slika 1.2: Realizacije funkcija λ_1 i λ_2 iz skupa Λ

Primjer. *Neka su dane sljedeće funkcije:*

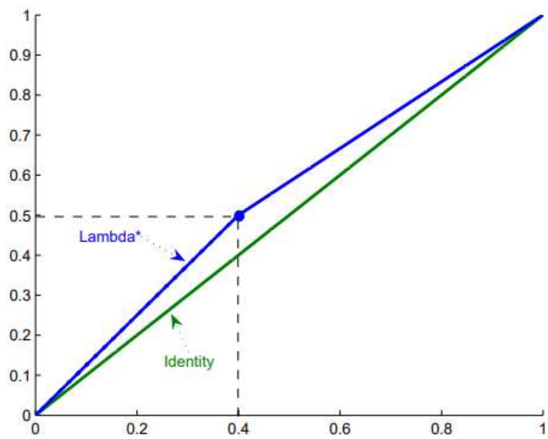
$$x(t) = \begin{cases} 1.25t, \ t \in [0, 0.4) \\ -t + 1.9, \ t \in [0.4, 1] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 5t^3 - 5.2t^2 + 2.35t, \ t \in [0, 0.5) \\ -t^2 + 0.3t + 1.6, \ t \in [0.5, 1] \end{cases}$$

Na slici 1.3 vidimo pripadne grafove funkcija s prekidom. Primijetimo da najveća udaljenost funkcija iznosi 1.072 što je ujedno vrijednost uniformne metrike. Pogledajmo sada funkciju λ^* na slici 1.4 koja je prikladna za procjenu Skorokhodove metrike.

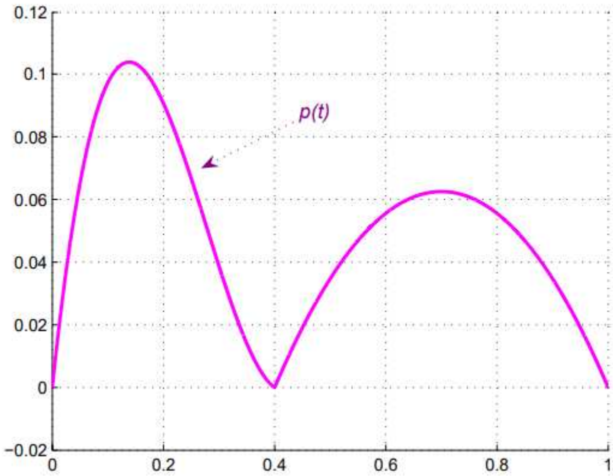


Slika 1.3: Graf funkcija $x(t)$ (crveno) i $y(t)$ (zeleno)



Slika 1.4: Funkcija λ^* iz skupa Λ

Slika 1.5 prikazuje graf funkcije $p(t) = |x(t) - y(\lambda^*(t))|$.
Procjena vrijednosti $d(x, y)$ *Skorokhodove metrike će biti manja vrijednost između suprema funkcije* $p(t)$ *i najveće udaljenosti funkcije* λ^* *od funkcije identiteta.*



Slika 1.5: Graf funkcije $p(t) = |x(t) - y(\lambda^*(t))|$

Sljedeći koristan rezultat koji povezuje slabu konvergenciju u C i D dokazali su Ligget i Rosén, [6].

Teorem 1.4.4 (Liggett i Rosén)**.** *Neka je $\{X_n\}$ niz slučajnih funkcija u (D, d), a $\{Y_n\}$ niz slučajnih funkcija u (C, ρ) i X je slučajna funkcija u (C, ρ). Ako $d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$ tada*

$$X_n \Rightarrow X \text{ u } (D, d) \text{ ako i samo ako}$$

$$Y_n \Rightarrow X \text{ u } (C, \rho).$$

1.5 Brownovo gibanje

U ovom potpoglavlju konstruirat ćemo Brownovo gibanje pomoću simetrične slučajne šetnje (koristimo izraze iz [7]). Neka je $(X_j, j = 1, 2, ...)$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s vrijednostima ± 1 i s parametrom $p = 1/2$. Tada vrijedi:

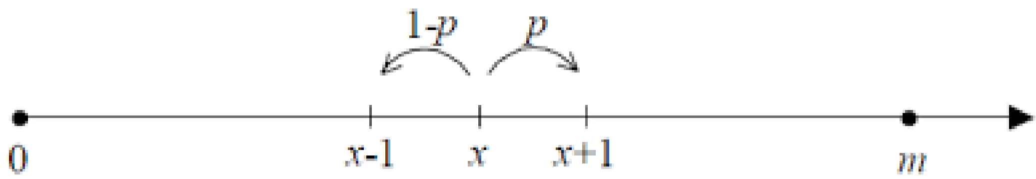
$$E(X_i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$Var(X_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Simetrična slučajna šetnja je stohastički proces $M = (M_k, k = 0, 1, 2, ...)$ definiran s $M_0 = 0$ i:

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j,\ k = 1, 2, ...$$

Slika 1.6 prikazuje kretanje slučajne šetnje.



Slika 1.6: Slučajna šetnja

Sada želimo definirati proces $\{W(t) :\ t \geqq 0\}$. Stavimo da je $W(0) = 0$. Za fiksni $n \in \mathbb{N}$, skalirana slučajna šetnja je dana izrazom:

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$$

ako je $nt \in \mathbb{Z}_+$. Ako nt nije cijeli broj, $W^{(n)}(t)$ definiramo na sljedeći način:

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{\lfloor nt \rfloor} + \frac{1}{\sqrt{n}} (M_{\lfloor nt \rfloor + 1} - M_{\lfloor nt \rfloor})(nt - \lfloor nt \rfloor)$$

Teorem 1.5.1 (Centralni granični teorem)**.** *Fiksirajmo $t \geqq 0$. Kada $n \to \infty$, distribucija skalirane slučajne šetnje $W^{(n)}(t)$ izračunate u trenutku t konvergira prema normalnoj distribuciji s očekivanjem 0 i varijancom t.*

Teorem 1.5.2 (teorem 4.17, [10])**.** *Za slučajni proces* $\{W^{(n)}(t),\ t \geqq 0\}$ *i proizvoljne* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < \infty$ *dobivamo sljedeće:*

$$(W^{(n)}(t_1), W^{(n)}(t_2), ..., W^{(n)}(t_n)) \Rightarrow (W_{t_1}, W_{t_2}, ..., W_{t_n})$$

gdje je $\{W_t, t \geqq 0\}$ *Brownovo gibanje.*

Pogledajmo priraste slučajne varijable $W^{(n)}(t)$ za slučaj kada je $nt \in \mathbb{Z}_+$:

$$W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=ns+1}^{nt} X_j$$

te kada $nt \notin Z_+$:

$$W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor} X_j + \frac{1}{\sqrt{n}} X_{\lfloor nt \rfloor+1}(nt - \lfloor nt \rfloor) - \frac{1}{\sqrt{n}} X_{\lfloor ns \rfloor+1}(ns - \lfloor ns \rfloor)$$

Budući da su Bernoullijeve slučajne varijable nezavisne, tada i slučajna varijabla $W^{(n)}(t)$ ima nezavisne priraste, odnosno za sve $0 \leqq t_1 < t_2 ... < t_n$, slučajne varijable

$$W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1),\ W^{(n)}(t_3) - W^{(n)}(t_2), ...,\ W^{(n)}(t_n) - W^{(n)}(t_{n-1})$$

su nezavisne.
Prema centralnom graničnom teoremu za sve $t \geqq 0$, kada $n \to \infty$, slučajna varijabla $W^{(n)}(t)$ konvergira prema normalnoj slučajnoj varijabli W_t s očekivanjem $\mu_t = 0$ i varijancom $\sigma_t = t$. Ako za $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < \infty$ promotrimo pridruživanje:

$$(W^{(n)}(t_1), W^{(n)}(t_2), ..., W^{(n)}(t_n)) \mapsto (W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1), ..., W^{(n)}(t_n) - W^{(n)}(t_{n-1}))$$

dobivamo da iz neprekidnosti pridruživanja i Teorema 1.5.2 slijedi nezavisnost prirasta procesa $\{W_t,\ t \geqq 0\}$.

Definicija 1.5.3. *Slučajni proces* $\{W_t, t \geqq 0\}$ *je proces sa* ***stacionarnim prirastima*** *ako za sve* $t > s \geqq 0$ *i sve* $h > 0$*, slučajna varijabla* $W_t - W_s$ *ima istu distribuciju kao i slučajna varijabla* $W_{t+h} - W_{s+h}$

Drugim riječima, distribucija slučajne varijable $W_{t+h} - W_t$ ovisi samo o duljini vremenskog pomaka h i ne ovisi o $t \geqq 0$.

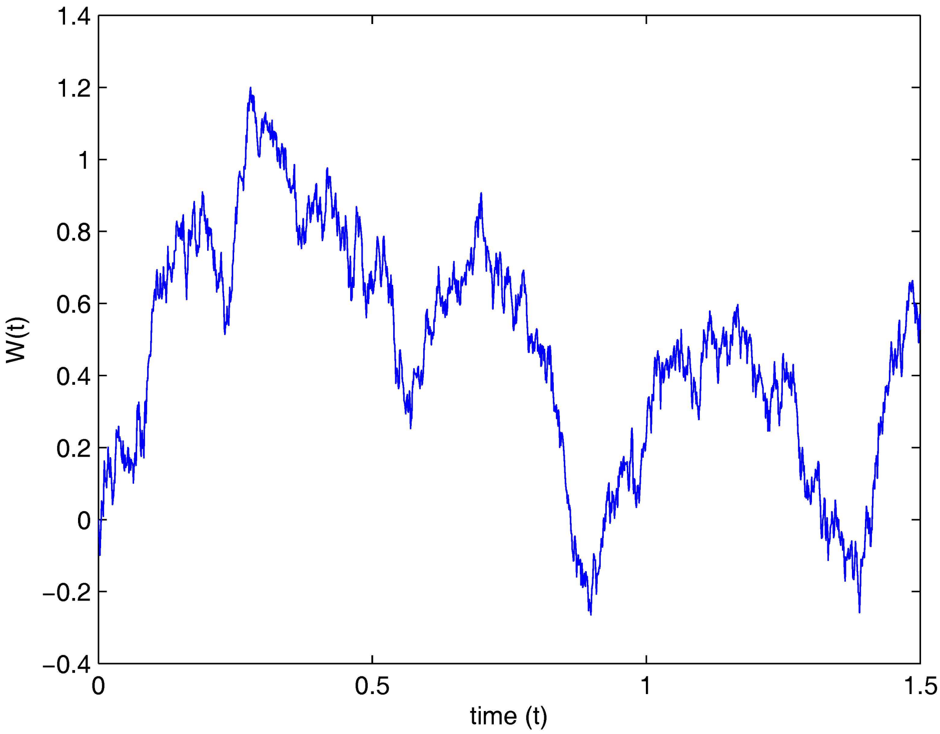
Izračunajmo sada očekivanje i varijancu prirasta $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$, $0 \leqq s < t$, u slučaju kada su ns i nt cijelobrojni. Dobivamo sljedeće:

$$E[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = 0, \quad Var[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=ns+1}^{nt} 1 = t - s$$

Zaključujemo da u slučaju kada su nt i st cijeli brojevi, distribucija slučajne varijable $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$ ovisi samo o duljini intervala $[s, t]$. Za kovarijancu od $W^{(n)}(t)$ i $W^{(n)}(s)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
E[W^{(n)}(s)W^{(n)}(t)] &= E[W^{(n)}(s)(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) + (W^{(n)}(s))^2] \\
&= E[W^{(n)}(s)] \cdot E[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] + E[(W^{(n)}(s))^2] \\
&= 0 + Var(W^{(n)}(s)) = s = \sigma_{st}
\end{aligned}$$

Za sve $t > s \geqq 0$, distribucija slučajne varijable $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$ konvergirat će prema $N(\mu_s + \mu_t, \sigma_s + \sigma_t - 2\sigma_{st}) = N(0, t - s)$. Iz neprekidnosti pridruživanja $(W^{(n)}(s), W^{(n)}(t)) \mapsto W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$ i Teorema 1.5.2 slijedi da proces $\{W_t,\ t \geqq 0\}$ ima stacionarne priraste.
Na sljedećoj slici vidimo primjer putanje Brownovog gibanja.



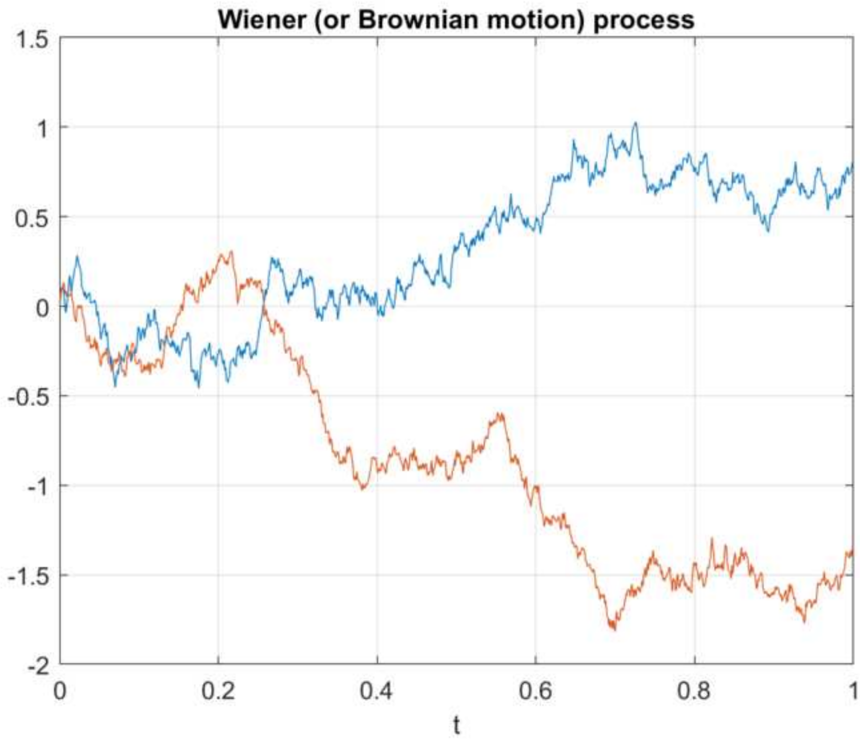
Slika 1.7: Prikaz moguće realizacije Brownovog gibanja

Konačno dolazimo do definicije Brownovog gibanja, [2].

Definicija 1.5.4. *Stohastički proces* $\{W(t), t \geqq 0\}$ *se naziva* σ^2*-Brownovo gibanje ako vrijede sljedeća svojstva:*
i) W(0)=0
ii) $\{W(t)\}$ *ima stacionarne i nezavisne priraste*
iii) $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$ *za svaki* $t \geqq 0$
iv) $\{W(t),\ t \geqq 0\}$ *ima neprekidne putove.*

Proces $\{X(t),\ t \geqq 0\}$ nazivamo σ^2- Brownovo gibanje s driftom ako je $X(t) = W(t) + \mu t$ za neki $\mu \in \mathbb{R}$ i $\{W(t),\ t \geqq 0\}$ σ^2-Brownovo gibanje.

Međutim ono što će nama biti od posebnog interesa je slučaj kada je $\sigma = 1$ te se tada slučajan proces $\{W(t),\ t \geqq 0\}$ naziva **standardno Brownovo gibanje** ili **Wienerov proces**. Na slici 1.8 prikazane su dvije realizacije Wienerovog procesa.



Slika 1.8: Dvije realizacije Wienerovog procesa

1.6 Wienerova mjera

Wienerova mjera je vjerojatnosna mjera definirana na $(C, \mathscr{C})$ te opisuje vjerojatnosnu distribuciju putanje koju ocrtava čestica u Brownovom gibanju. Zadovoljava sljedeća dva svojstva:

$$W[x_t \leq \alpha] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2t} du$$

gdje je svaka x_t normalno distribuirana slučajna varijabla po mjeri W s očekivanjem 0 i varijancom t. Kada je $t = 0$ to se interpretira kao $W[x_0 = 0] = 1$. Također vrijedi da stohastički proces $[x_t : 0 \leq t \leq 1]$ ima nezavisne priraste po W: ako

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k = 1,$$

tada slučajne varijable

$$x_{t_1} - x_{t_0}, x_{t_2} - x_{t_1}, ..., x_{t_k} - x_{t_{k-1}}$$

su nezavise po vjerojatnosti W.

Sada ćemo konstruirati Wienerovu mjeru. Navodimo posebni slučaj centralnog teorema ([1]). Neka je $X_1^{(n)}, ..., X_n^{(n)}$ trokutasti niz slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{B}, \mathscr{P})$, koje su nezavisne, jednako distribuirane za svaku vrijednost n= 1,2,... Nadalje, pretpostavljamo da vrijedi $E[X_i^{(n)}]=0$, $Var[X_i^{(n)}] = \sigma_n^2 > 0$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2 > 0$ te da je $E[(X_i^{(n)})^{2+\varepsilon}]$ ograničena u n za neki $\varepsilon > 0$. Kao i obično definiramo $S_0^{(n)} = 0$ i $S_k^{(n)} = X_1^{(n)} + ... + X_k^{(n)}$. Sada konstruiramo slučajne funkcije Y_n u C na sljedeći način:

$$Y_n(t, \omega) = \frac{S^n_{[nt]}(\omega)}{n^{1/2}\sigma} + (nt - [nt])\frac{X^n_{[nt]+1}}{n^{1/2}\sigma}$$

za $[nt]n^{-1} \leqq t < ([nt] + 1)n^{-1}$

Teorem 1.6.1 (Prohorov)**.** *$Y_n \Rightarrow W$, gdje je distribucija od W Wienerova mjera i vrijedi W(0)=0.*

Definiramo

$$X_n(t, \omega) = \frac{S^{(n)}_{[nt]}(\omega)}{n^{1/2}\sigma}$$

za $0 \leqq t \leqq 1$. Budući da vrijedi $d(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$ te je W po definiciji u (C, ρ) tada prema Teoremu 1.4.4 slijedi $X_n \Rightarrow W$.

Napomena 1.6.2. *Prethodni rezultat je ujedno i tvrdnja Donskerovog teorema za ovako definiranu funkciju X_n ([1],Teorem 14.1.).*

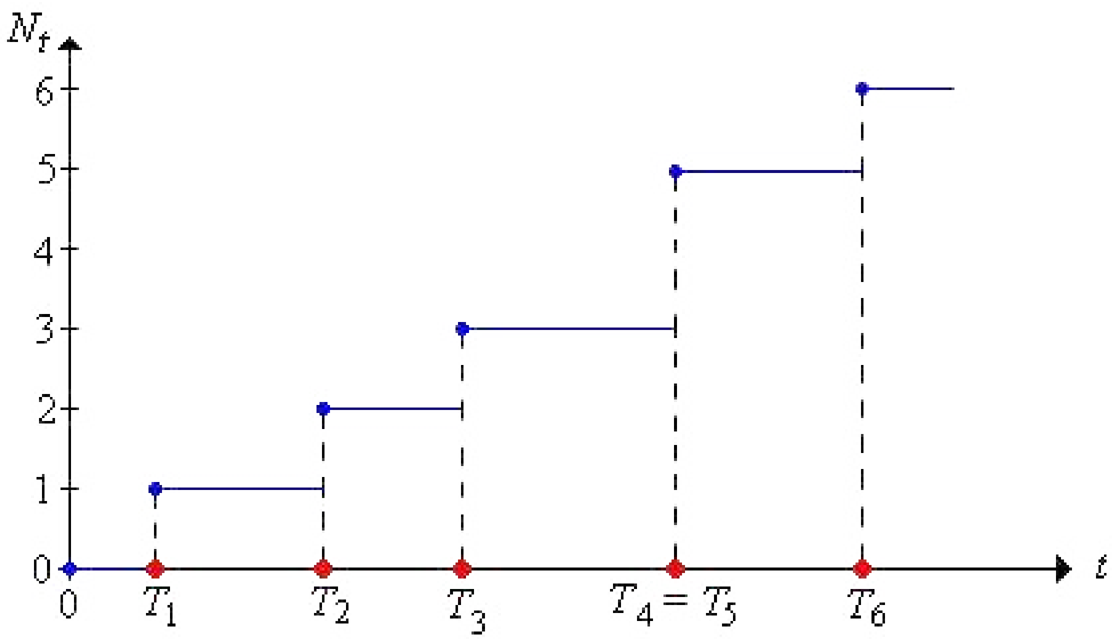
1.7 Teorija obnove

Definicija 1.7.1. *Neka su $\eta_1, \eta_2, ...$ pozitivne slučajne varijable tada definiramo proces brojanja obnove $N(t)$:*

$$N(t) = max\ \{k : \sum_{i=1}^{k} \eta_i \leqq t\} \qquad t \geqq 0$$

gdje je $N(t) = 0$ u slučaju kada je $\eta_1 > t$.

Ako je η_k duljina vremena između pojavljivanja (k - 1)-og i k-tog događaja u nizu, tada je $N(t)$ broj događaja do vremena t.
Slika 1.9 prikazuje jednu realizaciju procesa obnove.



Slika 1.9: Proces obnavljanja s vremenima skokova procesa obnove

Pretpostavimo da postoje pozitivne slučajne varijable μ i σ takve da ako je

$$X_n(t,\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} (\eta_i(\omega) - \mu)$$

tada $X_n \Rightarrow W$ što će vrijediti ako su η_n nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem μ i varijancom σ^2.

U teoriji kolektivnog rizika razmatramo sume slučajnih brojeva slučajnih varijabli. Neka je $\{Y_i\}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih pozitivnih slučajnih varijabli takvih da vrijedi $E[Y_i] = \lambda^{-1} > 0$, odnosno Y_i su eksponencijalno distribuirane. Slučajna varijabla Y_i predstavlja vrijeme između (i-1)-tog i i-tog događaja. Neka je broj obnova (proces brojanja) u vremenu t definiran slično kao i prije:

$$N(t) = max\,\{k : \sum_{i=1}^{k} Y_i \leqq t\} \qquad t \geqq 0$$

i vrijedi $N(t) = 0$ u slučaju kada je $Y_1 > t$.

Slučajna funkcija $N(nt)$, $0 \leqq t \leqq 1$, je element prostora D za $n = 1, 2, 3, ...$, a prema funkcionalnom graničnom teoremu vrijedi $\frac{N(n\cdot)}{n} \Rightarrow \lambda t = \Lambda$, gdje je Λ slučajna funkcija čija vrijednost u t iznosi λt.

Neka su sada $\{X_n\}$ i $\{\Phi_n\}$ nizovi slučajnih varijabli u D. Neka su X i Φ slučajni elementi od D te vrijedi da je (X, Φ) slučajni element skupa $D \times D$. Dobivamo sljedeću lemu.

Lema 1.7.2. *Ako vrijedi $(X_n, \Phi_n) \Rightarrow (X,\Phi)$ i $P[X \in C]=1$, tada vrijedi $X_n \circ \Phi_n \Rightarrow X \circ \Phi$*

Neka je

$$Z_n(t,\omega) = \frac{S^{(n)}_{N(nt)}}{n^{1/2}\sigma}$$

Slučajnu varijablu Z_n možemo zapisati kao $Z_n = X_n(\cdot,\omega) \circ \frac{N(nt)}{n}$. Primjenom Leme 1.7.2. na funkciju Z_n dobivamo dokaz sljedećeg teorema:

Teorem 1.7.3. *$Z_n \Rightarrow W \circ \Lambda$ gdje je $W \circ \Lambda(t) = W(\lambda t)$.*

Napomena 1.7.4. *U ovom teoremu slučajni elementi X_n i $N(n\cdot)/n$ ne moraju biti nezavisni.*

Poglavlje 2

Slaba konvergencija procesa rezerve rizika

Rizik osiguravatelja proizlazi iz činjenice da su vremena dolazaka šteta na naplatu kao i njihovi iznosi osiguravatelju nepoznati i ne mogu se predvidjeti sa sigurnošću. Iz tog razloga višak (kapital) osiguravatelja u svakom budućem trenutku $t > 0$ je slučajna varijabla $X_n(t)$. U trenutku t = 0 osiguravatelj raspolaže s početnim kapitalom za koji pretpostavljamo da je pozitivan i nazivamo ga početni višak. Prema svojstvima ugovora o osiguranju jasno je kako će vrijednost osiguravateljevog viška u budućem vremenu t biti jednaka početnom višku uvećanom za premije koje su uplaćene od strane osiguranika do trenutka t te umanjenom za iznose svih nastalih šteta koje je osiguravajuće društvo isplatilo svojim osiguranicima do trenutka t.

U ovom poglavlju bavit ćemo se rezervama rizika. Konstruirat ćemo niz procesa rezerve rizika $X_n(t)$ te ćemo primijeniti dobivene rezultate iz Poglavlja 1 kako bismo dokazali da ti procesi slabo konvergiraju.

Za n-ti proces neka je:

- $u_n > 0$ - inicijalna rezerva rizika

- $a_n > 0$ - bruto premija rizika po jedinici vremena (ukupna premija, iznos koji je osiguranik dužan uplatiti prilikom sklapanja osiguranja)

- $\{X_i^{(n)}\} > 0$ - niz nezavisnih jednako distribuiranih iznosa rizika definiranih na $(\Omega, \mathscr{B}, \mathscr{P})$ takvih da vrijedi $E[X_i^{(n)}] = \mu_n > 0$, $Var[X_i^{(n)}] = \sigma_n^2 > 0$

2.1 Cramér-Lundbergov model procesa rizika

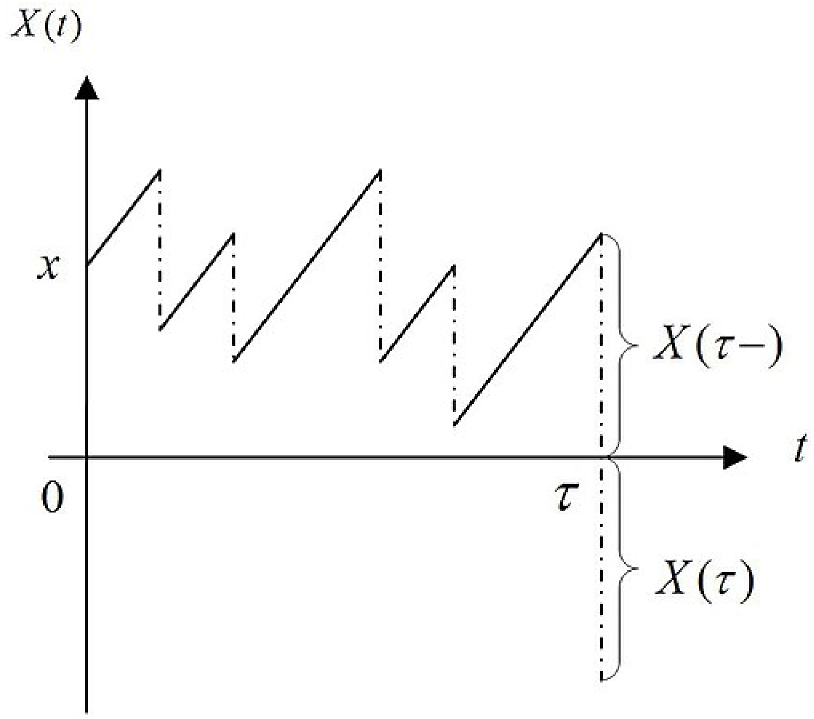
Jedan od osnovnih modela rizika je Cramér-Lundbregov model te se još naziva i složeni Poissonov proces rizika.

Definicija 2.1.1. *Cramér-Lundbregov proces rizika je proces* $\{X_t,\ t \geqq 0\}$ *definiran s*

$$X_t = u + at - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,\ t \geqq 0$$

pri čemu je $\{N_t,\ t \geqq 0\}$ *Poissonov proces s parametrom* $\lambda > 0$, *a* $(\xi_i,\ i \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih, jednako distribuiranih i pozitivnih slučajnih varijabli.*

Na sljedećoj slici je prikazana putanja složenog Poissonovog procesa.



Slika 2.1: Složeni Poissonov proces rizika

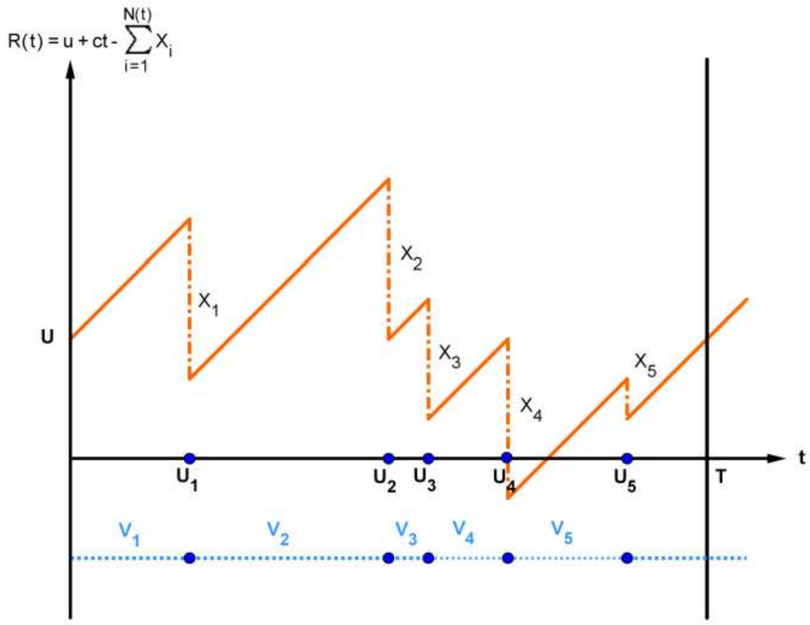
2.2 Iglehartov model procesa rizika

Kratko nakon objave Billingsleyevog utjecajnog djela temeljenog na teoriji slabe konvergencije, Iglehart(1969) definira proces rezerve rizika $\{R(t);\ t \in\ [0, T])\}$ na nekom vjerojanosnom prostoru:

$$R(t, \omega) = u + a \cdot t - \sum_{k=0}^{N(t,\omega)} X_k^{(n)}(\omega) \quad za\ n \geqq 1$$

gdje je:
(i) $u_n = u \cdot n^{1/2} + o(n^{1/2})$
(ii) $a_n\ =\ a \cdot n^{-1/2} + o(n^{-1/2})$
(iii) $E(X_k^{(n)}) = \mu \cdot n^{-1/2} + o(n^{-1/2}) = \mu_n > 0$
(iv) $Var(X_k^{(n)})\ =\ \sigma_n^2 \to \sigma^2$
(v) $E[(X_k^{(n)})^{2+\varepsilon}]$ je omeđeno u n za neki $\varepsilon\ >\ 0$

Na slici 2.2 vidimo prikaz Iglehartovog modela procesa rizika.



Slika 2.2: Iglehartov model procesa rizika

2.3 Teorem slabe konvergencije procesa rizika

Pretpostavljamo da se zahtjevi pojavljuju u skokovima procesa obnove $\{Y_i\}$ opisanog u Poglavlju 1 koji je također definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega,\mathscr{B},\mathscr{P})$. Konačno možemo definirati proces rezerve rizika $X_n(t)$ spomenutog u (1) i to tako da ćemo skalirati vremensku varijablu t faktorom n^{-1}. Dobivamo sljedeće:

$$X_n(t) = u_n + a_n \cdot nt - S^{(n)}_{N(nt)}, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

gdje je $N(t)$ proces brojanja kojeg smo definirali u Poglavlju 1 te vrijedi $S^{(n)}_0 = 0$ i $S^{(n)}_i = X^{(n)}_1 + X^{(n)}_2 + ... + X^{(n)}_i$. X_n je očito element prostora $D[0,1]$. Sada možemo dokazati glavni rezultat ovog poglavlja.

Teorem 2.3.1 (Iglehart)**.** *Ako je* $u_n = un^{1/2} + o(n^{1/2})$, $a_n = an^{-1/2} + o(n^{-1/2})$, $\mu_n = \mu n^{-1/2} + o(n^{-1/2})$, $\sigma^2_n \to \sigma > 0$ *i* $E[(X^{(n)}_i)^{2+\varepsilon}]$ *je omeđeno u n za neki* $\varepsilon > 0$, *tada je*

$$n^{-1/2}X_n \Rightarrow u + \Gamma + \sigma\lambda^{1/2}W$$

gdje je Γ *slučajna funkcija čija je vrijednost u trenutku t jednaka* $(a - \mu\lambda)t$.

Dokaz. Budući da vrijedi $E[n^{-1/2}S^{(n)}_{N(n\cdot)}] = n^{-1/2}N(n\cdot)\mu_n$, prema Teoremu 1.7.3. slijedi

$$n^{-1/2}[S^{(n)}_{N(n\ \cdot)} - \mu_n N(n\ \cdot)] \Rightarrow \sigma W \circ \Lambda$$

Sada vidimo da iz $n^{-1/2}X_n = n^{-1/2}(u_n + a_n \cdot nt - S^{(n)}_{N(nt)}) = n^{-1/2}(u_n + a_n \cdot nt - S^{(n)}_{N(nt)} - \mu_n N(n\ \cdot) + \mu_n N(n\ \cdot)\ ) \Rightarrow u + at - \mu\lambda t - \sigma W \circ \Lambda \overset{d}{=} u + (a - \mu\lambda)t + \sigma W \circ \Lambda$

slijedi

$$n^{-1/2}X_n \Rightarrow u + \Gamma + \sigma W \circ \Lambda$$

gdje je $\Gamma = (a - \mu\lambda)t$, a kako $\lambda^{1/2}W$ ima istu distribuciju kao i $W \circ \Lambda$, slijedi tvrdnja teorema.

$\square$

2.4 Slaba konvergencija stohastičkih procesa na polubeskonačnim intervalima

Neka je E potpuni separabilni metrički prostor s metrikom ρ. Označimo s D prostor svih funkcija $x(t)$ s vrijednostima u E na $[0,\infty)$ koje imaju lijevi limes i neprekidne su s desna. Na D definiramo topologiju J_1: kažemo da je niz $x_n(t)$ J_1- konvergentan prema $x(t)$ ako postoji niz neprekidnih injektivnih preslikavanja $\lambda_n(t)$ intervala $[0,\infty)$ na samoga sebe takav da za svaki $N > 0$

$$\sup_{0 \leqq t \leqq N} |\lambda_n(t) - t| \to 0 \ \ i \ \ \sup_{0 \leqq t \leqq N} \rho(x_n(t), x(\lambda_n(t))) \to 0 \ kada \ \ n \to \infty$$

Korolar 2.4.1. *Za neprekidnu funkciju $x(t)$, $x_n(t)$ konvergira prema $x(t)$ u J_1 topologiji ako i samo ako za svaki $N > 0$ vrijedi:*

$$\sup_{0 \leqq t \leqq N} \rho(x_n(t), x(t)) \to 0 \ kada \ \ n \to \infty$$

Neka su $X_n(t), \ n = 1, 2,...$ stohastički procesi čiji putevi se nalaze u D. Označimo s C skup svih funkcionala iz D takvih da:
(1) $f(X_n(\cdot))$ su slučajne varijable
(2) f je neprekidna u J_1 topologiji gotovo svuda u odnosu na mjeru na D

Definicija 2.4.2. *Konačno dimenzionalne distribucije procesa X su distribucije slučajnih vektora oblika $(X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_k})$ za $i_1, \ i_2, \ ..., \ i_k \geqq 0$.*

Teorem 2.4.3. *Niz $X_n(t)$ je slabo konvergentan prema $X_0(t)$ ako i samo ako*
(1) konačno dimenzionalne distribucije od $X_n(t)$ slabo konvergiraju prema konačno dimenzionalnim distribucijama od $X_0(t)$ kada $n \to \infty$ i
(2) za svaki $\epsilon > 0$ i $N > 0$

$$\lim_{n\to\infty; \ \epsilon\to 0} P\{ \sup_{|t_1 - t_2| \leqq \epsilon; \ 0 \leqq t_1 < t_2 \leqq N} \rho(X_n(t_1), \ X_n(t_2)) > \epsilon\} \ = \ 0$$

Primijetimo da su Teoremi 1.7.3. i 2.3.1. navedeni za slučajne elemente skupa $D[0,1]$. Sličnu teoriju možemo razviti za slučajne elemente skupa $D[0,N]$ koristeći metriku d_N koja je definirana kao d, ali na intervalu $[0,N]$. Topologiju je uveo Stone (1963) za prostor $D[0,\infty)$ koja zahtijeva konvergenciju za svaku metriku $d_n, \ N > 0$. Koristeći rezultate iz [3] koje je dao Stone (1963.) zajedno s nužnim i dovoljnim uvjetima za slabu konvergenciju koju je predstavio Skorokhod dobivamo da Teoremi 1.7.3. i 2.3.1. vrijede za prostor $D[0,\infty)$, odnosno da stohastički procesi su definirani za sve vrijednosti varijable $t \geqq 0$. U daljnjim razmatranjima podrazumijevat ćemo verziju Teorema 2.3.1. koja vrijedi za $D[0,\infty)$.

Poglavlje 3

Distribucija funkcionala graničnog procesa

Glavni učinak funkcionalnih centralnih graničnih teorema iz Poglavlja 2 je taj što oni omogućavaju dobivanje graničnih teorema za velike klase funkcionala, a u ovom poglavlju ćemo detaljnije razmotriti koji su to teoremi, što će nas dovesti do konačnog rezultata. Teorija kolektivnog rizika se poglavito bavi funkcionalima koji predstavljaju ukupnu imovinu osiguravajućeg društva u trenutku t i trenutku propasti T_n. Označavat ćemo ih s $X_n(t)$, a od posebne važnosti bit će nam vjerojatnosti propasti za procese rizika.

3.1 Vrijeme propasti

Postavlja se pitanje postoji li neki vremenski trenutak u kojem do tada naplaćene premije zajedno s inicijalnim kapitalom neće biti dostatne za pokrivanje svih dotadašnjih ostvarenih šteta. U tom slučaju govorimo o propasti osiguravatelja. Očito je kako bi u tom trenutku t vrijedilo upravo $X_n(t) < 0$ pa stoga propast definiramo kao događaj

$$\{X_n(t) < 0,\ \textit{za neki } t > 0\}$$

Primijetimo da ovako definirana propast u praksi ne znači nužno i stvarnu propast osiguravatelja, budući da je on u mogućnosti povisiti premije ukoliko se proces rizika previše približi nuli ili se gubitak u jednom portfelju može pokriti zaradom iz preostalih. Jednako tako moguće je da društvo ulaže imovinu pa se proces rizika mijenja i zbog prinosa na imovinu ili drugih prihoda. Od interesa je prvo pojavljivanje propasti, stoga uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 3.1.1. *Vrijeme T_n kada proces rizika prvi puta poprimi vrijednost manju od nule naziva se vrijeme propasti:*

$$T_n \ = \ \inf\{t > 0 : \ X_n(t) \leqq 0\}$$

kada skup $\{t > 0 : \ X_n(t) \leqq 0\}$ nije prazan skup.

Napomena 3.1.2. *Uočimo kako slučajna varijabla T_n ne mora nužno biti realna slučajna varijabla, tj. moguće je da T_n poprimi vrijednost ∞ s pozitivnom vjerojatnošću, odnosno da se propast nikada ne realizira.*

Definicija 3.1.3. *Vjerojatnost propasti s obzirom na početni kapital u i stopu uplata premija a dana je izazom*

$$\psi(u_n, a_n) = P(X_n(t) < 0, \ \textit{za neki } t > 0 \,|X_n(0) = u_n) \ = \ P(T_n \ < \ \infty)$$

Ono što osiguravatelj želi jest držati vjerojatnost propasti na što nižoj vrijednosti ili barem ispod neke određene granice.Vjerojatnost propasti općenito je teško izračunati. Tek za određene oblike distribucija šteta poznati su eksplicitni izrazi, dok se inače moramo zadovoljiti različitim aproksimacijama i asimptotskim ocjenama

Primjer 1. *Pretpostavimo da je u Cramér- Lundbergovom modelu distribucija iznosa šteta eksponencijalna s parametrom $\rho > 0$*

$$F(x) = 1 - e^{-\rho x}$$

tada se može pokazati da je vjerojatnost propasti dana izrazom

$$\psi(u, a) = \frac{\lambda}{a\rho} e^{-(\rho - \frac{\lambda}{c})u}$$

Primjer 2. *Pretpostavimo da je u Cramér- Lundbergovom modelu distribucija iznosa šteta Paretova s parametrima $\kappa > 0$ i $\alpha > 1$*

$$F(x) = 1 - (\frac{\kappa}{\kappa + x})^{\alpha}$$

i vrijedi

$$\rho = \frac{\lambda\kappa}{\alpha - 1}$$

tada se može pokazati da je vjerojatnost propasti dana izrazom

$$\psi(u, a) = \int_0^{\infty} \frac{\frac{\rho}{a}(1 - \frac{\rho}{a})x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha - 1)H(x, \alpha, a)} e^{-(1+\frac{u}{\kappa})x} dx$$

gdje su Γ *i H funkcije definirane s*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

$$H(x,\alpha,c) = \begin{cases} (1+(\alpha-1)\frac{\rho}{c}e^{-x}Ei_\alpha(x))^2 + (\pi\frac{\rho x^{\alpha-1}e^{-x}}{c\Gamma(\alpha-1)})^2, \ ako\ je\ \alpha = 2,3,... \\ (1-\frac{\rho}{c}R(x,\alpha-1))^2 + (\pi\frac{\rho x^{\alpha-1}e^{-x}}{c\Gamma(\alpha-1)})^2, \ ako\ je\ \alpha > 1\ i\ \alpha \neq 2,3,.. \end{cases}$$

pri čemu je

$$Ei_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\left(\gamma + lnx - \sum_{i=1}^{\alpha-1}\frac{1}{i}\right) + \sum_{i=0, i\neq\alpha-1}^{\infty}\frac{x^i}{(i-\alpha+1)i!}, \ \alpha\in\mathbb{N},$$

$$R(x,\alpha) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{(\alpha-1)...(\alpha-i)} - \frac{\pi u^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}cot(\pi\alpha), \ \alpha\notin\mathbb{N}$$

Prethodni rezultati objavljeni su u [8] i [9].

3.2 Vjerojatnost propasti

Definirajmo sada projekciju π_t: $D[0,\infty) \to \mathbb{R}$ koja je definirana kao $\pi_t(x) = x(t)$. Funkcija π_t je izmjeriva i neprekidna gotovo svuda u odnosu na mjeru na skupu $D[0,\infty)$ koja odgovara $u + \Gamma + \sigma\lambda^{1/2}W$.
Primjenom Teorema 1.2.4. dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 3.2.1. *Ako je* $u_n = un^{1/2} + o(n^{1/2})$, $a_n = an^{-1/2} + o(n^{-1/2})$, $\mu_n = \mu n^{-1/2} + o(n^{-1/2})$, $\sigma_n^2 \to \sigma > 0$ *i* $E[(X_i^{(n)})^{2+\varepsilon}]$ *je omeđeno u n za neki* $\varepsilon > 0$, *tada je*

$$\lim_{n\to\infty}\mathscr{P}\{n^{-1/2}X_n(t) \leqq x\} = P\{u + (a-\mu\lambda)t + \sigma\lambda^{1/2}W(t) \leqq x\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2\lambda t)^{1/2}}\int_{-\infty}^{x}\exp\{-\frac{(y-[u+(a-\lambda\mu)t])^2}{2\sigma^2\lambda t}\}dy$$

Napomena 3.2.2. *Iz graničnog teorema možemo zaključiti da je slučajna varijabla* $n^{-1/2}X_n(t)$ *asimptostki normalna s očekivanjem* $u + (a-\lambda\mu)t$ *i varijancom* $\sigma^2\lambda t$

Ako sada opet razmotrimo problem propasti. Možemo definirati slučajnu varijablu T na sljedeći način:

$$T = \inf\{t > 0 : u + (a - \lambda\mu)t + \sigma\lambda^{1/2}W(t) \leqq 0\}$$

ako je pripadni skup neprazan. Definiramo preslikavanje τ: $D[0,\infty) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\tau(x) = \inf\{t > 0 : x(t) \leqq 0\}$ ako skup nije prazan. Funkcija τ je izmjeriva i neprekidna gotovo svuda u odnosu na mjeru na skupu $D[0,\infty)$ koja odgovara $u + \Gamma + \sigma\lambda^{1/2}W$. Sada možemo ponovo primijeniti Teorem 1.2.4.

Teorem 3.2.3. *Ako je* $u_n = un^{1/2} + o(n^{1/2})$, $a_n = an^{-1/2} + o(n^{-1/2})$, $\mu_n = \mu n^{-1/2} + o(n^{-1/2})$, $\sigma_n^2 \to \sigma > 0$ *i* $E[(X_i^{(n)})^{2+\varepsilon}]$ *je omeđeno u n za neki* $\varepsilon > 0$*, tada je*

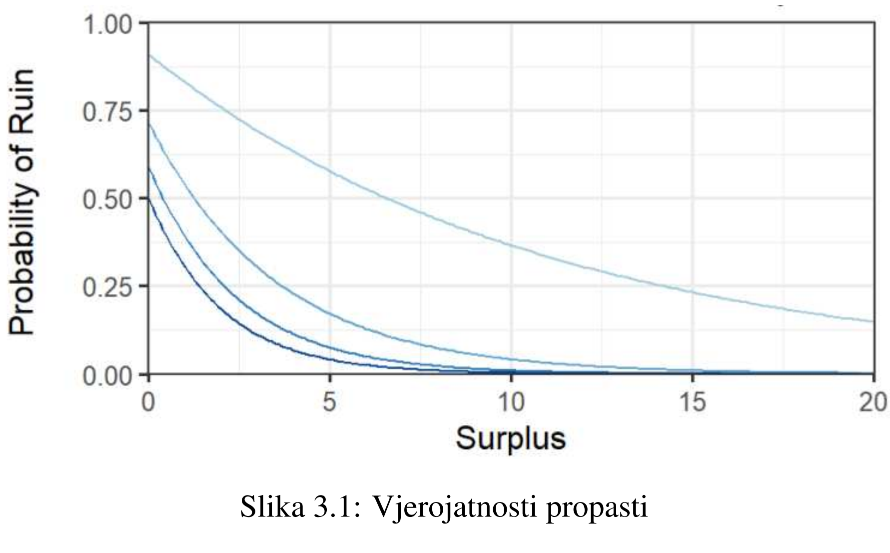
$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{P}\{T_n \leqq t\} = Pr\{T \leqq t\}$$

a gustoća f_T *od slučajne varijable* T *dana je izrazom:*

$$f_T(t) = \frac{c^{-1}e^{-bc}}{(2\pi)^{1/2}}t^{-3/2}\exp\{-\frac{1}{2}[c^2t^{-1} + (bc)^2t]\},\ t > 0$$

gdje su $b = \frac{a-\lambda\mu}{\sigma\lambda^{1/2}}$ *i* $c = \frac{u}{\sigma\lambda^{1/2}}$

Na slici 3.1 možemo vidjeti realizacije funkcije $t \mapsto P(T \leq t)$ za $\lambda = 1$ u ovisnosti o parametru a.



Slika 3.1: Vjerojatnosti propasti

Korolar 3.2.4. ***Vjerojatnost krajnje propasti*** *graničnog procesa je dana izrazom*

$$Pr\{T < \infty\} = \exp\{-2bc\}$$

Napomena 3.2.5. *Funkciju gustoće slučajne varijable T i vjerojatnost propasti možemo dobiti Laplaceovim transformacijama distribucije vremena propasti koje su razvili Darling i Siegert(1953) u [4].*

Sličnim metodama može se razviti granični teorem za distribuciju kada $X_n(t)$ dosegne određenu razinu pod uvjetom da se propast nije dogodila. Tada bismo promatrali vrijeme prvog prelaska razine $b > 0$, $T = \sup\{t > 0 : X_n(t) > b\}$.
Teoremi 3.2.1. i 3.2.3. imaju najveću važnost u teoriji kolektivnog rizika jer daju eksplicitne izraze za granično ponašanje distribucije procesa rizika te za distribuciju vremena propasti za velike n.

Bibliografija

[1] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[2] Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, V. Schmidt, Jozef L. Teugels, Stochastic Processes for Insurance and Finance, John Wiley and Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 1999.

[3] C. Stone, Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals. Proc. Amer. Math. Soc., 1963., 14, str. 694-696.

[4] D. Darling i A. Siegert, The first passage time problem for a continuous Markov process. Ann. Math. Statist., 1953., 24, str. 624-639.

[5] Boris Guljaš, Metrički prostori, Osijek , 2010.

[6] T. Ligget, i B. Rosen, A note on the correspondence between weak convergence in the function spaces C[0, 1] and D[0, 1]. To appear., 1968.

[7] V. Wagner, Financijsko modeliranje 2, PMF-MO, Zagreb, 21. lipnja 2022.

[8] C.M. Ramsay, A solution to the ruin problem for Pareto distributions, Insurance: Mathematics and Economics vol. 33(1) (2003), 109-116

[9] S. Asmussen, H. Albrecher, Ruin probabilities, World Scientific, Singapore, 2010.

[10] I. Karatzas, S.E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, New York, 1991., str. 66-67.

Sažetak

Glavni cilj ovog rada je predstaviti procese rizika i granično ponašanje njihove distribucije te distribuciju vremena propasti. Na početku uvodimo osnovne pojmove poput metričkih prostora, konvergencije po distribuciji te konvergencije po vjerojatnosti. Zatim razmatramo pojam Brownovog gibanja, odnosno Wienereovog procesa te Wienerove mjere. Također, bavimo se osnovnim konceptima teorije obnove koji su važni za konstruiranje procesa rizika. Nadalje, dajemo neke najpoznatije modele procesa rizika: Cramér-Lundbergov i Iglehartov model rizika te navodimo i dokazujemo teorem o graničnoj distribuciji procesa rizika. Na kraju, u trećem poglavlju dajemo eksplicitne izraze za granično ponašanje distribucije procesa rizika i distribuciju vremena propasti što je ujedno i glavni rezultat teorije kolektivnog rizika.

Summary

The main goal of this master thesis is to present the risk processes and the limiting behavior of their distribution and the distribution of their ruin time. At the beginning, we recall the notion of basic terms such as metric spaces, convergence in distribution and convergence in probability. We then discuss the concept of Brownian motion, i.e. Wiener process and Wiener measure and recall some standard results from the standard renewal theory. Furthermore, we present some of the most classical risk process models: Cramér-Lundberg and Iglehart's risk model, and state and prove the limiting distribution theorem for the risk process. Finally, in the third chapter, we give explicit expressions for the limiting behavior of the distribution of the risk process and distribution of the ruin time, which are the main result of the collective risk theory.

Životopis

Rođena sam 11. listopada 1997. godine u Zagrebu. Godine 2012. upisujem matematičku V. gimnaziju u Zagrebu. Nakon završetka, 2016. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovnom-matematičkom fakultetu u Zagrebu te završavam 2020. godine. Iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij smjer Financijske i poslovne matematike.