

# Primjene običnih diferencijalnih jednadžbi i metode rješavanja

---

Štrocinger, Roberta

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:084930>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-24**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Roberta Štrocinger

**PRIMJENE OBIČNIH**  
**DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI I**  
**METODE RJEŠAVANJA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv. prof. dr. sc. Maja Resman

Zagreb, ožujak, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Rješenja obične diferencijalne jednačbe . . . . .	3
<b>2 Teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja ODJ</b>	<b>5</b>
<b>3 Analitičke metode</b>	<b>13</b>
3.1 Separacija varijabli . . . . .	14
3.2 Linearna diferencijalna jednačba prvog reda . . . . .	19
<b>4 Kvalitativne metode</b>	<b>29</b>
4.1 Polje smjerova . . . . .	30
4.2 Kvalitativni opis rješenja . . . . .	38
<b>5 Numeričke metode</b>	<b>51</b>
5.1 Eulerova metoda . . . . .	52
5.2 Bolje numeričke metode . . . . .	56
5.3 Analiza pogreške aproksimacije numeričkih metoda . . . . .	67
<b>Bibliografija</b>	<b>73</b>

# Poglavlje 1

## Uvod

Diferencijalne jednačbe su jednačbe koje uključuju derivacije te opisuju vezu nepoznatih funkcija i njihovih derivacija. Na primjer, jednačbe:

$$\begin{aligned}x' &= x + t^2, \\x'' &= (1 + x')^2, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

predstavljaju diferencijalne jednačbe. S  $t$  označena je nezavisna varijabla,  $t \mapsto x(t)$  predstavlja nepoznatu funkciju te nezavisne varijable,  $x'$  i  $x''$  predstavljaju derivacije nepoznate funkcije, a  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  i  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  parcijalne derivacije funkcije  $(x, y) \mapsto u(x, y)$ . Ovisno o broju varijabli o kojima ovisi nepoznata funkcija govorimo o *običnim* ili *parcijalnim* diferencijalnim jednačbama. Kada nepoznata funkcija  $x$  ovisi samo o jednoj nezavisnoj varijabli  $t$ , tada se diferencijalna jednačba klasificira kao obična diferencijalna jednačba (ODJ). S druge strane, ukoliko nepoznata funkcija  $x$  ovisi o više nezavisnih varijabli, tako da su derivacije parcijalne po bilo kojoj od varijabli, diferencijalnu jednačbu klasificiramo kao parcijalnu diferencijalnu jednačbu (PDJ). Prve dvije jednačbe iz (1.1) predstavljaju obične diferencijalne jednačbe, a zadnja parcijalnu diferencijalnu jednačbu.

**Definicija 1.0.1.** (iz [6]) *Obična diferencijalna jednačba je jednačba oblika:*

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0,\tag{1.2}$$

pri čemu  $F : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $D$  otvoren skup.

Vidimo da jednačba (1.2) povezuje nezavisnu varijablu  $t$ , nepoznatu funkciju  $x(t)$  i njene derivacije  $x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)$ .

*Red diferencijalne jednačbe* predstavlja red najviše derivacije koja se u njoj pojavljuje. Prema tome, prva jednačba iz (1.1) je prvog reda, a druga i treća jednačba predstavljaju diferencijalne jednačbe drugog reda.

Općenito po Definiciji 1.0.1, ODJ prvog reda možemo implicitno zapisati kao:

$$F(t, x, x') = 0, \quad (1.3)$$

gdje je  $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , a  $D$  otvoren skup.

Prema *Teoremu o implicitnoj funkciji* ([5]), za  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  realnu funkciju klase  $C^1$  na  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  i točku  $Q_0 = (t_0, x_0, x'_0) = (P_0, x'_0) \in \Omega$ , za koju vrijedi  $F(Q_0) = 0$  i  $\partial_3 F(Q_0) \neq 0$ , postoji otvorena okolina  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  oko točke  $P_0$ , takva da je  $(U, f(U)) \subseteq \Omega$ , te postoji jedinstvena neprekidna funkcija  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  takva da vrijedi  $f(P_0) = x'_0$ , te  $F(t, x, f(t, x)) = 0$  za  $(t, x) \in U$ . Tada jednadžba (1.3) prelazi u eksplicitni oblik:

$$x' = f(t, x), \quad (1.4)$$

gdje je  $f$  neprekidna funkcija definirana na nekom otvorenom skupu  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . Primijetimo, ODJ iz (1.3) ne možemo uvijek eksplicitno zapisati u obliku (1.4), a u nekim slučajevima funkcija  $f$  iz (1.4) neće niti postojati.

U ostatku diplomskog rada baviti ćemo se ODJ, najčešće prvog reda, i metodama njihovog rješavanja. Nakon što ponovimo osnovne analitičke metode, bavit ćemo se kvalitativnim (geometrijskim) i numeričkim metodama, u slučaju kada nećemo moći eksplicitno riješiti jednadžbu.

U primjenama, funkcije obično predstavljaju fizikalne veličine, derivacije predstavljaju njihovu trenutnu brzinu promjene, a jednadžba definira odnos između funkcije i derivacije, i time predstavlja (pojednostavljeni) matematički model za neki prirodni proces iz stvarnog svijeta. Zbog toga su diferencijalne jednadžbe iznimno važne. Pogledajmo nekoliko jednostavnih primjera takvih modela.

**Primjer 1.0.2** (Primjeri ODJ, [10]).

(a) **Newtonov zakon:**

$$ma = f,$$

gdje  $m$  označava masu čestice,  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  ubrzanje čestice, a  $f$  silu koja djeluje na česticu. Stoga, Newtonov zakon možemo napisati u obliku diferencijalne jednadžbe:

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = f\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right),$$

gdje  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  predstavlja položaj čestice u prostoru u trenutku  $t$ . Kao što je prikazano, sila  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ovisi o vremenskom trenutku, poziciji čestice u prostoru i o brzini čestice u tom vremenskom trenutku. Primijetimo da je ovo obična diferencijalna jednadžba drugog reda.

(b) **Radioaktivni raspad:** Količina radioaktivnog materijala,  $u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mijenja se kroz vrijeme na sljedeći način:

$$\frac{du}{dt}(t) = -ku(t), \quad k > 0,$$

gdje je  $k$  pozitivna konstanta koja predstavlja radioaktivna svojstva materijala. Brzina promjene količine radioaktivnog materijala proporcionalna je količini radioaktivnog materijala  $u(t)$  te negativnog predznaka, zbog smanjenja količine radioaktivnog materijala  $u(t)$  s vremenom. Primijetimo da je ovo obična diferencijalna jednačba prvog reda.

## 1.1 Rješenja obične diferencijalne jednačbe

Da bismo riješili algebarsku jednačbu, npr.

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \tag{1.5}$$

tražimo broj, tako da zamijeni nepoznanicu  $x$ , na način da lijeva i desna strana jednačbe budu jednake. U jednačbi (1.5) rješenja su brojevi  $-4$  i  $1$ .

Da bismo riješili diferencijalnu jednačbu, više ne tražimo nepoznati broj, već tražimo nepoznatu funkciju. Primjerice, u jednačbi:

$$x''(t) + x(t) = 0, \tag{1.6}$$

nepoznanica  $t \mapsto x(t)$  predstavlja nepoznatu funkciju. Prilikom rješavanja diferencijalne jednačbe pokušavamo pronaći funkciju definiranu na intervalu, sa svojstvom da, kad  $x(t)$  zamijenimo s tom funkcijom, jednačba postaje identička na tom intervalu. Jasno je da je funkcija  $\sin t$  rješenje diferencijalne jednačbe (1.6), za sve vrijednosti  $t \in \mathbb{R}$ :

$$(\sin t)'' + \sin t \equiv 0.$$

Također, nije teško pokazati da funkcije  $\cos t$  i  $\sin t + \cos t$  također zadovoljavaju (1.6), što povlači pitanja o jedinstvenosti i egzistenciji rješenja, o čemu će biti riječi u sljedećem poglavlju.

**Definicija 1.1.1** (Rješenje ODJ prvog reda, [11]). *Pretpostavimo da je obična diferencijalna jednačba zadana u obliku  $x' = f(t, x)$ , pri čemu je funkcija  $f$  definirana na nekom skupu  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Za funkciju  $x = u(t)$ , definiranu na nekom intervalu  $(a, b)$ <sup>1</sup>, kažemo da je rješenje jednačbe, ako za svaki  $t \in (a, b)$  vrijedi:*

<sup>1</sup>Dopušteni su i oblici:  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$ .

1. Postoji derivacija funkcije  $u(t)$ , za svaki  $t \in (a, b)$  te točka  $(t, u(t))$  pripada skupu  $D$ ,
2. Uvrštavanjem funkcije  $x = u(t)$  u jednadžbu, jednadžba postaje identička, tj.

$$u'(t) \equiv f(t, u(t)),$$

za svaki  $t \in (a, b)$ .



## Poglavlje 2

# Teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja ODJ

**Definicija 2.0.1** (Cauchyjev problem, [3]). *Diferencijalnu jednadžbu:*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (2.1)$$

pri čemu je  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , zajedno sa početnim uvjetom:

$$(t_0, x_0) \in \Omega,$$

nazivamo *problem početnog uvjeta ili Cauchyjev problem*.

Rješenje Cauchyjevog problema je rješenje  $u(t)$  obične diferencijalne jednadžbe (2.1) u smislu Definicije 2.0.1, koje dodatno zadovoljava početni uvjet  $u(t_0) = x_0$ .

Obična diferencijalna jednadžba kod koje desna strana, funkcija  $f$ , ne ovisi eksplicitno o nezavisnoj varijabli  $t$ , zove se *autonomna diferencijalna jednadžba*:

$$x'(t) = f(x(t)).$$

U suprotnom, zove se *neautonomna diferencijalna jednadžba*.

**Definicija 2.0.2** (Lipschitzova funkcija, [12]). *Neka je funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Kažemo da je funkcija  $f$  Lipschitzova po varijabli  $x$ , ako postoji konstanta  $L > 0$  takva da je:*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

za svaki  $(t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

## POGLAVLJE 2. TEOREMI O EGZISTENCIJI I JEDINSTVENOSTI RJEŠENJA ODJ 6

Primijetimo: iz definicije neprekidnosti lako se vidi da je Lipschitz neprekidna funkcija (po varijabli  $x$ ) ujedno i neprekidna (po varijabli  $x$ ).

Naime, pretpostavimo da je  $f$  Lipschitz neprekidna (po varijabli  $x$ ) te neka je  $\varepsilon > 0$ . Uzmemo  $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ . Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| < \delta &\Rightarrow |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{L} \\ &\Rightarrow L|x_1 - x_2| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |f(t, x_1) - f(t, x_2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je  $f$  neprekidna (po varijabli  $x$ ).

**Definicija 2.0.3** (Kontrakcija, [9]). *Neka je  $(X, d)$  metrički prostor. Za preslikavanje  $f : X \rightarrow X$  kažemo da je kontrakcija ako postoji pozitivna konstanta  $c < 1$ , koju zovemo konstanta kontrakcije, takva da je:*

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y),$$

za svaki  $x \in X$  i  $y \in X$ .

**Definicija 2.0.4** (Definicija Banachovog prostora, [13]). *Za metrički prostor  $(X, d)$  kažemo da je potpun ako u njemu svaki Cauchyjev niz konvergira. Za potpun normiran vektorski prostor kažemo da je Banachov.*

Primijetimo da je  $(\mathbb{R}^n, d)$  metrički prostor uz euklidsku metriku:

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

U slučaju  $n = 1$ , ta metrika postaje samo  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Također, to su potpuni metrički prostori ([7]). Primijetimo da je euklidska metrika na  $\mathbb{R}^n$  inducirana 2-normom:

$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , pri čemu je:

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \|(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n)\|.$$

U potpunim metričkim prostorima vrijedi sljedeći važan teorem koji će nam biti koristan u nastavku:

**Teorem 2.0.5** (Banachov teorem o fiksnoj točki, [13]). *Neka je  $(X, d)$  potpun metrički prostor, a  $f : X \rightarrow X$  kontrakcija (prema Definiciji 2.0.3). Tada  $f$  ima jednu jedinu fiksnu točku, tj. postoji jedinstvena točka  $P^* \in X$  takva da je  $f(P^*) = P^*$ .*

## POGLAVLJE 2. TEOREMI O EGZISTENCIJI I JEDINSTVENOSTI RJEŠENJA ODJ 7

Sada ćemo dokazati sljedeći teorem o lokalnoj egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Cauchyjevog problema:

**Teorem 2.0.6** (Picardov teorem, [4]). *Neka je  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  zatvoreni pravokutnik te neka je  $(t_0, x_0) \in D$ . Ukoliko je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija po varijabli  $t \in \mathbb{R}$  i Lipschitzova po varijabli  $x \in \mathbb{R}$ , tada postoji neki  $\varepsilon > 0$  uz koji Cauchyjev problem:*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

ima jedinstveno rješenje  $x(t)$  na intervalu  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ .

*Dokaz.* Neka je:

$$C_{a,b} = \overline{I_a(t_0)} \times \overline{B_b(x_0)} \subseteq D,$$

pri čemu su:

$$\overline{I_a(t_0)} = [t_0 - a, t_0 + a]$$

$$\overline{B_b(x_0)} = [x_0 - b, x_0 + b],$$

za  $a, b > 0$ . Funkcija  $f : C_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}$  je definirana na zatvorenom, tj. kompaktnom pravokutniku.

Neka je:

$$M := \sup_{(t,x) \in C_{a,b}} |f(t, x)|.$$

Kako je funkcija neprekidna na kompaktu  $C_{a,b}$ , taj supremum postoji i postiže se, tj.:

$$M = \max_{(t,x) \in C_{a,b}} |f(t, x)|.$$

Prema pretpostavkama teorema znamo da je funkcija  $f$  Lipschitz neprekidna po varijabli  $x \in \mathbb{R}$  na  $C_{a,b}$ , odnosno vrijedi:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad (t, x_1), (t, x_2) \in C_{a,b},$$

pri čemu je  $L$  Lipschitzova konstanta funkcije  $f$  po varijabli  $x$ .

Na vektorskom prostoru neprekidnih funkcija  $C(\overline{I_a(t_0)}, \mathbb{R})$  dobro je definirana sup-norma:

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{t \in \overline{I_a(t_0)}} |\varphi(t)| = \max_{t \in \overline{I_a(t_0)}} |\varphi(t)|,$$

pri čemu je vrijednost supremuma jednaka maksimumu zbog neprekidnosti funkcije na segmentu.

POGLAVLJE 2. TEOREMI O EGZISTENCIJI I JEDINSTVENOSTI RJEŠENJA ODJ 8

Sup-norma inducira tzv. uniformnu metriku na prostoru funkcija  $C(\overline{I_a(t_0)}, \mathbb{R})$ , a time i na metričkom prostoru koji je podskup,  $C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)})$ :

$$d(f, g) := \|f - g\|_\infty, \quad f, g \in C(\overline{I_a(t_0)}, \mathbb{R}).$$

Primijetimo, ako je  $f$  neprekidna na zatvorenom intervalu  $\overline{I_a(t_0)}$ , tada je ona po Weierstrasovom teoremu omeđena na  $\overline{I_a(t_0)}$ , pa je gornja norma dobro definirana.

Integriranjem, dobivamo da je početni Cauchyjev problem (2.2) ekvivalentan:

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

odnosno sa:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Za zadanu funkciju  $f : C_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiramo njoj pridruženi tzv. *Picardov operator* između dva prostora neprekidnih funkcija na sljedeći način:

$$\Gamma_f(\varphi)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in \overline{I_a(t_0)}, \quad \varphi \in C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)}).$$

Dokažimo da je Picardov operator neprekidna funkcija, tj. da je  $\Gamma_f(\varphi) \in C(\overline{I_a(t_0)}, \mathbb{R})$ . Da bismo dokazali neprekidnost na  $\overline{I_a(t_0)}$  moramo dokazati da za svaki  $t \in \overline{I_a(t_0)}$  vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0) \text{ t.d. } |t - s| < \delta \rightarrow |\Gamma_f(\varphi)(t) - \Gamma_f(\varphi)(s)| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Budući da je po pretpostavkama teorema funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija po obje varijable te da je  $\varphi : \overline{I_a(t_0)} \rightarrow \overline{B_b(x_0)}$  neprekidna, tada je neprekidna i funkcija:  $u \mapsto f(u, \varphi(u))$  na  $\overline{I_a(t_0)}$ .

Neka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljan. Uzmimo  $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$  i neka je  $|t - s| < \delta$ . Tada je:

1. Neka je  $t \geq s$ . Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} |\Gamma_f(\varphi)(t) - \Gamma_f(\varphi)(s)| &= \left| \int_{t_0}^t f(u, \varphi(u)) du - \int_{t_0}^s f(u, \varphi(u)) du \right| = \left| \int_s^t f(u, \varphi(u)) du \right| \leq \\ &\leq \int_s^t |f(u, \varphi(u))| du \leq \int_s^t M du = M(t - s) < M \cdot \delta < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Neka je  $t < s$ . Tada vrijedi:

$$|\Gamma_f(\varphi)(t) - \Gamma_f(\varphi)(s)| = \left| \int_t^s f(u, \varphi(u)) du \right| \leq \int_t^s |f(u, \varphi(u))| du \leq \int_t^s M du < M \cdot \delta < \varepsilon.$$

POGLAVLJE 2. TEOREMI O EGZISTENCIJI I JEDINSTVENOSTI RJEŠENJA ODJ 9

Dakle, dokazali smo da vrijedi (2.3), tj. da je  $\Gamma_f(\varphi)$  neprekidna funkcija.

Primijetimo da:  $\Gamma_f : C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)}) \rightarrow C(\overline{I_a(t_0)}, \mathbb{R})$ , tj. da je  $\Gamma_f(\varphi) \in C(\overline{I_a(t_0)}, \mathbb{R})$ .

Ukoliko dokažemo da je slika operatora  $\Gamma_f$  opet u  $C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)}) \subseteq C(\overline{I_a(t_0)}, \mathbb{R})$  te da je on kontrakcija u nekoj metrici na prostoru  $C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)})$  u kojoj je taj prostor dodatno potpun metrički prostor, tada prema Teoremu 2.0.5 postoji jedinstvena funkcija  $\varphi \in C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)})$  takva da vrijedi  $\Gamma_f(\varphi) = \varphi$ . Funkcija  $\varphi$  je tada jedinstveno rješenje ekvivalentnog početnog problema, uz to poprima vrijednosti u skupu  $\overline{B_b(x_0)}$  te dokaz teorema slijedi.

Prvo ćemo pokazati da operator  $\Gamma_f$  preslikava neprazan metrički prostor  $C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)})$  u sebe. To će vrijediti ukoliko dokažemo:

$$\Gamma_f(\varphi) \in C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)}),$$

tj.

$$|\Gamma_f(\varphi)(t) - x_0| \leq b, \quad \text{za svaki } t \in \overline{I_a(t_0)}.$$

Vrijedi:

$$|\Gamma_f(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \leq \int_{t_0}^t M ds = M|t - t_0| \leq Ma \leq b,$$

pri čemu je  $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ , a posljednja nejednakost slijedi ukoliko  $a > 0$  uzmemo dovoljno mali tako da vrijedi:

$$a \leq \frac{b}{M}.$$

Dokažimo sada da je prostor  $(C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)}), d)$  potpun. Da bismo dokazali potpunost prostora, moramo dokazati da svaki Cauchyjev niz u  $C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)})$  konvergira.

Neka je  $(f_n)_n$  proizvoljan Cauchyjev niz u  $C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)})$ . Dokazat ćemo da taj niz konvergira prema nekoj funkciji  $f \in C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)})$ .

Zbog toga što je  $(f_n)_n$  Cauchyjev niz tada vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } \forall m, k \geq N \text{ vrijedi } \|f_m - f_k\|_\infty < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Po definiciji sup-norme to je ekvivalentno:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } \forall m, k \geq N, \forall t \in \overline{I_a(t_0)} \text{ vrijedi } |f_m(t) - f_k(t)| < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Time smo pokazali da je  $\forall t \in \overline{I_a(t_0)}$  niz  $(f_n(t))_n$  Cauchyjev niz u  $\mathbb{R}$ . Budući da je  $\mathbb{R}$  potpun prostor tada će Cauchyjev niz  $(f_n(t))_n$  konvergirati. Iz toga slijedi da postoji  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  i označimo taj limes (definiran po točkama) s

POGLAVLJE 2. TEOREMI O EGZISTENCIJI I JEDINSTVENOSTI RJEŠENJA ODJ10

$$g(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad (2.6)$$

$t \in \overline{I_a(t_0)}$ .

Preostaje dokazati da je  $g$  neprekidna funkcija sa slikom u  $\overline{B_b(x_0)}$ , tj.  $g \in C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)})$ . Da bismo to dokazali prvo ćemo dokazati da je  $g$  i uniformni limes od  $(f_n)$ , a ne samo limes po točkama. Želimo dokazati da vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N^* \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } \forall n \geq N^* \text{ vrijedi } \|f_n - g\|_\infty < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Prema (2.5) vrijedi (za neki  $\varepsilon > 0$  i njegov  $N$  kao u (2.5)):

$$|f_m(t) - f_k(t)| < \varepsilon, \quad (2.8)$$

za sve  $t \in \overline{I_a(t_0)}$  i  $m, k \geq N$ . Kako je  $g$  točkovni limes niza  $(f_m)$ , pustimo  $\lim_{m \rightarrow \infty}$  na nejednakost (2.8), te dobivamo:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(t) - f_k(t)| \leq \varepsilon,$$

za sve  $t \in I_a$  te  $k \geq N$ . Kako je  $g(t)$  limes niza  $(f_m(t))$ , za svaki  $t \in I_a$ , zbog neprekidnosti funkcije apsolutne vrijednosti dobivamo

$$|g(t) - f_k(t)| \leq \varepsilon,$$

za svaki  $k \geq N$  i za svaki  $t \in I_a$ . To po def. sup-norme ekvivalentno možemo zapisati kao:

$$\|g - f_k\|_\infty < \varepsilon,$$

$\forall k \geq N$ .

Time smo dokazali da je  $g$  i uniformni limes od  $(f_n)$ , odnosno dokazali smo (2.7). Preostaje pokazati neprekidnost od  $f$ . Želimo dokazati da vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ t.d. } |t - s| < \delta \rightarrow |g(t) - g(s)| < \varepsilon. \quad (2.9)$$

Neka je  $\varepsilon > 0$  proizvoljan. Budući da je  $g$  uniformni limes od  $f_n$  na  $\overline{I_a(t_0)}$  tada vrijedi:

$$(\exists N_2 \in \mathbb{N}) \text{ t.d. } \forall n \geq N_2, \forall t \in \overline{I_a(t_0)} \text{ vrijedi } |f_n(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Budući da je  $f_{N_2}$  neprekidna funkcija tada  $\exists \delta$  t.d.  $|t - s| < \delta \rightarrow |f_{N_2}(t) - f_{N_2}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Za taj isti  $\delta > 0$  vrijedi:

$$|t - s| < \delta \rightarrow |g(t) - g(s)| = |g(t) - f_{N_2}(t) + f_{N_2}(t) + f_{N_2}(s) - f_{N_2}(s) - g(s)| \leq$$

POGLAVLJE 2. TEOREMI O EGZISTENCIJI I JEDINSTVENOSTI RJEŠENJA ODJ 1

$$\leq |g(t) - f_{N_2}(t)| + |f_{N_2}(t) - f_{N_2}(s)| + |f_{N_2}(s) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Time smo dokazali neprekidnost od  $g$ .

Ostaje još pokazati da je slika funkcije  $g$  u  $\overline{B_b(x_0)}$ . Za svaki  $t \in \overline{I_a(t_0)}$  znamo po pretpostavci da je  $f_n(t)$  u  $B_b(x_0)$ , pa je i limes  $g(t)$ , definiran u (2.6), u  $\overline{B_b(x_0)}$ , zbog zatvorenosti skupa  $\overline{B_b(x_0)}$ . Budući da tvrdnja vrijedi za svaki  $t$ , slika funkcije  $g$  nalazi se u  $\overline{B_b(x_0)}$ . Time smo dokazali potpunost prostora  $(C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(t_0)}), d)$ .

Nadalje, pokažimo da je Picardov operator kontrakcija, obzirom na normu  $\|\cdot\|_\infty$  na prostoru  $C(\overline{I_a(t_0)}, \mathbb{R})$ .

Pokažimo da postoji  $0 < q < 1$  takav da za svake dvije funkcije  $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)})$  vrijedi:

$$\|\Gamma_f(\varphi_1) - \Gamma_f(\varphi_2)\|_\infty \leq q \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.$$

Neka je  $t \in \overline{I_a(t_0)}$  takav da vrijedi:

$$\|\Gamma_f(\varphi_1) - \Gamma_f(\varphi_2)\|_\infty = \left| (\Gamma_f(\varphi_1) - \Gamma_f(\varphi_2))(t) \right|. \quad (2.10)$$

Naime, budući da su  $\Gamma_f(\varphi_1)$  i  $\Gamma_f(\varphi_2)$  neprekidne funkcije na segmentu  $\overline{I_a(t_0)}$ , tada će i njihova razlika biti neprekidna funkcija na istom segmentu. Slika te funkcije opet će biti segment, pa će se maksimum slike uistinu postizati u nekoj točki  $t \in \overline{I_a(t_0)}$ .

Koristeći definiciju Picardovog operatora  $\Gamma_f$ , za svaki  $t \in \overline{I_a(t_0)}$ , slijedi:

$$\begin{aligned} \left| (\Gamma_f(\varphi_1) - \Gamma_f(\varphi_2))(t) \right| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty ds \\ &\leq La \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty, \end{aligned}$$

pri čemu dolazimo do konstante kontrakcije ukoliko izaberemo  $a$  dovoljno mali tako da je  $La < 1$ .

Konačno, s norme prelazimo na induciranu metriku te pišemo:

$$d(\Gamma_f(\varphi_1), \Gamma_f(\varphi_2)) \leq La \cdot d(\varphi_1, \varphi_2).$$

*POGLAVLJE 2. TEOREMI O EGZISTENCIJI I JEDINSTVENOSTI RJEŠENJA ODI2*

Time vidimo da je  $\Gamma_f$  kontrakcija na metričkom prostoru  $(C(\overline{I_a(t_0)}, \overline{B_b(x_0)}), d)$ .

Stoga, za sve  $a$  koje zadovoljavaju:

$$a < \min \left\{ \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\},$$

po Banachovom teoremu slijedi tvrdnja teorema.

□



## Poglavlje 3

# Analitičke metode

Obične diferencijalne jednačbe moguće je rješavati različitim metodama, analitičkim, kvalitativnim i numeričkim.

U ovom poglavlju proučit ćemo različite analitičke metode i njihove primjene. Analitičke metode predstavljaju "tradicionalni" pristup rješavanju, a on ne uključuje računala i grafiku, no na taj način se mogu riješiti samo obične diferencijalne jednačbe koje pripadaju određenim klasama.

Za obične diferencijalne jednačbe prvog reda,  $x' = f(t, x)$ , postoje dvije najpoznatije klase koje se mogu lako analitički riješiti. Te dvije klase mogu se zapisati u elementarnom obliku:

1.  $x' = g(t)h(x)$
2.  $x' = p(t)x + q(t)$ ,

gdje se 1. odnosi na slučaj u kojem ćemo koristiti metodu separacije varijabli, a 2. je slučaj linearne diferencijalne jednačbe 1. reda, za koju imamo direktnu analitičku metodu rješavanja.

Specijalno, ako u jednačbi  $x' = f(t, x)$  funkcija  $f$  ne ovisi eksplicitno o  $x$ , tj.  $x'(t) = f(x(t))$ , tada jednačbu možemo riješiti eksplicitno jednom integracijom. Nadalje, u slučaju autonomne obične diferencijalne jednačbe 1. reda,  $x'(t) = f(x(t))$ , gdje  $f$  ne ovisi eksplicitno o  $t$ , jednačba se uvijek može riješiti *metodom separacije varijabli*.

Iako se može činiti da su sve obične diferencijalne jednačbe lako "rješive", odnosno da uvijek možemo pronaći eksplicitne formule za rješenje, takvo razmišljanje je vrlo daleko od realnosti. Zapravo, postoji malen broj jednačbi koje su eksplicitno rješive. Primjerice, niti jedna od sljedećih funkcija nije eksplicitno integrabilna u obliku elementarne funkcije:

$$f(t) = e^{-t^2}, f(t) = (t^3 + 1)^{\frac{1}{2}}, f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Međutim, činjenica da navedene funkcije ne možemo jednostavno integrirati ne znači da te funkcije nemaju primitivnu funkciju, odnosno da diferencijalne jednačbe u kojima se one pojavljuju nemaju rješenja. Također, mnoge diferencijalne jednačbe, koje se pojavljuju u različitim primjenama, toliko su kompleksne da im rješenje ne znamo zapisati u obliku eksplicitnog integrala. Iz tog razloga u sljedećim poglavljima promatramo druge načine za rješavanje običnih diferencijalnih jednačbi.

### 3.1 Separacija varijabli

**Definicija 3.1.1** (Definicija separabilne ODJ, [8]). *Kažemo da je diferencijalna jednačba  $x' = f(t, x)$  separabilna, ako se može napisati u obliku:*

$$x' = g(t)h(x), \quad (3.1)$$

gdje su  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dane neprekidne funkcije.

Separacija varijabli odnosi se na činjenicu da se funkcija  $f$  desne strane može rastaviti na umnožak funkcije po  $t$  i funkcije po  $x$ .

**Primjer 3.1.2** (Primjer separabilnih ODJ).

(a) *Diferencijalna jednačba  $\frac{x'}{1-x} = t^2$  je separabilna, budući da se može napisati u obliku:*

$$x' = t^2(1-x) \rightarrow \begin{cases} g(t) = t^2 \\ h(x) = 1-x \end{cases}$$

(b) *Diferencijalna jednačba  $x' + x^2 \sin t = 0$  je separabilna, budući da se može napisati u obliku:*

$$x' = -x^2 \sin t \rightarrow \begin{cases} g(t) = -\sin t \\ h(x) = x^2 \end{cases}$$

*Uočimo, funkcije  $g$  i  $h$  nisu jedinstvene; mogli smo odabrati funkcije na sljedeći način:*

$$g(t) = \sin t, \quad h(x) = -x^2$$

(c) *Diferencijalna jednačba  $x' = \sin x + \cos t$  nije separabilna, jer se ne može napisati u obliku (3.1).*

Primijetimo, prema [10], ako postoji  $x_0 \in \mathbb{R}$  takav da  $h(x_0) = 0$ , tada je konstantna funkcija  $u(t) = x_0$  jedno rješenje diferencijalne jednačbe (3.1). S druge strane, ako postoji interval tako da  $h(x) \neq 0$  za svaki  $x$  iz tog intervala, tada je diferencijalna jednačba separabilna i možemo je zapisati u obliku:

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t). \quad (3.2)$$

Integriranjem po nezavisnoj varijabli  $t$  dobivamo sljedeće:

$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} dt = \int g(t) dt + c, \quad (3.3)$$

gdje je  $c \in \mathbb{R}$  konstanta. Uvedimo supstituciju:

$$x = x(t), \quad dx = x'(t)dt.$$

Rezultat supstitucije je sljedeći izraz:

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt + c. \quad (3.4)$$

Pod pretpostavkom da primitivne funkcije postoje, neka  $H(x)$  predstavlja primitivnu funkciju funkcije  $\frac{1}{h(x)}$ , odnosno vrijednost  $H(x) = \int \frac{1}{h(x)} dx$ , dok  $G(t)$  predstavlja primitivnu funkciju funkcije  $g(t)$ , odnosno  $G(t) = \int g(t) dt$ . Vrijedi:

$$H(x) = \int \frac{1}{h(x)} dx, \quad G(t) = \int g(t) dt.$$

Jednadžba (3.4) može se napisati u obliku:

$$H(x) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

gdje smo implicitno definirali funkciju  $x$ , koja ovisi o varijabli  $t$ , koje implicitno ili eksplicitno definira rješenje  $x = u(t)$ .

Primijetimo, ako je u (3.5) funkcija  $H$  invertibilna na odgovarajućoj domeni, tada rješenje  $x(t)$  diferencijalne jednadžbe sa separabilnim varijablama možemo eksplicitno izraziti:

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + c).$$

Također, možemo primijeniti i teorem o implicitnoj funkciji za rješavanje. U protivnom, oblikom (3.5) je dan *implicitni* oblik rješenja.

Iskažimo sad teorem o skupu rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi sa separabilnim varijablama:

**Teorem 3.1.3** (Rješenja separabilne ODJ 1. reda, [6]). *Neka su  $h(x)$  i  $g(t)$  neprekidne funkcije na otvorenim intervalima  $x \in I$  i  $t \in J$  te pretpostavimo  $h(x) \neq 0$  na  $I$ , pri čemu su funkcije  $h(x)$  i  $g(t)$  kao u (3.1). Neka je  $H(x)$  primitivna funkcija funkcije  $\frac{1}{h(x)}$  na  $I$  i  $G(t)$*

primitivna funkcija funkcije  $g(t)$  na  $J$ . Tada je funkcija  $x$ , definirana na nekom podintervalu  $J'$  od  $J$ , rješenje separabilne diferencijalne jednačbe (3.1), ako i samo ako je  $x(J') \subseteq I$  i zadovoljava sljedeći identitet:

$$H(x(t)) = G(t) + C, \quad (3.6)$$

za sve  $t \in J'$ , gdje je  $C \in \mathbb{R}$  konstanta.

*Dokaz.* Neka  $x(t)$  predstavlja rješenje jednačbe (3.1) na intervalu  $J' \subseteq J$ . Tada je implicitno zadovoljeno  $x(J') \subseteq I$ , jer je  $I$  domena od  $h$ . Zbog  $h(x(t)) \neq 0, t \in J'$ , jednačbu (3.1) možemo podijeliti sa  $h(x)$  te dobivamo:

$$\frac{x'}{h(x)} = g(t), \quad t \in J'. \quad (3.7)$$

Neka su  $H$  i  $G$  primitivne funkcije iz iskaza teorema te vrijedi:  $\frac{1}{h(x)} = H'(x)$ , na  $x(J')$  i  $g(t) = G'(t)$ , na  $J$ . Tada imamo:

$$\frac{x'}{h(x)} = H'(x)x' = (H(x(t)))', \quad t \in J'. \quad (3.8)$$

Stoga, jednačba iz (3.1) jednaka je:

$$H(x(t))' = G'(t), \quad t \in J', \quad (3.9)$$

što, integriranjem po varijabli  $t$ , povlači (3.6).

Obrnuto, ukoliko diferencijabilna funkcija  $x$  zadovoljava (3.6), na intervalu  $t \in J'$ , te ako je  $x(J') \subseteq I$ , tada deriviranjem (3.6) po  $t$ , dobivamo jednakost (3.9), na  $J'$ . Prateći prethodne korake (3.9) je ekvivalentno jednačbi (3.1) na  $J'$ . Preostaje pitanje diferencijabilnosti funkcije  $x$ . No, kako je  $h(x(t)) \neq 0$  za  $t \in J'$ , funkcija  $h$  je na domeni  $x(J') \subseteq I$  ili pozitivna ili negativna. Tada je funkcija  $H$ , čija derivacija iznosi  $\frac{1}{h}$ , strogo rastuća ili strogo padajuća funkcija, na intervalu  $x \in x(J') \subseteq I$ . U oba slučaja, inverzna funkcija  $H^{-1}(x)$  je dobro definirana i diferencijabilna. Iz (3.6) slijedi:

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + C), \quad t \in J'. \quad (3.10)$$

Zbog diferencijabilnosti od  $H^{-1}$  i  $G$  (obje funkcije su primitivne funkcije), po lančanom pravilu, slijedi da je  $x(t)$  također diferencijabilna na  $J'$ , čime završavamo dokaz.  $\square$

**Korolar 3.1.4** ([6]). *Neka je dan Cauchyjev problem*

$$\begin{cases} x'(t) = h(x)g(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

gdje su zadovoljeni uvjeti Teorema 3.1.3 te  $t_0 \in J'$ , a  $x_0 \in I$ . Tada postoji jedinstvena konstanta  $C \in \mathbb{R}$  takva da rješenje  $x(t)$  jednačbe iz Teorema 3.1.3 zadovoljava početni uvjet  $x(t_0) = x_0$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $x$  rješenje diferencijalne jednačbe na intervalu  $J'$ , takvo da je  $x(J') \subseteq I$ . Tada ono zadovoljava (3.10). Uzmimo  $x = x_0$  i  $t = t_0$  u jednakosti (3.6) te dobivamo:

$$H(x_0) = G(t_0) + C.$$

Na taj način, na jedinstven način, definirali smo realnu konstantu  $C = H(x_0) - G(t_0)$ . Kako je  $x_0 \in x(J') \subseteq I$  te  $t_0 \in J'$ , konstanta je dobro definirana.

S druge strane, pretpostavimo da je dana konstanta  $C$  formulom  $C = H(x_0) - G(t_0)$ . Dokažimo da dana konstanta  $C$ , ubačena u (3.10), daje rješenje diferencijalne jednačbe na intervalu  $J$ , takvo da  $x(J) \subseteq I$  te  $x(t_0) = x_0$ . Ukoliko je desna strana (3.10) definirana na intervalu koji sadrži  $t_0$ , tada je, prema Teoremu 3.1.3, definirano rješenje  $x(t)$ , koje zadovoljava početni uvjet  $x(t_0) = x_0$  uz proizvoljnu konstantu  $C$ . Zbog toga, preostaje nam pokazati da domena funkcije desne strane (3.10) sadrži interval oko točke  $t_0$ .

Za  $t = t_0$ , desna strana (3.10) glasi:

$$H^{-1}(G(t_0) + C) = H^{-1}(H(x_0)) = x_0.$$

Prema tome, funkcija  $x(t)$  je definirana za  $t = t_0$ . Također, budući da su funkcije  $H^{-1}$  i  $G + C$  neprekidne i definirane na otvorenim intervalima, njihova kompozicija će opet biti definirana na otvorenom intervalu. Budući da taj otvoreni interval sadrži  $t_0$ , također sadrži i intervale oko točke  $t_0$ . Stoga je, funkcija  $x$  definirana na intervalu oko  $t_0$ , čime je dokaz završen.  $\square$

**Primjer 3.1.5** ([8]). *Zadan je Cauchyjev problem:*

$$\begin{cases} x' = (t + 1) \cos x, \\ x(1) = 0, \end{cases}$$

*Primjećujemo da se obična diferencijalna jednačba*

$$x' = (t + 1) \cos(x), \tag{3.11}$$

*može napisati u obliku (3.1), pri čemu je  $g(t) = t + 1$ , za sve  $t \in \mathbb{R}$ , i  $h(x) = \cos x$ , za sve  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Za sve  $x_0 \in \mathbb{R}$  takve da je  $\cos(x_0) = 0$ ,  $x(t) = x_0$  bit će konstantno rješenje. Rješavanjem jednačbe  $\cos(x) = 0$ , dobivamo konstantna rješenja oblika:*

$$x_k(t) = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}.$$

*Primijetimo da naš početni uvjet  $x_0 = 0$  nije tog oblika, pa u okolini  $x_0 = 0$  možemo pretpostaviti da je  $\cos x \neq 0$ .*

Funkcije  $h(x) = \cos x$  i  $g(t) = t + 1$  su neprekidne funkcije na otvorenim intervalima  $x \in \mathbb{R}$  i  $t \in \mathbb{R}$  i vrijedi  $\cos x \neq 0$  na nekom otvorenom intervalu oko  $x_0 = 0$ , pa običnu diferencijalnu jednadžbu (3.11) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\frac{dx}{\cos x} = (t + 1)dt.$$

Neka je  $H(x)$  primitivna funkcija funkcije  $\frac{1}{\cos(x)}$  definirana na intervalu  $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , a  $G(t)$  primitivna funkcija funkcije  $(1 + t)$  na  $\mathbb{R}$ . Prema Teoremu 3.1.3 znamo da tada postoji funkcija  $x$  definirana na nekom podintervalu od  $\mathbb{R}$ , koja je rješenje separabilne diferencijalne jednadžbe (3.11) te vrijedi:

$$H(x(t)) = G(t) + C,$$

odnosno:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int (t + 1)dt + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Riješimo integral s lijeve strane jednakosti (3.12). Neka je  $v = \sin x$ .

$$\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dv}{1 - v^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + v}{1 - v} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C$$

Riješimo i integral s desne strane jednakosti (3.12).

$$\int (t + 1)dt = \int t dt + \int dt = \frac{t^2}{2} + t + C$$

Iz (3.12) dobivamo implicitno rješenje jednadžbe (3.11):

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) = \frac{t^2}{2} + t + C,$$

odnosno:

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = e^{2\left(\frac{t^2}{2} + t + C\right)}. \quad (3.13)$$

Uočimo da za sve  $x \in \mathbb{R}$  takve da  $h(x) = \cos(x) \neq 0$  (Pretpostavka Teorema 3.1.3), sigurno će vrijediti  $\sin(x) \neq 1$ .

Konačno, uvrštavanjem početnog uvjeta  $x(1) = 0$  u dobiveno implicitno rješenje, dobivamo:

$$\frac{1 + \sin(0)}{1 - \sin(0)} = e^{2\left(\frac{1^2}{2} + 1 + C\right)} \rightarrow C = -\frac{3}{2}.$$

Dakle, rješenje,  $u(t)$ , zadanog Cauchyjevog problema zapisano u implicitnom obliku, je sljedeće:

$$\frac{1 + \sin(u(t))}{1 - \sin(u(t))} = e^{2\left(\frac{t}{2} + t - \frac{3}{2}\right)},$$

za sve  $t \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  takve da je  $u(t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

## 3.2 Linearna diferencijalna jednačba prvog reda

Neka su  $p$  i  $q$  dvije neprekidne funkcije definirane na intervalu  $I = (a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Tada diferencijalna jednačba:

$$x' = p(t)x + q(t) \quad (3.14)$$

predstavlja opću linearnu diferencijalnu jednačbu prvog reda.

Jednačba (3.14) naziva se **homogena** ako vrijedi  $q(t) \equiv 0$  na  $I$ . U suprotnom, jednačba (3.14) zove se **nehomogena**.

Za jednačbu (3.14), jednačbu

$$x' = p(t)x \quad (3.15)$$

nazivamo *pripadnom homogenom jednačbom*.

**Primjer 3.2.1** ([8]). *Jednačba  $x' = p(t)x$  predstavlja ujedno i separabilnu i homogenu običnu diferencijalnu jednačbu. U ovome primjeru ćemo, postupcima iz prethodnog poglavlja, doći do rješenja navedene obične diferencijalne jednačbe.*

*Ako je  $x(t_0) = 0$  za neki  $t_0 \in I$ ,  $x(t) \equiv 0$  je jedno rješenje jednačbe na nekom podintervalu od  $I$  oko  $t_0$ . Naime, tada je i  $x'(t) = 0$  i  $x(t) = 0$  na tom podintervalu, pa je jednačba zadovoljena. Pretpostavimo sad da je na intervalu  $I$   $x(t) \neq 0$ , za svaki  $t \in I$ . Tada možemo podijeliti s  $x$ , te primjenom metode separacije varijabli dobivamo:*

$$\int \frac{1}{x} dx = \int p(t) dt \quad (3.16)$$

$$\ln|x| = \int p(t) dt \quad (3.17)$$

$$|x| = e^{\int p(t) dt + C'} \quad (3.18)$$

$$x_c(t) = C e^{\int p(t) dt}, \quad (3.19)$$

pri čemu je  $C = e^{C'} > 0$ . Zbog nenegativnosti konstante  $C$  možemo ukloniti apsolutnu vrijednost u (3.18).

Neka je, uz homogenu jednadžbu, dan i početni uvjet  $x(t_0) = x_0$ ,  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \neq 0$  (za  $x_0 = 0$  imamo lokalno konstantno rješenje 0). Dijeljenjem sa  $x(t)$  i integriranjem na intervalu  $[t_0, t]$ , u slučaju  $x \neq 0$ , (3.16) daje:

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(t)}{x(t)} dx = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau. \quad (3.20)$$

Uvođenjem supstitucije  $x(t) = s$  te  $ds = x'(t)dt$  dobivamo:

$$\int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)} \frac{1}{s} ds = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \quad (3.21)$$

$$\ln s \Big|_{x_0}^{x(t)} = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \quad (3.22)$$

$$\ln \frac{x(t)}{x_0} = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \quad (3.23)$$

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau}. \quad (3.24)$$

Dakle, uz početni uvjet  $x(t_0) = x_0$  rješenje homogene diferencijalne jednadžbe prvog reda, u slučaju  $x_0 \neq 0$  glasi:

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau} \quad (3.25)$$

Ako je  $x_0 = 0$ , po komentaru gore lokalno rješenje oko  $t_0$  je  $x \equiv 0$ .

Prilikom rješavanja nehomogenih jednadžbi, pomoći će nam rješenje homogene jednadžbe <sup>1</sup>.

**Teorem 3.2.2** (O rješivosti nehomogenih linearnih jednadžbi, [8]). *Rješenje nehomogene linearne jednadžbe  $x' = p(t)x + q(t)$ , dano je s:*

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t), \quad (3.26)$$

gdje  $x_p(t)$  predstavlja jedno (partikularno) rješenje originalne jednadžbe  $x' = p(t)x + q(t)$ , a  $x_c(t)$  predstavlja skup svih rješenja pripadne homogene jednadžbe,  $x' = p(t)x$ .

Nadalje, ako rješavamo Cauchyjev problem s početnim uvjetom  $x(t_0) = x_0$ , tada u (3.26) biramo ono rješenje  $x_c$ , homogene jednadžbe, koje zadovoljava početni uvjet  $x_c(t_0) = x_0 - x_p(t_0)$ .

<sup>1</sup>Zbog Primjera 3.2.1 znamo da će svaka homogena jednadžba biti ujedno i separabilna, pa metodama iz prethodnog poglavlja rješavamo separabilnu jednadžbu.



*Dokaz.* Neka je  $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , pri čemu je  $x_c$  jedno (bilo koje) rješenje homogene jednačbe, a  $x_p$  jedno partikularno rješenje nehomogene jednačbe. Pokažimo da je tada  $x$  rješenje nehomogene jednačbe. Vrijedi:

$$x' - p(t)x = (x_c(t) + x_p(t))' - p(t)(x_c(t) + x_p(t)) = \underbrace{x_c'(t) - p(t)x_c(t)}_{=0} + \underbrace{x_p'(t) - p(t)x_p(t)}_{=q(t)} = q(t).$$

Obratno, neka je  $x(t)$  rješenje originalne diferencijalne jednačbe. Tada vrijedi:

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t).$$

Ukoliko je  $x_p$  partikularno rješenje, tada vrijedi  $x_p' = p(t)x_p + q(t)$ . Oduzimanjem ove dvije jednačbe dobivamo

$$(x - x_p)' = p(t)(x - x_p),$$

pa je  $x - x_p$  rješenje homogene jednačbe, tj. postoji  $c \in \mathbb{C}$  takav da je  $x - x_p = x_c$ .  $\square$

Budući da jednačbe (3.19) i (3.25) daje eksplicitnu formulu za rješenje linearne homogene jednačbe,  $x_c$ , za rješenje nehomogene linearne jednačbe preostaje pronaći jedno (bilo koje) partikularno rješenje  $x_p$  originalne, nehomogene jednačbe. Opisat ćemo dvije metode: metoda neodređenih koeficijenata <sup>2</sup> i metoda varijacije konstanti <sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup>Metoda neodređenih koeficijenata predstavlja jednostavniju metodu, ali ne može se primijeniti u svim slučajevima.

<sup>3</sup>Metoda varijacije konstante može se primijeniti u svim slučajevima, ali će većinom dovesti do komplikiranijeg računa.

## Metoda neodređenih koeficijenata

**Primjer 3.2.3** ([8]). *Odredimo opće rješenje diferencijalne jednačbe  $x' = x + \sin t$ .*

*Rješenje.* Iz Primjera 3.2.1 znamo da su sva rješenja pripadne homogene jednačbe,  $x' = x$ , dana s:

$$x_c(t) = e^{\int dt + C} = Ce^t, \quad C > 0.$$

Jedno rješenje  $x_p(t)$  originalne diferencijalne jednačbe pokušat ćemo odrediti metodom pogađanja, na temelju desne strane  $\sin t$ . Tražimo partikularno rješenje oblika:  $x_p(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$ , gdje su  $\alpha, \beta$  slobodne realne konstante koje odredimo uvrštavanjem u jednačbu:

$$\alpha \cos t - \beta \sin t = \alpha \sin t + \beta \cos t + \sin t.$$

Izjednačavanjem koeficijenata s desne i lijeve strane dolazimo do sustava jednačbi:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \\ -\beta &= \alpha + 1, \end{aligned}$$

pa dolazimo do rješenja  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ . Stoga, jedno partikularno rješenje jednačbe je  $x_p(t) = -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t$ .

Konačno, opće rješenje originalne diferencijalne jednačbe, po Teoremu 3.2.2, možemo zapisati:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = Ce^t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t, \quad C > 0.$$

**Primjer 3.2.4** ([8]). *Odredimo opće rješenje diferencijalne jednačbe  $x' = x + e^{2t}$ .*

*Rješenje.* Rješenje homogene diferencijalne jednačbe  $x_c$  jednako je kao u Primjeru (3.2.3). Pogodimo jedno partikularno rješenje originalne diferencijalne jednačbe  $u_p$ . Na osnovu desne strane  $e^{2t}$  rješenje tražimo u sličnom obliku:  $x_p(t) = \alpha e^{2t}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ubacivanjem u početnu diferencijalnu jednačbu dobivamo:

$$2\alpha e^{2t} = \alpha e^{2t} + e^{2t},$$

iz čega slijedi  $\alpha = 1$ . Dolazimo do općeg rješenja diferencijalne jednačbe:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = Ce^t + e^{2t}, \quad C > 0.$$

Objasnilo heuristički kako pogađamo partikularno rješenje na temelju desne strane. Neka je zadana diferencijalna jednačba  $x' - p(t)x = q(t)$ . Tražimo vektorski prostor

funkcija kojima pripada desna strana,  $q(t)$ , diferencijalne jednačbe te koji je zatvoren<sup>4</sup> na operaciju:

$$f(t) \mapsto f'(t) - p(t)f(t) = \left[ \frac{d}{dt} - p(t) \right] f(t).$$

Nađimo bazu  $f_1, \dots, f_n$  tog vektorskog prostora. Kako se desna strana,  $q(t)$ , može na jedinstven način dobiti kao linearna kombinacija vektora baze, pod pretpostavkom da skup  $\{f_i'(t) - p(t)f_i(t) : i = 1, \dots, n\}$  ostaje linearno nezavisan, tj. baza, kao i  $\{f_i : i = 1, \dots, n\}$ , rješenje  $x_p(t)$  možemo naći u obliku linearne kombinacije baznih funkcija tog vektorskog prostora.

U Primjeru 3.2.3, prostor  $V := \{\alpha \sin t + \beta \cos t : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ , tj. linearna ljuska funkcija  $\sin t$  i  $\cos t$ , je dvodimenzionalan realan vektorski prostor zatvoren na operaciju  $f \rightarrow f' - f$ . Na sličan način odredit ćemo vektorski prostor u sljedećem primjeru.

**Primjer 3.2.5** ([8]). *Odredimo opće rješenje diferencijalne jednačbe  $x' = x + e^t$ .*

*Rješenje.* Do rješenja pripadne homogene jednačbe dolazimo na isti način kao u Primjeru 3.2.3 i ono je dano s  $x_c(t) = Ce^t$ ,  $C > 0$ .

Slično kao u gornjem primjeru, promatramo jednodimenzionalan vektorski prostor,  $V := \{\alpha e^t : \alpha \in \mathbb{R}\}$ , kojem pripada funkcija desne strane  $e^t$ , te koji je zatvoren na operaciju  $f \rightarrow f' - f$ . Zato partikularno rješenje tražimo u obliku  $\alpha e^t$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Iako vrijedi da je jednodimenzionalni prostor  $\{\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ , zatvoren s obzirom na operaciju  $f' - f$ , rješenje  $u_p(t) = \alpha e^t$  neće biti partikularno rješenje početne diferencijalne jednačbe. Ubacimo izraz za  $x_p(t)$  u diferencijalnu jednačbu  $x' = x + e^t$ :

$$\alpha e^t = \alpha e^t + e^t.$$

Dobivamo  $\alpha = \alpha + 1$ , što nema rješenja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Zaključujemo da smo odabrali krivi oblik u kojem tražimo partikularno rješenje.

Primijetimo da desna strana pripada i dvodimenzionalnom vektorskom prostoru  $V := \{e^t, te^t\}$ , koji je također zatvoren na operaciju  $f \rightarrow f' - f$ . Budući da se radi o dvodimenzionalnom prostoru, partikularno rješenje tražimo u obliku:  $x_p(t) = \alpha e^t + \beta te^t$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Uvrštavanjem  $x_p(t)$  u  $x' = x + e^t$  dobivamo:

$$\alpha e^t + \beta e^t + \beta te^t = \alpha e^t + \beta te^t + e^t,$$

iz čega slijedi:  $\alpha = 0$  i  $\beta = 1$ . Partikularno rješenje je tada  $x_p(t) = te^t$ .

Opće rješenje početne diferencijalne jednačbe je tada:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = Ce^t + te^t, \quad C > 0.$$

<sup>4</sup>Vektorski prostor  $V$  je zatvoren na operaciju  $f \mapsto f' - pf$  ukoliko vrijedi:  $f \in V$  povlači  $f' - pf \in V$ .

Kao što smo vidjeli iz primjera, pokušavamo naći dovoljno-dimenzionalni vektorski prostor, koji sadrži desnu stranu i zatvoren je na operaciju  $f \rightarrow f' - pf$ , a da dopušta dovoljno stupnjeva slobode (slobodnih konstanti) da možemo naći partikularno rješenje u tom obliku.

U sljedećem potpoglavlju bavit ćemo se metodom koja se može primijeniti na sve linearne diferencijalne jednačbe prvog reda, metodom varijacije konstante.

### Metoda varijacije konstante

Iako je ova metoda računski nešto kompliciranija od prethodne, njezinim korištenjem uvijek<sup>5</sup> ćemo doći do partikularnog rješenja. Također, tom metodom izvest ćemo i eksplicitnu formulu za rješenje linearne obične diferencijalne jednačbe prvog reda.

Prema [8], opće rješenje pripadne homogene jednačbe (3.15) dano je s:

$$x_c(t) = Ce^{\int p(t)dt}, C \in \mathbb{R}.$$

Uvodimo supstituciju  $C = C(t)$ , tj. pretpostavimo ovisnost konstante o varijabli  $t$ . Tada opće rješenje pripadne nehomogene jednačbe tražimo u obliku:

$$x_c(t) = C(t)e^{\int p(t)dt}, \quad (3.27)$$

gdje je  $t \rightarrow C(t)$  nepoznata funkcija koju dobijemo uvrštavanjem u nehomogenu jednačbu. Pretpostavljeno rješenje (3.27) ubacimo u nehomogenu jednačbu (3.14) te dobivamo:

$$\underbrace{C'(t)e^{\int p(t)dt} + C(t)p(t)e^{\int p(t)dt}}_{\text{derivacija } x_c(t)} = p(t)C(t)e^{\int p(t)dt} + q(t),$$

iz čega slijedi:

$$C'(t) = q(t)e^{-\int p(t)dt} = r(t). \quad (3.28)$$

Integrirajući (3.28) dolazimo do izraza za varijablu  $C(t)$ :

$$C(t) = \int r(t)dt + C = \int [q(t)e^{-\int p(t)dt}] dt + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

a prema (3.27) opće rješenje je dano s:

$$x(t) = e^{\int p(t)dt} \underbrace{\left\{ \int [q(t)e^{-\int p(t)dt}] dt + C \right\}}_{C(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ubacivanjem početnog uvjeta rješavamo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x'(t) = p(t)x(t) + q(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Neka je  $x_c$  skup svih rješenja homogene jednačbe. Tada imamo sljedeći Cauchyjev problem, za homogenu jednačbu:

<sup>5</sup>Osim u slučajevima kada podintegralna funkcija neće biti integrabilna.

$$\begin{cases} x'_c(t) = p(t)x_c(t), \\ x_c(t_0) = C, \end{cases} \quad (3.30)$$

gdje je  $C > 0$  neka konstanta.

Dijeljenjem sa  $x_c(t)$ , u jednažbi (3.30), te integriranjem na intervalu  $[t_0, t]$  dobivamo:

$$x_c(t) = Ce^{\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau}.$$

Uvodimo supstituciju  $C = C(t)$ . Tada rješenje pripadne nehomogene jednažbe glasi:

$$x_c(t) = C(t)e^{\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau}. \quad (3.31)$$

Pretpostavljeno rješenje (3.31) ubacimo u nehomogenu jednažbu (3.14) te dobivamo:

$$C'(t)e^{\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} + C(t)p(t)e^{\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} = p(t)C(t)e^{\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} + q(t),$$

iz čega slijedi:

$$C'(t) = q(t)e^{-\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau}.$$

Integriranjem prethodne jednakosti, na intervalu  $[t_0, t]$  dobivamo:

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t q(s)e^{-\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds. \quad (3.32)$$

Ubacivanjem (3.32) u (3.31) slijedi da je opće rješenje nehomogene jednažbe jednako:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t q(s)e^{-\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds + C(t_0) \right\}. \quad (3.33)$$

Ubacivanjem početnog uvjeta  $x(t_0) = x_0$  u (3.33) slijedi:

$$x_0 = x(t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} p(\tau)d\tau} \left\{ \int_{t_0}^{t_0} q(s)e^{-\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds + C(t_0) \right\} = C(t_0).$$

Time smo izveli formulu za opće rješenje linearne nehomogene jednažbe prvog reda:

$$x(t) = e^{\int p(t)dt} \left\{ \int [q(t)e^{-\int p(t)dt}] dt + C \right\}, C \in \mathbb{R}, \quad (3.34)$$

te za rješenje Cauchyjevog problema:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau} \left\{ \int_{t_0}^t [q(s)e^{-\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau}] ds + x_0 \right\}, \quad (3.35)$$

uz početni uvjet  $x(t_0) = x_0$ .

Primijetimo da rješenje (3.35) uz početni uvjet  $x(t_0) = x_0$  možemo zapisati u obliku:

$$x(t) = w(t_0, t) \left\{ \int_{t_0}^t w(s, t_0) q(s) ds + x_0 \right\}, \quad (3.36)$$

gdje je:

$$w(s, t) = e^{\int_s^t p(\tau) d\tau}. \quad (3.37)$$

**Primjer 3.2.6.** [8] Odredimo opće rješenje linearne diferencijalne jednačbe  $x' = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

*Rješenje:* Rješenje homogene jednačbe,  $x' = ax$ , jednako je

$$x_c(t) = Ce^{\int a dt} = Ce^{at}, \quad C > 0.$$

Rješenje nehomogene jednačbe  $x' = ax + b$  nalazimo metodom varijacije konstante.

1. Opće rješenje nehomogene jednačbe tražimo u obliku:

$$x(t) = C(t)e^{at}.$$

2. Rješenje iz 1. uvrstimo u nehomogenu jednačbu  $x' = ax + b$  te dobivamo:

$$\underbrace{C'(t)e^{at} + aC(t)e^{at}}_{\text{derivacija } x(t) \text{ iz 1.}} = aC(t)e^{at} + b$$

$$C'(t) = be^{-at}. \quad (3.38)$$

3. Integrirajući dobivamo:

$$C(t) = \int be^{-at} dt = -\frac{b}{a}e^{-at} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Prema 1. dobivamo da je opće rješenje nehomogene jednačbe:

$$x(t) = C(t)e^{at} = \left[ -\frac{b}{a}e^{-at} + c \right] e^{at} = -\frac{b}{a} + ce^{at}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ovim primjerom ilustrirali smo korištenje strategije rješavanja nehomogene jednačbe metodom varijacije parametara, odnosno kako možemo pomoću te metode doći do rješenja nehomogene jednačbe (3.14). U sljedećem primjeru ćemo, bez ponovnog prolaska po svim koracima, koristiti formulu (3.34) kao danu.

**Primjer 3.2.7.** [1] Odredimo opće rješenje diferencijalne jednačine  $x' = -\frac{3}{t}x + t^2$ , uz početni uvjet  $x(1) = \frac{1}{2}$ .

*Rješenje:* Do rješenja nehomogene diferencijalne jednačine  $x' = -\frac{3}{t}x + t^2$  dolazimo primjenom formule (3.34), uz  $p(t) = -\frac{3}{t}$  i  $q(t) = t^2$ .

Pomoću formule (3.34), dolazimo do općeg rješenja nehomogene jednačine:

$$x(t) = t^{-3} \left\{ \int t^5 dt + C \right\} = t^{-3} \left\{ \frac{t^6}{6} + C \right\} = Ct^{-3} + \frac{t^3}{6}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ukoliko ubacimo početni uvjet,  $x(1) = \frac{1}{2}$ , u opće rješenje diferencijalne jednačine, dolazimo do realne konstante  $C$ :

$$x(1) = \frac{1}{2} = 2C \cdot (1)^{-3} + \frac{1^3}{6} = 2C + \frac{1}{6} \rightarrow C = \frac{1}{6}.$$

Uz početni uvjet,  $x(1) = \frac{1}{2}$ , opće rješenje početne diferencijalne jednačine iznosi:

$$x(t) = \frac{t^{-3}}{3} + \frac{t^3}{6}.$$



# Poglavlje 4

## Kvalitativne metode

Diferencijalne jednađbe koriste se u mnogim granama znanosti te se često susrećemo s diferencijalnim jednađbama koje je vrlo teško ili čak nemoguće riješiti analitičkim metodama. U prethodnom poglavlju vidjeli smo vrlo specijalne oblike jednađbi koje imaju eksplicitna rješenja koja je lako pronaći. Bez mogućnosti analitičkog rješavanja jednađbi, razvijene su druge metode za analizu ponašanja rješenja u vremenu.

Metode proučavanja diferencijalnih jednađbi bez eksplicitnog rješavanja općenito se mogu podijeliti u dvije klase: kvalitativne i numeričke metode.

U ovom poglavlju bavit ćemo se kvalitativnim metodama u kojim na temelju oblika jednađbe, bez eksplicitnog rješavanja, procjenjujemo ponašanje rješenja u vremenu. Jedna od kvalitativnih metoda je grafički prikaz *polja smjerova* i to će nam predstavljati glavni alat u kvalitativnoj analizi.

Radi jednostavnosti, u ovom poglavlju bavit ćemo se samo običnim diferencijalnim jednađbama prvog reda:

$$x' = f(t, x),$$

pri čemu je  $f$  definirana na  $D \subset \mathbb{R}^2$ , a za sve grafičke prikaze koristiti ćemo Geogebra [2].

## 4.1 Polje smjerova

*Polje smjerova* ili *polje nagiba* za običnu diferencijalnu jednadžbu  $x' = f(t, x)$ , predstavlja smjer ili nagib rješenja  $t \mapsto x(t)$ , u svakoj točki  $(t, x)$ -ravnine.

*Integralnom krivuljom* nazivamo parametarsku krivulju rješenja  $t \mapsto x(t)$ . Geometrijski, integralne krivulje su one krivulje kojima polje smjerova predstavlja tangencijalne vektore duž čitave krivulje. Integralne krivulje ispunjavaju čitavo područje  $(t, x)$ -ravnine u kojem funkcija  $f(t, x)$  zadovoljava uvjete koji osiguravaju postojanje i jedinstvenost rješenja Cauchyjevog problema, pri čemu smo teoriju egzistencije i jedinstvenosti rješenja razvili u poglavlju 2. Krivulje se u tom području također nigdje ne sijeku i nigdje ne dodiruju jedna drugu.

Ukoliko je dan početni uvjet  $x(t_0) = x_0$  te ako su u okolini točke  $(t_0, x_0)$  ispunjeni uvjeti Picardovog teorema 2.0.6, postoji lokalno jedinstvena integralna krivulja koja prolazi kroz točku  $(t_0, x_0)$ . Ona se može skicirati u  $(t, x)$ -ravnini prateći polje smjerova, počevši u točki  $(t_0, x_0)$ , kao u Primjeru (4.1.1).

Polje smjerova za jednadžbe oblika  $x' = f(t, x)$ , može se konstruirati izračunavanjem vrijednosti funkcije  $f$  u točkama  $(t, x)$ -ravnine. Naime, ako je funkcija  $x(t)$  rješenje diferencijalne jednadžbe prvog reda  $x' = f(t, x)$  koje prolazi nekom točkom  $(t_0, x_0)$ , tada je smjer tangente na krivulju  $t \mapsto (t, x(t))$  u njezinoj točki  $(t_0, x_0)$  dan s  $f(t_0, x_0)$ . Odaberemo li skup 'pravilno' raspoređenih točaka  $(t, x)$  u onom dijelu ravnine u kojem tražimo rješenje, te kroz svaku od odabranih točaka nacrtamo liniju smjera s koeficijentom smjera  $f(t, x)$ , dobit ćemo polje smjerova diferencijalne jednadžbe  $x' = f(t, x)$ . Polje smjerova nam najčešće daje dobru ideju o izgledu rješenja, te na taj način možemo skicirati integralne krivulje rješenja. Pri tom koristimo svojstvo da nam u svakoj točki nacrtane linije smjera pokazuju smjer krivulje, tj. daju tangentu na krivulju.

Po uzoru na [8], u idućim primjerima pokazat ćemo nekoliko načina za skiciranje polja smjerova.

### Metoda mreže

Za diferencijalnu jednadžbu  $x' = f(t, x)$  zamislimo pravokutnu mrežu točaka koja pokriva  $(t, x)$ -ravninu, a zatim odredimo i nacrtamo nagib rješenja kroz svaku.

**Primjer 4.1.1.** *Neka je zadana diferencijalna jednadžba  $x' = -tx$ . Skicirajmo polje smjerova.*

*Rješenje.* U većini slučajeva polje smjerova konstruirat ćemo uz pomoć računala, ali u ovom primjeru pokazat ćemo način na koji možemo ručno skicirati polje smjerova.

Skiciranje polja smjerova započinje odabirom proizvoljno mnogo točaka  $(t, x)$ -ravnine, odnosno uređenih parova  $(t_0, x_0)$ , koje svrstavamo u jednu tablicu.

Kada smo odredili željene točke u  $(t, x)$ -ravnini, u tablicu dodajemo redak  $f(t, x)$ , odnosno, u našem primjeru, za svaku točku  $(t_0, x_0)$  računamo vrijednost funkcije  $f(t_0, x_0) = -t_0x_0$ . Dobivamo sljedeću tablicu:

Tablica 4.1: Odabrane točke u  $(t, x)$ -ravnini i vrijednost funkcije  $f(t, x)$ .

t	-3	-3	-2	-2	-1	-1	0	1	1	2	2	3	3
x	-3	3	-2	2	-1	1	0	1	-1	2	-2	3	-3
f	-9	9	-4	4	-1	1	0	-1	1	-4	4	-9	9

Na Slici 4.1 nacrtane su točke iz Tablice 4.1 zajedno sa ucrtanim linijama čiji je nagib vrijednost funkcije  $f(t, x)$ . Crvenom linijom nacrtana je jedna integralna krivulja.

Napomenimo da smo u ovom primjeru mogli naći i eksplicitno rješenje pomoću metoda iz Poglavlja 3. Rješenje danog Cauchyjevog problema:

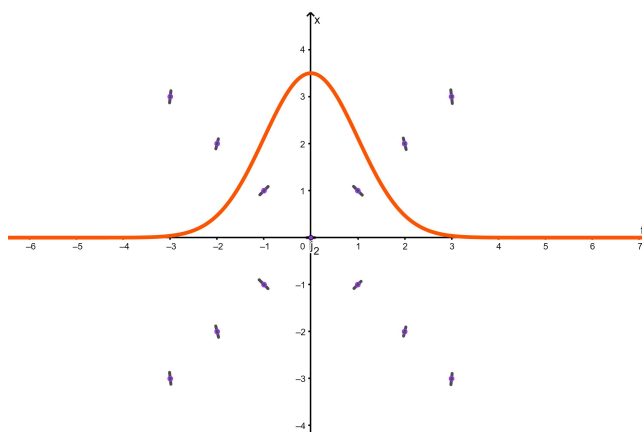
$$\begin{cases} x'(t) = -tx \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

iznosi:

$$x(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}},$$

pri čemu je  $C = x_0e^{-t_0^2/2}$ .

Stoga ovdje istu integralnu krivulju možemo dobiti i direktno, crtanjem grafa funkcije rješenja kroz neku točku  $(t_0, x_0)$ .



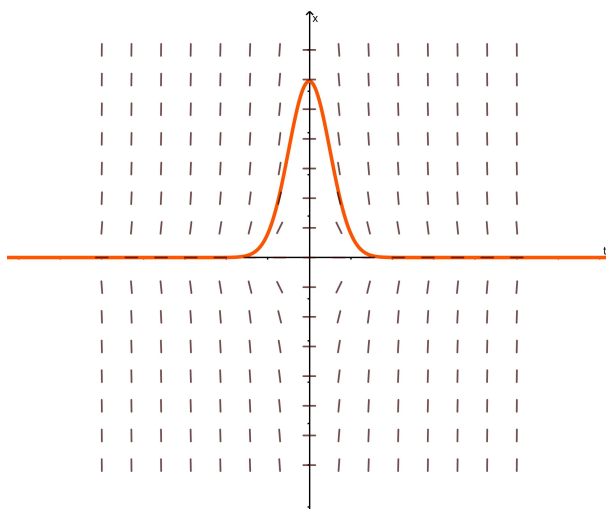
Slika 4.1: Ručna skica polja smjerova i jedno rješenje diferencijalne jednačbe  $x' = -tx$  (Geogebra).

U sljedećem primjeru promatrat ćemo istu diferencijalnu jednadžbu,  $x' = -tx$ , no ovoga puta ćemo pokazati kako bismo na efikasniji način mogli iscrtati polje smjerova, koje će dodatno imati puno više odabranih točaka te će time bolje opisivati rješenja zadane diferencijalne jednadžbe.

U Primjeru (4.1.1) polje smjerova metodom mreže možemo efikasnije crtati koristeći sljedeća opažanja:

- Ukoliko  $t = 0$  ili  $x = 0$ , tada je  $f(t, x) = -tx = 0$ . Stoga je nagib kroz bilo koju točku na koordinatnim osima jednak 0. Zaključujemo da će linije smjera biti horizontalno položene duž koordinatnih osi.
- Linije smjera (a onda i integralne krivulje) su centralno simetrične s obzirom na ishodište te osno simetrične obzirom na obje osi <sup>1</sup>. Stoga ucrtano polje smjerova za prvi kvadrant daje polje smjerova za sve ostale kvadrante.
- Ukoliko fiksiramo pozitivni  $t$ , nagib linije smjera (negativan) postaje strmiji kako se pozitivni  $x$  povećava.
- Ukoliko fiksiramo pozitivni  $x$ , nagib linije smjera (negativan) postaje strmiji kako se pozitivni  $t$  povećava.

Polje smjerova koje dobivamo prateći prethodne korake skicirano je na Slici 4.2, uz prikaz integralne krivulje jednog od rješenja početne diferencijalne jednadžbe  $x' = -tx$ .



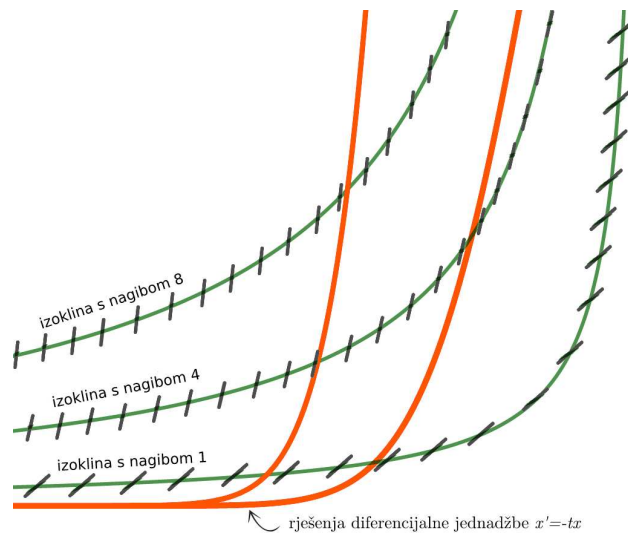
Slika 4.2: Polje smjerova i jedno rješenje diferencijalne jednadžbe  $x' = -tx$  (Geogebra).

<sup>1</sup> Simetrija je posljedica činjenice da je funkcija  $f(t, x)$  antisimetrična oko obje osi. Točnije, ukoliko bilo koja od varijabli  $t$  ili  $x$  promijeni predznak, tada će se promijeniti i predznak funkcije  $f$ .

## Metoda izoklina

*Metoda izoklina* predstavlja drugi (brži) način konstrukcije polja smjerova diferencijalnih jednađbi.

*Izoklina* je skup točaka  $(t, x)$  u domeni polja smjerova u kojima je  $f(x, t)$  konstantna, tj. takvih da postoji konstanta  $c \in \mathbb{R}$  takva da je  $x' = f(x, t) = c$ . Geometrijski, izokline su krivulje *konstantnog nagiba* u svakoj točki. Algebarski, jednađbu izokline sa konstantom  $c$  pronalazimo uz pomoć jednakosti  $f(t, x) = c$ . Primijetimo da u svakoj točki izokline rješenje diferencijalne jednađbe siječe izoklinu s nagibom  $c$ , kao što je prikazano na sljedećoj slici.



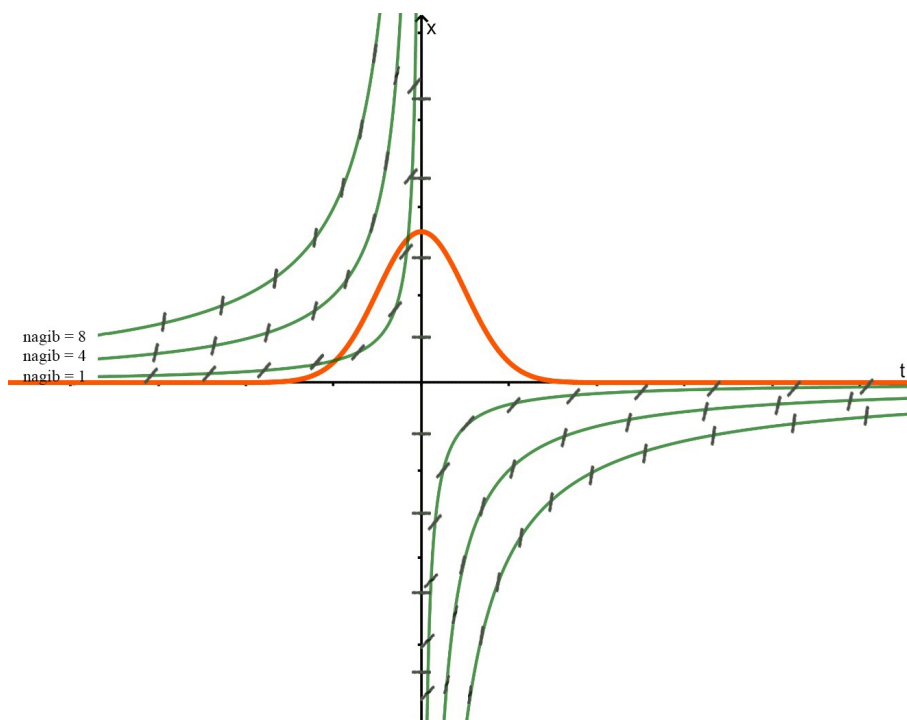
Slika 4.3: Izokline diferencijalne jednađbe  $x' = -tx$  (Geogebra).

Primijetimo, izoklina predstavlja krivulju koja spaja točke s jednakim nagibima polja smjerova, no općenito ne predstavlja (sa rijetkim iznimkama) rješenje diferencijalne jednađbe.

Jednađbe izoklina za jednađbu  $x' = -tx$  iz Primjera 4.1.1 dane su grafom funkcije  $x(t) = -\frac{c}{t}$ , za sve  $c \in \mathbb{R}$ . Primijetimo, izokline čine 1-parametarsku (u ovisnosti o parametru  $c$ ) familiju hiperbola, a za  $c = 0$  hiperbole 'degeneriraju' u koordinatne osi, kao što pokazuje Slika 4.4.

Iz definicije izoklina znamo da će svaka  $c$ -izoklina prolaziti kroz točke u kojima je linija smjera nagiba  $c \in \mathbb{R}$ . Zbog toga, da bismo nacrtali polje smjerova, u svim točkama (tj. nekoliko njih)  $c$ -izokline ucrtavamo liniju smjera nagiba  $c$ . Na taj način dolazimo do po-

lja smjerova. Ukoliko želimo dobiti širu sliku, navedeni postupak ponovimo za nekoliko različitih konstanti  $c$ , kao što je prikazano na Slici 4.4.



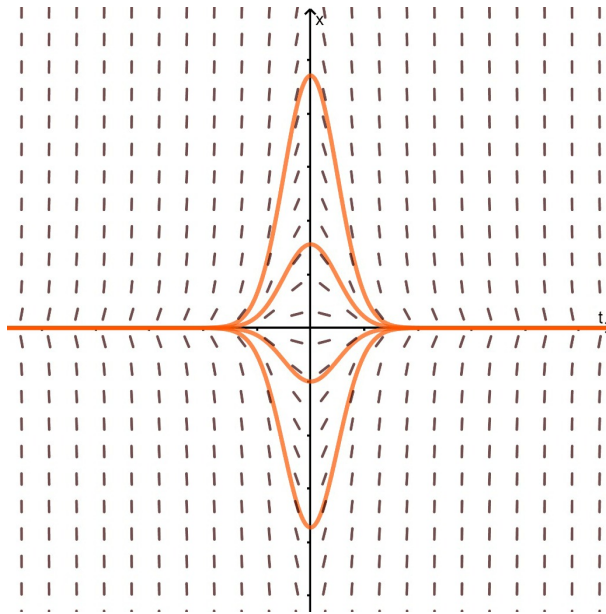
Slika 4.4: Izokline diferencijalne jednačine  $x' = -tx$  (Geogebra).

Primijetimo da na Slici 4.4 dobivamo isto polje smjerova kao i na Slici 4.1, ali smo sada napravili drugačiji odabir točaka u kojima smo crtali linije smjerova.

### Računalni izračun

Polje smjerova lakše je konstruirati, pogotovo u težim primjerima, uz pomoć računalnih programa. Za prikaz polja smjerova mogu se koristiti neki od programa: Matlab, Maxima, Maple i drugi. Program koji ćemo mi koristiti biti će Geogebra [2].

Računalo računa vrijednost funkcije  $f(t, x)$  na unaprijed određenoj mreži u  $(t, x)$ -ravnini, te zatim crta nagibe u tim točkama. Na Slici 4.5 može se vidjeti rezultat jednog takvog izračuna, za diferencijalnu jednačinu iz Primjera 4.1.1.

Slika 4.5: Polje smjera diferencijalne jednačbe  $x' = -tx$ .

---

SlopeField (f, <Number n>, <Length multiplier a>)

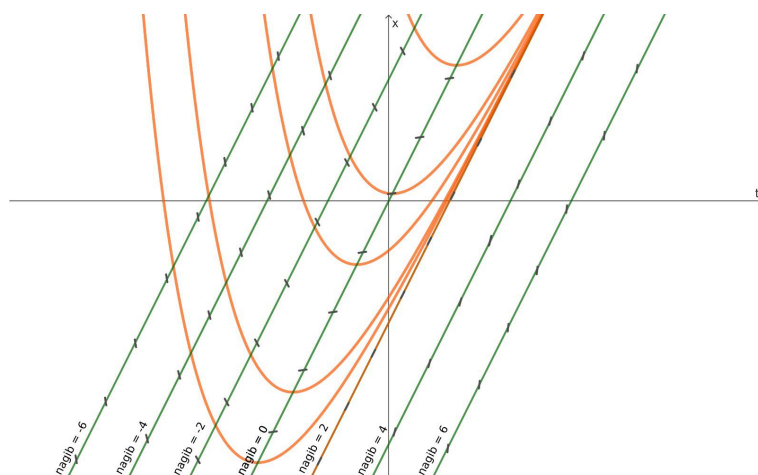
solveODE (f, <Start x>, <Start y>, <End x>, <Step>)

---

## Neki primjeri crtanja polja smjerova

**Primjer 4.1.2** ([8]). *Nacrtajte polje smjerova za diferencijalnu jednadžbu  $x' = 2t - x$ .*

*Rješenje.* Pomoću metode izoklina konstruirat ćemo polje smjerova. Za danu diferencijalnu jednadžbu, jednadžba izoklina glasi  $2t - x = c$ , za  $c \in \mathbb{R}$ . U ovom slučaju, izokline su predstavljene pravicima, a polje smjerova dato je na Slici 4.6.



Slika 4.6: Polje smjerova diferencijalne jednadžbe  $x' = 2t - x$  i nekoliko krivulja rješenja (Geogebra).

Korištenjem metode separacije varijabli, uvedene u Poglavlju 3, eksplicitno rješenje diferencijalne jednadžbe u algebarskom obliku dato je s:  $x(t) = ce^{-t} + 2t - 2$ , za sve  $c \in \mathbb{R}$  i  $t \in \mathbb{R}$ . Za sva rješenja vrijedi:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ce^{-t} + 2t - 2}{t} = 2,$$

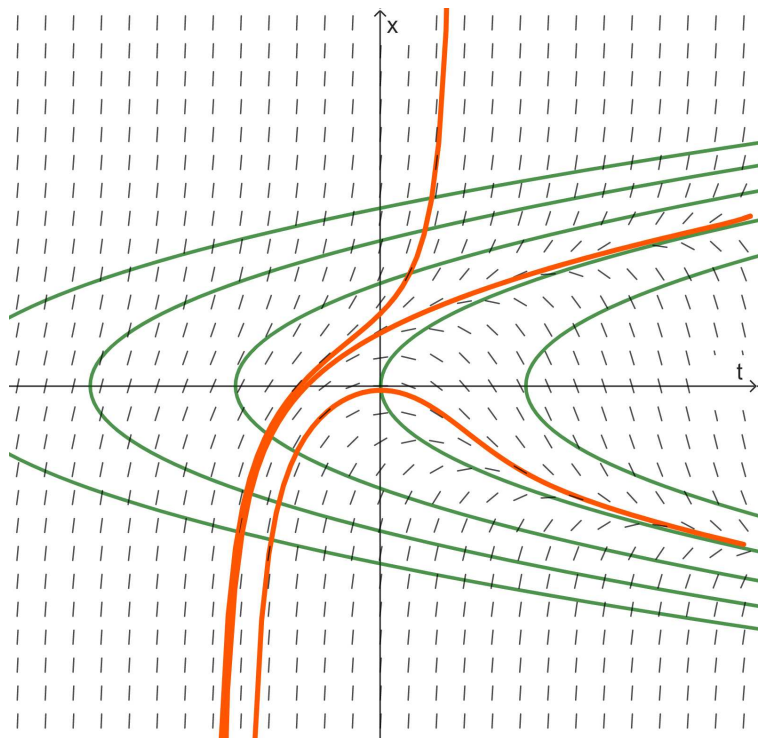
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - 2t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (ce^{-t} + 2t - 2t - 2) = -2.$$

Zbog toga što prethodni račun vrijedi za svaki  $c \in \mathbb{R}$ , pravac  $x = 2t - 2$  predstavlja desnu kosu asimptotu na sva rješenja diferencijalne jednadžbe  $x' = 2t - x$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Nadalje, pravac  $x(t) = 2t - 2$  je jedno rješenje (za  $c = 0$ ) te predstavlja rijedak primjer kada je izoklina također i rješenje.

**Primjer 4.1.3** ([8]). *Nacrtajte polje smjerova za diferencijalnu jednadžbu  $x' = x^2 - t$ .*



*Rješenje.* Primijetimo da, za razliku od prethodnih primjera, danu jednadžbu ne znamo eksplicitno riješiti metodama iz Poglavlja 3 (nije linearna, ne možemo separirati varijable), pa na ovom primjeru kvalitativna metoda polja smjerova zaista ima smisla. Izokline zadane diferencijalne jednadžbe su parabole zadane jednadžbom  $x^2 - t = c, c \in \mathbb{R}$ . Polje smjerova, nacrtano uz pomoć računalnog programa Geogebra, dano je na Slici 4.7.



Slika 4.7: Polje smjerova diferencijalne jednadžbe  $x' = x^2 - t$  i nekoliko krivulja rješenja (Geogebra).

Na Slici 4.7 crvenom bojom ucrtane su tri krivulje rješenja zadane diferencijalne jednadžbe. Pomoću polja smjerova, možemo primijetiti različita ponašanja rješenja u vremenu, ovisno o početnoj točki. Kada  $t \rightarrow +\infty$ , neka rješenja će rasti u  $+\infty$ , neka padati u  $-\infty$ , dok će postojati točno jedno rješenje koje će razdvajati navedena dva ponašanja. Razlog postojanja takvog jedinstvenog "razdvajajućeg" rješenja je činjenica da oko tog rješenja možemo konstruirati tzv. *lijevak*, vidjeti Definiciju 4.2.4 i Teorem 4.2.9 u Poglavlju 4.2.

Diferencijalna jednadžba iz Primjera 4.1.3 posebno je zanimljiva zbog toga što, iako izgleda jednostavno, njezino rješenje nemoguće je svesti na izračunavanje integrala, odnosno diferencijalnu jednadžbu ne možemo riješiti analitičkim metodama. Uz pomoć kvalitativnih metoda u Primjeru 4.1.3, unatoč tome što ne postoji egzaktna formula za rješenje dife-

rencijalne jednađbe, dobili smo skicu ponašanja rješenja u vremenu za različite početne uvjete.

Zaključno, polje smjerova obično konstruiramo uz pomoć metode mreže ili metode izoklina, koje možemo ucrtavati ručno ili koristeći računalo.

## 4.2 Kvalitativni opis rješenja

Prilikom kvalitativnog opisa rješenja promatrat ćemo ponašanje krivulje rješenja kad  $t \rightarrow \pm\infty$ . U ovom poglavlju ćemo promatrati tri kvalitativno različite vrste dugoročnog ponašanja krivulja rješenja: postojanje *lijevka*, *antilijevka* i postojanje *vertikalne asimptote*.

### 1. Granice

Neka je

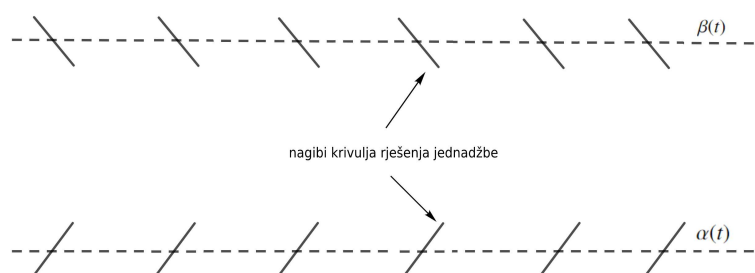
$$x' = f(t, x)$$

diferencijalna jednađba prvog reda. Neka je zadan interval  $I = [t_0, t_1]$ , pri čemu za  $t_0$  i/ili  $t_1$  dozvoljavamo i vrijednost  $\pm\infty$ .

**Definicija 4.2.1** ([8]). *Kažemo da je neprekidno diferencijabilna funkcija  $t \mapsto \alpha(t)$  donja granica za diferencijalnu jednađbu  $x' = f(t, x(t))$ , na intervalu  $I$ , ako vrijedi  $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$ , za sve  $t \in I$ .*

*Kažemo da je neprekidno diferencijabilna funkcija  $t \mapsto \beta(t)$  gornja granica za diferencijalnu jednađbu  $x' = f(t, x(t))$ , na intervalu  $I$ , ako vrijedi  $f(t, \beta(t)) \leq \beta'(t)$ , za sve  $t \in I$ .*

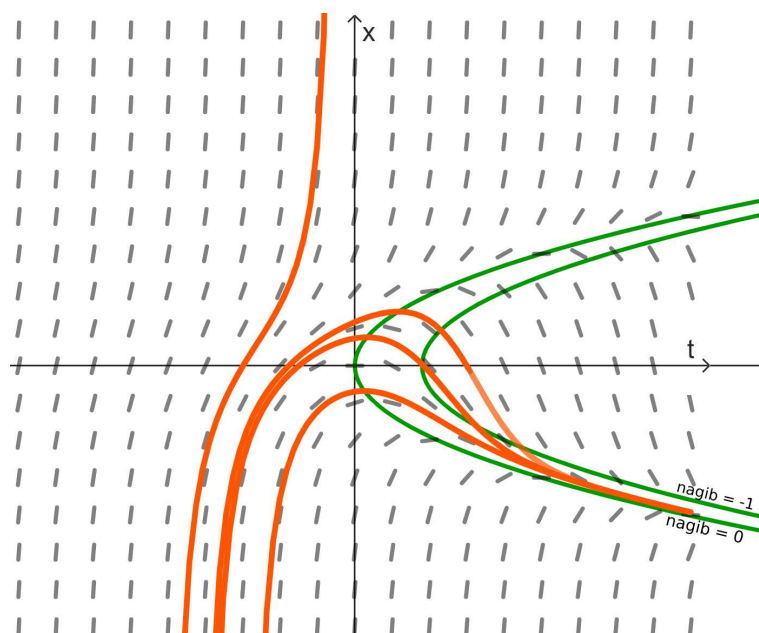
Drugim riječima, za donju granicu  $\alpha(t)$ , u točki presjeka rješenja diferencijalne jednađbe i krivulje  $\alpha(t)$ , nagib rješenja ne može biti manji od nagiba krivulje  $\alpha(t)$ , kao što je prikazano na Slici 4.8. Suprotan zaključak slijedi za gornju granicu.



Slika 4.8: Primjer donje granice  $\alpha(t)$  i gornje granice  $\beta(t)$ .

Intuitivno možemo zamisliti da donja granica "gura" sva rješenja prema gore, dok ih gornja granica "gura" prema dolje. Primijetimo da gornja i donja granica nisu općenito krivulje rješenja.

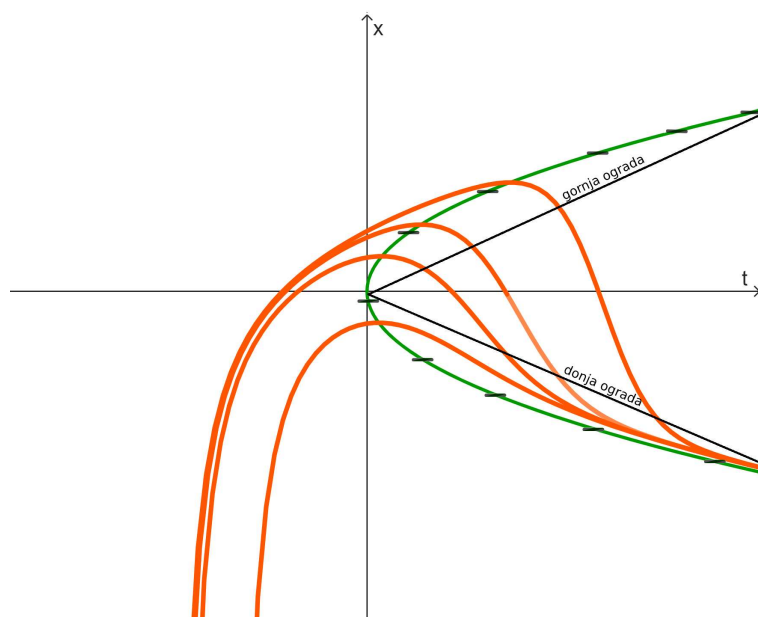
Vratimo se diferencijalnoj jednačini  $x' = x^2 - t$  iz Primjera 4.1.3. Na Slici 4.9 prikazano je polje smjerova zajedno sa izoklinama (zeleno) te nekoliko integralnih krivulja (crveno).



Slika 4.9: Polje smjerova diferencijalne jednačine  $x' = x^2 - t$  (Geogebra).

Na Slici 4.9 uočavamo da se sva rješenja (za dovoljno veliki  $t$ ), smiještaju između izoklina  $x^2 - t = 0$  i  $x^2 - t = -1$ . To nas navodi na zaključak da izoklina  $x^2 - t = 0$  predstavlja donju granicu, dok izoklina  $x^2 - t = -1$  predstavlja gornju granicu na intervalu  $I = [t_0, +\infty]$  za dovoljno veliki  $t_0$ .

S druge strane, ukoliko pogledamo samo izoklinu  $x^2 - t = 0$ , na Slici 4.10 uočavamo kako ona ujedno predstavlja i gornju granicu (u prvom kvadrantu) i donju granicu (u četvrtom kvadrantu).



Slika 4.10: Izoklina  $x^2 - t = 0$ , koja predstavlja gornju i donju granicu (Geogebra).

Granice možemo konstruirati na mnogo načina, ali najčešće ćemo ih tražiti pomoću izoklina.

Ukoliko u Definiciji 4.2.1 vrijede stroge nejednakosti:

$$\alpha'(t) < f(t, \alpha(t)) \quad \text{ili} \quad \beta'(t) < f(t, \beta(t)), \quad t \in I, \quad (4.2)$$

tada za granicu na intervalu  $I$  (gornju ili donju) kažemo da je **jaka**. U slučaju kada za neke  $t \in I$  vrijedi jednakost, kažemo da je granica **slaba**.

U ovisnosti o "propusnosti" granice na rješenja jednadžbe, u sljedećoj definiciji uvest ćemo još jednu podjelu na **porozne** i **neporozne granice**.

**Definicija 4.2.2** ([8]). *Neka je zadana diferencijalna jednadžba  $x' = f(t, x)$ .*

*Za donju granicu kažemo da je neporozna na rješenja diferencijalne jednadžbe na intervalu  $I$ , ako za sva rješenja  $t \rightarrow x(t)$  te jednadžbe na  $I$  vrijedi implikacija: ako za neki  $t_0 \in I$  vrijedi  $\alpha(t_0) \leq x(t_0)$ , tada  $\alpha(t) < x(t)$ , za sve  $t > t_0$ .*

*Za gornju granicu kažemo da je neporozna na rješenja diferencijalne jednadžbe na intervalu  $I$ , ako za sva rješenja  $t \rightarrow x(t)$  te jednadžbe na  $I$  vrijedi implikacija: ako za neki  $t_0 \in I$  vrijedi  $x(t_0) \leq \beta(t_0)$ , tada vrijedi  $x(t) < \beta(t)$ , za sve  $t > t_0$ .*

*Za granicu (gornju ili donju) kažemo da je porozna, ako nije neporozna.*

Neporozna granica ponaša se poput polupropusne membrane u kemiji ili biologiji: rješenje koje prijeđe iznad neporozne donje granice ostati će iznad nje, a rješenje koje se spusti ispod neporozne gornje granice, ostati će ispod nje. Skoro u svakom slučaju granica će biti neporozna. Takvu tvrdnju vrlo je teško dokazati, ali u sljedećem teoremu dokazujemo nešto blažu tvrdnju: jaka granica uvijek je neporozna.

**Teorem 4.2.3** ([8]). *Jaka granica za diferencijalnu jednadžbu  $x' = f(t, x)$  je neporozna na svakom intervalu.*

*Dokaz.* Dokazat ćemo tvrdnju za donju granicu  $\alpha(t)$ , za gornju se dokaže slično. Pretpostavimo suprotno, tj. granica  $\alpha(t)$  je jaka i porozna. Znači da postoji neko rješenje  $t \mapsto x(t)$  na nekom intervalu  $I$ , za koje vrijedi  $\alpha(t_0) \leq x(t_0)$ , za neki  $t_0 \in I$ , i postoji  $t \in \langle t_0, +\infty \rangle \cap I$  za koji vrijedi  $\alpha(t) \geq x(t)$ .

Neka je  $K := \{t : \alpha(t) \geq x(t), t \in [t_0, +\infty) \cap I\}$  te neka je  $t_1 := \inf K$ . Tada je  $t_1 \geq t_0$ . Ukoliko dokažemo da je funkcija  $\alpha - x : [t_0, +\infty) \cap I \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna, tada je skup  $K = (\alpha - x)^{-1}([0, +\infty))$  zatvoren u  $[t_0, +\infty) \cap I$ , pa je infimum jednak minimumu.

Primijetimo da je funkcija  $\alpha - x$  neprekidna po definiciji rješenja (mora biti neprekidno diferencijabilna pa onda i neprekidna) i definiciji granice kao neprekidne diferencijabilne funkcije.

Zaključujemo da je:

$$t_1 = \min \{t : \alpha(t) \geq x(t), t \in [t_0, +\infty) \cap I\}, \quad (4.3)$$

odnosno  $t_1$  je prvi trenutak u kojem će se krivulja rješenja  $x(t_1)$  spustiti ispod donje granice  $\alpha(t_1)$ . Primijetimo da će u trenutku  $t_1$  zbog neprekidnosti funkcije  $\alpha - x$  zapravo vrijediti  $\alpha(t_1) = x(t_1)$ . U trenutku  $t_1$ , po definiciji jake granice, vrijedi:

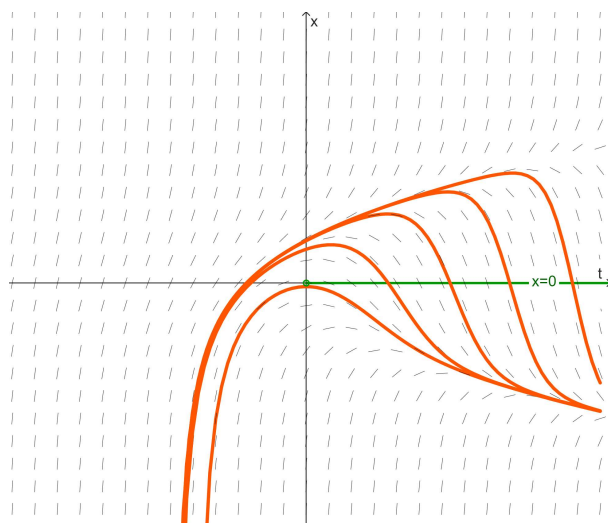
$$x'(t_1) = f(t_1, x(t_1)) = f(t_1, \alpha(t_1)) > \alpha'(t_1). \quad (4.4)$$

Stoga vrijedi:  $(x - \alpha)'(t_1) > 0$ , pa je u točki  $t_1$  funkcija  $x - \alpha$  strogo rastuća, što znači da postoji neki  $\varepsilon > 0$  takav da je  $x(t) - \alpha(t) < x(t_1) - \alpha(t_1) = 0$ ,  $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$ . To je u kontradikciji s činjenicom da je  $\alpha(t)$  donja granica.

□

Primijetimo, u Teoremu 4.2.3 zahtijevamo da granica bude jaka. U suprotnom ne bismo došli do kontradikcije, jer bi tada u (4.4) umjesto  $\alpha'(t_1) < x'(t_1)$  vrijedilo  $\alpha'(t_1) = x'(t_1)$ , pa ne bismo imali zaključak lokalnog strogog rasta funkcije  $x - \alpha$  oko  $t_1$ . Zbog toga, pri konstrukciji granice bit će nam važno da je jaka.

Vratimo se diferencijalnoj jednadžbi iz Primjera 4.1.3. Sa Slike 4.11 uočavamo da će polupravac  $x = 0$ , za  $t > 0$ , biti jedna gornja granica.



Slika 4.11: Polupravac  $x = 0$ , za  $t > 0$ , kao jaka gornja granica u Primjeru 4.1.3 (Geogebra).

Naime, neka je  $\beta(t) = 0$ ,  $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ . Vrijedi:

$$\beta'(t) = 0 > -t \quad (4.5)$$

za sve  $t > 0$ . Stoga, prema (4.5) i definiciji jake granice iz (4.2), zaključujemo da je polupravac  $x = 0$ , za  $t > 0$ , jaka gornja granica.

Primijetimo, polupravac  $x = 0$ , za  $t > 0$ , predstavlja i neporoznu gornju granicu, odnosno sva rješenja koja prođu ispod gornje granice  $\beta(t)$  više se nikad ne vrate iznad nje.

## 2. Lijevak i antilijevak

Granice će nam biti od važnosti u slučajevima kad imamo u paru donju i gornju granicu (jednu do druge). Na taj način dobit ćemo tzv. **lijevak** i **antilijevak**, čije su formalne definicije u nastavku.

U Teoremu 4.2.5 dokazat ćemo da, jednom kad rješenje "uđe" u lijevak, ono ostaje u njemu.

Kod konstrukcije lijevka i antiljevka, bit će nam važno da su donja i gornja granica neporozne. U Teoremu 4.2.3 vidjeli smo da će jaka granica biti uvijek neporozna, dok slaba možda neće.

**Definicija 4.2.4** ([8]). *Ukoliko na nekom intervalu  $I$  za diferencijalnu jednadžbu  $x' = f(t, x)$  postoji neporozna donja granica  $\alpha(t)$  i neporozna gornja granica  $\beta(t)$  te ako vri-*

jedi  $\alpha(t) < \beta(t)$ ,  $t \in I$ , tada skup uređenih parova

$$\{(t, x) : t \in I, \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

zovemo **lijevak**.

**Teorem 4.2.5** ([8]). *Ukoliko je lijevak definiran granicama  $\alpha(t)$  i  $\beta(t)$ ,  $t \in I$ , te ukoliko je  $x(t)$  rješenje diferencijalne jednačbe  $x' = f(t, x)$  takvo da se  $(t^*, x(t^*))$  nalazi u lijevku, za neki  $t^* \in I$ , tada se u lijevku nalaze svi uređeni parovi  $(t, x(t))$ , za  $t \in I$  takve da je  $t > t^*$  te koji se nalaze u domeni definiranosti rješenja  $x(t)$ .*

*Dokaz.* Teorem je direktna posljedica Definicije 4.2.4 i Teorema 4.2.3, budući da neporozna donja granica sprečava prelazak rješenja ispod lijevka, a neporozna gornja granica sprečava prelazak rješenja iznad lijevka.  $\square$

**Definicija 4.2.6** ([8]). *Ukoliko na nekom intervalu  $I$  za diferencijalnu jednačbu  $x' = f(t, x)$  postoji neporozna donja granica  $\alpha(t)$  i neporozna gornja granica  $\beta(t)$  te ako vrijedi  $\alpha(t) > \beta(t)$ ,  $t \in I$ , tada skup uređenih parova*

$$(t, x) : t \in I, \alpha(t) \geq x \geq \beta(t) \subseteq \mathbb{R}^2$$

zovemo **antilijevak**.

**Teorem 4.2.7** ([8]). *Neka su  $\alpha(t)$  i  $\beta(t)$  granice takve da vrijedi  $\beta(t) < \alpha(t)$ , za sve  $t \in [a, b)$ , pri čemu dopuštamo  $b = +\infty$ , te neka  $\alpha(t)$  i  $\beta(t)$  tvore antilijevak za diferencijalnu jednačbu  $x' = f(t, x)$  na  $t \in [a, b)$ . Dodatno, neka je  $f(t, x)$ , za sve  $(t, x)$  unutar obrnutnog lijevka, Lipschitzova po varijabli  $x \in \mathbb{R}$  i neprekidna po varijabli  $t \in \mathbb{R}$ . Također, pretpostavimo da su rješenja koja se u nekom trenutku nalaze u antilijevku proširiva na čitavi interval  $[a, b)$ . Tada postoji rješenje  $x = u(t)$  takvo da  $(t, u(t))$  ostaje u antilijevku za sve  $t \in [a, b)$ .*

*Dokaz.* Za neki trenutak  $s \in [a, b)$ , uzmimo rješenja  $\gamma_s(t)$  i  $\delta_s(t)$  na  $[a, b)$ , diferencijalne jednačbe  $x' = f(t, x)$ , takva da vrijedi  $\gamma_s(s) = \alpha(s)$  i  $\delta_s(s) = \beta(s)$ , kao što je i prikazano na Slici 4.12. Takva rješenja postoje lokalno oko  $(s, \alpha(s))$ , odnosno  $(s, \beta(s))$  zbog Picardovog teorema, pa su proširiva i globalno na  $s \in [a, b)$  po pretpostavci o proširivosti u iskazu teorema.

Kako je:

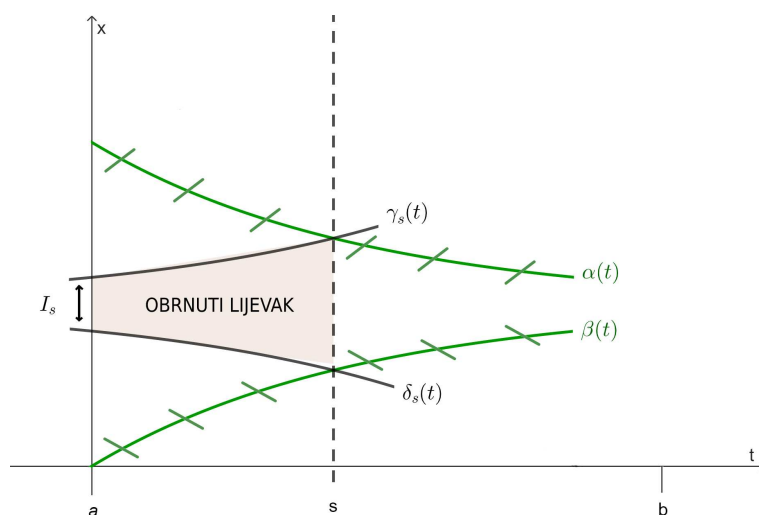
$$\delta_s(s) = \alpha(s) < \gamma_s(s) = \beta(s), \quad (4.6)$$

mora vrijediti i

$$\delta_s(a) < \gamma_s(a), \quad (4.7)$$

jer bi se u protivnom rješenja presjekla u nekom trenutku  $t \in (a, s)$  unutar antilijevka, a to je kontradikcija s jedinstvenosti rješenja unutar antilijevka po Picardovom teoremu 2.0.6.

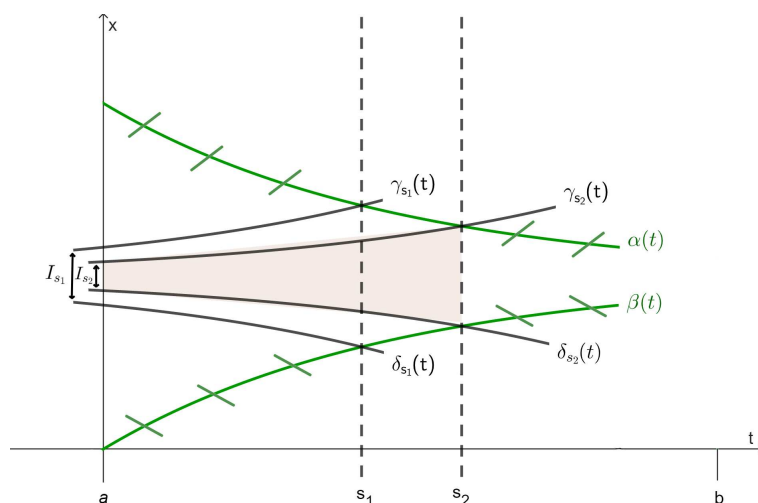
Neka je  $I_s = [\delta_s(a), \gamma_s(a)]$ ,  $s \in [a, b)$ , kao što je prikazano na Slici 4.12. Interval  $I_s$  je očito neprazan zbog nejednakosti (4.7).



Slika 4.12: Obrnuti lijevak unutar antilijevka (Geogebra).

Kad  $s \rightarrow b$ , pretpostavka o zadovoljenju Lipschitzovog uvjeta iz Picardovog teorema 2.0.6 garantira lokalnu jedinstvenost rješenja  $\delta_s(t)$  i  $\gamma_s(t)$ , u svakoj točki  $t \in [a, b)$ , zbog čega će intervali  $I_s$ , kad  $s$  raste prema  $b$ , formirati ugniježđenu familiju zatvorenih nepraznih intervala, kao što je i prikazano na Slici 4.13. Drugim riječima,  $I_{s_2} \subseteq I_{s_1}$ , za  $s_2 > s_1$ ,  $s_1, s_2 \in [a, b)$ . Naime,  $\gamma_{s_1}(s_1) > \gamma_{s_2}(s_1)$  i  $\delta_{s_1}(s_1) < \delta_{s_2}(s_1)$  jer je  $s_2 > s_1$ , a  $s_2$  je prva točka presjeka rješenja  $\gamma_{s_2}$  s krivuljom  $t \mapsto \alpha(t)$  i slično za rješenje  $\delta_{s_2}$ . Kad bi gornji rub intervala  $I_{s_2}$  bio strogo iznad gornjeg ruba  $I_{s_1}$ , na intervalu  $t \in [a, s_1)$  bi se  $\gamma_{s_1}$  i  $\gamma_{s_2}$  presjekli, što je kontradikcija s lokalnom jedinstvenošću rješenja.





Slika 4.13: Ugniježdjena familija zatvorenih intervala na vertikalnoj osi (Geogebra).

Po Cantorovom teoremu na kompaktu, presjek ugniježdjene familije zatvorenih nepraznih intervala mora sadržavati barem jednu točku (tj. presjek je neprazan), koju ćemo označiti sa  $x_0$ . Proširenje rješenja  $x = u(t)$  iz točke  $(a, x_0)$  unutar antilijevka, tj. takvo da je  $u(a) = x_0$ , na  $t \in [a, b)$ , je rješenje diferencijalne jednačbe  $x' = f(t, x)$ , koje ostaje u antilijevku. Doista, za bilo koji trenutak  $s \in [a, b)$  znamo da rješenja  $\delta_s(t)$  i  $\gamma_s(t)$ , zbog lokalne jedinstvenosti rješenja i  $\delta_s(s) < \gamma_s(s)$ , formiraju antilijevak za sve  $a \leq t \leq s$  te da rješenje  $u(t)$  kreće unutar tog antilijevka i, štoviše,  $u(t)$  zadovoljava:

$$\beta(t) \leq \delta_s(t) \leq u(t) \leq \gamma_s(t) \leq \alpha(t), \quad (4.8)$$

za sve  $t \in [a, s]$ . To slijedi iz lokalne jedinstvenosti rješenja unutar antilijevka i činjenice da je  $u(a) \in I_s$ , za svaki  $s \in [a, b)$ . Budući da je (4.8) istinito za bilo koji  $s \in [a, b)$ , dokaz je završen.  $\square$

Za neke specijane tipove antilijevaka postoji inačica Teorema 4.2.7 koja govori o jedinstvenosti rješenja koje ostaje unutar antilijevka, što ćemo pokazati u Teoremu 4.2.9.

**Definicija 4.2.8.** Omjer raspršenosti rješenja jednačbe  $x' = f(t, x)$  u nekoj točki  $(t_0, x_0)$  u kojoj rješenje postoji jest broj  $\frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0)$ .

Omjer raspršenosti rješenja,  $\frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0)$ , govori o raspršenosti rješenja diferencijalne jednačbe  $x' = f(t, x)$  u točki  $(t_0, x_0)$ . Ukoliko je omjer raspršenosti,  $\frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0)$ , pozitivan i velik, rješenja kroz točke u okolini točke  $(t_0, x_0)$ , imaju tendenciju da se "razlete" u pozitivnom vremenu. S druge strane, ukoliko je omjer raspršenosti negativan i velik,

rješenja imaju tendenciju da se razlete u negativnom vremenu. Zbog toga, kažemo da omjer raspršenosti mjeri *stabilnost* rješenja.

Preciznije, u dokazu Teorema 4.2.9 pokazat ćemo da je udaljenost između dva rješenja  $x = u_1(t)$  i  $x = u_2(t)$  neopadajuća u slučaju kad vrijedi  $\frac{\partial f}{\partial x} \geq 0$  i nerastuća u slučaju kad vrijedi  $\frac{\partial f}{\partial x} \leq 0$ .

**Teorem 4.2.9** ([8]). *Neka granice  $\alpha(t)$  i  $\beta(t)$ ,  $t \in [a, +\infty)$ , definiraju antilijevak na  $I$ , za diferencijalnu jednadžbu  $x' = f(t, x)$  koja unutar antilijevka zadovoljava pretpostavke Teorema 4.2.7. Ako vrijedi:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha(t) - \beta(t)| = 0,$$

*te za omjer raspršenosti rješenja u svim točkama  $(t, x)$  antilijevka vrijedi  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \geq 0$ , tada postoji jedinstveno rješenje  $x(t)$  koje ostaje u antilijevku u vremenu  $t \in [a, +\infty)$ .*

*Dokaz.* Primijetimo da je postojanje rješenja koje ostaje u antilijevku dokazano u Teoremu 4.2.7. Zato ovdje preostaje pokazati samo jedinstvenost. Pretpostavimo suprotno, tj. neka su  $u_1$  i  $u_2$  dva različita rješenja koja ostaju u antilijevku u vremenu  $t \in [a, +\infty)$  (tj.  $(t, u_1(t))$  i  $(t, u_2(t))$  su u lijevku, za sve  $t \in [a, +\infty)$ ). Kako su rješenja različita, postoji  $t^* \in [a, +\infty)$  takav da je  $u_1(t^*) \neq u_2(t^*)$ . Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $u_1(t^*) > u_2(t^*)$ . Tada je očito  $u_1(t) > u_2(t)$  za sve  $t \geq t^*$  jer bismo inače imali kontradikciju s lokalnom jedinstvenošću rješenja unutar antilijevka. Tada za svaki  $t \geq t^*$  vrijedi:

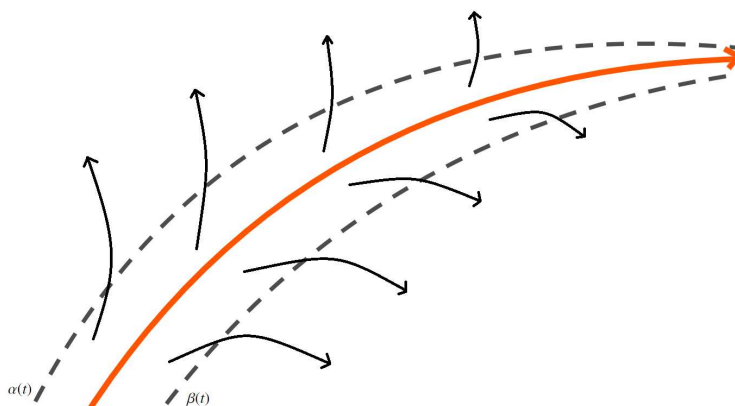
$$(u_1 - u_2)'(t) = f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)) = \int_{u_2(t)}^{u_1(t)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dx \geq 0,$$

jer se  $(t, x)$  nalazi u antilijevku za sve  $x \in [u_1(t), u_2(t)]$ .

Stoga je neprekidna funkcija  $t \mapsto u_1(t) - u_2(t)$  rastuća u okolini svake točke  $t \geq t^*$  te za sve  $t > t^*$  vrijedi  $u_1(t) - u_2(t) \geq u_1(t^*) - u_2(t^*)$ . Zaključujemo da, kada  $t \rightarrow \infty$ , udaljenost između rješenja  $u_1$  i  $u_2$  nikad neće padati i bit će ograničena odozdo strogo pozitivnim brojem  $u_1(t^*) - u_2(t^*) > 0$ , što je u kontradikciji sa pretpostavkom da se donja ( $\alpha(t)$ ) i gornja granica ( $\beta(t)$ ) približavaju kako  $t \rightarrow \infty$ .

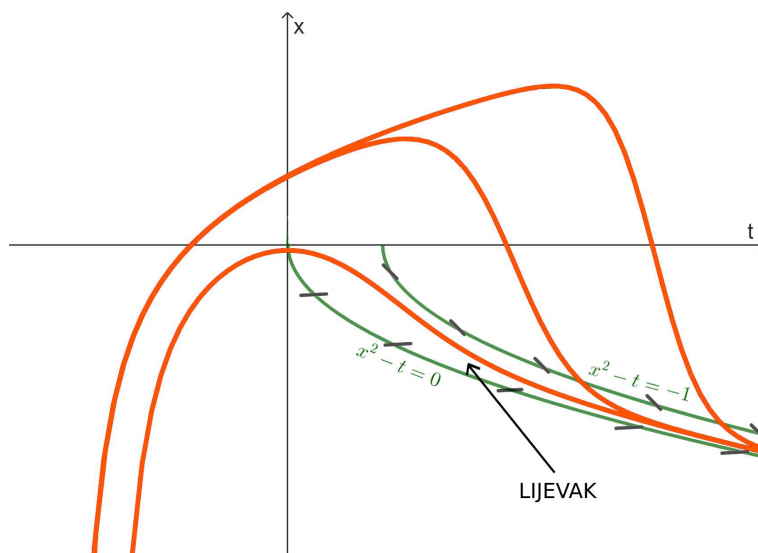
□

Primijetimo, ukoliko se granice  $\alpha(t)$  i  $\beta(t)$  (kod antilijevka) asimptotski približavaju kad  $t \rightarrow \infty$  (tj. ako se antilijevak "sužava u beskonačnosti") jedinstveno rješenje koje ostaje unutar antilijevka iz Teorema 4.2.9 je upravo specifično rješenje koje odvajava dva različita ponašanja rješenja, kao što je i prikazano na Slici 4.14.



Slika 4.14: Specifično rješenje koje odvaja dva različita ponašanja rješenja oko antilijevka koji se "sužava".

**Primjer 4.2.10** (Daljnja analiza Primjera 4.1.3, primjer lijevka i antilijevka). *Neka je  $x' = x^2 - t$ , kao i u Primjeru 4.1.3. Izoklina  $x^2 - t = 0$ , za  $t > 0$  i  $x < 0$ , predstavlja donju granicu, dok izoklina  $x^2 - t = -1$ , za  $t > 1$  i  $x < 0$ , predstavlja gornju granicu, kao što je i prikazano na Slici 4.15.*



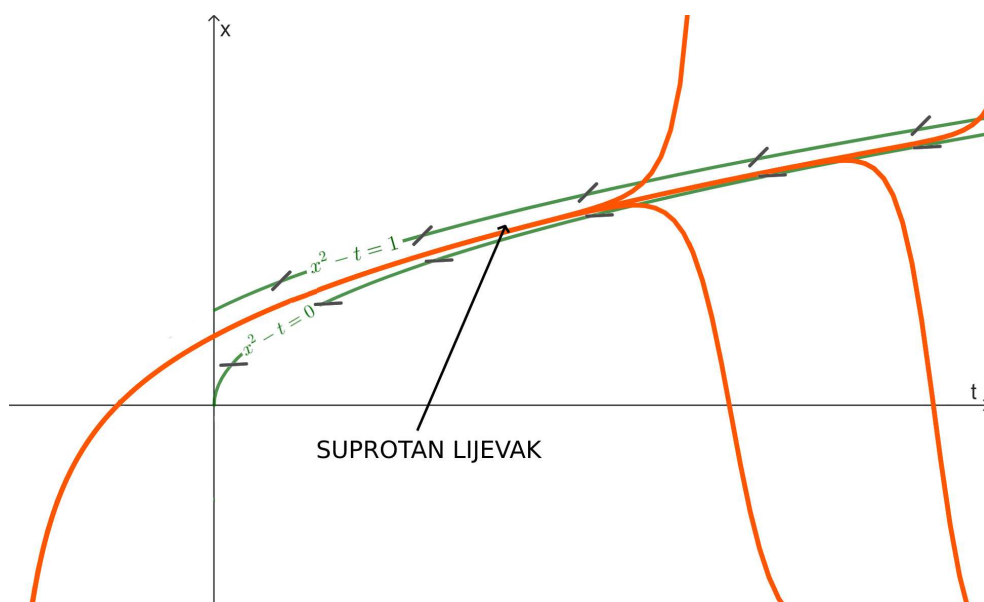
Slika 4.15: Primjer lijevka za diferencijalnu jednadžbu  $x' = x^2 - t$  (Geogebra).

*Donja granica  $\alpha(t) = -\sqrt{t}$  i gornja granica  $\beta(t) = -\sqrt{t-1}$  definiraju lijevak na  $t \in [1 + \infty)$ . Za donju i gornju granicu vrijedi:*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} |\alpha(t) - \beta(t)| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| -\sqrt{t} + \sqrt{t-1} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| -\sqrt{t} + \sqrt{t-1} \cdot \frac{-\sqrt{t} - \sqrt{t-1}}{-\sqrt{t} - \sqrt{t-1}} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{-\sqrt{t} - \sqrt{t-1}} \right| = 0. \end{aligned}$$

Stoga, kad  $t \rightarrow +\infty$  sva rješenja koja kreću u lijevku za  $t = 1$  ostaju unutar lijevka te se asimptotski ponašaju kao  $\alpha(t) = -\sqrt{t}$ .

S druge strane, izoklina  $x^2 - t = 0$ , za  $t > 0$  i  $x > 0$ , predstavlja gornju granicu ( $\gamma(t)$ ), a izoklina  $x^2 - t = 1$ , za  $t > 0$  i  $x > 1$ , predstavlja donju granicu  $\delta(t)$  na  $t \in [0, +\infty)$ . Granice  $\gamma(t)$  i  $\delta(t)$  ponašaju se kao antilijevak, kao što je i prikazano na Slici 4.16.



Slika 4.16: Primjer antilijevka za diferencijalnu jednadžbu  $x' = x^2 - t$  (Geogebra).

Granice  $\delta(t)$  i  $\gamma(t)$  asimptotski se približavaju kad  $t \rightarrow +\infty$ , ponovno zbog:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\gamma(t) - \delta(t)| = \left| \sqrt{t} - \sqrt{t+1} \right| = 0. \quad (4.9)$$

Zbog Teorema 4.2.9, znamo da postoji jedinstveno rješenje  $u^*(t)$ ,  $\sqrt{t} < u^*(t) < \sqrt{t+1}$ , koje će ostati unutar antilijevka, te će (prema (4.9)) asimptotski težiti u  $\sqrt{t}$  kada  $t \rightarrow +\infty$ .

### 3. Vertikalne asimptote

Kod pojave vertikalnih asimptota više ne postavljamo pitanje što se događa sa rješenjima kad  $t \rightarrow \infty$ . Razlog je što rješenja diferencijalne jednačbe ne moraju uvijek biti definirana (za velike  $t$ ). U nekim slučajevima rješenja će "eksplodirati" u konačnom vremenu, odnosno imat će *vertikalne asimptote*.

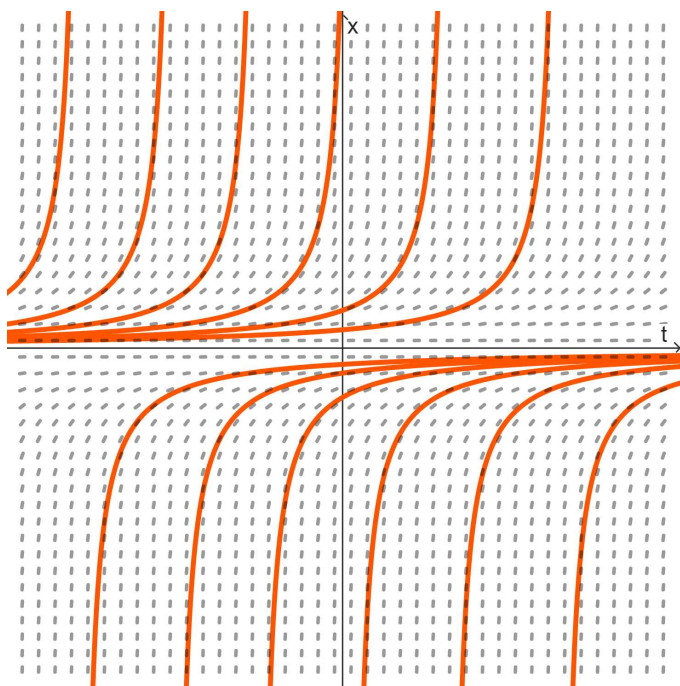
**Primjer 4.2.11** ([8]).  $x' = x^2$ .

*Rješenje.* Uz pomoć metode separacije varijabli dolazimo do rješenja zadane diferencijalne jednačbe koje iznosi  $x(t) = \frac{1}{C-t}$ , za  $C \in \mathbb{R}$ .

Primijetimo da rješenja nisu definirana u trenutku  $t = C$ . Stoga, kada pričamo o rješenjima zadane diferencijalne jednačbe, trebali bismo pričati o dvije funkcije: jedna je definirana za  $t < C$ , a druga je definirana za  $t > C$ . Drugim riječima, funkcija  $x(t) = \frac{1}{C-t}$  je definirana na  $t \in \mathbb{R} \setminus \{C\}$  i ima vertikalnu asimptotu u trenutku  $t = C$ .

**Primjer 4.2.12** ([8]).  $x' = kx^2$ , za  $k > 0$ .

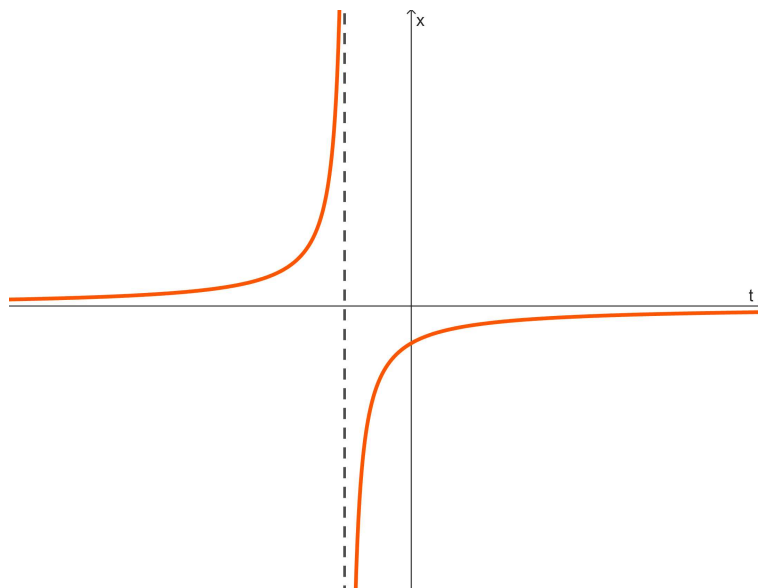
*Rješenje.* Nekoliko krivulja rješenja dano je na sljedećoj slici.



Slika 4.17: Računalna skica (korištenjem polja smjerova) rješenja diferencijalne jednačbe  $x' = kx^2, k > 0$  (Geogebra).

Primijetimo, budući da funkcija  $f(t, x) = kx^2$  ne ovisi o vremenu  $t$ , izokline su horizontalni pravci i krivulje rješenja bit će horizontalni translati.

Pomoću metode separacije varijabli dolazimo do rješenja zadane diferencijalne jednačbe, koje iznosi:  $x(t) = \frac{1}{C-kt}$ ,  $k > 0$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Graf tog rješenja u  $(t, x)$ -ravnini je hiperbola s vertikalnom asimptomom u  $t = C/k$ , kao što je prikazano na Slici 4.18.



Slika 4.18: Jedna vertikalna asimptota diferencijalne jednačbe  $x' = kx^2$ ,  $k > 0$  (Geogebra).

Pojava vertikalnih asimptota u Primjeru 4.2.12 događa se i za čitavu klasu funkcija definiranih diferencijalnom jednačbom  $x' = k|x|^\alpha$ , za  $\alpha > 1$ . Naime, rješenja različita od nule diferencijalne jednačbe  $x' = k|x|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , imaju vertikalne asimptote.

# Poglavlje 5

## Numeričke metode

Numeričke metode za rješavanje diferencijalnih jednažbi su metode dobivanja aproksimativnog rješenja diferencijalnih jednažbi koristeći matematičke algoritme i računalne programe. Njihova upotreba također je poznata kao "numerička integracija". Numeričke metode najčešće se koriste kad nije moguće riješiti diferencijalnu jednažbu eksplicitno.

U Poglavlju 4, pomoću računalnog programa Geogebra, crtali smo rješenja raznih diferencijalnih jednažbi. Neke od tih diferencijalnih jednažbi nisu bile rješive analitičkim metodama uvedenim u Poglavlju 3. Postavlja se pitanje, ukoliko ne postoje eksplicitna rješenja diferencijalnih jednažbi, kako program (poput Geogebre, Mathematice, Matlab, ...) ipak može nacrtati rješenja. Odgovor leži u činjenici da računalni programi imaju u sebi implementirane algoritme za rješavanje jednažbe numerički.

U ovom poglavlju opisati ćemo neke osnovne *jednokoračne* numeričke metode. Kod jednokoračnih metoda za računanje aproksimacije u nekom koraku koristi se samo aproksimacija iz prethodnog koraka, dok se kod višekoračnih metoda koristi više prethodnih aproksimacija.

U ovom poglavlju prvo ćemo opisati najjednostavniju *Eulerovu metodu*. Zatim ćemo opisati poboljšanu Eulerovu metodu i neke alternativne numeričke metode. Na kraju poglavlja ćemo se baviti ocjenom pogrešaka u numeričkoj aproksimaciji.

## 5.1 Eulerova metoda

Jedna od najčešće korištenih numeričkih metoda je *Eulerova metoda*. Eulerova metoda relativno je jednostavna za implementaciju, ali s druge strane je neprecizna za određene oblike diferencijalnih jednadžbi.

Neka je dan Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (5.1)$$

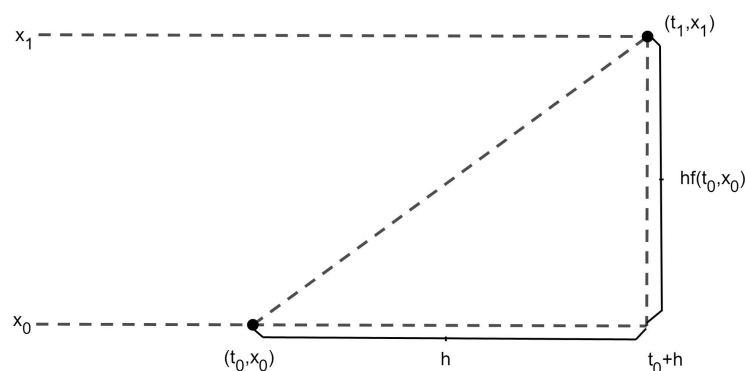
Prvi korak Eulerove metode je aproksimirati rješenje  $t \mapsto x(t)$  (5.1) oko početne točke  $t = t_0$ . Iz početnog uvjeta, znamo da vrijednost rješenja diferencijalne jednadžbe u trenutku  $t = t_0$  iznosi  $x_0$ . Vrijednost derivacije (nagiba tangente na krivulju rješenja) u trenutku  $t = t_0$  iščitavamo iz (5.1) i ona iznosi  $f(t_0, x_0)$ . Tako dolazimo do formule za jednadžbu tangente na krivulju rješenja u točki  $(t_0, x_0)$  koja glasi:

$$y(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0). \quad (5.2)$$

Pretpostavimo da se nalazimo u točki  $(t_0, x_0)$ . Eulerova metoda aproksimacije kaže: kad povećavamo vrijeme  $t_0$  za neki mali korak  $h$  ( $t_1 = t_0 + h$ ), krećemo se po tangenti na krivulju rješenja u  $(t_0, x_0)$  umjesto po krivulji rješenja, te tako dolazimo u točku  $(t_1, x_1)$ . Zbog činjenice da točka  $(t_1, x_1)$  leži na tangenti zadanoj jednadžbom (5.2), dobivamo:

$$x_1 = y(t_1) = x(t_0) + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0) = x_0 + hf(t_0, x_0),$$

kao što je i prikazano na Slici 5.1.



Slika 5.1: Korak Eulerove metode s početnim uvjetom  $(t_0, x_0)$ .

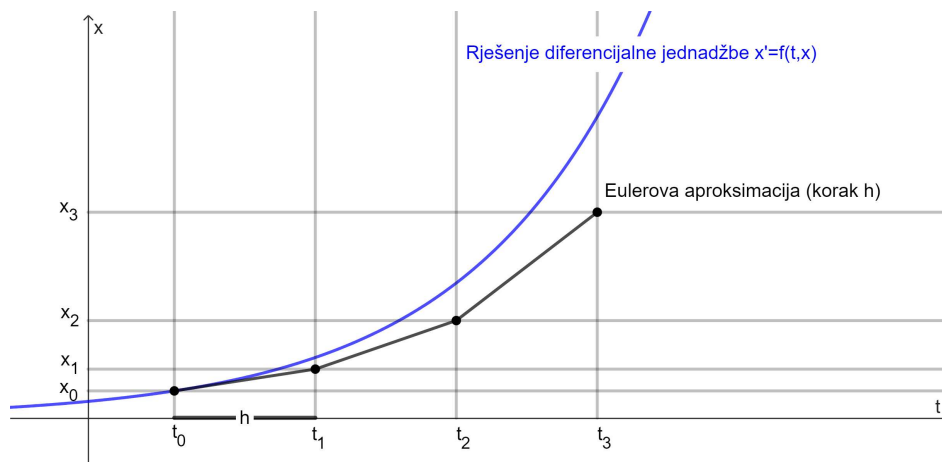


Ukoliko uzmemo dovoljno mali  $h$  i ukoliko se nagib krivulje rješenja oko  $(t_0, x_0)$  ne mijenja drastično, vrijednost  $x_1$  biti će blizu vrijednosti rješenja u točki  $t_1, x(t_1)$ .

Primijetimo, Eulerova aproksimacija krivulje rješenja između točaka  $(t_0, x_0)$  i  $(t_1, x_1)$  predstavljena je dužinom. Eulerovu aproksimaciju možemo nastaviti duž domene postojanja rješenja na sljedeći način. Umjesto da aproksimaciju započinjemo u točki  $(t_0, x_0)$ , sada ćemo aproksimaciju započeti u točki  $(t_1, x_1)$ . Ponovno ćemo uzeti korak  $h$  (isti kao i u gornjem slučaju) te ćemo se prema točki  $(t_2, x_2)$  kretati po tangenti nagiba  $f(t_1, x_1)$ . Na taj način dolazimo do točke

$$(t_2, x_2) = (t_1 + h, x_1 + hf(t_1, x_1)).$$

Na isti način možemo doći iz točke  $(t_2, x_2)$  u točku  $(t_3, x_3)$  itd. Na slici 5.2 možemo vidjeti Eulerovu metodu kroz tri koraka.



Slika 5.2: Eulerova aproksimacija kroz tri koraka.

Uvodimo i formalnu definiciju Eulerove metode.

**Definicija 5.1.1** ([8]). *Neka je dana diferencijalna jednačba  $x' = f(t, x)$ , pri čemu je funkcija  $f$  definirana na pravokutniku  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Neka je odabrana točka  $(t_0, x_0) \in R$  i neka je  $h \neq 0$  označena veličina koraka. Definiramo niz točaka  $(t_n, x_n)$  rekurzivno na sljedeći način:*

$$\left. \begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h = t_0 + nh, \\ x_n &= x_{n-1} + hf(t_{n-1}, x_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

sve dok  $(t_n, x_n) \in R$ . Eulerova aproksimacija rješenja iz početne točke  $(t_0, x_0)$  i s korakom  $h \neq 0$  na  $R$  je po dijelovima linearna funkcija  $t \mapsto u_n(t)$  koja spaja uređene parove  $(t_n, x_n)$

dobivene u (5.3), tj. kojoj pojedini dijelovi zadovoljavaju formulu:

$$u_h(t) = x_n + (t - t_n)f(t_n, x_n), \tag{5.4}$$

za sve  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Definicija 5.1.1 daje aproksimaciju rješenja prema desno, ukoliko je  $h$  pozitivan, a prema lijevo, ukoliko je  $h$  negativan. Ukoliko smanjimo vrijednost koraka  $h$ , očekujemo da ćemo dobiti točniju aproksimaciju stvarnog rješenja  $t \mapsto x(t)$ , što ćemo i vidjeti u sljedećim primjerima.

**Primjer 5.1.2.** Zadan je Cauchyjev problem:

$$x' = x - t, \quad x(0) = \frac{1}{2}.$$

Konstruirajmo aproksimaciju rješenja iz točke  $(0, \frac{1}{2})$  Eulerovom metodom koristeći korake  $h_1 = 0.4$  i  $h_2 = 0.2$ .

*Rješenje.* Neka je  $h_1 = 0.4$ . Eulerovu aproksimaciju rješenja diferencijalne jednadžbe  $x' = x - t$  konstruirat ćemo kao u Definiciji 5.1.1. Izračun uređenih parova  $(t_n, x_n)$  uz korak  $h_1 = 0.4$  dan je sljedećom tablicom.

$t_n$	$x_n$	$f(t_n, x_n) = x_n - t_n$	$x_{n+1} = x_n + h_1 f(t_n, x_n)$
$t_0 = 0.0$	$x_0 = 0.500$	0.500	$x_1 = 0.500 + 0.400 \cdot 0.500 = 0.700$
$t_1 = 0.4$	$x_1 = 0.700$	0.300	$x_2 = 0.700 + 0.400 \cdot 0.300 = 0.820$
$t_2 = 0.8$	$x_2 = 0.820$	0.020	$x_3 = 0.820 + 0.400 \cdot 0.020 = 0.828$
$t_3 = 1.2$	$x_3 = 0.828$	-0.372	$x_4 = 0.828 - 0.400 \cdot 0.372 = 0.680$
$t_4 = 1.6$	$x_4 = 0.680$	-0.921	$x_5 = 0.680 - 0.400 \cdot 0.921 = 0.311$
$t_5 = 2.0$	$x_5 = 0.311$	Nastavak na isti način	

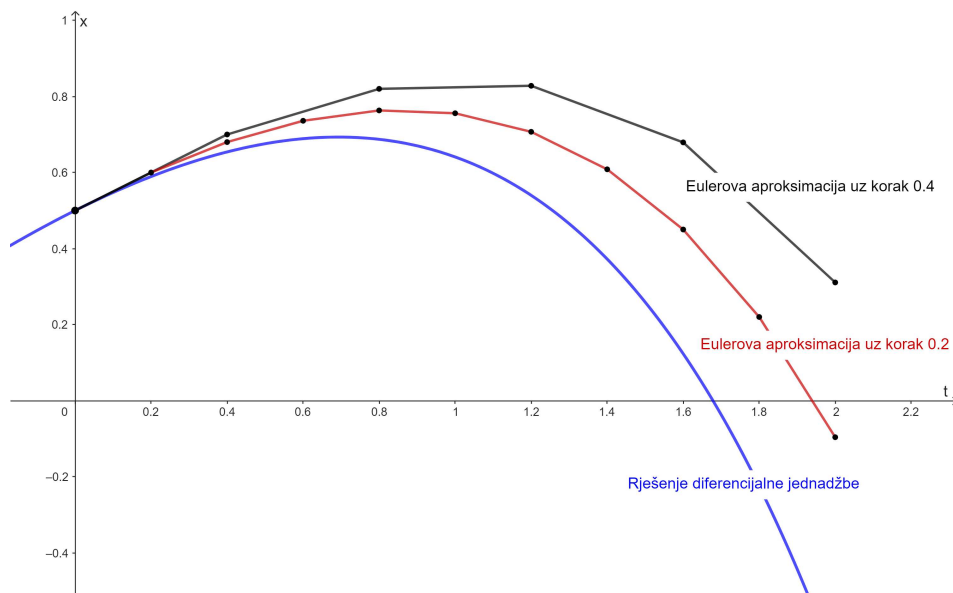
Tablica 5.1: Izračun uređenih parova  $(t_n, x_n)$  Eulerovom metodom, uz korak 0.4.

Prateći isti postupak prikazan u Tablici 5.1, za  $h_2 = 0.2$  dobivamo sljedeće uređene parove  $(t_n, x_n)$ :

$t_n$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$x_n$	0.500	0.600	0.680	0.736	0.763	0.756	0.707	0.608	0.450	0.220	-0.096

Tablica 5.2: Izračun uređenih parova  $(t_n, x_n)$  Eulerovom metodom, uz korak 0.2.

Po Definiciji 5.1.1, Eulerova aproksimacija rješenja predstavlja po dijelovima linearnu funkciju, koja spaja uređene parove točaka  $(t_n, x_n)$ . Stoga Eulerove aproksimacije rješenja za korake  $h_1$  i  $h_2$  dobivamo tako da povežemo uređene parove točaka prikazane u Tablicama 5.1 i 5.2. Eulerove aproksimacije, zajedno sa pravim rješenjem diferencijalne jednačbe  $x' = x - t$ , prikazane su na sljedećoj slici.



Slika 5.3: Eulerova aproksimacija rješenja diferencijalne jednačbe  $x' = x - t$  iz početne točke  $(0, \frac{1}{2})$ , uz dva različita koraka (Geogebra).

Kao što je vidljivo na Slici 5.3, točniju aproksimaciju rješenja diferencijalne jednačbe smo dobili uz manji korak  $h$ . Ukoliko  $h$  možemo proizvoljno smanjivati, postavlja se pitanje što se dešava u slučaju kad  $h \rightarrow 0$ . U sljedećem primjeru vidjeti ćemo da će smanjivanjem koraka u 0 Eulerova aproksimacija rješenja "konvergirati" prema rješenju diferencijalne jednačbe.

**Primjer 5.1.3** ([8]). *Eulerovom metodom riješite diferencijalnu jednačbu  $x' = rx$ , koja predstavlja model za složeno ukamaćivanje, pri čemu  $x(t)$  označava količinu uštedevine u trenutku  $t$ , a  $r$  godišnju kamatnu stopu, ukoliko se  $t$  mjeri u godinama. Neka je  $x_0$  vrijednost uštedevine u početnom vremenskom trenutku  $t = 0$ .*

*Rješenje.* Neka je sa  $n \in \mathbb{N}$  označen broj godišnjih reinvestiranja (tj. nakon jedne godine). Tada je logičan izbor koraka Eulerove metode jednak  $h = \frac{1}{n}$ . Prema (5.3) vrijedi:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + \frac{r}{n}x_0, \\
 x_2 &= x_1 + \frac{r}{n}x_1 = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 x_0, \\
 &\vdots \\
 x_n &= x_{n-1} + \frac{r}{n}x_{n-1} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n x_0,
 \end{aligned}$$

pri čemu  $x_n$  predstavlja vrijednost uštedevine nakon  $n$  perioda reinvestiranja. Prilikom kontinuiranog reinvestiranja (s kontinuiranim korakom  $h \rightarrow 0$ ) unutar jedne godine, vrijednost uštedevine nakon jedne godine trebala bi odgovarati limesu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n x_0. \quad (5.5)$$

S druge strane, prilikom kontinuiranog reinvestiranja vrijednost nakon 1 godine bit će vrijednost  $x(1)$  analitičkog rješenja diferencijalne jednadžbe  $x' = rx$  s početnim uvjetom  $x(0) = x_0$ . Analitičko rješenje diferencijalne jednadžbe  $x' = rx$  iznosi  $x(t) = x_0 e^{rt}$ . Stoga, vrijednost uštedevine nakon jedne godine  $x(1)$  iznosi  $x_0 e^r$ .

Primijetimo, zaista vrijedi:

$$x(1) = x_0 e^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n x_0.$$

Zaključujemo da će prilikom kontinuiranog reinvestiranja Eulerova aproksimacija rješenja nakon jedne godine konvergirati, ako smanjujemo korak  $h \rightarrow 0$ , prema vrijednosti  $x(1)$  eksplicitnog rješenja diferencijalne jednadžbe  $x' = rx$ ,  $x(0) = x_0$ .

## 5.2 Bolje numeričke metode

Iako je Eulerova metoda jedna od najpoznatijih numeričkih metoda, postoje mnoge druge numeričke metode aproksimacije rješenja diferencijalnih jednadžbi. U nastavku ćemo uvesti još dvije metode: *Eulerova metoda polovišta* i *Runge-Kutta metoda*.

Obje numeričke metode, koje ćemo uvesti u nastavku, temelje se na istom principu "tangentne" kao i Eulerova metoda. Koristeći veličinu koraka  $h$  i nagib krivulje rješenja  $m$ , uz pomoć formula:

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad x_{n+1} = x_n + hm,$$

dolazimo do uređenih parova  $(t_n, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ono što razlikuje metode je odabir točke ravnine u kojoj računamo nagib krivulje rješenja  $m$ , što će utjecati na preciznost aproksimacije rješenja.

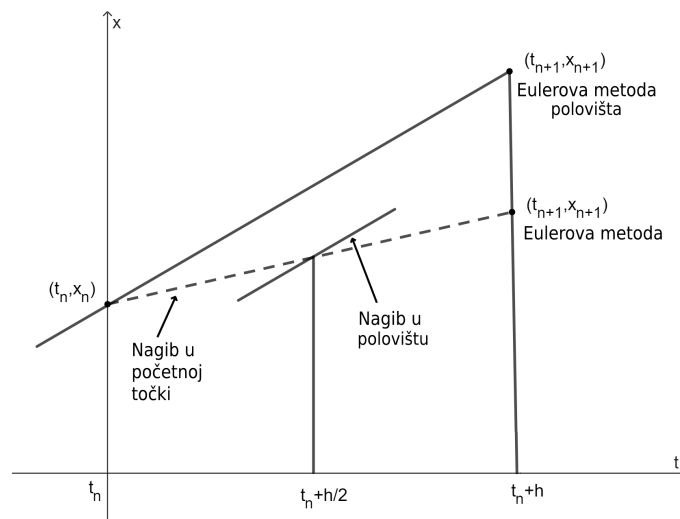
## Eulerova metoda polovišta

Eulerova metoda polovišta (Modificirana Eulerova metoda) predstavlja jednostavno poboljšanje Eulerove metode. Kao što možemo primijetiti na Slici 5.3, Eulerova metoda je dobra aproksimacija krivulje rješenja u početnoj točki, no kvaliteta aproksimacije opada kako se krećemo u vremenu  $t$ . Jedan od načina poboljšanja Eulerove metode je točnije procijeniti nagib svakog linearnog dijela aproksimacije.

Aproksimaciju rješenja Eulerovom metodom polovišta radimo analogno postupku uvedenom u Definiciji 5.1.1, samo umjesto nagiba  $f(t_{n+1}, x_{n+1})$ , uzimamo nagib na krivulju rješenja kroz polovište dužine određene točkama  $(t_n, x_n)$  i  $(t_{n+1}, x_{n+1})$  iz Eulerove metode:

$$m_n := f\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) = \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

koji predstavlja nagib tangente na krivulju rješenja u polovištu, kao što je prikazano na Slici 5.4.



Slika 5.4: Jedan korak Eulerove metode i Eulerove metode polovišta (Geogebra).

**Primjer 5.2.1.** Neka je zadan Cauchyjev problem:

$$x' = \sin t + x, \quad x(0) = 4.$$

Konstruirajmo aproksimaciju rješenja Eulerovom metodom polovišta, koristeći korake  $h_1 = -0.8$  i  $h_2 = -0.4$ .

*Rješenje.* Neka je  $h_1 = -0.8$ . Aproksimaciju rješenja diferencijalne jednačbe  $x' = \sin t + x$  Eulerovom metodom polovišta započinjemo u početnoj točki  $(t_0, x_0) = (0, 4)$ . Izračun uređenih parova  $(t_n, x_n)$  uz korak  $h_1 = -0.8$  dan je sljedećom tablicom.

$t_n$	$x_n$	$m_M = f\left(t_n + \frac{h_1}{2}, x_n + \frac{h_1}{2}f(t_n, x_n)\right)$	$x_{n-1} = x_n + h_1 \cdot m_M$
$t_0 = 0.0$	$x_0 = 4.000$	$f(-0.4, 2.400) = 2.011$	$x_1 = 4.000 - 0.8 \cdot 2.011 = 2.391$
$t_1 = -0.8$	$x_1 = 2.391$	$f(-1.2, 1.722) = 0.790$	$x_2 = 2.391 - 0.8 \cdot 0.790 = 1.759$
$t_2 = -1.6$	$x_2 = 1.759$	$f(-2.0, 1.455) = 0.546$	$x_3 = 1.759 - 0.8 \cdot 0.546 = 1.322$
$t_3 = -2.4$	$x_3 = 1.322$	$f(-2.8, 1.063) = 0.728$	$x_4 = 1.322 - 0.8 \cdot 0.728 = 0.740$
$t_4 = -3.2$	$x_4 = 0.740$	$f(-3.6, 0.421) = 0.864$	$x_5 = 0.740 - 0.8 \cdot 0.864 = 0.049$
$t_5 = -4.0$	$x_5 = 0.049$	Nastavak na isti način	

Tablica 5.3: Izračun uređenih parova  $(t_n, x_n)$  Eulerovom metodom polovišta uz korak  $-0.8$ .

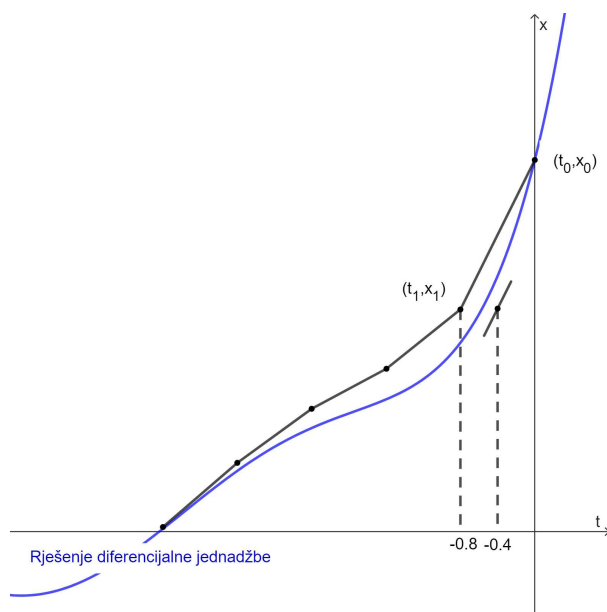
Aproksimacija rješenja za korak  $h_1 = -0.8$ , zajedno sa jednim rješenjem diferencijalne jednačbe  $x' = \sin t + x$ , prikazana je na Slici 5.5. Na toj slici također možemo vidjeti nagib krivulje rješenja u polovištu za prvi korak, i predstavlja nagib dužine koja spaja  $(t_0, x_0)$  i  $(t_1, x_1)$  u Eulerovoj metodi polovišta.

Prateći postupak prikazan u Tablici 5.3, za korak  $h_2 = -0.4$  dobivamo sljedeće uređene parove  $(t_n, x_n)$ :

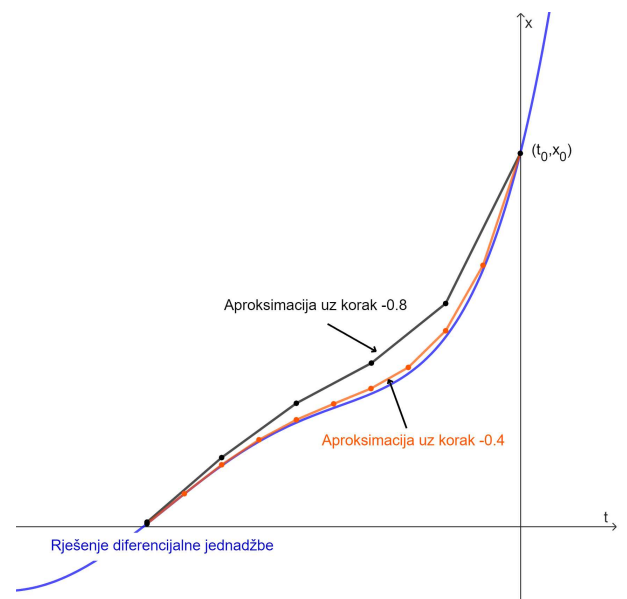
$t_n$	0.0	-0.4	-0.8	-1.2	-1.6	-2.0	-2.4	-2.8	-3.2	-3.6	-4.0
$x_n$	4.000	2.800	2.099	1.706	1.480	1.316	1.145	0.931	0.663	0.353	0.031

Tablica 5.4: Izračun uređenih parova  $(t_n, x_n)$ , Eulerovom metodom polovišta, uz korak  $-0.4$ .

Aproksimacije rješenja Eulerovom metodom polovišta za korake  $h_1$  i  $h_2$  dobivamo tako da povežemo uređene parove točaka prikazane u Tablicama 5.3 i 5.4. Aproksimacije, zajedno s rješenjem diferencijalne jednačbe  $x' = \sin t + x$ , kroz točku  $(0, 4)$ , prikazane su na Slici 5.6.



Slika 5.5: Aproximacija Eulerovom metodom polovišta (crna boja) uz korak  $-0.8$  (Geogebra).



Slika 5.6: Aproximacija Eulerovom metodom polovišta uz korak  $-0.8$  (crna boja) i korak  $-0.4$  (crvena boja) (Geogebra).

Primijetimo na Slici 5.6 da aproksimacija rješenja Eulerovom metodom polovišta za  $h = -0.4$  skoro u potpunosti prati krivulju rješenja iz početne točke  $(0, 4)$ . Zbog računanja nagiba u polovištu, Eulerova metoda polovišta će brže "konvergirati" prema rješenju, pa će sama metoda dati točniju aproksimaciju, što ćemo vidjeti u Primjeru 5.2.3 i obrazložiti u Poglavlju 5.3 gdje ćemo analizirati pogrešku aproksimacije po pojedinim metodama.

## Runge-Kutta metoda

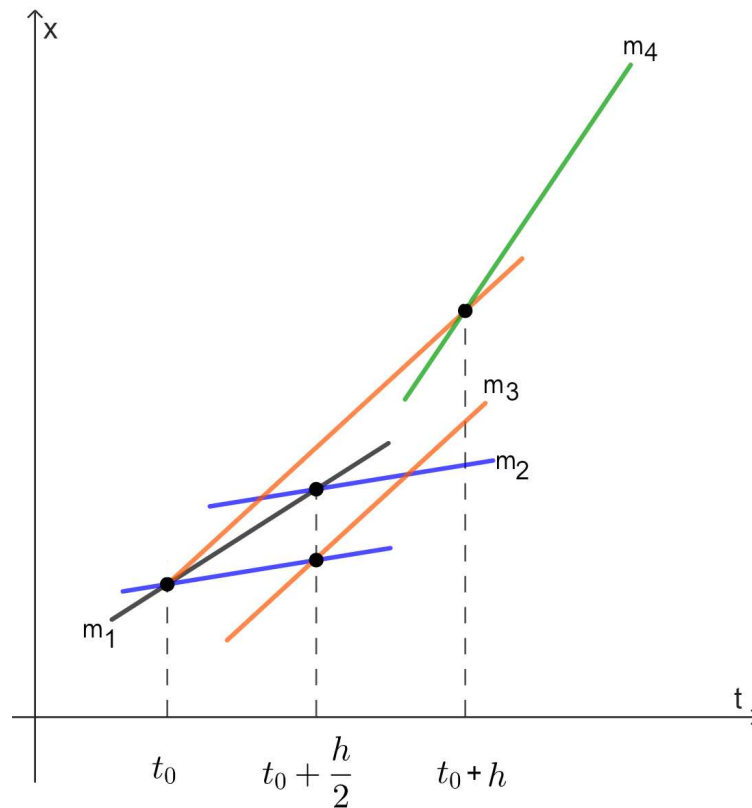
Još jedna poznatija numerička metoda je tzv. *Runge-Kutta metoda*. Runge-Kutta predstavlja familiju metoda koje su preciznije od Eulerove metode, a koriste kombinaciju nagiba u različitim točkama.

U ovom radu predstaviti ćemo tzv. *Runge-Kutta metodu*, pri čemu ćemo koristiti *Runge-Kutta nagib*  $m_{RK}$ , koji predstavlja ponderirani prosjek nagiba na krivulju rješenja u 4 istaknute točke ravnine:

$$\begin{aligned}
m_1^n &:= f(t_n, x_n), \\
m_2^n &:= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}m_1^n\right), \\
m_3^n &:= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}m_2^n\right), \\
m_4^n &:= f(t_n + h, x_n + hm_3^n), \\
m_{RK}^n &:= \frac{1}{6}(m_1^n + 2m_2^n + 2m_3^n + m_4^n), \quad n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Runge Kutta nagib  $m_{RK}$  zapravo predstavlja linearnu kombinaciju nagiba na krivulju rješenja u 4 točke ravnine, kao što je vidljivo na Slici 5.7. Nagib  $m_1$  predstavlja nagib Eulerove metode. Nagib  $m_2$  računamo kao nagib krivulje rješenja u točki presjeka pravca  $t = t_n + \frac{h}{2}$  i pravca kroz točku  $(t_n, x_n)$  nagiba  $m_1$ , odnosno,  $m_2$  predstavlja nagib u polovištu dužine kojoj je jedna krajnja točka  $(t_n, x_n)$ , a druga krajnja točka  $(t_{n+1}, x_{n+1})$  dobivena Eulerovom metodom polovišta s korakom  $h$ . Nagib  $m_3$  računamo kao nagib krivulje rješenja u točki presjeka pravca  $t = t_n + \frac{h}{2}$  i pravca kroz  $(t_n, x_n)$  nagiba  $m_2$ , odnosno nagib u polovištu dužine kojoj je jedna krajnja točka  $(t_n, x_n)$ , a druga krajnja točka je sjecište pravca  $t = t_n + h$  i pravca kroz  $(t_n, x_n)$  nagiba  $m_2$ . Nagib  $m_4$  računamo kao nagib krivulje rješenja u točki presjeka pravca  $t = t_n + h$  i pravca kroz točku  $(t_n, x_n)$  nagiba  $m_3$ .





Slika 5.7: Nagibi na krivulje rješenja korišteni u Runge-Kutta numeričkoj metodi (Geogebra).

U Primjerima 5.2.2 i 5.2.3 usporedit ćemo opisane tri metode: Eulerovu metodu, Eulerovu metodu polovišta i Runge-Kutta metodu, koristeći dva različita pristupa. U Primjeru 5.2.2 fiksirati ćemo korak  $h$  i aproksimirati rješenje diferencijalne jednadžbe svakom metodom. U Primjeru 5.2.3 fiksirati ćemo točku vremenskog intervala  $t_f$ , i računati aproksimiranu vrijednost rješenja jednadžbe  $x(t)$  iz točke  $(0, 4)$  u točki  $x_h(t_f)$ , za različitu veličinu koraka  $h$  na intervalu  $[t_0, t_f]$ , za svaku od metoda.

**Primjer 5.2.2.** Zadan je Cauchyjev problem:

$$x' = \cos(tx), \quad x(0) = 4,$$

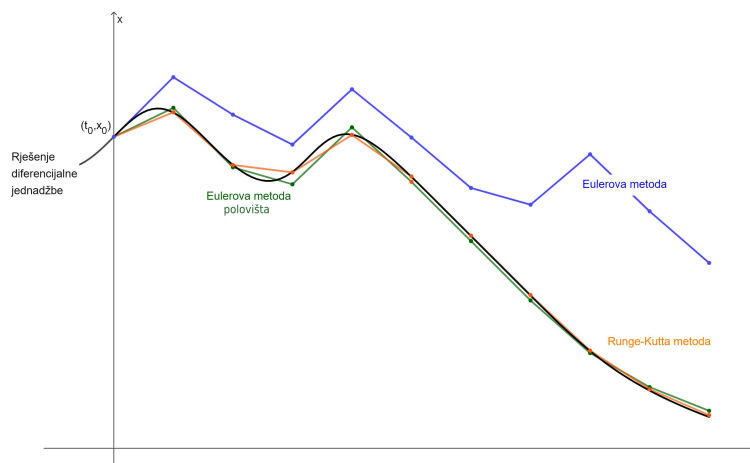
te korak  $h = 0.1$ . Aproksimirajmo rješenje trima opisanim metodama i usporedimo aproksimacije.

*Rješenje.* U Tablici 5.5 prikazani su uređeni parovi točaka  $(t_n, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , za Eulerovu metodu, Eulerovu metodu polovišta i Runge-Kutta metodu.

$t_n$	Eulerova metoda $x_n$	Eulerova metoda polovišta $x_n$	Runge-Kutta $x_n$
0.0	4.0000	4.0000	4.0000
0.5	4.5000	4.2433	4.2061
1.0	4.1859	3.7442	3.7635
1.5	3.9347	3.6014	3.7012
2.0	4.3988	4.0794	4.0160
2.5	3.9939	3.6218	3.6667
3.0	3.5703	3.1246	3.1698
3.5	3.4300	2.6263	2.6711
4.0	3.8532	2.1847	2.2053
4.5	3.3748	1.8988	1.8808
5.0	2.9412	1.7000	1.6632

Tablica 5.5: Aproksimacija rješenja diferencijalne jednadžbe  $x' = \cos(tx)$ , uz  $x(0) = 4$ , različitim metodama.

Iz Tablice 5.5 možemo primijetiti kako su vrijednosti  $x_n$  puno bliže kod Eulerove metode polovišta i Runge-Kutta metode, nego kod Eulerove metode. Navedeno zapažanje navodi nas na činjenicu da su navedene dvije metode preciznije od Eulerove metode, što možemo potvrditi ucrtavanjem uređenih parova  $(t_n, x_n)$  i krivulje rješenja kroz točku  $(0, 4)$ , kao što je prikazano na Slici 5.8.



Slika 5.8: Aproksimacije rješenja diferencijalne jednadžbe  $x' = \cos(tx)$ , uz  $x(0) = 4$  za različite numeričke metode (Geogebra).

Za isti korak  $h$ , na Slici 5.8 vidimo da će aproksimacija rješenja Eulerovom metodom dati najlošije rezultate, dok će druge dvije metode dati puno bolje aproksimacije rješenja. Također, možemo primijetiti kako su i Eulerova metoda polovišta i Runge-Kutta metoda davale puno bolje aproksimacije na području gdje je krivulja imala manje promjene nagiba, dok je u području veće promjene nagiba, Runge-Kutta metoda davala bolju aproksimaciju. Općenito, aproksimacija rješenja Runge-Kutta metodom najbrže će "konvergirati" prema rješenju diferencijalne jednačbe, što ćemo vidjeti i u sljedećem primjeru i objasniti u Poglavlju 5.3.

**Primjer 5.2.3.** Zadana je diferencijalna jednačba  $x' = \cos(tx)$ , iz Primjera 5.2.2, uz početni uvjet  $x(0) = 4$ . Uz pomoć Eulerove metode, Eulerove metode polovišta i Runge-Kutta metode, izračunajmo vrijednosti aproksimacija u točki  $t = 2$ ,  $x_h(2)$ . Isto ponovimo za razne brojeve koraka, te usporedimo rezultate.

*Rješenje.* Stavimo  $t_f := 2, t_0 := 0$ . U svakom retku Tablice 5.6, broj koraka povećava se dva puta, pa ćemo veličinu koraka u svakom retku računati pomoću formule:

$$h = \frac{t_f - t_0}{2^N}. \quad (5.6)$$

N	Broj koraka	Eulerova metoda $x_h(2)$	Eulerova metoda polovišta $x_h(2)$	Runge-Kutta $x_h(2)$
0	1	6.0000	4.5673	4.5781
1	2	5.2837	2.9964	3.8049
2	4	4.3988	4.0794	4.0163
3	8	4.2135	3.9906	4.0173
4	16	4.1075	4.0107	4.0182
5	32	4.0612	4.0163	4.0182
6	64	4.0393	4.0177	4.0182
7	128	4.0287	4.0181	4.0182
8	256	4.0234	4.0182	4.0182
9	512	4.0208	4.0182	4.0182
10	1024	4.0195	4.0182	4.0182
11	2048	4.0189	4.0182	4.0182
12	4096	4.0186	4.0182	4.0182

Tablica 5.6:  $x' = \cos(tx)$  uz  $x(0) = 4$ .

U ovom primjeru, iz Tablice 5.6 možemo vidjeti da, kad povećavamo broj koraka, tj. kad veličina koraka  $h$  pada u 0, vrijednost  $x_h(2)$  konvergira k konstanti 4.0182, koja predstavlja očekivano rješenje  $x(2)$  (izračunato uz pomoć Geogebre koja također koristi neku

vrstu numeričkih metoda). Da smo mogli eksplicitno riješiti jednadžbu tada bismo mogli odrediti stvarno rješenje  $x(2)$ , a u našem slučaju nadamo se da je očekivano rješenje dobra aproksimacija stvarnog rješenja. Također, možemo primijetiti kako aproksimacija Eulerovom metodom polovišta konvergira k  $x(2)$  puno brže nego Eulerova, što je dokaz da je Eulerova metoda polovišta poboljšanje Eulerove metode. Iako se Eulerova metoda polovišta pokazala vrlo dobrom, Runge-Kutta metoda će značajno brže konvergirati stvarnoj vrijednosti rješenja u točki 2, što je čini najpoželjnijom metodom od navedene tri metode.

U sljedećem poglavlju preciznije ćemo pokazati uočene razlike u konvergenciji opisanih numeričkih metoda, koristeći analizu pogreške.

U nastavku su navedeni kodovi (programskog jezika Python) korišteni u Primjeru 5.2.3, Primjer 5.3.1 i Primjer 5.3.3, za aproksimaciju Eulerovom metodom, Eulerovom metodom polovišta i Runge-Kutta metodom.

Aproksimacija Eulerovom metodom:

---

```
import math

# Definicija funkcije:
def f(x,y):
    return math.cos(x*y)

# Eulerova metoda:
def euler(x0,y0,xn,n,h):
    yn = y0
    for i in range(n):
        slope = f(x0, y0)
        yn = y0 + h * slope
        y0 = yn
        x0 = x0+h

    return yn

# Ulazne vrijednosti:
x0 = float(input('Upisi x0: '))
y0 = float(input('Upisi y0: '))
xn = float(input('Upisi xn: '))
korak = int(input('Upisi broj koraka: '))

# Velicina koraka:
h = (xn-x0)/korak
```

```
# Eulerova funkcija:  
yn = euler(x0,y0,xn,korak,h)  
  
print('At x=%.4f, y=%.4f' %(xn,yn))
```

---

Aproksimacija Eulerovom metodom polovišta:

---

```
import math  
  
# Definicija funkcije:  
def f(x,y):  
    return math.cos(x*y)  
  
# Eulerova metoda sredisnje tocke:  
def euler_midpoint(x0,y0,xn,n):  
    for i in range(n):  
        x_mid = x0 + h/2  
        y_mid = y0 + h/2 * f(x0, y0)  
        yn = y0 + h * f(x_mid, y_mid)  
        y0 = yn  
        x0 = x0 + h  
  
    print('\nAt x=%.4f, y=%.4f' %(xn,yn))  
  
# Ulazne vrijednosti:  
x0 = float(input('Upisi x0: '))  
y0 = float(input('Upisi y0: '))  
xn = float(input('Upisi xn: '))  
korak = int(input('Upisi broj koraka: '))  
  
# Velicina koraka:  
h = (xn-x0)/korak  
  
# Funkcija Eulerove metode sredisnje tocke:  
euler_midpoint(x0,y0,xn,korak)
```

---

Aproksimacija Runge-Kutta metodom:

---

```
import math

# Definicija funkcije:
def f(x,y):
    return math.cos(x*y)

#Runge-Kutta metoda:
def rk4(x0,y0,xn,n):
    for i in range(n):
        k1 = h * (f(x0, y0))
        k2 = h * (f((x0+h/2), (y0+k1/2)))
        k3 = h * (f((x0+h/2), (y0+k2/2)))
        k4 = h * (f((x0+h), (y0+k3)))
        k = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6
        yn = y0 + k
        y0 = yn
        x0 = x0+h
    print('\nAt x=%.4f, y=%.4f' %(xn,yn))

# Ulazne vrijednosti:
x0 = float(input('Upisi x0: '))
y0 = float(input('Upisi y0: '))
xn = float(input('Upisi xn: '))
korak = int(input('Upisi broj koraka: '))

# Velicina koraka:
h = (xn-x0)/korak

# Runge-Kutta funkcija:
rk4(x0,y0,xn,korak)
```

---

### 5.3 Analiza pogreške aproksimacije numeričkih metoda

U ovom poglavlju bavit ćemo se analizom pogrešaka aproksimacije u numeričkim metodama. Analiza pogrešaka važan je aspekt svakog numeričkog izračuna jer pomaže odrediti točnost i pouzdanost dobivenih rezultata. Jedna od najčešće korištenih metoda za analizu pogrešaka je *metoda aproksimacije*, koja uključuje usporedbu izračunatih rezultata s očekivanim ili poznatim vrijednostima.

Prema [8], za dani Cauchyjev problem, neka je  $x(t)$  njegovo stvarno rješenje, a  $x_h(t)$  aproksimirano rješenje numeričkim metodama. *Stvarna pogreška* u nekom trenutku  $t_f > t_0$ ,  $t_f \in I$ , uz korak  $h$ , definira se kao:

$$E_{t_f}(h) = x(t_f) - x_h(t_f). \quad (5.7)$$

Stvarna greška ovisi o broju koraka  $n$ , između  $t_0$  i  $t_f$ , tj. o veličini koraka koja je s brojem koraka vezana na sljedeći način:  $h := \frac{t_f - t_0}{n}$ . Drugim riječima, odaberemo proizvoljnu točku  $t_f > t_0$ , te podijelimo interval  $[t_0, t_f]$  na  $n$  ekvidistantnih dijelova veličine  $h$  te računamo vrijednost  $E_{t_f}(h)$  za tu točku  $t_f$ . Na stvarnu pogrešku utjecaj će imati i izabrana metoda aproksimacije i numerička preciznost, koja će ovisiti o samom računalu i metodi reprezentacije decimalnih brojeva.

U Primjeru 5.2.3 aproksimirali smo rješenje diferencijalne jednadžbe  $x(t_f)$ , za  $t_f = 2$ . U tom primjeru, broj koraka na intervalu  $[t_0, t_f]$  računali smo kao  $2^N$ , za sve  $N \in \{0, 1, 2, \dots, 11, 12\}$ , a za veličinu koraka uzeli smo vrijednost (5.6). Drugim riječima, broj koraka  $2^N$  direktno utječe na veličinu koraka  $h$ . U sljedećem primjeru varirat ćemo  $N$  za različite numeričke metode, te ispisati vrijednost  $x_h(t_f)$  i vrijednost pripadne stvarne pogreške u trenutku  $t_f$ ,  $E_{t_f}(h) := x(t_f) - x_h(t_f)$ .

**Primjer 5.3.1.** *Zadan je Cauchyjev problem:*

$$x' = x^2 \cos t, \quad x(0) = 0.4.$$

*Potrebno je pronaći vrijednost  $x_h(4)$  te pripadne stvarne pogreške Eulerovom metodom, Eulerovom metodom polovišta i Runge-Kutta metodom.*

*Rješenje.* Vrijednosti  $x_h(4)$  iz tablice 5.7 dobivamo koristeći programski kod (u programskom jeziku Python) iz Primjera 5.2.3, a stvarnu pogrešku računamo uz pomoć formule (5.7). Prema metodi separacije varijabli, uvedenoj u Poglavlju 3, eksplicitno rješenje diferencijalne jednadžbe  $x' = x^2 \cos t$  iznosi:

$$x(t) = \frac{1}{C - \sin t}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

Do vrijednosti konstante  $C$  dolazimo ukoliko ubacimo početni uvjet  $x(0) = 0.4$  u (5.8). Tada dobivamo:

$$0.4 = \frac{1}{C - \sin 0} \rightarrow C = 2.5.$$

Tada stvarna vrijednost rješenja kroz točku  $(0, 0.4)$ , u točki  $t = 4$ , iznosi:

$$x(4) = \frac{1}{2.5 - \sin 4} = 0.3070496296415576.$$



N	Broj koraka	Eulerova metoda	Eulerova metoda polovišta	Runge-Kutta
		$x_h(4)$ $E_{t_f}(h)$	$x_h(4)$ $E_{t_f}(h)$	$x_h(4)$ $E_{t_f}(h)$
0	1	1.0400000000 $-7.3295 \times 10^{-1}$	-0.4629220803 $7.6997 \times 10^{-1}$	0.1493279739 $1.5772 \times 10^{-1}$
1	2	0.2885389599 $1.8511 \times 10^{-2}$	0.2204721449 $8.6577 \times 10^{-2}$	0.2945744860 $1.2475 \times 10^{-2}$
2	4	0.2525184887 $5.4531 \times 10^{-2}$	0.2987428345 $8.3068 \times 10^{-3}$	0.3061126898 $9.3694 \times 10^{-4}$
3	8	0.2926387066 $1.4411 \times 10^{-2}$	0.3074539086 $-4.0428 \times 10^{-4}$	0.3070166976 $3.2932 \times 10^{-5}$
4	16	0.3015176027 $5.5320 \times 10^{-3}$	0.3073376835 $-2.8805 \times 10^{-4}$	0.3070485269 $1.1028 \times 10^{-6}$
5	32	0.3046173786 $2.4323 \times 10^{-3}$	0.3071408856 $-9.1256 \times 10^{-5}$	0.3070495892 $4.0418 \times 10^{-8}$
6	64	0.3059093774 $1.1403 \times 10^{-3}$	0.3070747462 $-2.5117 \times 10^{-5}$	0.3070496280 $1.6537 \times 10^{-9}$
7	128	0.3064976617 $5.5197 \times 10^{-4}$	0.3070561946 $-6.5650 \times 10^{-6}$	0.3070496296 $7.6348 \times 10^{-11}$
8	256	0.3067780914 $2.7154 \times 10^{-4}$	0.3070513066 $-1.6770 \times 10^{-6}$	0.3070496296 $3.9315 \times 10^{-12}$
9	512	0.3069149606 $1.3467 \times 10^{-4}$	0.3070500534 $-4.2372 \times 10^{-7}$	0.3070496296 $2.1944 \times 10^{-13}$
10	1024	0.3069825688 $6.7061 \times 10^{-5}$	0.3070497361 $-1.0649 \times 10^{-7}$	0.3070496296 $1.2601 \times 10^{-14}$
11	2048	0.3070161675 $3.3462 \times 10^{-5}$	0.3070496563 $-2.6692 \times 10^{-8}$	0.3070496296 $1.7764 \times 10^{-15}$
12	4096	0.3070329156 $1.6714 \times 10^{-5}$	0.3070496363 $-6.6818 \times 10^{-9}$	0.3070496296 $-5.5511 \times 10^{-16}$
13	8192	0.3070412769 $8.3528 \times 10^{-6}$	0.3070496313 $-1.6715 \times 10^{-9}$	0.3070496296 $5.5511 \times 10^{-17}$
14	16384	0.3070454543 $4.1753 \times 10^{-6}$	0.3070496301 $-4.1802 \times 10^{-10}$	0.3070496296 $2.2204 \times 10^{-16} (*)$
15	32768	0.3070475422 $2.0874 \times 10^{-6}$	0.3070496297 $-1.0453 \times 10^{-10}$	0.3070496296 $1.5543 \times 10^{-15} (*)$

Tablica 5.7:

Primijetimo, stvarna pogreška će se uglavnom smanjivati kako povećavamo broj koraka.

Unatoč tome, može se dogoditi slučaj označen (\*) u Tablici 5.7. Činjenica da porastom broja koraka stvarna pogreška može rasti događa se zbog reprezentacije decimalnih brojeva, koja ovisi o računalnom programu.

Općenito, zanemariivši pojavu (\*) iz Tablice 5.7, stvarna pogreška  $E_{t_f}(h)$  ponaša se različito za različite numeričke metode. U Primjeru 5.2.3 i Primjeru 5.3.1 zaključili smo da je Runge-Kutta metoda općenito preciznija od druge dvije metode, te da je Eulerova metoda polovišta preciznija od Eulerove metode.

**Definicija 5.3.2.** *Ako za svaki  $t_f > t_0$ ,  $t_f \in I$ , postoji konstanta  $C$  takva da  $|E_{t_f}(h)| \sim {}^1Ch^p$ , kad  $h \rightarrow 0$ , za numeričku metodu aproksimacije rješenja Cauchyjevog problema kažemo da je reda točnosti  $p \in \mathbb{N}$ .*

Teoretski rezultat, prema [8], koji nećemo dokazivati, a koji ćemo potkrijepiti Primjerom 5.3.3, je da stvarna pogreška  $E_{t_f}(h)$  aproksimacije rješenja  $x_h(t_f)$  u nekoj točki  $t_f > t_0$  ovisi o veličini koraka  $h$ , na sljedeći način:

- za Eulerovu metodu,  $|E_{t_f}(h)| \sim C_E h$ ,  $h \rightarrow 0$ ,
- za Eulerovu metodu polovišta,  $|E_{t_f}(h)| \sim C_M h^2$ ,  $h \rightarrow 0$ ,
- za Runge-Kutta metodu,  $|E_{t_f}(h)| \sim C_{RK} h^4$ ,  $h \rightarrow 0$ .

Zbog prethodnih formula za stvarnu pogrešku  $E_{t_f}(h)$  Eulerova metoda se naziva *metoda prvog reda*, Eulerova metoda polovišta *metoda drugog reda*, a Runge-Kutta metoda *metoda četvrtog reda*.

Pod pretpostavkom  $|E_t(h)| \sim Ch^p$ , kad  $h \rightarrow 0$ , za  $t \in I$ ,  $C > 0$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , tj. ukoliko je numerička metoda reda  $p$ , tada red metode možemo dobiti računanjem sljedećeg limesa:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |E_t(h)|}{\ln h} = p. \quad (5.9)$$

*Dokaz.* Pretpostavimo da je numerička metoda reda  $p$ , tj. da vrijedi  $|E_t(h)| \sim Ch^p$ , kad  $h \rightarrow 0$ , za neki  $t > t_0$ . Tada vrijedi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|E_t(h)|}{Ch^p} = 1.$$

Ekvivalentno je:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|E_t(h)|}{Ch^p} = 1 \iff \frac{|E_t(h)|}{Ch^p} = 1 + R(h) \rightarrow \ln \left( \frac{|E_t(h)|}{Ch^p} \right) = \ln(1 + R(h)),$$

---

<sup>1</sup>  $f(h) \sim g(h)$  kad  $h \rightarrow 0$  znači da vrijedi  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 1$ .

gdje je  $R(h)$  neka funkcija takva da vrijedi  $\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = 0$ .

Zbog  $\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + R(h)) = 0$ , tada će vrijediti:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln \left( \frac{|E_t(h)|}{Ch^p} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (\ln |E_t(h)| - \ln C - p \ln h) = 0.$$

No,  $\lim_{h \rightarrow 0} \ln h = -\infty$  pa:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |E_t(h)| - \ln C - p \ln h}{\ln h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |E_t(h)|}{\ln h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln C}{\ln h} - \lim_{h \rightarrow 0} p = 0,$$

odnosno vrijedi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |E_t(h)|}{\ln h} = p.$$

**Primjer 5.3.3.** Za Cauchyjev problem  $x' = x^2 \cos t$ , uz  $x(0) = 0.4$  iz Primjera 5.3.1 procijenimo red triju uvedenih metoda uz  $t_f = 4$ .

*Rješenje.* Vrijednost  $E_{t_f}(h)$  uzimamo iz Tablice 5.7 u Primjeru 5.3.1. Veličinu koraka  $h$  i dalje računamo prema formuli  $h = \frac{t_f - t_0}{2^N}$ . Pomoću formule (5.9) u sljedećoj tablici procijenit ćemo red pogreške za Eulerovu metodu, Eulerovu metodu polovišta i Runge-Kutta metodu.

N	Broj koraka	Eulerova metoda $\frac{\ln  E_t(h) }{\ln h}$	Eulerova metoda polovišta $\frac{\ln  E_t(h) }{\ln h}$	Runge-Kutta $\frac{\ln  E_t(h) }{\ln h}$
0	1	-0.224	-0.189	-1.332
1	2	-5.755	-3.530	-6.325
2	4	-8.750	-13.694	-13.263
3	8	6.117	11.272	14.890
4	16	3.749	5.881	9.895
5	32	2.894	4.473	8.187
6	64	2.444	3.820	7.293
7	128	2.164	3.443	6.722
8	256	1.974	3.198	6.315
9	512	1.837	3.024	6.007
10	1024	1.733	2.895	5.772
11	2048	1.652	2.795	5.444
12	4096	1.587	2.716	5.068
13	8192	1.534	2.651	4.909
14	16384	1.489	2.596	4.333
15	32768	1.000	2.000	3.784

Tablica 5.8: Red pogreške za diferencijalnu jednadžbu  $x' = \cos tx$  uz  $x(0) = 4$ , za različite numeričke metode.

U Tablici 5.8 vidimo da je (u većini slučajeva) red pogreške (koji procijenimo kao limes kad  $N \rightarrow \infty$ , tj. kad  $h \rightarrow 0$ ), kod Eulerove metode jednak jedan, kod Eulerove metode polovišta jednak dva, a kod Runge-Kutta metode jednak četiri. Dobiveni rezultati u skladu su s očekivanjem. Primijetimo, kod Eulerove metode i Eulerove metode polovišta u Tablici 5.7 stvarna pogreška, sa povećanjem broja koraka, uvijek se smanjivala. Također, u Tablici 5.8, red pogreške kod tih metoda se monotono stabilizira. Kod Runge-Kutta metode javljaju se oscilacije, pa se stabilizacija teže uočava. Dodatno, sa porastom kompleksnosti metode povećava se i vrijeme potrebno za izračun svakog koraka, tako da je potrebno pronaći ravnotežu između potrebne preciznosti i kompleksnosti numeričke metode.

Zaključno, numeričke metode daju učinkovite metode aproksimativnog rješavanja diferencijalnih jednadžbi koje se ne mogu riješiti analitičkim metodama. Međutim, numeričke metode imaju ograničenja, kao što su problemi stabilnosti i potreba za velikom količinom računalne snage.

Postoje različite numeričke metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, uključujući Eulerovu metodu, Eulerovu metodu polovišta, Runge-Kutta metodu i mnoge druge. Izbor metode ovisi o željenoj razini točnosti i kompleksnosti.

# Bibliografija

- [1] *First Order Linear Differential Equations*. Dostupno na: [https://www.sfu.ca/math-coursenotes/Math%20158%20Course%20Notes/sec\\_first\\_order\\_homogeneous\\_linear.html](https://www.sfu.ca/math-coursenotes/Math%20158%20Course%20Notes/sec_first_order_homogeneous_linear.html) (lipanj 2022.).
- [2] *GeoGebra*. Dostupno na: <https://www.geogebra.org> (studeni 2022.).
- [3] *Initial value problem - Wikipedia*. Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Initial\\_value\\_problem#cite\\_note-1](https://en.wikipedia.org/wiki/Initial_value_problem#cite_note-1) (srpanj 2022.).
- [4] *Picard–Lindelöf theorem - Wikipedia*. Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Picard%E2%80%93Lindel%C3%B6f\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Picard%E2%80%93Lindel%C3%B6f_theorem) (lipanj 2022.).
- [5] Christian, Austin: *Math 32A Week 10 Notes The Implicit Function Theorem*. Dostupno na: <https://www.math.ucla.edu/~archristian/teaching/32a-f16/implicit-function-theorem.pdf>, (lipanj 2022.).
- [6] Grigorian, Alexander: *Ordinary Differential Equation*. Dostupno na: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/odelec2008.pdf> (srpanj 2022.).
- [7] Guljaš, Boris: *Metrički prostori*. Osijek, 2010. Dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/metprost.pdf> (kolovoz 2022.).
- [8] Hubbard, John H i Beverly H West: *Differential equations: A dynamical systems approach: Ordinary differential equations*, svezak 5. Springer, 2013.
- [9] Mihetec, Marija: *Bayesovske igre*. Dostupno na: <https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf:5296/preview> (kolovoz 2022.).
- [10] Nagy, Gabriel: *Ordinary Differential Equations*. 2021. Dostupno na: <https://users.math.msu.edu/users/gnagy/teaching/ode.pdf> (kolovoz 2022.).
- [11] Senada, Kalabušić i Esmir Pilav: *Obične diferencijalne jednadžbe*. Dostupno na: <https://www.researchgate.net/publication/271644336> (srpanj 2022.).

- [12] Starčević, Maja: *Sustavi diferencijalnih jednažbi*. Dostupno na: [https://www.pmf.unizg.hr/\\_download/repository/skripta\\_sdj\\_18\\_04\\_2019.pdf](https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/skripta_sdj_18_04_2019.pdf) (kolovoz 2022.).
- [13] Šime, Ungar: *Matematička analiza 3*. PMF-Matematički odjel, Zagreb, 1994.

# Sažetak

Za rješavanje običnih diferencijalnih jednažbi možemo koristiti različite analitičke, kvalitativne i numeričke metode. Analitičke metode uključuju pronalaženje eksplicitnog rješenja običnih diferencijalnih jednažbi pomoću algebarskih i računskih tehnika, ali možda neće biti izvedive za složenije jednažbe. S druge strane, kod kvalitativnih metoda na temelju oblika jednažbe procjenjujemo ponašanje rješenja u vremenu, bez eksplicitnog rješavanja jednažbe. Jedna od kvalitativnih metoda je grafički prikaz polja smjerova i to će nam predstavljati glavni alat u kvalitativnoj analizi. Numeričke metode uključuju diskretizaciju i aproksimaciju rješenja običnih diferencijalnih jednažbi pomoću numeričkih algoritama. Prilikom odabira odgovarajuće metode, važno je poznavati prednosti i nedostatke svake pojedine metode.

# Summary

To solve ordinary differential equations, we use different analytical, qualitative, and numerical methods. Analytical methods involve finding an explicit solution of ordinary differential equations using algebraic and computational techniques, but they may not be feasible for more complicated equations. On the other hand, using qualitative methods, we estimate the behavior of the solution over time based on the equation, without explicitly solving it. One of the qualitative methods is drawing the direction field of slopes for the given equation, which is our main tool in qualitative analysis. Numerical methods involve discretization and approximation of solutions of ordinary differential equations using numerical algorithms. When selecting the appropriate method, it is important to be aware of the advantages and disadvantages of each method.



# Životopis

Rođena sam dana 01. travnja 1998. godine u Varaždinu. Osnovnoškolsko obrazovanje završila sam 2012. godine u V. osnovnoj školi u Varaždinu. Srednjoškolsko obrazovanje nastavila sam u Prvoj gimnaziji u Varaždinu gdje sam pohađala opći smjer. Obrazovanje sam nastavila 2016. godine upisom na preddiplomski studij Prirodoslovno matematičkog fakulteta na Matematičkom odsjeku, nastavnički smjer. Titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike (univ. bacc. educ. math.) stekla sam 2019. godine. Po završetku preddiplomskog studija upisala sam diplomski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno matematičkog fakulteta, smjer Financijska i poslovna matematika. Tijekom studiranja bila sam članica fakultetske košarkaške ekipe te članica Studentskog zbora.