

# Izrada magnetskog levitatora za školski pokazni eksperiment

---

**Bene, Daniela**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2004**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:926726>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-07**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**Sveučilište u Zagrebu**

**PMF-Matematički odjel**

**Daniela Bene**

**IZRADA MAGNETSKOG LEVITATORA ZA  
ŠKOLSKI POKAZNI EKSPERIMENT**

**Diplomski rad**

**Voditelj rada:**

**Prof.dr.sc.Miroslav Požek**

**Zagreb, rujan 2004.**

# SADRŽAJ

<b>1) UVOD</b>	<b>1</b>
<b>1.1) Primjena levitacije</b>	<b>2</b>
<b>1.2) Supravodljivost/Meissnerov efekt</b>	<b>4</b>
<b>1.3) Levitacija normalnih metala</b>	<b>7</b>
<b>2) TEORIJSKI UVOD</b>	<b>8</b>
<b>2.1) Izvod izraza za silu levitacije</b>	<b>8</b>
<b>2.2) Prodiranje elektromagnetskog polja u metal         (skin efekt)</b>	<b>13</b>
<b>3) KONSTRUKCIJA LEVITATORA</b>	<b>16</b>
<b>4) IZRAČUN OPTIMALNE DEBLJINE TANJURA</b>	<b>21</b>
<b>5) MJERENJA</b>	<b>26</b>
<b>6) METODIČKI DIO</b>	<b>30</b>
<b>6.1) Lorentzova sila</b>	<b>30</b>
<b>6.2) Elektromagnetska indukcija i Faradayev         zakon</b>	<b>32</b>
<b>6.3) Izmjenični napon i struja</b>	<b>34</b>
<b>6.4) Otpori izmjenične struje</b>	<b>35</b>
<b>6.5) Izvod sile levitacije</b>	<b>36</b>
<b>7) ZAKLJUČCI</b>	<b>40</b>
<b>8) LITERATURA</b>	<b>41</b>

# 1.UVOD

Još u prošlom stoljeću Earnshaw je postavio teorem, koji vrijedi za klasičnu fiziku, da se pomoću statičkih magnetskih polja i električnih naboja ne može postići statičko lebdenje (levitacija). Srećom, to ne znači da nije moguće ostvariti magnetsku levitaciju, jer taj teorem ne obuhvaća sve moguće fizikalne situacije, za koje nisu ispunjene njegove početne pretpostavke.

Ovim radom proučila sam pojavu elektromagnetske levitacije normalnog metala u izmjeničnom polju. Da bih eksperimentalno proučila elektromagnetsku levitaciju trebalo je, prije svega, izraditi uređaj za levitaciju (levitator).

Prije nekoliko mjeseci kolege s fakulteta izradili su za Smotru Sveučilišta levitator, koji je efektom u potpunosti oduševio buduće studente. Nedostaci tog levitatora bile su veličina i težina te veliki gubici energije, pa mi je motiv bio izraditi novi levitator, kojim bi se bar djelomično ispravili nedostaci prethodnog. Novi levitator bio bi manjih dimenzija i zbog primjerene težine koristio bi se kao demonstracijski uređaj u školama da bi učenici vrlo apstraktne koncepte potrebne za razumijevanje doživjeli putem fascinirajućeg efekta koji pobuđuje interes za proučavanjem

Da bi neki predmet (magnetski) levitirao, mora posjedovati magnetski moment i nalaziti se u nehomogenom magnetskom polju suprotne orijentacije. Prvi uspješno levitiran živi organizam na sobnoj temperaturi bila je mala žaba, zahvaljujući dijamagnetskom ponašanju vode koja je glavni sastojak živih organizama. (eksperiment izveden u Nijmegenu, Nizozemska, a rezultati su objavljeni 1997. godine), (slika 1) [1].



Slika 1. Žaba koja levitira

Eksperiment je izveden pomoću specijalne izvedbe magneta, s magnetskim poljem od 16 T. (Toliko jaka polja potrebna su jer je dijamagnetizam vode slab.) Osim žabe levitirale su i ribe, biljke, tekućine, itd.

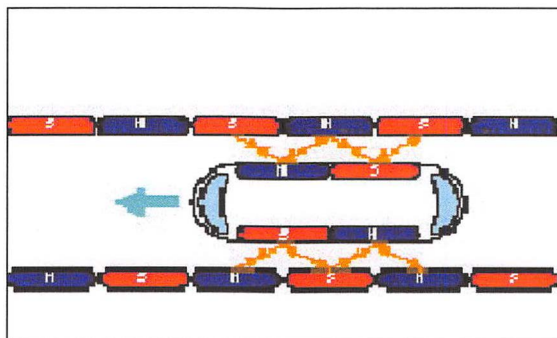
## 1.1 Primjena levitacije

Važno je napomenuti kako se magnetska levitacija koristi u revolucionarno novim visokim tehnologijama. Vrijedna spomena je i činjenica kako se danas sve više širi proizvodnja moćnih magnetskih polja koji se upotrebljavaju u različite svrhe. Tako je na principu supravodljive magnetske levitacije izgrađena u Japanu prva superbrza željeznica [2].



*Slika 2a. Vlak koji lebdi na magnetskom polju centralne tračnice i postiže brzinu od oko 500 km/h*

U vagonima su jaki supravodljivi magneti, a u mnoštvu metalnih zavojnica na tlu ispod vagona inducira se magnetsko polje suprotnog smjera.



*Slika 2b. Shematski prikaz*

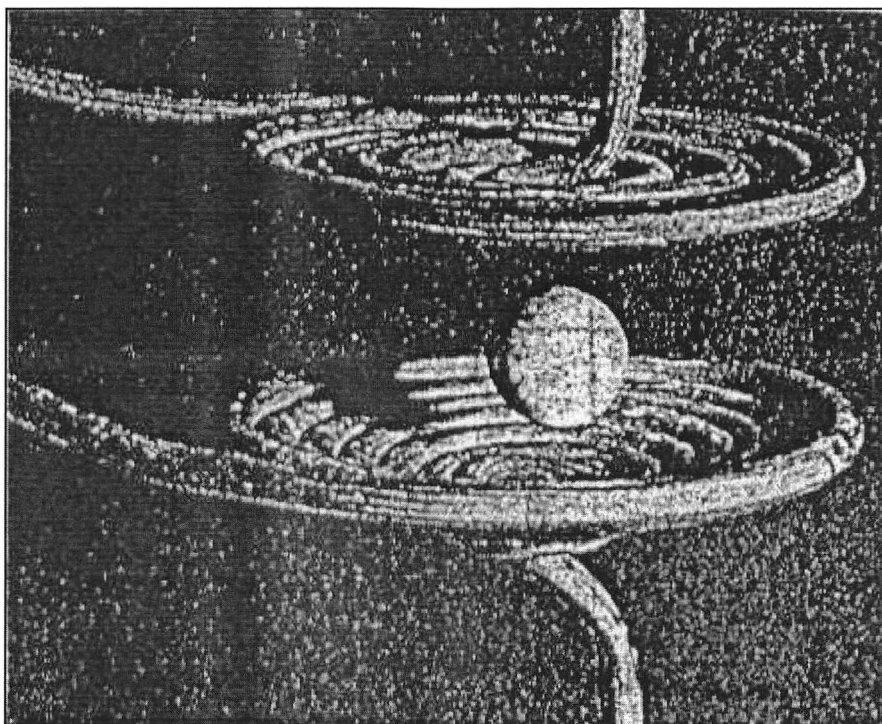
Povećavajući brzinu vagoni se dižu desetak centimetara uvis i gibaju bez buke i bez trenja na podlogu. Zato su supravodljive željeznice izvanredno brze. Još 1979.g. postignuta je s pokusnom supravodljivom željeznicom brzina od oko 500 km/h. Željeznice sličnih brzina u putničkom prometu na srednjim udaljenostima efektivno su brže od zračnog prijevoza.

Magnetsku levitaciju možemo postići i konvencionalnim elektromagnetima. Na tom principu su konstruirane pokusne magnetske levitirajuće željeznice, koje su jeftinije od supravodljivih ali i nešto sporije [3].

Elektromagnetska levitacija našla je svoju primjenu i pri taljenju metala. Osnovni princip rada levitacijske peći za taljenje je u tome da se taljeni metal (u obliku kugle) zalevitira pomoću elektromagnetskog polja dvaju serijskih spojenih zavojnica, te rastali toplinom koju stvaraju vrtložne struje. Da bi se željeni efekt postigao nakon taljenja treba sustav donekle zadržati u ravnoteži da bi se rastaljeni metal odvodio u mlazu. Najprije se pokušalo s jednom zavojnicom no ona ne može levitirati kapljicu rastaljenog metala pa je radi stabilizacije dodana još jedna.

Uzorak za taljenje stavljen je između tih dviju zavojnica. Takvim uređajem s dvije zavojnice taljeni su aluminij, titan, bronca i neki drugi metali sličnih svojstava. Za levitaciju i taljenje navedenih metala korištene su struje od oko 700 A. Frekvencije struja su također bile jako velike da bi se povećao induktivni otpor.

Glavni problem primjene levitacijskih peći većih dimenzija su velika potrošnja energije, mala korisnost te još uvijek nedovoljna istraženost područja. Ali s druge strane manji uređaji vrlo često se koriste u znanosti i industriji [4].



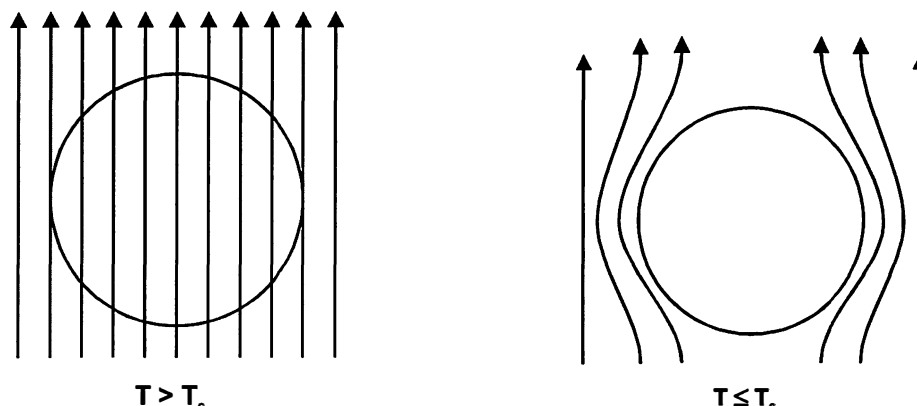
*Slika 3. Taljenje metala*

## 1.2 Supravodljivost / Meissnerov efekt [3]

Supravodljivost je pojava iščezavanja električnog otpora koja nastaje kao rezultat ohlađivanja vodiča do kritične temperature  $T_c$ . Otkrio ju je Kamerlingh-Onnes 1911.g. Konstatirao je kako pri  $T_c = 4.3\text{K}$  električni otpor žive naglo pada na nemjerljivo malu vrijednost.

Meissner i Ochsenfeld mjerili su 1933.g. magnetsku indukciju supravodljivih cilindara u vanjskom magnetskom polju. Iznad kritične temperature  $T_C$  magnetske silnice prolaze kroz supravodljivi uzorak kao i kroz normalne metale. Snižavajući temperaturu pri konstantnom magnetskom polju, Meissner i Ochsenfeld su primjetili da su pri kritičnoj temperaturi  $T_c$  magnetske silnice

istisnute iz uzorka. Pri toj temperaturi iščezava magnetska indukcija u supravodiču ( $B = 0$ ), tj. supravodič postaje savršeni dijamagnet. Ta se pojava naziva Meisnerov efekt.



*Slika.4 Magnetske silnice u supravodiču iznad i ispod kritične temperature*

Magnetska indukcija određena je vanjskim poljem  $H$  i magnetizacijom  $M$  tj.,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1.1)$$

Magnetizacija je proporcionalna s vanjskim poljem, tj.,  $M = \chi H$ , pa time prethodni izraz postaje

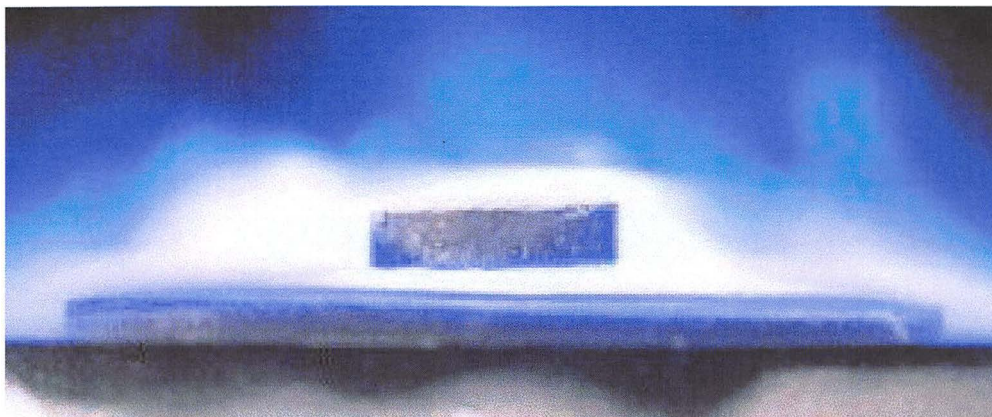
$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}. \quad (1.2)$$

Da bi magnetska indukcija bila jednaka 0 treba vrijediti  $\chi = -1$ , odnosno  $M = -H$ . U unutrašnjosti supravodiča inducira se magnetizacija koja djeluje suprotno od smjera vanjskog magnetskog polja. Ta je pojava karakteristika dijamagneta.

Dijamagnetski efekt u supravodiču toliko je jak da inducirano polje poništava djelovanje vanjskog polja. Zato supravodiče nazivamo idealnim dijamagnetima koji, karakterizirani tzv. Meissnerovim efektom, u potpunosti izbacuju magnetsko polje iz svoje unutrašnjosti i stavljeni u magnetsko polje lebde iznad magneta. Tako su supravodiči najpoznatiji primjer levitiranja dijamagneta u vanjskom magnetskom polju. Dijamagneti se magnetiziraju u smjeru koji je suprotan od smjera magnetskog polja u kojem se nalaze. U dijamagnetima se putanje elektrona modificiraju tako da kompenziraju utjecaj vanjskog



magnetskog polja, što izaziva magnetsko polje koje je usmjereno u suprotnom smjeru. Kod supravodiča su te promjene makroskopske, te se na površini supravodiča javljaju struje koje zasjenjuju vanjsko polje.



*Slika 5. Lebdenje supravodiča*

Supravodič na gornjoj slici lebdi u vremenski nepromjenjivom magnetskom polju zahvaljujući svom savršenom dijamagnetizmu. [2]

### 1.3 Levitacija normalnog metala

Opisna levitacija supravodiča vrlo je fascinantna pojava. Međutim, u ovom ću radu pokazati kako i obični (nesupravodljivi) metali mogu lebdjeti, ali za to je potrebno izmjenično magnetsko polje koje inducira izmjenične struje u metalu, a time i izmjenični magnetski moment metalnog predmeta. Taj magnetski moment je veći dio vremena usmjeren tako da podržava levitaciju.

Levikator izrađen u ovom radu sastoji se od primarne i sekundarne zavojnice koje proizvode nehomogeno vremenski promjenjivo polje uslijed djelovanja izmjenične struje. Vremenska promjena polja djeluje na objekt levitacije te u njemu inducira elektromotornu silu, a ona vrtložnu struju. Ta vrtložna struja koja se inducira u levitiranom objektu nadalje proizvodi magnetski moment koji je veći dio vremena suprotnog smjera od polja primarne zavojnice.

Ta dva polja se međusobno prožimaju i stvara se rezultatna elektromagnetska sila koja poništava djelovanje gravitacijske sile na objekt levitacije i on ostaje u stanju lebdenja.

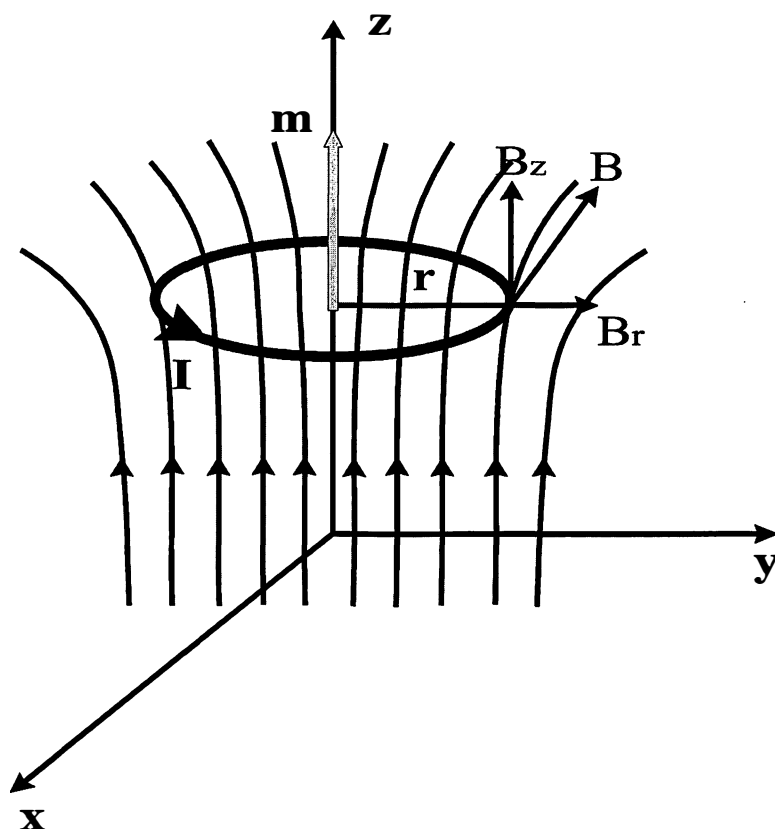
Iako mi je pojava levitacije na prvi pogled izgledala vrlo jednostavno, pri dubljoj analizi nailazila sam na niz nejasnoća i problema. No, unatoč svemu, ova ne baš konvencionalna pojava pokazala se jako zanimljivom za proučavanje, najviše zbog efekta do kojeg dolazi.

Prije početka dubljeg proučavanja potrebno je razjasniti osnovne pojmove koji uzrokuju levitaciju.

## 2. TEORIJSKI UVOD

### 2.1 Izvod izraza za silu levitacije kružne petlje

Da bi došla do izraza za silu levitacije, kao ishodište sam uzela model kružne strujne petlje u nehomogenom izmjeničnom magnetskom polju (slika 6). U toj strujnoj petlji inducira se vrtložna struja.



*Slika 6. Slika petlje u nehomogenom magnetskom polju*

Kako petljom teče struja i nalazi se u magnetskom polju, na neki njezin djelić  $d\mathbf{l}$  djeluje Amperova sila:

$$d\mathbf{F} = -\mathbf{B} \times I d\mathbf{l} \quad (2.1)$$

gdje je  $\mathbf{B}$  magnetsko polje, a  $I$  jakost struje. Zbog rotacijske simetrije promatranog sustava u računima ću koristiti cilindrične koordinate pa vrijedi :

$$d\mathbf{l} = \hat{\phi} r d\phi \quad (2.2)$$

Magnetsko polje primarne zavojnice djeluje na vodič pod nekim kutom pa ga rastavimo na dvije komponente, radijalnu  $B_r$  i vertikalnu  $B_z$  (zbog rotacijske simetrije nema azimutalne komponente  $B_\phi$ ):

$$\mathbf{B} = \hat{z}B_z + \hat{r}B_r. \quad (2.3)$$

Sila  $d\mathbf{F}$  ima dvije komponente  $dF_z\hat{z}$  i  $dF_r\hat{r}$ . Doprinos radijalnih sila je nula jer one djeluju iz svih obodnih točaka, radijalno su simetrične i jednakog su iznosa. z-komponenta sile jednaka je umnošku radijalne komponente  $B_r$  i vrtložne struje  $I$  i okomita je na ravninu koju oni određuju. Sila je paralelna s osi z.

$$dF_z = -B_r I r d\phi. \quad (2.4)$$

Vidimo da će sila biti usmjerena prema gore onda kada su struja  $I$  i radijalna komponenta polja  $B_r$  suprotnog predznaka. Rezultantna sila jednaka je zbroju takvih sila iz svih obodnih djelića levitirane petlje. Sada izraz za silu levitacije glasi

$$\mathbf{F} = -\hat{z} \int_0^{2\pi} B_r I r d\phi = -2r\pi I B_r \hat{z}, \quad (2.5)$$

pri čemu je  $2r\pi$  je opseg prstena.

Struja u našem slučaju je vrtložna, znači proučavamo neku induciranu struju jačine  $I$  u levitiranom objektu. Struju inducira elektromotorna sila koja je prema Faradayevom zakonu jednaka

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_z}{dt} \quad (2.6)$$

Negativan predznak izražava Lenzovo pravilo koje glasi: Inducirana elektromotorna sila ima uvijek smjer suprotan uzroku koji ju je stvorio.

Poznat je i izraz za tok magnetskog polja koji govori da je magnetski tok  $\phi$  jednak ukupnom broju silnica indukcije koje prolaze danom površinom, tj., u

našem slučaju uzimamo samo vertikalnu komponentu  $B_z$  jer jedino ona inducira struju u levitiranom objektu.  
Traženi izraz za magnetski tok je:

$$\phi_z = \int B_z ds = B_z S, \quad (2.7)$$

gdje zadnja jednakost vrijedi samo ako  $B_z$  ne ovisi o  $r$ . U ovom slučaju to je dobra aproksimacija.

Kako su veličine s kojima ćemo se od sada služiti izmjenične, upotrijebit ćemo kompleksne veličine i račun. Vremensko ponašanje izmjenične veličine prikazat ćemo eksponencijalnom funkcijom  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ , no pritom treba imati na umu da se fizikalna bit polja mora predstaviti realnim funkcijama, tj. za rješenja se uzima samo realni dio kompleksnog rješenja!

Prilikom računanja produkta dviju kompleksnih veličina koristi se sljedeći izraz. [5]

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)] \cdot \operatorname{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] &= \frac{1}{4} \left[ \mathbf{A}(\mathbf{x})e^{i\omega t} + \mathbf{A}^*(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \right] \cdot \left[ \mathbf{B}(\mathbf{x})e^{i\omega t} + \mathbf{B}^*(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \mathbf{A}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})e^{2i\omega t} \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Kad nas zanima vremenski prosjek, uzima se prvi dio realnog dijela produkta:

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)] \cdot \operatorname{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \mathbf{A}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right].$$

Magnetsko polje je promjenjivo pa su zbog izmjenične struje obje komponente polja izmjenične tj,

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 e^{i\omega t} \quad (2.9)$$

odnosno zanima nas samo  $\operatorname{Re}(\mathbf{B}_0 e^{i\omega t})$ .

Komponente polja su:

$$B_z(t) = B_{z0} e^{i\omega t} \quad (2.10a)$$

$$B_r(t) = B_{r0} e^{i\omega t} \quad (2.10b)$$

gdje su  $B_{z0}$  i  $B_{r0}$  maksimalne vrijednosti komponenata polja  $B_z$  i  $B_r$ , a  $\omega$  kružna frekvencija struje.

Sada uvrstimo izraz vertikalne komponente polja (2.10a) u izraz za magnetski tok (2.7), a potom u izraz za induciranu elektromotornu silu (2.6). Nakon računanja dobivamo:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_z}{dt} = -i\omega B_{z0} S e^{i\omega t} = \omega B_{z0} S e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}. \quad (2.11)$$

Elektromotorna sila kasni za poljem za  $\pi/2$ . Da imamo samo realni otpor prema Ohmovom zakonu vrijedilo bi:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (2.12)$$

Struja bi bila u fazi s elektromotornom silom, a to znači izvan faze s poljem. Prema tome, struja bi pola perioda bila istog predznaka kao  $B_r$ , a pola suprotnog. U prosjeku bi sila levitacije bila nula.

No, u ovom slučaju ukupni otpor levitiranog objekta nije samo omski već se uz njega kod izmjeničnih struja javlja i induktivni otpor  $R_L = i\omega L$ . Zbog toga zamijenimo otpor impedancijom  $Z$ , koja je dana izrazom

$$Z = R + i\omega L. \quad (2.13)$$

Kompleksna impedancija znači da postoji fazni pomak između elektromotorne sile i struje. Koristeći navedeno, izraz za struju ima sljedeći oblik:

$$I = \frac{\varepsilon}{Z}. \quad (2.14)$$

Impedanciju možemo pisati na sljedeći način

$$Z = |Z|e^{i\varphi}, \quad (2.15)$$

gdje je  $|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ , a  $\varphi = \arctg \omega L/R$ .

Sada dobivene vrijednosti uvrstimo u izraz za jakost struje (2.12), pa dobivamo izraz

$$I = \frac{-i\omega B_{z0}S}{Z} e^{i\omega t} = -\frac{i\omega B_{z0}S}{|Z|e^{i\varphi}} e^{i\omega t} = I_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi)} \quad (2.16)$$

Ovdje  $I_0$  predstavlja maksimalnu vrijednost struje tj.,

$$I_0 = \frac{\omega B_{z0}S}{|Z|}, \quad (2.17)$$

a struja kasni za elektromotornom silom za fazni pomak  $\varphi$ .

Uvrstimo li sada dobivenu vrijednost za jakost inducirane struje (2.16) u izraz za silu levitacije (2.5), dobivamo

$$\begin{aligned} \langle F_z \rangle &= -2r\pi \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ I^*(t) \cdot B_r(t) \right] = -\frac{B_{r0}B_{z0}S\omega}{|Z|} \cdot 2r\pi \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ e^{i(-\pi/2 - \varphi)} \right] \\ &= -\frac{B_{r0}B_{z0}S\omega}{|Z|} \cdot r\pi \cdot (-\sin \varphi) = \frac{B_{r0}B_{z0}S\omega}{|Z|} \cdot r\pi \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.18)$$

Vidimo da sile ne bi bilo kad struja ne bi kasnila za elektromotornom silom, a ako ima kašnjenja, sila je usmjerena prema gore.

Iz izraza vidimo da sila levitacije ovisi o vertikalnoj i radijalnoj komponenti magnetskog polja. Radijalna komponenta se može izraziti pomoću vertikalne, ako se primijeni Gaussov zakon magnetske divergencije,  $\nabla \mathbf{B} = 0$  [6]. Taj zakon tvrdi da je ukupan tok magnetskog polja iz bilo kojeg zatvorenog volumena jednak 0, tj. da je broj silnica koje ulaze u neki zatvoreni volumen jednak broju silnica koje iz njega izlaze.

U cilindričnim koordinatama divergencija je dana izrazom  $\nabla \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} B_z$ , pa iz toga slijedi

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_z . \quad (2.19)$$

Vidimo da je  $B_r$  proporcionalno brzini promjene  $B_z$  duž osi  $z$ . Izraz za silu levitacije sada poprima oblik

$$\langle F_z \rangle = \frac{r^4 \pi^2 B_{z0} \omega}{2|z|} \cdot \frac{\partial}{\partial z} B_{z0} \sin \varphi . \quad (2.20)$$

## 2.2 Prodiranje elektromagnetskog polja u metal (skin efekt)

Iako se ovaj efekt često zanemaruje za male frekvencije, meni je od velike važnosti, jer je jedini parametar pomoću kojeg ću procijeniti optimalnu debljinu tanjura.

Budući da razmatramo izmjenično polje, cijeli problem nije čisto magnetskog karaktera jer se po Faradayevom zakonu inducira i električno polje. Međutim, na dovoljno niskim frekvencijama valna duljina elektromagnetskog polja mnogo je veća od dimenzija promatranog sistema pa možemo smatrati da polja prodiru trenutno. Drugim riječima, u Maxwellovim jednadžbama možemo zanemariti struju pomaka. Nadalje, nemamo slobodnih naboja, a u vodičima je veza između električnog polja i gustoće struje dana Ohmovim zakonom. Proučavani metal je nemagnetičan pa je permeabilnost konstantna.



Tako su za naš problem relevantne sljedeće jednačbe [5]:

$$\begin{aligned}
 \nabla \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\
 \nabla \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\
 \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\
 \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \\
 \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Uvrštavanjem pete i šeste jednačbe u četvrtu te primjenom operatora rotacije na obje strane dobivamo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \nabla \times \mathbf{E},$$

ili primjenom treće jednačbe i vektorskih identiteta dobivamo

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = -\mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} . \tag{2.22}$$

Budući da se izmjenično magnetsko polje ponaša prema relaciji (2.9), konačno dobivamo

$$\nabla^2 \mathbf{B} - i\omega \mu \sigma \mathbf{B} = 0 . \tag{2.23}$$

Ista relacija vrijedi i za električno polje. Očito za danu frekvenciju i dani metal postoji karakteristična duljina koja govori koliko se duboko ispod površine metala osjećaju vanjska polja. Ta duljina definira se relacijom:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}} \tag{2.24}$$

i naziva dubina skina (kožice), a pomoću nje relacija (2.23) glasi:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{2i}{\delta^2} \mathbf{B} = 0 . \tag{2.25}$$

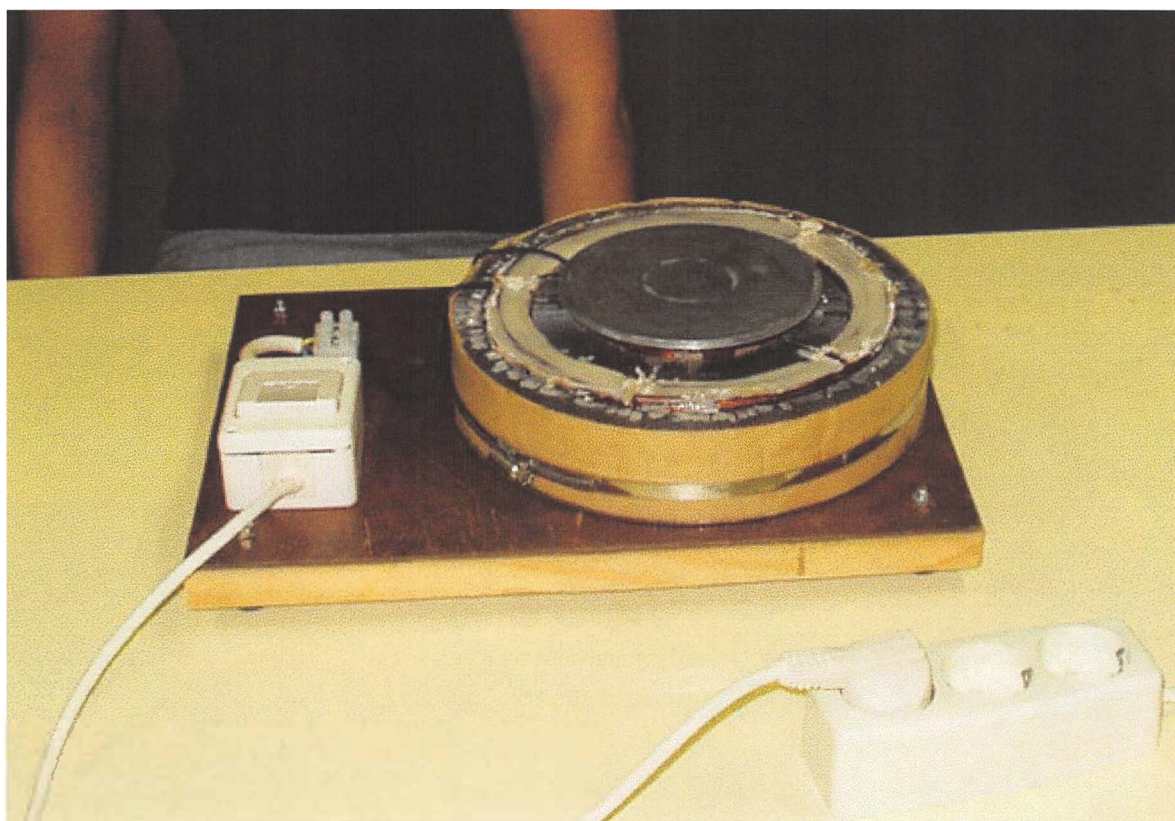
Skin-efekt (pojava istiskivanja struje) javlja se kod izmjeničnih struja, a nastaje zbog magnetskog polja u vodičima (u ovom slučaju u levitiranom tanjuru). Očituje se time da glavna struja teče u tankom površinskom sloju (skinu). Dakle, gustoća osnovne struje na površini vodiča je veća, a prema sredini sve manja.

Skin efekt najčešće se proučava prilikom refleksije elektromagnetskog vala od površine metala, kada je magnetsko polje paralelno površini. Važno je, međutim, napomenuti da relacija (2.25) vrijedi za sve komponente polja, pa i za onu koja je okomita na površinu (u našem slučaju  $B_z$ ).

Kad je metalni predmet mnogo deblji od dubine skina, razmatranja polja i struje mogu se aproksimirati kao da u kožici debljine  $\delta$  teče struja  $J = B/\mu$ , a dublje u metalu nema niti struje niti polja. Međutim, kad je metal tanji od debljine skina, struje u njemu ne mogu potpuno zasjeniti vanjsko polje i dio polja prodire na drugu stranu.

Očito da prilikom traženja optimalne debljine levitirajućeg diska treba ispitivati debljine usporedive s dubinom skina. Za aluminij na sobnoj temperaturi vodljivost je  $\sigma \approx 3.75 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ , što uz frekvenciju  $\nu = 50 \text{Hz}$  daje dubinu skina  $\delta = 11.6 \text{mm}$ .

### 3.KONSTRUKCIJA LEVITATORA

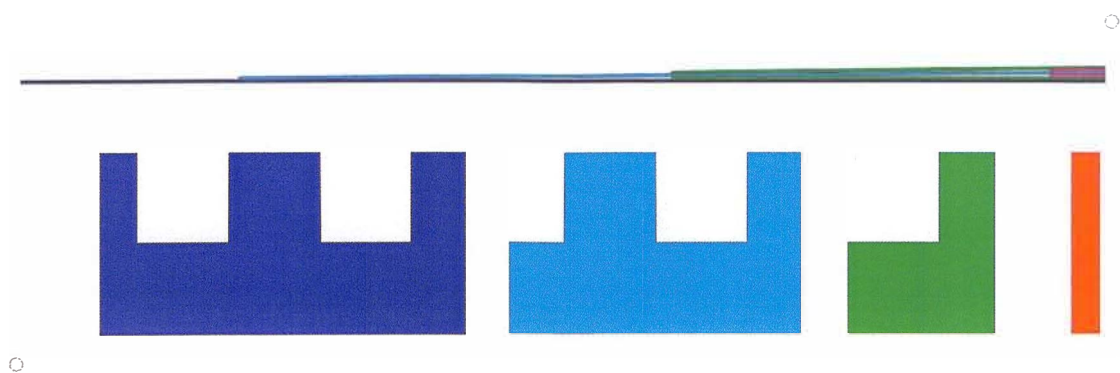


*Slika 7. Levitator*

Levitator se sastoji od dvije zavojnice, primarne i sekundarne. Primarna zavojnica stvara silu levitacije, dok sekundarna stvara silu koja stabilizira levitirajući objekt. Primarna zavojnica ima 177, a sekundarna 196 namotaja bakrene žice promjera 1.8 mm.

Kao što se vidi sa slike 7, zavojnice su umetnute oko dviju koncentričnih željeznih jezgri i spojene na izvor izmjenične struje. Pri naponu od 100 V zavojnicama je tekla struja od 10 A, a pri naponu od 130 V struja od 12 A. Omski otpor zavojnica je  $2\Omega$ . Kad se levitator uključi u napon gradske mreže, kroz nju poteče struja nešto jača od 20 A.

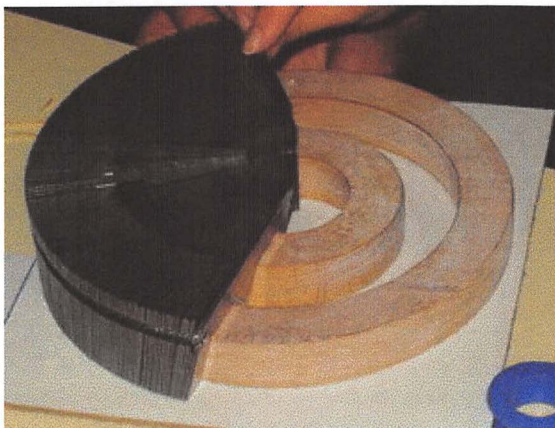
Jezgre su sastavljene od lepezasto složenih limova različitih oblika, povezanih dvokomponentnim ljepilom. Dimenzije limova proračunate su tako da pravilnim slaganjem u puni krug daju najbolju popunjenost (Slika 8a i 8b).



*Slika 8a. Oblik transformatorskih limova i način slaganja*



*Slika 8b. Nacrt slaganja limova za četvrtinu kruga*

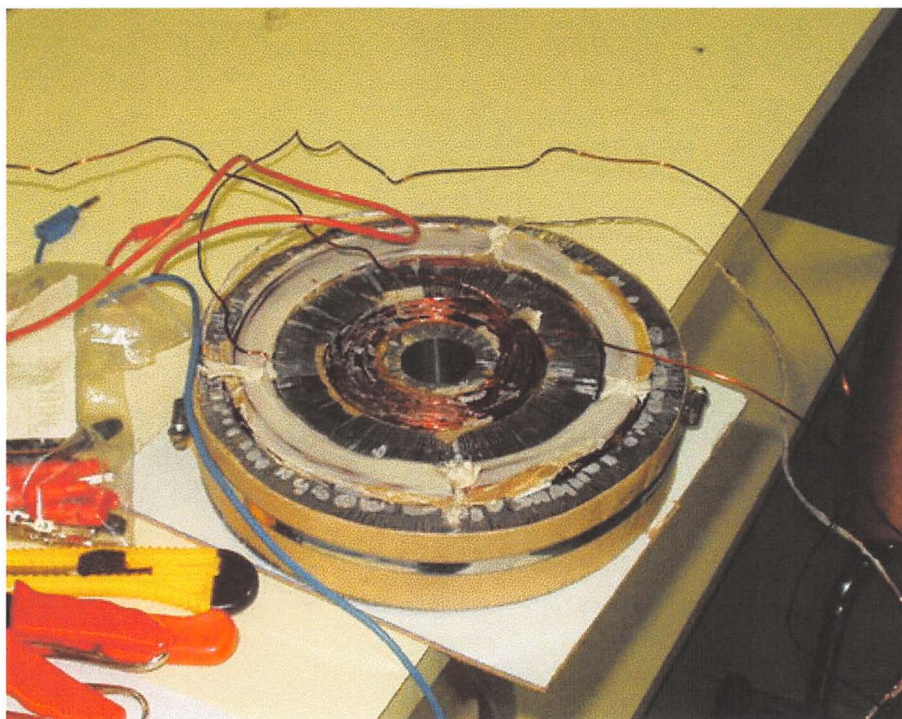


*Slika 9a. Lepezasto složeni limovi*



*Slika 9b. Limovi povezani ljepilom*

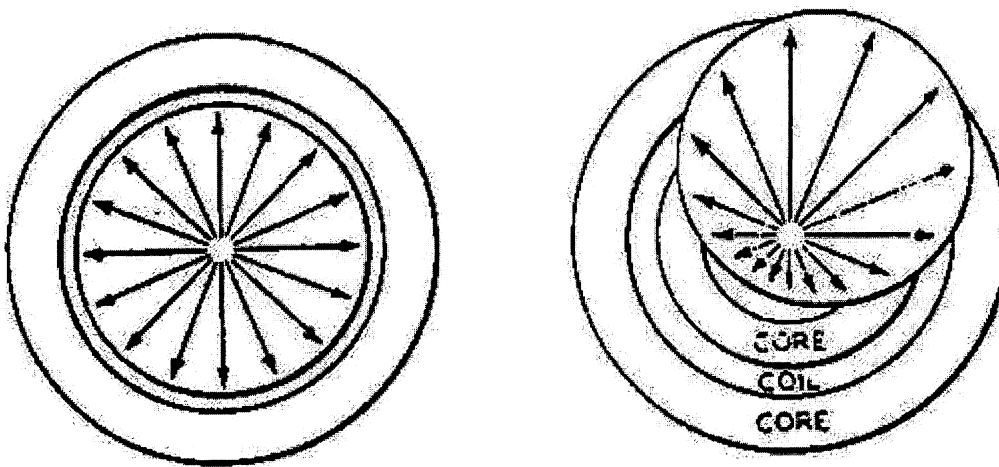
Na slikama 9a i 9b prikazan je postupak slaganja. Drveni kalupi ostavljaju prostor za kasnije umetanje zavojnica (slika 10).



*Slika 10. Zavojnice unutar koncentričnih jezgri*

Razlog takvog sastavljanja je sljedeći :

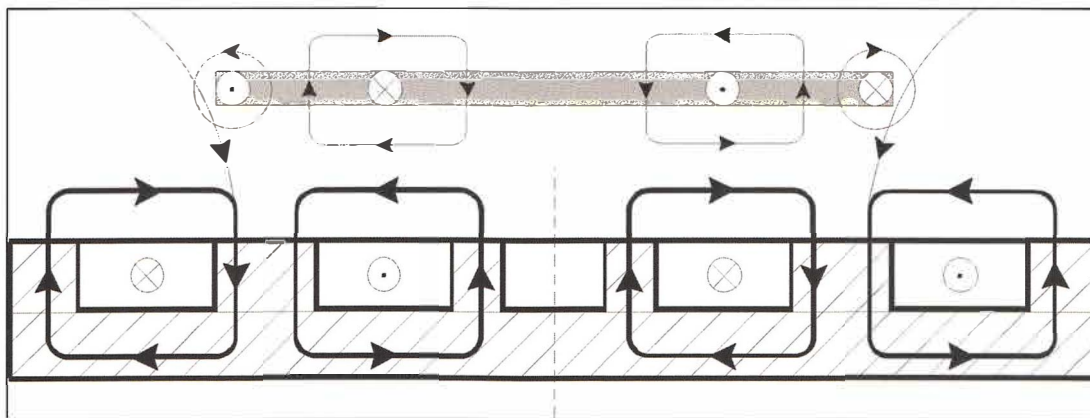
Vrtložne struje stvaraju u vodiču, tj. magnetskoj jezgri, Jouleovu toplinu koja ugrijava jezgru. Ta toplina nije poželjna jer uzrokuje gubitke energije te istodobno smanjuje probojnu čvrstoću izolacije zavojnice. Vrtložne struje možemo smanjiti tako da jezgru ne izgrađujemo od jednog komada već je sastavljamo od tankih međusobno izoliranih limova. Postavili smo ih lepezasto upravo zato da magnetske silnice teku paralelno s njima, pa ne dolazi do značajnijeg povećanja magnetskog otpora. Vrtložne struje, naprotiv, tekle bi u ravnini okomitoj na limove, ali zbog izolacije ne mogu prolaziti s lima na lim, pa se uslijed toga ne mogu jače razviti.[7]



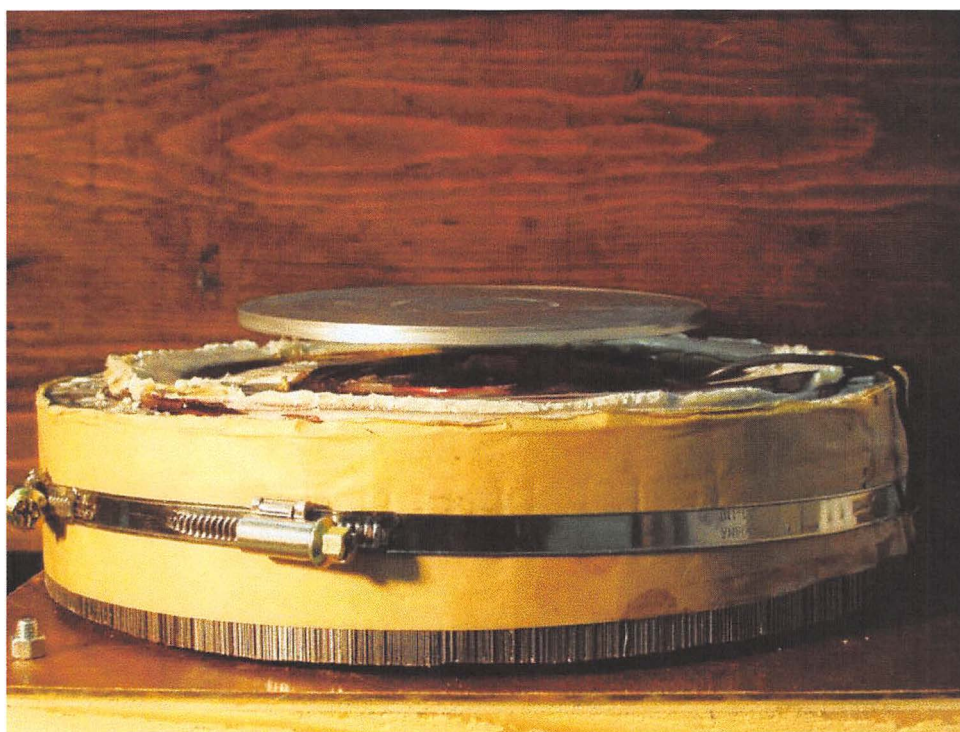
*Slika 11. Raspodjela radijalnih sila i izlijetanje diska [4]*

Da bi objekt koji levitira bio stabilan, potrebno je da se radijalne sile istog iznosa ponište, a to je moguće ako stavimo os z da prolazi točno kroz središte. Ako disk samo malo izade iz središta, radijalne sile koje ga izbacuju postaju sve jače i on izlijeće (slika 11). Kako je tako vrlo teško postići stabilizaciju, postavili smo sekundarnu zavojnicu oko primarne (slika 10). Magnetsko polje sekundarne zavojnice sprječava da levitirajući objekt iskoči iz magnetskog polja.

Kako struje u zavojnicama idu u suprotnim smjerovima, u sekundarnoj zavojnici stvorit će se polje istog smjera kao i u levitirajućem objektu, pa će se ta dva polja odbijati. Kako se polje sekundarne zavojnice nalazi oko levitirajućeg objekta svaka točka oboda će se odbijati od polja sekundarne zavojnice i objekt će biti stabiliziran (slika12).



*Slika 12. Odnos magnetskih polja i struja pri levitaciji sa sekundarnom zavojnicom*



*Slika 13. Disk stabiliziran sekundarnom zavojnicom*

Iako je i ovaj uređaj daleko od idealne konstrukcije, postignuti rezultati su zadovoljavajući. Djelomično su ispravljeni nedostaci prethodnog levitatora što se tiče veličine i težine, a i smanjeni su gubici energije što su bili glavni motivi izrade novog levitatora.

Prilikom proučavanja levitacije koristila sam aluminijske diskove različitih debljina 1mm, 3mm, 4mm, 9.8mm, 12.6mm, te različitih radijusa 5cm, 6.5cm, i 7.5cm.

## 4. IZRAČUN OPTIMALNE DEBLJINE TANJURA

Kako mi je želja odrediti optimalnu debljinu tanjura, prvo ću naći izraz pomoću kojeg traženu veličinu mogu izračunati, a što ću kasnije i eksperimentalno provjeriti.

Već sam ranije navela da do levitacije dolazi uslijed nadmetanja elektromagnetske sile (koju zovemo sila levitacije) i gravitacijske sile na objekt. Rezultantna sila jednaka je razlici sile levitacije i težine. Za rezultantnu silu najvećeg iznosa, dobivamo optimalnu debljinu tanjura tj.,

$$\left| \frac{\langle F_{\text{levitacije}} \rangle}{F_{\text{gravitacije}}} \right| = \max \quad (4.1)$$

Da bih odredila traženu optimalnu debljinu tanjura potrebno je prvo odrediti navedene sile, silu levitacije te gravitacijsku silu na objekt.

Zbog jednostavnosti, prvo ću odrediti gravitacijsku silu na objekt;

$$F_g = \int_0^d \rho S dz = \rho S d . \quad (4.2)$$

gdje je  $\rho$  - gustoća,  $S$ -površina, a  $d$ -debljina tanjura.

Kako su vrijednosti  $\rho$  i  $S$  konstante za dani objekt zamijenit ću ih konstantom  $\alpha$ , tj.,

$$F_g = \alpha d . \quad (4.3)$$

Nakon razmatranja situacije na površini i unutar vodiča u odjeljku 2.2, sada mogu izračunati silu levitacije da bih u konačnici odredila traženu optimalnu debljinu tanjura.

U našem slučaju koristit ću izraz sile za volumnu raspodjelu

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x , \quad (4.4)$$

pri čemu je  $d^3x = r dr d\phi dz$ . U razmatranjima levitacije kružne petlje pokazala sam da doprinos sili levitacije daju jedino radijalna komponenta polja  $B_r$  i



azimutalna komponenta struje  $J_\varphi$  koja je inducirana vremenskom oscilacijom z-komponente polja.

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}} \int J_\varphi B_r d^3x. \quad (4.5)$$

Za približno određivanje sile levitacije upotrijebit ću formule (2.21)-(2.25). Raspodjela magnetskog polja između levitatora i lebdećeg diska vrlo je komplicirana pa je potrebno uvesti aproksimacije koje pojednostavnjuju problem, a ipak odražavaju fizikalnu bit. Glavna aproksimacija je da je polje malo iznad levitatora usmjereno uglavnom u pozitivnom z-smjeru i da je gotovo homogeno (slabo se mijenja s  $r$ ). Jasno je da postoji i radijalna komponenta polja, ali njezin iznos je znatno manji neposredno iznad levitatora. Uzet ću da je polje homogeno kad nema metalnog diska. Stavljanje metalnog diska uzrokuje vrtložne struje koje nastoje smanjiti z-komponentu polja. Prema relaciji (2.25), z-komponenta polja trne eksponencijalno:

$$B_z = B_{z0} e^{-(1+i)\frac{z}{\delta}}, \quad (4.6)$$

ali uzimamo da  $B_{z0}$  ne ovisi o  $r$ . Iz druge Maxwelllove jednadžbe  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$  imamo  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$ , a uz danu simetriju dobiva se:

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \mu J_\varphi = \mu \sigma E_\varphi, \quad (4.7)$$

pri čemu uzimam aproksimaciju  $\frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$ . Dakle, za određivanje radijalne komponente  $B_r$ , dovoljno je poznavati  $E_\varphi$ . Rubni uvjet je da  $B_r$  iščezava na  $z = 0$ .

Iz gornje relacije dobiva se:

$$B_r(z) = \int_0^z \mu \sigma E_\varphi(z') dz'. \quad (4.8)$$

Očito se cijeli problem svodi na određivanje  $E_\varphi$ . Njega odredimo iz prve Maxwellove jednačbe  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ . Odavde je

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -i\omega B_z \quad (4.9)$$

ili nakon integriranja:

$$E_\varphi = -i\omega \frac{r}{2} B_z = -i\omega \frac{r}{2} B_{z0} e^{-\frac{1+i}{\delta} z}. \quad (4.10)$$

Sada se  $B_r$  dobiva izračunavanjem (4.8):

$$B_r = \mu\sigma \frac{i}{1+i} \omega \delta \frac{r}{2} B_{z0} \left( e^{-\frac{1+i}{\delta} z} - 1 \right) = \frac{i}{1+i} \frac{r}{\delta} B_{z0} \left( e^{-\frac{1+i}{\delta} z} - 1 \right). \quad (4.11)$$

Ovo razmatranje zanemaruje utjecaj  $B_r$  na  $E_\varphi$ . To je dobra aproksimacija na dnu diska kad je  $B_r$  zanemariv, ali dublje u disku (tj., za veće  $z$ )  $B_r$  postaje veće od  $B_z$  i aproksimacija više ne vrijedi.

Prosječna sila levitacije je:

$$\begin{aligned} \langle F_z \rangle &= \frac{1}{2} \int \text{Re} \left[ J_\varphi^* B_r \right] d^3x = \frac{\sigma \omega B_{z0}^2}{2\delta} \int \frac{r^2}{2} \text{Re} \left[ \frac{-1}{1-i} e^{-\frac{1-i}{\delta} z} \left( e^{-\frac{1+i}{\delta} z} - 1 \right) \right] d^3x = \\ &= \frac{\sigma \omega B_{z0}^2}{8\delta} \int r^2 \left( e^{-z/\delta} \left( \cos \frac{z}{\delta} + \sin \frac{z}{\delta} \right) - e^{-2z/\delta} \right) r dr d\varphi dz = \\ &= \frac{\sigma \omega B_{z0}^2}{8\delta} 2\pi \frac{R^4}{4} \int_0^d \left( e^{-z/\delta} \left( \cos \frac{z}{\delta} + \sin \frac{z}{\delta} \right) - e^{-2z/\delta} \right) dz = \frac{\sigma \omega B_{z0}^2}{8\delta} 2\pi \frac{R^4}{4} f(d) \end{aligned} \quad (4.12)$$

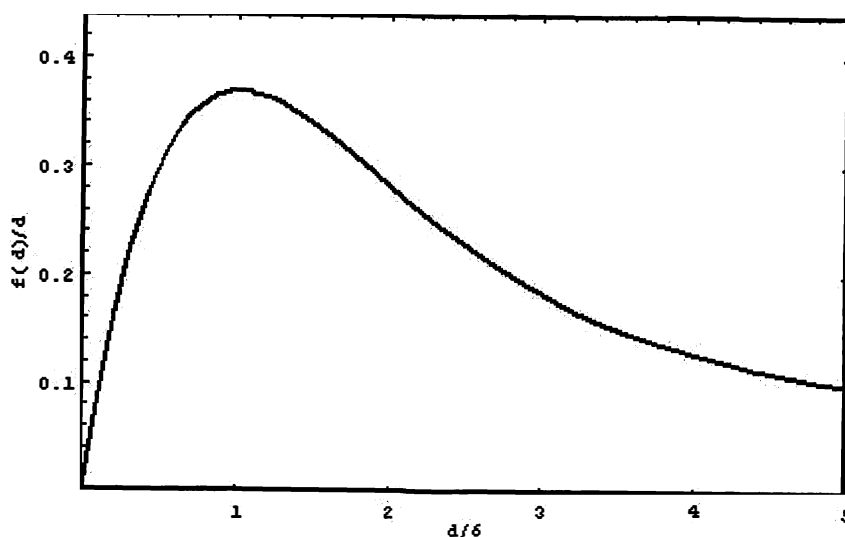
gdje sam s  $f(d)$  označila funkciju:

$$f(d) = \frac{\delta}{2} \left( 1 + e^{-2d/\delta} \right) - \delta e^{-d/\delta} \cos \frac{d}{\delta}. \quad (4.13)$$

Pri izračunu gornjeg izraza koristila sam programski paket Mathematica [8]. Za danu jačinu polja i radijus diska, omjer sile levitacije i sile teže ponaša se kao

$$\left| \frac{\langle F_{\text{levitacije}} \rangle}{F_{\text{gravitacije}}} \right| \propto \frac{f(d)}{d}. \quad (4.14)$$

Na slici 10 prikazan je graf te funkcije.



*Slika 14. Graf funkcije  $f(d)/d$ .*

Iz ovog grafa uočava se da postoji debljina diska za koju je levitacija maksimalna. Uz sve aproksimacije, optimalna debljina diska je jednaka dubini skina za materijal od kojeg je disk izrađen.

Međutim, od svih aproksimacija, najlošija je ona koja dovodi do jednadžbe (4.10). Naime,  $E_\varphi$  ne ovisi samo o  $B_z$ , već i o  $B_r$ . Za tanke diskove  $B_r$  je zanemariv, ali postaje bitan u unutrašnjosti debljih diskova. Njegovim

uzimanjem u obzir jednadzba (4.10) dobila bi još jedan član koji bi ovisio o  $B_r$ . To bi opet preko (4.8) utjecalo na  $B_r$ , pa bi račun trebalo provesti iterativno. Kvalitativno, uvođenje tog člana dovelo bi do pomicanja maksimuma funkcije  $f(d)/d$  prema manjim vrijednostima, tj. optimalna debljina bila bi manja od  $\delta$ . Umjesto takvog kompliciranog računa, pokušat ću  $\delta$  odrediti eksperimentalno.

## 5. MJERENJA



*Slika 15. Lebdenje diska debljine 4 mm*

Prilikom mjerenja eksperimentalno sam provjerila ovisnost visine levitacije o parametrima levitiranog objekta: debljini i radijusu.

Prethodna razmatranja dovela su me do zaključka da se visina levitacije povećava porastom sile. Pojam visina levitacije, predstavlja visinu ravnotežnog položaja diska (u tom položaju sila levitacije jednaka je težini levitirajućeg objekta). Ako za vrijeme levitacije, pritiskom ruke disk spustimo ispod ravnotežnog položaja, sila levitacije postaje veća od težine diska pa će se nakon što ga otpustimo disk ponovno vratiti u ravnotežni položaj. Analogno, ako disk podignemo iznad ravnotežnog položaja sila postaje manja od težine diska pa on pada do ravnotežnog položaja [4].

Najprije sam mjerenja izvršila na naponu izvora 100 V. Mjerenja sam provela za diskove različitih debljina i radijusa. Za disk debljine 4 mm rezultatna sila (razlika sile levitacije i težine) je najvećeg iznosa, tj. taj disk postigao je najveću

visinu. Preostali diskovi debljine 1mm, 1.5mm, te 12mm levitirali su, no vrlo slabo.

Što se pak radijusa tiče, disk radijusa 6.5cm postigao je najveću visinu levitacije, dok su diskovi radijusa 5cm i 7.5cm tek neprimjetno levitirali.

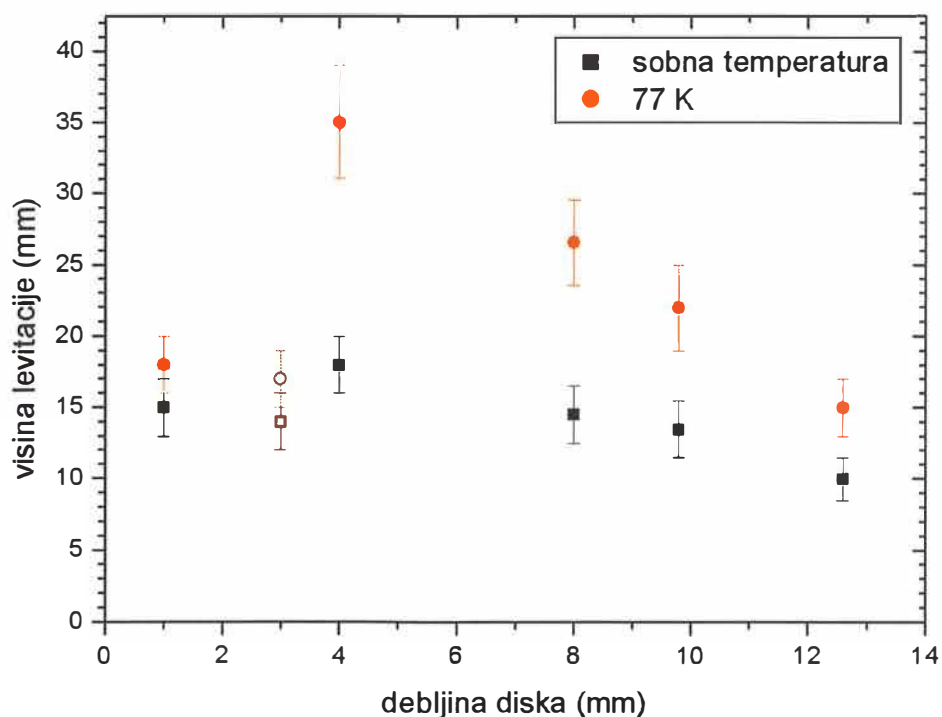
Diskovi radijusa 7.5 cm i 5 cm izlijeću iz polja uslijed neravnomjerne raspodjele radijalnih sila koje uzrokuje vertikalna komponenta polja  $B_Z$ , kako je to opisano u trećem poglavlju. Tako zbog nemogućnosti stabilizacije nisam mogla odrediti visinu levitacije diska radijusa 7.5 cm te 5 cm.

Budući da je levitacija bila slaba za napon izvora 100 V, mjerenja sam izvela za veći broj diskova pri naponu od 220 V. Diskovi su bili radijusa 6.5 cm te debljine 1mm, 3 mm, 4 mm, 8 mm, 9.8 mm i 12.6 mm. Visinu levitacije mjerila sam za diskove koji su bili na sobnoj temperaturi te za diskove koji su bili ohlađeni na temperaturu vrelišta dušika. Rezultati tih mjerenja prikazani su u tablici 1 i u grafu na slici 16.

Kao što je iz grafa vidljivo diskovi su bolje levitirali kad su bili ohlađeni tekućim dušikom. Razlog tome je što se prilikom hlađenja kod većine metala električna otpornost smanjuje. Pošto sam ohladila disk u tekućem dušiku smanjila sam mu električnu otpornost oko 4 puta, što se očitovalo porastom visine ravnotežnog položaja. Osim što se smanjila električna otpornost, i fazni pomak  $\varphi$  povećao se oko 4 puta, te je i iz tog razloga visina ravnotežnog položaja porasla.

DEBLJINA TANJURA / mm	VISINA LEVITACIJE / mm	
	sobna temperatura	T = 77 K
1	15±2	18±2
3	14±2	17±2
4	18±2	35±4
8	14.5±2	26.5±3
10	13.5±2	22±3
12	10±1.5	15±2

**Tablica 1. Mjerenje visine za različite debljine diska.**



**Slika 16. Graf ovisnosti visine levitacije o debljini diska pri sobnoj temperaturi**

Iz priloženih tablica i grafova može se vidjeti da povećanjem debljine diska visina levitacije najprije raste do neke točke, a zatim opada. Rezultantna sila jednaka je razlici sile levitacije i težine, a za rezultantnu silu najvećeg iznosa dobivamo optimalnu debljinu tanjura.

Također pri toj debljini diska visina ravnotežnog položaja je najveća. U mojem slučaju optimalna debljina diska je 4 mm što je i vidljivo iz grafičkog prikaza.

Istaknula bi još da točke na grafu, za disk debljine 3 mm odstupaju mnogo više od ostalih vrijednosti, a razlog tome je vjerojatno taj što je taj disk izrađen od nekog drugog materijala, drugačije vodljivosti.

Isključimo li mjerenje za debljinu 3 mm iz razmatranja, možemo pomnije promotriti ovisnost visine levitacije o debljini. Nažalost, nisam imala disk debljine 6 mm pa o položaju maksimuma moram naslućivati iz oblika funkcionalne ovisnosti. Izgleda kao da je pravi maksimum crvenih točaka pomaknut prema nižim vrijednostima od maksimuma crnih točaka. To se može lako objasniti činjenicom da je hlađenjem vodljivost aluminijska povećana četiri puta pa se prema jednadžbi (2.24) dubina skina smanjuje dva puta.

Tijekom mjerenja uočila sam da se feromagnetska jezgra mnogo manje grije nego što je to bio slučaj kod prethodnog levitatora. Međutim, pri naponu izvora od 220 V zagrijavala se je bakrena žica pa preko nje toplinskim kontaktom i željezna jezgra. Tada je trebalo dosta vremena da se cijeli levitator ohladi.

Budući da je omski otpor žica bio oko  $2 \Omega$ , pri struji od  $20 \text{ A}$  razvija se snaga od  $800 \text{ W}$  koja se pretvara u toplinu. Ovaj nedostatak mogao bi se otkloniti namatanjem primarne i sekundarne zavojnice s većim brojem navoja pa bi se dobilo jače polje uz manje grijanje.



## 6. METODIČKI DIO

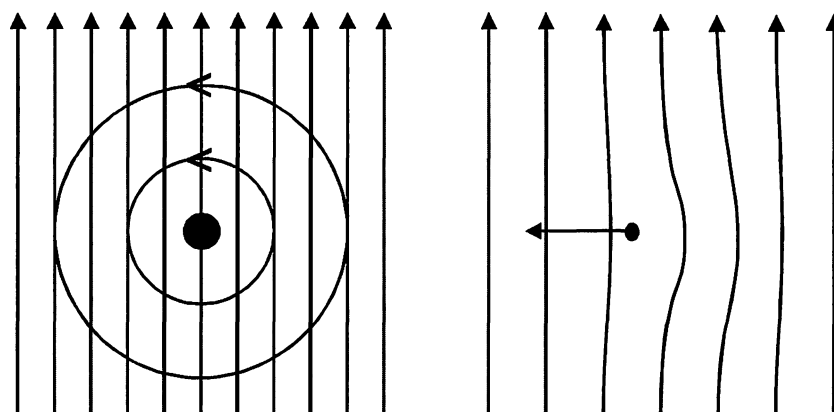
Na kraju ovoga rada, osvrtom na čitav problem želim istaknuti kako se ova tema može obraditi i u srednjim školama. Iako je način obrade opisan ovim radom pretežak, pojednostavljenim opisom učenici bi mogli shvatiti bit problema.

Pojava elektromagnetske levitacije može se obraditi u sklopu elektromagnetizma, objašnjena pomoću osnovnih zakona elektromagnetske indukcije, koja se obrađuje u trećem razredu srednje škole. [7], [9], [10]

### 6.1 Lorentzova sila

Prilikom razmatranja magnetskog polja, a nakon uvođenja pojma gustoća magnetskog toka obrađuje se Lorentzova sila.

Pretpostavimo da imamo homogeno magnetsko polje  $H$ , odnosno gustoću magnetskog toka  $B$ . Neka se u njemu giba konstantnom brzinom  $v$  naboj  $q$ . Svaki električni naboj u gibanju stvara svoje magnetsko polje. Silnice magnetskog polja naboja u gibanju obavijaju njegovu putanju.



*Slika 17. Sila na elektron ili na vodič u magnetskom polju*

Koncentrični krugovi (slika 17) pokazuju magnetsko polje naboja u gibanju. Desno od naboja bit će gušće magnetske silnice, jer se silnicama polja  $H$  pribrajaju i silnice polja od naboja u gibanju, a lijevo od naboja silnice će bit rjeđe jer se od polja  $H$  neke silnice «neutraliziraju» sa silnicama polja od naboja u gibanju.

Silnice nastoje da poprime jednaku gustoću i potiskuju naboj u gibanju prema lijevoj strani.

Dakle, na naboj djeluje sila koju je Lorenz izrazio u sljedećem obliku:

$$F_e = QvB \sin \alpha \quad . \quad (6.1)$$

Iz formule vidimo da je sila na naboj koji se giba brzinom  $v$  u magnetskom polju gustoće  $B$  proporcionalna količini naboja  $Q$ , brzini naboja i jakosti magnetskog polja. Sila je pak okomita na vektor brzine i vektor polja. U navedenom izrazu  $\alpha$  je kut između vektora brzine i vektora magnetskog polja, a za  $\alpha = 90^\circ$ , tj., ako je brzina okomita na polja  $B$ , relacija poprima oblik

$$F_e = QvB \quad (6.2)$$

Ako se u homogenom magnetskom polju nalazi vodič kroz koji teče struja  $I$ , onda i na vodič mora djelovati sila. Sila na vodič u magnetskom polju je zbroj sila na svaki elektron u gibanju.

Na element vodiča  $\Delta l$  djelovat će sila  $\Delta F$ ,

$$\Delta F = F_e n S \Delta l \quad (6.3)$$

Za vodič duljine  $l$  stalnog presjeka  $S$  u konstantnom magnetskom polju ukupna sila na vodič bit će

$$F = F_e nSl \quad (6.4)$$

Uvrstimo li sada veličinu Lorentzove sile na elektron dobijemo

$$F = evBnSl. \quad (6.5)$$

Kako je prema Ohmovu zakonu  $I = neSv$ , izraz poprima sljedeći oblik:

$$F = BI, \quad (6.6)$$

tj. sila na vodič u magnetskom polju razmjerna je jakosti struje i duljini vodiča. Ova relacija vrijedi za slučaj okomitosti vodiča i magnetskog polja. Tu silu na vodič u magnetskom polju zovemo Amperova sila (samo drugačiji zapis Lorentzove sile).

## 6.2 Elektromagnetska indukcija i Faradayev zakon

Gibanje električnog naboja pod utjecajem električnog polja ima uvijek kao posljedicu magnetsko polje, a pomoću magnetskog polja može se pobuditi električna struja, odnosno napon, i ta se pojava naziva elektromagnetska indukcija.

Pomoću magnetskog polja moguće je pokrenuti struju u vodiču. Ako vodič miruje, nema nekih promjena jer slobodni elektroni u metalu izvode termičko gibanje, ali ono je podjednako u svim smjerovima.

Pomičemo li, međutim, vodič nekom brzinom u magnetskom polju, svi slobodni elektroni gibaju se istom brzinom u magnetskom polju, i na svaki elektron djeluje Lorentzova sila  $F = evB$ . Ta sila djeluje u istom smjeru i okomita je na polje  $\mathbf{B}$  i brzinu  $\mathbf{v}$ . Lorentzova sila pokreće elektrone prema jednom kraju vodiča

dok je drugi kraj siromašniji slobodnim elektronima. Tako je zbog gibanja vodiča u magnetskom polju pokrenut električni naboj u gibanje uzduž vodiča, pobuđena je određena jakost struje, a na krajevima vodiča imamo inducirani napon.

Inducirani napon se javlja samo kod promjene magnetskog toka i obrnuto je proporcionalan vremenu  $\Delta t$  u kojem se magnetski tok promijeni.

Tako izraz za Faradayev zakon elektromagnetske indukcije poprima oblik:

$$U = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \quad (6.7)$$

tj., inducirani napon proporcionalan je promjeni magnetskog toka  $\Delta\phi$ , a obrnuto proporcionalan vremenu u kojem se magnetski tok promijenio.

Najčešće se magnetska indukcija objašnjava pokusom u kojem se magnet uvlači u zavojnicu. Pritom se ističe kako se uvlačenjem magneta u zavojnicu inducira takav napon na njoj i takva struja u njoj da ona stvara svoje inducirano magnetsko polje koje se suprotstavlja gibanju magneta. Inducirani napon suprotan je uzroku indukcije. To je tzv., Lenzovo pravilo.

Lenzovo pravilo je zapravo logična posljedica zakona očuvanja energije. Inducirani napon predstavlja određenu količinu energije električnog naboja koja može biti iskorištena ako se na zavojnicu priključi otpor (npr. možemo dobiti toplinsku energiju). Na tom principu rade indukcijske peći za taljenje metala.

Energija sadržana u induciranom naponu, ne može nastati ni iz čega, tj., izvlačenje i uvlačenje magneta ne može biti bez savladavanja neke sile na putu (bez rada). Tako se elektromagnetskom indukcijom inducira takvo polje u zavojnici da ono pruža otpor pomicanju magneta i nastoji ga zaustaviti.

Lenzovo pravilo zato možemo izraziti u sljedećem obliku

$$U = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \quad (6.8)$$

tj., veličina induciranog napona ovisi o brzini promjene magnetskog toka, a djelovanjem se suprotstavlja uzroku indukcije.

### 6.3 Izmjenični napon i struja

Da bismo dobili izmjenični napon, koristimo se elektromagnetskom indukcijom tj. po zakonu elektromagnetske indukcije vrijedi

$$U = -N \frac{\Delta(BS)}{\Delta t} . \quad (6.9)$$

U konstantnom magnetskom polju ( $B = const.$ ) može rotirati zavojnica i njezinom rotacijom mijenja se površina. Kada zavojnica zatvara kut  $\alpha$  s poljem  $\mathbf{B}$ , kroz površinu prolazi manji broj silnica nego kad je  $\alpha = 0$ . Najmanji magnetski tok bit će kada je kut  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Okretanjem kutnom brzinom  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$  kut  $\alpha$  se mijenja kao  $\alpha = \omega t$ , a s time se mijenja i magnetski tok odnosno napon. Tako izraz za inducirani napon glasi

$$U = U_0 \sin \omega t \quad (6.10)$$

pri čemu je  $U_0$  maksimalna vrijednost napona, a  $\omega = 2\pi\nu$  nazivamo kružnom frekvencijom.

Ako se pak na izvor struje priključi i otpor, primjenom Ohmova zakona dobiva se da kroz njega teče struja jakosti

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0 \sin \omega t}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t , \quad (6.11)$$

pri čemu  $I_0$  označava maksimalnu vrijednost jakosti struje.

## 6.4 Otpori izmjenične struje

U krugu izmjenične struje možemo imati ohmski (radni), induktivni i kapacitivni otpor. Iznos induktivnog otpora je  $R_L = \omega L$ , a kapacitivnog  $R_C = 1/\omega C$ .

Ako je u krugu omski otpor tada su jakost struje i napon u fazi, dok kod induktivnog otpora struja zaostaje za naponom, a kod kapacitivnog struja ide ispred napona. Ukupni otpor kruga izmjenične struje, impedanciju, određujemo iz sljedećeg izraza:

$$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (6.12)$$

pri čemu impedancija ima dimenziju otpora. Jakost izmjenične struje imat će određeni fazni pomak  $\varphi$  u odnosu prema naponu, tj. ako je izmjenični napon dan s  $U = U_0 \sin \omega t$ , tada će trenutna jakost struje biti

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.13)$$

Kapacitivni otpor daje pozitivan fazni pomak, najviše  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , dok induktivni otpor daje negativan fazni pomak, najviše  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

Pomak u fazi jakosti struje prema naponu može se odrediti prema sljedećem izrazu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_C - R_L}{R}. \quad (6.14)$$

Prethodni izraz daje sljedeće zaključke:

- 1) jakost struje ide ispred napona ako je kapacitivni otpor veći od induktivnog otpora,  $R_C \rangle R_L$
- 2) jakost struje zaostaje za naponom ako je induktivni otpor veći od kapacitivnog,  $R_L \rangle R_C$
- 3) jakost struje je u fazi s naponom ako su induktivni i kapacitivni otpori jednaki tj.,  $R_L = R_C$ . U tom slučaju frekvencija izmjenične struje u krugu jednaka je  $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ . Ako su induktivni i kapacitivni otpori jednaki dolazi do električne rezonancije.
- 4) pomak jakosti struje prema naponu je  $\pm 90^\circ$  ako je omski otpor  $R$  zanemarivo malen.

## 6.5 Izvod izraza za silu levitacije

Pojava elektromagnetske levitacije može se objasniti modelom kružne petlje smještene u nehomogenom elektromagnetskom polju primarne zavojnice .

U toj kružnoj strujnoj petlji inducira se vrtložna struja. Kako objektom teče struja, a on se nalazi u magnetskom polju, na njega djeluje Amperova sila (odnosno sila levitacije). Srednjoškolci su upoznati s izrazom za Amperovu silu koja je oblika

$$\mathbf{F} = (\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \cdot I \quad . \quad (6.15)$$

Polje primarne zavojnice djeluje na vodič pod nekim kutem, pa ga rastavimo na radijalnu i vertikalnu komponentu,  $B_r$  odnosno  $B_z$ . Vektorski umnožak  $\hat{z}B_z$  i  $\mathbf{l}$  daje radijalni vektor sile, a takve sile djeluju iz svih obodnih točaka, radijalno su simetrične i jednakog iznosa pa je učenicima jasno da se te sile poništavaju [4].

Sila levitacije jednaka je stoga umnošku radijalne komponente  $B_r$  i vrtložne struje  $I$ , i okomita je na ravninu koju oni određuju. (Radi zornosti, prethodno

navedeno učenicima možemo ilustrirati slikom petlje u nehomogenom magnetskom polju iz odjeljka 2.1 slika 6.)

Ukupna sila zbroj je takvih sila iz svih obodnih točaka levitirane petlje, pa izraz za Amperovu silu poprima oblik

$$F_z = IB_r 2r\pi . \quad (6.16)$$

Struju inducira neki napon, a on je po Faradayevom zakonu jednak derivaciji magnetskog toka po vremenu, tj.  $U = -\frac{d\phi_z}{dt}$ .

Inducirani napon je suprotnog smjera od napona koji ga je uzrokovao, zato u izrazu za napon imamo negativan predznak (Lenzovo pravilo).

Izraz za tok magnetskog polja kaže da je magnetski tok jednak umnošku magnetskog polja i površine kroz koju prolazi magnetski tok, a kako u navedenom modelu samo vertikalna komponenta inducira struju, izraz za magnetski je oblika,  $\phi_z = B_z \cdot S$ .

Zbog izmjenične struje u primarnoj zavojnici, komponente polja su također izmjenične tj.,

$$B_z = B_{z0} \cdot \cos \omega t \quad (6.16a)$$

$$B_r = B_{r0} \cdot \cos \omega t . \quad (6.16b)$$

Nakon vrlo jednostavnog računa proizlazi izraz za inducirani napon:

$$U = B_{z0} S \omega \sin \omega t . \quad (6.17)$$

Da bi sad odredili izaz za induciranu struju, koristimo Ohmov zakon, ali prije svega valja istaknuti kako ukupni otpor levitiranog objekta nije samo ohmski već kod izmjeničnih struja imamo pojavu induktivnog otpora,  $R_L$ . Otpor stoga

zamjenjujemo impendancijom  $Z$ , koja je dana izrazom  $Z = \sqrt{R^2 + R_L^2}$ .

Induktivni otpor možemo pisati kao umnožak kružne frekvencije struje i induktiviteta levitiranog objekta,  $R_L = \omega \cdot L$ .

Jakost struje sada je sljedećeg oblika:

$$I = \frac{U}{Z} . \quad (6.17)$$



Osim navedenog, još jednu pojavu vezanu uz izmjenične struje treba istaknuti učenicima, a to je fazni pomak  $\varphi$ . On se očituje u kašnjenju struje za elektromotornom silom. Zbog upravo navedenog, izraz za jakost struje pišemo u sljedećem obliku

$$I = \frac{B_{z0} \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)}{Z}. \quad (6.18)$$

Uvrstimo li sada dobivene vrijednosti u početni izraz za silu levitacije dobivamo:

$$F = \frac{B_{r0} \cdot B_{z0} \cdot S \cdot \omega}{Z} \cdot 2r\pi \cdot \cos \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.19)$$

Trigonometrijskim adicijonim formulama može se pokazati jednakost

$$\cos \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \sin(2\omega t + \varphi) + \sin \varphi. \quad (6.20)$$

Radijalna komponenta polja mijenja se s radijusom pa je stoga želimo izraziti pomoću vertikalne komponente, a to možemo napraviti primijenimo li Gaussov zakon magnetske divergencije. Taj zakon kaže da je tok magnetskog polja iz bilo kojeg zatvorenog volumena jednak nuli. (U odjeljku 2.1, sam koristila izraz  $\nabla \mathbf{B} = 0$ , [5] no taj izraz srednjoškolu nije poznat kao niti određivanje radijalne komponente korištenjem polarnih koordinata).

Izraz za radijalnu komponentu,  $B_r$  izraženu pomoću vertikalne komponente,  $B_z$  učenicima možemo objasniti primjenom Gaussovog zakona na model cilindra, čijim razmatranjem dobivamo sljedeći izraz [4]

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\Delta B_z}{\Delta z}. \quad (6.21)$$

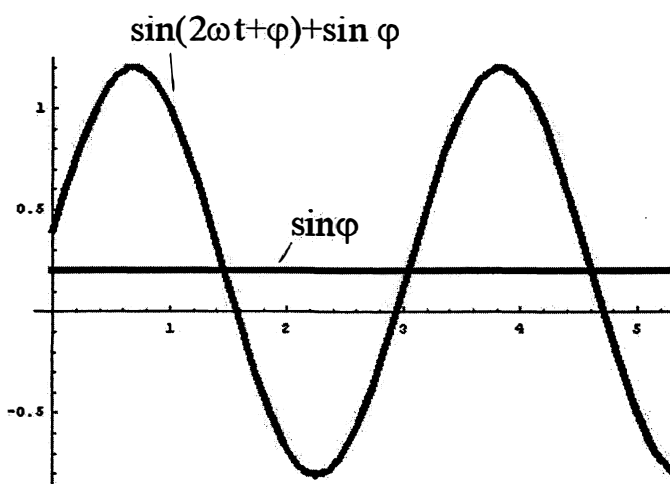
Na isti način veličinu  $B_{r0}$  možemo izraziti pomoću Gaussova zakona, tj.

$$B_{r0} = -\frac{r}{2} \frac{dB_{z0}}{dz}. \quad (6.21)$$

Kada sada sve izvedeno uvrstimo u izraz za silu levitacije, te pritom primijenimo trigonometrijske adicione formule i na kraju nad dobivenim izrazom izvršimo vremensko uprosječivanje (jer srednjoškolu nije poznat izraz za vremenski prosjek produkta dviju kompleksnih veličina, koji sam koristila u odjeljku 2.1 izraz (2.8)), izraz za silu levitacije poprima svoj konačni oblik:

$$F = \frac{r^4 \pi^2}{2Z} B_{z0} \omega \cdot \frac{dB_{z0}}{dz} \cdot \sin \varphi \quad . \quad (6.22)$$

Vremensko uprosječivanje funkcije u jednadžbi (6.20) najzornije je učenicima objasniti grafom prikazanim na slici 18. Iz grafa vide da je usrednjena vrijednost te funkcije jednaka  $\sin \varphi$ .



**Slika 18. Vremensko uprosječivanje sile levitacije**

Na upravo naveden način, korištenjem modela kružne petlje, učenicima se može teorijski objasniti pojava sile levitacije.

Nakon teorijskog razmatranja, učenike se još eksperimentalnim proučavanjem može navesti da uoče vezu između geometrije levitiranog objekta i sile levitacije koristeći pritom diskove i prstenove različitih radijusa i materijala. Eksperiment čini nastavu interesantnijom, ali i zornijom što je prijeko potrebno da bi učenici uočili kako zaključci dobiveni teorijskim razmatranjima zaista vrijede.

## 7. ZAKLJUČCI

Teorijskim razmatranjem i eksperimentalnim proučavanjem došla sam do sljedećih zaključaka:

Da bi neki predmet magnetski levitirao treba posjedovati magnetski moment i treba se nalaziti u nehomogenom magnetskom polju suprotne orijentacije.

Levitacija ne bi bila moguća bez pojave faznog pomaka  $\varphi$  između elektromotorne sile i struje, tj. bez pojave induktivnog otpora.

Sila levitacije ovisi o jakosti magnetskog polja i o brzini prostorne promjene tog polja. Drugim riječima, za levitaciju je potrebno nehomogeno polje.

Povećanjem debljine diska visina levitacije najprije raste do neke točke, a potom opada. Mjerenjima sam odredila optimalnu debljinu diska. Ta debljina iznosi oko 4 mm, što je manje od dubine skina za aluminij koja iznosi 11.6 mm, ali je usporedivo.

Hlađenjem diskova u tekućem dušiku sila levitacije se povećava, a optimalna debljina smanjuje.

Izrađeni levitator pogodan je za pokazne eksperimente u školama jer je lako prenosiv i može se priključiti izravno na gradsku mrežu. Konstrukcijskim poboljšanjima smanjeni su toplinski gubici, a povećana visina levitacije u odnosu na prethodni levitator.

Navedena poboljšanja mogla bi biti još djelotvornija da su namotane zavojnice s većim brojem navoja. O tome treba voditi računa prilikom izrade nekog budućeg levitatora.

## 8. LITERATURA

1. članak «Žaba koja je naučila letjeti» ,  
[http://eskola.hfd.hr/fiz\\_sva\\_stva/maglev/1020\\_frog.html](http://eskola.hfd.hr/fiz_sva_stva/maglev/1020_frog.html).
2. članak «Lebdenje supravodiča»,  
[eskola.hfd.hr/fiz\\_sva\\_stva/maglev/1000\\_uvod.html](http://eskola.hfd.hr/fiz_sva_stva/maglev/1000_uvod.html).
3. Vladimir Šips : «Uvod u fiziku čvrstog stanja» , Udžbenik fizike  
Sveučilišta u Zagrebu, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
4. Samostalni eksperimentalni rad : «Lebdenje metalnih objekata normalne  
električne vodljivosti u elektromagnetskom polju»,  
[marvin.kset.org/~sipka/Fizika96/sadržaj.htm](http://marvin.kset.org/~sipka/Fizika96/sadržaj.htm)
5. J.D.Jackson : «Classical Electrodynamics», Wiley, New York, 1999.
6. Edward M.Purcell : «Elektricitet i magnetizam», Udžbenik fizike  
Sveučilišta u Berkeleyu, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988.
7. Eugen Stanić : «Osnove elektrotehnike» , Udžbenik elektrotehnike u  
srednjim školama, Školska knjiga, Zagreb, 1994.
8. programski paket Mathematica 5.0, Wolfram Research 2003
9. Vladimir Paar : «Elektromagnetizam» , Priručnik za učenike u srednjoj  
školi, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
10. Bek-Marković-Tomaš : «Fizika 2» , Priručnik za učenike u srednjoj školi,  
Školska knjiga, Zagreb, 1984.