Modeliranje korelacija u kreditnom portfelju

Bačić, Katarina

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Katarina Bačić

Modeliranje korelacija u kreditnom portfelju

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

Tvoja je ljubav kao ocean. Hvala Ti!

Uvod

Kreditni rizik se najjednostavnije može definirati kao mogućnost da druga ugovorna strana banke neće ispuniti svoje obveze. Cilj upravljanja kreditnim rizikom je maksimizacija stope povrata banke usklađene za rizik održavanjem izloženosti kreditnom riziku unutar prihvatljivih parametara. Banke moraju upravljati kreditnim rizikom cijelog portfelja kao i onim koji leži u pojedinačnim kreditima ili transakcijama.

Dobro je poznato da u teoriji vjerojatnosti nezavisnost čini sve lakšim. Nažalost, u modeliranju kreditnog rizika ne možemo očekivati nezavisnost gubitaka. Štoviše ispostavit će se da je korelacija centralni izazov.

1 Osnove upravljanja kreditnim rizikom

Počnimo od jednog pojednostavljenog, ali svejedno ne toliko nerealističnog primjera. Pretpostavimo da velika građevinska tvrtka želi posuditi od banke 10 milijuna eura. Analitičar u banci mora odlučiti hoće li odobriti takav zahtjev ili ne. Pretpostavimo još da nadređena osoba analitičara poznaje izvršnog financijskog direktora te građevinske tvrtke već dugi niz godina. Dodajmo još k tome da je tvrtka pod velikim pritiskom i da je bančina interna kreditna ocjena (rejting) za tu kompaniju vrlo niska.
Što bi analitičar trebao napraviti?
Iako je ovaj primjer, s namjerom, malo pretjeran ovakve situacije se događaju s vremena na vrijeme i nikad nije lako donijeti odluku. Banke su s toga, prije mnogo godina, počele razmišljati o načinima kako se osigurati od takvih kredita. Štoviše, povijest pokazuje da i „dobri“ klijenti imaju potencijal za ulazak u status neispunjavanja obveza (u nastavku: default), pa ima smisla kod osiguranja gledati cijeli kreditni portfelj, a ne samo "kritične" kredite.

Osnovna ideja iza osiguranja je uvijek ista. Primjerice, kod zdravstvenog osiguranja trošak nekolicine bolesnih pokriva se pristojbama koje zdravstvenom osiguranju plaćaju svi.
Za kredite u banci možda bismo mogli primjeniti isto: naplaćivati primjerenu premiju rizika za svaki kredit i skupljati te premije na interni račun banke koji bi pokrivao gubitke nastale zbog neispunjavanja obveza druge ugovorne strane.
Osnovna ideja je da banka svakom klijentu odredi vjerojatnost defaulta (DP), gubitak u trenutku defaulta (LGD) i izloženost u trenutku defaulta (EAD).

1.1 Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti

Definicija 1.1. Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. Vjerojatnost je funkcija

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

sa sljedećim svojstvima:

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktni $\implies \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zovemo vjerojatnosni prostor.

Definicija 1.2. Slučajna varijabla X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je neprekidna slučajna varijabla ako postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ takva da je

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt, \text{ za sve } a \in \mathbb{R}.$$

Funkcija f se zove funkcija gustoće slučajne varijable X.

Definicija 1.3. Neka je (X, Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće $f(x, y)$. Uvjetna funkcija gustoće je funkcija

$$f_{X|Y} = (x|y) : \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad f_{X|Y} = (x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \ x \in \mathbb{R},$$

za sve $y \in \mathbb{R}$ takve da je $f_Y(y) \geq 0$.

Definicija 1.4. Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable X je definirana sa

$$F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.5. Neka je F funkcija distribucije varijable X i neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajni uzorak za X. Empirijska funkcija distribucije je slučajna funkcija $\widehat{F}_n(\cdot)(w) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ w \in \Omega$ t.d. je

$$\widehat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}, \ x \in \mathbb{R}$$

Teorem 1.6. *Neka su $X, X_1, X_2, \ldots$ nezavisni jednako distribuirani slučajni vektori te neka je $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Tada vrijedi*

jaki zakon velikih brojeva: $\bar{X}_n \xrightarrow{g.s} \mathbb{E}(X) \Leftrightarrow \mathbb{E}(|X|) < \infty$

slabi zakon velikih brojeva: $\mathbb{E}(|X|) < \infty \Longrightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X)$

Opširniji pregled poznatih rezultata, kao i dokazi odgovarajućih tvrdnji mogu se naći u [4, 146.-148.].

Definicija 1.7. Matematičko očekvanje slučajne varijable X interpretira se kao srednja vrijednost od X. Definira se kao broj $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad \text{(ako je } X \text{ neprekidna)},$$

pod pretpostavkom da desna strana postoji u smislu da integral apsolutno konvergira.

Definicija 1.8. Varijanca slučajne varijable je mjera raspršenja njenih vrijednosti od matematičkog očekivanja. Preciznije, varijanca od X je srednje kvadratno odstupanje X od $\mathbb{E}[X]$:

$$\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Teorem 1.9. (Centralni granični teorem) *Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz n.j.d. slučajnih varijabli s konačnim matematičkim očekivanjem μ i konačnom varijancom $\sigma^2 \geq 0$. Nadalje, neka je $\bar{X}_n := (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ za sve prirodne brojeve n. Tada za sve $a \leq b$ vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

gdje je $\Phi(x)$ funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe.

Dokaz teorema može se pronaći u [4, Teorem 14.1].

Definicija 1.10. Kovarijanca slučajnih varijabli X i Y je definirana sa

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)],$$

ako gornje očekivanje postoji. Ako je $Cov(X, Y) = 0$, onda kažemo da su X i Y nekorelirane. Koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y je definiran sa

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]}\sqrt{\mathbb{V}[Y]}}.$$

1.2 Očekivani gubitak

Definicija 1.11. Gubitak pojedinog dužnika definira se s *varijablom gubitka*

$$\tilde{L} = \text{EAD} \times \text{LGD} \times L \quad \text{pri čemu} \quad L = 1_D, \quad \mathbb{P}(D) = \text{DP},$$

gdje D označava događaj da je dužnik defaultirao u određenom vremenskom periodu (najčešće jedna godina), a $\mathbb{P}(D)$ vjerojatnost da se dogodi događaj D.

Definicija 1.12. Uz izmjeriv prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiramo očekivani gubitk (EL)

$$EL = \mathbb{E}[\tilde{L}] = \text{EAD} \times \text{LGD} \times \mathbb{P}(D) = \text{EAD} \times \text{LGD} \times \text{DP},$$

jer je očekivanje bilo koje Bernoullijeve varijable, kao što je ovdje (1_D), upravo vjerojatnost tog događaja.

Kako bismo zadržali ovakvu reprezentaciju od EL, trebamo neke dodatne pretpostavke kao što je pretpostavka da su EAD i LGD konstante. Međutim, postoje razne situacije u kojima bismo trebali modelirati jednu ili obje kao slučajne varijable. U takvim slučajevima EL može i dalje biti dana s tom reprezentacijom, uz pretpostavku da su EAD i LGD očekivanja od nekih slučajnih varijabli.
U nastavku ćemo pretpostaviti da je EAD deterministička, a LGD očekivanje slučajne varijable *ozbiljnosti gubitka* SEV.

Uveli smo očekivani gubitak EL kako bi se banka osigurala od gubitaka koje očekuje da će se dogoditi s obzirom na prošla iskustva. Ali, držati kapital za očekivani gubitak nije dovoljno. Zapravo, banka bi trebala uz rezerve za očekivani gubitak izdvojiti dio i za neočekivani gubitak. Za mjeru devijacije gubitaka u EL , prirodni izbor bila bi standardna devijacija varijable gubitka $\tilde{L}$

1.3 Neočekivani gubitak

Definicija 1.13. Definiramo neočekivani gubitak UL s

$$\mathrm{UL} = \sqrt{\mathbb{V}[\tilde{L}]} = \sqrt{\mathbb{V}[\mathrm{EAD} \times SEV \times L]}.$$

Kako bismo modelirali ukupni gubitak portfelja, promotrit ćemo portfelj koji se sastoji od m kredita:

$$\tilde{L}_i = \mathrm{EAD}_i \times SEV_i \times L_i,$$

$$L_i = 1_{D_i}, \quad \mathbb{P}(D_i) = DP_i.$$

Gubitak portfelja je tada definiran slučajnom varijablom:

$$\tilde{L}_{PF} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{L}_i = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{EAD}_i \times SEV_i \times L_i.$$

Ako pogledamo očekivani gubitak i iskoristimo aditivnost očekivanja imamo:

$$EL_{PF} = \sum_{i=1}^{m} EL_i = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{EAD}_i \times \mathrm{LGD}_i \times \mathrm{DP}_i.$$

U slučaju neočekivanog gubitka, aditivnost vrijedi ako su varijable gubitka $\tilde{L}_i$ nekorelirane. Nažalost, tipično su varijable gubitka korelirane i korelacija je glavni pokretač kreditnog rizika. Kod neočekivanog gubitka prvi put vidimo kako korelcije, odnosno kovarijance „igraju ključnu ulogu“.

$$
\begin{aligned}
UL_{PF} &= \sqrt{\mathbb{V}[\tilde{L}_{PF}]} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} EAD_i \times EAD_j \times Cov[SEV_i \times L_i, SEV_j \times L_j]}
\end{aligned}
$$

Prije nastavka razmotrimo značenje i interpretaciju korelacije. Radi jednostavnosti uzmimo u obzir portfelj koji se sastoji od dva kredita koji imaju LGD= 100% i EAD= 1. Stavimo $\rho =$Corr$[L_1, L_2]$ i $p_i =$ DP$_i$. Tada imamo:

$$
{UL_{PF}}^2 = p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + 2\rho\sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)}. \qquad (1.3.1)
$$

Tri slučaja korelacije između defaulta:

- $\rho = 0$
  U tom slučaju, treći član u (1.3.1) nestane, tako da UL$_{PF}$ dostiže svoj minimum. Ovo je slučaj *savšene diverzifikacije*. Koncept diverzifikacije je lako objašnjiv. Investiranje u više različitih imovina smanjuje ukupni rizik portfelja jer je malo vjerojatno da će velik broj investicija defaultirati odjednom. Što krediti u portfelju imaju "manje zajedničkog", veća je vjerojatnost da default jednog neće imati utjecaj na budućnost ostalih u portfelju. Slučaj $\rho = 0$ je slučaj kada su krediti u portfelju potpuno nekorelirani. Ako interpretiramo UL kao zamjenu za rizik portfelja (za razliku od EL, UL je „prava“ nesigurnost s kojom je banka suočena kada investira u portfelj jer obuhvaća i devijaciju od očekivanja), vidimo da ovaj slučaj minimizira ukupni rizik portfelja.

- $\rho > 0$
  U ovom slučaju naše dvije ugovorne strane su u međusobnom odnosu. Default jedne ugovorne strane povećava vjerojatnost da će druga ugovorna strana isto defaultirati. Možemo ovo precizirati ako pogledamo uvjetnu vjerojatnost defaulta druge ugovorne strane ako znamo da je prva ugovorna strana defaultirala:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[L_2 = 1 | L_1 = 1] = \frac{\mathbb{P}[L_1 = 1, L_2 = 1]}{\mathbb{P}[L_1 = 1]} = \frac{\mathbb{E}[L_1 L_2]}{p_1} \\
\frac{p_1 p_2 + Cov[L_1, L_2]}{p_1} = p_2 + \frac{Cov[L_1 L_2]}{p_1}.
\end{aligned}
$$

  Vidimo da, ako imamo pozitivnu korelaciju, odnosno kovarijancu, uvjetna vjerojatnost je veća od p_2. Drugim riječima, u slučaju pozitivne korelacije bilo koji default u portfelju ima važan utjecaj na ostale u portfelju, odnosno moglo bi doći do još gubitaka. Ekstremni slučaj imamo za $\rho = 1$, tzv. *savršena korelacija.* U slučaju $p = p_1 = p_2$ jednakost (1.3.1) pokazuje da imamo $UL_{PF} = 2\sqrt{p(1-p)}$, što u suštini znači da portfelj sadrži rizik samo jednog dužnika, ali s dvostrukim intenzitetom (koncentracijom rizika). U ovakvoj situaciji default jednog dužnika gotovo sigurno uzrokuje default drugog.

- $\rho < 0$ Ova situacija je analogna situaciji $\rho > 0$, pa ćemo promotriti samo ekstremni slučaj, tzv. *savršena nekorelacija* ($\rho = -1$). Moglo bi se tada zaključiti kako je investicija u drugu imovinu savršena zaštita od investicije u prvu imovinu. Doduše, ova terminologija ima više smisla kod tzv. *marked-to-market* pristupa evaluacije, gdje bi porast tržišne vrijednosti jednog od kredita odmah značio, uz pretpostavku $\rho = -1$, smanjenje tržišne vrijednosti drugog kredita. No, iz (1.3.1) slijedi da je $UL_{PF} = 0$, što znači da investiranje u drugu imovinu uz $\rho = -1$ potpuno eliminira rizik prve imovine.

1.3.1 Ekonomski kapital

Postoji vjerojatnost da gubitci prijeđu očekivani gubitak za više od standardne devijacije gubitka portfelja. Zbog toga tražimo druge načine kvantificiranja rizičnog kapitala, pri tome uzimajući u obzir ciljanu razinu statističke pouzdanosti.
Najčešći način kvantificiranja rizičnog kapitala je koncept *ekonomskog kapitala* EC, nazvanog još i *Capital at Risk* (CaR) ili kreditni *Value-at-Risk* (VaR) u literaturi.

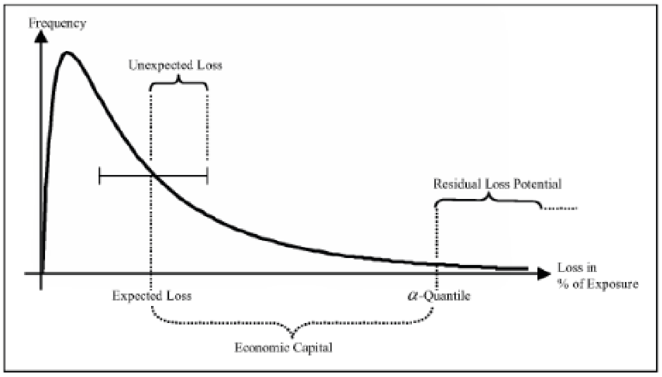
Definicija 1.14. Za propisanu razinu pouzdanosti α EC je definiran kao α-kvantil gubitka portfelja $\tilde{L}_{PF}$ minus očekivani gubitak portfelja:

$$EC_\alpha = q_\alpha - EL_{PF},$$

pri čemu je q_α α-kvantil od $\tilde{L}_{PF}$, određen s:

$$q_\alpha = \inf\{q > 0 \mid \mathbb{P}[\tilde{L}_{PF} \leq q] \geq \alpha\}$$

Primjerice, ako je razina pouzdanosti $\alpha = 99.98\%$, onda će kapital EC_α biti dovoljan za pokrivanje neočekivanih gubitaka za $9,988$ od $10,000$ godina, uz pretpostavku planiranog perioda od jedne godine. Nažalost, uz takvu kalibraciju, s druge strane, mogli bismo očekivati da u 2 od $10,000$ godina ekonomski kapital $\mathrm{EC}_{99.98\%}$ neće biti dostatan za zaštitu banke od insolventnosti. To je loša strana kalibracije ekonomskog kapitala pomoću kvantila. Međutim, danas većina većih banaka koristi EC kao njihov interni 'credit risk' model.



Slika 1.1: Funkcija distribucije gubitka portfelja

1.3.2 Distribucija gubitaka

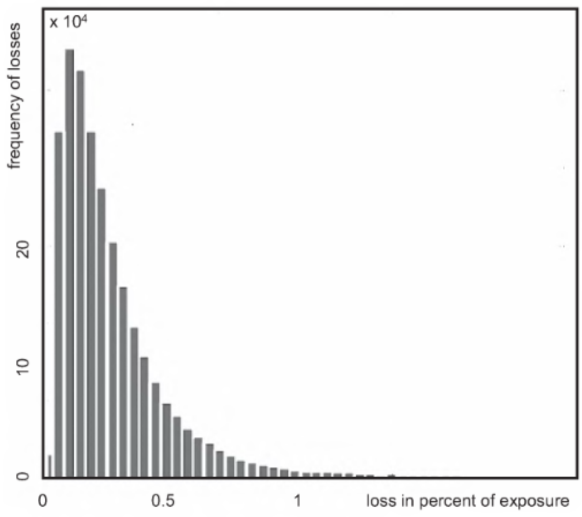
Sve risk veličine na razini portfelja se temelje na varijabli gubitka portfelja $\tilde{L}_{PF}$. Stoga nije iznenađenje da distribucija od $\tilde{L}_{PF}$, tzv. *distribucija gubitaka portfelja* "igra centralnu ulogu" u upravljanju kreditnim rizikom.
Na slici 1.1 vidimo da sve risk veličine kreditnog portfelja mogu biti identificirane pomoću distribucije gubitka portfelja. Ovo je važno zapažanje jer pokazuje da u slučajevima gdje distribucija gubitka portfelja može biti samo empirijski određena možemo koristiti empirijske statističke veličine umjesto „pravih“ risk veličina.
U praksi, u suštini imamo dva načina za generiranje distribucije gubitka. Prva metoda se temelji na *Monte Carlo simulaciji*, a druga na tzv. *analitičkoj aproksimaciji.*

1.3.3 Monte Carlo simulacija gubitaka

U Monte Carlo simulaciji, gubitci su simulirani i prikazani u formi histograma kako bismo dobili empirijsku distribuciju gubitka portfelja. Empirijska funkcija distribucije može se odrediti na sljedeći način:
Pretpostavimo da smo simulirali n potencijalnih gubitaka portfelja $\tilde{L}_{PF}^{(1)}, \ldots, \tilde{L}_{PF}^{(n)}$, time uzimajući u obzir distribuciju pojedine varijable gubitka i njihove korelacije[1]. Tada je empirijska funkcija distribucije gubitka dana s:

$$F(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1_{[0,x]}(\tilde{L}_{PF}^{(j)})$$

[1]Kasnije ćemo vidjeti da su korelacije pripojene pomoću faktorskog modela.



Slika 1.2: Empirijska funkcija distribucije gubitka portfelja dobivena Monte Carlo simulacijom. Histogram je baziran na portfelju od 2000 kredita srednje velikih kompanija.

Slika 1.2 pokazuje oblik funkcije gustoće (histogram slučajno generiranih ($\tilde{L}_{PF}^{(1)}$,..., $\tilde{L}_{PF}^{(n)}$,)) empirijske distribucije gubitka nekog testnog portfelja.
Iz empirijske distribucije gubitka možemo izvući sve risk veličine koje smo uveli na početku. Primjerice, α - kvantil distribucije gubitka možemo dobiti direktno iz $\tilde{L}_{PF}^{(1)}, \ldots, \tilde{L}_{PF}^{(n)}$:
Neka

$$\tilde{L}_{PF}^{(i_1)} \leq \tilde{L}_{PF}^{(i_2)} \leq, \ldots, \leq \tilde{L}_{PF}^{(i_n)},$$

α - kvantil q_α empirijske distribucije gubitka (za proizvoljnu razinu pouzdanosti) dan je s:

$$q_\alpha = \begin{cases} \alpha \tilde{L}_{PF}^{(i_{[n\alpha]})} + (1\text{-}\alpha)\tilde{L}_{PF}^{(i_{[n\alpha]+1})} & \text{ako } n\alpha \in \mathbb{N} \\ \tilde{L}_{PF}^{(i_{[n\alpha]})} & \text{ako } n\alpha \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{gdje } [n\alpha] = \min\{k \in \{1, \ldots, n\} | \; n\alpha \leq k\}.$$

Ekonomski kapital tada možemo procijeniti s:

$$\text{EC}_\alpha = q_\alpha - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{L}_{PF}^{(j)}.$$

Analogno, možemo dobiti i ostale risk veličine.

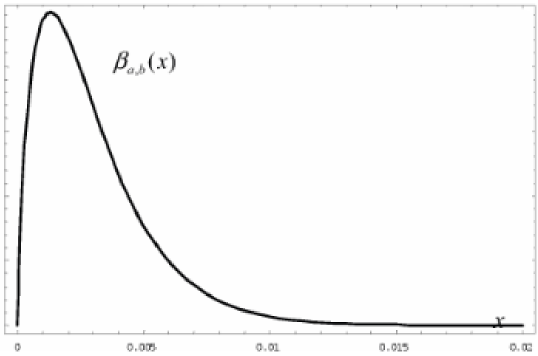
Monte carlo simulacija zahtjeva faktorski model. Što se tiče statistike, razlog za postojanje faktorskog modela je želja za objašnjenjem varijance preko faktora u pozadini. Iako želimo objasniti i varijabilnost ekonomskog uspjeha kompanije pomoću globalnih pozadinskih utjecaja, dva su glavna razloga potrebe za faktorskim modelima.
Prije svega, korelacija između pojedinih varijabli gubitka trebala bi se moći interpretirati u terminima *ekonomskih varijabli.* Primjerice, veliki gubitak portfelja može nastati zbog krize u industriji koja utječe na više kredita u portfelju. Uz to, faktorski model može poslužiti i kao alat za *analizu scenarija.* Primjerice, postavljenjem industrijskog faktora na određenu fiksnu vrijednost, nakon Monte Carlo simulacije možemo promatrati utjecaj krize ili skoka te industrije.
Drugi razlog za korištenje faktorskih modela je smanjenje kompjuterskog računanja. Primjerice, za portfelj sa $100,000$ transakcija treba izračunati $\frac{1}{2} \times 100,000 \times 99,000$ korelacija. S druge strane, za modeliranje korelacija u portfelju pomoću faktorskog modela sa 100 indikatora smanjuje broj uključenih korelacija za faktor od $1,000,000$.

1.3.4 Analitička aproksimacija

Strogo govoreći, analitička aproksimacija mapira promatrani portfelj, s nepoznatom distribucijom gubitaka, na ekvivalentni portfelj s poznatom distribucijom. Distribucija gubitaka ekvivalentnog portfelja se onda uzima kao zamjena za "pravu" distribuciju gubitaka originalnog portfelja. U praksi se to često radi na sljedeći način. Izabere se familija distribucija karakterizirana s prvim i drugim momentom koja pokazuje tipičan oblik (odnosno *desno zaobljena* s teškim repom[2]) distribucije gubitaka kao na slici 1.1.

Iz poznatih karakteristika originalnog portfelja (pr. distribucija rejtinga, izloženosti, dospijeća itd.) računamo prvi moment (EL) i procijenimo drugi moment (UL).
EL originalnog portfelja obično možemo dobiti iz informacija o rajtinzima, izloženosti i LGD distribuciji portfelja.
Nažalost, drugi moment ne možemo izračunati bez pretpostavki vezanih uz korelacije između defaulta u portfelju; vidi jednadžbu (1.3.1).
Stoga, primjenjujući jednadžbu (1.3.1) uz postavku svih ρ_{ij} jednakih ρ (*prosječna korelacija između defaulta*) dobit ćemo procjenu za UL originalnog

[2] U našoj terminologiji distribucija je teškog repa ako su kvantili, za visoku razinu pouzdanosti, veći od onih normalne distribucije s podudarajućim prvim i drugim momentom.



Slika 1.3: Analitička aproksimacija beta distribucijom.

portfelja.

Sada možemo izabrati iz parametrizirane familije distribucija gubitaka onu koja najbolje odgovara originalnom portfelju s obzirom na prve i druge momente.
Ovdje ćemo aproksimirati distribuciju gubitka originalnog portfelja s beta distribucijom. Drugim riječima, tražimo slučajnu varijablu:

$$X \sim \beta(a, b),$$

koja predstavlja postotni gubitak portfelja, tako da parametri a i b rješavaju sljedeću jednadžbu:

$$0.003 = \mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b} \quad \text{i} \quad 0.00225^2 = \mathbb{V}[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \tag{1.3.2}$$

Prisjetimo se da je funkcija gustoće vjerojatnosti φ_X od X dana s:

$$\varphi_X(x) = \beta_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

($x \in [0, 1]$) s prvim i drugim momentima

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b} \qquad \text{i} \qquad \mathbb{V}[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

$a = 1.76944$ i $b = 588.045$ rješavaju jednadžbe (1.3.2). Slika 1.3 pokazuje funkciju gustoće tako kalibrirane slučajne varijable X.
Analitička aproksimacija uzima slučajnu varijablu X kao zamjenu za nepoznatu distribuciju gubitka portfelja s kojim smo krenuli. U skladu s tim,

risk veličine originalnog portfelja mogu biti aproksimirane s odgovarajućim veličinama slučajne varijable X. Primjerice, kvantile distribucije gubitka portfelja dobijemo kao kvantile beta distribucije. S obzirom da je "prava" distribucija zamjenjena s analitičkom, dobro poznatom distribucijom, svi potrebni izračuni mogu se napraviti u djeliću sekunde. Cijena koju moramo platiti je ta da su svi izračuni podložni značajnom *riziku modela*. Doduše beta distribucija, kao što možemo vidjeti na slici 1.3, ima oblik distribucije gubitka, ali postoje razne dvoparametarske familije s funkcijama gustoćama koje imaju tipičan oblik distribucije gubitka. Primjerice, neke gamma distribucije i F-distribucija imaju takav oblik. Nažalost, sve su i drukčijeg repa tako da ako jedna vrlo dobro aproksimira nepoznatu distribuciju gubitka portfelja ostale su automatski loš izbor. Stoga, odabir prikladne familije distribucije je izvor rizika modela. Međutim, postoje neke familije distribucija za koje je u praksi ustanovljeno da su najbolji izbor za određene slučajeve.
U praksi, analitička aproksimacija može vrlo uspješno biti primjenjena na tzv. *homogenim portfeljima*, odnosno na portfeljima gdje sve transakcije imaju usporedive karakteristike, primjerice nema koncentracije izloženosti, vjerojatnosti defaulta su u skladu s nekim umjerenim rangom, samo par industrija i zemalja (najbolje jedna) itd. Mnogi *retail*[3] portfelji mogu biti, s dovoljnom preciznošću, evaluirani analitičkom aproksimacijom. S druge strane, Monte Carlo simulacija velikog portfelja može trajati nekoliko sati. Glavna prednost Monte Carlo simulacije je da prezicno obuhvaća korelacije u portfelju umjesto oslanjanja na niz pretpostavki. K tome, Monte Carlo simulacija uzima u obzir različite 'risk' karakteristike kredita u portfelju. Stoga je to "umjetnost" u modeliranju kreditnog rizika i kada se portfelj sastoji od različitih transakcija u pogledu kreditnog rizika ne bismo se trebali previše oslanjati na rezultate analitičke aproksimacije.

1.3.5 Modeliranje korelacija pomoću faktorskih modela

Pretpostavimo da imamo dvije kompanije A i B koje su pozitivno korelirane. Primjerice, neka je A DaimlerChrysler i B neka je BMW. Mogli bismo uzeti automobilsku industriju kao temeljni faktor koji ima značajan utjecaj na ekonomsku budućnost kompanija A i B. Naravno, vjerojatno postoje i drugi faktori koji utječu na rizik od A i B. Primjerice, DaimlerChrysler je u određenoj mjeri pod utjecajem faktora za Njemačku, SAD i eventualno nekih faktora koji uključuju avio i financijske kompanije. BMW je sigurno koreliran s faktorom za Njemačku i vjerojatno s još nekim faktorima. Međutim,

[3]Stanovništvo.

ključna točka je da faktorski model daje način kako izraziti korelaciju između A i B isključivo putem korelacija sa zajedničkim faktorima. Pretpostavimo da se automobilska industrija nađe u financijskim poteškoćama. Tada možemo očekivati da se i kompanije A i B nađu pod pritiskom jer su povezane s automobilskom industrijom. Dio volatilnosti financijskog uspjeha kompanije povezanog sa sistemskim faktorima kao što su industrija ili država naziva se *sistemski rizik* kompanije. Dio volatilnosti koji ne može biti objašnjen sistemskim utjecajima naziva se *specifični rizik* kompanije.

2 Modeliranje koreliranih defaulta

U ovom poglavlju promatrat ćemo default modele iz malo više apstraktnog kuta gledanja, time pružajući okvir u koji današnji industrijski modeli mogu biti ugrađeni. Počnimo od općenitih napomena.
Ponovno, imamo izmjeriv prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Bez smanjenja općenitosti, uvijek ćemo pretpostaviti valuacijski period od jedne godine. Recimo da promatramo kreditni portfelj koji se sastoji od m ugovornih strana. Svaka ugovorna strana u portfelju ima rejting R_i i pretpostavimo da znamo vjerojatnost defaulta p_i koja odgovara rejtingu R_i. Nakon godinu dana rejting promatrane ugovorne strane mogao se promijeniti. Općenito, označit ćemo rang mogućih rejtinga s $\{0, \dots, d\}$, gdje $d \in \mathbb{N}$ predstavlja default,

$$R_i \in \{0, \dots, d\} \quad \text{i} \quad p_i = \mathbb{P}[R_i \to d],$$

gdje oznaka $R \to R'$ označava promjenu rejtinga iz R u R' tijekom jedne godine. U ovom odijeljku usredotočit ćemo se na tzv. *two-state* pristup što,u suštini, znači da ćemo se ograničiti na okruženje gdje imamo sljedeće:

$$d = 1, \quad L_i = R_i \in \{0, 1\}, \quad p_i = \mathbb{P}[L_i = 1].$$

Two-state modeli niječu mogućnost promjena ocjena; samo su uzeti u obzir prelazak na status default ili "preživljavanje". Međutim, poopćenje two-state modela na multi-state model je vrlo jednostavno.
U drugoj cijelini smo definirali varijable gubitka kao indikatore defaulta. U kontekstu two-state modela prirodni pristup je pomoću Bernoullijevih slučajnih varijabli. CreditMetrics^{TM} i KMV-model koriste ovaj pristup. Drugi rašireni pristup je modeliranje defaulta pomoću Poissonovih slučajnih varijabli. CreditRisk$^+$ model je dobro poznati predstavnik takvog pristupa. U nastavaku ćemo Bernoullijeve slučajne varijable označavati s L, a Poissonove s L'.

2.1 Bernoullijev model

Vektor slučajnih varijabli $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_m)$ naziva se Bernoullijeva statistika gubitka, ako su sve marginalne distribucije od $\mathbf{L}$ Bernoullijeve:

$$L_i \sim B(1; p_i), \quad \text{tj.,} \quad L_i = \begin{cases} 1 & \text{uz vjerojatnost } p_i \\ 0 & \text{uz vjerojatnost } 1 - p_i \end{cases}$$

Gubitak od $\mathbf{L}$ je definiran[4] s:

$$L = \sum_{i=1}^{m} L_i \quad \text{resp.} \quad \frac{L}{m}.$$

Vjerojatnosti $p_i = \mathbb{P}[L_i = 1]$ se nazivaju *vjerojatnosti defaulta* od $\mathbf{L}$. Pozadina naše terminologije je sljedeća: Kreditni portfelj je, ništa drugo nego, recimo, m transakcija s određenim ugovornim stranama. Svaka uključena ugovorna strana stvara dva buduća događaja: ili defaultira ili "preživi". U slučaju defaulta dužnika i varijabla L_i jednaka je 1, a u slučaju preživljavanja $L_i = 0$. Varijabla L definirana gore se tada naziva *gubitak portfelja*.

Prije nego krenemo na zanimljivije slučajeve pogledajmo na kratko, kako bismo obuhvatili sve, poprilično nerealan slučaj nezavisnih defaulta. Najjednostavnija varijanta statistike gubitka može se dobiti pretpostavkom uniformne vjerojatnosti defaulta p i nedostatatka zavisnosti između ugovornih strana. Prezicnije, s ovim pretpostavkama imamo:

$$L_i \sim B(1; p) \quad \text{i} \quad (L_i)_{i=1,\ldots,m} \ \text{ nezavisne}$$

U ovom slučaju gubitak portfelja je skup nezavisnih, jednako distribuiranih Bernoullijevih varijabli i stoga ima binomnu distribuciju s parametrima m i p, $L \sim B(m; p)$. Ako pretpostavimo da su ugovorene strane i dalje nezavisne, ali s različitim vjerojatnostma defaulta,

$$L_i \sim B(1; p_i) \quad \text{i} \quad (L_i)_{i=1,\ldots,m} \ \text{ nezavisne,}$$

ponovno dobivamo gubitak portfelja L kao skup pojedinih varijabli gubitka, ali ovog puta s prvim i drugim momentima

$$\mathbb{E}[L] = \sum_{i=1}^{m} p_i \quad \text{i} \quad \mathbb{V}[L] = \sum_{i=1}^{m} p_i(1 - p_i).$$

[4] U nastavku ćemo ponekad pisati L za ukupni gubitak, ali i za postotak gubitka statistike gubitka. Međutim, iz konteksta ćemo uvijek moći odrediti značenje.

što slijedi iz $\mathbb{E}[L_i] = p_i$, $\mathbb{V}[L_i] = p_i(1-p_i)$ i aditivnosti očekivanja, odnosno varijance[5].
Dobro je poznato da u teoriji vjerojatnosti nezavisnost čini sve lakšim. Primjerice centralni granični teorem, u svojoj najosnovnijoj verziji ima pretpostavku nezavisnosti. Ako bismo pretpostavili nezavisnost ugovorenih strana u portfelju, mogli bismo, prema centralnom graničnom teoremu, pretpostaviti da je gubitak portfelja (aproksimativno) slučajna varijabla s Gaussovom distribucijom, barem za velike portfelje. Drugim riječima, ne bismo morali raditi Monte Carlo simulacije jer bi gubitak portfelja bio dan u zatvorenoj formi s dobro poznatim svojstvima. Nažalost, u modeliranju kreditnog rizika ne možemo očekivati nezavisnost gubitaka. Štoviše, ispostavit će se da je korelacija centralni izazov. Stoga se sada okrećemo realnijoj razradi statistike gubitka.
Krećemo sa sljedećim standardnim modelom.

2.1.1 Generaliziran Bernoulli Mixture model

Gubitak portfelja dobivamo iz statistike gubitka $\mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_m)$ s Bernoullijevim varijablama $L_i \sim B(1; P_i)$. Sada su nam vjerojatnosti defaulta slučajne varijable $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_m) \sim \mathbf{F}$, pri čemu je $\mathbf{F}$ funkcija distribucije s vrijednostima u $[0,1]^m$. Dodatno, pretpostavljamo da su, uvjetno na realizaciju $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ od $\mathbf{P}$ varijable $L_1, \ldots, L_m$ nezavisne. Uvjetnu nezavisnost gubitaka izražavamo:

$$L_i|_{P_i=p_i} \sim B(1; p_i), \qquad (L_i|_{\mathbf{P}=\mathbf{p}})_{i=1,\ldots,m} \text{ nezavisne.}$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[L_1 = l_1, \ldots, L_m = l_m] \\ &= \textstyle\int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m {p_i}^{l_i}(1-p_i)^{1-l_i} d\mathbf{F}(p_1, \ldots, p_m), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

gdje je $l_i \in \{0,1\}$. Prvi i drugi momenti od gubitaka L_i dani su s:

$$\mathbb{E}[L_i] = \mathbb{E}[P_i], \quad \mathbb{V}[L_i] = \mathbb{E}[P_i](1-\mathbb{E}[P_i]) \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{2.1.2}$$

Prva jednakost je očita iz (2.1.1), a drugu možemo zapisati i kao:

$$\mathbb{V}[L_i] = \mathbb{V}[\mathbb{E}[L_i|\mathbf{P}]] + \mathbb{E}[\mathbb{V}[\mathbf{L_i}|\mathbf{P}]]$$

[5] Za aditivnost varijence dovoljno je da su slučajne varijable u parovima nekorelirane i integrabilne.

$$= \mathbb{V}[P_i] + \mathbb{E}[P_i(1 - P_i)] = \mathbb{E}[P_i](1 - \mathbb{E}[P_i]).$$

Kovarijanca između gubitaka:

$$\mathrm{Cov}[L_i, L_j] = \mathbb{E}[L_i L_j] - \mathbb{E}[L_i]\mathbb{E}[L_j] = \mathrm{Cov}[P_i, P_j].$$

Stoga, korelacija između defaulta u Bernoullijevom mixture modelu je

$$\mathrm{Corr}[L_i, L_j] = \frac{\mathrm{Cov}[P_i, P_j]}{\sqrt{\mathbb{E}[P_i](1 - \mathbb{E}[P_i])}\sqrt{\mathbb{E}[P_j](1 - \mathbb{E}[P_j])}}. \tag{2.1.3}$$

Posljednje dvije pokazuju da je zavisnost između gubitaka u portfelju u potpunosti obuhvaćena strukturom kovarijance multivarijantne distribucije $\mathbf{F}$ od $\mathbf{P}$.

2.1.2 Uniformna vjerojatnost defaulta i uniformna korelacija

Za portfelje gdje su sve izloženosti aproksimativno jednake kada govorimo o riziku, ima smisla pretpostaviti uniformnu vjerojatnost defaulta i uniformnu korelaciju između transakcija u portfelju. Retail portfelji i neki portfeljji manjih banaka su često vrlo homogene strukture, takve da pretpostavka uniformne vjerojatnosti i jednostavne korelacijske strukture ne šteti rezultatima izračuna s takvim modelom.

Pretpostavku uniformnosti donose zamjenjive[6] Bernoullijeve varijable $L_i \sim B(1; P)$ sa slučajnom vjerojatnosti defaulta $P \sim F$, gdje je F funkcija distribucije s vrijednostima u $[0, 1]$. Pretpostavljamo uvjetnu nezavisnost od $L_i{}'$ kao u općenitom slučaju.

$$\mathbb{P}[L_1 = l_1, \ldots, L_m = l_m] = \int_0^1 p^k (1-p)^{m-k} dF(p).$$

$$\text{gdje} \quad k = \sum_{i=1}^{m} l_i \quad \text{i} \quad l_i \in \{0, 1\}.$$

Naravno, za (2.1.2) i (2.1.3) u ovom slučaju imamo:

$$\bar{p} = \mathbb{P}[L_i = 1] = \mathbb{E}[L_i] = \int_0^1 p dF(p)$$

i uniformna korelacija između defaulta dvije različite ugovorne strane je dana s:

[6] $(L_1, \ldots, L_m) \sim (L_{\pi(1)}, \ldots, L_{\pi(m)})$

$$\rho = \mathrm{Corr}[L_i, L_j] = \frac{\mathbb{P}[L_i = 1, L_j = 1] - \bar{p}^2}{\bar{p}(1-\bar{p})}$$
$$= \frac{\int_0^1 p^2 dF(p) - \bar{p}^2}{\bar{p}(1-\bar{p})}$$

Pogledajmo kratko posljedice posljednje jednakosti. Prije svega implicira

$$\mathrm{Corr}[L_i, L_j] = \frac{\mathbb{V}[P]}{\bar{p}(1-\bar{p})} \quad \text{(sjetimo se: } P \sim F\text{)}.$$

što nam pokazuje da što je veća volatilnost od P, veća je korelacija između defaulta u odgovarajućoj Bernoullijevoj statistici gubitka. Također, implicira da je zavisnost između $L_i{}'$ ili pozitivna ili nula jer su varijance nenegativne. Drugim riječima, u ovaj model ne možemo implementirati negativne zavisnosti između rizika defaulta dužnika.

Slučaj $\mathrm{Corr}[L_i, L_j] = 0$ se događa ako i samo ako varijanca od F nestaje u nulu, što u suštini znači da nema slučajnosti što se tiče P. U takvom slučaju, F je *Diracova mjera* $\varepsilon_{\bar{p}}$ koncentrirana u $\bar{p}$.

Drugi ekstremni slučaj, $\mathrm{Corr}[L_i, L_j] = 1$, implicira da ili sve ugovorne strane defaultiraju ili sve prežive. Odgovarajuća distribucija F od P je tada Bernoullijeva distribucija, takva da je $P = 1$ uz vjerojatnost $\bar{p}$ i $P = 0$ uz vjerojatnost $1 - \bar{p}$.

Realni scenariji su negdje između ova dva slučaja.

2.2 Poissonov model

U ovom slučaju, defaulti ugovornih strana $i = 1, \ldots, m$ modelirani su Poissonovim slučajnim varijablama

$$L_i{}' \sim Pois(\lambda_i), \quad L_i{}' \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad p_i = \mathbb{P}[L_i{}' \geq 1], \tag{2.2.1}$$

gdje p_i ponovno označava vjerojatnost defaulta dužnika i. Napomena: (2.2.1) dopušta da jedan dužnik više puta defaultira. Vjerojatnost da se to dogodi je

$$\mathbb{P}[L_i{}' \geq 2] = 1 - e^{-\lambda_i}(1 + \lambda_i),$$

što je, uglavnom, mali broj. Primjerice, u slučaju $\lambda_i = 0.01$ dobili bismo $\mathbb{P}[L_i{}' \geq 2] = 0.5$ baznih poena (u nastavku bps), odnosno kada simuliramo s $\lambda_i = 0.01$ možemo očekivati da samo 1 od $20,000$ scenarija neće bit primjenjiv zbog višestrukih defaulta. S druge strane, za dužnike s dobrom kvalitetom

kredita (pr. AAA-dužnik s vjerojatnošću defaulta 0.0002 bps), vjerojatnost višestrukog defaulta od 0.5 je relativno velik broj.
Intenzitet λ_i je tipično blizu vjerojatnosti defaulta p_i zbog

$$p_i = \mathbb{P}[L_i{}' \geq 1] = 1 - e^{-\lambda_i} \approx \lambda_i \tag{2.2.2}$$

za male vrijednosti od λ_i. Jednadžba (2.2.2) pokazuje da je vjerojatnost defaulta u jednoj godini jednaka tome da imamo *eksponencijalno vrijeme čekanja* u prvoj godini.
Općenito, suma nezavisnih varijabli $L_1{}' \sim Pois(\lambda_1)$, $L_2{}' \sim Pois(\lambda_2)$ ima distribuciju $Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$. Uz pretpostavku nezavisnosti ukupan broj gubitaka portfelja dan je s:

$$L' = \sum_{i=1}^{m} L_i{}' \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)$$

Korelacija je uvedena u model ponovno slijedeći *mixture pristup*, ali u ovom slučaju s Poissonovim varijablama.

2.2.1 Generalizirani Poissonov mixture model

Sada je statistika gubitka slučajni vektor $\mathbf{L} = (L_1{}', \ldots, L_m{}')$ Poissonovih slučajnih varijabli $L_i{}' \sim Pois(\Lambda_i)$, gdje je $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$ slučajni vektor s funkcijom distribucije $\mathbf{F}$ s vrijednostima u $[0, \infty)^m$. Dodatno, pretpostavljamo da su, uvjetno na realizaciju $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ od $\mathbf{\Lambda}$, varijable $L_1{}', \ldots, L_m{}'$ su nezavisne:

$$L_i{}'|_{\Lambda_i = \lambda_i} \sim Pois(\lambda_i), \quad (L_i{}'|_{\mathbf{\Lambda} = \lambda})_{i=1,\ldots,m}$$

Imamo:

$$\mathbb{P}[L_1{}' = l_1{}', \ldots, L_m{}' = l_m{}']$$

$$= \int_{[0,\infty)^m} e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)} \prod_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^{l_i{}'}}{l_i{}'!} d\mathbf{F}(\mathbf{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{\lambda_m}),$$

gdje je $l_i{}' \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Analaogno Bernoullijevom slučaju dobivamo

$$\mathbb{E}[L_i{}'] = \mathbb{E}[\Lambda_i{}'] \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\mathbb{V}[L_i{}'] = \mathbb{V}[\mathbb{E}[L_i{}'|\mathbf{\Lambda}]] + \mathbb{E}\left[\mathbb{V}[\mathbf{L_i}{}'|\mathbf{\Lambda}]\right] = \mathbb{V}[\mathbf{\Lambda_i}] + \mathbb{E}[\lambda_{\mathbf{i}}].$$

Ponovno imamo $\text{Cov}[L_i', L_j'] = \text{Cov}[\Lambda_i, \Lambda_j]$ i korelacija između defaulta je dana s

$$\text{Corr}[L_i', L_j'] = \frac{\text{Cov}[\Lambda_i, \Lambda_j]}{\sqrt{\mathbb{V}[\Lambda_i] + \mathbb{E}[\Lambda_i]}\sqrt{\mathbb{V}[\Lambda_j] + \mathbb{E}[\Lambda_j]}}$$

Kao i u Bernoullijevom modelu ovo pokazuje da je korelacija isključivo izazvana pomoću funkcije distribucije $\mathbf{F}$ *slučajnog vektora intenziteta* $\boldsymbol{\Lambda}$.

2.2.2 Uniformni intenzitet defaulta i uniformna korelacija

Analogno Bernoullijevom modelu, možemo uvesti Poissonov uniformni model restrikcijom na jednu uniformnu intensity varijablu i jednu unformnu korelaciju između transakcija u portfelju. Eksplicitno, u Poissonovom slučaju imamo Poissonove varijable $L_i' \sim Pois(\Lambda)$ sa slučajnom varijablom intenziteta $\Lambda \sim F$, gdje je F funkcija distribucije s vrijednostima u $[0, \infty)$ i L_i'-ovi su uvjetno nezavisne varijable. Imamo:

$$\mathbb{P}[L_1' = l_1', \ldots, L_m' = l_m'] = \int_0^\infty e^{-m\lambda} \frac{\lambda^{(l_1' + \cdots + l_m')}}{l_1'! \ldots l_m'!} dF(\lambda).$$

Zbog toga što je, uvjetno na $\Lambda = \lambda$ gubitak portfelja ponovno Poissonova distribucija s intenzitetom $m\lambda$, vjerojatnost da se dogodi točno k defaulta jednaka je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[L' = k] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[L' = k | \Lambda = \lambda] dF(\lambda) \\ &= \int_0^\infty e^{-m\lambda} \frac{m^k \lambda^k}{k!} dF(\lambda)\end{aligned}$$

Vjerojatnost defaulta dužnika u portfelju definirana je s

$$\begin{aligned}\bar{p} = \mathbb{P}[L_i' \geq 1] &= \int_0^\infty \mathbb{P}[L_i' \geq 1 | \Lambda = \lambda] \; dF(\lambda) \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda}) \; dF(\lambda).\end{aligned}$$

Imamo:

$$\text{Corr}[L_i', L_j'] = \frac{\mathbb{V}[\Lambda]}{\mathbb{V}[\Lambda] + \mathbb{E}[\Lambda]} \qquad (i \neq j). \tag{2.2.3}$$

Formula (2.2.3) je posebno intuitivna ako se pogleda u kontekstu *disperzije*

$$D_x = \frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]} \qquad \text{za bilo koju slučajnu varijablu } X$$

Disperzija Poissonove distribucije je jednaka 1. Možemo interpretirati formulu (2.2.3) tako da kažemo da korelacija između broja defaultiranih različitih transakcija raste s disperzijom slučajne intensity varijable Λ. To vidimo i kada zapišemo formulu (2.2.3) u obliku

$$\mathrm{Corr}[L_i{}', L_j{}'] = \frac{D_\Lambda}{D_\Lambda + 1} \qquad (i \neq j)$$

Slijedi da porast disperzije povećava *mixture* efekt koji jača zavisnost između defaulta dužnika.

2.3 Bernoulli naspram Poisson mixture modela

Zakon malih brojeva[7] implicira da za velike m i mali p

$$B(m;p) \approx Pois(pm).$$

Ako stavimo $\lambda = pm$, to pokazuje da, uz pretpostavku nezavisnosti defaulta, gubitak portfelja $L = \sum L_i$ Bernoullijeve statistike gubitka $(L_1, \ldots, L_m)$ s uniformnom vjerojatnosti defaulta p može biti aproksimiran Poissonovom varijablom $L' \sim Pois(\lambda)$. Ali, zakon malih brojeva nije nikako dovoljno jak agrument za, nažalost, rašireno mišljenje kako su Bernoullijev i Poissonov pristup više manje kompatibilni. Kako bismo pokazali da ovi pristupi imaju značajnih razlika, vraćamo se na korelacije između defaulta oba modela. U Bernoullijevom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Corr}[L_i, L_j] = \\ &= \frac{\mathrm{Cov}[P_i,P_j]}{\sqrt{\mathbb{V}[P_i]+\mathbb{E}[P_i(1-P_i)]}\sqrt{\mathbb{V}[P_j]+\mathbb{E}[P_j(1-P_j)]}} \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

A u Poissonovom slučaju dobivamo:

$$\mathrm{Corr}[L_i{}', L_j{}'] = \frac{\mathrm{Cov}[\Lambda_i, \Lambda_j]}{\sqrt{\mathbb{V}[\Lambda_i] + \mathbb{E}[\Lambda_i]}\sqrt{\mathbb{V}[\Lambda_j] + \mathbb{E}[\Lambda_j]}} \qquad (2.3.2)$$

Gledajući samo slučajne varijable P_i, P_j odnosno Λ_i, Λ_j, vidimo da u nazivniku od (2.3.1) i (2.3.2) uspoređujemo

[7] Tj., aproksimacija binomne distribucije pomoću Poissonove distribucije.

$$\mathbb{V}[P_i] + \mathbb{E}[P_i(1-P_i)] = \mathbb{V}[P_i] + \mathbb{E}[P_i] - \mathbb{E}[{P_i}^2] \qquad \text{s} \qquad \mathbb{V}[\Lambda_i] + \mathbb{E}[\Lambda_i]. \tag{2.3.3}$$

Radi jednostavnosti pretpostavimo na trenutak da P_i i Λ_i imaju iste prve i druge momente. U tom slučaju jednadžba (2.3.3) kombinirana s (2.3.2) i (2.3.1) pokazuje da Bernoullijev model uvijek inducira veću korelaciju između defaulta od Poisonovog modela. Međutim, veće korelacije rezultiraju težim repovima odgovarajućih distribucija gubitaka. Drugim riječima, uz jednak prvi i drugi moment od P_i i Λ_i , očekivanja od L_i i ${L_i}'$ će biti jednaka, ali će varijanca od ${L_i}'$ uvijek nadilaziti varijancu od L_i, time inducirajući niže korelacije.

2.4 Neki industrijski modeli

2.4.1 CreditMetrics^{TM} i KMV-Model

Napomena: Za oba modela promatrat ćemo samo "*default-only mode*" time ignorirajući činjenicu da oba modela uključuju "*mark-to-model* pristup". U 'default-only mode"-u oba modela su Bernoulli modeli, gdje se donosi odluka o tome je li kompanija defaultirala ili ne uspoređujući vrijednost imovine kompanije u određenom promatranom periodu s nekim kritičnim pragom. Ako je vrijednost imovine pala ispod te vrijednosti u nekom trenutku u tom periodu tada se za tu kompaniju smatra da je defaultirala. Matematičkim riječnikom, za m ugovornih strana označit ćemo vrijednost njihove imovine u promatranom periodu $t = T$ s ${A_T}^{(i)}$. Pretpostavit ćemo da za svaku kompaniju i postoji kritični prag C_i takav da je kompanija defaultirala u periodu $[0, T]$ ako i samo ako ${A_T}^{(i)} < C_i$. U okviru Bernoulli modela statistika gubitka A_T može se promtrati kao latentna varijabla bitna za nastanak statusa defaulta.

$$L_i = 1_{\{{A_T}^{(i)} < C_i\}} \sim B\left(1; \mathbb{P}[{A_T}^{(i)} < C_i]\right) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.4.1}$$

U oba modela se pretpostavlja da proces vrijednosti imovine ovisi o nekim temeljnim faktorima koji odražavaju industrijske i regionalne utjecaje, time utječući na ekonomsku budućnost kompanije.
Log-povrati vrijednosti imovine nakon standardizacije[8]

[8]Pomaknuti i skalirani kako bismo dobili slučajnu varijablu s očekivanjem nula i standardnom devijacijom 1.

$$r_i = R_i \Phi_i + \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{2.4.2}$$

Ovdje, Φ_i se naziva *kombinirani faktor* kompanije i, jer je u multi-faktorskom modelu vagana suma nekoliko faktora. Ova jednadžba je, ništa drugo nego, standardna *linearna regresija* gdje koeficjent osjetljivosti, β_i, predstavlja linearnu korelaciju od r_i i Φ_i. Varijabla ε_i je rezidual, odnosno greška kod zamjene r_i s $\beta_i \Phi_i$. S obzirom da Mertonov model živi u log-normalnom "svijetu", $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m) \sim N(\mu, \Gamma)$ je multivarijantna s Gaussovom distribucijom i korelacijskom matricom Γ. Φ_i i ε_i su normalno distribuirani. Također, Φ_i je nezavisno od ε_i za svaku ugovornu stranu i. Dodatno, reziduali ε_i su nekorelirani[9]. Stoga su povrati r_i isključivo korelirani pomoću svojih kombiniranih faktora. Φ_i je zato *sistemski dio* od r_i.
Koeficjent determinacije R_i^2 nam kaže koliko se volatilnosti od r_i može objasniti volatilnošću od Φ_i. Kako je Φ_i kombinacija sistemskih utjecaja (industrijski i regionalni), R_i^2 kvantificira sistemski rizik ugovorne strane i.
U CreditMetrics^{TM}, kao i u KMV-Modelu, log-povrati su normalno distribuirani tako da, zbog standardizacije, imamo

$$r_i \sim N(0,1), \quad \Phi_i \sim N(0,1), \quad i \quad \varepsilon_i \sim N(0, 1 - R_i^2).$$

Sada možemo (2.4.1) zapisati kao

$$L_i = 1_{\{r_i < c_i\}} \sim B(1; \mathbb{P}[r_i < c_i]) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.4.3}$$

Primjenjujući (2.4.2), uvjet $r_i < c_i$ možemo zapisati

$$\varepsilon_i < c_i - R_i \Phi_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Sada, u oba modela standardni period je $T = 1$ godina. Ako označimo vjerojatnost da dužnik i defaultira u godinu dana s p_i, prirodno imamo $p_i = \mathbb{P}[r_i < c_i]$. S obzirom da je $r_i \sim N(0,1)$ dobivamo

$$c_i = N^{-1}[p_i] \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

gdje $N[\cdot]$ označava kumulativnu standardnu normalnu funkciju distribucije. Skaliranjem kako bismo dobili standardnu devijaciju od 1 imamo

$$\tilde{\varepsilon_i} < \frac{N^{-1}[p_i] - R_i \Phi_i}{\sqrt{1 - R_i^2}}, \qquad \tilde{\varepsilon_i} \sim N(0,1)$$

Uzimajući u obzir da je $\tilde{\varepsilon_i} \sim N(0,1)$, dobivamo sljedeću reprezentaciju jednogodišnje vjerojatnosti defaulta dužnika i uvjetno na faktor Φ_i:

[9] U slučaju Gaussian varijabli nekorelirane je jednako nezavisne.

$$p_i(\Phi_i) = N\left[\frac{N^{-1}[p_i] - R_i\Phi_i}{\sqrt{1-{R_i}^2}}\right] \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{2.4.4}$$

Jedini slučajni dio je kombinirani faktor Φ_i. Uvjetno na $\Phi_i = z$, dobivamo uvjetnu jednogodišnju vjerojatnost defaulta:

$$p_i(z) = N\left[\frac{N^{-1}[p_i] - R_i z}{\sqrt{1-{R_i}^2}}\right].$$

Kombinirano s (2.4.3) vidimo da se nalazimo u Bernoulli mixture okruženju. Možemo specificirati distribuciju gubitka portfelja s vjerojatnostima:

$$\begin{aligned} &P[L_1 = l_1, \dots, L_m = l_m] \\ &= \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m} {q_i}^{l_i}(1-q_i)^{1-l_i} d\mathbf{F}(q_1, \dots, q_m), \end{aligned}$$

gdje je funkcija distribucije $\mathbf{F}$ sada eksplicitino dana s:

$$\mathbf{F}(q_1, \dots, q_m) = N_m[{p_1}^{-1}(q_1), \dots, {p_m}^{-1}(q_m); \Gamma],$$

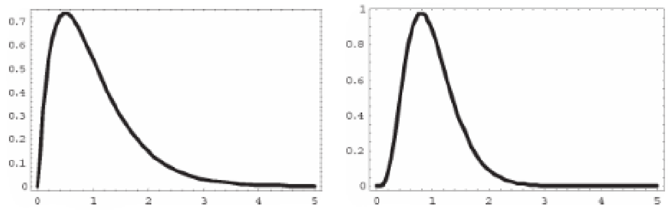
gdje $N_m[\cdot; \Gamma]$ označava kumulativnu multivarijantnu centriranu Gaussovu distribuciju s korelacijskom matricom Γ.
U slučaju da su kombinirani faktori reprezentirani vaganom sumom industrijskih i regionalnih indikatora $(\Psi_j)_{j=1,\dots,J}$:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{J} \omega_{ij}\Psi_j$$

imamo:

$$p_i(z) = N\left[\frac{N^{-1}[p_i] - R_i(\omega_{i_1}\psi_1 + \cdots + \omega_{i_J}\psi_J)}{\sqrt{1-{R_i}^2}}\right].$$

Varirajući ove realizacije možemo napraviti jednostavan *stress test scenarij* kako bismo vidjeli utjecaj promjena u industrijskim i regionalnim indikatorima na vjerojatnost defaulta dužnika.



Slika 2.1: Gamma distribucija za $(\alpha, \beta) \in \{(2, 1/2), (5, 1/5)\}$

2.4.2 CreditRisk$^+$

CreditRisk$^+$ model je razvila investicijska banka Credit Suisse Financial Products (CSFP). Ovaj model potpuno se razlikuje od CreditMetrics^{TM}. Mogli bismo reći da je tipični reprezentant grupe Poisson mixture modela. Kao mixture distribuciju CreditRisk$^+$ uzima *gamma distribuciju.* Prisjetimo se da je gamma distribucija definirana s vjerojatnosnom gustoćom:

$$\gamma_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta} x^{\alpha-1} \qquad (x \geq 0),$$

gdje $\Gamma(\cdot)$ označava[10] gamma funkciju. Prvi i drugi moment slučajne varijable Λ:

$$\mathbb{E}[\Lambda] = \alpha\beta, \qquad \mathbb{V}[\Lambda] = \alpha\beta^2;$$

vidi sliku 2.1 za ilustraciju gamma funkcije gustoće.
Umjesto faktorskog modela CreditRisk$^+$ implementira tzv. *sektorski model.* Dopušta korelaciju putem dijeljenja portfelja u homogene sektore unutar kojih je na isti način neophodno podijeliti sistemske faktore rizika. Javlja se problem procjene velikog broja korelacija, ali se taj problem rješava upotrebom multifaktorskog modela, gdje se kalkulativni zahtjevi svode na procjene korelacija među parovima indeksa vezanih za nekoliko zemalja ili industrija. Svaki sektor $s \in \{1, \ldots, m_S\}$ ima svoj intenzitet s gamma distribucijom $\Lambda^{(s)} \sim \Gamma(\alpha_s, \beta_s)$, gdje za varijable $\Lambda^{(1)}, \ldots, \Lambda^{(m_S)}$ imamo pretpostavku nezavisnosti.
Sada, pretpostavimo da imamo kreditni portfelj od m kredita danih m različitih dužnika. U sektorskom modelu CreditRisk$^+$-a za svaki i težine $\omega_{is} \geq 0$ i $\sum_{s=1}^{m_S} \omega_{is} = 1$, tako da ω_{is} odražava *osjetljivost* intenziteta defaulta dužnika

[10] Također ćemo pisati $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ za bilo koju slučajnu varijablu X s gamma distribucijom s parametrima α i β. Dodatno, koristimo Γ za korelacijsku matricu multivarijantne normalne distribucije. Međutim, iz konteksta će biti jasno trenutno značenje simbola.

i na sistemski rizik defaulta koji proizlazi iz sektora s. Rizik sektora je obuhvaćen dvama parametrima: Prvi je *očekivanje intenziteta defaulta* sektora,

$$\lambda_{(s)} = \mathbb{E}[\Lambda^{(s)}] = \alpha_s \beta_s;$$

Drugi je *volatilnost intenziteta defaulta*

$$\sigma_{(s)} = \mathbb{V}[\Lambda^{(s)}] = \alpha_s {\beta_s}^2.$$

Za svakog dužnika i imamo intenzitet defaulta Λ_i s očekivanjem $\mathbb{E}[\Lambda_i] = \lambda_i$. Parametrizacija sektora od Λ_i je sljedeća:

$$\Lambda_i = \sum_{s=1}^{m_S} \omega_{is} \lambda_i \frac{\Lambda^{(s)}}{\lambda^{(s)}} \qquad (i = 1, \ldots, m); \tag{2.4.5}$$

što pokazuje da su dva dužnika korelirana ako i samo ako postoji barem jedan sektor takav da oba dužnika imaju pozitivnu težinu s obzirom na taj sektor. Samo u takvim slučajevima dužnici imaju zajednički izvor *sistemskog rizika defaulta*. Jednadžba je konzistentna s pretpostavkom da je λ_i jednaka očekivanom intenzitetu defaulta dužnika i. Tada je rizik defaulta dužnika i modeliran s Poissonovom slučajnom varijablom ${L_i}'$ sa slučajnim intenzitetom Λ_i.

Bilo koji uvjetni intenzitet dužnika i koji proizlazi iz realizacija $\theta_1, \ldots, \theta_{mS}$ sektorskih intenziteta defaulta $\Lambda^{(1)}, \ldots, \Lambda^{(mS)}$ generira uvjetnu jednogodišnju vjerojatnost defaulta $p_i(\theta_1, \ldots, \theta_{mS})$ dužnika i postavljajući

$$\begin{aligned} p_i(\theta_1, \ldots, \theta_{mS}) &= \mathbb{P}[{L_i}' \geq 1 | \Lambda_1 = \theta_1, \ldots, \Lambda_{mS} = \theta_{mS}] \\ &= 1 - e^{-\lambda_i \sum_{s=1}^{mS} \omega_{is} \theta_s / \lambda_{(s)}}. \end{aligned}$$

Označimo s L' slučajnu varijablu koja predstavlja broj defaulta u portfelju. Već smo spomenuli da je CreditRisk$^+$ Poissonov mixture model. Eksplicitino, L' je Poissonova varijabla sa slučajnim intenzitetom $\Lambda^{(1)} + \cdots + \Lambda^{(mS)}$. Dodatno, prirodno očekujemo dobiti da je broj defaulta portfelja zbroj defaulta pojedinih dužnika i zaista (2.4.5) je konzistentno s $L' = L_1' + \cdots + L_m'$ kad definiramo očekivanje intenziteta sektora s

$$\lambda_{(s)} = \sum_{i=1}^{m} \omega_{is} \lambda_i \ ;$$

"Trik" koji CreditRisk$^+$ koristi kako bi dobili distribuciju defaulta portfelja je *analiza sektora*. Naime, ispada da je, ako znamo distribuciju defaulta u pojedinom sektoru, distribucija defaulta u portfelju skup sektorskih distribucija zbog nezavisnosti varijabli $\Lambda^{(1)}, \ldots, \Lambda^{(mS)}$. Stoga trebamo samo pronaći sektorske distribucije defaulta.

2.4.3 CreditPortfolioView CPV

CPV model razvila je konzultantska kompanija *McKinsey & Company*. Njegov je fokus na utjecaju makroekonomskih faktora na kreditni rizik portfelja. Počnimo od općenitih napomena koje se tiču *migracijskih matrica*. Migracijska matrica je stohastička matrica u $\mathbb{R}^{n\times n}$ gdje n ovisi o broju rejting klasa. Osnovno zapažanje je da vjerojatnosti migracija pokazuju slučajne fluktuacije zbog volatilnosti gospodarskog ciklusa. CPV naziva migracijsku matricu promatranu u određenoj godini *uvjetna* migracijska matrica jer je uzorkovana uvjetno na gospodarske uvjete promatrane godine. Računajući prosjek uvjetnih migracijskih matrica uzorkovanih tijekom niza godina daje nam *neuvjetovanu* migracijsku matricu koja odražava *očekivane migracijske puteve*.
Sada pretpostavimo da imamo neuvjetovanu migracijsku matricu. Označit ćemo je s $\bar{M} = (\bar{m}_{ij})$ gdje $i, j = 1, \ldots, 8$. Označimo rejting klase s R_i. Rejting klasa R_1 označava najbolju ocjenu (najbolju kvalitetu kredita), dok je R_8 default, tako da $\bar{m}_{i8} = \mathbb{P}[R_i \to R_8]$ označava vjerojatnost da dužnik s ocjenom R_i na početku godine, defaultira tijekom godine. S obzirom da je stanje defaulta apsorbirajuće imamo $\bar{m}_{8j} = 0$ za $j = 1, \ldots, 7$ i $\bar{m}_{88} = 1$. Primjetimo da ovdje $\bar{m}_{i8}$ zamjenjuje p_i koji je označavao jednogodišnju vjerojatnost defaulta dužnika i.
CPV pretpostavlja da postoji nekoliko *risk segmenata* koji drugačije reagiraju na gospodarske uvjete. Primjerice, tipični risk segmenti odnose se na grupe industrija. Pretpostavit ćemo da postoji m_S takvih grupa. Radi jednostavnosti zapisa ograničit ćemo se na jednu godinu. Za svaki segment CPV simulira uvjetovanu migracijsku matricu temeljenu na prosječnoj migracijskoj matrici $\bar{M}$ i tzv. *algoritmu pomaka* koji se sastoji od tri koraka:

1. Za svaki segment $s = 1, \ldots, m_S$ simulira se uvjetna vjerojatnost defaulta p_s. Vjerojatnost p_s je ista za sve rejting klase.

2. Tzv. *risk indeks* r_s koji predstavlja stanje gospodarstva u svijetlu segmenta s.

$$r_s = \frac{p_s}{\bar{p}_s} \qquad (s = 1, \ldots, m_S),$$

   gdje $\bar{p}_s$ označava neuvjetovanu vjerojatnost defaulta segmenta s.

3. Uvjetna migracijska matrica $M^{(s)} = (m_{ij}{}^{(s)})$ za segment s uz $(p_1, \ldots, p_{mS})$ definirana je s:

$$m_{ij}{}^{(s)} = \alpha_{ij}(r_s - 1) + \bar{m}_{ij} \qquad (s = 1, \ldots, m_S). \tag{2.4.6}$$

gdje su α_{ij} *koeficjenti pomaka.* Računajući zbroj retka "pomaknute" migracijske matrice dobivamo:

$$\sum_{j=1}^{8} m_{ij}{}^{(s)} = (r_s - 1)\sum_{j=1}^{8} \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^{8} \bar{m}_{ij}.$$

Kako bi osigurali da je matrica $M^{(s)}$ stohastička, CPV pretpostavlja $\sum_{j=1}^{8} \alpha_{ij} = 0$. Ako $m_{ij}{}^{(s)}$ ispadne negativna CPV takve vrijednosti postavlja na nulu. U takvim slučajevima potrebna je renormalizacija redaka od $M^{(s)}$ kako bi se dobila stohastička matrica. (α_{ij}) "pomaknute" matrice trebaju zadovoljavati i sljedeće uvjete:

$$\alpha_{ij} \geq 0 \quad \text{za } i < j \quad \text{i} \quad \alpha_{ij} \leq 0 \quad \text{za } i > j. \tag{2.4.7}$$

Primjenjujući uvjete (2.4.7) na formulu (2.4.6) možemo razlikovati tri različita slučaja:

- $r_s < 1$:
  U tom slučaju imamo *ekspanziju* gospodarstva i potencijal za manjim brojem smanjivanja ocjena i većim brojem povećanja ocjena.

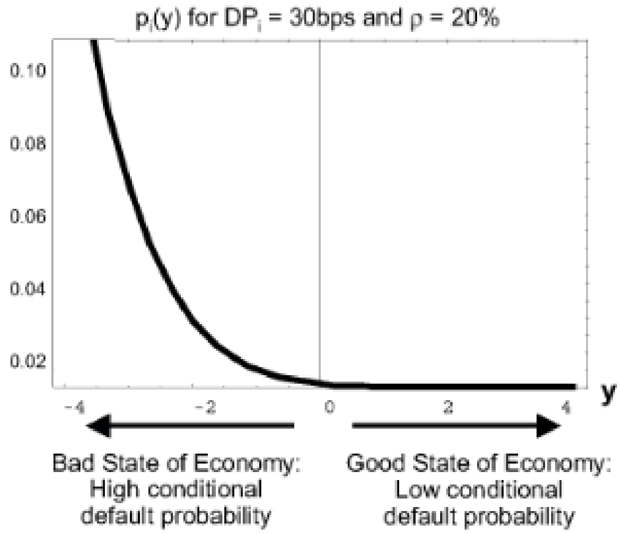
- $r_s = 1$:
  Ovo je prosječni makroekonomski scenarij. U takvim slučajevima koeficjenti pomaka nestaju u nulu tako da se vjerojatnosti $m_{ij}{}^{(s)}$ slažu s vjerojatnostima $\bar{m}_{ij}$ za sve kombinacije i i j.

- $r_s > 1$:
  Ovaj scenarij se odnosi na *recesiju* te imamo veći potencijal za smanjivanje ocjena.

3 Jednofaktorski/jednosektorski model i radni primjer

3.1 CredtMetrics^{TM}/KMV jednofaktorski model

Jednofaktorski model u kontekstu CredtMetrics^{TM} i KMV je opisan ako specificiramo (2.4.2) i (2.4.4) na slučaj samo jednog faktora zajedničkog svim



Slika 3.1: CreditMetrics^{TM}/KMV jednofaktorski model: Uvjetna vjerojatnost defaulta kao funkcija realizacije $Y = y$.

ugovornim stranama, time pretpostavljajući da je korelacija aktive između dužnika uniformna. Eksplicitno, to znači da su kombinirani faktori Φ_i za sve dužnike jednaki jednom faktoru kojeg obično označimo s $Y \sim N(0,1)$. K tome, (2.4.2) sad možemo zapisati[11]

$$r_i = \sqrt{\varrho}Y + \sqrt{1-\varrho}Z_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

gdje $\sqrt{1-\varrho}Z_i$, pri čemu $Z_i \sim N(0,1)$, preuzima ulogu reziduala ε_i i ϱ je uniformna korelacija aktive između log-povrata i $r_i \sim N(0,1)$. U jednofaktorskim modelima uniformna korelacija aktive ϱ je jednaka koeficjentu determinacije. Kao prije, pretpostavljamo da reziduali Z_i čine nezavisnu familiju i da su nezavisni od faktora Y.
Uz ove pretpostavke, jednadžba (2.4.4) sada postaje:

$$p_i(Y) = N\left[\frac{N^{-1}[p_i] - \sqrt{\varrho}Y}{\sqrt{1-\varrho}}\right] \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{3.1.1}$$

Propozicija 3.1. U jednofaktorskom modelu s uniformnom korelacijom aktive ϱ i statistikom gubitka $(L_1, \ldots, L_m)$ s $L_i \sim B(1; p_i(Y))$, gdje je p_i definirana s (3.1.1), zajednička vjerojatnost defaulta dva dužnika je dana s bivarijantnim normalnim integralom

[11]Općenitije, možemo pisati ϱ_i umjesto ϱ. Također, $\sqrt{\varrho}$ ovdje zamjenjuje R_i u (2.4.2).

$$JDP_{ij} = \mathbb{P}[L_i = 1, L_j = 1] = N_2[N^{-1}[p_i], N^{-1}[p_j]; \varrho],$$

gdje $N_2[\cdot, \cdot; \varrho]$ označava kumulativnu bivarijantnu normalnu funkciju distribucije s korelacijom ϱ.

Dokaz. Zajednička vjerojatnost defaulta se može izračunati kao

$$\mathbb{P}[L_i = 1, L_j = 1] = \mathbb{P}(r_i < N^{-1}[p_i], r_j < N^{-1}[p_j]).$$

Po konstrukciji, korelacija između log-povrata vrijednosti imovine $r_i, r_j \sim N(0,1)$ je ϱ što dokazuje propoziciju. □

Sada želimo dokazati da s rastućim portfeljem veličine m distribucija gubitaka portfelja konvergira graničnoj distribuciji. Označimo s

$$E_i = \mathrm{EAD}_i \times \mathrm{LGD}_i$$

izloženost u slučaju da dužnik defaultira. LGD vrijednosti su nam slučajne, a EAD vrijednosti determinističke (odnosno fiksne). Također, nećemo isključiti da, na neki način, LGD vrijednosti ovise o stanju u gospodarstvu Y. Promatramo Bernoulli mixture model takav da su ugovorne strane modelirane slučajnim varijablama

$$E_i L_i, \qquad L_i \sim B(1; p_i(Y)), \qquad Y \sim N(0,1), \tag{3.1.2}$$

$$((LGD_i \times L_i)|_{Y=y}))_{i=1,\dots,m} \qquad \textit{nezavisne},$$

Posljednji uvjet u (3.1.2) znači da pretpostavljamo uvjetnu nezavisnost gubitaka umjesto nezavisnost indikatora defaulta. U nastavku ćemo pisati

$$\eta_i = \mathrm{LGD}_i.$$

Za portfelj s m dužnika[12] gubitak portfelja u odnosu na ukupnu izloženost dan je s

$$L = L^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \eta_i L_i \quad \text{gdje} \quad \omega_i = \frac{\mathrm{EAD}_i}{\sum_{j=1}^{m} \mathrm{EAD}_j}.$$

[12]Ovdje ćemo napraviti jednostavnu pretpostavku da je broj kredita jednak broju dužnika. To možemo postići agregacijom različitih kredita jednog dužnika u jedan kredit. Obično su DP, EAD i LGD takvog kredita *exposure-weighted* prosjek.

Pretpostavka 3.2. Pretpostavimo beskonačan broj kredita s izloženosti EAD_i. Pretpostavljamo da vrijedi sljedeće:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{EAD}_i \quad \uparrow \quad \infty \quad (m \to \infty),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{EAD}_m}{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{EAD}_i} \right)^2 < \infty$$

Prvi uvjet nam kaže da ako raste broj dužnika ukupna izloženost portfelja strogo raste u beskonačno. Drugi uvjet implicira da se porastom broja dužnika težine izloženosti vrlo brzo smanjuju. Sveukupno, ovo osigurava da udio izloženosti svakog kredita teži u nulu.

Primjer 3.3. Uz pretpostavku $a \leq \mathrm{EAD}_i \leq b$ za neke $0 < a \geq b$ i sve i dobivamo

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{EAD}_i \; \geq \; ma \quad \uparrow \quad \infty \quad (m \to \infty)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{EAD}_m}{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{EAD}_i} \right)^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^2}{m^2 a^2} = \frac{b^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty,$$

tako da je pretpostavka (3.2) zadovoljena.

Sada možemo dokazati sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.4. Pretpostavka (3.2) je dovoljna da zaključimo da su u limesu postotni gubitak portfelja $L^{(m)}$ i uvjetno očekivanje $\mathbb{E}[L^{(m)}|Y]$ gotovo sigurno jednaki

$$\mathbb{P} \left[\lim_{m \to \infty} \left(L^{(m)} - \mathbb{E}[L^{(m)}|Y] \right) = 0 \right] = 1$$

Dokaz. Fiksirajmo $y \in \mathbb{R}$. Definiramo uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}_y$ s

$$\mathbb{P}_y(\cdot) = P[\cdot \; |Y = y].$$

Pogledajmo slučajnu varijablu

$$X_k = \mathrm{EAD}_k(\eta_k L_k - \mathbb{E}[\eta_k L_k|Y]).$$

S obzirom na $\mathbb{P}_y$, $(X_k)_{k \geq 1}$ su nezavisne. Sada definiramo $\tau_m = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{EAD}_i$ tako da $(\tau_m)_{m \geq 1}$ pozitivan, strogo rastući niz. Ako bismo mogli dokazati

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{\tau_k}^2} \mathbb{E}[{X_k}^2] < \infty$$

tada bi iz jakog zakona velikih brojeva slijedilo

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\tau_m} \sum_{k=1}^{m} X_k = 0 \qquad \mathbb{P}_y - g.s.$$

Iz pretpostavke (3.2) dobivamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{\tau_k}^2} \mathbb{E}[{X_k}^2] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \times {\mathrm{EAD}_k}^2}{{\tau_k}^2} < \infty$$

zbog uniformne ograničenosti od $(\eta_k L_k - \mathbb{E}[\eta_k L_k|Y])$. Sada možemo pisati

$$\mathbb{P}\left[\lim_{m\to\infty} (L^{(m)} - \mathbb{E}[L^{(m)}|Y]) = 0|Y = y\right] = 1 \qquad \text{za svaki } y \in \mathbb{R}.$$

Ali onda gotovo sigurno imamo konvergenciju

$$\mathbb{P}\left[\lim_{m\to\infty} (L^{(m)} - \mathbb{E}[L^{(m)}|Y]) = 0\right] =$$

$$= \int \mathbb{P}\left[\lim_{m\to\infty} (L^{(m)} - \mathbb{E}[L^{(m)}|Y]) = 0|Y = y\right] dP_Y(y) = 1$$

□

Korolar 3.5. U slučaju da $(\eta_i L_i)_{i\geq 1}$ nisu samo uvjetno nezavisne nego i jednako distribuirane, možemo preoblikovati propoziciju 3.4 na sljedeći način: Postoji izmjeriva funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da za $m \to \infty$ gubitak portfelja $L^{(m)}$ konvergira gotovo sigurno prema $p \circ Y$. Dodatno, $p \circ Y$ je jednako $\mathbb{E}[\eta_1 L_1|Y]$ g.s.

Dokaz. Kako je uvjetno očekivanje $\mathbb{E}[L^{(m)}|Y]$ po definiciji $\sigma(Y)$-izmjerivo, pri čemu $\sigma(Y)$ označava σ-algebru generiranu s Y, postoji izmjeriva funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $\mathbb{E}[L^{(m)}|Y] = p \circ Y$. Uz propoziciju (3.4) i pretpostavku da su svi gubitci jednako distribuirani slijedi tvrdnja. □

Važan zaključak koji proizlazi iz gornjih rezultata je taj da slučajna varijabla ograničenja gubitka $L^{(m)}$ ovisi jedinstveno o slučajnosti faktora Y. Povečavajući broj dužnika u portfelju, specifični rizik je maknut tako da u limesu u portfelju ostaje samo sistemski rizik iz volatilnosti faktora Y.

Sada možemo primjeniti naše rezultate na *uniformne portfelje*. Neka $p_i = p$ za sve dužnike i, tako da su ispunjene pretpostavke propozicije (3.4). U CreditMetrics^{TM}, odnosno KMV, faktor Y i reziduali $Z_1, Z_2, \dots$ imaju standardnu normalnu distribuciju. Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo konstantne LGD vrijednosti ($\eta_i = 100\%$). Funkcija p iz korolara (3.5) može se eksplicitino izvesti primjenjujući jednadžbu (3.1.1) i uzimajući u obzir da smo u okviru Bernoulli modela

$$\mathbb{E}[L^{(m)}|Y] = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \mathbb{E}[L_i|Y] = N\left[\frac{N^{-1}[p] - \sqrt{\varrho}Y}{\sqrt{1-\varrho}}\right] =: p(Y),$$

tako da iz propozicije slijedi

$$L^{(m)} \xrightarrow{m\to\infty} p(Y) = N\left[\frac{N^{-1}[p] - \sqrt{\varrho}Y}{\sqrt{1-\varrho}}\right] \text{ g.s.} \tag{3.1.3}$$

Za portfelj s dovoljno velikim m koji zadovoljava pretpostavku (3.2), postotna stopa defaultiranih kredita uz stanje gospodarstva $Y = y$ je aproksimativno jednaka uvjetnoj vjerojatnosti defaulta $p(y)$.
Sada želimo izvesti kumulativnu funkciju distribucije i funkciju gustoće varijable ograničenja gubitka $p(Y), Y \sim N(0,1)$, s $p(\cdot)$ kao u (3.1.3). Obilježimo postotak defaulta u tzv. *beskonačno fino granuliranom* portfelju s L. Tada imamo za svaki $0 \le x \le 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[L \le x] &= \mathbb{P}[p(Y) \le x] \\ &= \mathbb{P}\left[-Y \le \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(N^{-1}[x]\sqrt{1-\varrho} - N^{-1}[p]\right)\right] \\ &= N\left[\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(N^{-1}[x]\sqrt{1-\varrho} - N^{-1}[p]\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

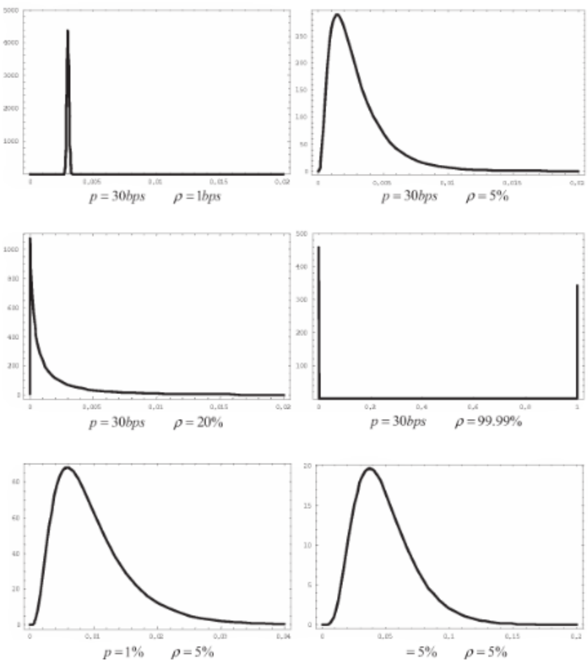
U nastavku ćemo ovu funkciju distribucije označiti s

$$F_{p,\varrho}(x) = \mathbb{P}[L \le x] \qquad (x \in [0,1]).$$

Odgovarajuću funkciju gustoće možemo izvesti računajući $F_{p,\varrho}(x)$

$$f_{p,\varrho}(x) = \frac{\partial F_{p,\varrho}(x)}{\partial x} = \sqrt{\frac{1-\varrho}{\varrho}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2\varrho}\left((1-2\varrho)(N^{-1}[x])^2 - 2\sqrt{1-\varrho}N^{-1}[x]N^{-1}[p] + (N^{-1}[p])^2\right)\right)$$



Slika 3.2: Funkcija gustoće $f_{p,\varrho}$ za različite kombinacije od piϱ.

$$= \sqrt{\frac{1-\varrho}{\varrho}} \exp\left(\frac{1}{2}\left(N^{-1}[x]\right)^2 - \frac{1}{2\varrho}\left(N^{-1}[p] - \sqrt{1-\varrho}N^{-1}[x]\right)^2\right).$$

Slika (3.2) prikazuje funkcije gustoće $f_{p,\varrho}$ za različite vrijednosti od p i ϱ. Možemo naslutiti da bi trebalo postojati neko razumno ograničenje za $f_{p,\varrho}$. Zaista, možemo lako dokazati sljedeću propoziciju:

Propozicija 3.6. Postoje četiri krajnja slučaja s obzirom na krajnje vrijednosti parametara p i ϱ.

1. $\varrho = 0$:
   Ovo je slučaj u kojem nemamo korelacije, s varijablama gubitka

   $$L_i = \mathbf{1}_{\{r_i = Z_i < N^{-1}[p]\}} \sim B(1;p),$$

   U ovom slučaju gubitak portfelja $\sum L_i$ ima binomnu distribuciju, $\sum_{i=1}^{m} L_i \sim B(m;mp)$ i postotni gubitak portfelja L_m konvergira gotovo sigurno po argumentima analogno propoziciji 3.4 prema p. Stoga je $f_{p,0}$ funkcija gustoće[13] degenerirane distribucije[14] koncentrirane u p. Ovo je prikazano na prvom grafu na slici 3.2 gdje gotovo iščezavajuća korelacija ($\varrho = 1$ bps) daje $f_{p,\varrho}$.

2. $\varrho = \mathbf{1}$:
   U ovom slučaju imamo savršenu korelaciju između svih varijabli gubitka u portfelju. Tada možemo zamijeniti L_m s $L_1 \sim B(1;p)$ koja više nije zavisna od m. Stoga je granični ($m \to \infty$) postotni gubitak portfelja L također Bernoulli $B(1;p)$, tako da vrijedi $\mathbb{P}[L = 1] = p$ i $= \mathbb{P}[L = 0] = 1 - p$. Slučaj gotovo savršene korelacije vidimo na četvrtom grafu ($p = 30$ bps, $\varrho = 99.99\%$).

3. $p = 0$:
   Svi dužnici gotovo sigurno prežive, tako da je $\mathbb{P}[L = 0] = 1$.

4. $p = 1$:
   Svi dužnici gotovo sigurno defaultiraju, tako da je $\mathbb{P}[L = 1] = 1$.

   Dokaz se može pronaći u [1, Propozicija 2.5.7]

Za *beskonačno fino granulirane* portfelje je vrlo lako izračunati kvantile za bilo koju razinu pouzdanosti.

Propozicija 3.7. Za bilo koju razinu pouzdanosti α, α-kvantil $q_\alpha(L)$ slučajne varijable $L \sim F_{p,\varrho}$ dan je s

$$q_\alpha(L) = p\left(-q_\alpha(Y)\right) = N\left[\frac{N^{-1}[p] + \sqrt{\varrho}\, q_\alpha(Y)}{\sqrt{1-\varrho}}\right]$$

gdje je $Y \sim N(0,1)$ i $q_\alpha(Y)$ označava α-kvantil standardne normalne distribucije.

Dokaz. Funkcija $p(\cdot)$ je strogo padajuća funkcija, kao što je prikazano na slici 2.1.2, iz čega slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[L \le p(-q_\alpha(Y))\right] &= \mathbb{P}\left[p(Y) \le p(-q_\alpha(Y))\right] \\ &= \mathbb{P}\left[Y \ge -q_\alpha(Y)\right] = \mathbb{P}\left[-Y \le q_\alpha(Y)\right],\end{aligned}$$

uzimajući u obzir (3.1.4). Slijedi tvrdnja. □

Prema definiciji, neočekivani gubitak UL je standardna devijacija distribucije gubitka portfelja. U sljedećoj propoziciji ćemo izračunati UL *beskonačno fino granuliranog* portfelja.

[13] Točnije, delta distribucija.
[14] Preciznije, govorimo o Diracovoj mjeri.

Propozicija 3.8. Prvi i drugi moment slučajne varijable $L \sim F_{p,\varrho}$ su dani s

$$\mathbb{E}[L] = p, \quad \text{i} \quad \mathbb{V}[L] = N_2\left[N^{-1}[p], N^{-1}[p]; \varrho\right] - p^2.$$

Dokaz. Da je prvi moment jednak p slijedi iz konstrukcije od $F_{p,\varrho}$. Što se tiče drugog momenta, pišemo $\mathbb{V}[L] = \mathbb{E}[L^2] - \mathbb{E}[L]^2$. Već znamo da je $\mathbb{E}[L]^2 = p^2$. Stoga jedino preostaje pokazati da je $\mathbb{E}[L^2] = N_2\left[N^{-1}[p], N^{-1}[p]\right]$.

Označimo s $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ dvije nezavisne, standardne normalne slučajne varijable, nezavisne od slučajne varijable

$$X = \frac{N^{-1}[p] - \sqrt{\varrho}Y}{\sqrt{1-\varrho}} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{s} \quad \mu = \frac{N^{-1}[p]}{\sqrt{1-\varrho}}, \quad \sigma^2 = \frac{\varrho}{1-\varrho}.$$

Za funkciju gustoće od X pišemo g_{μ,σ^2}. Tada možemo $\mathbb{E}[L^2]$ zapisati kao:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L^2] = \mathbb{E}[p(Y)^2] &= \mathbb{E}[N(X)^2] \\
= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[X_1 \leq X | X = x]&\mathbb{P}[X_2 \leq X | X = x] dg_{\mu,\sigma^2}(x) \\
= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}[X_1 \leq X,& X_2 \leq X | X = x] dg_{\mu,\sigma^2}(x) \\
= \mathbb{P}[X_1 - X &\leq 0, X_2 - X \leq 0].
\end{aligned}$$

Varijable $X_i - X$ su normalno distribuirane s očekivanjem i varijancom

$$\mathbb{E}[X_i - X] = -\frac{N^{-1}[p]}{\sqrt{1-\varrho}} \quad \text{i} \quad \mathbb{V}[X_i - X] = 1 + \frac{\varrho}{1-\varrho}.$$

Korelacija između $X_1 - X$ i $X_2 - X$ je jednaka ϱ. Standardizacijom od $X_1 - X$ i $X_2 - X$ zaključujemo $\mathbb{E}[L^2] = N_2[N^{-1}[p], N^{-1}[p]; \varrho]$. $\square$

Uz uniformnu jednogodišnju prosječnu vjerojatnost deafulta p i uniformnu korelaciju aktive ϱ, tablice Tablica 1 i Tablica 2 prikazuju ekonomski kapital (EC) s obzirom na razine pouzdanosti $\alpha = 99,5\%$ i $\alpha = 99,98\%$ za *beskonačno fino granulirani* portfelj (opisan funkcijom distribucije $F_{p,\varrho}$), time pretpostavljajući LGD= 100%. Analogno, Tablica 3 prikazuje neočekivani gubitak UL za par (p, ϱ).
Na slici 3.3 možemo vidjeti osjetljivost EC-a na odabrane razine pouzdanosti. Vidimo da, za visoke razine pouzdanosti, svaki bazni poen za koji se poveća α ima veliki utjecaj na EC portfelja.

99.50%	ρ in %							
p in bps	1%	5%	10%	15%	20%	30%	40%	50%
10	0.12%	0.39%	0.72%	1.06%	1.41%	2.14%	2.86%	3.54%
20	0.22%	0.71%	1.28%	1.87%	2.48%	3.77%	5.14%	6.55%
30	0.32%	0.99%	1.78%	2.58%	3.42%	5.20%	7.13%	9.21%
40	0.41%	1.26%	2.24%	3.24%	4.28%	6.50%	8.93%	11.60%
50	0.49%	1.51%	2.67%	3.85%	5.07%	7.69%	10.58%	13.80%
60	0.57%	1.75%	3.08%	4.42%	5.82%	8.80%	12.11%	15.83%
70	0.65%	1.98%	3.47%	4.97%	6.52%	9.85%	13.55%	17.73%
80	0.73%	2.20%	3.84%	5.49%	7.20%	10.84%	14.90%	19.50%
90	0.81%	2.42%	4.20%	5.99%	7.84%	11.79%	16.18%	21.18%
100	0.88%	2.63%	4.55%	6.48%	8.46%	12.69%	17.40%	22.76%
150	1.23%	3.60%	6.15%	8.67%	11.25%	16.71%	22.75%	29.60%
200	1.55%	4.47%	7.57%	10.60%	13.67%	20.11%	27.18%	35.12%
250	1.85%	5.28%	8.86%	12.33%	15.82%	23.08%	30.96%	39.73%
300	2.14%	6.03%	10.05%	13.90%	17.76%	25.72%	34.26%	43.65%
350	2.41%	6.74%	11.16%	15.36%	19.53%	28.08%	37.17%	47.03%
400	2.67%	7.41%	12.19%	16.70%	21.16%	30.23%	39.76%	49.98%
450	2.92%	8.04%	13.16%	17.96%	22.67%	32.19%	42.09%	52.57%
500	3.16%	8.64%	14.07%	19.13%	24.08%	33.99%	44.19%	54.86%
600	3.62%	9.76%	15.76%	21.28%	26.62%	37.17%	47.82%	58.69%
700	4.04%	10.80%	17.29%	23.20%	28.87%	39.91%	50.84%	61.75%
800	4.44%	11.75%	18.68%	24.93%	30.86%	42.28%	53.38%	64.20%

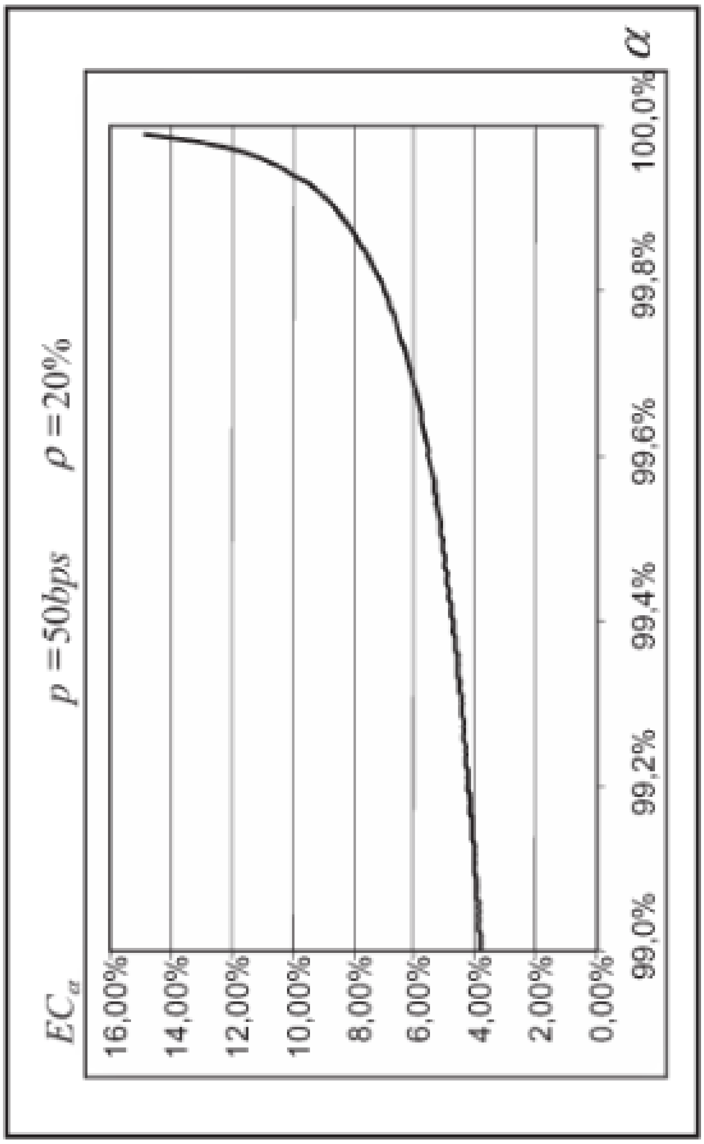
Tablica 1: Ekonomski kapital EC_α za *beskonačno fino granulirani* portfelj (gubitak portfelja $L \sim F_{p,\varrho}$, za $\alpha = 99.5\%$).

99.98%	ρ in %							
p in bps	1%	5%	10%	15%	20%	30%	40%	50%
10	0.20%	0.82%	1.79%	3.01%	4.50%	8.34%	13.49%	20.22%
20	0.36%	1.41%	2.99%	4.91%	7.18%	12.88%	20.27%	29.60%
30	0.51%	1.94%	4.01%	6.47%	9.35%	16.39%	25.27%	36.18%
40	0.65%	2.41%	4.91%	7.84%	11.20%	19.30%	29.29%	41.27%
50	0.78%	2.86%	5.74%	9.07%	12.85%	21.83%	32.68%	45.41%
60	0.90%	3.28%	6.51%	10.19%	14.35%	24.07%	35.62%	48.90%
70	1.03%	3.67%	7.23%	11.24%	15.72%	26.08%	38.21%	51.89%
80	1.14%	4.05%	7.90%	12.22%	17.00%	27.92%	40.52%	54.51%
90	1.26%	4.42%	8.55%	13.14%	18.19%	29.61%	42.61%	56.82%
100	1.37%	4.77%	9.17%	14.01%	19.30%	31.17%	44.51%	58.88%
150	1.90%	6.36%	11.91%	17.81%	24.09%	37.62%	52.05%	66.63%
200	2.38%	7.77%	14.24%	20.95%	27.94%	42.55%	57.45%	71.75%
250	2.83%	9.03%	16.28%	23.65%	31.18%	46.50%	61.57%	75.39%
300	3.25%	10.19%	18.11%	26.02%	33.97%	49.78%	64.81%	78.07%
350	3.64%	11.26%	19.77%	28.13%	36.41%	52.54%	67.43%	80.09%
400	4.02%	12.26%	21.29%	30.03%	38.57%	54.91%	69.58%	81.64%
450	4.38%	13.19%	22.69%	31.75%	40.51%	56.96%	71.36%	82.84%
500	4.73%	14.07%	23.99%	33.33%	42.25%	58.74%	72.85%	83.76%
600	5.38%	15.68%	26.32%	36.10%	45.27%	61.70%	75.15%	85.01%
700	5.98%	17.14%	28.36%	38.48%	47.78%	64.01%	76.78%	85.69%
800	6.54%	18.45%	30.17%	40.53%	49.89%	65.83%	77.92%	85.98%

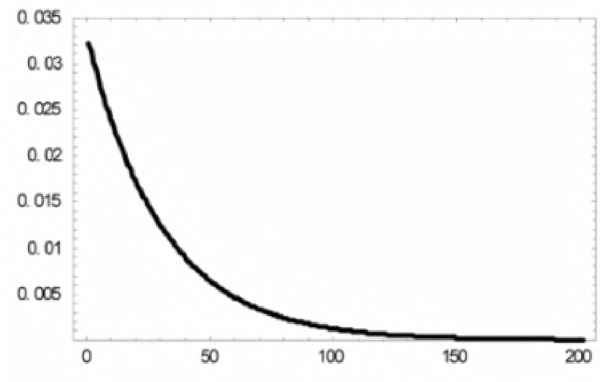
Tablica 2: Ekonomski kapital EC_α za *beskonačno fino granulirani* portfelj (gubitak portfelja $L \sim F_{p,\varrho}$, za $\alpha = 99.98\%$).

	ρ in %							
p in bps	1%	5%	10%	15%	20%	30%	40%	50%
10	0.03%	0.08%	0.14%	0.19%	0.24%	0.37%	0.53%	0.73%
20	0.06%	0.16%	0.25%	0.33%	0.43%	0.63%	0.88%	1.17%
30	0.09%	0.22%	0.35%	0.47%	0.59%	0.86%	1.18%	1.54%
40	0.12%	0.29%	0.45%	0.59%	0.75%	1.07%	1.44%	1.87%
50	0.15%	0.35%	0.54%	0.71%	0.89%	1.27%	1.69%	2.17%
60	0.17%	0.41%	0.63%	0.83%	1.03%	1.46%	1.93%	2.45%
70	0.20%	0.47%	0.72%	0.94%	1.17%	1.64%	2.15%	2.72%
80	0.22%	0.53%	0.80%	1.05%	1.30%	1.81%	2.36%	2.98%
90	0.25%	0.58%	0.88%	1.15%	1.42%	1.98%	2.57%	3.22%
100	0.27%	0.64%	0.96%	1.26%	1.55%	2.14%	2.77%	3.46%
150	0.38%	0.90%	1.34%	1.74%	2.12%	2.88%	3.68%	4.52%
200	0.49%	1.14%	1.70%	2.18%	2.65%	3.56%	4.49%	5.47%
250	0.59%	1.37%	2.03%	2.60%	3.14%	4.18%	5.23%	6.32%
300	0.69%	1.59%	2.34%	2.99%	3.60%	4.76%	5.92%	7.11%
350	0.78%	1.80%	2.65%	3.37%	4.04%	5.31%	6.57%	7.85%
400	0.87%	2.00%	2.94%	3.73%	4.45%	5.83%	7.18%	8.55%
450	0.95%	2.20%	3.21%	4.07%	4.85%	6.33%	7.77%	9.21%
500	1.04%	2.38%	3.48%	4.40%	5.24%	6.81%	8.32%	9.84%
600	1.20%	2.74%	3.99%	5.03%	5.97%	7.71%	9.37%	11.02%
700	1.35%	3.08%	4.48%	5.62%	6.65%	8.55%	10.34%	12.11%
800	1.49%	3.41%	4.93%	6.18%	7.30%	9.34%	11.25%	13.13%

Tablica 3: Neočekivani gubitak UL za *beskonačno fino granulirani* portfelj (gubitak portfelja $L \sim F_{p,\varrho}$)



Slika 3.3: Ekonomski kapital EC_α u ovisnosti o razini pouzdanosti α.



Slika 3.4: Negativna binomna distribucija s parametrima $(\alpha, \beta) = (1, 30)$.

Spomenimo još tzv.*multiplikator kapitala* (CM_α). Definira se kao EC s obzirom na razinu pouzdanosti α u jedinicama od UL (odnosno u jedinicama standardne devijacije portfelja). Za CM se ponekad pretpostavlja da je konstanta, čak i kad se povećava portfelj novim ugovorima. Doprinos novog ugovora ukupnom EC je tada dan multiplikatorom od CM. Općenito, CM jako ovisi o odabranoj razini pouzdanosti iz definicije EC-a.
Primjerice, za $p = 30$ bps (otprilike BBB-rejting) i $\varrho = 20\%$ (Basel II prijedlog) (zaokruženi) CM portfelja s varijablom gubitka $L \sim F_{p,\varrho}$ je dan s $\mathrm{CM}_{99\%} \approx 4\%$, $\mathrm{CM}_{99,5\%} \approx 6\%$, $\mathrm{CM}_{99,9\%} \approx 10\%$ i $\mathrm{CM}_{99,98\%} \approx 16\%$ (u ovom slučaju imamo UL od 59 bps).

3.2 CreditRisk^+ jednosektorski model

Ako pretpostavimo beskonačno mnogo dužnika i samo jedan sektor dobivamo situaciju usporedivu s modelom uniformnog portfelja CreditMetrics^{TM}-a i KMV-a.
Uz te pretpostavke, gubitak portfelja ima negativnu binomnu distribuciju $NB(\alpha, \beta)$ zbog slučajnog intenziteta koji ima gamma distribuciju. Ako označimo gubitak portfelja s $L' \sim NB(\alpha, \beta)$, distribucija je određena s

$$\mathbb{P}[L' = n] = \binom{n + \alpha - 1}{n} \left(1 - \frac{\beta}{1 + \beta}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{1 + \beta}\right)^{n},$$

gdje su α i β *sektor parametri* sektora. Očekivanje i varijanca od L' su:

$$\mathbb{E}[L'] = \alpha\beta \quad i \quad \mathbb{V}[L'] = \alpha\beta(1 + \beta), \tag{3.2.1}$$

Slika (3.4) prikazuje oblik funkcije vjerojatnosti negativne binomne distribucije, s parametrima $\alpha = 1$ i $\beta = 30$. Očekivani gubitak u portfelju je

$$\mathrm{EL} = \mathbb{E}[L'] = 1 \times 30 = 30,$$

i neočekivani gubitak (volatilnost gubitka portfelja) je

$$\mathrm{UL} = \sqrt{\mathbb{V}[L']} = \sqrt{1 \times 30 \times (1 + 30)} = 30.5.$$

3.3 Usporedba jednofaktorskog i jednosektorskog modela

Usporedit ćemo Bernoullijev i Poissonov mixture model pomoću tipičnog primjera.
Kao predstavnika Bernoulli mixture modela uzet ćemo slučajnu varijablu $L \sim F_{p,\varrho}$ koja opisuje postotni gubitak *beskonačno fino granuliranog* portfelja s uniformnom vjerojatnosti defaulta p i uniformnom korelacijom aktive ϱ.
Jednosektorski CreditRisk$^+$ će nam poslužiti kao predstavnik Poissonovog mixture modela. Prirodni način za kalibraciju modela na zajedničkoj osnovi je *podudaranje momenata*. Jedan problem s kojim se suočavamo ovdje je taj da L ima vrijednosti u jediničnom intervalu, a L' generira slučajne cijele brojeve. Rješavamo ovaj problem fiksiranjem velikog broja m, recimo $20,000$ tako da je vjerojatnost $\mathbb{P}[L' > m]$ zanemarivo mala, i transformiranjem L' u

$$\tilde{L}' = \frac{L'}{m}.$$

Metoda *podudaranje momenata* je bazirana na uvjetima

$$\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[\tilde{L}'] \quad \text{i} \quad \mathbb{V}[L] = \mathbb{V}[\tilde{L}'].$$

Time uvijek krećemo od nekih p i ϱ koji specificiraju distribuciju od L. Tada postavljamo

$$\mathbb{E}[\tilde{L}'] = p, \quad \mathbb{V}[\tilde{L}'] = N_2\left[N^{-1}[p], N^{-1}[p]; \varrho\right] - p^2,$$

primjenjujući propoziciju (3.8). Kao zadnji korak riješit ćemo (3.2.1) za α i β. Uvijek imamo

$$\alpha = \frac{m \times \mathbb{E}[\tilde{L}']^2}{m \times \mathbb{V}[\tilde{L}'] - \mathbb{E}[\tilde{L}']}, \quad \beta = \frac{m \times \mathbb{V}[\tilde{L}'] - \mathbb{E}[\tilde{L}']}{\mathbb{E}[\tilde{L}']}, \tag{3.3.1}$$

portfolio	p	rho	sigma
1	0.01%	10%	0.02%
2	0.01%	20%	0.04%
3	0.01%	30%	0.06%
4	0.30%	10%	0.35%
5	0.30%	20%	0.59%
6	0.30%	30%	0.86%
7	1.00%	10%	0.96%
8	1.00%	20%	1.55%
9	1.00%	30%	2.14%

portfolio	alpha	beta	Q_[99.98%] (KMV)	Q_[99.98%] (CR+)
1	0.37	5.38	0.31%	0.19%
2	0.08	25.35	0.85%	0.59%
3	0.03	78.17	1.67%	1.42%
4	0.75	80.25	4.30%	3.14%
5	0.26	232.99	9.65%	6.84%
6	0.12	496.04	16.69%	12.20%
7	1.09	184.32	10.17%	8.11%
8	0.42	476.85	20.30%	15.76%
9	0.22	911.68	32.17%	25.69%

Tablica 4: Usporedba Bernoullijevog i Poissonovog *mixture* modela pomoću jednofaktorskog, odnosno jednosektorskog modela.

primjerice, za $p = 30$ bps, $\varrho = 20\%$ i $m = 20,000$ primjenjujemo 3.8 za

$$\mathbb{V}[L] = N_2\left[N^{-1}[0.003], N^{-1}[0.003]; 0.2\right] - 0.003^2 = 0.000035095.$$

Dobivamo neočekivani gubitak UL= 59 bps. Primjenjujući formule (3.3.1), dobivamo

$$\alpha = 0.26 \quad \text{i} \quad \beta = 232.99.$$

U tablici Tablica 4 uspoređeni su kvantili za visoku razinu pouzdanosti jednofaktorskog, odnosno jednosektorskog modela, s različitim parametrima. Ispada da s Bernoullijevim mixture modelom uvijek imamo teže repove nego s Poissonovim mixture modelom time potvrđujući prije dobivene rezultate.

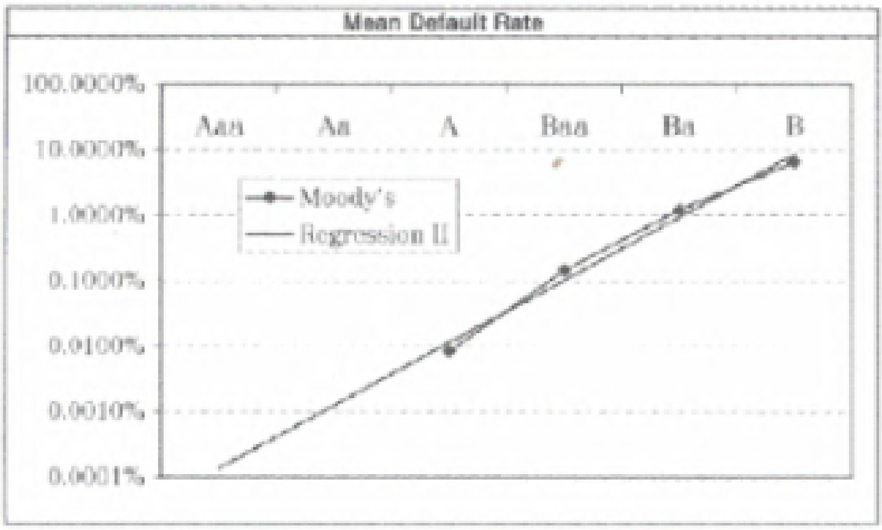
3.4 Radni primjer

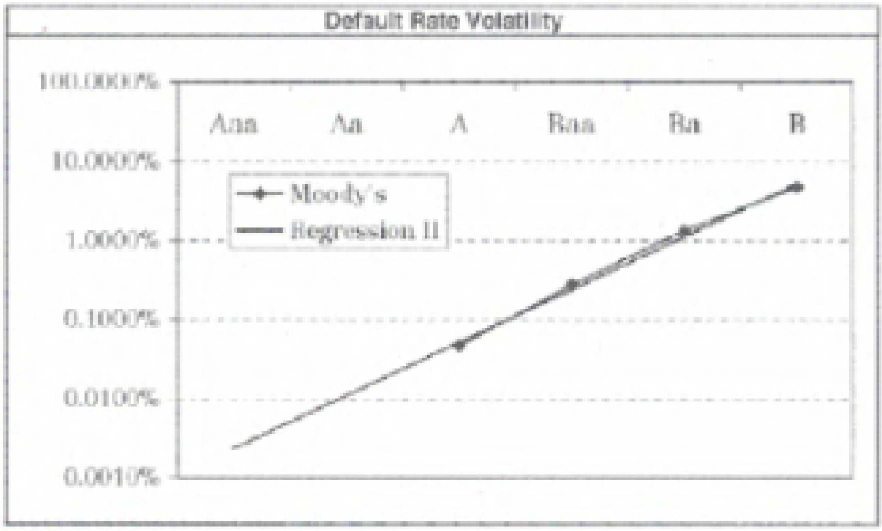
Zaključujemo s radnim primjerom procjene korelacija aktive iz povijesnih podataka učestalosti defaulta. U tablici Tablica 5 možemo vidjeti jednogodišnje stope defaulta po godinama. Možemo jasno vidjeti da su promatrane frekvencije defaulta prilično volatilne. Prirodna interpretacija takve volatilnosti je postojanje *gospodarskog ciklusa.*

Rating	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	
Aaa	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
Aa	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
Baa	0.27%	0.00%	0.00%	0.45%	0.00%	0.00%	0.00%	0.28%	0.00%	0.00%	
Ba	4.12%	0.42%	0.00%	0.00%	0.00%	1.02%	1.01%	0.52%	1.08%	0.49%	
B	22.78%	3.85%	7.14%	3.77%	10.00%	5.97%	0.00%	3.28%	5.41%	0.00%	
	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	
Aaa	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
Aa	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.61%	
A	0.00%	0.00%	0.26%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
Baa	0.00%	0.00%	0.31%	0.00%	0.36%	0.00%	1.33%	0.00%	0.00%	0.60%	
Ba	0.00%	0.00%	2.72%	0.91%	0.83%	1.75%	2.04%	2.71%	1.24%	2.98%	
B	4.94%	4.49%	2.41%	6.31%	6.72%	8.22%	11.80%	6.25%	6.04%	9.21%	
	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Aaa	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Aa	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Baa	0.00%	0.28%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.12%	0.10%	0.38%
Ba	3.34%	5.30%	0.30%	0.55%	0.24%	0.67%	0.00%	0.19%	0.61%	1.14%	1.05%
B	16.16%	14.71%	9.03%	5.79%	3.82%	4.80%	1.44%	2.11%	4.26%	5.88%	5.14%

Tablica 5: Povijesne frekvencije defaulta od 1970. do 2000. godine prema Moody agenciji.

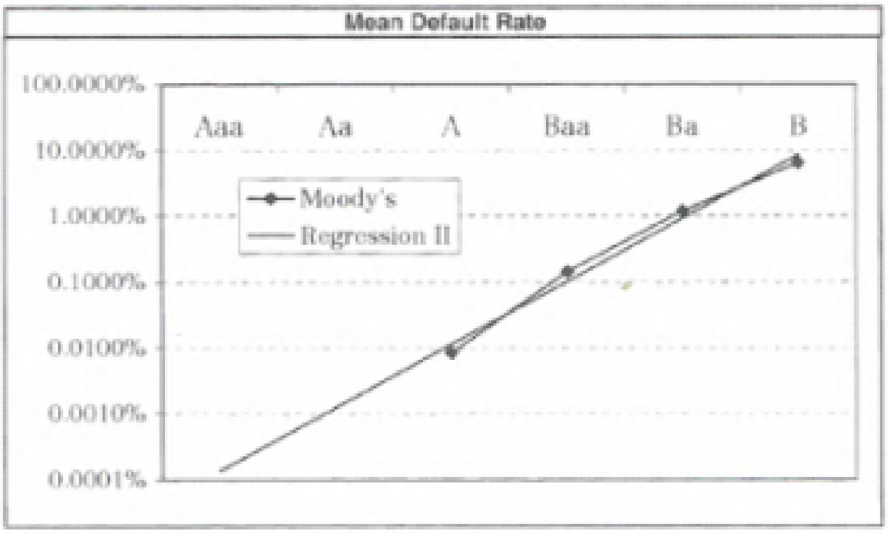
Rating	Mean	Stand.Dev.	μ	σ	ρ
Aaa	0.000%	0.000%	0.0001%	0.0023%	34%
Aa	0.020%	0.110%	0.0012%	0.0110%	28%
A	0.008%	0.047%	0.0113%	0.0514%	24%
Baa	0.145%	0.277%	0.1027%	0.2408%	19%
Ba	1.201%	1.330%	0.9348%	1.1270%	14%
B	6.507%	4.762%	8.5040%	5.2788%	10%
Mean	1.31%	1.09%	1.59%	1.12%	22%

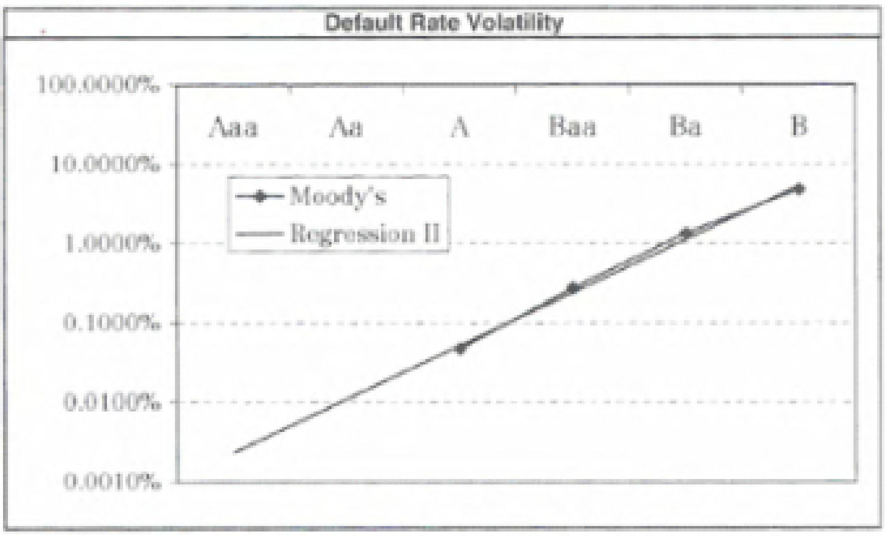




Tablica 6: Kalibracijski rezultati prema regresiji I.

Rating	Mean	Stand.Dev.	μ	σ	ρ
Aaa	0.000%	0.000%	0.0001%	0.0023%	34%
Aa	0.020%	0.110%	0.0012%	0.0110%	28%
A	0.008%	0.047%	0.0113%	0.0514%	24%
Baa	0.145%	0.277%	0.1027%	0.2406%	19%
Ba	1.201%	1.330%	0.9348%	1.1270%	14%
B	6.507%	4.762%	8.5040%	5.2788%	10%
Mean	1.31%	1.09%	1.59%	1.12%	22%





Tablica 7: Kalibracijski rezultati prema regresiji II.

Kao parametarski okvir koristimo uniformni model CreditMetrics^{TM}-a i KMV-a. Tablica 5 uključuje 6 rejting klasa $R_1 = Aaa, R_2 = Aa, \dots$ i $R_6 = B$. Za svaku rejting klasu R_i možemo izračunati $\bar{p_i}$ i odgovarajuću volatilnost iz povijesnih frekvencija defaulta klase R_i u periodu 1970. − 2000. Rezultat je prikazan u tablicama Tablica 6 i Tablica 7 u stupcima Mean i Stand.Dev.

S tablicom Tablica 5 imamo problem što nema povijesti defaulta za obveznice većeg investicijskog rejtinga. Stoga, koristimo linearnu regresiju. Razlikujemo dvije metode:

- Regresija I
  Ovdje jednostavno postavimo $R_1 = Aaa$ za one koji "nisu promatrani" i srednje $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_6$ prikažemo eksponencijalnom funkcijom koja će nam dati prilagođene vjerojatnosti defaulta $\mu_1, \dots, \mu_6$ za sve rejting klase. Nakon toga ponovimo isti postupak s volatilnostima te dobivamo $\sigma_q, \dots, \sigma_6$. Rezultati su prikazani u Tablica 6.

- Regresija II
  Ova metoda kreće od opažanja da klasa Aa može činiti neki *outlier* zbog *šiljka* iz jedne opažene frekvencije defaulta u 1989. godini. Stoga ovdje isključujemo i Aaa i Aa iz regresije. Tablica 7 prikazuje rezultate.

Preostaje objasniti kako smo došli do zadnja tri stupca vezanih uz korelaciju aktive. Fiksirajmo rejting klasu. Za odabranu klasu, znamo da u godini j imamo frekvenciju defaulta p_j. Vremenski niz $p_1, \dots, p_{31}$, za frekvencije defaulta za godine od 1970 do 2000, je dan u tablici Tablica 5. U CreditMetrics^{TM}/KMV uniformnom modelu pretpostavljeno je da za svaku godinu j neka realizacija y_j faktora Y određuje uvjetnu vjerojatnost defaulta promatranu u godini j. U skladu s jednadžbom (3.1.1) možemo pisati

$$p_j = p(y_j) = N\left[\frac{N^{-1}[p] - \sqrt{\varrho}y_j}{\sqrt{1-\varrho_i}}\right] \qquad (i = 1, \dots, m)$$

gdje p označava "pravu" vjerojatnost defaulta za izabranu rejting klasu, i ϱ je nepoznata korelacija aktive koju ćemo procijeniti. Parametar p ne znamo točno, ali ćemo vidjeti da će nam povijesna srednja frekvencija defaulta $\bar{p}$ biti dobra zamjena za "pravu" srednju stopu defaulta. Primjetimo samo da ako su $Y_1, \dots, Y_n$ nezavisne jednako distribuirane[15] kopije faktora Y, onda iz zakona velikih brojeva slijedi

[15]Ovdje uvodimo jednostavnu pretpostavku da je gospodarski krug, prezentiran s $Y_1, \dots, Y_n$ bez autokorelacije.U praksi bismo radije radili s procesom koji uključuje *intertemporalnu zavisnost*, pr, AR(1) proces.

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p(Y_j) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[p(Y)] = p \qquad \text{g.s}$$

Ako zamijenimo lijevu stranu s

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_j,$$

vidimo da bi $\bar{p}$ trebala biti blizu "pravoj" vjerojatnosti defaulta p. Prirodno imamo

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} \big(p(Y_j) - p(\bar{Y})\big)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{V}[p(Y)] \quad \text{g.s}$$

gdje je $p(\bar{Y}) = \sum p(Y_j)/n$. Ovo pokazuje da

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (p_j - \bar{p})^2$$

bi trebalo biti dobra zamjena za "pravu" varijancu $\mathbb{V}[p(Y)]$. Uz propoziciju (3.8), dobivamo

$$\mathbb{V}[p(Y)] = N_2\left[N^{-1}[p], N^{-1}[p]; \varrho\right] - p^2, \tag{3.4.1}$$

i to je sve što nam je potrebno za procjenu ϱ. Nakon zamjene nepoznatih parametara p i $\mathbb{V}[p(Y)]$ ostaje riješiti (3.4.1) za ϱ.

Završit ćemo ovaj primjer kratkom napomenom. Ako pogledamo tablice Tablica 6 i Tablica 7 vidimo da procijenjene korelacije aktive opadaju kako se smanjuje kvaliteta kredita. Na prvi pogled ovo je vrlo intuitivno jer bismo mogli reći kako korelacije aktive rastu što se radi o većoj kompaniji jer možemo pretpostaviti da veće kompanije nose i veći sistemski rizik i da veće kompanije (tzv. globalni igrači), u prosjeku, imaju veći rejting od manjih kompanija. Međutim, iako mi možda vidimo takav efekt u podacima i našim procjenama, uniformni model je dvoparametarski model bez zavisnosti između p i ϱ. Sve moguće kombinacije od p i ϱ možemo primjeniti kako bismo dobili distribuciju gubitaka. Nema pravila da bismo s većim p trebali uzeti niži ϱ.

Literatura

[1] C. Bluhm, L. Overbeck, C. Wagner *An introduction to credit risk modeling*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2010.

[2] P. Embrechts *Modelling extremal events*, Springer, 1999.

[3] S.M Ross *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 2000.

[4] N. Sarapa *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2000.

[5] D. Stirzaker *Elementary Probability*, Cambridge University Press, 2003.

[6] R. Durrett *Probability: Theory and Examples (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*, Cambridge University Press, 2010.

Sažetak

U ovom diplomskom radu cilj je pružiti pristupačan uvod u temelje modeliranja kreditnog portfelja.
Krećemo do osnovnih pojmova iz vjerojatnosti i statistike, a zatim postupno ulazimo u svijet upravljanja kreditnim rizikom kroz pojmove očekivanog i neočekivanog gubitka, gdje možemo vidjeti i bitnu ulogu korelacija, te distribucije gubitka i načina kako je dobiti.
Zatim, krećemo s modeliranjem koreliranih defaulta pomoću dva pristupa. Uz teoretsku podlogu, upoznajemo i modele predstavnike tih pristupa.
Također, specifikacijom uvodimo jednofaktorski (CreditMetrics^{TM}/KMV), odnosno jednosektorski (CreditRisk^{+}) model te nakon njihove usporedbe završavamo praktičnim primjerom.

Summary

This thesis goal is to provide accessible introduction to the foundations of the credit portfolio modelling.
We start from the basic concepts of probability and statistics, and then gradually enter the world of credit risk management through the terms of the expected and unexpected loss (where we first see the important role of the correlations), distribution loss and ways to get it.
Then, we use two approaches to the modeling of correlated defaults and get introduced to representatives of these approaches.
We also look in more detail at portfolios with uniform dependency structure, namely one-factor (CreditMetrics ^{TM} / KMV), respectively one-sector (CreditRisk^{+}) models and after their comparison we conclude this thesis with working example.

Životopis

Rođena sam 23.09.1992. u Zagrebu gdje, nakon osnovnoškolskog obrazovanja u Osnovnoj školi Rudeš, upisujem II. gimnaziju koju završavam 2011. godine kada i upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2014. godine stječem titulu sveučilišnog prvostupnika matematike te nastavljam akademsko obrazovanje na istom Fakultetu upisom diplomskog sveučilišnog studija, smjer Financijska i poslovna matematika.
2014. godine postajem članica studentske udruge Financijski klub kao dio Tima za upravljanjem portfeljem. 2015. se pridružujem i studentskoj udruzi Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" kao član Tima za dizajn.
U lipnju 2016. počinjem raditi u Privrednoj banci Zagreb na Upravljanju rizicima.