Zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi

Strejček, Hana

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:094379

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-23**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Hana Strejček

ZLATNI REZ I FIBONACCIJEVI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marija Galić

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Diplomski rad posvećujem svom djedu.
Zahvaljujem se mentorici na vodstvu i pomoći pri izradi ovog rada.
Zahvaljujem se svojoj obitelji i prijateljima na potpori tijekom cijelog obrazovanja.
Zahvaljujem se svim kolegama na pomoći tijekom studiranja.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Zlatni rez **2**
1.1 Povijest zlatnog reza 2
1.2 Osnovna svojstva zlatnog reza 7
1.3 Zlatni rez u geometriji 13
1.4 Zlatni rez svuda oko nas 25

2 Fibonaccijevi brojevi **30**
2.1 Povijest 30
2.2 Problem zečeva i definicija 31
2.3 Binetova formula 32
2.4 Identiteti Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva 34
2.5 Kombinatorna interpretacija 44
2.6 Fibbonacijevi brojevi i zlatni rez 50

Bibliografija **55**

Uvod

Zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi stoljećima su privlačili pažnju matematičara, umjetnika, arhitekata i filozofa.

Zlatni rez, označen grčkim slovom Φ, simbol je sklada, ravnoteže, ljepote i savršenstva. Nađen je u mnogim umjetničkim djelima, a zapravo je riječ o vrlo zanimljivom, "mističnom" iracionalnom broju $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jedinstveno svojstvo zlatnog reza prvo je razmatrano u kontekstu dijeljenja dužine na dva segmenta. Ako je dužina podijeljena tako da je omjer ukupne duljine prema duljini duljeg segmenta jednak omjeru duljine duljeg segmenta prema duljini kraćeg segmenta, onda je ovaj omjer jednak zlatnom rezu. Zbog toga mnogi zlatni rez vežu isključivo uz područje geometrije, no to je daleko od istine. Jedan od takvih primjera su upravo Fibonaccijevi brojevi.

Fibonaccijevi brojevi, tj. Fibonaccijev niz, je niz brojeva u kojemu je svaki član zbroj dva prethodna člana. Naziv su dobili prema slavnom talijanskom matematičaru Leonardu iz Pise koji je živio u 12. stoljeću. Prvi put su opisani u dvanaestom poglavlju Fibonaccijevog djela *Liber Abaci* što uključuje poznati "problem zečeva". *Ako uzgajivač počne s parom mladih zečeva, mužjaka i ženke, koliko će parova zečeva biti na kraju jedne godine?*. Zbog svoje posebnosti Fibonaccijevi brojevi su bili predmet istraživanja mnogih matematičara.

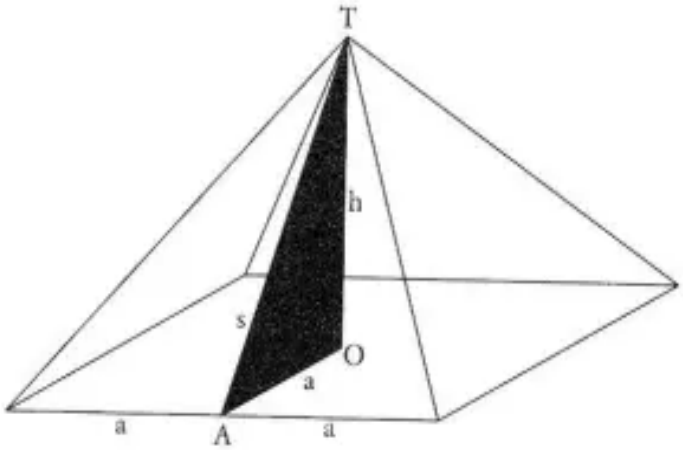
Fibonaccijevi brojevi su usko vezani uz zlatni rez, međutim to na prvu nije potpuno jasno. Ovaj diplomski rad će biti posvećen upravo tome. U prvom poglavlju dat ćemo povijesni pregled zlatnog reza, opisati njegova osnovna svojstva, definirati i opisati neke geometrijske likove koji nose pridjev zlatni te pokazati gdje se u našoj okolini nalazi zlatni rez. U drugom poglavlju opisat ćemo kako su nastali Fibonaccijevi brojevi, a time i Lucasovi, dokazat ćemo neke njihove identitete, opisati kombinatornu interpretaciju Fibonaccijevih brojeva i pokazati da omjer Fibonaccijevog broja i njegovog prethodnika teži k zlatnom rezu.

Poglavlje 1

Zlatni rez

1.1 Povijest zlatnog reza

Nitko sa sigurnošću ne može reći kada se prvi put pojavio zlatni rez u povijesti ljudske civilizacije. Najstariji primjer je pronađen u blizini Kaira u Keopsovoj piramidi u Gizi. Piramida je izgrađena oko 2560. godine prije Krista i najstarija je od tri piramide u Gizi. Otac povijesti Herodot je u svojem slavnom djelu *Povijesti* naveo kako je Keopsova piramida konstruirana tako da je kvadrat njezine visine jednak površini bočnog trokuta. Zapišimo Herodotovu tvrdnju matematički (vidi Sliku 1.1):



Slika 1.1: Keopsova piramida

$$h^2 = \frac{2a \cdot s}{2} = as. \tag{1.1}$$

Primijenimo li Pitagorin teorem

$$h^2 = s^2 - a^2 \tag{1.2}$$

iz (1.1) i (1.2) slijedi

$$s^2 - a^2 = as. \tag{1.3}$$

Sređivanjem jednadžbe dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 - \frac{s}{a} - 1 = 0.$$

Uvođenjem supstitucije $x = \frac{s}{a}$ dobivamo

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

a njeno pozitivno rješenje je

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

koje se naziva zlatni rez.

Hemiunu, arhitekt piramide, koristio je dimenzije čiji omjeri daju zlatni rez za estetsku ljepotu strukture. Međutim, to je mogla biti slučajnost. Nitko ne može biti potpuno siguran. Tijekom godina arheolozi su proučavali sve što se može proučavati o ovoj piramidi, uključujući i mjere vanjskih dimenzija. Dimenzije piramide iskazane su u laktima (1 lakat $\approx$ 0.4572 metara) što je bila mjerna jedinica u to vrijeme. Označimo s a stranicu baze, h visinu piramide i sa s visinu pobočke. Omjer visine

Slika 1.2: Dimenzije Keopsove piramide u laktima

pobočke i polovine duljine brida baze približno je jednak vrijednosti zlatnog reza.

$$\frac{s}{\frac{a}{2}} = \frac{356}{200} \approx 1.6181818...$$

Sljedeću pojava zlatnog reza u povijesti bilježimo u djelima Fidije (grč. Phidias), grčkog kipara odgovornog za izgradnju Partenona u Ateni, izgrađenog u 5. stoljeću prije Krista. Sam dizajn hrama i skulpture odražavaju zlatni rez. Tu se spominje pojam zlatnog pravokutnika o kojem ćemo nešto više saznati u poglavlju *Zlatni rez u geometriji*. Drevni Grci su zlatni rez označavali grčkim slovom τ, ali se često označava i grčkim slovom F (ϕ) što dolazi od prvih slova imena Phidias.

Slika 1.3: Partenon

Iako ove strukture imaju dimenzije koje su u skladu sa zlatnim omjerom, temeljno razmišljanje koje je pridonijelo današnjem razumijevanju zlatnog reza nalazi se u radu Platona i njegovih učenika iz 4. stoljeća pr. Kr. Platon je bio zainteresiran za objašnjenje kako svemir funkcionira i kako je nastao. Pretpostavio je da je materija strukturirana od pet pravilnih čvrstih tijela: tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar. Platon i njegovi učenici smatrali su da su zemlja, voda, zrak i vatra četiri osnovna elementa materije. Tvrdili su da svaki od ovih elemenata odgovara jednom od čvrstih tijela. Zemlja se povezivala s kockom, vatra s tetraedrom, zrak s oktaedrom, a voda s ikosaedrom. Budući da nije bilo elementa koji bi se mogao pripisati dodekaedru, neki od Platonovih sljedbenika smatrali su da bi mogao postojati kozmički peti element koji prožima svu materiju. Iz tog su razloga matematičari bili fascinirani s pet Platonovih tijela. Svako od pet Platonovih tijela ima dimenzije koje su povezane sa zlatnim rezom.

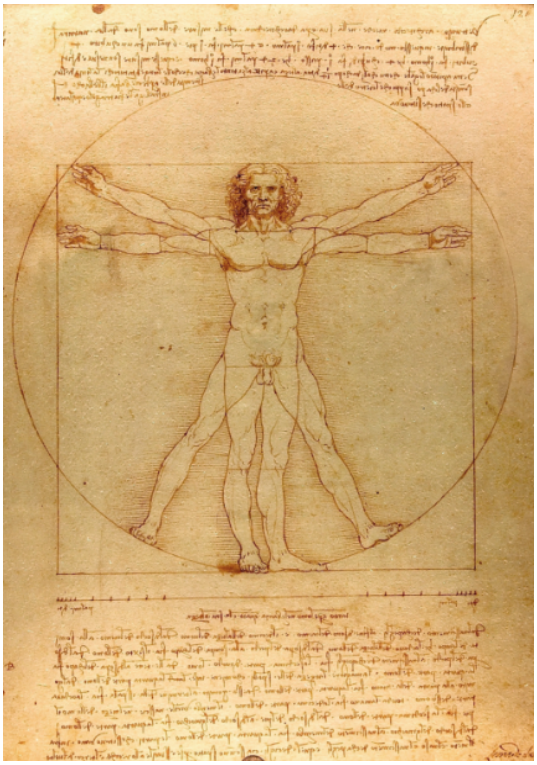
Zanimanje za zlatni rez koje su poticali Platon i njegovi suradnici dovelo je do njegove prve definicije. Prvu definiciju zlatnog reza nalazimo u poznatom djelu *Elementima* (djelo koje sadrži gotvo što je svijet znao o matematici u to vrijeme). Ovo djelo napisao je oko 300. godine prije Krista grčki matematičar Euklid. U jednom od tih svezaka, Euklid daje prvo pisano objašnjenje o tome kako pronaći ono što danas nazivamo zlatnim rezom. On opisuje segment linije koji je presječen na takav način da je omjer cijelog segmenta prema većem dijelu jednak omjeru većeg dijela prema manjem dijelu. Euklid ovaj segment naziva "ekstremnim i srednjim omjerom". Euklid je upotrijebio ovaj opis da pokaže kako se omjer može pronaći unutar mnogih geometrijskih oblika, kao što su peterokuti.

Sljedeća osoba u nizu onih koji su ušli u povijest sa zlatnim rezom bio je slavni Fibonacci. Ovaj matematičar odigrao je važnu ulogu u arapskom decimalnom sustavu koji je zamijenio upotrebu rimskih brojeva u Europi. Otkrio je neobičan skup brojeva, koji se upravo po njemu zove Fibonaccijev niz, iako se pretpostavlja da nije bio svjestan da taj niz brojeva ima veze s Φ. Φ je iracionalan broj, što znači da omjer niti jedna dva cijela broja neće dati njegovu vrijednost. No, kako ćemo kasnije pokazati, kada n raste, omjer svakog člana Fibonaccijevog niza i njegovog prethodnika sve se više približava Φ.

Otprilike 1487. godine Leonardo da Vinci stvorio je poznatog *Vitruvijevog čovjeka*, na kojem je nacrtao sliku muškog tijela koje ima mjere koje su približno u zlatnom omjeru. Omjer je prikazan tako da ako se uzme udaljenost od vrha glave do pupka i podijeli s udaljenošću od pupka do tabana muškarca, rezultat je 0.0656. Zanimljivo je da je Vitruvijev čovjek nacrtan unutar kruga i kvadrata koji se dodiruju u jednoj točki na dnu portreta. Da su gornji vrhovi kvadrata bili bliže krugu ili tangenti na njega, Da Vinci bi postigao zlatni rez.

Godine 1509. u knjizi De Divina Proportione (Božanska proporcija), koju je napisao franjevac i matematičar Fra Luca Pacioli, možemo naći pojam zlatni rez. Pacioli je konstruirao pet Platonovih tijela koristeći zlatni rez. Kao zaređeni franjevac, koji je studirao teologiju, Pacioli je djelo nazvao Božanska proporcija, jer je vjerovao da su svojstva ovog posebnog broja povezana s određenim Božjim karakteristikama i da ih izražavaju; stoga ovaj omjer u literaturi možemo naći i pod nazivom božanska proporcija.

Drugi naziv za božansku proporciju razvijen je 1830-ih. Njemački matematičar Martin Ohm napisao je knjigu pod nazivom Die Reine Elementar-Mathematik (Čista elementarna matematika) u kojoj je ostavio bilješku u kojoj kaže da se linija, koja je podijeljena na dva dijela na način kako je Euklid objasnio u Elementima, naziva zlatnim rezom. Iako korišteni jezik implicira da Ohm nije bio prva osoba koja je upotrijebila taj izraz u matematičkim krugovima, njemu se ipak pripisuje ta činjenica. Jedno je sigurno da se taj izraz počeo često koristiti u njemačkoj matematičkoj lite-



Slika 1.4: Da Vincijev prikaz čovjeka

raturi i literaturi o povijesti umjetnosti nakon što je Ohm objavio svoj rad.

1.2 Osnovna svojstva zlatnog reza

Geometrijska interpretacija

Definicija 1.2.1. *Kažemo da točka dijeli dužinu u zlatnom omjeru ako je omjer duljine cijele dužine prema većem dijelu jednak omjeru većeg dijela prema manjem dijelu, tj.*

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi. \tag{1.4}$$

Slika 1.5: Geometrijska interpretacija zlatnog reza

Promotrimo jednakost

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Promijenimo zapis desne strane

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$$

što je ekvivalentno

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}.$$

Kako su $a, b \neq 0$ duljine dužina, možemo pomnožiti cijelu jednadžbu s $\frac{a}{b}$. Sređivanjem dobivamo

$$\frac{a}{b}^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Uvedimo supstituciju $x = \frac{a}{b}$. Slijedi

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{1.5}$$

Dobivena jednadžba naziva se *Fibonaccijeva kvadratna jednadžba* ili *jednadžba zlatnog reza*, a njena rješenja su

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

i

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

S obzirom na to da govorimo o duljinama dužina, gledamo samo pozitivno rješenje. Stoga je

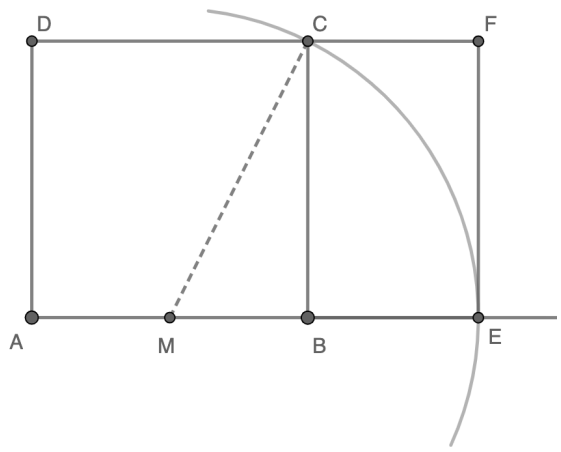
$$\frac{a}{b} = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi. \tag{1.6}$$

Postoji mnogo konstrukcija zlatnog reza, no ovdje ćemo nevesti samo jednu konstrukciju.

Konstrukcija zlatnog reza

Ova konstrukcija je jedna od najpoznatijih konstrukcija zlatnog reza. Napisat ćemo njezine korake i dokazati istinitost konstrukcije.

Konstruirajmo kvadrat $ABCD$ s proizvoljnom duljinom stranice (označimo duljinu stranice s a). Odredimo polovište stranice $\overline{AB}$ i označimo ga točkom M. Konstruirajmo kružni luk, u oznaci k, sa središtem u točki M i radijusom $|MC|$. Konstruirajmo polupravac s početnom točkom A koji prolazi točkom B (označimo polupravac s p). Kružni luk k siječe polupravac p u točki E te tvrdimo da točka B dijeli dužinu



Slika 1.6: Konstrukcija zlatnog reza

$\overline{AE}$ u zlatnom omjeru. U našem slučaju želimo dokazati da

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|AE|}{|AB|}. \tag{1.7}$$

Dokaz. Označimo s a duljinu stranice kvadrata $ABCD$. Primijenimo Pitagorin poučak na trokut ΔMBC:

$$|MC|^2 = |MB|^2 + |BC|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Iz toga slijedi $|MC| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Pogledajmo sada duljine dužina $\overline{BE}$ i $\overline{AE}$:

$$|BE| = |ME| - |MB| = |MC| - |MB| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

$$|AE| = |AB| + |BE| = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a.$$

Odredimo omjer $\frac{|AB|}{|BE|}$:

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi \tag{1.8}$$

i omjer $\frac{|AE|}{|AB|}$

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi. \tag{1.9}$$

Iz jednakosti (1.8) i (1.9) slijedi da je (1.7) istinita. □

Prije nego krenemo dalje, kratko ćemo promotriti pravokutnik $AEFD$. Omjer dviju susjednih stranica tog pravokutnika jednak je zlatnom rezu:

$$\frac{|AE|}{|EF|} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi. \tag{1.10}$$

Ovaj pravokutnik se naziva *zlatni pravokutnik*. Nešto više o zlatnom pravokutniku ćemo reći u poglavlju *Zlatni rez u geometriji*.

Numerička interpretacija

U prethodnom potpoglavlju smo pokazali da je zlatni omjer između a i b jednak $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$, gdje su a i b pozitivni brojevi. Rješavanjem jednadžbe $x^2 - x - x = 0$ dobili smo numeričku vrijednost zlatnog reza

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\approx 1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911374847540880753868917521266338622235369317931800607667263544333890865959395829056383226613199282902678806752087668925017116962070322210432162695486262963136144 3...$$

što je otprilike 1.61803. Promotrimo i vrijednost njegovog recipročnog broja

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\approx 0.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911374847540880753868917521266338622235369317931800607667263544333890865959395829056383226613199282902678806752087668925017116962070322210432162695486262963136144 3...$$

što je otprilike 0.61803. Možemo primijetiti jednu zanimljiv odnos. Razlika broja Φ i $\frac{1}{\Phi}$ iznosi točno 1. Dakle,

$$\Phi - \frac{1}{\Phi} = 1. \tag{1.11}$$

Iz recipročnosti operacije množenja vrijedi $\Phi \cdot \frac{1}{\Phi} = 1$. Dakle, razlika i produkt broja Φ i $\frac{1}{\Phi}$ jednaka je 1 i to su jedina dva broja za koje ova tvrdnja vrijedi.

Nakon što smo utvrdili brojčanu vrijednost zlatnog reza, pogledajmo sada neka njegova svojstava. Počnimo s razmatranjem iracionalnosti. Skup realnih brojeva dijelimo na racionalne i iracionalne brojeve. Kada su izraženi u decimalnom obliku, racionalni brojevi mogu biti konačni ili beskonačno periodični decimalni brojevi, dok za iracionalne brojeve to ne vrijedi. Također, racionalni brojevi se mogu izraziti kao kvocijenti dvaju cijelih brojeva, dok za iracionalne to ne vrijedi. Pokažimo istinitost sljedećeg teorema:

Teorem 1.2.2. *Broj Φ je iracionalan broj.*

Dokaz. Da bi dokazali da je broj Φ iracionalan dovoljno je pokazati da je $\sqrt{5}$ iracionalan. Pretpostavimo suprotno tj. da je $\sqrt{5}$ racionalan broj, tj. $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Tada postoje relativno prosti brojevi $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$, odnosno $\frac{m^2}{n^2} = 5$, a odatle dobijemo $m^2 = 5n^2$. Budući da je desna strana jednakosti prirodan broj koji je djeljiv s 5, tada je i m^2 djeljiv s 5. Tada je i m djeljiv s 5, tj. $m = 5m_0$ za neki $m_0 \in \mathbb{N}$. Kada bi bilo $m = 2m_0 + 1$, slijedilo bi $m^2 = 4{m_0}^2 + 4m_0 + 1$. Sad imamo $4{m_0}^2 = 2n^2$, odnosno $2{m_0}^2 = n^2$. Odatle pak zaključujemo da je i $n = 2n_0$ za neki $n_0 \in \mathbb{N}$. Dakle, $m = 2m_0$ i $n = 2n_0$ tj. dobili smo kontradikciju s pretpostavkom da su m i n relativno prosti. Time je dokazano da je $\sqrt{5}$ iracionalan, a time i da je Φ iracionalan. $\square$

Sljedeće svojstvo koje možemo promatrati su potencije broja Φ. Krenimo prvo s Φ^2. Kvadrirajmo izraz $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\Phi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{2} = \frac{2\sqrt{5}+6}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \Phi + 1.$$

Dakle,

$$\Phi^2 = \Phi + 1. \tag{1.12}$$

Iz ove jednadžbe možemo dobiti vrlo zanimljiv matematički izraz pomoću kojeg možemo izraziti broj Φ. Ako korjenujemo obje strane jednadžbe (1.12), dobivamo

$$\Phi = \sqrt{\Phi + 1}. \tag{1.13}$$

Ako u korijenu ponovno zamijenimo Φ s $\sqrt{\Phi+1}$, dobivamo da je $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{\Phi+1}}$. Ponavljanjem ovog postupka, dobivamo još jedan izraz za Φ :

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+....}}}}}}}$$

Pogledajmo još jednu važnu kvadratnu jednadžbu koja daje zanimljiva svojstva broju Φ. Ona glasi

$$x^2 + x - 1 = 0, \tag{1.14}$$

a njezina rješenja su $-\Phi$ i $\frac{1}{\Phi}$. S obzirom na to da $\frac{1}{\Phi}$ zadovoljava jednadžbu (1.14) vrijedi

$$\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 + \frac{1}{\Phi} - 1 = 0,$$

tj. možemo zapisati

$$\frac{1}{\Phi}^2 = 1 - \frac{1}{\Phi}. \tag{1.15}$$

Ponovno, ako korjenujemo obje strane jednadžbe (1.15), dobivamo

$$\frac{1}{\Phi} = \sqrt{1 - \frac{1}{\Phi}}.$$

Ako beskonačno puta pod korijenom zamijenimo $\frac{1}{\Phi}$ za $\sqrt{1-\frac{1}{\Phi}}$, dobivamo još jedan zanimljiv zapis pomoću broja $\frac{1}{\Phi}$:

$$\frac{1}{\Phi} = \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-...}}}}}}}, \tag{1.16}$$

što je još jedna zanimljiva veza Φ i $\frac{1}{\Phi}$.

Vratimo se natrag na potencije broja Φ. Ispišimo nekoliko potencija broja Φ:

$$
\begin{aligned}
&\Phi = \Phi \\
&\Phi^2 = \Phi + 1 \\
&\Phi^3 = \Phi^2 \cdot \Phi = \Phi(\Phi + 1) = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1 \\
&\Phi^4 = \Phi^2 \cdot \Phi^2 = (\Phi + 1)(\Phi + 1) = \Phi^2 + 2\Phi + 1 = (\Phi + 1) + 2\Phi + 1 = 3\Phi + 1 \\
&\Phi^5 = \Phi^3 \cdot \Phi^2 = (2\Phi + 1)(\Phi + 1) = 2\Phi^2 + 3\Phi + 1 = 2(\Phi + 1) + 3\Phi + 1 = 5\Phi + 3 \\
&\Phi^6 = \Phi^3 \cdot \Phi^3 = (2\Phi + 1)(2\Phi + 1) = 4\Phi^2 + 4\Phi + 1 = 4(\Phi + 1)4\Phi + 1 = 8\Phi + 5 \\
&\Phi^7 = \Phi^4 \cdot \Phi^3 = (3\Phi + 2)(2\Phi + 1) = 6\Phi^2 + 7\Phi + 2 = 6(\Phi + 1) + 7\Phi + 2 = 13\Phi + 8 \\
&\Phi^8 = \Phi^4 \cdot \Phi^4 = (3\Phi + 2)(3\Phi + 2) = 9\Phi^2 + 12\Phi + 4 = 9\Phi + 1) + 12\Phi + 4 = 21\Phi + 13 \\
&\Phi^9 = \Phi^5 \cdot \Phi^4 = (5\Phi + 3)(3\Phi + 2) = 15\Phi^2 + 19\Phi + 6 = 15(\Phi + 1) + 19\Phi + 6 = 34\Phi + 21 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Iz prethodnih potencija možemo primijetiti jedno ponavljajuće pravilo. Kvocijent uz Φ jednak je zbroju kvocijenata uz prethodne dvije potencije, slično vrijedi za slobodni član. Niz brojeva koji je definiran tako da je svaki član niza jednak zbroju prethodna dva člana, s početnim članovima 1 i 1, naziva se Fibonaccijev niz i o njemu će biti detaljnije u drugom dijelu diplomskog rada. Za sad je to dovoljno kako bi iskazali i dokazali sljedeće svojstvo zlatnog reza:

Teorem 1.2.3. *Potencije broja Φ možemo napisati kao*

$$\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}, \tag{1.17}$$

$n > 0$ i gdje su F_n i F_{n-1} n-ti i $(n-1)$-vi Fibonaccijevi brojevi.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

- **baza:** $n = 1$ tvrdnja (1.17) očito vrijedi.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja (1.17) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja (1.17) vrijedi za $n + 1$.

$$
\begin{aligned}
\Phi^{n+1} &= \Phi^n\Phi = (F_{n-1} + \Phi F_n)\Phi = \Phi F_{n-1}\Phi^2 F_n = \Phi F_{n-1} + (1 + \Phi)F_n \\
&= F_n + \Phi(F_{n-1} + F_n) = F_n + \Phi F_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. $\square$

1.3 Zlatni rez u geometriji

U ovom poglavlju ćemo predstaviti i opisati neke likove koji nose pridjev zlatni te iskazati neka njihova svojstva.

Zlatni pravokutnik i spirala

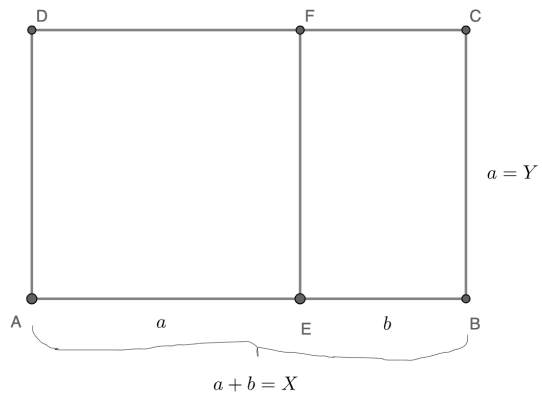
Zlatni pravokutnik je najpoznatiji zlatni lik te postoji nemali broj istraživanja koja pokazuju da je oblik zlatnog pravokutnika najugodniji ljudskom oku. Zlatni pravokutnik smo već spomenuli kod *Geometrijske interpretacije*, ali ćemo ga još jednom definirati.

Definicija 1.3.1. *Zlatni pravokutnik je pravokutnik čije su duljine dužina stranica u zlatnom omjeru.*

Za početak uvedimo oznake za duljine stranica zlatnog pravokutnika. Neka je X oznaka za duljinu, a Y oznaka za širinu. Prema (1.4) vrijedi

$$\frac{X}{Y} = \frac{X+Y}{X} = \Phi. \tag{1.18}$$

Radi lakšeg praćenja iskaza i dokaza vezanih uz zlatni pravokutnik uvest ćemo proizvoljan zlatni pravokutnik $ABCD$ kojemu je duljina $X = a + b$, a širina $Y = a$. Dakle, imamo omjer $\frac{X}{Y} = \frac{a+b}{a} = \Phi$ pa iz (1.4) slijedi $\frac{a}{b} = \Phi$. Ako zlatnom pravo-



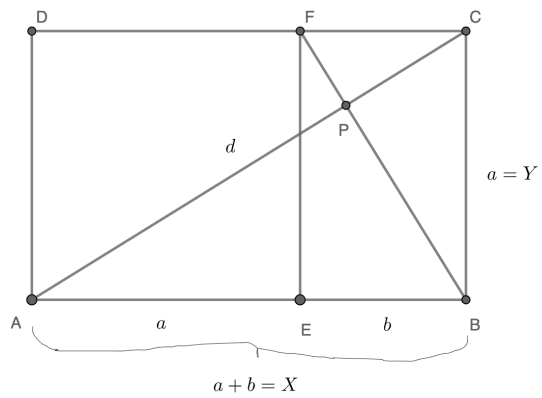
Slika 1.7: Zlatni pravokutnik

kutniku $ABCD$ odsiječemo kvadrat $AEFD$, ostaje pravokutnik $EBCF$. Taj pravokutnik je također zlatni pravokutnik jer su duljine stranica tog pravokutnika u omjeru $\frac{X}{Y} = \frac{a}{b} = \Phi$. U literaturi se točka E često naziva *zlatna točka* dužine $\overline{AB}$ jer je$\frac{|AE|}{|EB|} = \Phi$. Ovo svojstvo možemo zapisati na sljedeći način.

Teorem 1.3.2. *Kada od zlatnog pravokutnika odsiječemo kvadrat nad manjom stranicom, dobiveni pravokutnik je zlatni.*

Uočimo, ovaj postupak rastavljanja zlatnog pravokutnika na kvadrat i manji zlatni pravokutnik možemo ponoviti bekonačno mnogo puta.

Zlatni rez se pojavljuje u različitim kombinacijama i odnosima kod zlatnog pravokutnika. Krenut ćemo od dijagonale zlatnog pravokutnika.



Slika 1.8: Dijagonala zlatnog pravokutnika

Teorem 1.3.3. *Omjer duljine dijagonale, duljine i širine zlatnog pravokutnika iznosi* $\sqrt{\Phi^2+1} : \Phi : 1$.

Dokaz. Krenimo od pravokutnika $ABCD$. Duljinu dijagonale d možemo izraziti koristeći Pitagorin teorem:

$$d^2 = (a+b)^2 + a^2 = 2a^2 + 2ab + b^2. \tag{1.19}$$

Izrazimo odnose duljina dijagonala i stranica trokuta:

$$\frac{d^2}{a^2} = 2 + 2\cdot\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} = 2 + 2\cdot\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} = 2 + 2(\Phi-1) + (\Phi-1)^2 = \Phi^2+1,$$
$$\frac{d^2}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2+a^2}{(a+b)^2} = 1 + \frac{a^2}{(a+b)^2} = 1 + \frac{1}{\Phi^2}.$$

Korjenujemo li izraze dobivamo:

$$\frac{d}{a} = \sqrt{\Phi^2+1}$$
$$\frac{d}{a+b} = \sqrt{1+\frac{1}{\Phi^2}} = \sqrt{\Phi^2+1}\cdot\frac{1}{\Phi} = \frac{d}{a}\cdot\frac{1}{\Phi}.$$

Iz navedenih jednakosti slijedi

$$d : (a + b) : a = \sqrt{\Phi^2 + 1} : \Phi : 1 \tag{1.20}$$

te je time tvrdnja dokazana. □

Pogledajmo što je s površinama. Usporedimo površine zlatnog pravokutnika $ABCD$ i kvadrata $AEFD$:

$$\frac{P_{ABCD}}{P_{AEFD}} = \frac{a(a+b)}{a^2} = \frac{a+b}{a} = \Phi.$$

Na isti način možemo usporediti površine kvadrata $AEFD$ i zlatnog pravokutnika $EBCF$:

$$\frac{P_{AEFD}}{P_{EBCF}} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b} = \Phi.$$

Zapišimo pokazano svojstvo kao teorem.

Teorem 1.3.4. *Omjer površina zlatnog pravokutnika i kvadrata nad manjom stranicom tog pravokutnika jednak je Φ.*

Možemo usporediti i površine dva zlatna pravokutnika $ABCD$ i $EBCF$:

$$\frac{P_{ABCD}}{P_{EBCF}} = \frac{a(a+b)}{ab} = \frac{a+b}{a} = \frac{a+b}{\frac{a}{\Phi}} = \frac{a+b}{a} \cdot \Phi = \Phi^2. \tag{1.21}$$

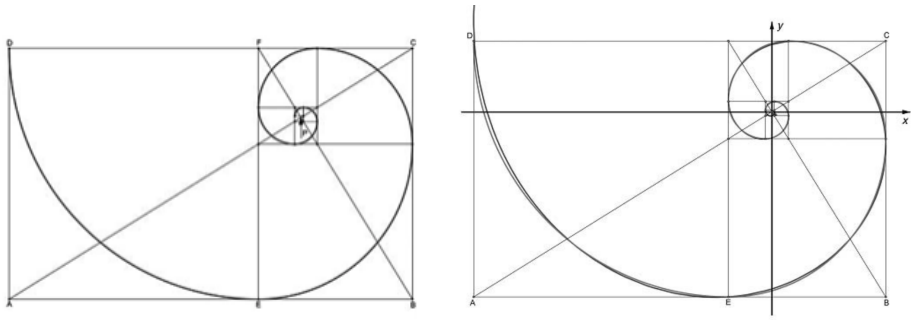
Primjećujemo da u svim omjerima površina omjer možemo izraziti pomoću Φ.

Vratimo se na Teorem 1.3.2. Uočili smo da postupak rastavljanja zlatnog pravokutnika na kvadrat i manji zlatni pravokutnik možemo ponoviti beskonačno mnogo puta. Ako u svakom kvadratu konstruiramo četvrtinu kruga, dobit ćemo dobru aproksimaciju spirale. Bitno je za primijetiti da spirala nikad ne dostiže točku P. Na slici vidimo da je najveće odstupanje uočljivo u velikom kvadratu.

Definicija 1.3.5. *Zlatna spirala je poseban slučaj logaritamske spirale čiji je faktor rasta Φ, tj. zlatna spirala se udaljava od centra za Φ za svaku četvrtinu zaokreta koju napravi.*

Logaritamska spirala u polarnim koordinatama (r, θ) ima zapis $r(\theta) = ae^{b\theta}$, gdje je $\theta \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \neq 0$, a e baza prirodnog logaritma.

Zlatna spirala ima jednak zapis logaritamskoj, ali se razlikuje s obzirom na vrijednost b. Iz definicije znamo da je faktor rasta za četvrtinu zaokreta, odnosno za svakih $90°$, jednak Φ. Slijedi $e^{b\theta} = \Phi$, gdje je $\theta = 90°$. Iz prethodne jednadžbe možemo



(a) Aproksimacija spirale pomoću zlatnih pravokutnika

(b) Zlatna i logaritamska spirala (preuzeto iz [10])

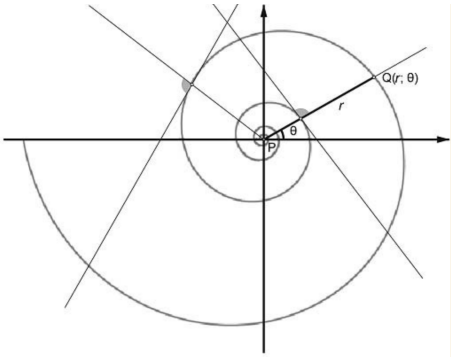
Slika 1.9: Zlatni spirala

izraziti: $b = \frac{\ln \Phi}{\theta}$. Uočimo da vrijednost b ovisi mjerimo li kut θ u radijanima ili stupnjevima, a kako kut može imati pozitivan i negativan smjer, najlakše je zapisati formulu za $|b|$, pa ona u slučaju stupnjeva iznosi:

$$|b| = \frac{\ln \Phi}{90^\circ} = \frac{\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{90^\circ} \approx 0.0053,$$

a u slučaju radijana iznosi:

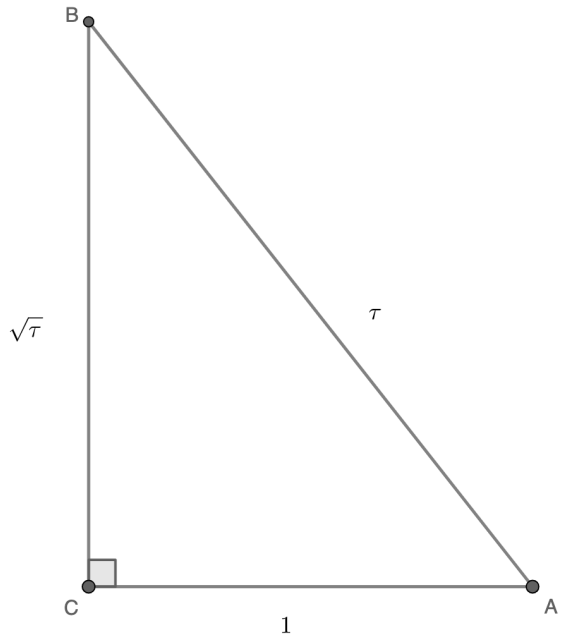
$$|b| = \frac{\ln \Phi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{\frac{\pi}{2}} \approx 0.3063.$$



Slika 1.10: Logaritamska spirala (preuzeto iz [10])

Zlatni trokut i spirala

Zlatni trokut je još jedan geometrijski lik kod kojeg se, u različitim omjerima, pojavljuje broj Φ. Kod *Numeričke interpretacije* pokazali smo čemu su jednake potencije broja Φ, npr. $\Phi^2 = 1 + \Phi$. Kada bolje promotrimo, ovu jednadžbu možemo interpretirati kao Pitagorin poučak u pravokutnom trokutu s katetama duljine 1 i $\sqrt{\Phi}$ te hipotenuzom duljine Φ. Takav trokut naziva se *Keplerov trokut*. Valja naglasiti i da



Slika 1.11: Keplerov trokut

vrijedi i općenitiji slučaj, tj. $a = r, b = r\sqrt{\Phi}, c = r\Phi$, $r > 0$.

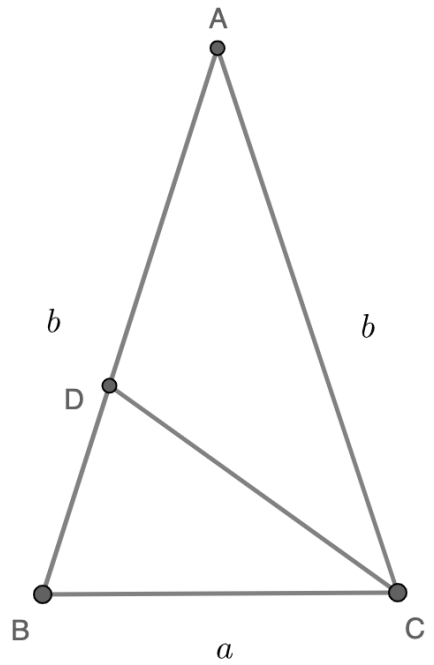
No, ovaj trokut ne smatramo zlatnim trokutom. Zlatni trokut definiramo na sljedeći način.

Definicija 1.3.6. *Zlatni trokut je jednakokračni trokut kojemu je omjer duljine kraka i osnovice jednak zlatnom rezu.*

Neka je a duljina osnovice i b duljina katete jednakokračnog trokuta. Prema Definiciji 1.3.6 znamo da je tada

$$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Opišimo sad neka od svojstava zlatnog trokuta.



Slika 1.12: Zlatni trokut

Teorem 1.3.7. *Neka je ΔABC zlatni trokut s osnovicom $\overline{BC}$. Neka točka D dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru, pri čemu $|AD| > |BD|$. Tada $\overline{CD}$ raspolavlja $\angle BCA$. Vrijedi i obrat, ako $\overline{CD}$ raspolavlja $\angle BCA$, onda točka D dijeli dužinu $\overline{AC}$ u zlatnom omjeru.*

Dokaz. Krenimo od onog što je zadano, točka D dijeli $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru tj.

$$|AD| = \Phi \cdot |BD|. \tag{1.22}$$

Iz $|AB| = |AD| + |BD|$ i prethodne jednakosti slijedi

$$|AB| = \Phi^2 \cdot |BD|.$$

Prema Definiciji 1.3.6 i prethodnoj jednakosti

$$|BC| = \Phi \cdot |BD|. \tag{1.23}$$

Prema $S - K - S$ teoremu o sličnosti trokuta, ΔABC i ΔBCD su slični. Dakle, ΔBCD je jednakokračan s krakovima duljine

$$|CD| = |BC| = \Phi \cdot |BD|$$

i $\angle CAB = \angle DBC$. Iz (1.22) i (1.23) slijedi $|AD| = |BC|$, tj. ΔADC je jednakokračan pa vrijedi

$$\angle DCA = \angle CAB = \angle BCD.$$

Dakle, time smo dokazali jedan smjer teorema $\angle DCA = \angle BCD$.

Pogledajmo obrat. ΔBCD i ΔABC su očito slični. Vrijedi $\frac{b}{a} = \frac{a}{|BD|} = \Phi$ pa iz tog slijedi

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{b}{b - |BD|} = \Phi.$$

Dakle, točka D dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru. □

Teorem 1.3.8. *Jednakokračni trokut je zlatni ako i samo ako su mu kutovi veličine* $36°, 72°, 36°$.

Dokaz. Neka je ΔABC zlatni trokut. Prema Teoremu 1.3.7 ΔBCD je jednakokračan, a dužina $\overline{CD}$ raspolavlja $\angle ACB$. Neka je α veličina kuta $\angle BAC$, a β veličina kutova $\angle ABC$ i $\angle ACB$. Tada je $\angle DCB = \frac{\beta}{2}$. Prema teoremu o zbroju veličina unutarnjih kutova trokuta u ΔBCD dobivamo

$$\frac{\beta}{2} + 2\beta = 180°,$$

odnosno $\beta = 72°$. Također, primjenom teorema o zbroju veličina unutarnjih kutova trokuta za ΔABC dobivamo

$$2\beta + \alpha = 180°,$$

tj. $\alpha = 36°$. Time je dokazan jedan smjer.

Krenimo obratno. Neka je ΔABC jednakokračan s kutovima $\angle ABC = \angle ACB = 72°$ i $\angle CAB = 36°$. Neka dužina $\overline{CD}$ raspolavlja $\angle ABC$. Tada je ΔBCD jednakokračan te $|BC| = |CD| = |AD|$. ΔABC i ΔBCD su slični te

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{|BD|}. \tag{1.24}$$

Uvrstimo li $|BD| = |AB| - |AD| = b - a$ u (1.24) dobivamo

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b - a},$$

što možemo zapisati kao $\frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{b}{a} - 1}$. Time smo dobili jednadžbu zlatnog reza čije pozitivno rješenje je

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Time je dokazano da je ΔABC zlatni. □

Pogledajmo kako možemo duljine stranica zlatnog trokuta izraziti pomoću zlatnog reza. Prema Slici 1.12 neka je $|BC| = a, |AB| = |AC| = b$ i $|BD| = c$. ΔABC je zlatni pa vrijedi $\frac{b}{a} = \Phi$, a b možemo zapisati kao $a + c$, dakle dobivamo $\frac{b}{a} = \frac{a+c}{a} = \Phi$. ΔBCD je također zlatni pa slijedi $\frac{a}{c} = \Phi$. Dakle, iz svih ovih jednakosti vrijedi

$$\frac{b}{a} = \frac{a+c}{a} = \frac{a}{c} = \Phi. \tag{1.25}$$

Algebarskim manipulacijama jednakosti (1.25) možemo izraziti stranice zlatnog trokuta preko Φ i stranice c

$$\begin{aligned} a &= \Phi \cdot c, \\ b &= \Phi \cdot a = \Phi^2 \cdot c, \end{aligned}$$

ili stranice a

$$\begin{aligned} b &= \Phi \cdot a, \\ c &= \frac{1}{\Phi} \cdot a, \end{aligned}$$

ili stranice b

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Phi} \cdot b, \\ c &= \frac{1}{\Phi^2} \cdot b. \end{aligned}$$

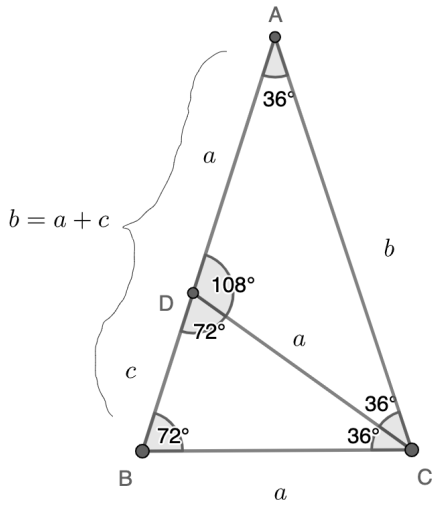
Na Slici 1.13 možemo primijetiti i još jedan zanimljivi trokut ΔCAD. On se naziva *zlatni gnomon*, a definira se na sljedeći način:

Definicija 1.3.9. *Zlatni gnomon je tupokutan jednakokračan trokut kojemu je omjer duljine kraka i osnovice jednak* $\frac{1}{\Phi}$.

Primijetimo, veličine kutova tog trokuta su $36°, 108°, 36°$.

Pogledajmo što je s površinama zlatnih trokuta, tj. može li se i u ti omjerima naći zlatni omjer. Površinu trokuta možemo izračunati pomoću formule

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma. \tag{1.26}$$



Slika 1.13: Zlatni trokut i zlatni gnomon

Pomoću Slike 1.13 izrazimo površine trokuta:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}b^2 \sin 36^\circ = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{b^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{\Phi^2+1}}{\Phi},$$

$$P_{BCD} = \frac{1}{2}a^2 \sin 36^\circ = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{\Phi^2+1}}{\Phi},$$

$$P_{CAD} = \frac{1}{2}a^2 \sin 108^\circ = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\Phi^2+1}.$$

Postavimo površine u omjere:

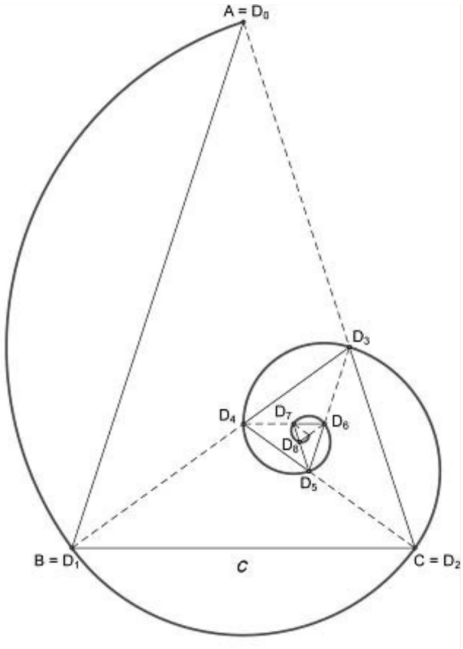
$$P_{ABC} : P_{BCD} = \frac{\frac{b^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{\Phi^2+1}}{\Phi}}{\frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{\Phi^2+1}}{\Phi}} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 \cdot \Phi^2}{a^2} = \Phi^2,$$

$$P_{ABC} : P_{CAD} = \frac{\frac{b^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{\Phi^2+1}}{\Phi}}{\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\Phi^2+1}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\Phi} = \frac{a^2 \cdot \Phi^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\Phi} = \Phi,$$

$$P_{CAD} : P_{BCD} = \frac{\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{\Phi^2+1}}{\frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{\Phi^2+1}}{\Phi}} = \Phi.$$

Uočimo da smo dobili da je omjer površina zlatnih trokuta jednak Φ. Također, ako stavimo u omjer površine sva tri trokuta dobit ćemo da je $P_{ABC} : P_{CAD} : P_{BCD} = \Phi : 1 : \Phi^2$.

Još jedna zanimljiva činjenica zlatnog trokuta je da iz njega možemo dobiti zlatnu spiralu. Neka je ΔABC zlatni trokut, pri čemu su $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ krakovi, a $\overline{BC}$ osnovica. Simetrala kuta $\angle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D_1. ΔBCD_1 je zlatni. Ponovimo postupak za ΔBCD_1. Simetrala kuta $\angle BCD_1$ siječe dužinu $\overline{BD_1}$ u točki D_2. ΔCD_1D_2 je ponovno zlatni. Ovaj postupak možemo ponoviti beskonačno mnogo puta. Točke koje smo dobili A, B, C, D_1 i D_2 i koje bi dobili ponavljanjem ovog postupka pripadaju zlatnoj spirali.



Slika 1.14: Zlatni trokut i spirala

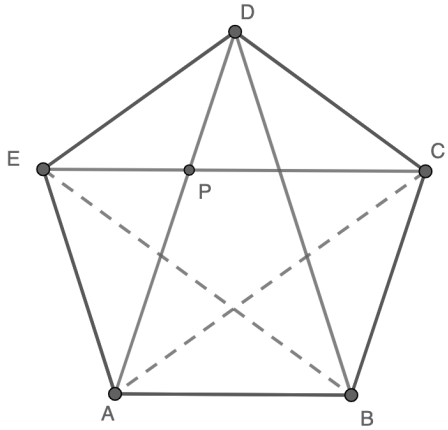
Zlatni peterokut

Zlatni peterokut je svaki pravilni peterokut. Definirajmo pravilni peterokut.

Definicija 1.3.10. *Pravilni peterokut je peterokut kojemu su sve stranice jednake duljine i svi kutovi jednake veličine.*

Iskažimo i dokažimo dva svojstva pravilnog peterokuta.

Teorem 1.3.11. *Svake dvije dijagonale pravilnog peterokuta, koje se sijeku u unutarnjoj točki, podijeljene su tom točkom u omjeru zlatnog reza.*



Slika 1.15: Pravilni peterokut

Dokaz. Da bismo dokazali istinitost ove tvrdnje dovoljno je pokazati da točka P dijeli dijagonale $\overline{EC}$ i $\overline{AD}$ u zlatnom omjeru.
Krenimo od nekih svojstava pravilnog peterokuta. $AB||EC$ i $BC||AD$ te iz toga slijedi da je četverokut $ABCP$ romb i vrijedi

$$|AP| = |BC| = |DE|. \tag{1.27}$$

Prema $S - K - S$ teoremu o sukladnosti trokuta, ΔADE i ΔACB su sukladni te vrijedi

$$|AD| = |AC|. \tag{1.28}$$

Iz (1.27) i (1.28) slijedi

$$\frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|AC|}{|DE|}. \tag{1.29}$$

Prema $K - K$ teoremu o sličnosti trokuta, ΔDEP i ΔACP su slični te slijedi

$$\frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|AP|}{|DP|}. \tag{1.30}$$

Iz (1.29) i (1.30) slijedi $\frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|DP|}$ tj. točka P dijeli dijagonalu $\overline{AD}$ u zlatnom omjeru. □

Teorem 1.3.12. *Omjer duljina dijagonala i stranica pravilnog peterokuta je zlatan.*

Dokaz. Prema Definiciji 1.3.9 ΔABC je zlatni gnomon te vrijedi

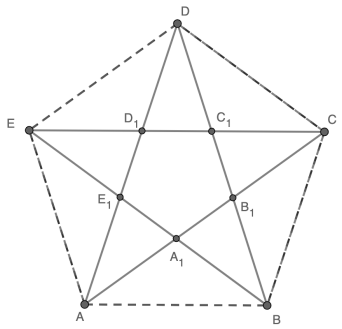
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{\Phi},$$

tj. $\frac{d}{a} = \Phi$ pri čemu je d duljina dijagonale, a a duljina stranice pravilnog peterokuta. $\square$

Spajanjem svih dijagonala dobit ćemo pentagram sa zanimljivim svojstvima.

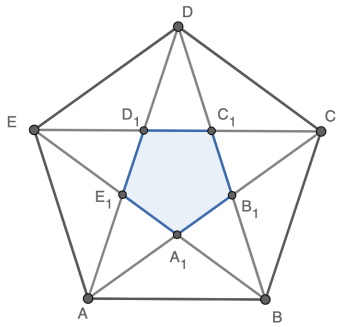
Definicija 1.3.13. *Pentagram je nekonveksan peterokut dobiven spajanjem dijagonala pravilnog peterokuta.*

Pentagram su Pitagorejci koristili kao tajni identifikacijski simbol. Jedan od članova Hipas iz Metapontuma (oko 450. godine pr. Kr.) je otkrio da se omjer duljine dijagonale i duljine stranice pravilnog peterokuta ne može prikazati kao omjer dva cijela broja. Ovo se smatra jednim od prvih koraka prema danas dobro poznatom skupu iracionalnih brojeva. Naime, Pitagorejci su smatrali da se sve može prikazati pomoću cijelih brojeva te su zbog toga ovo otkriće dugo skrivali.



Slika 1.16: Pentagram

Pogledajmo još jednu zanimljivost. Ako pažljivo promotrimo sjecišta dijagonala, možemo primijetiti da ćemo opet dobiti zlatni peterokut $(A_1B_1C_1D_1E_1)$.

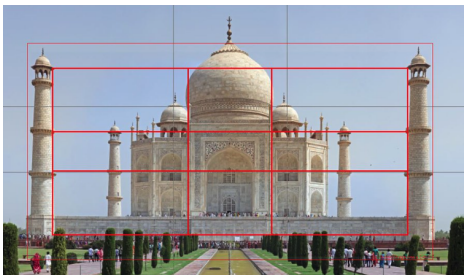


Slika 1.17: Zlatni peterokut

1.4 Zlatni rez svuda oko nas

Umjetnost

Mnogi umjetnici vjeruju da matematika igra ulogu u onome što doživljavamo kao estetski ugodno i lijepo. Za zlatni pravokutnik zapaženo je da ima estetsko svojstvo koje ga čini ugodnim ljudskom oku. Profesor na Sveučilištu Duke, Adrian Bejan tvrdi da za to postoji evolucijski razlog. Smatra da ljudsko oko može interpretirati slike koje imaju zlatni rez brže od ostalih. Njegov argument je da životinje i ljudi, imaju vid koji je horizontalne orijentacije. U divljini opasnost dolazi s leđa ili s bočne strane jedinke. To objašnjava zašto naše oči učinkovitije prikupljaju informacije kada skeniraju s jedne na drugu stranu umjesto gore-dolje. Također, tvrdi da naša prirodna sklonost promatranja svijeta objašnjava zašto umjetnici, svjesno ili nesvjesno, teže crtanju i izradi stvari koje su u skladu sa zlatnim pravokutnicima. Zbog toga su mnogi umjetnici koristili zlatne pravokutnike za uokvirivanje cijelih umjetničkih djela ili kao osnovu za strukturiranje kreacije kako bi se postigao osjećaj ravnoteže i sklada proporcija. Međutim, postoji poteškoća u određivanju jesu li neki primjeri umjetnosti koji se prilagođavaju zlatnom pravokutniku namjerni ili ne. Na primjer, iako se Partenon uklapa u zlatni pravokutnik, ne može se dokazati da je to bila namjera arhitekta jer nema dokumentacije. U slučajevima kao što je ovaj, sve što možemo je pitati se koliko se često zlatni rez pojavljuje u stvarima koje stvaramo. Navest ćemo neka umjetnička djela kod kojih možemo pronaći zlatni omjer.



(a) Taj Mahal

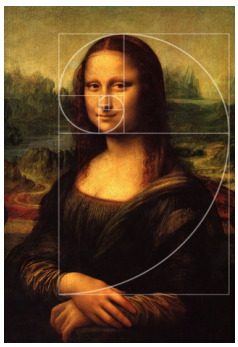
(b) CN toranj u Torontu

Slika 1.18: Zlatni omjer u arhitekturi

Zlatni omjer prevladava u antičkoj i modernoj arhitekturi. Stvaranje hrama božice

Atene, već spomenutog Partenona, rezultat je zajedničkih napora arhitekata i kipara antičke Grčke. S pravom se smatra najvećim spomenikom starogrčke arhitekture. Glavni uzrok ljepote Partenona je izvrsna harmonija njegovih dijelova temeljena na zlatnom omjeru. Glavna zgrada *Taj Mahala* je još jedan spomenik u arhitekturi s primjenom zlatnog omjera. Pravokutnici koji su služili kao temeljni obrisi eksterijera zgrade su u zlatnom omjeru. Zlatni omjer nalazimo i u katedrali Notre Dame u Parizu. Visina zgrade je otprilike 1.6 puta širina fasade. U modernijoj arhitekturi zlatni omjer možemo naći kod CN tornja u Torontu. Omjer vidikovca na 342 metra prema ukupnoj visini od 553.33 je 0.618 ili $\frac{1}{\Phi}$.

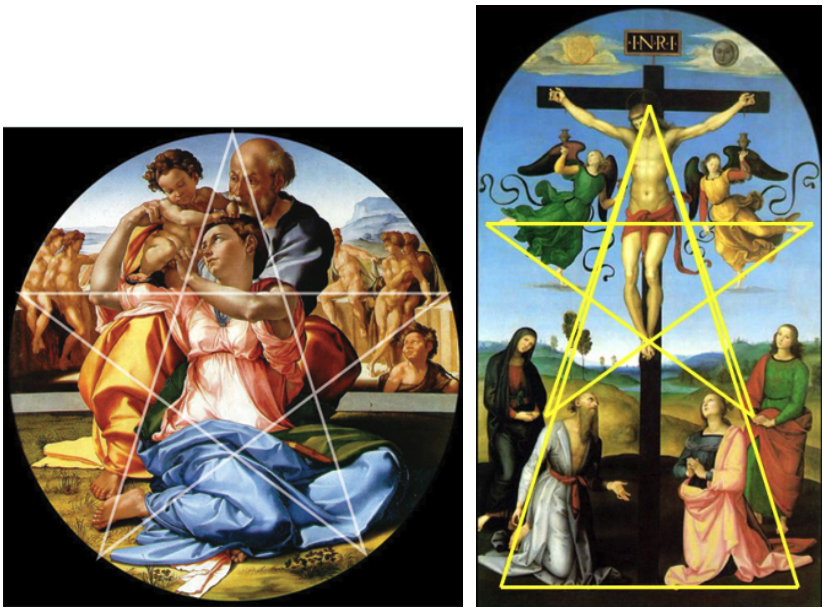
Istražujući remek-djela svjetske umjetnosti, kritičari su otkrili široku primjenu zlatnog omjera kod mnogih poznatih umjetnika. Prvi za spomenuti je slavni Da Vinci. Zlatni omjer prevladava u mnogim njegovim djelima: *Navještenje, Djevica i Dijete sa sv. Anom, Mona Lisa i Sveti Jeronim. Mona Lisa* je poznati portret žene sa stidljivim osmijehom te detaljnom analizom slike možemo pronaći zlatne pravokutnike. Također, tu je i već spomenuti *Vitruvijev čovjek*, kroz kojeg da Vinci pokušava pokazati savršenstvo ljudskog tijela u svim božanskim omjerima. Zlatni



Slika 1.19: Mona Lisa

trokut i pentagram možemo naći u kompoziciji nekoliko poznatih slika kao što je Michelangelova *Doni tondo (Sveta obitelj)* i Rafaelova *Gavari (Raspeće)*. Salvador Dali koristio je zlatni pravokutnik kao okvir za djelo *Sakrament Posljednje večere*. Kip Atene u staroj Grčkoj i skulptura Apolona s "Belvederea" također ilustriraju korištenje zlatnog omjera. Zlatni omjer prisutan je u brojnim portretima, slikama kršćanskog Boga i skulpturama u epohi renesanse.

Stoga, ukoliko arhitekt ili slikar želi unijeti uravnotežene proporcije u bilo koji od elemenata svoje strukture, valja posegnuti za zlatnim omjerom.



(a) Doni tondo (Sveta obitelj) (b) Gavari (Raspeće)

Slika 1.20: Zlatni omjer u umjetnosti

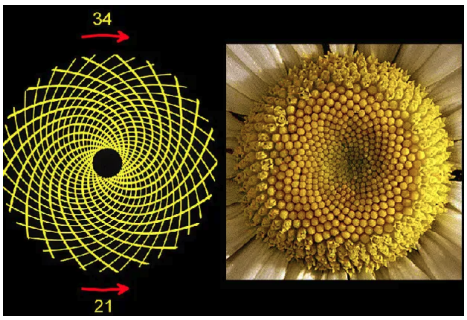
Priroda

Najjednostavniji primjer Φ u prirodi je kod rasta biljaka. Filotaksija je naziv za način na koji biljke raspoređuju lišće na stabljici, kao i mehanizme koji upravljaju tim procesom. Ovaj je mehanizam toliko raširen u biljkama da su matematičari i botaničari počeli koristiti taj izraz za opisivanje ponavljajućeg rasporeda latica, sjemenki, cvjetova i u nekim slučajevima grana. Nakon proučavanja mnogih cvjetova, primijetili su da većina vrsta ima Fibonaccijev broj za broj latica. Ljiljan ima 3 latice, lukovičasti žabnjak ima 5 latica, neven ima 13 latica, a tratinčice 34, 55 ili 89 latica. To vrijedi za mnoga cvijeća, ali postoje iznimke. Međutim, općenito govoreći većina cvjetnica koristi Fibonaccijeve brojeve za broj latica.

Biljke također koriste ovaj proces za postavljanje lišća. Raspored lišća je važan jer biljke trebaju dobiti optimalnu količinu sunčeve svjetlosti i vode. Kako biljka raste prema gore, tako lišće raste u pravilnim razmacima koji potječu iz stabljike. Ako se ti intervali sastoje od redovitih cijelih brojeva od 360 (kružni put oko stabljike), tada bi se listovi preklapali i blokirali sunčevu svjetlost i nešto vlage iz lišća ispod njega. Dijeljenje $360°$ s Φ daje kut koji osigurava optimalnu udaljenost između uzastopnih listova; $225.5°$ (ili $135.5°$, ovisno o tome na koji se način mjeri rotacija). Obično se koristi mjera od $135.5°$ budući da je manja od $180°$ i naziva se zlatni kut. Kada biljke

koriste ovaj kut kao interval između uzastopnih listova, tada je razmak optimiziran za maksimalnu učinkovitost u prikupljanju svjetla i vlage.

Sličan proces možemo naći i kod slaganja sjemena na glavici cvijeta. Obično se sjemenke proizvode u središtu, a zatim migriraju prema van kako bi ispunile sav prostor. Suncokreti su izvrstan primjer ovih spiralnih uzoraka. U nekim slučajevima, glavice sjemena su tako zbijene da ukupni broj može biti prilično visok, čak 144 ili više. A kada se broje te spirale, ukupan zbroj teži podudaranju s Fibonaccijevim brojem. To je najučinkovitiji način za slaganje sjemena na cvijetu bez gubitka prostora.



Slika 1.21: Suncokret i zlatni omjer

U prirodi ima mnogo primjera zlatnih spirala. Kućice puževa i indijska lađica prate zlatnu spiralu, kao i pužnica unutarnjeg uha. Također se može vidjeti u rogovima nekih koza, te obliku pojedinih paukovih mreža.

(a) Puževa kućica

(b) Rog

Slika 1.22: Zlatni omjer u prirodi

Zlatni omjer prisutan je i u građi ljudskog tijela. Ako je pupak postavljen tako da je omjer duže polovice prema kraćoj polovici jednak omjeru cjeline prema dužoj polovici, tijelo je u zlatnom omjeru sa "savršenim skladom". Omjer podlaktice i

dlana također je u zlatnom omjeru. Pokazano je da se ljudsko lice u potpunosti temelji na zlatnom omjeru. Konkretno, glava tvori zlatni pravokutnik s očima na njegovoj sredini. Usta i nos su postavljeni na zlatnim presjecima udaljenosti između očiju i donjeg dijela brade.

Čak i u mikroskopskom području možemo naći zlatni rez. Molekula DNK mjeri 34 angstrema (1 angstrem = 10^{-10}m) dužine i 21 angstrema širine za svaki puni ciklus svoje dvostruke spiralne zavojnice. Ovi brojevi, 34 i 21, brojevi su u Fibonaccijevom nizu, a njihov omjer 1.6190476 vrlo je približan Φ, 1.6180339. Ova tvrdnja bit će dokazana u sljedećem poglavlju.

Poglavlje 2

Fibonaccijevi brojevi

2.1 Povijest

Fibonacci je rođen oko 1170. godine u Pisi u Italiji. U literaturi ga možemo pronaći pod imenima Leonardo Bonacci, Leonardo Pisano, Leonardo iz Pise.

U vrijeme njegova rođenja, Pisa je bila središte trgovine i trgovanja. Fibonaccijev otac, Guglielmo je bio trgovac i putovao je diljem Sredozemlja. Guglielmo je vodio Fibonaccija na sjevernu obalu Afrike kako bi naučio vještine ključne za posao trgovca. Fibonacci je tamo naučio hindu-arapske brojeve $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Važno je napomenuti da su se u tadašnjoj Europi koristili isključivo rimski brojevi. Zadivljen hindu-arapskim brojevima Fibonacci piše svoje slavno djelo *Liber Abaci*. U njemu su opisani hindu-arapski brojevi, razrađene metode računanja te opisani primjeri. Dvanaesto poglavlje djela *Liber Abaci* uključuje poznati tzv. "problem zečeva": *Ako uzgajivač počne s parom mladih zečeva, mužjaka i ženke, koliko će parova zečeva biti na kraju jedne godine?*. Upravo iz tog problema su nastali Fibonaccijevi brojevi. Najveći Fibonaccijev doprinos matematici je promjena brojeva u Europi iz rimskih u arapske, međutim najpoznatiji je po Fibonaccijevim brojeva. Sam naziv dodijelio im je francuski matematičar Eduard Lucas (1842. – 1891.) gotovo 600 godina nakon Fibonaccijeve smrti. On je jedan od najzaslužnijih za sustavno proučavanje Fibonaccijevih brojeva.

2.2 Problem zečeva i definicija

Krenut ćemo s već spomenutim slavim dvanaestim poglavljem knjige *Liber Abaci*. Problem se vrti oko uzgoja zečeva. Ako uzgajivač počne s parom mladih zečeva, mužjaka i ženke, koliko će parova zečeva biti na kraju jedne godine? Kako bi se uklonila slučajnost, problem slijedi tri pretpostavke:

- Svaki novorođeni par, ženka i mužjak, sazrijeva u roku od mjesec dana i zatim ima potomke.
- Zreli par dobiva potomke početkom svakog mjeseca, što rezultira novorođenim parom, žensko i muško.
- Niti jedan zec ne umire u prvoj godini.

Počevši od jednog novorođenog para, raspodjela zečeva za svaki mjesec je sljedeća:

Mjesec	Novorođeni parovi	Odrasli parovi	Ukupno
Siječanj	1	0	1
Veljača	0	1	1
Ožujak	1	1	2
Travanj	1	2	3
Svibanj	2	3	5
Lipanj	3	5	8
Srpanj	5	8	13
Kolovoz	8	13	21
Rujan	13	21	34
Listopad	21	34	55
Studeni	34	55	89
Prosinac	55	89	144

Općenito, broj ukupnih parova u danom mjesecu (nazovimo n) jednak je zbroju novorođenih i odraslih parova. Broj odraslih parova u n-tom mjesecu jednak je broju ukupnih parova prethodnog mjeseca $n-1$. Broj novorođenih parova jednak je broju odraslih parova prethodnog mjeseca $n-1$, a broj odraslih parova prethodnog mjeseca $n-1$ jednak je broju ukupnih parova mjeseca $n-2$. Dakle, broj ukupnih parova u n-tom mjesecu jednak je zbroju ukupnih parova $(n-1)$-og i $(n-2)$-og mjeseca.

Definicija 2.2.1. *Niz (F_n) zadan početnim vrijednostima $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, te rekurzivnom relacijom*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{2.1}$$

za sve $n \geq 2$ naziva se ***Fibonaccijev niz****. Opći član niza F_n još zovemo n-ti* ***Fibonaccijev broj****.*

Dakle, broj parova na kraju godine jednak je $F_{12} = 144$. Pravilo (2.1) možemo primijeniti i "unatrag": $F_0 = F_2 - F_1 = 0, F_{-1} = F_1 - F_0 = 1, F_{-2} = F_0 - F{-1} = -1$ itd. Ako za $n \geq 2$ definiramo

$$F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n, \tag{2.2}$$

onda se lako provjeri da relacija (2.1) vrijedi za sve cijele brojeve n.

Kao što smo spomenuli u prethodnom poglavlju, uz Fibonaccijeve brojeve često vežemo i Lucasove brojeve.

Definicija 2.2.2. *Niz (L_n) zadan početnim vrijednostima $L_1 = 2$, $L_2 = 1$, te rekurzivnom relacijom*

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \tag{2.3}$$

za sve $n \geq 2$ naziva se ***Lucasov niz****. Opći član niza L_n još zovemo n-ti* ***Lucasov broj****.*

2.3 Binetova formula

Recimo da želimo izračunati stoti Fibonaccijev broj F_{100}. Malo je vjerojatno da poznajemo vrijednost F_{98} i F_{99}, iako bi njihovo pronalaženje bilo izvodljivo, nije praktično. Stoga, postavljamo pitanje postoji li eksplicitna formula za Fibonaccijeve brojeve? Krenimo od osnovne relacije

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1}. \tag{2.4}$$

Ovo je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda, s konstantnim koeficijentima (općenitiji slučaj $X_{n+1} = aX_n + bX_{n-1}$). Rješenje ove jednadžbe potražit ćemo u obliku $X_n = \lambda^n$, gdje je $\lambda \neq 0$ zasad neodređeni broj. Razlog za ovu pretpostavku je jednostavan: uvijek postoji rješenje tog oblika. Uvrštavajući $X_n = \lambda^n$ u (2.4) dobivamo

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1}. \tag{2.5}$$

S obzirom na to da je $\lambda \neq 0$, pripadna *karakteristična jednadžba* glasi:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0. \tag{2.6}$$

Ovu jednadžbu smo već nekoliko puta susreli. To je Fibonaccijeva kvadratna jednadžba ili jednadžba zlatnog reza, a njena rješenja su

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi}. \tag{2.7}$$

Opća rješenja rekurzije (2.4) izgledaju ovako:

$$X_n = A{\lambda_1}^n + B{\lambda_2}^n, \text{ ako } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Odnosno u našem slučaju

$$F_n = A\Phi^n + B\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n. \tag{2.8}$$

A i B se određuju iz početnih uvjeta, $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$ no radi jednostavnosti umjesto F_2 koristimo vrijednost $F_0 = F_2 - F_1$ te dobivamo:

$$A + B = 0, \quad A\Phi - B\frac{1}{\Phi} = 1.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo $B = -A$ te uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo

$$A\left(\Phi - \frac{1}{\Phi}\right) = 1.$$

Kako je $\Phi + \frac{1}{\Phi} = \sqrt{5}$, tada

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{2.9}$$

Uvrstimo li (2.8) sve što smo izračunali dobivamo *Binetovu* formulu:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right], \tag{2.10}$$

tj.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{2.11}$$

S obzirom na to da Lucasovi brojevi zadovoljavaju istu rekurziju, tada oni imaju istu karakterističnu jednadžbu. Stoga je $L_n = C{\lambda_1}^n + D{\lambda_2}^n$. Uvrstimo $n = 1$ i $n = 2$, tada:

$$C\lambda_1 + D\lambda_2 = 1, \quad C{\lambda_1}^2 + D{\lambda_2}^2 = 3.$$

Sređivanjem danog sustava dobivamo da je $C = D = 1$. Dakle,

$$L_n = \Phi^n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n. \tag{2.12}$$

Ako zbrojimo jednadžbu (2.12) i jednadžbu (2.11) pomnoženu s $\sqrt{5}$ dobivamo još jednu jednadžbu za potenciju broja Φ:

$$\Phi^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}. \tag{2.13}$$

Vratimo se na Binetovu formulu (2.11). Na primjer, želimo izračunati $F_{20} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[{\lambda_1}^{20} - {\lambda_2}^{20}\right] = 6765$. Ako bolje pogledamo $\frac{{\lambda_1}^{20}}{\sqrt{5}} \approx 6765.0000296$, $\frac{\lambda_2^{20}}{\sqrt{5}}$ služi samo radi zaokruživanja broja na najbliži cijeli broj. S obzirom da znamo da je F_{20} cijeli broj, onda zaokruživanje možemo izvesti sami. Razlog za ovako različite uloge λ_1 i λ_2 je to što $\lambda_1 \approx 1.618033989 > 1$, a $|\lambda_2| \approx 0.61803398 < 1$ pa je funkcija ${\lambda_1}^n$ rastuća, a $|\lambda_2|^n$ padajuća.

Propozicija 2.3.1. *Vrijedi:*

$$F_n = \left\lfloor \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \; n \in \mathbb{N},$$
$$L_n = \left\lfloor \Phi^n + \frac{1}{2} \right\rfloor, \; n \geq 2.$$

Dokaz. Budući da je $F_n = \frac{{\lambda_1}^n}{\sqrt{5}} - \frac{{\lambda_2}^n}{\sqrt{5}}$ i $L_n = {\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n$, a F_n i L_n su prirodni brojevi, dovoljno je dokazati da je $\frac{|{\lambda_2}^n|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ za $n \in \mathbb{N}$, te $|{\lambda_2}^n| < \frac{1}{2}$ za $n \geq 2$. No, kako je funkcija $|{\lambda_2}^n|$ padajuća, dovoljno je prvu nejednakost provjeriti za $n = 1$, a drugu za $n = 2$. $|{\lambda_2}^1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2}$ pa je $\frac{|{\lambda_2}^1|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$. Također je $|{\lambda_2}^2| = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$. □

2.4 Identiteti Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva

U ovom poglavlju pokazat ćemo neke od mnogih jednakosti koje vrijede za Fibonaccijeve i Lucasove brojeva.

Dokazi matematičkom indukcijom

S obzirom na to da su Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi definirani rekurzivno, najjednostavnija metoda za dokazivanje identiteta je matematička indukcija. Prije samih dokaza zapisat ćemo aksiome matematičke indukcije. Ako je $S \subseteq \mathbb{N}$ za koji vrijedi:

1. $1 \in S$,
2. $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$,

onda je $S = \mathbb{N}$. Zbog definicije Fibonaccijevih brojeva nekad ćemo koristiti modificirani oblik matematičke indukcije:

1. $1, 2 \in S$,
2. $n, n+1 \in S \Rightarrow n+2 \in S$,

onda je $S = \mathbb{N}$.

Propozicija 2.4.1. *Za $n \geq 1$ vrijedi:*

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n. \tag{2.14}$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

- **baza:** za $n = 1$ slijedi da je $F_2 + F_1 = F_0 = 1 + 0 = L_1$, a za $n = 2$ $F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 = L_n$.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neke n, $n+1 \in \mathbb{N}$ tj. $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ i $F_{n+2} + F_n = L_{n+1}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n+2$. Zbrajanjem jednakosti iz pretpostavke dobivamo $F_{n+3} + F_{n+1} = L_{n+2}$.

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Dakle, zbroj $(n+1)$-og i $(n-1)$-og Fibonaccijevog broja jednak je n-tom Lucasovom broju.

Propozicija 2.4.2. *Za $n \geq 1$ vrijedi:*

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

- **baza:** za $n = 1$ slijedi da je $L_2 + L_0 = 3 + 1 = 5 = 5 \cdot F_1$, a za $n = 2$ $L_3 + L_1 = 4 + 1 = 5 = 5 \cdot F_2$.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neke n, $n+1 \in \mathbf{N}$ tj. $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$ i $L_{n+2} + L_n = 5F_{n+1}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n+2$. Zbrajanjem jednakosti iz pretpostavke dobivamo $(L_{n+1} + L_{n+2}) + (L_{n-1} + L_n) = 5(F_n + F_{n+1})$, tj. $L_{n+3} + L_{n+1} = 5F_{n+2}$.

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Dakle, zbroj $(n+1)$-og i $(n-1)$-og Lucasovog broja je pet puta veći od n-tog Lucasovog broja.

Propozicija 2.4.3. *Za $n, m \geq 1$ vrijedi:*

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}. \tag{2.15}$$

Dokaz. Identitet ćemo dokazati matematičkom indukcijom po m. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan, ali fiksan.

- **baza:** za $m = 1$ slijedi da je $F_{n+1} = 0 + F_{n+1}$, a za $m = 2$ $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neke m, $m+1 \in \mathbb{N}$ tj. $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$ i $F_{m+1+n} = F_mF_n + F_{m+1}F_{n+1}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $m+2$. Zbrajanjem jednakosti iz pretpostavke dobivamo

$$\begin{aligned} F_{m+n} + F_{m+1+n} &= F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} + F_mF_n + F_{m+1}F_{n+1} \\ F_{m+2+n} &= (F_{m-1} + F_m)F_n + (F_m + F_{m+1})F_{n+1} \\ F_{m+2+n} &= F_{m+1}F_n + F_{m+2}F_{n+1}. \end{aligned}$$

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Promotrimo dokazani identitet. Ako uzmemo specifične vrijednosti broja m dobivamo dvije zanimljive jednakosti.

Korolar 2.4.4. *Za $m = n-1, n \geq 1$ vrijedi:*

$$F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2. \tag{2.16}$$

Dakle, zbroj kvadrata dvaju uzastopnih Fibonaccijevih brojeva (n i $n-1$) jednaka je $(2n-1)$-om Fibonaccijevom broju.

Korolar 2.4.5. *Za $m = n$, $n \geq 1$ vrijedi:*

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}). \tag{2.17}$$

Dakle, $2n$-ti Fibonaccijev broj jednak je umnošku n-tog Fibonaccijevog broja i zbroja $(n-1)$-og i $(n+1)$-og Fibonaccijevog broja. Ako u (2.17) uvrstimo (2.14) dobivamo:

Korolar 2.4.6. *Za $n \geq 1$ vrijedi:*

$$F_{2n} = F_n L_n.$$

Analogno identitetu (2.15) dokazujemo sljedeći identitet.

Propozicija 2.4.7. *Za $n, m \geq 1$ vrijedi:*

$$L_{n+m} = F_{m-1} L_n + F_m L_{n+1}.$$

Dokaz. Identitet ćemo dokazati matematičkom indukcijom po m. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan, ali fiksan.

- **baza:** za $m = 1$ slijedi da je $L_{n+1} = 0 + L_{n+1}$, a za $m = 2$ $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$.
- **pretpostavka:** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m, m+1 \in \mathbb{N}$ tj. $L_{m+n} = F_{m-1} L_n + F_m L_{n+1}$ i $L_{m+1+n} = F_m L_n + F_{m+1} L_{n+1}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $m + 2$. Zbrajanjem jednakosti iz pretpostavke dobivamo

$$\begin{aligned} L_{m+n} + L_{m+1+n} &= F_{m-1} L_n + F_m L_{n+1} + F_m L_n + F_{m+1} L_{n+1} \\ L_{m+2+n} &= (F_{m-1} + F_m) L_n + (F_m + F_{m+1}) L_{n+1} \\ L_{m+2+n} &= F_{m+1} L_n + F_{m+2} L_{n+1}. \end{aligned}$$

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Sljedeći identitet naziva se *Cassinijev identitet* prema talijanskom matematičaru Giovanniu Domenicu Cassiniju (1625.–1712.).

Propozicija 2.4.8. *Za $n \geq 0$ vrijedi:*

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{2.18}$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

- **baza:** za $n = 1$ slijedi da je $F_2 \cdot F_0 - F_1^2 = (-1)^1$ te tvrdnja vrijedi.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$:

$$\begin{aligned} F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n) F_N - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Iz Cassinijevog identiteta slijede dvije vrlo bitne jednakosti. Ako u (2.18) zamijenimo F_{n-1} s $F_{n+1} - F_n$ tada dobivamo identitet koji povezuje susjedne Fibonaccijeve brojeve.

Korolar 2.4.9. *Za $n \geq 1$ vrijedi:*

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n. \tag{2.19}$$

Ako jednakost (2.19) pomnožimo s 4, tada

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1)^n &= 4F_{n+1}^2 - 4F_{n+1}F_n - 4F_n^2 = (2F_{n+1} - F_n)^2 - 5F_n^2 \\ &= (F_{n+1} + F_{n-1})^2 - 5F_n^2 = L_n^2 - 5F_n^2. \end{aligned}$$

Time smo dokazali da vrijedi sljedeća tvrdnja:

Propozicija 2.4.10. *Za $n \geq 1$ vrijedi:*

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4 \cdot (-1)^n.$$

Dokazat ćemo nekoliko suma koje vrijede za Fibonaccijeve i Lucasove brojeve.

Propozicija 2.4.11. *Za $n \geq 1$ vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

- **baza:** za $n = 1$ slijedi da je $F_1 = F_3 - 1$. $F_3 = 2$ i $F_1 = 1$, dakle $1 = 2 - 1$ te tvrdnja vrijedi.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} F_k &= F_n + \sum_{k=1}^{n} F_k \\ &= F_{n+1} + F_{n+2} - 1 \\ &= F_{n+3} - 1 = F_{(n+1)+2} - 1. \end{aligned}$$

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Dakle, zbroj prvih n Fibonaccijevih brojeva jednak je $(n+2)$-om Fibonaccijevom broju umanjenom za 1.

Propozicija 2.4.12. *Za $n \geq 1$ vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

- **baza:** za $n = 1$ slijedi da je $F_1 = F_2$, što je istina te tvrdnja vrijedi.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} + F_{2(n+1)-1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}.$$

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Dakle, zbroj prvih $n-1$ Fibonaccijevih brojeva jednaka je $(2n)$-tom Fibonaccijevom broju.

Propozicija 2.4.13. *Za $n \geq 1$ vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

- **baza:** za $n = 1$ slijedi da je $F_2 = F_3 - 1$ što je istina te tvrdnja vrijedi.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
- **korak:** Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=1}^{n} F_{2k} + F_{2n+2} = F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1.$$

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Dakle, zbroj prvih $2n$ Fibonaccijevih brojeva jednak je $(2n+1)$-tom Fibonaccijevom broju umanjenom za 1.

Propozicija 2.4.14. *Za $n \geq 1$ vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

- **baza:** za $n = 1$ lijeva strana je jednaka $F_1^2 = 1$, a desna $F_1 F_2 = 1$, dakle tvrdnja vrijedi za $n = 1$.
- **pretpostavka:** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 \\
&= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\
&= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\
&= F_{n+1} F_{n+2}.
\end{aligned}$$

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Dakle, zbroj prvih n kvadrata Fibonaccijevih brojeva jednaka je umnošku n-tog i $(n+1)$-og Fibonaccijevog broja.

Slična tvrdnja može se izvesti i za Lucasove brojeve.

$$\begin{aligned}
L_n L_{n+1} &= L_n(L_n + L_{n-1}) \\
&= L_n^2 + L_{n-1} L_n \\
&= L_n^2 + L_{n-1}(L_{n-2} + Ln - 1) \\
&= L_n^2 + L_{n-1}^2 + L_{n-2} Ln - 1 \\
&= ... \\
&= L_n^2 + L_{n-1}^2 + L_{n-2}^2 + ... L_2^2 + L_1^2 + 2.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.4.15. *Za Lucasove brojeve vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} - 2.$$

Propozicija 2.4.16. *Za $n \geq 1$ vrijedi*

$$\sum_{k=1}^{2n} F_k F_{k-1} = F_{2n}^2.$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

- **baza:** za $n = 1$ je $F_1 F_0 + F_2 F_1 = 0 + 1 = 1 = F_2^2$ te tvrdnja vrijedi.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
- **korak:** pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2(n+1)} F_k F_{k-1} &= \sum_{k=1}^{2n} F_k F_{k-1} + F_{2n+1} F_{2n} + F_{2n+2} F_{2n+1} \\ &= F_{2n}^2 + F_{2n+1} F_{2n} + F_{2n+2} F_{2n+1} \\ &= F_{2n} F_{2n+2} + F_{2n+2} F_{2n+1} = F_{2n+1}^2.\end{aligned}$$

Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. □

Pascalov trokut

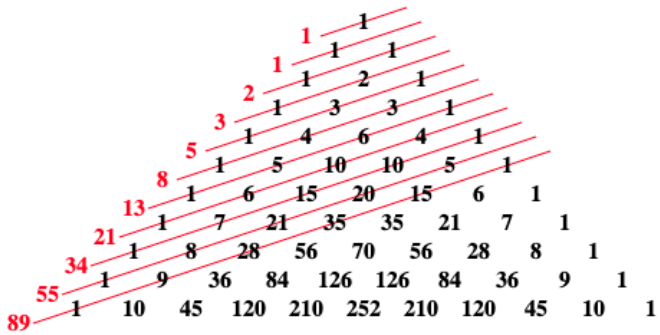
Fibonaccijev niz je povezan s Pascalovim trokutom po tome što je suma brojeva na dijagonali Pascalovog trokuta jednaka odgovarajućem članu Fibonaccijevog niza. Iskažimo i dokažimo tu tvrdnju.

Propozicija 2.4.17. *Za $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} = F_{n+1}. \tag{2.20}$$

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti metodu jake indukcije:

- **baza:** za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja vrijedi jer je $F_1 = 1 = \binom{0}{0}$ i $F_2 = 1 = \binom{1}{0}$.



Slika 2.1: Pascalov trokut i Fibonaccijevi brojevi

- **pretpostavka:** pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve $k \leq n$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-i}{i} = F_{k+1},\ k \leq n.$$

- **korak:** pokažimo da vrijedi i za $n+1$.

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-i}{i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i-1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

Pretpostavimo da je n paran. Tada je $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ i $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ te je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-i}{i} &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i-1} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n-(j+1)}{j} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{(n-1)-j}{j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} \\
&= F_n + F_{n+1} = F_{n+2}.
\end{aligned}$$

Analogno se pokazuje da identitet vrijedi i kada je n neparan broj.
Budući da smo dokazali bazu indukcije te iz pretpostavke indukcije izveli korak indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve prema aksiomu matematičke indukcije. $\square$

Dokazi Binetovom formulom

Radi jednostavnosti zapisa dokaza, u Binetovoj formuli (2.11) koristit ćemo oznake $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi}$. Dakle,

$$F_n = \frac{{\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n}{\sqrt{5}},$$
$$L_n = {\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n.$$

Propozicija 2.4.18. *Za $n \geq 0$ vrijedi:*

$$F_n L_n = F_{2n}.$$

Dokaz.

$$F_n L_n = \frac{{\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n}{\sqrt{5}} {\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n = \frac{{\lambda_1}^{2n} - {\lambda_2}^{2n}}{\sqrt{5}} = F_{2n}.$$

Dakle, produkt n-tog Fibonaccijevog broja i n-tog Lucasovog broja jednak je $2n$-tom Fibonaccijevom broju. □

Propozicija 2.4.19. *Za $n \geq 0$ vrijedi:*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k L_{n-k} = (n+1)F_n.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} F_k L_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{5}}({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n)({\lambda_1}^{n-k} + {\lambda_2}^{n-k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} ({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n + {\lambda_1}^k {\lambda_2}^{n-k} - {\lambda_2}^k {\lambda_1}^{n-k}) \\ &= (*).\end{aligned}$$

S obzirom na to da $\lambda_1 = \Phi$ i $\lambda_2 = -\frac{1}{\Phi}$ slijed $\lambda_2 = -{\lambda_1}^{-1}$.

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} ({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n) + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} {\lambda_1}^k (-{\lambda_1}^{-1})^{n-k} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} (-{\lambda_1}^{-1})^k {\lambda_1}^{n-k} \\ &= (n+1)F_n + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} {\lambda_1}^{2k-n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {\lambda_1}^{n-2k} \\ &= (n+1)F_n + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l {\lambda_1}^{n-2l} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {\lambda_1}^{n-2k} \\ &= (n+1)F_n.\end{aligned}$$

□

Propozicija 2.4.20. *Za $n \geq 0$ vrijedi:*

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} F_{2k} = 5^n F_{2n}.$$

Dokaz. Za dokaz ćemo koristiti binomnu fromulu:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \tag{2.21}$$

te činjenicu da $1 + {\lambda_1}^2 = \lambda_1\sqrt{5}$ i $1 + {\lambda_2}^2 = -\lambda_2\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} F_{2k} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{\sqrt{5}} ({\lambda_1}^{2k} - {\lambda_2}^{2k}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} {\lambda_1}^{2k} - \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} {\lambda_2}^{2k} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(1+{\lambda_1}^2)^{2n} - (1+{\lambda_2}^2)^{2n} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\lambda_1\sqrt{5})^{2n} - (\lambda_2\sqrt{5})^{2n} \right] \\
&= 5^n \cdot \frac{{\lambda_1}^{2n} - {\lambda_2}^{2n}}{\sqrt{5}} = 5^n F_{2n}.
\end{aligned}$$

□

2.5 Kombinatorna interpretacija

Fibonaccijevi brojevi mogu se kombinatorno interpretirati kao broj načina na koji možemo popločiti ploču duljine n i visine 1 ($1 \times n$) koristeći samo kvadrate (1×1) i domine (1×2).

Slika 2.2: Ploča od n ćelija popločena s kvadratima i dominama (n ploča)

Teorem 2.5.1. *Neka je f_n broj načina da se popoči ploča duljine n kvadratima i dominama. Tada je f_n Fibonaccijev broj i za $n \geq 0$ vrijedi: $f_n = F_{n+1}$.*

Dokaz. Definirajmo $f_0 = F_1 = 1$ kao broj popločavanja ploče duljine 0. Ploču duljine 1 možemo popločiti samo s jednim kvadratom pa $f_1 = 1 = F_2$. Ako imamo ploču duljine n tada postoje dva slučaja:

1. Ako ploča završava kvadratom, tada prema definiciji postoji f_{n-1} načina da se popoči prvih $n-1$ ćelija.

2. Ako ploča završava dominom, tada prema definiciji postoji f_{n-2} načina da se popoči prvih $n-2$ ćelija.

Dakle, ukupan broj načina popločavanja n-ploče je $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Kako niz f_n zadovoljava iste početne uvjete i rekurziju kao niz F_n, slijedi $f_n = F_{n+1}$ za sve $n \geq 0$. □

Zaključujemo da je f_n Fibonaccijev niz pomaknut za 1 član. Razmišljanje o Fibonaccijevim brojevima kao o popločavanjima n-ploče omogućuje još jedan način dokazivanja Fibonaccijevih identiteta.

Kombinatorni dokazi nekih identiteta

U ovom poglavlju pokazat ćemo i izvesti kombinatorne dokaze nekih novih i već pokazanih identiteta.

Propozicija 2.5.2.

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Dokaz. Ekvivalentno je dokazati $\sum_{i=0}^{n-1} f_i = f_{n+1} - 1$. Postoji f_{n+1} popločavanja $(n+1)$-ploče i točno jedno popločavanje koje koristi samo kvadrate. Desna strana odgovara broju popločavanja $(n+1)$-ploče kod kojeg koristimo barem jednu dominu. Popločavanje $(n+1)$-ploče kod kojeg koristimo barem jednu dominu tako da zadnja domaina pokriva ćeliju $i+1$ i $i+2$ ima točno f_i. Kako i može biti bilo koji broj između 0 i $n-1$ (uključujući i 0 i $n-1$), slijedi da i lijeva strana odgovara broju popločavanja $(n+1)$-ploče kod kojeg koristimo barem jednu dominu. □

Propozicija 2.5.3.

$$\sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} = F_{2n+2}.$$

Dokaz. Ekvivalentno je dokazati $\sum_{i=0}^{n} f_{2i} = f_{2n+1}$. Desna strana odgovara broju popločavanja $(2n+1)$-ploče. S obzirom na to da je ploča neparne duljine, postoji barem jedan kvadrat. Zadnji se kvadrat mora nalaziti na neparnom mjestu, recimo $2i+1$. Postoji f_{2i} popločavanja $(2i+1)$-ploče kod kojeg se zadnji kvadrat nalazi na mjestu $2i+1$. Kako i može biti bilo koji broj između 0 i $n-1$ (uključujući i 0 i $n-1$), slijedi tvrdnja. □

Za dokaz sljedeće propozicije potrebna je sljedeća definicija.

Definicija 2.5.4. *Kažemo da se popločena n ploča može* ***slomiti*** *na ćeliji i, ako se može podijeliti na dvije ploče, jedna koja pokriva ćelije 1 do i, a druga pokriva $i+1$ do n.*

Propozicija 2.5.5. *Za $m, n \geq 0$ vrijedi*

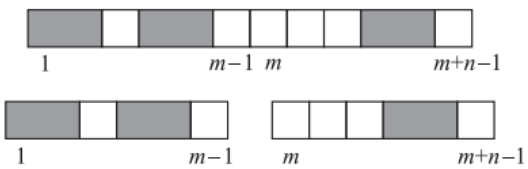
$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Prije samog dokaza definirat ćemo pojam koji je potreban za dokaz.

Dokaz. Ekvivalentno je dokazati $f_{m+n-1} = f_{m-2}f_{n-1} + f_{m-1}f_n$, gdje je f_{m+n-1} je broj načina na koje možemo popločiti $(m+n-1)$-ploču. Popločavanje $(m+n-1)$-ploče dijelimo na dva različita slučaja:

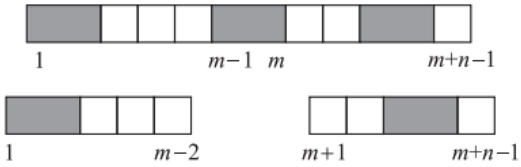
1. Ploča duljine $m+n-1$ može se slomiti na ćeliji $m-1$.
2. Ploča duljine $m+n-1$ se ne može slomiti na ćeliji $m-1$.

Slučaj 1
Ako se $m+n-1$-ploča može slomiti na ćeliji $m-1$, onda je ona nastala spajanjem dvije ploče: jedne koja ima $m-1$ ćelija i druge koja sadrži n ćelija. S obzirom na to da ploče popločavamo neovisno jednu od druge, ukupno postoji $f_{m-1} \cdot f_n$ popločavanja.



Slika 2.3: $(m+n-1)$-pločica se može slomiti na ćeliji $m+1$

Slučaj 2
Ako se ploča ne može slomiti na ćeliji $m-1$, tada domina pokriva ćeliju $m-1$ i m. Prvih $m-2$ ćelija (prvi dio ploče) se može popločiti f_{m-2} načina, a drugi dio



Slika 2.4: $(m+n-1)$-pločicu ne možemo slomiti $m+1$

ploče na f_{n-1} načina, što je ukupno $f_{m-2}f_{n-1}$ popločavanja. Zbrajanjem ova dva slučaja dobivamo ukupan broj popločavanja $f_{m-2}f_{n-1} + f_{m-1}f_n$ te je time tvrdnja dokazana. □

Iz ovog identiteta slijede dvije posljedice.

Korolar 2.5.6. *Za $m = n$ vrijedi*

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

Korolar 2.5.7. *Za $m = n+1$ vrijedi*

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

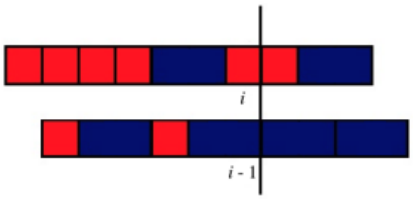
Iako smo Cassinijev identitet već dokazali, dokazat ćemo ga i kombinatorno.

Identitet 2.5.8. *Za $n \geq 0$ vrijedi*

$$f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n.$$

Prije samog dokaza definirat ćemo dva pojma koji će biti potrebni za dokaz.

Definicija 2.5.9. *Promatrajmo par ploča i pomaknimo donju ploču za jedno mjesto udesno. Za par ploča kažemo da postoji "**greška**" na mjestu i, ako se gornja ploča može slomiti na mjestu i, a donja na $i-1$, bez lomljenja pločica.*



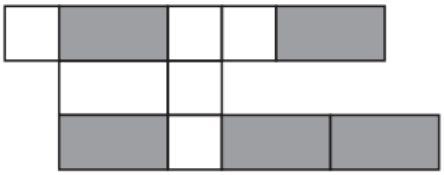
Slika 2.5: Greška na ploče na mjestu i

Postoji li slučaj kada dvije ploče nemaju "grešku"? Da i to jedino u slučaju kada su obje n-ploče popločene dominama. Promotrimo dvije ploče A i B postavljene kao na Slici 2.5 i neka je ploča A na mjestu i popločena kvadratom. Tada, po Definiciji 2.5.4, ploča A je lomljiva na ćeliji i i $i-1$. Pogledajmo ploču B. Postoje dva slučaja ili je ploča B lomljiva na ćeliji i ili nije. Ako ploča B nije lomljiva na ćeliji i, tada domina prekriva ćelije i i $i+i$ odnosno ploča B je lomljiva na ćeliji $i-1$. U prvom slučaju imamo "grešku" na ćeliji i, u drugom na ćeliji $i-1$.

Definicija 2.5.10. *Dio ploče iza posljednje greške nazivamo "**repom**" ploče.*

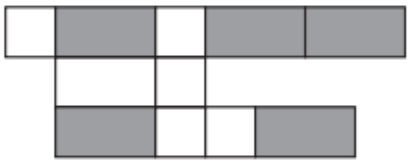
Primjer: Imamo dvije ploče i pomaknemo jednu udesno, tada par ploča ima greške

Slika 2.6: Dvije ploče popločene kvadratima i dominama



Slika 2.7: Par ploča s greškama na mjesti 1, 3 i 4

na mjestima $1, 3$ i 4.
Zamijenimo sada dijelove iza posljednje greške tj. "repove" ploča. Time dobivamo



Slika 2.8: Zamijenjeni dijelova ploča nakon posljednje greške

ploče s greškama na istim mjestima kao i na početku, ali gornja ploče sad ima $n+1$, a donja $n-1$ mjesta. Ukupan broj popločavanja je $f_{n+1}f_{n-1}$.

Dokaz. Broj popločavanja dviju n ploča jednak je f_n^2.

Ako je n paran, tada postoji jedan slučaj u kojem nema greške (kada su obje ploče popločene dominama). U svakom drugom slučaju barem jedna ploča ima barem jedan kvadrat i tada postoji greška. Nakon posljednje greške zamijenimo repove te time dobivamo dvije $(n+1)$ i $(n-1)$-ploče.

Postoji $f_{n+1}f_{n-1}$ načina popločavanja $n+1$ i $n-1$-ploča plus slučaj kada su obje n ploče popločene dominama. Dakle, postoji $f_{n+1}f_{n-1}+1$ popločavanja dviju n ploča kad je n paran.

Ako je n neparan, tada ploče imaju barem jedan kvadrat i postoji greška. Nakon posljednje greške zamijenimo repove te time dobivamo dvije $n+1$ i $n-1$-ploče. Postoji $f_{n+1}f_{n-1}$ načina popločavanja $n+1$ i $n-1$ ploča, ali moramo oduzeti slučaj kada su $n+1$ i $n-1$ popločene dominama. Stoga, broj popločavanja n ploča kada je n neparan je jednako $f_{n+1}f_{n-1}-1$.

S obzirom na to da računanje ovisi o parnosti broja n jednostavnije zapisujemo

$$f_n^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Pokazat ćemo i kombinatorni dokaz veze između Fibonaccijevih brojeva i Pascalovog trokuta.

Identitet 2.5.11. *Za $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} = F_{n+1}. \tag{2.22}$$

Dokaz. Dokazat ćemo $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} = f_n$.
Desna strana odgovara broju popločavanja n-ploče. Pogledajmo lijevu stranu. Ako za popločavanje n-ploče koristimo i domina, tada popločavamo s $n-2i$ kvadrata, tj. s ukupno $n-i$ pločica. Broj načina na koji možemo izabrati i domina između $n-i$ pločica je $\binom{n-i}{i}$, za $0 \leq 1 \leq \frac{n}{2}$. □

2.6 Fibbonacijevi brojevi i zlatni rez

Za sam kraj pokazat ćemo najzanimljiviju vezu između Fibonaccijevih brojeva i zlatnog reza.

Prisjetimo se, neka je $a > b > 0$. Tada za dva broja kažemo da su u zlatnom omjeru ako vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} := \Phi,$$

gdje je Φ iracionalan broj čija se vrijednost aproksimira sa: $\Phi \approx 1.618$. Fibonaccijev niz i zlatni rez usko su povezani, iako teško vidimo povezanost bez da nam netko na to ukaže. Pogledajmo uzastopne omjere Fibonaccijevih brojeva:

$$\tfrac{2}{1} = 2, \qquad \tfrac{3}{2} = 1.5, \qquad \tfrac{5}{3} \approx 1.667, \qquad \tfrac{8}{5} = 1.6,$$

$$\tfrac{13}{8} = 1.625, \qquad \tfrac{21}{13} \approx 1.615, \qquad \tfrac{34}{21} \approx 1.619, \qquad \tfrac{55}{34} \approx 1.618.$$

Teorem 2.6.1. *Ako dijelimo član Fibonaccijevog niza njegovim prethodnikom, omjer teži k broju Φ.*

Dokaz. Neka je $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Fibonaccijev niz rekurzivno zadan s $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$.
Označimo $b_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, n \geq 1$.

Trebamo dokazati: $\lim_{n\to\infty} b_n = \Phi$, gdje je $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vrijedi:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n},$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

Pokažimo monotonost niza $b_1 = \frac{1}{1}, b_2 = \frac{2}{1}, b_3 = \frac{3}{2}, b_4 = \frac{5}{3}, b_5 = \frac{8}{5}, b_6 = \frac{13}{8}, b_7 = \frac{21}{13}, b_8 = \frac{34}{21}, ...$ Primijetimo da ga možemo rastaviti na dva monotona podniza; jedan s parnim članovima te jedan s neparnim. Nazovimo niz s neparnim članovima (b'_n), a s parnim (b''_n). Pokažimo da su (b'_n) i (b''_n) monotoni. Pogledamo li prvih nekoliko članova, možemo uočiti da je (b'_n) rastući, a (b''_n) padajući niz.
Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

- **baza:** jasno je da vrijedi: $b_1 = \frac{1}{1} < \frac{3}{2} = b_3, b_2 = \frac{2}{1} > \frac{5}{3} = b_4$.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $b_{2k+1} < b_{2k+3}, b_{2k+2} > b_{2k+4}$.

- **korak:** pokazujemo indukcijom da onda to vrijedi i za $k+1$, tj. da je $b_{2k+3} < b_{2k+5}$ i $b_{2k+4} > b_{2k+6}$. Primijetimo da je:

$$\begin{aligned} b_{2k+3} < b_{2k+5} &\iff 1 + \frac{1}{b_{2k+2}} < 1 + \frac{1}{b_{2k+4}} \\ &\iff \frac{1}{b_{2k+2}} - \frac{1}{b_{2k+4}} < 0 \\ &\iff \frac{b_{2k+4} - b_{2k+2}}{b_{2k+2} \cdot b_{2k+4}} < 0. \end{aligned}$$

Kako je nazivnik umnožak prirodnih brojeva, sigurno je pozitivan. Iz pretpostavke indukcije je:

$$b_{2k+4} - b_{2k+2} < 0,$$

pa slijedi $b_{2k+3} < b_{2k+5}$. Preostaje nam još dokazati za parne, tj. $b_{2k+4} > b_{2k+6}$. Koristit ćemo upravo dokazano; da je $b_{2k+3} < b_{2k+5}$. Primijetimo da je:

$$\begin{aligned} b_{2k+4} > b_{2k+6} &\iff 1 + \frac{1}{b_{2k+3}} > 1 + \frac{1}{b_{2k+5}} \\ &\iff \frac{1}{b_{2k+3}} - \frac{1}{b_{2k+5}} > 0 \\ &\iff \frac{b_{2k+5} - b_{2k+3}}{b_{2k+3} \cdot b_{2k+5}} > 0. \end{aligned}$$

Po već dokazanom znamo da je $b_{2k+3} < b_{2k+5}$, tj. $b_{2k+5} - b_{2k+3} > 0$, pa slijedi $b_{2k+4} > b_{2k+6}$.

Dokazali smo korak indukcije i sad po indukciji slijedi da je za svaki parni k (b_k) padajući, a za svaki neparni k (b_k) rastući. Prema principu matematičke indukcije, to vrijedi za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Time smo dokazali monotonost nizova (b'_n) i (b''_n).

Pokažimo ograničenost niza (b_n). Očito je (b_n) ograničen s 1 odozdo i s 2 odozgo. Dokažimo i tu tvrdnju.

- **baza:** za prvih par članova očito vrijedi $1 \leq b_n \leq 2$, stoga imamo bazu.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da to vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
- **korak:** pokažimo da vrijedi i za svaki n:

$$b_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{b_n}.$$

Uzmimo recipročne vrijednosti pretpostavke i dodajmo 1:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b_n} \leq 1,$$

$$\frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{b_n} \leq 2,$$
$$\frac{3}{2} \leq b_{n+1} \leq 2.$$

Pokazali smo ograničenost (b_n) po principu matematičke indukcije. Kako je (b_n) ograničen, to su sigurno i njegovi podnizovi (b'_n) i (b''_n). Kako su ograničeni i monotoni, znamo da su konvergentni prema teoremu o ograničenim i monotonim nizovima.

Dokažimo sada da su limesi podnizova jednaki kako bismo mogli tvrditi da je niz konvergentan. Neka je $(b'_n) = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$, a $(b''_n) = \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$. Neka je $\lim_{n\to\infty}(b'_n) =: l_1, \lim_{n\to\infty}(b''_n) =: l_2$. Pokažimo $l_1 = l_2$:

$$\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} = \frac{F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2}{F_{2n}F_{2n-1}}.$$

Indukcijom ćemo dokazati da $F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1$, odnosno $F_{2n-1}(F_{2n}F_{2n-1}) - F_{2n}^2 = 1$.

- **baza:** za $n = 1$ vrijedi $F_1(F_2 + F_1) - F_2^2 = 1(1 + 1) - 1 = 1$, čime je baza ispunjena.
- **pretpostavka:** pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi tvrdnja.
- **korak:** pokažimo da vrijedi i za svaki $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{2n+1}F_{2n+3} - F_{2n+2} = 1,$$
$$F_{2n+1}(F_{2n+2} + F_{2n+1}) - F_{2n+2}^2 = 1,$$
$$(F_{2n+1} + 2F_{2n} + F_{2n-1})F_{2n+1} - (F_{2n+1} + F_{2n})^2 = 1,$$
$$F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n+1}^2 - 2F_{2n+1}F_{2n} - F_{2n}^2 = 1,$$
$$F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1,$$

  što vrijedi po pretpostavci. Time smo dokazali da vrijedi:

$$\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} - \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} = \frac{1}{F_{2n}F_{2n-1}}.$$

Kad $n \to \infty$, desna strana ide u 0, stoga vrijedi: $l_1 - l_2 = 0$, tj. $l_1 = l_2$. (b_n) je konvergentan i $\lim_{n\to\infty}(b_n) = L = l_1 = l_2$ te slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1} + F_n}{F_n + F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2F_n + F_{n-1}}{F_n + F_{n-1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{F_n}{F_n+F_{n-1}}\right)=1+\frac{1}{L}.$$

Kako je (b_n) niz u $\mathbb{R}$, limes je jedinstven, pa vrijedi:

$$L=1+\frac{1}{L},$$

$$L^2=L+1,$$

$$L^2-L-1=0,$$

$$L_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$L_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

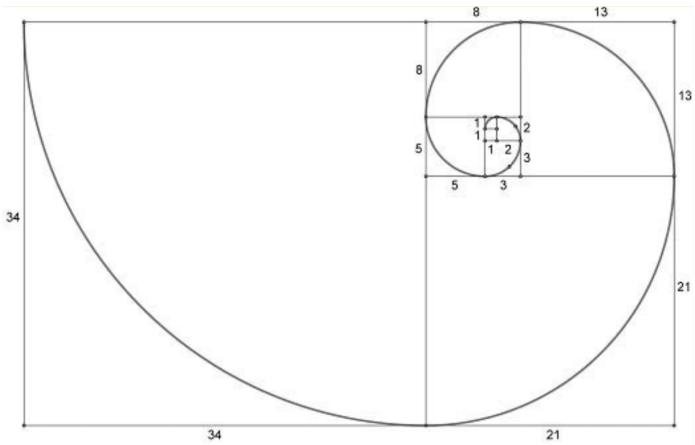
Iz ograničenosti niza slijedi da je limes $L\in[1,2]$, dakle:

$$L=L_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi.$$

□

Fibonaccijeva spirala

Ako uzmemo pravokutnik sa stranicama duljine 55 i 34 (dva Fibonaccijeva broja), tada je taj pravokutnik skoro pa zlatni pravokutnik. Omjer stranica iznosi $\frac{55}{34}=1.6\overline{17647058823529 41}$, što je vrlo blizu numeričke vrijednosti zlatnog reza $\Phi\approx 1.618033988$. Uzastopno odsijecanje kvadrata čije su duljine stranica Fibonaccijevi brojevi dobivamo spiralu koja se naziva *Fibonaccijeva spirala*, vrlo slična *zlatnoj spirali*.



Slika 2.9: Fibonaccijeva spirala

Bibliografija

[1] Benjamin A. T., Quinn J. J., *The Fibonacci Numbers—Exposed More Discretely*, 2003.

[2] Bošnjaković U., *Metoda matematičke indukcije u nastavi matematike*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2020.

[3] Dujella A., *Fibonaccijevi brojevi*, Školska knjiga, Zagreb, 1999.

[4] Dunlap R. A., *Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific, Singapore, 1997.

[5] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O., *Concrete mathematics*, Addison-Wesley publishing company, New York , 1994.

[6] Jenne H. K., *Proofs you can count on*, Whitman College, 2013.

[7] Livio M., *THE GOLDEN RATIO*, BROADWAY BOOKS, New York, 2002.

[8] Nakić I., *Diskretna matematika*, PMF- Matematički odsjek, Zagreb, 2011.

[9] Posamentier A. S., Lehmann I., *The Fabulous Fibonacci Numbers*, Prometheus Books, Amherst, NY, 2007.

[10] Posamentier A. S., Lehmann I., *The Glorious Golden Ratio*, Prometheus, 2012.

[11] Thapa G.B., Thapa R., *The Relation of Golden Ratio, Mathematics and Aesthetics*, 2018.

[12] The Golden Ratio & Phi `https://goldenratioandphi.weebly.com/the-golden-ratio-in-history.html` (9. siječanj 2023.)

[13] `https://www.mathnasium.com/blog/14-interesting-examples-of-the-golden-ratio-` (26.siječanj.2023.)

Sažetak

Zlatni rez je simbol savršene skladnosti, ravnoteže te ga nalazimo već kod starih Egipćana. Zlatni rez često povezujemo s Fibonaccijevim brojevima te je ovaj diplomski rad posvećen istraživanju i opisivanju njihovih svojstava.

Ovaj diplomski rad sadrži dva velika poglavlja. U prvom poglavlju nalazi se povijesni pregled zlatnog reza, opisana su njegova osnovna svojstva, što geometrijska, što numerička. Opisani su neki od geometrijskih likova koji nose epitet zlatni te gdje zlatnih rez možemo pronaći u našoj okolini. U drugom poglavlju opisano je kako su nastali Fibonaccijevi brojevi, a time i Lucasovi brojevi, dokazani su neki njihovi identiteti, opisana je kombinatorna interpretacija Fibonaccijevih brojeva i pokazano da omjer Fibonaccijevog broja i njegovog prethodnika teži zlatnom rezu.

Summary

The golden ratio is a symbol of perfect harmony and balance and has been in human history since the time of the ancient Egyptians. Fibonacci numbers are often associated with the golden ratio, and this thesis is dedicated to the golden ratio and Fibonacci numbers.

This thesis contains two large chapters. In the first chapter, there is a historical overview of the golden section, its basic properties, both geometric and numerical, are described. Some of the geometric figures that bear the epithet golden are described, and where we can find the golden section in our surroundings. In the second chapter, it is described how Fibonacci numbers, and thus Lucas numbers, were created, some of their identities were proven, a combinatorial interpretation of Fibonacci numbers was described and it was shown that the ratio of the Fibonacci number and its predecessor approaches to the golden ratio.

Životopis

Hana Strejček rođena je 9. travnja 1998. godine u Zagrebu. 2004. godine upisuje osnovnu školu Eugena Kvaternika u Velikoj Gorici nakon čega nastavlja školovanje u Gimnaziji Velika Gorica. Godine 2016. upisuje preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu te ga završava 2020. godine. Iste godine upisuje diplomski studij na istom fakultetu, smjer nastavnički.