SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Eva Razum

ELEMENTARNE NEJEDNAKOSTI I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ana Prlić

Suvoditelj rada:
doc. dr. sc. Vedran Kojić

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem doc. dr. sc. Ani Prlić i doc. dr. sc. Vedranu Kojiću na pomoći i vodstvu pri izradi ovog rada.
Najveće hvala mami i tati na neizmjernoj podršci i ljubavi koju su mi pružili tijekom studiranja.

Sadržaj

Uvod

Optimizacija je grana matematike koja ima široku primjenu u različitim znanstvenim disciplinama. Problemi optimizacije bave se određivanjem najboljeg mogućeg rješenja uz prethodno zadane kriterije. Matematički gledano, probleme optimizacije najčešće rješavamo primjenom diferencijalnog računa, to jest traženjem minimuma ili maksimuma funkcije. Ipak, iako je diferencijalni račun vrlo koristan alat, traženje ekstrema funkcije ovom metodom često je zahtjevno. Naime, u nekim problemima optimizacije provjera nužnih i dovoljnih uvjeta za ekstrem računanjem derivacija (višeg reda) iziskuje izračun netrivijalnih međurezultata. Kako bismo, stoga, izbjegli provjeru nužnih i dovoljnih uvjeta koju diferencijalni račun traži, primijenit ćemo metodu nejednakosti na primjeru nekih prikladno odabranih funkcija.

U ovom diplomskom radu promatrat ćemo elementarne nejednakosti i njihove primjene u matematici i ekonomiji. Cilj rada je primijeniti metodu nejednakosti na niz problema optimizacije s dodatnim naglaskom na probleme optimizacije u ekonomiji. Također, pokazat ćemo primjenu nejednakosti na zadatke s matematičkih natjecanja. Dodatni cilj ovog rada je naglasiti prednost metode nejednakosti nad upotrebom diferencijalnog računa pri rješavanju problema optimizacije.

Rad je podijeljen u pet cjelina. Nakon uvoda, navest ćemo osnovne definicije i teoreme vezane uz aritmetičko-geometrijsku nejednakost, Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjevu nejednakost i Bernoullijevu nejednakost. Zatim ćemo riješiti niz primjera i zadataka s natjecanja u kojima ćemo primijeniti svaku od tih nejednakosti. Primjenu nejednakosti u ekonomiji vidjet ćemo na konstrukciji modela ekonomične količine nabave (EOQ model) i u usporedbi ukupnih kamata izračunatih po jednostavnom i složenom kamatnom računu.

Poglavlje 1

Neke elementarne nejednakosti

1.1 Aritmetičko-geometrijska nejednakost

Aritmetičko-geometrijska nejednakost ili kraće AG nejednakost je jedna od najvažnijih algebarskih nejednakosti. Koristi se u rješavanju različitih matematičkih problema, a ima primjenu i u drugim znanstvenim disciplinama. U ovom poglavlju navest ćemo osnovne definicije i teoreme koji su nam potrebni za razumijevanje AG nejednakosti.

Definicija 1.1.1. ***Aritmetička sredina*** *realnih brojeva* $x_1, x_2, \dots, x_n$, *za* $n \geq 2$, *definira se formulom*

$$A_n := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Definicija 1.1.2. ***Geometrijska sredina*** *realnih brojeva* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *gdje je* $x_i \geq 0$ *za* $i = 1, 2, \dots, n$, *definira se formulom*

$$G_n := \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Teorem 1.1.3 (**Aritmetičko-geometrijska nejednakost**)**.** *Neka je dano* $n \geq 2$ *pozitivnih realnih brojeva* $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Tada vrijedi nejednakost*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{1.1}$$

Jednakost u 1.1 vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dokaz. U literaturi postoji više različitih dokaza AG nejednakosti. Prvo ćemo navesti dokaz koji koristi Cauchyev princip silazne indukcije.
Za $n = 2$, nejednakost 1.1 je ekvivalentna s

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0. \tag{1.2}$$

Posljednja nejednakost u 1.2 očito vrijedi za svaka dva pozitivna realna broja x_1 i x_2 pa je nejednakost 1.1 dokazana za $n = 2$. U 1.2 vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je $x_1 = x_2$. Dokažimo sada da ako nejednakost 1.1 vrijedi za neki $n \geq 2$, tada ona vrijedi i za $2n$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} &= (x_1 + \cdots + x_n) + (x_{n+1} + \cdots + x_{2n}) \\ &\geq n\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} + n\sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}} \\ &\geq n \cdot 2\sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}}} \\ &\geq 2n\sqrt[2n]{x_1 \cdots x_{2n}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Budući da nejednakost 1.1 vrijedi za $n = 2$ tada iz 1.3 slijedi da 1.1 vrijedi za svaki n koji je potencija broja 2, to jest za svaki n oblika $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.
Sada je dovoljno pokazati da ako nejednakost 1.1 vrijedi za neki broj n, onda 1.1 vrijedi i za broj $n - 1$. Uvodimo oznaku:

$$s = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}.$$

Budući da 1.1 vrijedi za n varijabli, za posljednju varijablu možemo uzeti

$$x_n = \frac{s}{n-1}.$$

Prema pretpostavci Cauchyeve indukcije slijedi:

$$s + \frac{s}{n-1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{s}{n-1} \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}\frac{s}{n-1}}. \tag{1.4}$$

Kako je

$$s + \frac{s}{n-1} = \frac{sn - s + s}{n-1} = \frac{n}{n-1}s,$$

tada je nejednakost 1.4 ekvivalentna s

$$\frac{n}{n-1}s \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}\frac{s}{n-1}}. \tag{1.5}$$

Dijeljenjem obje strane u 1.5 s n i primjenom svojstva korijenovanja, nejednakost 1.5 postaje ekvivalentna s

$$\frac{s}{n-1} \cdot \sqrt[n]{\frac{n-1}{s}} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}},$$

odnosno s

$$\sqrt[n]{s^{n-1}} \geq \frac{n-1}{\sqrt[n]{n-1}}\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}. \tag{1.6}$$

Potenciranjem nejednakosti 1.6 eksponentom $\frac{n}{n-1}, n > 1$, nejednakost 1.6 postaje ekvivalnetna s

$$s \geq (n-1)\sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}, \tag{1.7}$$

odakle slijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \tag{1.8}$$

što je trebalo i dokazati.
Ako su $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$ nejednakost 1.8 postaje

$$\frac{(n-1)x_1}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1^{n-1}}$$

gdje očito vrijedi jednakost. Obratno, ako u 1.8 vrijedi jednakost, onda mora vrijediti jednakost i u 1.4, a to, po pretpostavci indukcije, znači da mora vrijediti $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{s}{n-1}$. □

Dokažimo sada AG nejednakost primjenom diferencijalnog računa. Prvo ćemo dokazati AG nejednakost u slučaju $n \geq 2$ primjenom diferencijalnog računa funkcije jedne varijable, a zatim u slučaju $n = 2$ primjenom Lagrangeovog multiplikatora.

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ funkcija dana s $f(x) = \ln x - x$. Za nju vrijedi $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ i $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Kako bismo odredili stacionarne točke funkcije f rješavamo jednadžbu $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{1}{x} - 1 &= 0 \\ \frac{1}{x} &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je $x = 1$ maksimum funkcije koristeći drugu derivaciju. Za $x = 1$ dobivamo $f''(1) = -1 < 0$ pa funkcija f u točki $x = 1$ poprima maksimum jednak -1. Sada vrijedi nejednakost $\ln x - x \leq -1$, odnosno $\ln x \leq x - 1$.
Neka je $A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$. Uvrstimo li $\frac{x_i}{A}$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ u nejednakost $\ln x \leq x - 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x_1}{A}\right) &\leq \frac{x_1}{A} - 1 \\ \ln\left(\frac{x_2}{A}\right) &\leq \frac{x_2}{A} - 1 \\ &\vdots \\ \ln\left(\frac{x_n}{A}\right) &\leq \frac{x_n}{A} - 1. \end{aligned}$$

Zbrajanjem svih nejednakosti slijedi

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x_1}{A}\right) + \ln\left(\frac{x_2}{A}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{x_n}{A}\right) &\leq \frac{x_1}{A} - 1 + \frac{x_2}{A} - 1 + \cdots + \frac{x_n}{A} - 1 \\
\ln\left(\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{A^n}\right) &\leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{A} - n \\
\ln\left(\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{A^n}\right) &\leq \frac{nA}{A} - n \\
\ln\left(\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{A^n}\right) &\leq n - n \\
\ln\left(\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{A^n}\right) &\leq 0.
\end{aligned}
$$

Primjenom eksponencijalne funkcije na obje strane nejednakosti dobivamo

$$
\begin{aligned}
e^{\ln\left(\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{A^n}\right)} &\leq e^0 \\
\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{A^n} &\leq 1 \\
x_1 x_2 \cdots x_n &\leq A^n \\
\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &\leq \sqrt[n]{A^n} \\
\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &\leq A \\
\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &\leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.
\end{aligned}
$$

Ovime smo dokazali AG nejednakost primjenom diferencijalnog računa funkcije jedne varijable u slučaju $n \geq 2$. □

Na sljedećem jednostavnom primjeru možemo vidjeti kako upotreba diferencijalnog računa pri dokazivanju nije jednostavna. Primjenom metode nejednakosti u dokazima ne moramo provjeravati nužne i dovoljne uvjete za postojanje ekstrema funkcije koji često nisu trivijalni što nam opravdava korištenje ove metode tamo gdje je moguće.

Dokaz. Neka su $f, g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ definirane s

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= x_1 \cdot x_2, \\
g(x_1, x_2) &= x_1 + x_2.
\end{aligned}
$$

Kako bismo dokazali AG nejednakost u slučaju $n = 2$ promatramo sljedeći problem: Odredi maksimum funkcije $f(x_1, x_2)$, uz ograničenje $g(x_1, x_2) = C$, pri čemu je $C > 0$ konstanta.

Uvodimo parametar λ koji nazivamo Lagrangeov multiplikator i definiramo Lagrangeovu funkciju:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \lambda) &= f(x_1, x_2) + \lambda(g(x_1, x_2) - C) \\ &= x_1 \cdot x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - C). \end{aligned}$$

Iz nužnog uvjeta za uvjetni ekstrem Lagrangeove funkcije slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= x_2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= x_1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x_1 + x_2 - C = 0. \end{aligned}$$

Dolazimo do sustava jednadžbi čije je rješenje stacionarna točka funkcije F

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = C \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Stacionarna točka funkcije F je točka $(x_1, x_2) = \left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}\right)$ i $\lambda = -\frac{C}{2}$. Hesseova matrica funkcije F s obzirom na varijable x_1, x_2 i λ u točki $\left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ jednaka je

$$H\left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\det H\left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}, -\frac{C}{2}\right) = 2 > 0$, to funkcija f ima lokalni maksimum u točki $\left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}\right)$ (vidi [12], Propozicija 2.1., str. 317). Maksimalna vrijednost funkcije f je $f\left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}\right) = \left(\frac{C}{2}\right)^2$. Sada vrijedi

$$f(x_1, x_2) \leq \left(\frac{C}{2}\right)^2$$

što je ekvivalentno s

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{C}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Jednakost vrijedi za $x_1 = x_2$. Ovime je završen dokaz AG nejednakosti u slučaju $n = 2$ primjenom Lagrangeovog multiplikatora. □

Sljedeće ćemo iskazati i dokazati teorem koji je poopćenje nejednakosti 1.1.

Teorem 1.1.4 (Težinska AG nejednakost). *Neka je* $x_1 > 0, x_2 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ *te* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. *Tada vrijedi nejednakost*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}. \tag{1.9}$$

Jednakost u 1.9 vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.

Dokaz. Nejednakost 1.9 može se dokazati na više različitih načina, a ovdje ćemo navesti jedan od njih. Dokaz nejednakosti 1.9 preuzet je iz [8].
Ako su λ_1 i λ_2 pozitivni racionalni brojevi, tada postoje prirodni brojevi m i n, $m < n$, takvi da je $\lambda_1 = \frac{m}{n}$ i $\lambda_2 = \frac{n-m}{n}$. U ovom slučaju, nejednakost 1.9 slijedi iz nejednakosti 1.1:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= \frac{m x_1 + (n-m) x_2}{n} \\ &= \frac{\overbrace{(x_1 + x_1 + \cdots + x_1)}^{m\ puta} + \overbrace{(x_2 + x_2 + \cdots + x_2)}^{n-m\ puta}}{n} \\ &\geq \sqrt[n]{x_1^m x_2^{n-m}} \\ &= x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

U slučaju kada su λ_1 i λ_2 pozitivni realni brojevi, tada postoje dva niza racionalnih brojeva $(r_k)_{k\geq 0}$ i $(s_k)_{k\geq 0}$ za koje vrijedi $r_k \to \lambda_1$, $s_k \to \lambda_2$ i $r_k + s_k = 1$, pa za svaki $k \in \mathbb{N}$, zbog 1.10, vrijedi

$$r_k x_1 + s_k x_2 \geq x_1^{r_k} x_2^{s_k} \tag{1.11}$$

Puštanjem k u beskonačnost i prelaskom u limes, iz 1.11 slijedi 1.9, što je trebalo i dokazati. □

Primijetimo da je AG nejednakost u slučaju $n = 2$ poseban slučaj težinske AG nejednakosti za $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

1.2 Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost

Osim nejednakosti među sredinama važnu ulogu ima i Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost, skraćeno CSB nejednakost. U nastavku ćemo iskazati CSB nejednakost te ju dokazati koristeći prethodno navedenu AG nejednakost.

Teorem 1.2.1 (Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost). *Neka su* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *dvije n-torke realnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{1.12}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako postoji realan broj λ takav da je $b_k = \lambda a_k$ za sve $k = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz. Dokažimo CSB nejednakost u slučaju $n \geq 2$ koristeći AG nejednakost. Dokaz je preuzet iz [10].
Neka je $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ i $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $A \neq 0$ i $B \neq 0$. Tada iz AG nejednakosti slijedi

$$1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{1}{B^2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{a_k^2}{A^2} + \frac{b_k^2}{B^2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k b_k|}{AB} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{AB} \tag{1.13}$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \tag{1.14}$$

što je ekvivalentno s 1.12. Jednakost u 1.14 vrijedi ako i samo ako je $\frac{a_k^2}{A^2} = \frac{b_k^2}{B^2}$ i $|a_k b_k| = a_k b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Iz $|a_k b_k| = a_k b_k$ slijedi da su a_k i b_k istog predznaka, za sve $k = 1, 2, \dots, n$, iz čega slijedi da postoji realan broj λ takav da je $b_k = \lambda a_k$ za sve $k = 1, 2, \dots n$. □

1.3 Bernoullijeva nejednakost

Sljedeća elementarna nejednakost je Bernoullijeva nejednakost. Dokazat ćemo ovu nejednakost i njena poopćenja te pokazati da je Bernoullijeva nejednakost ekvivalentna AG nejednakosti.

Teorem 1.3.1 (**Bernoullijeva nejednakost**). *Neka je n prirodan broj i x realan broj veći od -1. Tada vrijedi*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.15}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$ ili $x = 0$.

Dokaz. Za $n = 1$ ili $x = 0$ u 1.15 vrijedi jednakost. Za $n > 1$ i $x \neq 0$ nejednakost 1.15 dokazujemo matematičkom indukcijom. Pretpostavimo da za neki prirodan broj $n > 1$ vrijedi 1.15. Dokažimo da ta nejednakost vrijedi i za $n + 1$.

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \\ &\geq (1 + x)(1 + nx) \\ &= 1 + x + nx + nx^2 \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &> 1 + (n + 1)x \end{aligned} \tag{1.16}$$

Prema principu matematičke indukcije nejednakost 1.15 vrijedi za svaki prirodan broj n veći od 1 i svaki realan broj $x \neq 0$. □

Sljedeća dva teorema su poopćenje Bernoullijeve nejednakosti.

Teorem 1.3.2. *Neka je $x > -1$ realan broj i α pozitivan realan broj. Tada vrijedi*

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad \text{za} \quad \alpha \geq 1, \tag{1.17}$$

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \quad \text{za} \quad \alpha \leq 1. \tag{1.18}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 0$ ili $\alpha = 1$.

Dokaz. Dokaz je preuzet iz [14].
(i) Dokažimo prvo nejednakost 1.18. Neka je $\alpha \leq 1$, to jest neka je $\alpha = \frac{p}{q}$, gdje je $p \leq q$. Konstruiramo niz koji se sastoji od q članova, gdje se član $(1+x)$ pojavljuje p puta:

$$1, 1, \ldots, 1, (1+x), (1+x), \ldots, (1+x)$$

Geometrijska sredina tog niza jednaka je $(1+x)^{\frac{p}{q}}$, a aritmetička sredina jednaka je $1 + \frac{p}{q}x$. Primjenom AG nejednakosti dobivamo

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} \leq 1 + \frac{p}{q}x. \tag{1.19}$$

Supstitucijom $\alpha = \frac{p}{q}$ u gornju nejednakost dobivamo

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x,$$

čime je dokazana nejednakost 1.18.
(ii) Dokažimo nejednakost 1.17. Neka je $x > -1$ realan broj. Tada je nejednakost 1.19 ekvivalentna s

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{p}{q}x\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{1.20}$$

Neka je $y = \frac{p}{q}x$, gdje je zbog $x > -1, y > -\frac{p}{q} > -1$. Supstitucijom $x = \frac{q}{p}y$ u nejednakost 1.20 dobivamo

$$\left(1 + \frac{q}{p}y\right) \leq (1+y)^{\frac{q}{p}}.$$

Neka je $\alpha = \frac{q}{p} \geq 1$ proizvoljan racionalan broj. Tada za $\alpha \geq 1$ i $y > -1$ vrijedi

$$(1+y)^\alpha \geq 1 + \alpha y,$$

čime je dokazana nejednakost 1.17.
Budući da navedene nejednakosti vrijede za sve pozitivne racionalne brojeve $\alpha \leq 1$ ili $\alpha \geq 1$, tada one vrijede i za sve pozitivne realne brojeve jer se svaki realan broj može aproksimirati racionalnim brojem. □

Teorem 1.3.3. *Neka su $x_i > -1$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ realni brojevi jednakog predznaka. Tada vrijedi*

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{1.21}$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po n. Za $n = 1$ vrijedi jednakost $1 + x_1 = 1 + x_1$. Za $n = 2$ bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su $x_i \neq 0$ za $i = 1, 2$. Tada vrijedi stroga nejednakost jer je $(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2 > 1 + x_1 + x_2$.
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n + 1 \in \mathbb{N}$. Zbog toga što su $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ istog predznaka vrijedi

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x_{n+1} \geq 0.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_{n+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(1 + x_{n+1}) \\
&= (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x_{n+1} \\
&= 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x_{n+1} \\
&\geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Time je završen dokaz nejednakosti 1.21. □

Pokažimo sada da je Bernoullijeva nejednakost ekvivalentna AG nejednakosti.

Teorem 1.3.4. *AG nejednakost i Bernoullijeva nejednakost su ekvivalentne.*

Dokaz. Dokaz je preuzet iz [2].
(i) U prvom slučaju želimo dokazati da Bernoullijeva nejednakost slijedi iz AG nejednakosti. Za $n = 1$ imamo jednakost u 1.15. Ako je $n \geq 2$ i $0 < x \leq 1 - \frac{1}{n}$, tada je $x^n > 0 \geq 1 + n(x - 1)$, to jest vrijedi 1.15. Zato možemo pretpostaviti da je $n \geq 2$ i $x > 1 - \frac{1}{n}$. Tada je $1 + n(x - 1) > 0$. Primjenjujući AG na sljedećih n pozitivnih brojeva:

$$1 + n(x - 1), \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n-1\, puta}$$

dobivamo

$$x^n = \left(\frac{[1 + n(x - 1)] + 1 + \cdots + 1}{n} \right)^n \geq [1 + n(x - 1)] \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1 + n(x - 1)$$

i nejednakost 1.15 je dokazana.
(ii) Dokažimo sada da AG nejednakost slijedi iz Bernoullijeve nejednakosti.

Neka je $A_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ gdje $x_i > 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. Budući da je $\frac{A_n}{A_{n-1}} > 0$, to jest $\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 > -1$, možemo primijeniti nejednakost 1.15 za $x = \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1$. Slijedi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n &\geq 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) \\
&= \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} \\
&= \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}}{A_{n-1}} \\
&= \frac{x_n}{A_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$A_n^n \geq x_n \cdot A_{n-1}^{n-1}. \tag{1.22}$$

Iterirajući nejednakost 1.22 dobivamo

$$A_n^n \geq x_n \cdot A_{n-1}^{n-1} \geq x_n \cdot x_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geq \ldots \geq x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_2 \cdot A_1^1 = x_n \cdot x_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_2 \cdot x_1 = G_n^n$$

pa je $A_n \geq G_n$. □

Poglavlje 2

Primjene nejednakosti u matematici

2.1 Primjena AG nejednakosti

Aritmetičko-geometrijska nejednakost je vrlo korisan alat s raznim primjenama u matematici. U fokusu ovog poglavlja su primjeri kojima ćemo ilustrirati kako koristiti ovu nejednakost pri rješavanju problema optimizacije te kod analize funkcija.

Počinjemo s jednostavnim primjerom u kojem direktnom primjenom AG nejednakosti dokazujemo traženu tvrdnju.

Primjer 2.1.1. *Dokažite da za pozitivne brojeve $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

Rješenje. Koristeći dva puta AG nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n &\geq 2\sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n} \\
&= 2\sqrt{\left(1 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^n} \\
&\geq 2\sqrt{(2+2)^n} \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

■

AG nejednakost možemo koristiti i kod analize funkcije, to jest kod određivanja ekstrema funkcije. U sljedećem primjeru vidjet ćemo kako primjenom nejednakosti dolazimo do ekstrema kvadratne funkcije.

Primjer 2.1.2. *Neka su $a \neq 0, b$ i c realni brojevi. Nađite ekstrem kvadratne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.*

Rješenje.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = -ax\left(-x - \frac{b}{a}\right) + c.$$

Za svaka dva realna broja a i b očito vrijedi $(a - b)^2 \geq 0$ iz čega slijedi nejednakost

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2. \tag{2.1}$$

Za razliku od AG nejednakosti koja vrijedi za pozitivne realne brojeve, nejednakost 2.1 vrijedi za sve realne brojeve.
Pretpostavimo da je $a > 0$. Primjenom nejednakosti 2.1 na brojeve $-x$ i $-x - \frac{b}{a}$ dobivamo

$$f(x) = -ax\left(-x - \frac{b}{a}\right) + c \geq -a\left(\frac{x - x - \frac{b}{a}}{2}\right)^2 + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = -x - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$. Slijedi $f_{min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$.
Slično se pokaže da za $a < 0$ funkcija ima maksimum u točki $-\frac{b}{2a}$.

■

Slijedi još jedan primjer određivanja ekstrema funkcije koristeći AG nejednakost.

Primjer 2.1.3 (ŽUP 2004. SŠ1 zad. 3). *Ako je $a > 0$, odredite najmanju vrijednost funkcije $f(x) = x^5 + \frac{a}{x}$ za $x > 0$.*

Rješenje. Zadanu funkciju možemo zapisati u obliku

$$f(x) = x^5 + \frac{a}{x} = x^5 + \frac{a}{5x} + \frac{a}{5x} + \frac{a}{5x} + \frac{a}{5x} + \frac{a}{5x}.$$

Primjenom AG nejednakosti dobivamo

$$f(x) = x^5 + \frac{a}{5x} + \frac{a}{5x} + \frac{a}{5x} + \frac{a}{5x} + \frac{a}{5x} \geq 6 \cdot \sqrt[6]{x^5 \cdot \left(\frac{a}{5x}\right)^5} = 6 \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{a}{5}\right)^5}.$$

Najmanje vrijednost postiže se za

$$x^5 = \frac{a}{5x} \Leftrightarrow x^6 = \frac{a}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{\frac{a}{5}}.$$

Najmanja vrijednost iznosi

$$f\left(\sqrt[6]{\frac{a}{5}}\right) = 6 \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{a}{5}\right)^5}.$$

■

U nastavku ćemo pokazati poopćenje prethodnog primjera.

Primjer 2.1.4. *Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ funkcija dana s*

$$f(x) = \frac{a}{x^m} + bx^n,$$

pri čemu su $m, n \in \mathbb{N}$. Odredite najmanju vrijednost funkcije f za $x > 0$.

Rješenje. Zadanu funkciju zapišemo na sljedeći način

$$f(x) = n \cdot \frac{a}{n \cdot x^m} + m \cdot \frac{bx^n}{m}.$$

Zatim primijenimo AG nejednakost

$$\begin{aligned} f(x) = n \cdot \frac{a}{nx^m} + m \cdot \frac{bx^n}{m} &= \overbrace{\frac{a}{nx^m} + \cdots + \frac{a}{nx^m} + \frac{bx^n}{m} + \cdots + \frac{bx^n}{m}}^{m+n \text{ članova}} \\ &\geq (m+n) \sqrt[m+n]{\left(\frac{a}{nx^m}\right)^n \left(\frac{bx^n}{m}\right)^m} = (m+n) \sqrt[m+n]{\left(\frac{a}{n}\right)^n \left(\frac{b}{m}\right)^m}. \end{aligned}$$

Najmanja vrijednost se postiže za $\frac{a}{nx^m} = \frac{bx^n}{m}$, to jest

$$x = \sqrt[m+n]{\frac{am}{bn}}.$$

■

Također, pomoću AG nejednakosti možemo odrediti ekstreme funkcije u sljedećem obliku.

Primjer 2.1.5. *Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ funkcija dana s*

$$f(x) = (x - a)^m (b - x)^n,$$

pri čemu su $m, n \in \mathbb{N}$. Odredite najveću vrijednost funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Rješenje. Zapišimo zadanu funkciju na sljedeći način

$$f(x) = \frac{1}{n^m m^n} (nx - na)^m (mb - mx)^n.$$

Iz AG nejednakosti dobivamo

$$\sqrt[m+n]{(na-nx)^m(mb-mx)^n} \leq \frac{m(nx-na)+n(mb-mx)}{m+n} = \frac{mn(b-a)}{m+n}.$$

Slijedi

$$f(x) \leq \frac{1}{n^m m^n}\left(\frac{mn(b-a)}{m+n}\right)^{m+n}.$$

Jednakost vrijedi za $nx - na = mb - mx$, to jest za $x = \frac{na+mb}{m+n}$. Najveća vrijednost funkcije f je $\frac{1}{n^m m^n}\left(\frac{mn(b-a)}{m+n}\right)^{m+n}$ i postiže se za $x = \frac{na+mb}{m+n}$.

■

Primijenimo dobivene rezultate na sljedeći primjer.

Primjer 2.1.6. *Odredite najveći volumen kutije u obliku kvadra čija je duljina dva puta veća od širine, a zbroj svih dimnezija je fiksan i iznosi D_0.*

Rješenje. Neka je x širina kutije. Tada je duljina kutije jednaka $2x$, a visina $D_0 - 3x$. Volumen tada možemo zapisati kao

$$V(x) = x \cdot 2x \cdot (D_0 - 3x) = 6x^2\left(\frac{D_0}{3} - x\right).$$

Neka je $a = 0, b = D_0/3, m = 2$ i $n = 1$. Koristeći rezultate iz primjera 2.1.5 možemo zaključiti da najveći volumen iznosi $\frac{8D_0^3}{1458}$ i postiže se za $x = \frac{2D_0}{9}$.

■

Pogledajmo još jednu primjenu AG nejednakosti pri određivanju minimalnog oplošja kvadra.

Primjer 2.1.7. *Otvorena kutija oblika kvadra ima dimenzije x, y, z. Odredite dimenzije kutije, tako da oplošje kutije bude minimalno uz uvjet da joj je volumen zadan i fiksan, to jest $V_0 = xyz$.*

Rješenje. Tražimo minimum funkcije oplošja kvadra bez jedne stranice

$$O(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz \tag{2.2}$$

uz ograničenje $V_0 = xyz$. Funkciju O ćemo minimizirati pomoću AG nejednakosti. Primjenom 1.1 na 2.2 dobivamo

$$O(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xy \cdot 2yz \cdot 2xz} = 3 \cdot \sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot V_0^{\frac{2}{3}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $xy = 2yz = 2xz$, to jest $x = y = 2z$. Tražene dimenzije otvorene kutije su

$$x = y = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_0}{4}} \quad \text{i} \quad z = \sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}.$$

Vrijednosti funkcije O uvijek su veće ili jednake od $3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot V_0^{\frac{2}{3}}$ pa je $3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot V_0^{\frac{2}{3}}$ minimum funkcije oplošja O koji se postiže za $x = y = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}, z = \sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$.

■

AG nejednakost možemo primijeniti i na funkcije više varijabli. U sljedećem primjeru ćemo odrediti maksimum funkcije dvije varijable.

Primjer 2.1.8. *Odredite najveću vrijednost funkcije*

$$f(x, y) = x^m y^n (a - mx - ny)$$

za $x > 0, y > 0$ *te* $a - mx - ny > 0$*, pri čemu su* $m, n \in \mathbb{N}$ *i* $a > 0$.

Rješenje. Funkcija f je umnožak m faktora x, n faktora y i faktora $a - mx - ny$ što je ukupno $m + n + 1$ faktora. Slijedi

$$(f(x, y))^{\frac{1}{m+n+1}} \leq \frac{mx + ny + a - mx - ny}{m + n + 1},$$

iz čega dobivamo

$$f(x, y) \leq \left(\frac{a}{m + n + 1}\right)^{m+n+1}.$$

Najveća vrijednost postiže se za $x = y = a - mx - ny$, to jest za $x = y = \frac{a}{m+n+1}$.

■

2.2 Primjena CSB nejednakosti

Primjena CSB nejednakosti proteže se kroz različite grane matematike, od algebre do geometrije. U ovom poglavlju ćemo prikazati primjenu u rješavanju algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi, kao i u dokazima nekih drugih bitnih nejednakosti te u zadacima s natjecanja.
Pokažimo upotrebu CSB nejednakosti na jednostavnom primjeru.

Primjer 2.2.1. *Ako su* x, y, z *realni brojevi takvi da je* $x + y + z = 6$*, pokažimo da je* $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

Rješenje. Primjenom CSB nejednakosti dobivamo

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 = 6^2,$$

što je ekvivalentno s

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 36,$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

■

CSB nejednakost možemo koristiti i kod rješavanja algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi, što ćemo ilustrirati na sljedećim primjerima.

Primjer 2.2.2. *Riješite jednadžbu*

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = x^2 - 10x + 29, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje. Kako bi jednadžba imala smisla mora vrijediti $x - 1 \geq 0$ i $9 - x \geq 0$, odnosno $x \in [1, 9]$. Koristeći CSB nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} &= 1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{9-x}\\ &\leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{x - 1 + 9 - x}\\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4.\end{aligned}$$

S druge strane jednadžbe vrijedi

$$x^2 - 10x + 29 = (x - 5)^2 + 4 \geq 4.$$

Dobivamo sustav

$$\begin{cases}\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = 4\\ x^2 - 10x + 29 = 4\end{cases}$$

čije je rješenje $x = 5$. Rješenje zadane jednadžbe je $x = 5$.

■

Primjer 2.2.3. *Odredite pozitivne realne brojeve* x, y, z *tako da vrijedi*

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 = 1\\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt[4]{27}.\end{cases}$$

Rješenje. Prema CSB nejednakosti vrijedi

$$1 \cdot 3 = (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1)^2 = (x + y + z)^2$$

što je ekvivalentno s

$$x + y + z \leq \sqrt{3}.$$

Uočimo da jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$. Ponovo koristimo CSB nejednakost i dobivamo

$$3\sqrt{3} \geq 3(x + y + z) = ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2,$$

odnosno

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako vrijedi $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{y}}{1} = \frac{\sqrt{z}}{1}$, to jest $x = y = z$. Sada iz $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ slijedi $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

■

CSB nejednakost se može koristiti i pri dokazivanju nekih bitnih nejednakosti kao što su nejednakost trokuta i Nesbittova nejednakost.

Teorem 2.2.4 (**Nejednakost trokuta**). *Za bilo koja dva niza realnih brojeva* $a_1, \ldots, a_n$ *i* $b_1, \ldots, b_n$ *za* $n \geq 2$ *vrijedi nejednakost*

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + \cdots + b_n)^2}. \tag{2.3}$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po n. Za $n = 1$ vrijedi jednakost.
Za $n = 2$ nejednakost glasi

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

što je ekvivalentno s

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq (a_1 a_2 + b_1 b_2) \Leftrightarrow (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) \geq (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2.$$

Zadnja nejednakost je CSB nejednakost u slučaju $n = 2$ pa tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$, to jest da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \geq \sqrt{(a_1 + \cdots + a_k)^2 + (b_1 + \cdots + b_k)^2}.$$

Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $k+1 \in \mathbb{N}$. Za $k+1 \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\cdots+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2} &= \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\cdots+\sqrt{a_k^2+b_k^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}\\ &\geq \sqrt{(a_1+\cdots+a_k)^2+(b_1+\cdots+b_k)^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}\\ &\geq \sqrt{(a_1+\cdots+a_{k+1})^2+(b_1+\cdots+b_{k+1})^2}.\end{aligned}$$

Zadnja nejednakost slijedi iz nejednakosti trokuta u slučaju $n = 2$. Time smo dokazali nejednakost trokuta za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Nejednakost 2.3 nazivamo „Nejednakost trokuta" zbog njene geometrijske interpretacije. Pretpostavimo da su (a_1, b_1) i (a_2, b_2) točke u ravnini. Želimo odrediti udaljenost tih točaka od ishodišta. Svaku od tih udaljenosti možemo promatrati kao duljinu vektora s početnom točkom u ishodištu i krajnjom točkom (a_i, b_i) za $i = 1, 2$. Koristeći Pitagorin teorem, duljinu tih vektora računamo kao $\sqrt{a_i^2+b_i^2}$ za $i = 1, 2$. Prema teoremu 2.2.4 za $n = 2$ slijedi da je suma duljina tih dvaju vektora veća ili jednaka od duljine sume tih dvaju vektora, to jest $\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako su točke $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ i ishodište kolinearne. Ako promatramo da su navedeni vektori stranice trokuta, možemo zaključiti da je u svakom trokutu zbroj duljina dviju stranica uvijek veći od duljine preostale stranice.

Primjer 2.2.5 (**Nesbittova nejednakost**). *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Rješenje. Prema CSB nejednakosti u slučaju $n = 3$ vrijedi

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{2.4}$$

Primijenimo 2.4 na

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{b+c}, & a_2 &= \sqrt{c+a}, & a_3 &= \sqrt{a+b},\\ b_1 &= \frac{1}{\sqrt{b+c}}, & b_2 &= \frac{1}{\sqrt{c+a}}, & b_3 &= \frac{1}{a+b}.\end{aligned}$$

Dobivamo

$$((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9$$

što je ekvivlentno s

$$
\begin{aligned}
& 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $(b+c)^2 = (c+a)^2 = (a+b)^2$, odnosno ako i samo ako je $a = b = c$.

■

U idućem primjeru prezentirat ćemo kako se CSB nejednakost primjenjuje na problem optimizacije.

Primjer 2.2.6. *Odredite ekstreme funkcije $f(x, y, z) = 2x + 3y + 6z$, uz ograničenje $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

Rješenje. Koristeći CSB nejednakost dobivamo

$$f^2(x, y, z) = (2x + 3y + 6z)^2 \leq (2^2 + 3^2 + 6^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 49. \tag{2.5}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako postoji realan broj λ takav da $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \lambda$, odnosno $x = 2\lambda, y = 3\lambda, z = 6\lambda$. Iz ograničenja dobivamo $\lambda^2 = \frac{1}{49}$.
Sada iz 2.5 slijedi

$$-7 \leq f(x, y, z) \leq 7.$$

Možemo zaključiti da funkcija f postiže minimum za $\lambda = -\frac{1}{7}$ jednak -7, a maksimum za $\lambda = \frac{1}{7}$ jednak 7.

■

U sljedećim primjerima ćemo pokazati kako se CSB nejednakost koristi u zadacima s natjecanja.

Primjer 2.2.7 (IMO Short list 2001.). *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ po volji odabrani pozitivni brojevi. Dokažite nejednakost*

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{n}.$$

Rješenje. Neka je $y_0 = 1$ i $y_i = 1 + x_1^2 + \cdots + x_i^2$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada je

$$x_i = \sqrt{y_i - y_{i-1}} \qquad \text{za} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sada nejednakost poprima oblik

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{y_i - y_{i-1}}}{y_i} < \sqrt{n}.$$

Očito je $y_i \geq y_{i-1}$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ pa dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{y_i - y_{i-1}}}{y_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{y_i - y_{i-1}}}{\sqrt{y_i y_{i-1}}} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{y_{i-1}} - \frac{1}{y_i}}. \tag{2.6}$$

Za bilo koje realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrijedi

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \sqrt{n} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}. \tag{2.7}$$

Nejednakost 2.7 slijedi iz CSB nejednakosti. Dovoljno je primijeniti nejednakost 1.12 na nizove $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(1, 1, \ldots, 1)$. Primijenimo nejednakost 2.7 na sumu u 2.6. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{y_{i-1}} - \frac{1}{y_i}} &\leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{y_{i-1}} - \frac{1}{y_i} \right)} \\
&= \sqrt{n} \sqrt{\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_{n-2}} - \frac{1}{y_{n-1}} + \frac{1}{y_{n-1}} - \frac{1}{y_n}} \\
&= \sqrt{n \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_n} \right)}.
\end{aligned}$$

Budući da je $y_0 = 1$ i $y_n > 0$ dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{y_{i-1}} - \frac{1}{y_i}} \leq \sqrt{n \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_n} \right)} = \sqrt{n \left(1 - \frac{1}{y_n} \right)} < \sqrt{n},$$

čime smo dokazali traženu tvrdnju.

■

Primjer 2.2.8 (IMO 1995.). *Neka su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Rješenje. Uvodimo supstituciju $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$. Dobivamo uvjet $xyz = 1$ i nejednakost

$$\frac{1}{\frac{1}{x^3} \cdot \frac{y+z}{yz}} + \frac{1}{\frac{1}{y^3} \cdot \frac{x+z}{xz}} + \frac{1}{\frac{1}{z^3} \cdot \frac{x+y}{xy}} \geq \frac{3}{2}$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{x^2 \cdot xyz}{y+z} + \frac{y^2 \cdot xyz}{x+z} + \frac{z^2 \cdot xyz}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Primjenom uvjeta $xyz = 1$ dobivamo da je početna nejednakost ekvivalentna s

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Primijenimo CSB nejednakost na vektore $(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y})$ i $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$:

$$[(y+z) + (z+x) + (x+y)]\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}.$$

Sada koristeći AG nejednakost dobivamo

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}.$$

■

Prikažimo primjenu CSB nejednakosti na primjeru iz geometrije, gdje vidimo kako ta nejednakost postavlja ograničenja na odnose duljina stranica u pravokutnom trokutu.

Primjer 2.2.9. *Neka su a, b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi*

$$ab + bc + ca < 2c^2.$$

Rješenje. Koristeći CSB nejednakost dobivamo

$$ab + bc + ca \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2 + a^2} = a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$$

odakle slijedi

$$ab + bc + ca \leq 2c^2.$$

Primijetimo da u posljednjoj nejednakosti ne može vrijediti jednakost, jer nizovi (a, b, c) i (b, c, a) nisu proporcionalni. Kada bi navedeni nizovi bili proporcionalni postojao bi realan broj λ takav da

$$a = \lambda b, \quad b = \lambda c, \quad c = \lambda a.$$

Tada je $c^2 = (\lambda a)^2 = \lambda^2(\lambda b)^2 = \lambda^4(\lambda c)^2 = \lambda^6 c^2$, odakle slijedi $\lambda = 1$ i $c = \lambda a = a$ što je u suprotnosti s Pitagorinim teoremom. Dakle, u traženoj nejednakosti vrijedi stroga nejednakost.

■

2.3 Primjena Bernoullijeve nejednakosti

Bernoullijeva nejednakost ima veliku važnost u raznim matematičkim disciplinama. U ovom poglavlju ćemo istražiti primjenu Bernoullijeve nejednakosti i njenih poopćenja u različitim kontekstima.
Jednostavnu primjenu Bernoullijeve nejednakosti možemo vidjeti u nastavku.

Primjer 2.3.1. *Neka su a i b pozitivni brojevi, $0 < b < a$, te neka je n prirodan broj veći od 1. Dokažite da vrijedi*

$$a^n - b^n > n(a - b)b^{n-1}.$$

Rješenje. Iz pretpostavke slijedi $\frac{a}{b} > 1$, odnosno $\frac{a}{b} - 1 > 0$. Uvrstimo $x = \frac{a}{b} - 1$ u Bernoullijevu nejednakost pa dobivamo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{b} - 1\right)^n > 1 + n\left(\frac{a}{b} - 1\right),$$

odakle slijedi

$$a^n > b^n + n(a - b)b^{n-1}$$

odnosno

$$a^n - b^n > n(a - b)b^{n-1}.$$

■

Na sljedećem primjeru pokažimo primjenu nejednakosti 1.18.

Primjer 2.3.2. *Neka su x, y pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi*

$$x^y + y^x \geq 1.$$

Rješenje. Pokazat ćemo da za sve realne brojeve $a, b \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi

$$a^b \geq \frac{a}{a+b-ab}.$$

Primjenom nejednakosti 1.18 dobivamo

$$a^{1-b} = (1+a-1)^{1-b} \leq 1 + (a-1)(1-b) = a+b-ab$$

odakle slijedi

$$a^b \geq \frac{a}{a+b-ab} \tag{2.8}$$

jer je $a+b-ab = a+b(1-a) > 0$. Za $x \geq 1$ ili $y \geq 1$ nejednakost očito vrijedi. Neka su $x, y \in \langle 0, 1\rangle$. Prema nejednakosti 2.8 imamo

$$x^y + y^x \geq \frac{x}{x+y-xy} + \frac{y}{x+y-xy} = \frac{x+y}{x+y-xy} > \frac{x+y}{x+y} = 1.$$

■

Slijedi primjer primjene nejednakosti 1.21.

Primjer 2.3.3. *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi takvi da vrijedi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}$. Dokažite da vrijedi*

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Rješenje. Budući da vrijedi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su nenegativni realni brojevi možemo zaključiti

$$0 \leq x_i \leq \frac{1}{2} < 1, \quad \text{odnosno} \quad -x_i > -1, \quad \text{za sve} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Također vrijedi da su svi $-x_i$ jednakog predznaka. Primjenom nejednakosti 1.21 dobivamo

$$\begin{aligned}
(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) &= (1+(-x_1))(1+(-x_2))\cdots(1+(-x_n)) \\
&\geq 1 + (-x_1 - x_2 - \cdots - x_n) \\
&= 1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\
&\geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

■

Koristeći poopćenje Bernoullijeve nejednakosti možemo dokazati i konvergenciju niza.

Primjer 2.3.4. *Dokažite da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan s $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ konvergentan.*

Rješenje. Kako bismo dokazali da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan, dovoljno je dokazati da je monoton i omeđen. Dokažimo prvo tvrdnju: Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan s $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je monoton. Neka je $\alpha = \frac{n+1}{n}$ i $x = \frac{1}{n+1}$. Koristeći nejednakost 1.17 dobivamo

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1+\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1+\frac{1}{n}\\ &\Leftrightarrow \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokazali smo da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, to jest strogo rastući.
Dokažimo sada tvrdnju: Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan s $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je ograničen.
Zapisujemo $4^{\frac{1}{n}}$ kao:

$$4^{\frac{1}{n}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}\cdot 2^{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}\left(1+1\right)^{1+\frac{2}{n}}.$$

Ako uzmemo $x = 1$ i $\alpha = 1 + \frac{2}{n}$ možemo primijeniti nejednakost 1.17 pa dobivamo

$$\frac{1}{2}(1+1)^{1+\frac{2}{n}} > \frac{1}{2}\left[1+\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot 1\right] = \frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{n}\right) = 1+\frac{1}{n}.$$

Dakle, vrijedi

$$4^{\frac{1}{n}} > 1+\frac{1}{n} \Leftrightarrow 4 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Kako je $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, vrijedi $4 > a_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa zaključujemo da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omeđen odozgo brojem 4.
Dokazali smo da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastuć i omeđen pa je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan s $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konvergentan.

■

U nastavku ćemo prikazati kako upotrebom Bernoullijeve nejednakosti možemo dokazati sljedeći teorem.

Primjer 2.3.5. *Ako je* $a > 0, q > 1, x \geq 0$*, tada funkcija* $f(x) = x^q - ax$*, ima najmanju vrijednost u točki* $x = \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{1-q}}$ *i ona iznosi*

$$(1-q)\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{q}{1-q}}.$$

U istoj točki funkcija ima najveću vrijednost za $0 < q < 1, a > 0$.

Rješenje. Koristimo Bernoullijevu nejednakost za $q > 1$,

$$(1+z)^q \geq 1 + qz \qquad \text{za} \qquad z \geq -1,$$

pri čemu jednakost vrijedi samo za $z = 0$. Uvodimo supstituciju $y = 1 + z$ i za $q > 1$ dobivamo

$$y^q \geq 1 + q(y-1)$$

što je ekvivalentno s

$$y^q - qy \geq 1 - q$$

pri čemu jednakost vrijedi samo za $y = 1$. Množenjem obje strane nejednakosti s c^q, gdje je $c > 0$, dobivamo

$$(cy)^q - qc^{q-1}(cy) \geq (1-q)c^q.$$

Stavimo

$$x = cy, \qquad qc^{q-1} = a,$$

odakle je $c = \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ i

$$x^q - ax \geq (1-q)c^q \geq (1-q)\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{q}{q-1}}$$

pri čemu jednakost vrijedi za $x = c = \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{q-1}}$.
Koristeći druge slučajeve Bernoullijeve nejednakosti analogno dokazujemo drugu tvrdnju.

■

Poglavlje 3

Primjene nejednakosti u ekonomiji

3.1 Problemi optimizacije

Ekonomske odluke donose se uzimajući u obzir složene varijable i njihove odnose. Time primjena matematičkih koncepata postaje neophodna za analizu, interpretaciju i optimizaciju ekonomskih procesa. Jedan od ključnih elemenata u ovom pristupu je metoda nejednakosti, koja pruža razumijevanje odnosa između različitih varijabli te omogućava modeliranje i rješavanje problema optimizacije u ekonomiji. Koncept koji se ističe u rješavanju tog problema je AG nejednakost. U nastavku ćemo kroz konkretne primjere pokazati kako pomoću AG nejednakosti rješavamo probleme optimizacije u različitim ekonomskim scenarijima.

Primjer 3.1.1. *Funkcija ukupnih troškova proizvodnje zadana je s $T(Q) = 3Q^2+48Q+48$, gdje je Q količina proizvoda. Odredite količinu Q_{min} za koju funkcija prosječnih troškova postiže minimum i iznos minimalnih prosječnih troškova.*

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti pomoću AG nejednakosti. Funkcija prosječnih troškova zadana je s

$$AT(Q) = \frac{T(Q)}{Q} = \frac{3Q^2 + 48Q + 48}{Q} = 3Q + 48 + \frac{48}{Q}.$$

Primjenom AG nejednakosti na pribrojnike $3Q$ i $\frac{48}{Q}$ za $Q > 0$ dobivamo

$$AT(Q) = 3Q + 48 + \frac{48}{Q} \geq 2\sqrt{3Q \cdot \frac{48}{Q}} + 48 = 24 + 48 = 72.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $3Q = \frac{48}{Q}$, odnosno $Q = 4$. Budući da je $AT(Q) \geq 72$ za sve $Q > 0$ možemo zaključiti da funkcija AT postiže minimum za $Q_{min} = 4$ jednak 72.

Ovaj zadatak mogli smo riješiti i primjenom diferencijalnog računa. Korištenjem metode nejednakosti izbjegli smo određivanje prve i druge derivacije funkcije AT te provjeru nužnih i dovoljnih uvjeta. Primjenom AG nejednakosti smo u manjem broju koraka istovremeno dobili dvije informacije: količinu Q_{min} i iznos minimalnih prosječnih troškova.

■

Primjer 3.1.2. *Farmer želi ograditi dio livade u obliku pravokutnika površine* $8100m^2$. *Cijena bodljikave žice za ogradu je* $10\,eura/m$. *Odredite dimenzije pravokutne ograde tako da trošak za kupnju bodljikave žice bude najmanji. Koliko iznosi minimalan trošak?*

Rješenje. Neka su x i y duljina i širina pravokutnika. Budući da je površina zadana, vrijedi $xy = 8100$, odnosno $y = \frac{8100}{x}$. Funkcija ukupnih troškova ograde je umnožak opsega pravokutnika i cijene ograde po metru, to jest $T(x) = (2x + 2 \cdot \frac{8100}{x}) \cdot 10$. Primjenom AG nejednakosti na funkciju T dobivamo

$$T(x) = 20x + 20 \cdot \frac{8100}{x} \geq 2\sqrt{20x \cdot 20 \cdot \frac{8100}{x}} = 2 \cdot 20 \cdot 90 = 3600.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $20x = 20 \cdot \frac{8100}{x}$, odnosno $x = 90$. Budući da je $T(x) \geq 3600$ za sve $x > 0$, možemo zaključiti da funkcija T postiže minimum za $x = 90$. Dimenzije ograde su $90m \times 90m$, a minimalni trošak iznosi 3600 eura.

■

Primjer 3.1.3. *Potrebno je proizvesti kutiju volumena* $534\,cm^2$ *tako da su poklopac i dno kvadratnog oblika, a stranice pravokutnog oblika. Stranice se izrađuju od materijala cijene* $4\,centa/cm^2$*, a poklopac i dno od materijala cijene* $8\,centa/cm^2$*. Odredite dimenzije kutije tako da ukupan trošak proizvodnje bude minimalan.*

Rješenje. Neka je x duljina i širina kutije, a y visina kutije. Tada je volumen kutije $x^2y = 534$ iz čega slijedi $y = \frac{534}{x^2}$. Funkcija ukupnih troškova proizvodnje kutije zadana je s $T = 4 \cdot 4xy + 8 \cdot 2x^2$. Uvrštavanjem supstitucije $y = \frac{534}{x^2}$ i primjenom AG nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} T(x) &= 16x \cdot \frac{534}{x} + 16x^2 = \frac{8544}{x} + 16x^2 = \frac{4272}{x} + \frac{4272}{x} + 16x^2 \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{4272}{x} \cdot \frac{4272}{x} \cdot 16x^2} \approx 1990.29. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{4272}{x} = \frac{4272}{x} = 16x^2$, to jest $x = \sqrt[3]{267} \approx 6.44$. Iz toga slijedi $y \approx 12.88$. Budući da je $T(x) \geq 1990.29$ za sve $x > 0$, možemo zaključiti da funkcija T postiže minimum za $x \approx 6.44$. Dimenzije kutije su $6.44cm \times 6.44cm \times 12.88cm$, a minimalni trošak iznosi 1990.29 centa.

■

Primjer 3.1.4. *Spremnik volumena* $15m^3$ *pravi se u obliku valjka bez poklopca. Cijena materijala za dno iznosi* $1.25\,eura/m^2$*, a materijala za plašt je* $0.9\,eura/m^2$*. Kojih dimenzija treba biti spremnik kako bi troškovi kupnje materijala za izradu bili minimalni?*

Rješenje. Neka je r radijus baze valjka i h visina valjka. Tada je volumen spremnika $r^2\pi h = 15$ iz čega slijedi $h = \frac{15}{r^2\pi}$. Funkcija ukupnih troškova kupnje materijala za izradu dana je s $T = 1.25\cdot r^2\pi + 0.9\cdot 2rh\pi$, to jest $T(r) = 1.25\cdot r^2\pi + \frac{27}{r}$. Primjenom AG nejednakosti na funkciju T dobivamo

$$\begin{aligned} T(r) &= 1.25\cdot r^2\pi + \frac{27}{r} = 1.25\cdot r^2\pi + \frac{13.5}{r} + \frac{13.5}{r} \\ &\geq 3\sqrt[3]{1.25\cdot r^2\pi\cdot\frac{13.5}{r}\cdot\frac{13.5}{r}} = 3\sqrt[3]{1.25\cdot\pi\cdot 13.5\cdot 13.5} \approx 26.83. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $1.25\cdot r^2\pi = \frac{13.5}{r} = \frac{13.5}{r}$, odakle je $r \approx 1.51$. Budući da je $T(r) \geq 26.83$ za sve $r > 0$, možemo zaključiti da funkcija T postiže minimum za $r \approx 1.51$. Dimenzije spremnika su $r \approx 1.51\,m$ i $h \approx 2.09\,m$, a minimalni trošak kupnje materijala za izradu su 26.83 eura.

■

3.2 Modeli ekonomične količine nabave

U redovnom poslovanju često je potrebno odrediti količinu nabave, koja treba biti što ekonomičnija. To znači da trebamo odrediti količinu nabave s najnižim troškovima nabave, isporuke i skladištenja, tako da potražnja bude zadovoljena.
U ovom poglavlju ćemo predstaviti model ekonomične količine nabave (*economic order quantity* ili EOQ model). Prvo ćemo konstruirati klasični EOQ model, kojem je cilj minimizirati troškove upravljanja zalihama, uz stalnu potražnju koja treba biti zadovoljena na vrijeme. Zatim ćemo izvesti formulu za model ekonomične nabave uz dozvoljeno ponovno naručivanje u kojem također minimiziramo ukupne troškove, ali potražnja nije zadovoljena na vrijeme. Iako su za izvod formule EOQ modela potrebne jednostavne pretpostavke, ovaj model ima primjenu u realnom svijetu te daje dobre rezultate u raznim industrijama. Kako bismo riješili probleme optimizacije pri konstrukciji oba modela, koristit ćemo metodu nejednakosti čime dobivamo eksplicitne formule za optimalnu količinu nabave.

3.2.1 Klasični model ekonomične količine nabave

Započet ćemo s pretpostavkama potrebnim za konstrukciju klasičnog modela ekonomične količine nabave. Pretpostavke i oznake preuzete su iz [11].

1. Potražnja je neprekidna tijekom godine uz konstantnu stopu λ. Konstantna stopa znači da optimalna količina narudžbe ne mora biti cjelobrojna, što ne predstavlja problem sve dok je količina narudžbe dovoljno velika, jer se u praksi količina narudžbe zaokružuje na prvi veći cijeli broj. Slično tome, pretpostavka da je potražnja neprekidna uz konstantnu stopu je rijetko ostvariva u praksi. Međutim, model daje dobar rezultat kada je potražnja relativno stabilna tijekom vremena.

2. Pri svakoj narudžbi, nastaje fiksni trošak K. Skladištenje svake jedinice zaliha godišnje košta I novčanih jedinica po novčanoj jedinici uloženoj u zalihe. Iz toga slijedi da trošak godišnjeg skladištenja jedne jedinice iznosi IC, ako jedna jedinica košta C novčanih jedinica.

3. Isporuka stiže t godina nakon narudžbe. Pretpostavljamo da je t determiniran i poznat.

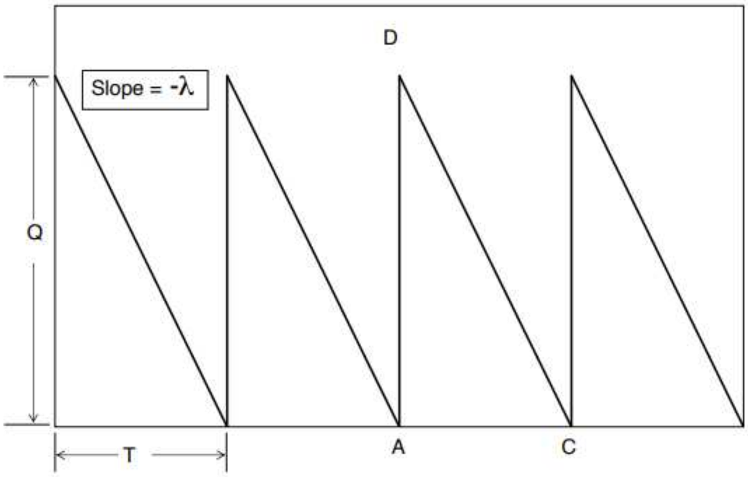
4. Svi parametri modela ostaju nepromijenjeni tijekom vremena.

5. Planski horizont je beskonačan.

6. Sva potražnja je zadovoljena na vrijeme.

Cilj modela je odrediti količinu robe i vrijeme do ponovnog naručivanja. Budući da su svi parametri nepromjenjivi tijekom vremena, količina robe, označena s Q, također ostaje nepromjenjiva. Vrijeme do ponovnog naručivanja jednako je vremenu između dvije uzastopne narudžbe, što nazivamo ciklus.
Iz ovog modela saznajemo kada izvršiti novu narudžbu. Budući da je potražnja neprekidna uz determiniranu i konstantnu stopu, a isporuka stiže točno t godina nakon narudžbe, želimo isporuku točno nakon prodaje zadnje jedinice. Dakle, trebamo izvršiti narudžbu t godina prije isteka zaliha.
Prvi korak u razvoju modela je određivanje ukupnih troškova upravljanja zalihama u godini dana. Budući da je godišnja stopa potražnje jednaka λ, onda je godišnji trošak nabave robe jednak $C\lambda$. Nadalje, broj narudžbi u godini jednak je λ/Q, iz čega slijedi da je godišnji fiksni trošak narudžbi $K\lambda/Q$. Određivanje ukupnih troškova skladištenja u godini dana je složenije. Prvo određujemo prosječnu zalihu po ciklusu. Budući da su svi ciklusi jednaki, prosječna godišnja zaliha jednaka je prosječnoj zalihi po ciklusu. Trošak skladištenja jednak je umnošku prosječne godišnje zalihe i godišnjim troškom skladištenja jedne jedinice zaliha. Pomoću slike 3.1, dobivamo da je prosječna zaliha po ciklusu jednaka:

$$\frac{\text{Površina trokuta}\, ADC}{\text{Duljina ciklusa}} = \frac{\frac{1}{2}QT}{T} = \frac{Q}{2}.$$



Slika 3.1: Promjena količine zaliha Q tijekom vremena u EOQ modelu (preuzeto iz [11])

Tada je godišnji trošak držanja zaliha na skladištu jednak $ICQ/2$.
Zbrajanjem svih troškova dobivamo da ukupni troškovi upravljanja zalihama $Z(Q)$ u godini dana iznose

$$Z(Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{ICQ}{2}.$$

Dakle, kako bismo odredili ekonomičnu količinu nabave u ovom modelu potrebno je minimizirati funkciju Z, odnosno

$$\min_{Q>0} Z(Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{ICQ}{2}.$$

U literaturi su autori izveli analitičko rješenje ovog problema pomoću diferencijalnog računa (vidi [11]), a ovdje ćemo taj problem riješiti metodom nejednakosti.
Primjenom AG nejednakosti na pribrojnike $\frac{K\lambda}{Q}$ i $\frac{ICQ}{2}$ dobivamo

$$Z(Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{ICQ}{2} \geq C\lambda + 2\sqrt{\frac{1}{2}K\lambda IC}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{K\lambda}{Q} = \frac{ICQ}{2} \Leftrightarrow Q = \sqrt{\frac{2K\lambda}{IC}}.$$

Možemo zaključiti da je optimalna količina nabave jednaka $Q_{min} = \sqrt{\frac{2K\lambda}{IC}}$, a minimalni godišnji troškovi upravljanja zalihama iznose

$$Z_{min} = C\lambda + 2\sqrt{\frac{1}{2}K\lambda IC}.$$

U nastavku možemo vidjeti jedan primjer modela ekonomične količine nabave.

Primjer 3.2.1. *Odredi ekonomičnu količinu nabave tako da su ukupni troškovi upravljanja zalihama minimalni, odnosno*

$$\min_{Q>0} Z(Q) = 55 + \frac{100}{Q} + 4Q,$$

gdje je Q količina robe, 55 *je godišnji trošak nabave robe,* $100/Q$ *je godišnji fiksni trošak narudžbi i* $4Q$ *je godišnji trošak skladištenja.*

Rješenje. Primjenom AG nejednakosti dobivamo

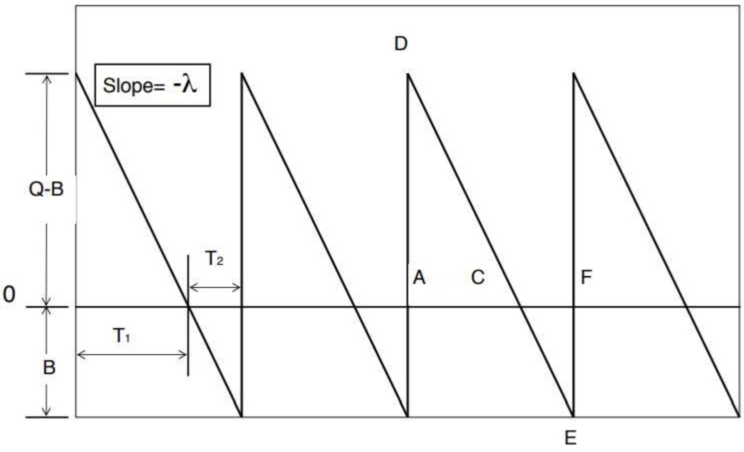
$$Z(Q) = 55 + \frac{100}{Q} + 4Q \geq 55 + 2\sqrt{\frac{100}{Q} \cdot 4Q} = 55 + 2 \cdot 20 = 95.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $100/Q = 4Q$, to jest $Q = 5$. Budući da je $Z(Q) \geq 95$ za sve $Q > 0$ možemo zaključiti da funkcija Z postiže minimum za $Q = 5$ jednak 95. Ekonomična količina nabave jednaka je 5.

■

3.2.2 Model ekonomične količine nabave uz dozvoljeno ponovno naručivanje

Uz ostale zadovoljene pretpostavke klasičnog modela ekonomične nabave u ovom odjeljku ćemo ukloniti pretpostavku da je sva potražnja zadovoljena na vrijeme. Time su dozvoljene ponovne narudžbe, ali uz dodatne kaznene troškove. Tada se ukupni troškovi upravljanja zalihama sastoje od četiri pribrojnika: trošak nabave, fiksni trošak narudžbi, trošak skladištenja i kazneni trošak zaostatka. Na slici 3.2 prikazana je dinamika ovog sustava. Svaki ciklus sastoji se od dva podciklusa. U prvom podciklusu, koji traje T_1 godina, zalihe su dostupne i smanjuju se brzinom potražnje λ. Tijekom drugog podciklusa, koji traje T_2 godina, dozvoljeno je ponovno naručivanje. Dakle, u drugom podciklusu nema dostupnih zaliha. Budući da potražnja nije zadovoljena tijekom tog perioda, zaostatak se povećava brzinom potražnje λ. Ukupna duljina ciklusa jednaka je $T = T_1 + T_2$.



Slika 3.2: Promjena količine zaliha Q tijekom vremena u EOQ modelu uz dozvoljeno ponvno naručivanje (preuzeto iz [11])

Moramo odrediti koliko robe naručiti u svakoj narudžbi te koliki je najveći dopušten zaostatak prije nove narudžbe u svakom ciklusu. Količinu robe u svakoj narudžbi označimo s Q kao i prije, a najveći dopušten zaostatak s B. Nakon isporuke, ponovne narudžbe su zadovoljene, a preostalih $Q-B$ jedinica na zalihi zadovoljava potražnju u prvom podciklusu. Dakle, dostupne zalihe se smanjuju brzinom λ i postaju nula nakon T_1 godina

$$Q - B = \lambda T_1. \tag{3.1}$$

U drugom podciklusu broj ponovljenih narudžbi raste od 0 do B brzinom λ tijekom T_2 godina. Slijedi

$$B = \lambda T_2, \tag{3.2}$$

odakle je

$$Q = \lambda(T_1 + T_2) = \lambda T. \tag{3.3}$$

Dokažimo jednakost 3.1 pomoću trigonometrije pravokutnog trokuta. Promatramo pravokutan trokut $\triangle ACD$ na slici 3.2. Vidimo da je nagib pravca CD jednak $-\lambda$. Neka je $\alpha = \angle DCF$. Za nagib pravca k vrijedi $k = \operatorname{tg}\varphi$, pri čemu je φ kut koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi apscisa. Za kut α i pravac CD vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = -\lambda$. Iz svojstava funkcije tangens slijedi

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -(-\lambda) = \lambda.$$

Primijenimo trigonometriju pravokutnog trokuta na kut $180^\circ - \alpha$. Dobivamo

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(\angle ACD) = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{Q-B}{T_1},$$

odnosno

$$\lambda = \frac{Q - B}{T_1}$$

iz čega slijedi jednakost 3.1. Na sličan način slijedi jednakost 3.2.
Ukupni troškovi nabave i ukupni fiksni troškovi narudžbi su jednaki kao u klasičnom modelu ekonomične nabave dok su ukupni godišnji troškovi skladištenja drugačiji.
Prvo određujemo prosječnu zalihu po ciklusu koju zatim množimo s troškom skladištenja jedne jedinice zaliha kako bismo dobili godišnji trošak skladištenja. Prosječna zaliha po ciklusu jednaka je

$$\frac{\text{Površina trokuta}\, ADC}{T} = \frac{\frac{(Q-B)T_1}{2}}{T}.$$

Iz 3.1 i 3.3 slijedi

$$\frac{\frac{(Q-B)T_1}{2}}{T} = \frac{\frac{(Q-B)^2}{\lambda}}{2\frac{Q}{\lambda}} = \frac{(Q-B)^2}{2Q}.$$

Primijetimo da je prosječna zaliha po ciklusu izraz koji ovisi o dvije varijable B i Q.
Odredimo sada godišnji kazneni trošak zaostatka, odnosno godišnji trošak ponovljene narudžbe. Neka je M godišnji trošak ponovljene narudžbe po jedinici robe. Prvo moramo odrediti prosječni broj ponovljenih narudžbi po ciklusu. Budući da su svi ciklusi jednaki možemo zaključiti da je prosječni broj ponovljenih narudžbi u godini jednak prosječnom broju ponovljenih narudžbi po ciklusu. Godišnji trošak ponovljene narudžbe jednak je umnošku broja ponovljenih narudžbi u godini i godišnjem trošku ponovljene narudžbe po jedinici robe. Prosječni broj ponovljenih narudžbi u ciklusu jednak je

$$\frac{\text{Površina trokuta}\, CEF}{T} = \frac{\frac{BT_2}{2}}{T}.$$

Iz 3.2 i 3.3 slijedi

$$\frac{\frac{BT_2}{2}}{T} = \frac{\frac{B^2}{2\lambda}}{\frac{Q}{\lambda}} = \frac{B^2}{2Q}.$$

Dakle, godišnji trošak ponovljene narudžbe jednak je $M\frac{B^2}{2Q}$.
Zbrajanjem svih troškova dobivamo da ukupni troškovi upravljanja zalihama $Z(B, Q)$ u godini dana iznose

$$Z(B, Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + IC\frac{(Q-B)^2}{2Q} + M\frac{B^2}{2Q}.$$

Za određivanje ekonomične količine nabave u ovom modelu, potrebno je minimizirati funkciju Z, to jest dobivamo sljedeći problem optimizacije

$$\min_{B,Q>0} Z(B, Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + IC\frac{(Q-B)^2}{2Q} + M\frac{B^2}{2Q}.$$

Kao i za klasičan model ekonomične količine nabave u literaturi je ovaj problem riješen pomoću diferencijalnog računa (vidi [11]). Za razliku od toga ovdje ćemo koristiti metodu nejednakosti.
Prvo ćemo funkciju dvije varijable $Z(B, Q)$ ograničiti funkcijom jedne varijable $Z(Q)$ kako bismo odredili optimalnu vrijednost varijable B. Funkciju $Z(B, Q)$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} Z(B,Q) &= C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{Q}{2}\left[IC\left(1-\frac{B}{Q}\right)^2 + M\left(\frac{B}{Q}\right)^2\right]\cdot 1 \\ &= C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{Q}{2}\left[\left(\sqrt{IC}\left(1-\frac{B}{Q}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{M}\left(\frac{B}{Q}\right)\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{IC+M}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{IC}}{\sqrt{IC+M}}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Primijenimo CSB nejednakost na vektore $\left(\sqrt{IC}\left(1-\frac{B}{Q}\right), \sqrt{M}\cdot\frac{B}{Q}\right)$ i $\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{IC+M}}, \frac{\sqrt{IC}}{\sqrt{IC+M}}\right)$.
Slijedi

$$\begin{aligned} Z(B,Q) &\geq C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{Q}{2}\left(\frac{\sqrt{ICM}}{\sqrt{IC+M}}\cdot\left(1-\frac{B}{Q}\right) + \frac{\sqrt{ICM}}{\sqrt{IC+M}}\cdot\frac{B}{Q}\right)^2 \\ &= C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{Q}{2}\cdot\frac{ICM}{IC+M}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\sqrt{IC}\left(1-\frac{B}{Q}\right)}{\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{IC+M}}} = \frac{\sqrt{M}\cdot\frac{B}{Q}}{\frac{\sqrt{IC}}{\sqrt{IC+M}}}$$

iz čega slijedi

$$B = Q\cdot\frac{IC}{M+IC}.$$

Primjenom AG nejednakosti na $\frac{K\lambda}{Q}$ i $\frac{Q}{2}\cdot\frac{ICM}{IC+M}$ dobivamo

$$Z(B,Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{Q}{2}\cdot\frac{ICM}{IC+M} \geq C\lambda + 2\sqrt{\frac{K\lambda ICM}{2(IC+M)}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{K\lambda}{Q} = \frac{Q}{2}\cdot\frac{ICM}{IC+M}$$

iz čega slijedi

$$Q = \sqrt{\frac{2K\lambda(IC+M)}{ICM}}.$$

Dakle, možemo zaključiti da se minimalni troškovi upravljanja zalihama postižu za optimalnu količinu narudžbe jednaku

$$Q_{min} = \sqrt{\frac{2K\lambda(IC + M)}{ICM}}$$

i iznose

$$Z_{min} = C\lambda + 2\sqrt{\frac{K\lambda ICM}{2(IC + M)}}.$$

Optimalni dopušteni zaostatak jednak je

$$B = Q_{min} \cdot \frac{IC}{IC + M} = \sqrt{\frac{2K\lambda IC}{(IC + M)M}}.$$

3.3 Primjena nejednakosti u usporedbi jednostavnih i složenih kamata

Kamatni račun je matematički koncept koji se primjenjuje u raznim poslovnim situacijama kao što su izdavanje kredita, štednje, ulaganja i slično. Dva osnovna oblika kamatnog računa su jednostavni i složeni kamatni račun. U ovom dijelu rada ćemo definirati pojmove jednostavnog i složenog kamatnog računa te navesti formule za ukupne kamate obračunate po oba oblika kamatnog računa uz fiksnu i varijabilnu kamatnu stopu. Zatim ćemo dokazati da su ukupne kamate izračunate po jednostavnom kamatnom računu manje od ukupnih kamata izračunatih po složenom kamatnom računu. Ovu tvrdnju dokazat ćemo primjenom Bernoullijeve nejednakosti.
Promotrimo jednostavni kamatni račun uz fiksnu kamatnu stopu.

Definicija 3.3.1. *Jednostavni kamatni račun je takav račun u kojem kamate izračunavamo na istu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja.*

Propozicija 3.3.2. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu (kamatnjak) p u svakom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan iznosi*

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right). \tag{3.4}$$

Dokaz se može vidjeti u [7].
Prema [7] ukupne kamate u slučaju da se kamate obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu iznose

$$K = \frac{C_0 pn}{100}. \tag{3.5}$$

U nastavku pogledajmo jednostavni kamatni račun ako kamatna stopa nije fiksna, to jest uz varijabilnu kamatnu stopu.

Propozicija 3.3.3. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu $p_i, i = 1, 2, \ldots, n$ u i-tom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi*

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{100}\right).$$

Dokaz se može vidjeti u [7].
Prema [7] ukupne kamate u slučaju da se kamate obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu iznose

$$K = \frac{C_0}{100}\sum_{i=1}^{n} p_i. \tag{3.6}$$

U sljedećem dijelu analizirat ćemo složeni kamatni račun te ukupne složene kamate.

Definicija 3.3.4. *Složeni kamatni račun je postupak izračunavanja kamata na glavnicu uvećanu za prethodno obračunate kamate u svakom prethodnom vremenskom razdoblju ukamaćivanja.*

Propozicija 3.3.5. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu p u svakom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi*

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Dokaz se može vidjeti u [7].
Prema [7] ukupne kamate u slučaju da se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu iznose

$$I = C_n - C_0 = C_0(r^n - 1), \tag{3.7}$$

gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$ fiksni dekurzivni kamatni faktor.
Nadalje prikažimo složeni kamatni račun uz varijabilnu kamatnu stopu.

Propozicija 3.3.6. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu $p_i, i = 1, 2, \ldots, n$, u i-tom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi*

$$C_n = C_0 r_1 r_2 \cdots r_n = C_0 \prod_{i=1}^{n} r_i.$$

Prema [7] ukupne kamate u slučaju da se kamata obračunava po složenom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu iznose

$$I = C_n - C_0 = C_0\left(\prod_{i=1}^{n} r_i - 1\right), \tag{3.8}$$

gdje je $r_i = 1 + \frac{p_i}{100}$, $i = 1, 2, \dots, n$, dekurzivan kamatni faktor za i-to razdoblje.
Primijenimo li dobivene formule na konkretne primjere (vidi [7]) možemo primijetiti da su ukupne kamate izračunate po jednostavnom kamatnom računu manje od ukupnih kamata izračunatih po složenom kamatnom računu. Dokažimo tu tvrdnju za opći slučaj koristeći nejednakosti.

Teorem 3.3.7. *Ukupne kamate izračunate po složenom kamatnom računu nisu manje od onih izračunatih po jednostavnom kamatnom računu.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati koristeći Bernoullijevu nejednakost. Dokaz je preuzet iz [7]. Razlikovat ćemo dva slučaja: prvi kada su kamate računate uz fiksnu te drugi kada su kamate računate uz varijabilnu kamatnu stopu.
U prvom slučaju, koristeći 3.4, 3.5 i 3.7, treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$I \geq K \Leftrightarrow C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - C_0 \geq C_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right) - C_0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \geq 1 + \frac{pn}{100}.$$

Posljednja nejednakost slijedi iz 1.15 za $x = \frac{p}{100} > 0$.
U drugom slučaju, koristeći 3.6 i 3.8, trebamo dokazati nejednakost

$$\begin{aligned} I \geq K \Leftrightarrow C_0\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{p_i}{100}\right) - C_0 &\geq C_0\left(1 + \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{100}\right) - C_0 \\ \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{p_i}{100}\right) &\geq 1 + \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{100}. \end{aligned}$$

Posljednja nejednakost slijedi iz 1.21 za $x_1 = \frac{p_1}{100} > 0, x_2 = \frac{p_2}{100} > 0, \dots, x_n = \frac{p_n}{100} > 0$. □

Bibliografija

[1] Cvetovski, Z.: *Inequalities*. Springer, Berlin, 2012.

[2] Elezović, N.: *Diskontna matematika*. Element, Zagreb, 2017.

[3] Ilišević, I.: *Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost*. Predavanje održano u okviru Matematičkog kolokvija, HMD - Podružnica Osijek, 1996.

[4] Ilišević, I.: *Bernoullijeva nejednakost*. Osječki matematički list, Vol. 9 No. 1, 2009.

[5] Ilišević, I.: *Primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi*. Osječki matematički list, Vol. 12 No. 1, 2012.

[6] Kaczkowski, S.: *Solving multivariate optimisation problems using inequalities*. The Mathematical Gazette, 101 (552), 412-423, 2017.

[7] Kojić, V., Šego B.: *O odnosu između jednostavnih i složenih kamata*. Matematičko-fizički list, 69 (276), 249-254, 2019.

[8] Kojić, V., Krpan M.: *Primjena težinske AG-nejednakosti u problemu maksimizacije profita: slučaj Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje s dva faktora proizvodnje*. Ekonomska misao i praksa, Vol. 30 No. 1, 2021.

[9] Kojić, V., Krpan M. Lukač Z.: *Teaching cost minimization - can a non-calculus approach help?* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52:8, 1281-1294, 2021.

[10] Kojić, V., Lukač Z.: *Rješavanje problema optimizacije u problemima minimizacije troškova i ekonomične količine nabave pomoću nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine*. Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, 11 (1), 81-97, 2013.

[11] Muckstadt, J.A., Sapra A.: *Principles of Inventory Management: When You Are Down to Four, Order More*. Springer, New York, 2010.

[12] Neralić, L., Šego B.: *Matematika*. Element, Zagreb, 2009.

[13] Pečarić, J.: *Nejednakosti*. Element, Zagreb, 1996.

[14] Saxena, S.: *A Simple Proof of Bernoulli's Inequality*, 2012. `https://vixra.org/pdf/1205.0068v2.pdf`, posjećena 20.08.2023.

Sažetak

Diplomski rad istražuje upotrebu metode nejednakosti kao alternativnog pristupa rješavanju problema optimizacije u matematici i ekonomiji. Najčešće se za pronalaženje minimuma ili maksimuma funkcija koristi diferencijalni račun, ali ta metoda može biti zahtjevna zbog provjera nužnih i dovoljnih uvjeta za ekstrem računanjem derivacija. U radu promatramo neke elementarne nejednakosti (aritmetičko-geometrijska nejednakost, Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost i Bernoullijeva nejednakost) i njihovu primjenu u matematici i ekonomiji te na matematičkim natjecanjima. Posebno se analizira primjena nejednakosti u ekonomiji, kao što su model ekonomične količine nabave (EOQ model) i usporedba jednostavnih i složenih kamata. Ovaj rad doprinosi boljem razumijevanju metode nejednakosti u rješavanju problema optimizacije te ističe njezine prednosti u odnosu na metode temeljene na diferencijalnom računu.

Summary

The paper explores the use of inequalities as an alternative method to solving optimization problems in mathematics and economics. The common approach to finding the minimum or maximum of a function is to use calculus, but this method can be demanding due to the derivation of necessary and sufficient conditions for the extrema using derivatives. In the paper, some elementary inequalities (arithmetic-geometric inequality, Cauchy-Schwarz-Buniakowsky inequality and Bernoulli's inequality) and their application in mathematics, economics and in mathematical competitions are observed. The application of inequalities in economics, such as the economic order quantity model (EOQ model) and the comparison of simple and compound interest, are especially analyzed. This paper contributes to a better understanding of the use of inequalities in solving optimization problems, and highlights its advantages over methods based on calculus.

Životopis

Rođena sam 11.05.2000. u Zagrebu. Završila sam OŠ dr. Ante Starčevića u Zagrebu te prirodoslovno-matematički smjer sa skupinom predmeta na engleskom jeziku u X gimnaziji Ivan Supek u Zagrebu. Od 2004. do 2017. aktivno se bavim ritmičkom gimnastikom te uspješno sudjelujem na mnogobrojnim regionalnim, državnim i međunarodnim natjecanjima. Godine 2017. upisujem preddiplomski studij Matematika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu i 2021. godine postajem sveučilišna prvostupnica edukacije matematike. Iste godine upisujem diplomski studij Matematika, smjer: nastavnički na istom fakultetu.