SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petar Bakić

GEOMETRIJA SHEMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Goran Muić

Zagreb, srpanj 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Iako su se neki pojmovi vezani za algebarsku geometriju pojavili mnogo ranije, može se slobodno reći kako je razvoj moderne algebarske geometrije započeo u devetnaestom stoljeću. Osnovna zadaća ove grane matematike bila je opisivanje rješenja sustava polinomijalnih jednadžbi. Za razliku od polinomijalnih jednadžbi u jednoj varijabli, za koje najčešće želimo odrediti konkretna rješenja, u slučaju više varijabli često je zanimljivije promatrati skupove rješenja kao geometrijske objekte. Primjerice, jednadžbu $x^2 + y^2 = 1$ prirodno je tumačiti kao opis jedinične kružnice, dok sustav jednadžbi

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad x + y + z = 1$$

dobiva mnogo više značenja ako imamo na umu da skup rješenja predstavlja hiperbolu dobivenu presjekom stošca i ravnine. Za razvoj algebarske geometrije presudna je bila ideja algebraizacije: svakom geometrijskom objektu (tj. skupu rješenja nekog sustava polinomijalnih jednadžbi) možemo pridružiti određeni prsten polinomijalnih (tzv. regularnih) funkcija čija će svojstva odražavati geometrijsku strukturu objekta kojeg promatramo. Takav pristup omogućuje korištenje algebarskih metoda u geometrijskim razmatranjima, ali i geometrijske intuicije u algebarskim problemima. Ključnu ulogu u ovom pristupu imao je Hilbertov teorem o nulama, koji uspostavlja vezu između geometrijskih objekata i ideala u prstenu polinomijalnih funkcija.

Do sredine dvadesetog stoljeća teorija je značajno napredovala: postignuti su brojni važni rezultati i ostvarene su poveznice s drugim granama matematike, pogotovo s teorijom brojeva. Ipak, velik problem još je uvijek ležao u činjenici da nije postojao jedinstveni "jezik" algebarske geometrije. Mnogi utjecajni matematičari (spomenimo samo neke: Emmy Noether, Wolfgang Krull, André Weil, Oscar Zariski, itd.) pokušavali su formulirati pristup koji bi bio dovoljno općenit da obuhvati dotadašnju teoriju i omogući daljnji napredak. Prvi je u tome u potpunosti uspio Alexander Grothendieck, uvođenjem shema u svojoj knjizi Éléments de géométrie algébrique 1960. godine.

Cilj ovog diplomskog rada je izlaganje osnova teorije shema, odnosno njezine primjene u algebarskoj geometriji. Velik pomak u odnosu na klasičnu algebarsku geometriju predstavlja uvođenje proizvoljnih komutativnih prstenova na mjesto koje su tradicionalno zauzimali prsteni polinoma. Ova promjena omogućuje primjenu geometrijskih metoda u puno većoj općenitosti.

U prvom poglavlju iznosimo najvažnije rezultate i pojmove iz klasične teorije, na koje ćemo se često referirati u daljnjim fazama generalizacije. U drugom poglavlju opisujemo način na koji skup svih prostih ideala proizvoljnog komutativnog prstena možemo promatrati kao geometrijski objekt. Treće poglavlje bavi se uvođenjem snopova, koji daju dodatnu strukturu topološkim prostorima i u našem slučaju poopćuju prstene regularnih funkcija. Konačno, u četvrtom poglavlju definiramo sheme i opisujemo neke njihove najvažnije primjere. U petom, posljednjem poglavlju, istražujemo osnovna svojstva shema i povezujemo ih s poznatim rezultatima u klasičnoj teoriji.

Koristim priliku kako bih se zahvalio mentoru, prof. dr. sc. Goranu Muiću, na brojnim korisnim savjetima i upoznavanju s algebarskom geometrijom.

Poglavlje 1

Osnovni rezultati i pojmovi

U uvodnom poglavlju definiramo osnovne geometrijske pojmove koje ćemo kasnije generalizirati, te navodimo neke bitne rezultate i primjere koji će nam služiti kao nit vodilja u daljnjem stupnju apstrakcije. U pozadini teorije stoje algebarski pojmovi i metode, stoga najprije iznosimo osnovne činjenice iz algebre koje će nam biti potrebne za razumijevanje gradiva. Većina rezultata iskazana je, radi sažetosti, bez dokaza. Dokazi algebarskih tvrdnji iz 1.1 mogu se naći u [3] i [2], dok su geometrijske tvrdnje koje navodimo dokazane u [1] i [4].

1.1 Osnovni algebarski pojmovi

Algebarska geometrija je započela proučavanjem nultočaka polinomijalnih jednadžbi, zbog čega se prirodno javlja potreba za poznavanjem svojstava raznih prstena polinoma. Kao što smo spomenuli u uvodu, velik dio ovog rada bavi se izgradnjom teorije koja omogućava rad s proizvoljnim prstenima u ulozi koju su tradicionalno imali prsteni polinoma. Zbog toga će nam biti korisne neke činjenice iz opće teorije prstenova. Pretpostavljamo poznavanje definicije prstena i osnovnih pojmova vezanih uz prstenove (homomorfizam, ideal), te za početak iznosimo neke definicije i rezultate vezane uz ideale.

Definicija 1.1.1. *Neka je R prsten i $P \subsetneq R$ pravi ideal. Kažemo da je P*

- *prost, ako za svaka dva ideala $I, J \subseteq R$ vrijedi $IJ \subseteq P \Rightarrow (I \subseteq P$ ili $J \subseteq P)$,*
- *potpuno prost, ako za svaka dva elementa $x, y \in R$ vrijedi $xy \in P \Rightarrow (x \in P$ ili $y \in P)$.*

Napomena 1.1.2. *Lako se pokazuje da je svaki potpuno prost ideal ujedno i prost, te da su u komutativnim prstenovima ova dva pojma ekvivalentna. Budući da ćemo uglavnom raditi s komutativnim prstenovima, koristit ćemo samo termin "prosti ideal".*

Definicija 1.1.3. *Kažemo da je pravi ideal M u prstenu R maksimalan ako nije strogo sadržan ni u jednom pravom idealu, to jest ako za svaki ideal $I \subseteq R$ vrijedi implikacija*

$$M \subseteq I \subseteq R \Rightarrow (I = R \text{ ili } I = M).$$

Netrivijalna je činjenica da svaki prsten s jedinicom sadrži barem jedan maksimalan ideal. Ovaj rezultat je poznat i pod nazivom "Krullov teorem", a dokazuje se primjenom Zornove leme. Lako je provjeriti da je u prstenu s jedinicom svaki maksimalan ideal ujedno i prost.

Prisjetimo se da za svaki ideal $I \subseteq R$ možemo promatrati kvocijentni prsten R/I. Upravo struktura kvocijentnog prstena daje jednu od najbitnijih karakterizacija prostih, odnosno maksimalnih ideala:

Propozicija 1.1.4. *Neka je R komutativan prsten s jedinicom.*

i) Ideal $P \subseteq R$ je prost ako i samo ako je R/P integralna domena.

ii) Ideal $M \subseteq R$ je maksimalan ako i samo ako je R/M polje.

Osim svojstava pojedinih ideala, korisno je promatrati i zajednička svojstva svih ideala u prstenu. Jedna bitna klasa prstenova opisana je sljedećom propozicijom:

Propozicija 1.1.5. *Neka je A komutativan prsten. Tada je ekvivalentno*

i) Svaki rastući niz ideala $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \dots$ se stabilizira, tj. postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $I_n = I_{n+1} = \dots$

ii) Svaki ideal $I \subseteq A$ je konačnogeneriran.

iii) Svaki neprazan skup ideala iz A ima maksimalni element s obzirom na inkluziju.

Prstene koji zadovoljavaju gornja tri svojstva nazivamo Noetherinim prstenovima.

Prije nego što krenemo proučavati geometrijske objekte, promotrimo još jednu važnu konstrukciju koja je čisto algebarska, ali karakteristična upravo za algebarsku geometriju:

Neka je A komutativan prsten s jedinicom. Kažemo da je $S \subseteq A$ multiplikativan skup ako je $1 \in S$ i

$$x, y \in S \Rightarrow xy \in S.$$

Na skupu $A \times S$ uvodimo relaciju

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S : s(s_1 a_2 - s_2 a_1) = 0$$

Ovime je na $A \times S$ definirana relacija ekvivalencije; klasu koja sadrži (a, s) označavamo s a/s (ili $\frac{a}{s}$), a skup svih klasa sa $S^{-1}A$ (ili, manje standardno, s A_S). Na $S^{-1}A$ definiramo zbrajanje

$$\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2}$$

i množenje:

$$\left(\frac{a_1}{s_1}\right)\left(\frac{a_2}{s_2}\right) = \frac{a_1 a_2}{s_1 s_2}.$$

Nije teško pokazati da su ove operacije doista dobro definirane te da je $(S^{-1}A, +, \cdot)$ prsten. Prsten koji smo upravo konstruirali naziva se **prsten razlomaka** (kvocijenata) od A po S (govorimo i o lokalizaciji A po S). Uočimo da je, ako je $0 \in S$, prsten $S^{-1}A$ trivijalan, dok s $0 \notin S$ dobivamo komutativan prsten s $1 \neq 0$.

Primjer 1.1.6. *Ako je A integralna domena, možemo uzeti $S = A \backslash \{0\}$. U tom slučaju je $S^{-1}A$ polje, i to najmanje polje koje sadrži A. Kažemo da se radi o **polju razlomaka** od A.*

Napomena 1.1.7. *Prstenovi A i $S^{-1}A$ su povezani prirodnim homomorfizmom $\varphi : A \to S^{-1}A$ zadanim s*

$$a \mapsto \frac{a}{1}.$$

Prsten $S^{-1}A$ možemo karakterizirati sljedećim univerzalnim svojstvom: ako je $f : A \to B$ homomorfizam takav da je $f(s)$ invertibilan za svaki $s \in S$, onda postoji homomorfizam $g : S^{-1}A \to B$ takav da vrijedi $f = g\varphi$.

Za kraj, prisjetimo se definicije algebarski zatvorenog polja:

Definicija 1.1.8. *Za polje k kažemo da je algebarski zatvoreno ako svaki polinom s koeficijentima iz k ima barem jednu nultočku u k.*

Napomena 1.1.9. *Iz prethodne definicije lako slijedi da su* sve *nultočke polinoma s koeficijentima iz algebarski zatvorenog polja k sadržane u k.*

S ovim algebarskim definicijama spremni smo za uvođenje novih geometrijskih pojmova.

1.2 Algebarski skupovi i Nullstellensatz

Neka je k algebarski zatvoreno polje. Skup svih uređenih n-torki elemenata iz k označavat ćemo s $\mathbb{A}^n$; kažemo da se radi o n-dimenzionalnom afinom prostoru.

S $k[T_1, \ldots, T_n]$ (ili kraće, $k[T]$) označimo prsten polinoma s koeficijentima u k s n varijabli. Htjeli bismo proučavati podskupove afinog prostora zadane polinomijalnim jednadžbama. Drugim riječima, želimo promatrati tzv. **algebarske skupove** – skupove oblika

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \{x \in \mathbb{A}^n : f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0\}$$

za neke polinome $f_1, \ldots, f_k \in k[T]$. Odmah primijetimo da skup polinoma (jednadžbi) koji određuje neki algebarski skup nipošto nije jedinstven. Na primjer, točku $(0,0) \in \mathbb{A}^2$ možemo zadati skupom jednadžbi $\{x = 0, y = 0\}$, ali i sa $\{x^2 = 0, x + y = 0, x - y = 0\}$.

Nadalje, uočimo da pod pojmom algebarskog skupa podrazumijevamo skup određen *konačnim* brojem jednadžbi. Očito, mogli bismo promatrati i "algebarske skupove" određene s beskonačno mnogo polinoma iz $k[T]$, to jest skupove oblika

$$V(S) = \{x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0, \forall f \in S\}$$

gdje je $S \subseteq k[T]$ proizvoljan. Naravno, postavlja se pitanje postoje li uopće ovakvi skupovi koje ne možemo zadati pomoću konačno mnogo jednadžbi. Označimo s I ideal u $k[T]$ generiran skupom S. Podsjetimo, to je najmanji ideal koji sadrži skup S; vrijedi jednakost

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i g_i : n \in \mathbb{N}, f_i \in S, g_i \in k[T] \right\} \tag{$*$}$$

Sada je ključna sljedeća opservacija:

Lema 1.2.1. *Vrijedi $V(I) = V(S)$.*

Dokaz.

- $\boxed{\subseteq}$ Ova inkluzija vrijedi trivijalno: ako je x nultočka svakog polinoma iz I, onda je (budući da je $S \subseteq I$) ujedno i nultočka svakog polinoma iz S, stoga vrijedi $x \in V(S)$, dakle $V(I) \subseteq V(S)$.

- $\boxed{\supseteq}$ Ovdje koristimo jednakost $(*)$. Ako je x nultočka svakog polinoma iz S, onda iz prikaza $(*)$ vidimo da je ujedno i nultočka svakog polinoma iz I, tj. vrijedi $x \in V(I)$. Zaključujemo $V(S) \subseteq V(I)$.

□

Konačno, sljedeći teorem pokazuje da promatranjem samo algebarskih skupova određenih konačnim brojem jednadžbi ne umanjujemo općenitost.

Teorem 1.2.2. (Hilbertov teorem o bazi)
Neka je A Noetherin prsten. Tada je i prsten polinoma $A[T]$ Noetherin.

Posebno, prisjetimo li se induktivne definicije prstena polinoma $k[T_1, \dots, T_{n-1}, T_n] = k[T_1, \dots, T_{n-1}][T_n]$ i uzmemo li u obzir očitu činjenicu da je polje k Noetherin prsten, vidimo da je prsten $k[T_1, \dots, T_n]$ Noetherin.

Odavde slijedi da je za proizvoljan skup $S \subseteq k[T]$ ideal I generiran sa S konačnogeneriran, dakle postoje $f_1, \dots, f_k$ takvi da vrijedi $I = (f_1 \dots, f_k)$. Lema 1.2.1 sada implicira

$$V(S) = V(I) = V(f_1, \dots, f_k)$$

iz čega vidimo da skup $V(S)$ možemo zadati konačnim brojem jednadžbi.

Napomena 1.2.3.

i) *Uočimo da su* $\emptyset$ *i* $\mathbb{A}^n$ *algebarski skupovi:* $V(S) = \emptyset$ *vrijedi čim* S *sadrži neki ne-nul konstantni polinom, a imamo i npr.* $V(0) = \mathbb{A}^n$.

ii) *Skupove oblika* $V(f)$*, gdje je* f *nekonstantni polinom iz* $k[T]$*, nazivamo afinim hiperplohama.*

iii) *Očito, vrijedi* $V(S) = \bigcap_{f \in S} V(f)$

Gornji rezultat sada možemo koncizno reformulirati:

Teorem 1.2.4. *Neka je* V *algebarski skup različit od* $\emptyset$ *i* $\mathbb{A}^n$*. Tada je* V *jednak presjeku konačnog broja hiperploha.*

Primjer 1.2.5. *Odredimo sve algebarske skupove u* $\mathbb{A}^1$*:*
Promatramo skup $V = V(f_1, \dots, f_k)$*. Ako su svi polinomi* f_i *jednaki nuli, onda je* $V = \mathbb{A}^n$*. U suprotnom, označimo s* g *najveći zajednički djelitelj od* $f_1, \dots, f_k$*; očito je* V *jednak upravo skupu nultočaka od* g*. Zaključujemo da je* V *konačan (moguće prazan) podskup od* $\mathbb{A}^1$.

Primjer 1.2.6. (Produkt algebarskih skupova) *Neka su* $X \subseteq \mathbb{A}^m$ *i* $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ *algebarski skupovi. Produkt* $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{m+n}$ *je tada također algebarski skup. Ako je* X *zadan jednadžbama* $F_i(T) = 0$*, a skup* Y *s* $G_j(U) = 0$*, onda je* $X \times Y$ *očito zadan jednadžbama* $F_i(T) = G_j(U) = 0$*. Ovdje* F_i *i* G_j *promatramo kao elemente prstena polinoma u* $m + n$ *varijabli:* $k[T_1, \dots, T_m, U_1, \dots, U_n]$.

Lako je provjeriti da algebarski skupovi zadovoljavaju sljedeće relacije:

i) Ako su $I, J \subseteq k[T]$, onda vrijedi

$$V(I) \cup V(J) = V(IJ)$$

ii) Za proizvoljnu familiju ideala $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ vrijedi

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$$

Odavde vidimo da na $\mathbb{A}^n$ možemo definirati topologiju čiji su zatvoreni skupovi upravo algebarski skupovi. Ova topologija se naziva **topologija Zariskog**[1].

Vidjeli smo da svakom podskupu $S \subseteq k[T]$ možemo pridružiti algebarski skup $V(S)$, no slično pridruživanje možemo napraviti i u drugom smjeru:

Definicija 1.2.7. *Za proizvoljan skup $V \subseteq \mathbb{A}^n$ definiramo ideal*

$$I(V) = \{f \in k[T] : f(x) = 0, \forall x \in V\}$$

Napomena 1.2.8. *Upravo definirani ideali određeni podskupovima od $\mathbb{A}^n$ imaju sljedeća svojstva:*

i) $V \subseteq W \Rightarrow I(W) \subseteq I(V)$

ii) $I(\emptyset) = k[T]$

iii) Za svaki $S \subseteq k[T]$ vrijedi $S \subseteq I(V(S))$

iv) Za svaki $V \subseteq \mathbb{A}^n$ vrijedi $V \subseteq V(I(V))$

v) I(V) je ***radikalan ideal****: vrijedi $f^n \in I(V) \Rightarrow f \in I(V)$*

Za iskaz nadolazećih rezultata trebat će nam sljedeća definicija:

Definicija 1.2.9. *Neka je A komutativan prsten i $I \subseteq A$ ideal. Definiramo radikal ideala I:*

$$Rad\, I = \{x \in A : x^n \in I \text{ za neki } n \in \mathbb{N}\}$$

Uočimo da je Rad I ideal. Nadalje, ideal I je radikalan ako i samo ako vrijedi I = Rad I.

Pridruživanja $I \mapsto V(I)$ i $V \mapsto I(V)$ povezana su sljedećim fundamentalnim teoremom.

Teorem 1.2.10. (Hilbertov teorem o nulama – Nullstellensatz)
Za svaki ideal $I \subseteq k[T]$ vrijedi

$$I(V(I)) = Rad\, I.$$

[1] Oscar Zariski (Kobrin, Rusko carstvo, 1899. – Brookline, Massachusetts, SAD 1986.), jedan od najutjecajnijih algebarskih geometara 20. stoljeća.

Ovaj teorem se dokazuje pomoću tzv. *Rabinowitschevog trika* kao posljedica sljedećeg, naoko slabijeg[2] rezultata:

Teorem 1.2.11. *Za svaki pravi ideal $I \subsetneq k[T]$ vrijedi $V(I) \neq \emptyset$.*

Napomena 1.2.12. *U kontekstu prethodnih teorema, bitno je uočiti da za svaki ideal $I \subseteq k[T]$ vrijedi $V(Rad\, I) = V(I)$.*

Navodimo nekoliko direktnih posljedica Hilbertovog teorema o nulama:

Korolar 1.2.13. *Preslikavanje $I \mapsto V(I)$ je bijekcija između svih radikalnih ideala u $k[T]$ i algebarskih skupova u $\mathbb{A}^n$. Inverz ovog preslikavanja dan je s $V \mapsto I(V)$.*

Dokaz. Ako je I radikalan, imamo $I = \operatorname{Rad} I$, dakle $I(V(I)) = I$. Odavde vidimo da je $I \mapsto V(I)$ injekcija. S druge strane, prema prethodnoj napomeni, svaki algebarski skup V možemo zapisati kao $V = V(J)$ za neki radikalni ideal J. Sada imamo

$$V(I(V)) = V(J) = V,$$

iz čega čitamo da je $I \mapsto V(I)$ surjekcija. Pokazali smo, dakle, da je $I \mapsto V(I)$ bijekcija; iz gornje diskusije je očito da su $V \mapsto I(V)$ i $I \mapsto V(I)$ međusobno inverzna preslikavanja. □

Sljedeći korolar nam daje alternativni pogled na točke iz $\mathbb{A}^n$.

Korolar 1.2.14. *Preslikavanje $\alpha \mapsto I(\{\alpha\})$ je bijekcija između točaka iz $\mathbb{A}^n$ i maksimalnih ideala u $k[T]$.*

Dokaz. Uočimo da je $I(\{\alpha\})$ doista maksimalni ideal: evaluacija $f \mapsto f(\alpha)$ je očito epimorfizam s $k[T]$ na k s jezgrom $I(\{\alpha\})$ (ovo je upravo skup svih polinoma koji se poništavaju u α). Prvi teorem o izomorfizmu sada pokazuje $k[T]/I(\{\alpha\}) \cong k$, iz čega po propoziciji 1.1.4 zaključujemo da je ideal $I(\{\alpha\})$ maksimalan. Injektivnost promatranog preslikavanja je očita, a da bismo pokazali surjektivnost, trebamo Hilbertov teorem o nulama:
Neka je $\mathfrak{m} \subseteq k[T]$ maksimalni ideal. Posebno, $\mathfrak{m}$ je pravi ideal pa po teoremu 1.2.11 vrijedi $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$. Uzmimo $\alpha \in V(\mathfrak{m})$; imamo $I(V(\mathfrak{m})) \subseteq I(\{\alpha\})$, iz čega slijedi $\operatorname{Rad} \mathfrak{m} \subseteq I(\{\alpha\})$. Kako je svaki maksimalni ideal radikalan, imamo zapravo $\mathfrak{m} \subseteq I(\{\alpha\})$, no budući da je $\mathfrak{m}$ maksimalan, ne može biti strogo sadržan u $I(\{\alpha\})$. Iz ovoga zaključujemo da vrijedi i jednakost, tj. $\mathfrak{m} = I(\{\alpha\})$. Time smo pokazali da je preslikavanje surjektivno. □

Za kraj ovog dijela, promotrimo kako pomoću uvedenih preslikavanja možemo prikazati zatvarač proizvoljnog podskupa od $\mathbb{A}^n$.

[2]Teorem 1.2.11 je očita posljedica teorema 1.2.10: kada bi bilo $I(V) = \emptyset$, imali bismo $\operatorname{Rad} I = k[T]$, no to je nemoguće.

Korolar 1.2.15. *Neka je $V \subseteq \mathbb{A}^n$. Zatvarač (u topologiji Zariskog) skupa V dan je sa*

$$\overline{V} = V(I(V)).$$

Dokaz. Uočimo da je $V(I(V))$ doista zatvoren skup koji sadrži V. Za svaki zatvoren skup W koji sadrži V možemo naći radikalan ideal I takav da vrijedi $W = V(I)$. Iz $V \subseteq W$ tada slijedi $I = I(W) \subseteq I(V)$, a iz ovoga $V(I(V)) \subseteq V(I(W)) = W$. Odavde čitamo da je $V(I(V))$ zaista i najmanji zatvoren skup koji sadrži W, što je trebalo pokazati. □

1.3 Konačnogenerirane k-algebre

Neka je $V \neq \emptyset$ zatvoren podskup afinog prostora $\mathbb{A}^n$ nad algebarski zatvorenim poljem k.

Definicija 1.3.1. *Svaku funkciju $f : V \to k$ za koju postoji polinom $p \in k[T]$ takav da vrijedi*

$$f(x) = p(x), \quad \forall x \in V$$

zovemo regularnom funkcijom na V.

Skup svih regularnih funkcija na $V \subseteq \mathbb{A}^n$ označavamo[3] s $k[V]$; ponekad kažemo da se radi o **koordinatnom prstenu** skupa V. Vidimo da je restrikcija $k[T] \to k[V]$ epimorfizam s jezgrom $I(V)$, iz čega slijedi

$$k[V] \cong k[T]/I(V).$$

Primjer 1.3.2. *Promotrimo izgled prstena $k[V]$ u najjednostavnijim slučajevima:*

a) Ako je $V = \mathbb{A}^n$, onda je $k[V] = k[T]$.

b) Ako je $V = \{x\}$ jednočlan skup, onda je očito $k[V] = k$.

Uočimo da $k[V]$ uvijek sadrži polje k kao potprsten: neovisno o izgledu skupa V, skup regularnih funkcija sigurno sadrži sve konstantne funkcije. Komutativne prstene koji sadrže polje k kao potprsten nazivamo **k-algebrama**. Homomorfizam k-algebri je homomorfizam prstenova čija je restrikcija na k identiteta.

Kažemo da je k-algebra A **konačnogenerirana** ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i epimorfizam k-algebri $k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow A$. Nadalje, k-algebra A se naziva **reduciranom** ako je 0 jedini nilpotentan element u A.

[3] U poglavljima gdje se istovremeno pojavljuju algebre regularnih funkcija i prsteni polinoma, sličnost oznaka može biti zbunjujuća. Zbog toga smo (u uvodnom poglavlju) i "rezervirali" T kao oznaku za varijable u prstenu polinoma $k[T]$, dok ćemo zatvorene skupove označavati sa $V, W, X, Y, \ldots$

Propozicija 1.3.3. *Neka je $V \neq \emptyset$ zatvoren podskup od $\mathbb{A}^n$. Tada je $k[V]$ konačnogenerirana k-algebra. Obratno, neka je A konačnogenerirana, reducirana k-algebra. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V \subseteq \mathbb{A}^n$ takvi da vrijedi $A \cong k[V]$.*

Dokaz. Neka je $V \neq \emptyset$ zatvoren podskup od $\mathbb{A}^n$. Po definiciji je $k[V]$ restrikcija prstena polinoma u n varijabli, stoga je $k[V]$ očito konačnogenerirana. Reduciranost slijedi iz prikaza $k[V] \cong k[T]/I(V)$ i činjenice da je $I(V)$ radikalan ideal:

$$f^r \in I(V) \Leftrightarrow f \in I(V), \quad \forall f \in k[T]$$

odakle vidimo da je 0 jedini nilpotentan element u prstenu $k[T]/I(V)$.

Neka je A konačnogenerirana, reducirana k-algebra. Po definiciji konačnogeneriranosti, postoji $n \in \mathbb{N}$ i epimorfizam

$$\varphi : k[T_1, \ldots, T_n] \twoheadrightarrow A.$$

Zbog reduciranosti, jezgra ovog epimorfizma je radikalan ideal I. Po Hilbertovom teoremu o nulama, zaključujemo da postoji zatvoren skup V takav da je $I = I(V)$, dakle $A \cong k[T_1, \ldots, T_n]/I(V)$, što je trebalo pokazati. □

Primjer 1.3.4. (Koordinatni prsten produkta)
Neka su $X \subseteq \mathbb{A}^m$ i $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ zatvoreni skupovi. Pokažimo da za koordinatni prsten produkta $X \times Y$ vrijedi $k[X \times Y] = k[X] \otimes_k k[Y]$:
Promotrimo homomorfizam $\varphi : k[X] \otimes_k k[Y] \to k[X \times Y]$ zadan s

$$\varphi\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right)(x, y) = \sum_i f_i(x) g_i(y).$$

Jasno je da je φ surjektivan jer su funkcije $T_1, \ldots, T_m$ i $U_1, \ldots, U_n$ (vidi primjer 1.2.6), koje generiraju $k[X \times Y]$ očito sadržane u slici.

Da bismo pokazali injektivnost, dovoljno je pokazati da je jezgra od φ trivijalna. Svaki element iz $k[X] \otimes_k k[Y]$ možemo prikazati kao $\sum_i f_i \otimes g_i$ gdje su f_i nezavisni (nad k) u $k[X]$, a g_i nezavisni u $k[Y]$. Ako se ovakav element nalazi u jezgri, dobivamo

$$\sum_i f_i(x) g_i(y) = 0, \forall x \in X, y \in Y.$$

Ako u gornji izraz uvrstimo $x = x_0$, dobivamo $\sum_i f_i(x_0) g_i(y) = 0, \forall y \in Y$. Ovo je linearna kombinacija nezavisnih funkcija g_i pa zaključujemo da za koeficijente vrijedi $f_i(x_0) = 0$. Kako je x_0 proizvoljan, slijedi $f_i = 0, \forall i$, to jest $\sum_i f_i \otimes g_i = 0$, što je trebalo pokazati.

Konstrukcije iz 1.2 sada možemo prenijeti na V i odgovarajuću k-algebru $k[V]$. Po definiciji, $k[V]$ je kvocijent Noetherinog prstena $k[T]$, stoga je i sam Noetherin prsten.

Ako je $W \subseteq V$ zatvoren skup, onda je $I(V) \subseteq I(W)$, pa možemo skupu $W \subseteq V$ pridružiti ideal $I(W)/I(V) \subseteq k[T]/I(V) = k[V]$. Očito, radi se o idealu svih regularnih funkcija iz $k[V]$ koje se poništavaju na W. Obratno, ako je $I \subseteq k[V]$ ideal, možemo promatrati njegovu prasliku po restrikciji $k[T] \to k[V]$, čime dobivamo ideal u $k[T]$ koji sadrži $I(V)$, stoga definira neki zatvoren podskup od V.

Lako je provjeriti da za $k[V]$ vrijedi sljedeća verzija Hilbertovog teorema o nulama:

Propozicija 1.3.5. *Neka je $I \subseteq k[V]$ ideal i $f \in k[V]$ regularna funkcija koja je jednaka nuli na zatvorenom podskupu $V(I) \subseteq V$. Tada postoji $r \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $f^r \in I$.*

Naravno, imamo i odgovarajuće posljedice: $W \subseteq V$ je prazan skup ako i samo ako je ideal svih funkcija koje se poništavaju na W jednak upravo $k[V]$. Nadalje, točke iz V odgovaraju maksimalnim idealima iz $k[V]$.

Nakon što smo definirali osnovne geometrijske objekte, tj. zatvorene skupove, prirodno je promotriti preslikavanja među njima:

Definicija 1.3.6. *Neka su $X \subseteq \mathbb{A}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ zatvoreni skupovi. Preslikavanje $f : X \to Y$ nazivamo regularnim ako postoje regularne funkcije $f_1, \dots, f_m$ takve da vrijedi $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ za svaki $x \in X$.*

Primjer 1.3.7.

a) Regularno preslikavanje s X u $\mathbb{A}^1$ je isto što i regularna funkcija na X.

b) Linearni operatori s $\mathbb{A}^n$ u $\mathbb{A}^m$ su regularna preslikavanja.

c) Projekcija $(x, y) \mapsto x$ je regularno preslikavanje s krivulje zadane s $xy = 1$ u $\mathbb{A}^1$.

Neobično važna je sljedeća konstrukcija koja uspostavlja korespondenciju između skupa regularnih preslikavanja $X \to Y$ i homomorfizama odgovarajućih k-algebri. Ako je $f : X \to Y$ regularno preslikavanje, onda svakoj regularnoj funkciji $u \in k[Y]$ možemo pridružiti regularnu funkciju $f^*(u) \in k[X]$ na sljedeći način:

$$f^*(u)(x) = u(f(x)), \quad \forall x \in X.$$

Uočimo da doista vrijedi $f^*(u) \in k[X]$ te da je $f^* : k[Y] \to k[X]$ homomorfizam k-algebri: $f^*(u)$ dobijemo tako da umjesto varijabli u u uvrstimo neke regularne (polinomijalne) funkcije iz $k[X]$.

Obratno, neka je $\varphi : k[Y] \to k[X]$ homomorfizam k-algebri. Budući da je $Y \subseteq \mathbb{A}^m$, imamo funkcije $t_1, ..., t_m \in k[Y]$ (restrikcije koordinatnih funkcija iz $k[T_1, \dots, T_m]$ na $k[Y]$). Budući da su $\varphi(t_i)$ funkcije iz $k[X]$, možemo definirati regularno preslikavanje $f : X \to \mathbb{A}^m$

$$f(x) = (\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_m)).$$

Direktna provjera pokazuje da vrijedi $f(X) \subseteq Y$ i $f^* = \varphi$.

U dosadašnjim razmatranjima, počinjali smo od geometrijskog objekta (zatvorenog skupa $X \subseteq \mathbb{A}^n$) i pridruživali mu algebarski (konačnogeneriranu, reduciranu k-algebru $k[X]$). U propoziciji 1.3.3 smo vidjeli da je svaka konačnogenerirana, reducirana k-algebra koordinatni prsten nekog zatvorenog skupa. Za kraj ovog dijela pokazujemo kako ovu vezu možemo ostvariti i u "suprotnom smjeru": za danu k-algebru konstruiramo odgovarajući geometrijski objekt, i to bez uvođenja "ambijentnog prostora" $\mathbb{A}^n$.

Neka je A konačnogenerirana k-algebra; skup svih homomorfizama k-algebri $A \to k$ označimo s $\mathrm{Hom}_k(A, k)$. Svaki homomorfizam $\psi \in \mathrm{Hom}_k(A, k)$ je surjektivan (podsjetimo, po definiciji je ψ identiteta na k), stoga vrijedi $A/\mathrm{Ker}\,\psi \cong k$. Odavde vidimo da je ideal $\mathrm{Ker}\,\psi$ maksimalan u A. Pridruživanje $\psi \mapsto \mathrm{Ker}\,\psi$ je očito injektivno, no pitanje surjektivnosti je donekle kompliciranije. Ipak, može se pokazati da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1.3.8. *Neka je k algebarski zatvoreno polje i A konačnogenerirana k-algebra. Tada je $\psi \mapsto$ Ker φ bijekcija s $\mathrm{Hom}_k(A, k)$ na skup maksimalnih ideala u A, $\max(A)$.*

Ovaj rezultat nam daje korisnu identifikaciju skupova $X = \max(A)$ i $\mathrm{Hom}_k(A, k)$. Prisjetimo se da, ako je $A = k[V]$ koordinatni prsten zatvorenog skupa $V \subseteq \mathbb{A}^n$, skup maksimalnih ideala $\max(A)$ odgovara točkama skupa V.

Za proizvoljan element $f \in A$ sada možemo promatrati preslikavanje $X \to k$ zadano s

$$\psi \mapsto \psi(f) =: f(\psi)$$

(uočimo, ovdje elemente iz X promatramo kao homomorfizme). Ovime smo elementu $f \in A$ pridružili funkciju $X \to k$; htjeli bismo utvrditi kada je element f jednoznačno određen funkcijom $\psi \mapsto f(\psi)$.

U tu svrhu uočimo da je skup svih funkcija s $X \to k$ (kojeg označavamo s $\mathrm{Fun}(X, k)$) k-algebra uz operacije po točkama. Nadalje, vidimo da je preslikavanje

$$f \mapsto (\psi \mapsto f(\psi))$$

homomorfizam k-algebri $A \to \mathrm{Fun}(X, k)$. Element $f \in A$ je u jezgri tog homomorfizma ako i samo ako je $f(\psi) = 0$, $\forall \psi \in X$, to jest ako i samo ako je f sadržan u svakom maksimalnom idealu u A. Sada je bitna sljedeća propozicija[4].

Propozicija 1.3.9. *Neka je A konačnogenerirana k-algebra. Element $f \in A$ je sadržan u svakom maksimalnom idealu u A ako i samo ako je nilpotentan.*

Odavde slijedi da je za reduciranu k-algebru A preslikavanje $A \to \mathrm{Fun}(X, k)$ injektivno, pa je svaki element iz A jedinstveno određen funkcijom koju određuje na X. Drugim

[4]Usporedite s propozicijom 2.2.3

riječima, ako je A konačnogenerirana i reducirana, možemo je promatrati kao k-algebru regularnih funkcija na $X = \max(A)$. Kažemo da je ovako konstruiran skup X **apstraktna afina mnogostrukost**. Svi do sada uvedeni pojmovi vezani za zatvorene skupove $V \subseteq \mathbb{A}^n$ (kao što su topologija Zariskog, regularna preslikavanja i sl.) mogu se analogno opisati i u kontekstu apstraktnih afinih mnogostrukosti.

Do sada smo definirali najosnovnije geometrijske objekte i preslikavanja među njima: zatvorene skupove u $\mathbb{A}^n$ i regularna preslikavanja. Nadalje, svakom smo zatvorenom skupu pridružili odgovarajući algebarski objekt (njegov koordinatni prsten $k[X]$) i ustanovili ekvivalenciju regularnih preslikavanja i homomorfizama k-algebri. Ove konstrukcije generalizirat ćemo u više iteracija, uvijek imajući na umu svojstva zatvorenih skupova i regularnih preslikavanja koja želimo zadržati. Za opis idućeg stupnja apstrakcije (kojeg postižemo promatranjem tzv. kvaziprojektivnih mnogostrukosti) trebat će nam nekoliko novih pojmova; krećemo s detaljnijim opisom topologije Zariskog.

1.4 Topološka svojstva afinih mnogostrukosti

Definicija 1.4.1. *Kažemo da je topološki prostor X Noetherov*[5] *ako se svaki padajući niz zatvorenih podskupova u X stabilizira: ako su* $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$ *zatvoreni skupovi, onda postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takav da vrijedi* $Y_n = Y_{n+1} = \dots$

Primjer 1.4.2. *Svaki zatvoren* $X \subseteq \mathbb{A}^n$ *s topologijom Zariskog je Noetherov prostor:*
Ako je $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$ *niz zatvorenih podskupova od X, možemo promatrati odgovarajući niz ideala* $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq I(Y_3) \subseteq \dots$ *Kako je* $k[X]$ *Noetherin prsten, ovaj niz ideala se stabilizira, tj. postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takav da vrijedi* $I(Y_n) = I(Y_{n+k}), \forall k \in \mathbb{N}$. *Iz Nullstellensatza sada slijedi* $Y_n = Y_{n+k}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.4.3. *Neka je X topološki prostor. Za neprazan zatvoren podskup* $Y \subseteq X$ *kažemo da je reducibilan ako postoje zatvoreni* Y_1, Y_2 *za koje vrijedi*

i) $Y = Y_1 \cup Y_2$

ii) $Y_1, Y_2 \neq Y$

Ako Y nije reducibilan, kažemo da je ireducibilan.

Primjer 1.4.4. *Iz primjera 1.2.5 vidimo da je pravi ireducibilan podskup od* $\mathbb{A}^1$ *nužno jednočlan (sadrži samo jednu točku).*

Svaki zatvoren podskup Noetherovog prostora može se na jedinstven način prikazati kao unija ireducibilnih skupova. Preciznije, vrijedi

[5] Max Noether (Mannheim 1844. - Erlangen 1921.), njemački algebarski geometar; otac Emmy Noether.

Teorem 1.4.5. *Neka je X Noetherov topološki prostor. Tada je svaki zatvoren skup $Y \subseteq X$ konačna unija ireducibilnih skupova:*

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$$

Ako iz ovog prikaza izbacimo sve Y_i za koje postoji indeks $j \neq i$ takav da $Y_i \subset Y_j$, onda je prikaz jedinstven do na permutaciju. Skupove Y_i iz jedinstvenog prikaza zovemo ireducibilnim komponentama od Y.

Navedimo još nekoliko jednostavnih, a korisnih rezultata vezanih uz Noetherove prostore:

Propozicija 1.4.6. *Neka je X topološki prostor. Pretpostavimo da X ima konačan otvoren pokrivač $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ takav da je svaki od skupova U_i Noetherov prostor u relativnoj topologiji. Tada je i X Noetherov prostor.*

Propozicija 1.4.7. (Kvazikompaktnost) *Neka je U otvoren podskup Noetherovog prostora X. Tada se svaki otvoren pokrivač skupa U može reducirati do konačnog potpokrivača.*

Propozicija 1.4.8. *Neka je X Noetherov topološki prostor. Tada je svaki otvoren $U \subseteq X$ također Noetherov u relativnoj topologiji. Ako je X ireducibilan, U je gust i ireducibilan.*

Kao nastavak primjera 1.3.4 navodimo sljedeći teorem:

Teorem 1.4.9. *Neka su X i Y ireducibilne afine mnogostrukosti. Tada je $X \times Y$ također ireducibilna afina mnogostrukost.*

Poput mnogih drugih svojstava, ireducibilnost zatvorenog skupa $X \subseteq \mathbb{A}^n$ može se prikladno karakterizirati pomoću svojstava koordinatnog prstena $k[X]$. Nije teško pokazati da vrijedi

Propozicija 1.4.10.

i) *Zatvoren skup $X \subseteq \mathbb{A}^n$ je ireducibilan ako i samo ako je $I(X)$ prost ideal u $k[T_1, \ldots, T_n]$.*

ii) *Neka su $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ zatvoreni skupovi takvi da vrijedi $Y \subseteq X$. Tada je Y ireducibilan ako i samo ako je $I(Y)$ prost ideal u $k[X]$.*

1.5 Racionalne funkcije

U ovom paragrafu uvodimo racionalne funkcije i racionalna preslikavanja. Ove vrlo važne pojmove ćemo kasnije opet uvesti u nešto većoj općenitosti, no ovo je dobra prilika za upoznavanje s bitnim pojmovima u kontekstu koji nije tehnički odviše zahtjevan.

Definicija 1.5.1. *Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ireducibilan zatvoren skup. Polje razlomaka koordinatnog prstena $k[X]$ zovemo poljem racionalnih funkcija na X i označavamo s $k(X)$.*

Napomena 1.5.2. *Uočimo da polje $k(X)$ možemo promatrati i kao skup kvocijenata f/g gdje su f i g polinomi iz $k[T]$ i $g \notin I(X)$. Pri tome poistovjećujemo f_1/g_1 i f_2/g_2 ako vrijedi $f_1g_2 - f_2g_1 \in I(X)$. Preciznije, možemo konstruirati $k(X)$ na sljedeći način: definiramo*

$$O_X = \{f/g : f, g \in k[T], g \notin I(X)\}$$

$$M_X = \{f/g : f \in I(X), g \in k[T] \backslash I(X)\}$$

Tada je M_X ideal u O_X i vrijedi $k(x) = O_X/M_X$.

Za razliku od regularnih funkcija, racionalna funkcija ne mora imati definiranu vrijednost u svakoj točki iz X. Na primjer, racionalna funkcija $f(x) = 1/x$ na $\mathbb{A}^1$ nije definirana u točki $x = 0$. U vezi s ovim svojstvom navodimo sljedeću definiciju.

Definicija 1.5.3. *Kažemo da je racionalna funkcija $\varphi \in k(X)$ regularna u točki $x \in X$ ako postoje regularne $f, g \in k[X]$ takve da vrijedi $\varphi = f/g$ i $g(x) \neq 0$.*

Očito je svaka regularna funkcija iz $k[X]$ ujedno i racionalna funkcija na X koja je regularna u svakoj točki $x \in X$. Vrijedi i obrat ove tvrdnje:

Propozicija 1.5.4. *Neka je $\varphi \in k(X)$ regularna u svakoj točki $x \in X$. Tada je φ regularna funkcija na X.*

Dokaz. Neka je φ regularna u svakoj točki $x \in X$. To znači da za svaku točku x postoje $f_x, g_x \in k[X]$ takve da je $\varphi = f_x/g_x$ i $g_x(x) \neq 0$. Promotrimo ideal $I \subseteq k[X]$ generiran skupom $\{g_x : x \in X\}$. Očito je $V(I) = \emptyset$ (po konstrukciji ne postoji niti jedna točka u kojoj bi se poništavale sve funkcije g_x), stoga po Nullstellensatzu zaključujemo da je $I = k[X]$. Posebno, $1 \in I$ pa postoje $x_1, \dots x_n$ i regularne funkcije $a_1, \dots, a_n$ takve da vrijedi $1 = \sum_{i=1}^n a_i g_{x_i}$. Pomnožimo li ovu jednakost s φ i pritom iskoristimo $\varphi = f_{x_i}/g_{x_i}$, dobivamo $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i f_{x_i}$, iz čega čitamo da je φ regularna. □

Napomena 1.5.5.

i) Skup točaka u kojima je racionalna funkcija φ regularna je uvijek neprazan i otvoren: Ako je $\varphi = f/g$, onda je φ očito regularna na podskupu od X gdje je $g \neq 0$, a to je (po Nullstellensatzu) neprazan otvoren skup. Nadalje, skup svih točaka u kojima je φ regularna je očito unija ovakvih skupova, iz čega slijedi tvrdnja.

ii) Za svaki konačan skup racionalnih funkcija $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je skup točaka u kojima su sve funkcije φ_i istovremeno regularne neprazan i otvoren:
Konačan presjek nepraznih otvorenih skupova je uvijek otvoren, a lako je provjeriti da je zbog ireducibilnosti od X i neprazan.

iii) Racionalna funkcija je jedinstveno određena svojim vrijednostima na proizvoljnom otvorenom skupu $U \subseteq X$:
Ako je $\varphi = 0$ na nekom nepraznom otvorenom skupu $U \subseteq X$, onda bi svaki prikaz $\varphi = f/g$ s $f \neq 0$ davao kontradikciju s ireducibilnošću, jer bismo imali $X = X_1 \cup X_2$ za $X_1 = X \backslash U$ i $X_2 = V(f)$. Zaključujemo $\varphi \equiv 0$.

Slično kao što smo nakon regularnih funkcija definirali regularna preslikavanja, sada možemo definirati racionalna preslikavanja:

Racionalno preslikavanje s X u $\mathbb{A}^m$ je svako preslikavanje $x \mapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ zadano m-torkom racionalnih funkcija. Prema prethodnoj napomeni, svako racionalno preslikavanje je definirano na nekom nepraznom otvorenom podskupu od X. Kažemo da se radi o racionalnom preslikavanju s X u Y (za neki zatvoren $Y \subseteq \mathbb{A}^m$) ako je $\varphi(x) \in Y$ za svaku točku $x \in X$ u kojoj je φ dobro definirano.

Za kraj, dajemo primjer racionalnog preslikavanja:

Primjer 1.5.6. *Krivulju $K \subseteq \mathbb{A}^2$ zadanu s $y^2 = x^3 + x^2$ možemo parametrizirati s*

$$(x, y) = \left(t^2 - 1, t(t^2 - 1)\right)$$

Ovu parametrizaciju možemo shvatiti kao racionalno preslikavanje s $\mathbb{A}^1$ u K. Vidimo da je inverz ovog preslikavanja zadan s $(x, y) \mapsto y/x$ također racionalno preslikavanje. U ovakvim slučajevima, u kojima promatrano racionalno preslikavanje ima racionalan inverz, govorit ćemo da se radi o biracionalnoj ekvivalenciji (preciznu definiciju dat ćemo kasnije).

1.6 Kvaziprojektivne mnogostrukosti

Da bismo definirali kvaziprojektivne mnogostrukosti, trebamo najprije uvesti novi ambijentni prostor. Promatramo afini prostor $\mathbb{A}^{n+1}$ nad poljem k; označimo s O točku $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{A}^{n+1}$. Na skupu $\mathbb{A}^{n+1} \backslash \{O\}$ uvodimo sljedeću relaciju:

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k : (x_0, \ldots, x_n) = (\lambda y_0, \ldots, \lambda y_n).$$

Lako je provjeriti da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Interpretirano geometrijski, ovom relacijom smo poistovjetili sve točke koje se nalaze na istom pravcu koji prolazi kroz ishodište O.

Definicija 1.6.1. *Skup klasa ekvivalencije dobivenih relacijom $\sim$ na skupu $\mathbb{A}^{n+1} \backslash \{O\}$ označavamo s $\mathbb{P}^n$ i zovemo **n-dimenzionalni projektivni prostor**. Klase ekvivalencije zovemo točkama projektivnog prostora. Klasu točke $(x_0, \ldots, x_n)$ označavamo s $(x_0 : \ldots : x_n)$; kažemo da se radi o projektivnim (ili homogenim) koordinatama odgovarajuće točke.*

Napomena 1.6.2. *Uočimo da projektivne koordinate nisu jedinstvene. Naime, po definiciji vidimo da za svako $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$ vrijedi $(x_0 : \ldots : x_n) = (\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n)$.*

Sada bismo i u projektivnom prostoru $\mathbb{P}^n$ htjeli uvesti algebarske skupove. To ne možemo učiniti direktno oponašajući postupak koji smo proveli u afinom prostoru $\mathbb{A}^n$: budući da koordinate točaka nisu jedinstvene, vrijednost polinoma u točki $(x_0 : \ldots : x_n)$ nije dobro definirana te stoga ne možemo govoriti o nultočkama polinoma. Ovaj problem izbjegavamo promatrajući samo posebnu klasu polinoma, tzv. homogene polinome.

Definicija 1.6.3. *Za polinom $f \in k[T_0, T_1, \ldots, T_n]$ kažemo da je homogen ako su svi monomi u polinomu f jednakog stupnja.*

Očito je da svaki polinom $f \in k[T_0, T_1, \ldots, T_n]$ možemo zapisati kao $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$, gdje su f_i homogeni polinomi i stupanj polinoma f_i je jednak i. Polinome f_i zovemo homogenim komponentama polinoma f.

Primjer 1.6.4.

i) Polinomi $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ i $g(x, y, z) = x^3 - 3xyz + y^2z$ su homogeni.

ii) Polinom $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ nije homogen.

Uočimo da za homogen polinom f stupnja d vrijedi $f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n)$. Zbog toga čak i u projektivnom prostoru možemo govoriti o nultočkama polinoma f: odgovor na pitanje je li točka $P \in \mathbb{P}^n$ nultočka polinoma f očito ne ovisi o izboru projektivnih koordinata za P. Sada možemo definirati algebraske skupove u projektivnom prostoru – to su skupovi oblika

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \{x \in \mathbb{P}^n : f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0\}$$

za neke *homogene* polinome $f_1, \ldots, f_k \in k[T]$. I ostala razmatranja vezana za algebarske skupove sada možemo prenijeti u kontekst projektivnog prostora. Za proizvoljan algebarski skup $V \subseteq \mathbb{P}^n$ definiramo ideal $I(V)$ generiran svim homogenim polinomima koji se poništavaju na V. Nije teško pokazati da za ideal $I(V)$ vrijede sljedeća svojstva:

Propozicija 1.6.5. *Neka je $V \subseteq \mathbb{P}^n$ algebarski skup. Tada vrijedi*

i) $I(V)$ je radikalan ideal.

ii) $I(V)$ je homogen *ideal: ako $I(V)$ sadrži polinom f, onda sadrži i sve njegove homogene komponente.*

iii) $I(V)$ je pravi ideal $\Leftrightarrow V \neq \emptyset$.

iv) Ako je $f \in I(V)$ homogen polinom, onda je $f = 0$ na V.

Nastavljamo kao u slučaju afinih zatvorenih skupova: za proizvoljan homogen ideal $I \subseteq k[T]$ definiramo

$$V(I) = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n : f(x) = 0, \forall \text{ homogen } f \in I\}$$

Ako je ideal I generiran homogenim polinomima $g_1, \ldots, g_k$, onda očito vrijedi $V(I) = V(g_1, \ldots, g_k)$. Iz Hilbertovog teorema o bazi slijedi da svaki ideal I ima konačan skup generatora; kako je I homogen ideal, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su ti generatori homogeni polinomi. Odavde slijedi da je svaki skup oblika $V(I)$ doista algebarski skup zadan konačnim brojem homogenih polinoma.

Nije teško provjeriti da i u projektivnom slučaju algebarski skupovi zadovoljavaju svojstva zatvorenih skupova – presjek proizvoljne familije, odnosno unija konačne familije algebarskih skupova je algebarski skup. Zbog toga postoji (jedinstvena) topologija na $\mathbb{P}^n$ čiji su zatvoreni skupovi upravo opisani algebarski skupovi. Alternativno, istu topologiju na $\mathbb{P}^n$ možemo uvesti kao kvocijentnu topologiju topologije Zariskog na $\mathbb{A}^n \backslash \{O\}$. I u ovom slučaju dobivenu topologiju na $\mathbb{P}^n$ nazivamo topologijom Zariskog.

Napomena 1.6.6. *Uočimo da za za proizvoljne homogene polinome $f_1, \ldots, f_k$ vrijedi*

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \bigcap_{i=1}^{k} V(f_i).$$

Uzimanjem komplementa dobivamo

$$\mathbb{P}^n \backslash V(f_1, \ldots, f_k) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathbb{P}^n \backslash V(f_i),$$

iz čega vidimo da se svaki otvoreni skup može prikazati kao unija tzv. ***glavnih otvorenih skupova*** *$D(f) = \mathbb{P}^n \backslash V(f)$. Drugim riječima, glavni otvoreni skupovi čine bazu topologije Zariskog.*

I dalje će nam vrlo koristan biti Nullstellensatz, ali u ponešto izmijenjenoj formi:

Teorem 1.6.7. (Projektivni Nulstellensatz)
Preslikavanje $V \mapsto I(V)$ je bijekcija između svih nepraznih algebarskih skupova u $\mathbb{P}^n$ i svih pravih homogenih radikalnih ideala u $k[T_0, \ldots, T_n]$ različitih od $(T_0, \ldots, T_n)$. Inverz ovog preslikavanja dan je s $I \mapsto V(I)$.

Napomena 1.6.8. *Prethodni teorem se dokazuje iz teorema 1.2.10 korištenjem kvocijentnog preslikavanja $\mathbb{A}^n \backslash \{O\} \to \mathbb{P}^n$. Skrećemo pozornost na dva detalja iz iskaza teorema:*

i) U iskaz teorema nisu uključeni $\emptyset \subseteq \mathbb{P}^n$ i ideal $k[T]$. Zbog toga posebno definiramo $I(\emptyset) = k[T]$ i $V(k[T]) = \emptyset$.

ii) Uočimo da u bijekciju iz iskaza teorema nismo uključili maksimalni ideal $(T_0, \dots, T_n)$, tzv. irelevantni ideal. Razlog tome je činjenica da u afinom prostoru idealu $(T_0, \dots, T_n)$ odgovara točka O za koju nemamo odgovarajući zatvoren skup u $\mathbb{P}^n$.

Iz definicije projektivnog prostora vidimo da koordinate $(0 : \dots : 0)$ ne odgovaraju niti jednoj točki iz $\mathbb{P}^n$ (u definiciji relacije $\sim$ smo izbacili točku $(0, \dots, 0)$ iz $\mathbb{A}^{n+1}$); s druge strane, sve koordinate s barem jednom ne-nul komponentom predstavljaju neku točku iz $\mathbb{P}^n$. Zbog toga projektivni prostor možemo zapisati kao konačnu uniju glavnih otvorenih skupova:

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} D(T_i).$$

(Prisjetimo se, $D(T_i)$ označava skup svih točaka u kojima se polinom T_i ne poništava, to jest skup svih točaka čija je i-ta koordinata različita od nule).

Promotrimo, primjerice, $D(T_0)$. Kako je nulta koordinata različita od 0, preslikavanje $D(T_0) \to \mathbb{A}^n$ zadano s

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

je dobro definirano na cijelom skupu $D(T_0)$. Odmah uočimo da se radi o bijekciji: inverz je dan s $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (1 : y_1 : \dots : y_n)$. Štoviše, vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 1.6.9. *Upravo opisana bijekcija je homeomorfizam prostora $D(T_i)$ i $\mathbb{A}^n$.*

Ova važna propozicija pokazuje da svaka točka projektivnog prostora ima okolinu homeomorfnu afinom prostoru. Također, vidimo da $\mathbb{P}^n$ možemo promatrati kao uniju konačno mnogo "afinih dijelova" $D(T_i) = \mathbb{A}^m_i$ čije je preklapanje na neki način usklađeno.

Dobivamo i neke sasvim konkretne zaključke: iz prethodne propozicije, činjenice da je $\mathbb{A}^n$ Noetherov prostor i propozicije 1.4.6 slijedi

Korolar 1.6.10. *$\mathbb{P}^n$ je Noetherov prostor.*

Konačno, spremni smo za sljedeće definicije:

Definicija 1.6.11. *Projektivna mnogostrukost je ireducibilan zatvoren podskup projektivnog prostora $\mathbb{P}^n$.*

Napomena 1.6.12. *Nije teško pokazati da u su projektivnom prostoru sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

i) Zatvoren skup $V \subseteq \mathbb{P}^n$ je ireducibilan.

ii) Ideal $I(V)$ u $k[T]$ je prost.

iii) Za svaka dva homogena polinoma f, g vrijedi

$$fg = 0 \text{ na } V \Rightarrow f = 0 \text{ na } V \text{ ili } g = 0 \text{ na } V$$

Definicija 1.6.13. *Kvaziprojektivna mnogostrukost je otvoren podskup projektivne mnogostrukosti.*

Napomena 1.6.14. *Nekoliko topoloških detalja:*

a) Pod "otvoren" u prethodnoj definiciji podrazumijevamo relativno otvoren (dakle ne nužno otvoren u $\mathbb{P}^n$).

b) Uočimo da je svaka projektivna mnogostrukost Noetherov prostor. Odavde i iz propozicije 1.4.8 slijedi da su i kvaziprojektivne mnogostrukosti Noetherovi prostori.

Primjer 1.6.15. *Gotovo svi geometrijski objekti koje smo do sada promatrali potpadaju pod definiciju kvaziprojektivnih mnogostrukosti:*

a) Svaka projektivna mnogostrukost je očito i kvaziprojektivna.

b) Prostor $\mathbb{P}^n$ je očito ireducibilan, dakle projektivna mnogostrukost. Zbog toga je svaki otvoren skup u $\mathbb{P}^n$ kvaziprojektivna mnogostrukost.

c) Svaki ireducibilan zatvoren skup $V \subseteq \mathbb{A}^n$ je kvaziprojektivna mnogostrukost: ako $\mathbb{A}^n$ shvatimo kao podskup projektivnog prostora u smislu propozicije 1.6.9, može se pokazati da je zatvarač $\overline{V}$ u $\mathbb{P}^n$ ireducibilan, tj. $\overline{V}$ je projektivna mnogostrukost. Tada iz $V = \overline{V} \cap \mathbb{A}^n$ vidimo da je V otvoren podskup projektivne mnogostrukosti, dakle kvaziprojektivna mnogostrukost.

Kao i u afinom prostoru, nakon što smo definirali bazične geometrijske objekte, htjeli bismo opisati funkcije na njima, a zatim i odgovarajuća preslikavanja. Kao što je već spomenuto, vrijednost polinoma iz $k[T]$ u točki projektivnog prostora nije dobro definirana. Zbog toga će osnovne funkcije koje promatramo biti oblika $f = p/q$, gdje su $p, q \in k[T]$ homogeni polinomi *istog stupnja* (kažemo da se radi o homogenoj funkciji stupnja 0). Budući da su p i q istog stupnja, lako je provjeriti da je vrijednost ove funkcije u točki $x \in \mathbb{P}^n$ dobro definirana, tj. ne ovisi o izboru koordinata za x.

Ako je $X \subseteq \mathbb{P}^n$ kvaziprojektivna mnogostrukost, $x \in X$ i $f = p/q$ homogena funkcija stupnja 0 takva da je $q(x) \neq 0$, onda kažemo da je funkcija f regularna u točki x. Ako je f regularna u svakoj točki kvaziprojektivne mnogostrukosti X, kažemo da je regularna na X. Regularne funkcije na X tvore prsten (točnije, k-algebru) kojeg označavamo s $k[X]$. Ova oznaka i naziv bili bi potpuno neopravdani da definicija regularne funkcije na X nije kompatibilna s definicijom 1.3.1 kada je X zatvoren podskup afinog prostora. Da se doista radi o istim pojmovima već smo zapravo pokazali propozicijom 1.5.4:

Jedna inkluzija je očita, do na promjenu koordinata iz afinih u projektivne. Neka je X zatvoren podskup od $\mathbb{A}^n$ i funkcija f regularna po "staroj" definiciji – drugim riječima, neka je f polinom oblika $f(S_1, \dots, S_n) \in k[S_1, \dots, S_n]$. Imamo

$$f(S) = \sum_\alpha c_\alpha S^\alpha$$

(ovdje koristimo multiindeksnu notaciju: $S^\alpha = S_1^{\alpha_1} \cdots S_n^{\alpha_n}$ za multiindeks $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Koristimo i oznaku $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$). Prisjetimo se da prema propoziciji 1.6.9 možemo poistovjetiti $\mathbb{A}^n$ s podskupom $D(T_0) \subseteq \mathbb{P}^n$. Prebacimo li koordinate $S_1, \dots, S_n$ u odgovarajuće projektivne koordinate $T_0, \dots, T_n$ sa $S_i = T_i/T_0$, možemo funkciju f izraziti kao funkciju projektivnih koordinata:

$$f(T_0, \dots, T_n) = \sum_\alpha c_\alpha \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{T_n}{T_0}\right)^{\alpha_n} = \sum_\alpha c_\alpha \frac{T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n} T_0^{d-|\alpha|}}{T_0^d}.$$

Odavde vidimo da je f doista homogena funkcija stupnja 0 regularna na cijelom $D(T_0)$.

Obratno, pretpostavimo da je f homogena funkcija stupnja 0 koja je regularna u svakoj točki skupa $X \subseteq D(T_0)$. Tada prelaskom s koordinata $(T_0, \dots, T_n)$ na afine koordinate $S_1, \dots, S_n$ dobivamo racionalnu funkciju koja je regularna u svakoj točki $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Propozicija 1.5.4 sada pokazuje da se radi o regularnoj funkciji na X (u smislu "stare" definicije).

Napomenimo da struktura k-algebre regularnih funkcija $k[X]$ može jako varirati u ovisnosti o prirodi kvaziprojektivne mnogostrukosti X. Na primjer, može se pokazati da, ako je X *projektivna* mnogostrukost, vrijedi $k[X] = k$, to jest jedine regularne funkcije na X su konstante. S druge strane, postoje primjeri kvaziprojektivnih mnogostrukosti u kojima k-algebra regularnih funkcija čak nije niti konačnogenerirana nad k.

Budući da smo definirali regularne funkcije, sada možemo definirati i regularna preslikavanja. Svako preslikavanje iz kvaziprojektivne mnogostrukosti X u afini prostor $\mathbb{A}^n$ zadano n-torkom regularnih funkcija nazivamo regularnim preslikavanjem.

Definicija 1.6.16. *Neka su $X \subseteq \mathbb{P}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ kvaziprojektivne mnogostrukosti. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ regularno ako za svaki $x \in X$ postoje afini dio $A_i^m \ni f(x)$ i otvorena okolina $U \ni x$ takvi da je $f(U) \subseteq \mathbb{A}_i^m$ i preslikavanje $f : U \to \mathbb{A}_i^m$ regularno.*

Napomena 1.6.17. *Nije teško provjeriti da je gornja definicija dobra, tj. da svojstvo regularnosti ne ovisi o izboru afinog dijela $\mathbb{A}_i^m$.*

Ovo nije jedina moguća definicija regularnog preslikavanja. Nije teško vidjeti da je sljedeća definicija (do koje dolazimo promatranjem regularnog preslikavanja kao m-torke regularnih funkcija svedenih na zajednički nazivnik) ekvivalentna prvoj:

Definicija 1.6.18. *Neka su $X \subseteq \mathbb{P}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ kvaziprojektivne mnogostrukosti. Kažemo da je $f : X \to Y$ regularno preslikavanje ako za svaki $x \in X$ postoji otvorena okolina $U \ni x$ na kojoj f možemo zadati s $(m+1)$ homogenih polinoma istog stupnja:*

$$(F_0 : \ldots : F_m),$$

pri čemu se barem jedan od polinoma F_i ne poništava u x.

Na isti način kao u afinom slučaju, svako regularno preslikavanje $f : X \to Y$ inducira homomorfizam k-algebri $f^* : k[Y] \to k[X]$. Koristeći ovo svojstvo dolazimo i do treće definicije regularnog preslikavanja, za koju se može pokazati da je ekvivalentna dvjema već navedenima:

Definicija 1.6.19. *Neka su X i Y kvaziprojektivne mnogostrukosti. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je regularno ako je neprekidno i ako je za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$ inducirano preslikavanje f^* homomorfizam $k[V] \to k[f^{-1}(V)]$.*

Kažemo da su kvaziprojektivne mnogostrukosti X i Y izomorfne ako postoje regularna preslikavanja $\varphi : X \to Y$ i $\psi : Y \to X$ takva da vrijedi $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ i $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Sada smo u prilici i formalno definirati afine mnogostrukosti: za kvaziprojektivnu mnogostrukost kažemo da je afina ako je izomorfna nekom zatvorenom podskupu afinog prostora.

U radu s kvaziprojektivnim mnogostrukostima često možemo reducirati probleme na afini slučaj. To pokazuje sljedeća bitna propozicija:

Propozicija 1.6.20. *Neka je X kvaziprojektivna mnogostrukost. Svaka točka $x \in X$ ima okolinu izomorfnu afinoj mnogostrukosti.*

Nastavljajući generalizaciju afinog slučaja, sada uvodimo racionalne funkcije na kvaziprojektivnim mnogostrukostima. Kao što smo već spomenuli, može se dogoditi da k-algebra regularnih funkcija na kvaziprojektivnoj mnogostrukosti sadrži samo konstantne funkcije. Odavde vidimo da definicija 1.5.1 polja $k(X)$ nije pogodna za generalizaciju – htjeli bismo dobiti veći objekt nego samo polje k). Zbog toga u projektivni slučaj prenosimo alternativnu definiciju iz napomene 1.5.2:

Za kvaziprojektivnu mnogostrukost X označimo s O_X skup svih funkcija iz $k(T)$ oblika p/q gdje su p i q homogeni polinomi istog stupnja, pri čemu $q \notin I(X)$. S M_X označimo skup funkcija iz O_X koje se poništavaju na X, dakle p/q s $p \in I(X)$. Kao i prije, iz činjenice da je X ireducibilan skup slijedi da je O_X prsten, a lako je provjeriti da je M_X (jedinstveni) maksimalni ideal u tom prstenu. Polje racionalnih funkcija definiramo kao $k(X) = O_X/M_X$.

Napomena 1.6.21.

a) Nije teško provjeriti da se gornja konstrukcija podudara s već poznatom definicijom racionalnih funkcija ako je X afina mnogostrukost.

b) *Pretpostavimo da je $U \subseteq X$ otvoren skup. Uočimo da iz ireducibilnosti X i 1.4.8 dobivamo $I(U) = I(X)$; odavde slijedi i $k(U) = k(X)$. Prema propoziciji 1.6.20, odavde vidimo da se u radu s poljem racionalnih funkcija možemo, ako je potrebno, svesti na slučaj afinih mnogostrukosti.*

Za racionalnu funkciju $f \in k(X)$ kažemo da je regularna u točki $x \in X$ ako postoje homogeni polinomi p, q istog stupnja, pri čemu $q(x) \neq 0$. Lako se vidi da je tada dobro definirana i *vrijednost* funkcije f u točki x: $f(x) = p(x)/q(x)$. Kao i kod afinih mnogostrukosti, skup svih točaka u kojima je f regularna je otvoren u X; zovemo ga područjem definicije funkcije f.

Sada možemo, kao i u afinom slučaju, definirati racionalna preslikavanja $X \to \mathbb{P}^n$. Prirodnu generalizaciju racionalnih preslikavanja afinih mnogostrukosti dobili bismo promatranjem uređenih $(m+1)$-torki racionalnih funkcija iz $k(X)$, no svođenjem na zajednički nazivnik dolazimo do sljedeće, jednostavnije forme:

Definicija 1.6.22. *Neka je X kvaziprojektivna mnogostrukost. Svako preslikavanje zadano s $m+1$ homogenih polinoma*

$$(F_0, \ldots, F_m)$$

od kojih barem jedan nije iz $I(X)$ nazivamo racionalnim preslikavanjem s X u $\mathbb{P}^n$.

Definicija 1.6.23. *Uočimo da je gornja definicija formalno gotovo ista kao definicija 1.6.18 regularnog preslikavanja. Suptilna, ali bitna razlika leži u činjenici da racionalno preslikavanje nije definirano u svakoj točki $x \in X$ (dopuštamo da postoje točke u kojima se svi polinomi F_i poništavaju).*

Alternativno, racionalno preslikavanje $X \to Y$ definiramo sljedećom konstrukcijom. Na skupu

$$\{(U, \varphi_U) : U \subseteq X \text{ otvoren}, \varphi_U : U \to Y \text{ regularna}\}$$

uvedimo relaciju $\sim$:

$$(U, \varphi_U) \sim (V, \varphi_V) \Leftrightarrow \varphi_U = \varphi_V \text{ na } U \cap V.$$

Može se pokazati da su dvije regularne funkcije na kvaziprojektivnoj mnogostrukosti jednake ako se podudaraju na nekom otvorenom skupu. Ova činjenica implicira da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije relacije $\sim$ nazivamo racionalnim preslikavanjima $X \to Y$. Naravno, pokazuje se da je ova definicija ekvivalentna prvoj.

*

* *

Ovime završavamo uvodni dio. Iako je većina bazičnih definicija i osnovnih svojstava opisana, preskočili smo, radi sažetosti, mnoge važne činjenice vezane uz kvaziprojektivne mnogostrukosti. Za sve izostavljene pojmove i tvrdnje, kao i za mnoštvo motivirajućih primjera, preporučamo [4].

Poglavlje 2

Spektar prstena

U ovom poglavlju pridružit ćemo proizvoljnom prstenu A geometrijski objekt na način koji poopćuje korespondenciju između mnogostrukosti X i pripadnog koordinatnog prstena $k[X]$ opisanu u uvodnom dijelu. Za prsten A uvijek pretpostavljamo da je komutativan, s jedinicom.

2.1 Definicija i primjeri spektra

Vidjeli smo da su u slučaju afinih mnogostrukosti točke iz X u bijekciji s maksimalnim idealima u prstenu $k[X]$; zbog toga je prirodno očekivati da će se geometrijski objekt koji pridružujemo prstenu A sastojati od svih maksimalnih ideala u A. S druge strane, takva konstrukcija nije sasvim pogodna. Naime, htjeli bismo zadržati osnovna svojstva veze između mnogostrukosti i pripadnog koordinatnog prstena; jedno od najvažnijih svojstava te veze koje nije moguće očuvati ako se ograničimo na maksimalne ideale je činjenica da homomorfizmi koordinatnih prstenova odgovaraju regularnim preslikavanjima mnogostrukosti. Za dani homomorfizam prstenova $f : A \to B$ postoji očit način pridruživanja ideala iz A idealima iz B: idealu $\mathfrak{b} \in B$ pridružimo njegovu prasliku $f^{-1}(\mathfrak{b})$. No, ovdje nailazimo na probleme ako radimo samo s maksimalnim idealima - praslika maksimalnog ideala nije nužno maksimalni ideal. Primjerice, promotrimo li monomorfizam $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, vidimo da je praslika maksimalnog ideala $(0) \subset \mathbb{Q}$ ideal $(0) \subset \mathbb{Z}$ koji očito nije maksimalan. Ako pak radimo s prostim idealima, nećemo naići na ovu zapreku jer je praslika prostog ideala uvijek prosti ideal. Nadalje, radeći s prostim idealima ne gubimo na geometrijskoj intuiciji: za afinu mnogostrukost X skup svih prostih ideala u $k[X]$ odgovara skupu svih ireducibilnih zatvorenih podmnogostrukosti od X. Sve ovo nas navodi na sljedeću definiciju.

Definicija 2.1.1. *Skup svih prostih ideala u A zove se spektar prstena A. Označavamo ga sa Spec A, a proste ideale zovemo točkama.*

Napomena 2.1.2. *Naziv "spektar" dolazi iz linearne algebre: Neka je T operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru nad algebarski zatvorenim poljem k i neka je $p \in k[X]$ njegov karakteristični polinom. Tada je lako vidjeti da se spektar operatora T podudara sa spektrom prstena $k[X]/(p)$.*

Budući da A ima jedinicu, znamo da postoji barem jedan maksimalan ideal u A, stoga je Spec A uvijek neprazan. Promotrimo nekoliko ilustrativnih primjera.

Primjer 2.1.3. *Spec $\mathbb{Z}$ se sastoji od nul-ideala i ideala generiranih prostim brojevima: $(2), (3), (5), (7), \ldots$*

Neka je $\varphi : A \to B$ homomorfizam (uvijek pretpostavljamo da se radi o homomorfizmu prstena s jedinicom, tj. $\varphi(1) = 1$). Već smo komentirali da je praslika prostog ideala po homomorfizmu i sama prosti ideal, stoga je homomorfizmu φ na prirodan način pridruženo preslikavanje

$$^a\varphi : \text{Spec } B \to \text{Spec } A$$

zadano s $^a\varphi(\mathfrak{b}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{b}), \mathfrak{b} \in \text{Spec } B$.

Primjer 2.1.4. *Promotrimo kako izgleda $^a\iota$ za inkluziju $\iota : \mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$.*
Prsten polinoma $\mathbb{C}[X]$ je prsten glavnih ideala; lako je provjeriti da se spektar prstena $\mathbb{C}[X]$ sastoji od ideala generiranih polinomima prvog stupnja, to jest oblika $(X-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Praslika ideala $(X - \alpha)$ je očito skup (preciznije, ideal) svih polinoma iz $\mathbb{R}[X]$ koji su u prstenu $\mathbb{C}[X]$ djeljivi polinomom $X - \alpha$. Generator tog ideala je polinom najmanjeg stupnja iz $\mathbb{R}[X]$ djeljiv s $X - \alpha$. Ako je α realan, očito je generator upravo $X - \alpha$. Ako je pak $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, onda je svaki polinom iz $\mathbb{R}[X]$ koji je djeljiv s $(X - \alpha)$ istovremeno djeljiv i s $(X - \overline{\alpha})$, stoga je traženi generator $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$. Imamo, dakle,

$$^a\iota((X-\alpha)) = \begin{cases} (X-\alpha), & \alpha \in \mathbb{R} \\ ((X-\alpha)(X-\overline{\alpha})), & \alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \end{cases}$$

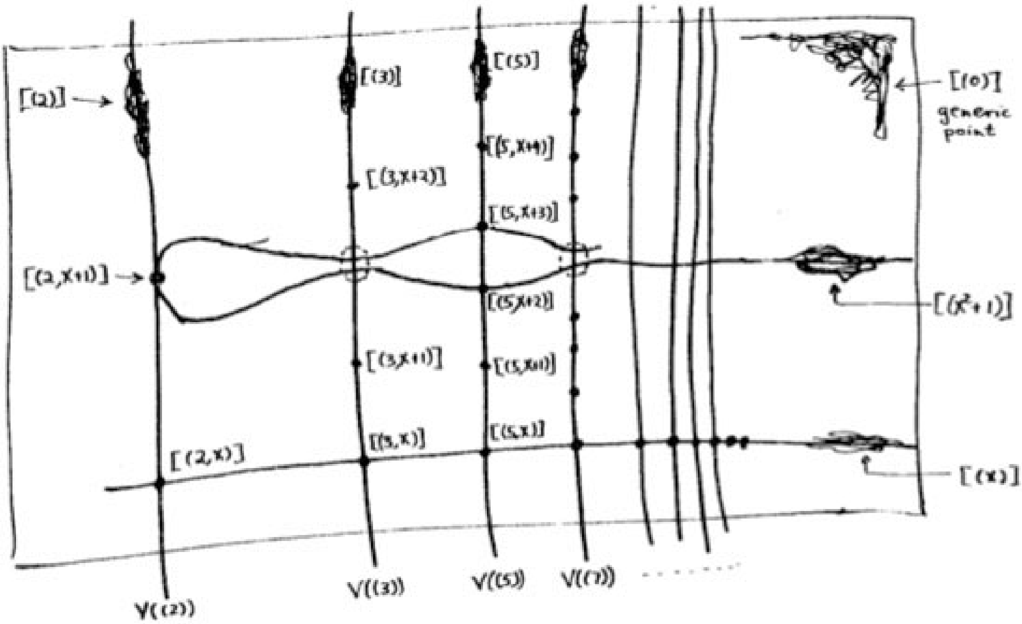
Nešto kompliciraniji slučaj opisujemo u sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.5. *Odredimo spektar prstena polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, $\mathbb{Z}[X]$, pomoću inkluzije $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[X]$:*
Neka je $\mathfrak{p}$ prost ideal u $\mathbb{Z}[X]$. Znamo da je $^a i(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ prost ideal u $\mathbb{Z}$ pa imamo dvije mogućnosti.

1) $^a i(\mathfrak{p}) = (0)$
Ovo znači da u idealu $\mathfrak{p}$ nema konstantnih polinoma (to jest, elemenata iz $\mathbb{Z}$) osim nule. Pretpostavimo $\mathfrak{p} \neq (0)$ i uzmimo polinom $f \neq 0$ najmanjeg stupnja iz $\mathfrak{p}$ koji je k tome i ireducibilan nad $\mathbb{Z}$. Uočimo da je to sigurno moguće zbog činjenice da je $\mathfrak{p}$

prost - ako je $\tilde{f}$ polinom minimalnog stupnja iz $\mathfrak{p}$, ne može se faktorizirati u produkt dva polinoma pozitivnog stupnja, jer bi tada jedan od faktora morao biti u $\mathfrak{p}$, a to je kontradikcija s minimalnošću stupnja od $\tilde{f}$. Slično, ako $\tilde{f}$ ima netrivijalan sadržaj (najveći zajednički djelitelj koeficijenata), možemo ga izlučiti pa dobivamo $\tilde{f} = Cf$, gdje je $C \in \mathbb{Z}$, a f ireducibilan. Budući da je $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, zaključujemo $C \notin \mathfrak{p}$ pa mora biti $f \in \mathfrak{p}$, čime smo došli do ireducibilnog polinoma najmanjeg stupnja.

Sada je lako pokazati da f generira $\mathfrak{p}$. Svaki drugi polinom $g \in \mathfrak{p}$ možemo u $\mathbb{Q}[X]$ podijeliti s f pa dobivamo $g = fq + r$ za neke polinome q, r, pri čemu je $\deg r < \deg f$. Jednakost $r = g - fq$ vrijedi u $\mathbb{Q}[X]$, ali množeći je s odgovarajućim cijelim brojem (nazivnikom) dobivamo jednakost iz $\mathbb{Z}[X]$ iz koje čitamo da je r (eventualno pomnožen s nekim cijelim brojem) sadržan u idealu $\mathfrak{p}$. Zbog minimalnosti stupnja od f zaključujemo da je $r = 0$, to jest $f \mid g$. Kako je $g \in \mathfrak{p}$ bio proizvoljan, slijedi $\mathfrak{p} = (f)$.



Slika 2.1: Skica spektra $\mathbb{Z}[X]$ iz bilješki D. Mumforda po kojima je nastala knjiga "The Red Book of Varieties and Schemes"

2) $^a i(\mathfrak{p}) = (p)$ *za neki prost broj* $p \in \mathbb{Z}$
Jedna očita mogućnost je $\mathfrak{p} = (p)$. Ako je $\mathfrak{p} \supsetneq (p)$, možemo uzeti ireducibilan polinom $f \in \mathfrak{p} \backslash (p)$ najmanjeg stupnja. Sada slično kao u prethodnom slučaju pokažemo da

vrijedi $\mathfrak{p} = (f, p)$. *Ovo je prost ideal ako i samo ako je* $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{p}$ *integralna domena. Vidimo da je* $\mathbb{Z}[X]/(p, f) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/(f)$, *stoga dobivamo integralnu domenu ako i samo ako* f *reduciran mod* p *generira prosti ideal u* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$, *odnosno (budući da je* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ *prsten glavnih ideala) ako i samo ako je* f *ireducibilan mod* p.

Pokazali smo, dakle, da svaki ne-nul ideal u $\mathbb{Z}[X]$ *ima jedan od sljedeća tri oblika*

- (p), *gdje je* $p \in \mathbb{Z}$ *prost*
- (f), *gdje je* $f \in \mathbb{Z}[X]$ *ireducibilan polinom*
- (p, f), *gdje je* $p \in \mathbb{Z}$ *prost, a* $f \in \mathbb{Z}[X]$ *ireducibilan modulo* p

Konačno, promotrimo nešto općenitiji, ali vrlo koristan primjer:

Primjer 2.1.6. *Neka je* A *prsten i* $S \subset A$ *multiplikativan skup. Promotrimo prsten razlomaka* A_S *(koristimo kraću oznaku) i homomorfizam* $\varphi : A \to A_S$ *definiran s* $a \mapsto \frac{a}{1}$. *Lako je provjeriti da je pridruženo preslikavanje* ${}^a\varphi$ *injektivno te da mu je slika skup* U_S *svih prostih ideala u* A *disjunktnih sa* S. *Inverz ovog preslikavanja dan je s*

$$\psi : \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}A_S = \{\frac{p}{s} : p \in \mathfrak{p}, s \in S\}$$

Posebno će nam biti zanimljivi slučajevi kada je $S = A \backslash \mathfrak{p}$ *za neki prosti ideal* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ *(u tom slučaju pišemo* $A_S = A_{\mathfrak{p}}$*), odnosno* $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ *za neki* $f \in A$*; tada* A_S *označavamo s* A_f.

2.2 Točke spektra

Za svaku točku $x \in \operatorname{Spec} A$ možemo promatrati tzv. rezidualno polje: budući da je x prost ideal, A/x je integralna domena. Polje razlomaka ove integralne domene označavamo s $k(x)$ i nazivamo rezidualnim poljem (poljem ostataka) prstena A u točki x. Kompozicijom kanonskih preslikavanja $A \to A/x \to k(x)$ dobivamo homomorfizam

$$A \to k(x).$$

čija je jezgra upravo upravo ideal x. Motivirani sljedećim osnovnim primjerom, sliku elementa $f \in A$ po ovom homomorfizmu označavamo s $f(x)$.

Primjer 2.2.1. *Neka je* X *afina mnogostrukost nad algebarski zatvorenim poljem* k *i neka je* $A = k[X]$ *njezin koordinatni prsten. Tada je u svakoj točki* $x \in X$ *rezidualno polje* $k(x) = k$, *a opisani homomorfizam je evaluacija u točki* x.

Naravno, u općem slučaju se rezidualna polja u različitim točkama razlikuju. Uzmemo li, primjerice, $A = \mathbb{Z}$, dobivamo da je u prostom idealu (p) rezidualno polje jednako $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, dok je u (0) rezidualno polje jednako $\mathbb{Q}$.

Napomena 2.2.2. *Prosti ideali u A će nadalje uvijek imati dvojake uloge: promatrat ćemo ih i kao algebarske objekte, i kao točke iz Spec A. Da bismo naglasili razliku, često ćemo ideal koji odgovara točki $x \in \operatorname{Spec} A$ označavati s $\mathfrak{p}_x$.*

U primjeru 2.2.1 bilo je prirodno promatrati elemente $f \in A$ kao funkcije $X \to k$. Čak i u slučaju $A = \mathbb{Z}$ možemo promatrati elemente iz A kao funkcije, iako su za $x \neq y$ slike $f(x)$ i $f(y)$ elementi različitih polja (formalno, f možemo promatrati kao funkciju sa Spec A u disjunktnu uniju rezidualnih polja). Nažalost, "funkcijski" pogled na elemente iz A nije pogodan ako radimo sa sasvim općenitim prstenom A zbog činjenice da elementi iz A nisu jedinstveno određeni svojim djelovanjem na točke iz Spec A. Na primjer, element $f \in A$ će očito odgovarati nul-funkciji ako i samo ako je sadržan u svakom prostom idealu, no to ne znači da mora biti $f = 0$. Štoviše, imamo vrlo jasnu karakterizaciju takvih elemenata:

Propozicija 2.2.3. *Element $f \in A$ je sadržan u svakom prostom idealu iz A ako i samo ako je nilpotentan.*

Dokaz. Ako je f nilpotentan, onda po definiciji postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f^n = 0$. Zbog toga za svaki prosti ideal $\mathfrak{p}_x \in \operatorname{Spec} A$ vrijedi $f^n \in \mathfrak{p}_x$ pa zbog činjenice da je $\mathfrak{p}_x$ prost zaključujemo i $f \in \mathfrak{p}_x$.

Obratno, neka je f sadržan u svakom prostom idealu; pretpostavimo da nije nilpotentan. To znači da je $\{1, f, f^2, \dots\}$ multiplikativan skup koji ne sadrži 0, stoga je lokalizacija A_f netrivijalan prsten s jedinicom. Posebno, znamo da je Spec A_f neprazan (jer sadrži barem jedan maksimalni ideal). U primjeru 2.1.6 smo vidjeli da je Spec A_f jednak skupu svih prostih ideala u A koji su disjunktni s multiplikativnim skupom $\{1, f, f^2, \dots\}$. Posebno, ako je Spec A_f neprazan, to znači da u A postoji barem jedan prosti ideal koji ne sadrži f, no to je kontradikcija s činjenicom da f sadržan u svakom idealu iz Spec A. Zaključujemo da je f nilpotentan. □

Lako je provjeriti da je skup svih nilpotentnih elemenata u A ideal; zovemo ga nilradikalom prstena A

Naposljetku, prije no što krenemo u izgradnju topologije na Spec A, promotrimo još jednu konstrukciju vezanu za točke spektra. Uočimo da za svaku točku $x \in \operatorname{Spec} A$ možemo promatrati lokalizaciju prstena A po multiplikativnom skupu $A \backslash \mathfrak{p}_x$. Rezultat je prsten $A_{\mathfrak{p}_x}$ (vidi primjer 2.1.6) koji sadrži točno jedan maksimalni ideal, tzv. lokalni prsten $\mathcal{O}_x$ od A u točki x.

Napomena 2.2.4. *Prstene koji sadrže samo jedan maksimalan ideal i inače nazivamo lokalnima. Pretpostavimo da je A lokalni prsten s maksimalnim idealom M. Ako element a*

nije sadržan u M, onda je ideal generiran s a očito jednak cijelom prstenu A. Posebno, a je invertibilan. Odavde vidimo da je maksimalni ideal u lokalnom prstenu A uvijek jednak skupu neinvertibilnih elemenata u A.

U skladu s napomenom, jedinstveni maksimalni ideal u lokalnom prstenu O_x jednak je skupu $m_x = \{\frac{a}{b} : a \in x, b \in A \backslash \mathfrak{p}_x\}$. Budući da se radi o maksimalnom idealu, kvocijentni prsten O_x/m_x je polje. Nije teško provjeriti da smo ovime na drugi način došli do već poznatog objekta: rezidualnog polja prstena A u točki x.

2.3 Topologija Zariskog

Do sada smo Spec A promatrali samo kao skup. Budući da želimo konstruirati "geometrijski" objekt, trebamo najprije definirati topologiju na Spec A. Za proizvoljan podskup $E \subseteq A$ možemo promatrati skup $V(E) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : E \subseteq \mathfrak{p}\}$. Tada je lako pokazati da vrijede relacije

$$V\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right) = \bigcap V(E_\alpha)$$

za proizvoljnu familiju $\{E_\alpha\}$ podskupova od A, i

$$V((E) \cap (F)) = V(E) \cup V(F)$$

za proizvoljne $E, F \subseteq A$ (ovdje $(E), (F)$ označavaju ideale generirane s E, odnosno F). Prva relacija vrijedi trivijalno, dok je za drugu potrebno uočiti da $\mathfrak{p} \supseteq (E) \cap (F)$ implicira $\mathfrak{p} \supseteq (E)(F)$, iz čega zbog prostosti ideala $\mathfrak{p}$ slijedi $(E) \subseteq \mathfrak{p}$ ili $(F) \subseteq \mathfrak{p}$. Ovo razmatranje daje inkluziju $V((E) \cap (F)) \subseteq V(E) \cup V(F)$, dok je obratna inkluzija također trivijalna. Gornje relacije pokazuju da familija skupova $\{V(E) : E \subseteq A\}$ zadovoljava svojstva koja u topologiji zadovoljavaju zatvoreni skupovi.

Definicija 2.3.1. *Topologija na Spec A u kojoj je familija svih zatvorenih skupova jednaka* $\{V(E) : E \subseteq A\}$ *naziva se* ***topologija Zariskog***.

U daljnjem uvijek promatramo Spec A kao topološki prostor s topologijom Zariskog. Ako je $\varphi : A \to B$ homomorfizam prstenova, onda za proizvoljan $E \subseteq A$ vrijedi

$$({}^a\varphi)^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E)),$$

što pokazuje da je ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ neprekidno preslikavanje.

Primjer 2.3.2. *Za proizvoljan ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ promotrimo kanonski epimorfizam $\varphi : A \to A/\mathfrak{a}$. Lako se vidi da je ${}^a\varphi$ homeomorfizam s Spec $(A/\mathfrak{a})$ na $V(\mathfrak{a})$. Budući da za svaki $E \subseteq A$ vrijedi $V(E) = V(\mathfrak{a})$, pri čemu je $\mathfrak{a} = (E)$, ovo znači da je svaki zatvoren skup homeomorfan spektru nekog prstena.*

Neka je sada $S \subseteq A$ multiplikativan skup; koristimo oznake uvedene u primjeru 2.1.6. Imamo, dakle,

$$\varphi : A \to A_S, \qquad U_S = {}^a\varphi(\operatorname{Spec} A_S), \qquad \psi : U_S \to \operatorname{Spec} A_S.$$

Stavimo li na U_S topologiju naslijeđenu iz $\operatorname{Spec} A$, nije teško vidjeti da je i ψ neprekidno preslikavanje, tj. da dobivamo homeomorfizam između $\operatorname{Spec} A_S$ i potprostora $U_S \subseteq \operatorname{Spec} A$.

Posebno je važan slučaj kada je $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$ za neki $f \in A$ koji nije nilpotentan. Skup U_S je tada jednak otvorenom skupu $\operatorname{Spec} A \backslash V(f)$ svih prostih ideala koji ne sadrže f. (Ovdje koristimo kraću oznaku $V(f)$ za $V(\{f\})$). Otvoreni skupovi oblika $\operatorname{Spec} A \backslash V(f)$ zovu se **glavni otvoreni skupovi** i označavaju s $D(f)$. Prema gornjoj diskusiji, vidimo da je $D(f)$ homeomorfan sa $\operatorname{Spec} A_f$. Kako je svaki zatvoren skup oblika $V(E) = \bigcap_{f \in E} V(f)$, uzimanjem komplementa vidimo da svaki otvoren skup možemo prikazati kao uniju glavnih otvorenih skupova. Iz toga zaključujemo da je $\{D(f) : f \in A\}$ baza topologije Zariskog. Sada smo u prilici dokazati prvi rezultat koji govori o svojstvima topologije na $\operatorname{Spec} A$:

Propozicija 2.3.3. *Spec A je kompaktan prostor.*

Dokaz. Neka je $\{U_\alpha\}$ proizvoljan otvoren pokrivač za $\operatorname{Spec} A$; želimo pokazati da se $\{U_\alpha\}$ može reducirati do konačnog potpokrivača. Budući da je $\{D(f) : f \in A\}$ baza topologije, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su skupovi U_α oblika $D(f_\alpha)$. Imamo, dakle, $\operatorname{Spec} A = \bigcup_\alpha D(f_\alpha)$ iz čega vidimo $\bigcap_\alpha V(f_\alpha) = \emptyset$. Označimo li s $\mathfrak{a}$ ideal generiran svim elementima f_α, odavde čitamo $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$. Ovo je moguće jedino ako $\mathfrak{a} = A$. Posebno, imamo $1 \in \mathfrak{a}$, stoga postoje $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}$ i $g_1, \ldots, g_n \in A$ takvi da vrijedi

$$1 = \sum_{k=1}^{n} f_{\alpha_k} g_k.$$

Odavde slijedi $A = (f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n})$, što znači da je $\operatorname{Spec} A = D(f_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup D(f_{\alpha_n})$. Time smo reducirali proizvoljan otvoren pokrivač do konačnog potpokrivača pa zaključujemo da je $\operatorname{Spec} A$ kompaktan. $\square$

Napomena 2.3.4. *Uočimo da za $f, g \in A$ vrijedi $V(fg) = V(f) \cup V(g)$, to jest $D(fg) = D(f) \cap D(g)$. Ako fg nije nilpotentan, onda je $D(fg)$ neprazan, dakle $D(f)$ i $D(g)$ se sijeku.*

Osim što topologija Zariskog (prema prethodnoj napomeni) nije Hausdorffova, ona je po još mnogočemu ”neobična”. Na primjer, u Spec A postoje točke koje nisu zatvorene. Uzmemo li točku $x \in \operatorname{Spec} A$ (i označimo li isti ideal promatran kao podskup od A s $\mathfrak{p}_x$), svaki zatvoren skup koji sadrži x je oblika $V(E)$ za neki $E \subseteq A$ takav da je $x \in V(E)$, to jest $E \subseteq \mathfrak{p}_x$. Budući da $E \subseteq F$ povlači $V(F) \subseteq V(E)$, očito je najmanji zatvoren skup koji sadrži točku x upravo $V(\mathfrak{p}_x)$. Ovime smo pokazali da je zatvarač točke x jednak skupu svih prostih ideala koji sadrže x. Posebno, točka x je zatvorena ako i samo ako je odgovarajući ideal $\mathfrak{p}_x$ maksimalan.

Primjer 2.3.5. *Ako je A integralna domena, onda je* (0) *prost ideal sadržan u svim prostim idealima. To znači da je zatvarač od* (0) *cijeli prostor* Spec A, *to jest da je točka* (0) *gusta u* Spec A*!*

Guste točke u Spec A nazivamo generičkim točkama. Pitanje egzistencije generičke točke u Spec A možemo prikladno formulirati pomoću propozicije 2.2.3. Naime, ako je x generička točka, onda je odgovarajući ideal $\mathfrak{p}_x$ prost ideal sadržan u svim prostim idealima, što znači da je jednak presjeku svih prostih ideala. U propoziciji 2.2.3 smo pokazali da je presjek svih prostih ideala jednak nilradikalu, stoga zaključujemo da generička točka postoji ako i samo ako je nilradikal prost ideal. (U tom slučaju je generička točka jedinstvena i jednaka upravo nilradikalu). Egzistencija generičke točke usko je povezana s još jednim topološkim svojstvom prostora Spec A:

Podsjetimo da za topološki prostor X kažemo da je ireducibilan ako se ne može prikazati kao unija $X = X_1 \cup X_2$ pri čemu su $X_1, X_2 \subsetneq X$ zatvoreni podskupovi. U suprotnom, kažemo da je X reducibilan.

Propozicija 2.3.6. *Spec A sadrži generičku točku ako i samo ako je ireducibilan.*

Dokaz. Ako je prostor X reducibilan, onda očito ne sadrži generičku točku: zatvarač svake točke je sadržan ili u X_1, ili u X_2. Drugim riječima, ireducibilnost je nužan uvjet za egzistenciju generičke točke.

Obratno, neka je A prsten takav da je Spec A ireducibilan. Da bismo pokazali egzistenciju generičke točke, dovoljno je dokazati da je nilradikal od A prost ideal. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $f, g \in A$ takvi da f i g nisu nilpotentni, ali fg jest. Tada iz formule za uniju zatvorenih skupova i činjenice da je $V(fg) = \operatorname{Spec} A$ dobivamo

$$\operatorname{Spec} A = V(f) \cup V(g), \text{ ali } V(f), V(g) \neq \operatorname{Spec} A.$$

Ovo je kontradikcija s ireducibilnošću prosora Spec A, stoga zaključujemo da je nilradikal prost. □

Vidjeli smo da je svaki zatvoren podskup prostora Spec A homeomorfan spektru nekog prstena; zbog toga ovu propoziciju možemo primijeniti i na proizvoljan zatvoren podskup od Spec A. Time pokazujemo da postoji bijekcija između točaka i ireducibilnih zatvorenih podskupova prostora Spec A, koja svakoj točki pridružuje njezin zatvarač.

Nadalje, ako je A Noetherin prsten, onda je Spec A Noetherov prostor (ovo pokazujemo na isti način kao u slučaju koordinatnih prstenova afinih mnogostrukosti, 1.4.2). Posebno, dobivamo rastav Spec A na ireducibilne zatvorene skupove.

Primjer 2.3.7. *Neka je* $\{1, \sigma\}$ *ciklička grupa reda* 2 *i neka je* $A = \mathbb{Z}[\sigma]$ *grupni prsten ove grupe:*

$$\mathbb{Z}[\sigma] = \{a + b\sigma : a, b \in \mathbb{Z}, \sigma^2 = 1\}.$$

Lako se pokaže da je nilradikal prstena A jednak nul-idealu, ali nije prost: vrijedi $(1 - \sigma)(1 + \sigma) = 0$. *Zaključujemo da je Spec A reducibilan; nije teško provjeriti da su ireducibilne komponente upravo* $X_1 = V(1 - \sigma)$ *i* $X_2 = V(1 + \sigma)$.

Za kraj čisto topoloških razmatranja, uvodimo pojam dimenzije:

Definicija 2.3.8. *Dimenzija topološkog prostora X je maksimalna duljina strogo rastućeg niza*

$$\emptyset \neq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$$

ireducibilnih zatvorenih podskupova od X. Dimenziju prostora X označavamo s dim X.

Iz definicije možemo naslutiti da postoje prostori čija dimenzija nije konačna. Naravno, da bi dimenzija prostora X bila konačna, nužno je da X bude Noetherov prostor. S druge strane, ovo nije dovoljan uvjet; ipak, postoje mnogi važni primjeri prstenova A za koje je $X = \operatorname{Spec} A$ konačne dimenzije. U tom slučaju govorimo o dimenziji prstena A (i označavamo je s dim A). Bez dokaza navodimo dva korisna rezultata vezana za dimenziju:

Propozicija 2.3.9. *Prsten koji je konačnogeneriran nad prstenom konačne dimenzije je i sam konačnodimenzionalan.*

Propozicija 2.3.10. *Neka je A Noetherin prsten. Tada je dim* $A[X_1, \ldots, X_n] =$ *dim* $A + n$.

Nije teško pokazati da se dimenzija prstena A može izraziti i algebarski, kao maksimalna duljina strogo rastućeg niza

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

prostih ideala u A. Pomoću ove činjenice lako računamo dimenziju u sljedećim primjerima.

Primjer 2.3.11. *Maksimalna duljina rastućih nizova prostih ideala u* $\mathbb{Z}$ *se očito postiže u slučaju* $(0) \subsetneq (p)$ *za prost broj p. Odavde čitamo dim* $\mathbb{Z} = 1$.

Primjer 2.3.12. *U primjeru 2.1.5 odredili smo sve proste ideale u prstenu polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Vidimo da se maksimalna duljina rastućeg niza ideala postiže sa npr.*

$$(0) \subsetneq (p) \subsetneq (p, f), \text{ za prost broj } p \text{ i polinom } f \text{ ireducibilan mod } p,$$

odakle čitamo $\dim \mathbb{Z}[X] = 2$. *Uočimo da je ovo u skladu s prethodnom propozicijom.*

Poglavlje 3

Snopovi

Spektar prstena, definiran u prethodnom poglavlju, jedan je od dva pojma ključna za definiciju sheme. Drugi je vezan uz regularne funkcije. Vidjeli smo da u slučaju kvaziprojektivne mnogostrukosti X prsten regularnih funkcija $k[X]$ može biti ”siromašan”: primjerice, za projektivnu mnogostrukost X prsten $k[X]$ sadrži samo konstante. Zbog toga, umjesto funkcija regularnih na cijeloj mnogostrukosti X, možemo za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$ promatrati funkcije regularne na U. Time dobivamo familiju prstena funkcija; odnose koji povezuju prstenove u takvoj familiji generalizirat ćemo i objediniti u definiciji snopa.

3.1 Predsnopovi

Definicija 3.1.1. *Neka je X topološki prostor. Pretpostavimo da je svakom otvorenom skupu $U \subseteq X$ pridružen skup $\mathcal{F}(U)$ te da za svaka dva otvorena skupa $U \subseteq V$ imamo preslikavanje*

$$\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U).$$

Ovakav sustav skupova i preslikavanja zove se ***predsnop*** *ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

i) Skup $\mathcal{F}(\emptyset)$ je jednočlan;

ii) ρ_U^U je identiteta za svaki otvoren $U \subseteq X$;

iii) Za otvorene skupove $U \subseteq V \subseteq W$ vrijedi

$$\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W.$$

Predsnop obično označavamo samo slovom $\mathcal{F}$. Ako skupovi $\mathcal{F}(U)$ imaju neku dodatnu (algebarsku) strukturu, onda podrazumijevamo da i preslikavanja ρ_U^V poštuju tu strukturu:

primjerice, ako su $\mathcal{F}(U)$ grupe, prsteni ili moduli nad istim prstenom, onda su ρ_U^V homomorfizmi (grupa, prstenova, odnosno modula); kažemo da je tada $\mathcal{F}$ predsnop grupa, prstenova, ondosno modula.

Ako je $\mathcal{F}$ predsnop na X i $U \subseteq X$ otvoren skup, možemo svakom otvorenom podskupu $V \subseteq U$ pridružiti $\mathcal{F}(V)$. Time očito dobivamo predsnop na U; zovemo ga restrikcijom predsnopa $\mathcal{F}$ i označavamo s $\mathcal{F}_{|U}$.

Promotrimo neke primjere predsnopova:

Primjer 3.1.2. *Fiksirajmo proizvoljan skup S. Neka je $\mathcal{F}(U)$ skup svih funkcija definiranih na U s vrijednostima u S, a preslikavanje ρ_U^V ostvareno restrikcijom funkcija s V na U za svaki $U \subseteq V$. Očito je tada $\mathcal{F}$ predsnop, tzv. predsnop svih funkcija na X s vrijednostima u S.*

Imajući na umu ovaj najosnovniji primjer predsnopa, preslikavanja ρ_U^V zovemo restrikcijama. Varijacije prethodnog primjera pojavljuju se u mnogim poznatim slučajevima:

Primjer 3.1.3. *Ako je u prethodnom primjeru S topološki prostor, a $\mathcal{F}(U)$ skup svih neprekidnih preslikavanja $U \to S$, opet dobivamo predsnop, tzv. predsnop neprekidnih funkcija na X.*

Primjer 3.1.4. *Neka je X kvaziprojektivna mnogostrukost. Za otvoren podskup $U \subseteq X$ definiramo $\mathcal{F}(U)$ kao skup svih racionalnih funkcija na X koje su regularne na skupu U. I u ovom slučaju je očito da smo dobili predsnop; zovemo ga predsnopom regularnih funkcija.*

3.2 Strukturni predsnop

U ovom dijelu konstruiramo predsnop na $X = \operatorname{Spec} A$. Zvat ćemo ga strukturnim predsnopom i označavati s $\mathcal{O}$. Da bismo lakše razumjeli opću konstrukciju strukturnog predsnopa, najprije ga uvodimo u posebnom slučaju.

Pretpostavimo da je prsten A integralna domena i označimo s $\mathbb{K}$ njegovo polje razlomaka. Za otvoren podskup $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ označimo s $\mathcal{O}(U)$ skup svih elemenata $u \in \mathbb{K}$ takvih da za svaku točku $x \in U$ postoje $a, b \in A$ za koje vrijedi $u = a/b$ i $b(x) \neq 0$. Jasno je da je $\mathcal{O}(U)$ prsten; također, za $U \subseteq V$ očito imamo $\mathcal{O}(V) \subseteq \mathcal{O}(U)$. Zbog toga možemo definirati restrikciju ρ_U^V kao inkluziju $\mathcal{O}(V) \hookrightarrow \mathcal{O}(U)$. Nije teško provjeriti da smo ovime doista konstruirali predsnop prstenova.

Napomena 3.2.1. *Uočimo da gornja konstrukcija direktno poopćuje situaciju u kojoj je $A = k[X]$ koordinatni prsten afine mnogostrukosti X. Polje $\mathbb{K}$ je u tom slučaju $k(X)$, a $\mathcal{O}(U)$ je skup svih racionalnih funkcija regularnih na U.*

Prije nego što krenemo na konstrukciju strukturnog predsnopa za proizvoljan prsten, izračunajmo $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A)$ u slučaju kada je A integralna domena. Koristimo već prokušani pristup:

Pretpostavimo $u \in \mathcal{O}(\operatorname{Spec} A)$. To po definiciji implicira da za svaku točku $x \in \operatorname{Spec} A$ postoje $a_x, b_x \in A$ takvi da je $u = a_x/b_x$ i $b_x(x) \neq 0$, to jest $b_x \notin x$. Promotrimo ideal $\mathfrak{a}$ generiran svim elementima b_x. Zbog $b_x \notin x$, ideal $\mathfrak{a}$ nije sadržan niti u jednom prostom idealu, stoga mora biti $\mathfrak{a} = A$. Posebno, zbog $1 \in A$ to znači da postoje $x_1, \ldots, x_n$ i $c_1, \ldots, c_n \in A$ takvi da vrijedi

$$1 = c_1 b_{x_1} + \ldots c_n b_{x_n}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s u (i iskoristimo $u = a_x/b_x, \forall x$) dobivamo

$$u = c_1 a_{x_1} + \ldots c_n a_{x_n}.$$

Odavde vidimo da je $u \in A$, dakle $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) \subseteq A$. Kako je obratna inkluzija očita, zaključujemo $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) = A$. Uočimo da je ovo u skladu s prethodnom napomenom i propozicijom 1.5.4.

Neka je sada A proizvoljan prsten. Iz prethodnog primjera vidimo da je prirodno definirati $\mathcal{O}(\operatorname{Spec} A) := A$. Nadalje, vidjeli smo (u sekciji 2.3) da je glavni otvoren skup $D(f)$ homeomorfan sa $\operatorname{Spec} A_f$, stoga je prirodno staviti i

$$\mathcal{O}(D(f)) := A_f.$$

Prije nego što definiramo $\mathcal{O}(U)$ za preostale otvorene skupove, uvedimo ρ_U^V u slučaju kada su U i V glavni otvoreni skupovi. Uočimo najprije da iz $D(f) \subseteq D(g)$ uzimanjem komplementa dobivamo $V(f) \supseteq V(g)$. To znači da svi prosti ideali koji sadrže g sadrže i f; drugim riječima, element f (točnije, njegova slika po kanonskom epimorfizmu) je sadržan u svakom prostom idealu prstena $A/(g)$. Ovo vrijedi ako i samo ako je f nilpotentan u $A/(g)$, odnosno ako i samo ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i $u \in A$ takvi da vrijedi

$$f^n = ug.$$

Odavde vidimo da za $D(f) \subseteq D(g)$ možemo zadati homomorfizam

$$\rho_{D(f)}^{D(g)} : A_g \to A_f \qquad \text{formulom} \qquad a/g^k \mapsto au^k/f^{nk}$$

(ovdje smo samo "proširili razlomak" a/g^k s u^k i iskoristili $gu = f^n$). Direktna provjera pokazuje da je ovo preslikavanje dobro definirano (ne ovisi o prikazu a/g^k) te da se doista radi o homomorfizmu.

Napomena 3.2.2. *Do gornjih homomorfizama mogli smo doći i "konceptualnijim" putem: $f^n = ug$ povlači da su g i njegove potencije invertibilni elementi u A_f. Zbog univerzalnog svojstva prstena razlomaka odavde slijedi da se kanonsko preslikavanje $A \to A_f$ može proširiti do homomorfizma $A_g \to A_f$, čime dobivamo traženi $\rho^{D(g)}_{D(f)}$.*

Nastavimo s konstrukcijom strukturnog predsnopa. U slučaju kada je prsten A bio integralna domena, svi prstenovi $\mathcal{O}(U)$ bili su podskupovi istog polja $\mathbb{K}$; to nam omogućuje da lagano rekonstruiramo $\mathcal{O}(U)$ (za proizvoljan otvoren U) iz familije prstenova $\mathcal{O}(D(f))$:

$$\mathcal{O}(U) = \bigcap_{D(f)\subseteq U} \mathcal{O}(D(f)) \tag{$*$}$$

(gornju relaciju je lako provjeriti; korisno je imati na umu paralelu s racionalnim funkcijama na afinoj mnogostrukosti: racionalna funkcija je očito regularna na U ako i samo ako je regularna na svim glavnim otvorenim skupovima sadržanima u U).

Ovakvu (re)konstrukciju prstena $\mathcal{O}(U)$ htjeli bismo provesti i u općem slučaju. Prepreka leži u činjenici da prstene $\mathcal{O}(D(f)) = A_f$ ne možemo promatrati kao podskupove istog prstena, pa ne možemo ni uzeti njihov presjek. S druge strane, prsteni $\mathcal{O}(D(f))$ nisu sasvim proizvoljni; povezani su homomorfizmima $\rho^{D(g)}_{D(f)}$. Zbog toga možemo iskoristiti konstrukciju koja u teoriji kategorija generalizira presjek – projektivni limes.

Definicija 3.2.3. *Neka je I parcijalno uređen skup i $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$ indeksirana familija skupova. Neka su, nadalje, za svaki par indeksa $\alpha \leq \beta \in I$ definirana preslikavanja $f^\beta_\alpha : E_\beta \to E_\alpha$ koja zadovoljavaju*

(i) f^α_α je identiteta na E_α;

(ii) Za $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ vrijedi $f^\gamma_\alpha = f^\beta_\alpha \circ f^\gamma_\beta$.

Promotrimo podskup produkta $\prod_{\alpha\in I} E_\alpha$ koji se sastoji od svih elemenata $x = \{x_\alpha : x_\alpha \in E_\alpha\}$ takvih da vrijedi $x_\alpha = f^\beta_\alpha(x_\beta)$ za svaki par $\alpha \leq \beta \in I$. Ovaj skup se naziva projektivni limes familije skupova E_α u odnosu na preslikavanja f^β_α; označavamo ga s $\varprojlim E_\alpha$. Projekcije $\varprojlim E_\alpha \to E_\alpha$ zadane s $x \mapsto x_\alpha$ zovemo prirodnim preslikavanjima projektivnog limesa.

Sada direktno generaliziramo relaciju $*$ i definiramo

$$\mathcal{O}(U) = \varprojlim \mathcal{O}(D(f)),$$

pri čemu projektivni limes uzimamo po svim skupovima $D(f) \subseteq U$, u odnosu na homomorfizme $\rho^{D(g)}_{D(f)}$.

Preostaje definirati restrikcije ρ^V_U za proizvoljne otvorene skupove $U \subseteq V$. Elementi iz $\mathcal{O}(V)$ su oblika $\{u_\alpha \in A_{f_\alpha} : D(f_\alpha) \subseteq V\}$ pri čemu za elemnte u_α vrijedi

$$u_\alpha = \rho^{D(f_\beta)}_{D(f_\alpha)}(u_\beta) \quad \text{za} \quad D(f_\beta) \supseteq D(f_\alpha).$$

Sliku ovakvog elementa po restrikciji ρ_U^V definiramo tako da u familiji $\{u_\alpha\}$ zadržimo samo one elemente u_β za koje je $D(f_\beta)$ sadržan u U. Imamo, dakle

$$\left\{u_\alpha \in A_{f_\alpha} : D(f_\alpha) \subseteq V\right\} \xmapsto{\rho_U^V} \left\{u_\beta \in A_{f_\beta} : D(f_\beta) \subseteq U\right\}.$$

Uočimo da za gornju definiciju restrikcija ρ_U^V nije problem što smo prstene $\mathcal{O}(D(f))$ definiriali zasebno, to jest bez projektivnih limesa. Naime, i njih možemo prikazati kao projektivne limese skupova $\mathcal{O}(D(f_\alpha))$ za $D(f_\alpha) \subsetneq D(f)$. Pritom imamo očit izomorfizam prstena $\mathcal{O}(D(f))$ promatranog kao $\varprojlim \mathcal{O}(D(f_\alpha))$ i A_f: ako promatramo sve f_α za koje je $D(f_\alpha) \subsetneq D(f)$, očito za neki indeks α_0 imamo $f_{\alpha_0} = f$. Zbog toga možemo promatrati prirodno preslikavanje (projekciju) s $\varprojlim \mathcal{O}(D(f_\alpha))$ na koordinatu α_0; očito se radi o izomorfizmu. Napomenimo još i da, uzmemo li u obzir ovaj izomorfizam, dobivamo relaciju

$$u_\alpha = \rho^U_{D(f_\alpha)}(u)$$

koja pokazuje kako iz danog $u \in \mathcal{O}(U)$ možemo pomoću restrikcija dobiti elemente u_α.

Nije teško provjeriti da prsteni $\mathcal{O}(U)$ i upravo konstruirana preslikavanja ρ_U^V doista zadovoljavaju uvjete iz definicije predsnopa. Ponovimo, dobiveni predsnop $\mathcal{O}$ zove se strukturni predsnop spektra Spec A.

Prije nego što nastavimo raditi sa strukturnim predsnopom, prirodno je postaviti sljedeće pitanje: u slučaju glavnih otvorenih skupova (uključujući i sam Spec A), skup točaka iz U jednak je skupu prostih ideala u odgovarajućem prstenu $\mathcal{O}(U)$. Vrijedi li ovakva tvrdnja i za proizvoljan otvoren skup $U \subsetneq$ Spec A? Sljedeći primjer pokazuje da je odgovor na ovo pitanje negativan.

Primjer 3.2.4. *Promotrimo afinu ravninu $\mathbb{A}^2$. Znamo da su sve točke u afinoj ravnini zatvoreni skupovi (odgovaraju maksimalnim idealima), stoga je ravnina bez ishodišta $\mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ otvoren skup. Nije teško pokazati da vrijedi jednakost koordinatnih prstena $\mathcal{O}\left(\mathbb{A}^2\right) = \mathcal{O}\left(\mathbb{A}^2\backslash\{0\}\right)$ (ipak, dokaz ovdje izostavljamo jer će biti znatno jednostavniji s alternativnim pogledom na $\mathcal{O}(U)$ kojeg ćemo dobiti u 3.4). Zaključujemo da skup točaka skupa $U = \mathbb{A}^2\backslash\{0\}$ nije jednak skupu prostih ideala u $\mathcal{O}(U)$.*

3.3 Snopovi

U ovom dijelu opisujemo posebnu klasu predsnopova koju ćemo zvati snopovima.

Primjer 3.3.1. *Neka je X topološki prostor i $\{U_\alpha\}$ otvoren pokrivač prostora X. Jasno je da je tada svaka funkcija na X jednoznačno određena svojim restrikcijama na skupove U_α. Nadalje, pretpostavimo da je na svakom skupu U_α zadana funkcija f_α na način da se restrikcije funkcija f_α i f_β podudaraju na $U_\alpha \cap U_\beta$. Tada postoji jedinstvena funkcija f na X takva da je $f_\alpha = f_{|U_\alpha}$.*

Svojstva iz prethodnog primjera obuhvaćamo u sljedećoj definiciji:

Definicija 3.3.2. *Predsnop $\mathcal{F}$ na topološkom prostoru X je* ***snop*** *ako su za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ i otvoren pokrivač $U = \bigcup U_\alpha$ zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

i) Ako su $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ takvi da za svaki U_α vrijedi $\rho^U_{U_\alpha}(s_1) = \rho^U_{U_\alpha}(s_2)$, onda je $s_1 = s_2$.

ii) Ako su zadani $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ takvi da vrijedi $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta)$ za svaki izbor U_α i U_β, onda postoji $s \in \mathcal{F}(U)$ takav da vrijedi $s_\alpha = \rho^U_{U_\alpha}(s)$, za svaki U_α.

Napomena 3.3.3. *Uočimo da je element s o čijoj egzistenciji govori uvjet (ii) iz prethodne definicije nužno jedinstven, zbog uvjeta (i).*

Primjer 3.3.4. *Nije teško provjeriti da su svi predsnopovi iz prethodnih primjera ujedno i snopovi. Ovdje dajemo jednostavan primjer predsnopa koji nije snop:*

Neka je X topološki prostor i M skup s barem dva elementa; označimo s $\mathcal{F}(U)$ skup svih konstantnih *preslikavanja $U \to M$. Drugim riječima, možemo staviti $\mathcal{F}(U) = M$ za $U \neq \emptyset$, dok za $\mathcal{F}(\emptyset)$ odaberemo proizvoljan element iz M. Očito je da smo na taj način dobili predsnop, no $\mathcal{F}$ nije nužno i snop. Naime, ako X ima dvije komponente povezanosti, U_1 i U_2, možemo uzeti $s_1 = m_1 \in M = \mathcal{F}(U_1)$ i $s_2 = m_2 \in M = \mathcal{F}(U_2)$ za neke različite $m_1, m_2 \in M$. Jednakost $\rho^{U_1}_{U_1 \cap U_2}(s_1) = \rho^{U_2}_{U_1 \cap U_2}(s_2)$ je tada trivijalno zadovoljena jer vrijedi $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. S druge strane, očito ne postoji konstantna funkcija f na X takva da istovremeno vrijedi $f_{|U_1} = m_1$ i $f_{|U_2} = m_2$. Zaključujemo da $\mathcal{F}$ nije snop.*

U nastavku dokazujemo sljedeći ključan teorem:

Teorem 3.3.5. *Strukturni predsnop $\mathcal{O}$ na Spec A je snop; označavamo ga s $\mathcal{O}_{\text{Spec}\,A}$, $\mathcal{O}_A$ ili $\mathcal{O}_X$, za $X = \text{Spec}\,A$.*

Dokaz. Najprije provjeravamo uvjete (i) i (ii) iz definicije snopa u jednostavnijem slučaju kada su U i U_α glavni otvoreni skupovi. Uočimo da ovaj slučaj možemo reducirati na $U = \text{Spec}\,A$: ako je $U = D(f)$ i $U_\alpha = D(f_\alpha)$, lako je provjeriti da uvjeti (i) i (ii) vrijede za U i U_α ako su zadovoljeni za Spec A_f i skupove $\overline{U_\alpha} = D(\overline{f_\alpha})$, gdje je s $\overline{f_\alpha}$ označena slika elementa f_α po kanonskom homomorfizmu $A \to A_f$. Dokazujemo, dakle, da su uvjeti (i) i (ii) zadovoljeni za $U_\alpha = D(f_\alpha)$ i $U = \text{Spec}\,A = \bigcup U_\alpha$.

Uvjet (i). Budući da je $\mathcal{O}$ predsnop prstenova (posebno, $\rho^U_{U_\alpha}$ su homomorfizmi), dovoljno je provjeriti da za $u \in \mathcal{O}(\text{Spec}\,A) = A$ imamo

$$\rho^{\text{Spec}\,A}_{U_\alpha}(u) = 0, \forall U_\alpha \Rightarrow u = 0.$$

Podsjetimo da je $U_\alpha = D(f_\alpha)$, stoga uvjet $\rho^{\text{Spec}\,A}_{U_\alpha}(u) = 0$ znači

$$f_\alpha^{n_\alpha} u = 0, \quad \text{za neki } n_\alpha \in \mathbb{N}_0.$$

Očito je da vrijedi $D(f_\alpha) = D(f_\alpha^{n_\alpha})$, odakle vidimo $\bigcup D(f_\alpha^{n_\alpha}) = \operatorname{Spec} A$. Već smo pokazali da ovakva skupovna jednakost znači da je ideal koji generiraju elementi $\{f_\alpha^{n_\alpha}\}$ jednak cijelom prstenu A. Posebno, vrijedi

$$f_{\alpha_1}^{n_1} g_1 + \ldots f_{\alpha_k}^{n_k} g_k = 1 \quad \text{za neke } g_1, \ldots, g_k \in A.$$

Pomnožimo li prethodnu jednakost s u i iskoristimo $f_\alpha^{n_\alpha} u = 0$, dobivamo $u = 0$.

Uvjet (ii). Budući da je Spec A kompaktan, dovoljno je provjeru obaviti za slučaj kada je U_α konačan pokrivač: lako je provjeriti da uvjet (ii) vrijedi za cijeli pokrivač U_α čim je zadovoljen za neki konačan potpokrivač.

Pretpostavimo, dakle, da vrijedi $\operatorname{Spec} A = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_r)$ i neka je $u_i = v_i/f_i^n \in A_{f_i}$ (možemo pretpostaviti da je eksponent n od f_i u nazivniku jednak za sve i jer je pokrivač konačan). Prisjetimo se da vrijedi $D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j)$; po definiciji restrikcija imamo

$$\rho_{D(f_i f_j)}^{D(f_i)}(u_i) = \frac{v_i f_j^n}{(f_i f_j)^n}.$$

Zbog pretpostavke o jednakosti restrikcija $\rho_{D(f_i f_j)}^{D(f_i)}(u_i) = \rho_{D(f_i f_j)}^{D(f_j)}(u_j)$ vrijedi

$$(f_i f_j)^m (v_i f_j^n - v_j f_i^n) = 0 \quad \text{za neki } m \in \mathbb{N}_0.$$

Stavimo li $v_j f_j^m = w_j$ i $m + n = l$, odavde dobivamo

$$u_i = \frac{w_i}{f_i^l} \quad \text{i} \quad w_i f_j^l = w_j f_i^l.$$

Kao u dokazu svojstva (i), vidimo da postoje g_i takvi da vrijedi

$$\sum f_i^l g_i = 1.$$

Definirajmo sada $u = \sum w_j g_j$. Iz gornjih jednakosti slijedi

$$f_i^l u = \sum_j w_j g_j f_i^l = \sum_j w_i g_j f_j^l = w_i.$$

Odavde slijedi $\rho_{D(f_i)}^{\operatorname{Spec} A}(u) = w_i/f_i^l = u_i$, što je trebalo pokazati. Time smo pokazali da svojstva (i) i (ii) vrijede za glavne otvorene skupove.

Napomena 3.3.6. *Da bismo pokazali da (i) i (ii) vrijede za opće otvorene skupove, uočimo najprije da vrijede ako za U uzmemo proizvoljan otvoren skup, a za pokrivač U_α* sve *glavne otvorene skupove sadržane u U: u tom slučaju (i) i (ii) slijede direktno iz načina na koji smo definirali $\mathcal{O}(U)$ kao projektivni limes.*

Prelazimo na opći slučaj: neka je U otvoren skup i U_ξ otvoren pokrivač od U; označimo s $\{V_\alpha\}$ skup svih glavnih otvorenih skupova sadržanih u U.

Uvjet (i). Pretpostavimo da je $u \in \mathcal{O}(U)$ takav da vrijedi $\rho^U_{U_\xi}(u) = 0$, za svaki U_ξ. Svaki skup U_ξ možemo zapisati kao uniju $U_\xi = \bigcup V_{(\xi,\lambda)}$ gdje je $\{V_{(\xi,\lambda)}\}$ skup svih glavnih otvorenih skupova sadržanih u U_ξ. Iz formule za kompoziciju restrikcija odmah vidimo $\rho^U_{V_{(\xi,\lambda)}}(u) = 0$; uvođenjem novih indeksa $\gamma = (\xi, \lambda)$ dobivamo

$$U = \bigcup V_\gamma \quad \text{i} \quad \rho^U_{V_\gamma}(u) = 0.$$

Prema prethodnoj napomeni, da bismo dokazali da je $u = 0$, dovoljno je pokazati da vrijedi $\rho^U_{V_\alpha}(u) = 0$ za svaki glavni otvoren skup $V_\alpha \subseteq U$. Ovo dobivamo lagano iz činjenice da svaki V_α možemo pokriti glavnim otvorenim skupovima na kojima je restrikcija od $\rho^U_{V_\alpha}(u)$ jednaka nuli. Imamo, naime,

$$V_\alpha = \bigcup V_\gamma \cap V_\alpha$$

pri čemu vrijedi

$$\rho^{V_\alpha}_{V_\gamma \cap V_\alpha}\left(\rho^U_{V_\alpha}(u)\right) = \rho^U_{V_\gamma \cap V_\alpha}(u) = \rho^{V_\gamma}_{V_\gamma \cap V_\alpha}\left(\rho^U_{V_\gamma}(u)\right) = 0$$

.

Sada možemo primijeniti prvi dio dokaza (točnije, svojstvo (i) za glavne otvorene skupove) na skup V_α i pokrivač $V_\gamma \cap V_\alpha$ (podsjetimo, i ovo su glavni otvoreni skupovi jer je presjek dva glavna otvorena skupa i sam glavni otvoren skup). Dobivamo da vrijedi $\rho^U_{V_\alpha}(u) = 0$, što je i trebalo pokazati. Time je dokaz svojstva (i) završen.

Uvjet (ii). Drugo svojstvo dobivamo sličnom redukcijom na prvi dio dokaza. Neka je za svaki U_ξ zadan $u_\xi \in \mathcal{O}\left(U_\xi\right)$ tako da vrijedi

$$\rho^{U_{\xi_1}}_{U_{\xi_1} \cap U_{\xi_2}}(u_{\xi_1}) = \rho^{U_{\xi_2}}_{U_{\xi_1} \cap U_{\xi_2}}(u_{\xi_2}), \quad \text{za sve } \xi_1, \xi_2.$$

Označimo li i ovdje s $\{V_{(\xi,\lambda)}\}$ skup svih glavnih otvorenih skupova sadržanih u U_ξ, možemo definirati $v_{(\xi,\lambda)} = \rho^{U_\xi}_{V_{(\xi,\lambda)}}(u_\xi)$. Ponovno uvodimo skraćene indekse $\gamma = (\xi, \lambda)$; dobili smo pokrivač $\{V_\gamma\}$ skupa U, zajedno s elementima $v_\gamma \in \mathcal{O}\left(V_\gamma\right)$. Lako je provjeriti da su v_γ međusobno kompatibilni, tj. da vrijedi

$$\rho^{V_{\gamma_1}}_{V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2}}(v_{\gamma_1}) = \rho^{V_{\gamma_2}}_{V_{\gamma_1} \cap V_{\gamma_2}}(v_{\gamma_2}). \tag{$*$}$$

Sada postupamo kao u dokazu svojstva (i): htjeli bismo primijeniti napomenu 3.3.6, stoga najprije moramo definirati $v_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$ za svaki glavni otvoren skup $V_\alpha \subseteq U$. I ovdje problem svodimo na prvi dio dokaza (svojstvo (ii) za glavne otvorene skupove). Imamo

$$V_\alpha = \bigcup V_\alpha \cap V_\gamma,$$

a na svakom skupu $V_\alpha \cap V_\gamma$ je definiran element $\rho^{V_\gamma}_{V_\alpha \cap V_\gamma}(v_\gamma) \in \mathcal{O}\big(V_\alpha \cap V_\gamma\big)$. Iz relacije $*$ lako slijedi da su elementi $\rho^{V_\gamma}_{V_\alpha \cap V_\gamma}(v_\gamma)$ kompatibilni, stoga ih po svojstvu (ii) za glavne otvorene skupove možemo "polijepiti" u element $v_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$. Time smo za svaki glavni otvoren skup $V_\alpha \subseteq U$ definirali element $v_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$. Uočimo da za tako definirane v_α vrijedi $\rho^{V_\alpha}_{V_\alpha \cap V_\gamma}(v_\alpha) = \rho^{V_\gamma}_{V_\alpha \cap V_\gamma}(v_\gamma)$. Odavde vidimo, korištenjem već dokazanog svojstva (i), da elementi v_α definiraju element $u \in \varprojlim \mathcal{O}(V_\alpha) = \mathcal{O}(U)$ za koji vrijedi $\rho^U_{V_\alpha}(u) = v_\alpha$. Preostaje provjeriti da vrijedi $\rho^U_{U_\xi}(u) = u_\xi$, no to je očito: po konstrukciji, za svaki skup $V_\alpha \subseteq U_\xi$ vrijedi

$$\rho^{U_\xi}_{V_\alpha}\left(\rho^U_{U_\xi}(u)\right) = \rho^{U_\xi}_{V_\alpha}(u_\xi).$$

Odavde po svojstvu (i) slijedi $\rho^U_{U_\xi}(u) = u_\xi$. Time je dokaz teorema završen. □

3.4 Vlati snopa

Nakon što smo dokazali važnu činjenicu da je $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ snop, u ovom dijelu proučavamo jednu općenitu konstrukciju vezanu uz snopove i predsnopove. Pretpostavimo najprije da su svi skupovi $\mathcal{F}(U)$ podskupovi nekog zajedničkog skupa te da su restrikcije ρ^V_U dane inkluzijama $\mathcal{F}(V) \hookrightarrow \mathcal{F}(U)$. (Vidjeli smo da se ovakva situacija prirodno javlja u slučaju kada promatramo $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ za integralnu domenu A). Tada za danu točku $x \in X$ možemo promatrati uniju $\bigcup \mathcal{F}(U)$ po svim otvorenim skupovima U koji sadrže x.

U općem slučaju postupamo kao kod definicije strukturnog snopa: iako skupovi $\mathcal{F}(U)$ nisu nužno podskupovi zajedničkog skupa, ipak su povezani preslikavanjima ρ^V_U. To nam omogućuje da iskoristimo kategorološko poopćenje unije, tzv. induktivni limes, kojeg označavamo s $\varinjlim \mathcal{F}(U)$. Umjesto općenite definicije, koja je analogna definiciji projektivnog limesa, promotrimo kako se definicija primjenjuje na snopove:

Definicija 3.4.1. *Neka je $x \in X$ i $\mathcal{F}$ predsnop na X. Induktivni limes $\varinjlim \mathcal{F}(U)$ po svim skupovima $U \ni x$ je skup klasa ekvivalencije disjunktne unije $\bigsqcup \mathcal{F}(U)$ s obzirom na relaciju $\sim$ definiranu s*

$$u \in \mathcal{F}(U) \sim v \in \mathcal{F}(V) \Leftrightarrow \rho^U_W(u) = \rho^V_W(v) \text{ za neku okolinu } x \in W \subseteq U \cap V.$$

*Skup $\varinjlim \mathcal{F}(U)$ označavamo s $\mathcal{F}_x$; kažemo da je $\mathcal{F}_x$ **vlat**[1] snopa $\mathcal{F}$ u točki x.*

Napomena 3.4.2. *Lako je provjeriti da je, u slučaju kada je $\mathcal{F}$ predsnop grupa, prstenova ili A-modula, i vlat $\mathcal{F}_x$ grupa, prsten, odnosno A-modul.*

[1]Standardni termin je i engleski, "stalk".

Primjer 3.4.3. *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{F}$ snop neprekidnih funkcija na X. Elemente vlati $\mathcal{F}_x$ promatramo kao neprekidne funkcije definirane na nekoj okolini točke x, pri čemu dvije funckije poistovjećujemo ako se podudaraju na nekoj okolini od x. Ovakve objekte nazivamo klicama funkcija u točki x.*

Primjer 3.4.4. *Neka je $\mathcal{O}$ strukturni snop prstena A. Pokažimo da je vlat snopa $\mathcal{O}$ u točki x koja odgovara idealu $\mathfrak{p}$ jednaka lokalnom prstenu $\mathcal{O}_x = A_\mathfrak{p}$ definiranom na kraju sekcije 2.2:*

Konstruiramo izomorfizam $\psi : A_\mathfrak{p} \to \mathcal{O}_x$. Po definiciji, svaki element prstena $A_\mathfrak{p}$ je oblika a/f gdje su $a, f \in A$ i $f \notin \mathfrak{p}$. Činjenicu da $\mathfrak{p}$ ne sadrži f možemo tumačiti i kao $x \in D(f)$. Sada elementu $a/f \in \mathcal{O}(D(f))$ možemo pridružiti klasu disjunktne unije $\bigsqcup \mathcal{O}(U)$ koja ga sadrži. Lako je provjeriti da je ovo pridruživanje dobro definirano, tj. da ne ovisi o prikazu a/f u prstenu $A_\mathfrak{p}$. Također, trivijalna je činjenica da se radi o epimorfizmu prstenova. Da bismo pokazali da se doista radi o izomorfizmu, pokažimo da je jezgra ovog homomorfizma trivijalna.

Neka je $c = a/f \in A_\mathfrak{p}$ takav da je $\psi(c) = 0$ u $\mathcal{O}_x$. Po definiciji prstena $\mathcal{O}_x$, to znači da postoji otvorena okolina $D(g) \ni x$ za koju vrijedi $D(g) \subseteq D(f)$ i $\rho^{D(f)}_{D(g)}(a/f) = 0$. Zbog $D(g) \subseteq D(f)$ znamo da je $g^n = uf$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i $u \in A$, te $\rho^{D(f)}_{D(g)}(a/f) = au/g^n$. Odavde vidimo da je $au/g^n = 0$ u $\mathcal{O}(D(g)) = A_g$ pa slijedi i $au/g^n = 0$ u $A_\mathfrak{p}$, to jest $a/f = 0$ u $A_\mathfrak{p}$, što je trebalo pokazati.

I u općem slučaju možemo za svaki otvoren skup $U \ni x$ promatrati prirodni homomorfizam

$$\rho^U_x : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x.$$

Ako je $\mathcal{F}$ snop i $\rho^U_x(u_1) = \rho^U_x(u_2)$ za svaki $x \in U$, onda je $u_1 = u_2$: po definiciji, jednakost $\rho^U_x(u_1) = \rho^U_x(u_2)$ znači da u okolini točke x postoji otvoren skup na kojem su restrikcije od u_1 i u_2 jednake. Kako ovo vrijedi za svaki $x \in U$, dobili smo otvoren pokrivač od U na čijim su elementima restrikcije od u_1 i u_2 jednake. Iz svojstva (i) za snopove slijedi da je $u_1 = u_2$.

Odavde vidimo da, ako je $\mathcal{F}$ snop, elemente iz $\mathcal{F}(U)$ možemo zadavati kao familije klica $\{u_x \in \mathcal{F}_x\}_{x \in U}$. Da bi ovakva familija definirala element iz $\mathcal{F}(U)$, očito mora zadovoljavati sljedeći uvjet:

Uvjet (A). *Za svaku točku $x \in U$ postoji okolina $x \in W \subseteq U$ i element $w \in \mathcal{F}(W)$ takav da vrijedi $u_y = \rho^W_y(w)$ za svaki $y \in W$.*

Pokazuje se da je ovaj uvjet i dovoljan:

Ako familija $\{u_x \in \mathcal{F}_x\}_{x \in U}$ zadovoljava gornji uvjet, onda imamo otvoren pokrivač $\{W_x \ni x\}_{x \in U}$ skupa U, pri čemu je na svakoj okolini W_x dan element $w_x \in \mathcal{F}(W_x)$ takav da vrijedi

$$\rho^{W_x}_y(w_x) = u_y \quad \text{za svaki } y \in W_x.$$

Po svojstvu (i) iz definicije snopa vidimo da su elementi w_x kompatibilni, tj. da vrijedi $\rho^{W_1}_{W_1\cap W_2}(w_1) = \rho^{W_2}_{W_1\cap W_2}(w_2)$. Odavde po svojstvu (ii) zaključujemo da postoji $u \in \mathcal{F}(U)$ takav da vrijedi $\rho^U_{W_x}(u) = w_x$. Zaključujemo $\rho^U_x(u) = u_x$, što je i trebalo pokazati.

Naravno, za gornje zaključke je ključna bila pretpostavka da je $\mathcal{F}$ snop. S druge strane, čak i kada je $\mathcal{F}$ samo predsnop, možemo promatrati skup $\mathcal{F}'(U)$ koji se sastoji od svih familija klica $\{u_x \in \mathcal{F}_x\}_{x\in U}$ koje zadovoljavaju gornji uvjet. Za $U \subseteq V$ možemo definirati preslikavanje

$$\rho^V_U : \{v_x \in \mathcal{F}_x\}_{x\in V} \mapsto \{v_y \in \mathcal{F}_y\}_{y\in U}.$$

Nije teško provjeriti da smo ovime konstruirali snop $\mathcal{F}'$, tzv. snop pridružen predsnopu $\mathcal{F}$.

Primjer 3.4.5. *Neka je $\mathcal{F}$ predsnop konstantnih funkcija iz primjera 3.3.4. Lako je provjeriti da upravo opisanom konstrukcijom dolazimo do snopa $\mathcal{F}'$ svih* lokalno konstantnih *funkcija: $\mathcal{F}'(U)$ se sastoji od svih funkcija koje su konstante na svakoj komponenti povezanosti od U.*

Napomena 3.4.6. *Promotrimo kako se gornja diskusija može primijeniti na slučaj strukturnog snopa $\mathcal{O}$. Uočimo da familiju klica $\{u_x \in \mathcal{O}_x = A_{\mathfrak{p}_x}\}$ možemo promatrati kao funkciju*

$$s : U \to \coprod_{x\in U} A_{\mathfrak{p}_x}$$

za koju vrijedi $s(x) \in A_{\mathfrak{p}_x}, \forall x \in \operatorname{Spec} A$. Uvjet **A** *se ovdje prenosi kao zahtjev da je funkcija s lokalno zadana kao kvocijent elemenata iz A: za svaku točku $x \in U$ postoji okolina $x \in V \subseteq U$ te elementi $a, f \in A$ takvi da za svaku točku $y \in V$ vrijedi $f \notin \mathfrak{p}_y$ i $s(y) = a/f$.*

Ovo nas dovodi do alternativne definicije strukturnog snopa. Definiramo $\mathcal{O}(U)$ kao skup svih funkcija $s : U \to \coprod_{x\in U} A_{\mathfrak{p}_x}$ koje zadovoljavaju gornje uvjete, a restrikcije ρ^V_U kao obične restrikcije funkcija. Nije teško provjeriti da smo ovime doista dobili snop te da je definicija ekvivalentna otprije poznatoj definiciji strukturnog snopa.

Ovime smo dobili novi, funkcijski pogled na elemente prstena $\mathcal{O}(U)$. On nije uvijek pogodan (podsjetimo, ovako zadane funkcije nisu jedinstveno određene svojim djelovanjem na točke, što smo pokazali u 2.2.3), no svakako koristi u intuitivnom poimanju prstena $\mathcal{O}(U)$: uočimo da se radi o direktnom poopćenju definicije regularnih funkcija na otvorenom podskupu kvaziprojektivne mnogostrukosti (poglavlje 1.6).

Za kraj, podsjetimo na konstrukciju iz poglavlja 2.2. Tamo smo proizvoljnom elementu $a \in A$ u točki $x \in \operatorname{Spec} A$ pridružili vrijednost $a(x)$ u rezidualnom polju $k(x)$. To možemo napraviti i za $a \in \mathcal{O}_A(U)$: elementu a pridružimo $\rho^U_x(a) + m_x \in \mathcal{O}_x/m_x = k(x)$. Naravno, zbog $\rho^V_x = \rho^U_x \circ \rho^V_U$ elementi $a \in \mathcal{O}_A(V)$ i $\rho^V_U(a) \in \mathcal{O}_A(U)$ određuju istu vrijednost u $k(x)$.

Nadalje, znamo da za element $a \in \mathcal{O}_A(U)$ vrijedi $a(x) \neq 0$ ako i samo ako je $\rho^U_x(a)$ invertibilan u $\mathcal{O}_x = A_{\mathfrak{p}_x}$. Ovo je pak ekvivalentno sa zahtjevom da je $\rho^U_V(a)$ invertibilan u $\mathcal{O}_A(V)$ za neku dovoljno malu okolinu $V \ni x$. Naime, ako je $x \in D(f) \subseteq U$, onda element

$\rho^U_{D(f)}(a)$ možemo prikazati u obliku a_1/f. Uvjet $a(x) \neq 0$ implicira $a_1 \notin \mathfrak{p}_x$, stoga skup $V = D(a_1 f)$ sadrži točku x. Na okolini V je element $\rho^U_V(a) = a_1^2/a_1 f$ invertibilan; njegov inverz je jednak $f^2/a_1 f$.

Ova razmatranja bit će nam veoma korisna već na početku sljedećeg poglavlja.

Poglavlje 4

Sheme

U ovom poglavlju definiramo sheme te proučavamo neka njihova osnovna svojstva i primjere. Prije same definicije, moramo povezati dva ključna objekta – spektar i pridruženi strukturni snop – u pojam oprstenjenog prostora.

4.1 Oprstenjeni prostori

Definicija 4.1.1. *Oprstenjeni prostor je par $X, \mathcal{O}$ koji se sastoji od topološkog prostora X i snopa prstenova $\mathcal{O}$ na X. Snop $\mathcal{O}$ označavamo i s $\mathcal{O}_X$ te ga nazivamo strukturnim snopom prostora X.*

Čim smo definirali ovakve objekte, htjeli bismo proučavati preslikavanja među njima. Znamo da svako skupovno preslikavanje $\varphi : X \to Y$ inducira preslikavanje funkcija (s vrijednostima u trećem skupu S): funkciji $f : Y \to S$ možemo pridružiti funkciju $\varphi^*(f) : X \to S$ (tzv. povlak ili "pullback") definiranu s

$$\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)), \quad \forall x \in X.$$

Ovu činjenicu smo koristili ekstenzivno u slučaju afinih, projektivnih i kvaziprojektivnih mnogostrukosti, stoga bismo je htjeli u nekom obliku prenijeti i na slučaj oprstenjenih prostora. Naravno, ulogu funkcija na X će kod oprstenjenog prostora nositi elementi prstena $\mathcal{O}(U)$. Iako je već i samo tumačenje elemenata $\mathcal{O}(U)$ kao funkcija problematično, veća zapreka leži u činjenici da lijeva i desna strana gornje jednakosti nisu, općenito, elementi istog skupa. Odavde vidimo da povlak funkcija neće biti definiran samim skupovnim preslikavanjem $\varphi : X \to Y$, već ga moramo posebno zadati. Ovo razmatranje nas dovodi do sljedeće definicije:

Definicija 4.1.2. *Morfizam oprstenjenih prostora $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ je neprekidno preslikavanje $\varphi : X \to Y$ zajedno s familijom homomorfizama $\psi_U : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}(U)\right)$*

definiranih za svaki otvoren skup $U \subseteq Y$. Pritom je nužno da dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(V) & \xrightarrow{\psi_V} & \mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}(V)\right) \\ {\scriptstyle \rho_U^V}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho^{\varphi^{-1}(V)}_{\varphi^{-1}(U)}} \\ \mathcal{O}_Y(U) & \xrightarrow[\psi_U]{} & \mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}(U)\right) \end{array}$$

komutira za svaki par otvorenih skupova $U \subseteq V$ u Y.

Primjer 4.1.3. *Svaki topološki prostor X možemo promatrati kao oprstenjeni prostor ako za snop $\mathcal{O}_X$ uzmemo snop neprekidnih funkcija. Svako neprekidno preslikavanje $\varphi : X \to Y$ definira morfizam oprstenjenih prostora; u ovom slučaju, homomorfizmi ψ_U su ostvareni upravo povlakom funkcija: $\psi_U(f) = \varphi^*(f)$ za $f \in \mathcal{O}_Y(U)$.*

Nas će posebno zanimati sljedeći primjer:

Primjer 4.1.4. *Za proizvoljan prsten A možemo promatrati oprstenjeni prostor Spec $A, \mathcal{O}_A$; u daljnjim razmatranjima ovaj oprstenjeni prostor označavamo jednostavno sa Spec A. Neka je $\lambda : A \to B$ homomorfizam. Označimo s φ : Spec $B \to$ Spec A preslikavanje ${}^a\lambda$. Prisjetimo se da za glavni otvoren skup $U = D(f) \subseteq$ Spec A vrijedi $\varphi^{-1}(D(f)) = D(\lambda(f))$. Odavde, osim što zaključujemo da je φ neprekidno, vidimo da je formulom*

$$\frac{a}{f^k} \mapsto \frac{\lambda(a)}{\lambda(f)^k}$$

dobro definiran homomorfizam $\mathcal{O}(D(f)) \to \mathcal{O}\left(\varphi^{-1}(D(f))\right)$. Nije teško provjeriti da se ovi homomorfizmi proširuju i do homomorfizama $\psi_U : \mathcal{O}_A(U) \to \mathcal{O}_B\left(\varphi^{-1}(U)\right)$ za proizvoljan otvoren skup $U \subseteq$ Spec A. To pokazuje da svaki homomorfizam prstenova $A \to B$ inducira morfizam oprstenjenih prostora Spec $B \to$ Spec A.

Sada bismo htjeli odrediti uvjete na morfizam φ : Spec $B \to$ Spec A uz koje vrijedi obrat gornje tvrdnje, tj. nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju homomorfizma $\lambda : A \to B$ takvog da vrijedi $\varphi = {}^a\lambda$.

Neka je φ : Spec $B \to$ Spec A morfizam i neka su $\psi_U : \mathcal{O}_A(U) \to \mathcal{O}_B\left(\varphi^{-1}(U)\right)$ pripadni homomorfizmi iz definicije morfizma oprstenjenih prostora. Prisjetimo se da je proizvoljnom elementu $a \in \mathcal{O}_A(U)$ u točki $x \in U$ pridružen odgovarajući element $\rho_x^U(a) \in \mathcal{O}_x$, a time i element $a(x)$ rezidualnog polja $k(x) = \mathcal{O}_x/m_x$. Iako su $a(\varphi(x))$ i $(\psi_U(a))(x)$ elementi različitih polja, zbog čega ih ne možemo direktno uspoređivati, možemo usporediti uvjete

$$(\psi_U(a))(x) = 0 \quad \text{i} \quad a(\varphi(x)) = 0.$$

Uočimo najprije da prvi uvjet povlači drugi. Pretpostavimo da je $a(\varphi(x)) \neq 0$. Tada je za dovoljno malu okolinu $\varphi(x) \in V \subseteq U$ element $\rho^U_V(a)$ invertibilan u $O_A(V)$. Drugim riječima, postoji $a' \in O_A(V)$ takav da vrijedi $\rho^U_V(a)a' = 1$. Odavde slijedi $\psi_V\left(\rho^U_V(a)\right)\psi_V(a') = 1$, što zbog komutativnosti dijagrama u definiciji morfizma možemo pisati kao

$$\rho^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)}(\psi_U(a))\,\psi_V(a') = 1.$$

Posebno, odavde slijedi $\left[\rho^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)}(\psi_U(a))\right](x) \neq 0$, pa stoga i $(\psi_U(a))(x) \neq 0$. Time smo pokazali jednu implikaciju.

S druge strane, implikacija

$$a(\varphi(x)) = 0 \Rightarrow (\psi_U(a))(x) = 0$$

ne mora nužno vrijediti za svaki morfizam φ, dok za morfizme oblika $\varphi = {}^a\lambda$ slijedi direktno iz definicije: na nekoj okolini $V = D(f)$ za koju vrijedi $\varphi(x) \in V \subseteq U$ označimo $\rho^V_{D(f)}(a) = a_1/f$. Uvjet $a(\varphi(x)) = 0$ znači da je a_1 sadržan u idealu $\varphi(x) = \lambda^{-1}(x)$ (ovdje smo s x označili i točku, i odgovarajući ideal), to jest da je $\lambda(a_1)$ sadržan u x. S druge strane, definirali smo $\psi_V(a_1/f) = \lambda(a_1)/\lambda(f)$. Odavde zbog $\lambda(a_1) \in x$ zaključujemo $\psi_U(a)(x) = \psi_V(a_1/f)(x) = 0$.

Definicija 4.1.5. *Kažemo da je morfizam $\varphi : Spec\ B \to Spec\ A$ lokalan ako za svaki $U \subseteq Spec\ A$, $x \in \varphi^{-1}(U)$ i $a \in O_A(U)$ vrijedi implikacija*

$$a(\varphi(x)) = 0 \Longrightarrow (\psi_U(a))(x) = 0.$$

Iz prethodne diskusije slijedi da su za lokalne morfizme uvjeti $(\psi_U(a))(x) = 0$ i $a(\varphi(x)) = 0$ ekvivalentni. Sljedeća napomena daje još jednu korisnu karakterizaciju lokalnosti:

Napomena 4.1.6. *Skrećemo pozornost na važno svojstvo morfizama. Ako je $\varphi : X \to Y$ morfizam oprstenjenih prostora, onda za svaki $x \in X$ homomorfizmi ψ_U prirodno definiraju preslikavanje $O_{Y,\varphi(x)} \to O_{X,x}$: elementu $a \in O_Y(U)$ (gdje je $U \ni \varphi(x)$ proizvoljna okolina) pridružujemo $\rho^{\varphi^{-1}(U)}_x(\psi_U(a))$. Zbog komutativnosti dijagrama u definiciji morfizma, ovime je dobro definirano i preslikavanje $\psi : O_{Y,\varphi(x)} \to O_{X,x}$.*

Gornji uvjet lokalnosti sada možemo elegantno iskazati u terminima lokalnih prstenova. Neka je $\varphi : X = Spec\ B \to Y = Spec\ A$ morfizam oprstenjenih prostora. Morfizam φ je lokalan ako i samo ako je za svaki $x \in X$ slika maksimalnog ideala $m_{\varphi(x)} \subseteq O_{Y,\varphi(x)}$ po homomorfizmu $\psi : O_{Y,\varphi(x)} \to O_{X,x}$ sadržana u $m_x \subseteq O_{X,x}$:

$$\psi(m_{\varphi(x)}) \subseteq m_x.$$

Ovakve homomorfizme lokalnih prstenova zovemo lokalnim homomorfizmima. *Uočimo da je upravo zbog lokalnosti homomorfizma ψ dobro definirano i preslikavanje rezidualnih polja $\psi_x : k(\varphi(x)) \to k(x)$ zadano s $a + m_{\varphi(x)} \mapsto \psi(a) + m_x$. Očito je da se radi o homomorfizmu, to jest inkluziji polja $k(\varphi(x)) \to k(x)$*

Ispostavlja se da je upravo lokalnost karakterizirajuće svojstvo morfizama koji se mogu prikazati kao ${}^a\lambda$ za neki homomorfizam $\lambda : A \to B$:

Teorem 4.1.7. *Svaki lokalni morfizam φ : Spec $B \to$ Spec A je oblika ${}^a\lambda$ za neki homomorfizam $\lambda : A \to B$.*

Dokaz. Neka je φ : Spec $B \to$ Spec A lokalni morfizam. Očiti kandidat za traženi homomorfizam je $\lambda = \psi_U$ gdje je $U = \operatorname{Spec} A$; dokažimo da vrijedi ${}^a\lambda = \varphi$. Najprije treba provjeriti jednakost topoloških preslikavanja ${}^a\lambda$ i φ, no to slijedi direktno iz lokalnosti: činjenica da su uvjeti $(\psi_U(a))(x) = 0$ i $a(\varphi(x)) = 0$ ekvivalentni implicira upravo $\varphi(x) = \psi_U^{-1}(x) = {}^a\lambda(x)$.

Preostaje provjeriti jednakost homomorfizama ψ_U za φ i ${}^a\lambda$. Ovo imamo po definiciji za $U = \operatorname{Spec} A$, a za sve ostale otvorene skupove slijedi iz komutativnosti dijagrama u definiciji morfizma. □

Nije teško provjeriti da kompozicijom morfizama $\varphi : X \to Y$ i $\varphi' : Y \to Z$ (uočimo, potrebno je komponirati i preslikavanja, i homomorfizme ψ_U) dobivamo novi morfizam $\varphi' \circ \varphi : X \to Z$. Odavde na očit način definiramo i izomorfizam oprstenjenih prostora.

Također, za otvoren podskup $U \subseteq X$ možemo restringirati snop O_X do $O_{X|U}$, čime dobivamo novi oprstenjeni prostor $U, O_{X|U}$. Zbog toga ćemo često promatrati otvoren podskup $U \subseteq X$ kao oprstenjeni prostor. Nadalje, svaki morfizam $\varphi : X \to Y$ možemo na očit način restringirati na otvoren skup $V \subseteq X$: topološko preslikavanje će biti $\varphi_{|V}$, dok homomorfizme dobivamo komponirajući "stare" ψ_U s $\rho^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(U)\cap V}$.

Sljedeći primjer pokazuje kako morfizam nije posve određen topološkim preslikavanjem; drugim riječima, doista je potrebno specificirati homomorfizme ψ_U:

Primjer 4.1.8. *Neka je A prsten s netrivijalnim nilradikalom N i neka je $B = A/N$. Znamo da je Spec A = Spec B, stoga je za kanonski epimorfizam $\lambda : A \to B$ zadan s $a \mapsto a + N$ preslikavanje ${}^a\lambda$ homeomorfizam (štoviše, identiteta). S druge strane, čak ni za U = Spec A homomorfizam $\psi_U = \lambda$ nije izomorfizam.*

Konačno, s ovim osnovnim svojstvima morfizama imamo sve potrebno za definiciju sheme.

4.2 Definicija sheme

Definicija 4.2.1. *Kažemo da je oprstenjeni prostor X, O_X afina shema ako je izomorfan oprstenjenom prostoru Spec A za neki prsten A.*

Definicija 4.2.2. *Shema je oprstenjeni prostor X, O_X u kojem svaka točka ima okolinu U za koju je $U, O_{X|U}$ afina shema.*

Otvorene skupove izomorfne afinim shemama često ćemo nazivati jednostavno afinim okolinama ili afinim skupovima.

Primjer 4.2.3. *Svaka afina shema Spec A je očito shema. Nadalje, iz diskusije o lokalnim morfizmima vidimo da su homomorfizmi $\lambda : A \to B$ u bijekciji s morfizmima shema φ : Spec $B \to$ Spec A (bijekcija je dana s $\varphi = {}^a\lambda$).*

Prije ostalih primjera, komentiramo neka osnovna svojstva shema. Uočimo najprije da je svaki otvoren podskup sheme također shema; ovo slijedi direktno iz definicije i činjenice da afini skupovi tvore bazu topologije na shemi X. Sve "lokalne" objekte koje smo promatrali u slučaju afinih shema možemo sada uvesti i za proizvoljne sheme. Primjerice, vlat $\mathcal{O}_x$ strukturnog snopa očito ne ovisi o tome promatramo li točku x kao element prostora X ili neke afine okoline U. Zbog toga je $\mathcal{O}_x$ i ovdje lokalni prsten pa možemo definirati rezidualno polje kao $k(x) = \mathcal{O}_x/m_x$, gdje je m_x jedinstveni maksimalni ideal u $\mathcal{O}_x$.

Morfizam shema $f : X \to Y$ definira se kao lokalni morfizam odgovarajućih oprstenjenih prostora; ovdje lokalnost shvaćamo u smislu napomene 4.1.6: za svaku točku $x \in X$ vrijedi $\psi(m_{f(x)}) \subseteq m_x$. Ekvivalentan je sljedeći zahtjev: za svaku afinu okolinu $U \subseteq X$ od x i svaki afini podskup $V \subseteq Y$ takav da vrijedi $f(U) \subseteq V$ je morfizam *afinih* shema $f : U \to V$ lokalan.

Neka je $f : X \to Y$ morfizam shema. Budući da topologija na X u svakoj točki ima bazu afinih okolina, za svaki $x \in X$ možemo naći afine okoline $U \subseteq X$ od x i $V \subseteq Y$ od $f(x)$ takve da vrijedi $f(U) \subseteq V$. Kako je $f : U \to V$ lokalni morfizam afinih shema, zaključujemo da postoji homomorfizam $\lambda : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ takav da vrijedi $f = {}^a\lambda$. Vidjeli smo da u ovakvim slučajevima f definira inkluziju rezidzalnih polja $\psi_x : k(f(x)) \to k(x)$. Zbog toga $k(f(x))$ možemo shvaćati kao potpolje od $k(x)$ te za $a \in \mathcal{O}_Y(V)$ dobivamo relaciju koja poopćuje povlak funcija:

$$\psi_x(a(f(x))) = \lambda(a)(x).$$

Ako je X shema, A prsten i $f : X \to \operatorname{Spec} A$ morfizam, onda za svaki otvoren skup U možemo komponirati $\psi_{\operatorname{Spec} A} : A \to \mathcal{O}_X(X)$ s ρ^X_U. Time za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ dobivamo homomorfizam $A \to \mathcal{O}_X(U)$.

Napomena 4.2.4. *Općenito, ako za komutativne prstene R i A imamo definiran homomorfizam $A \to R$, onda za prsten R kažemo da je A-algebra. Radi se o generalizaciji pojma k-algebre kojeg smo koristili u uvodnom poglavlju.*

Sada možemo reformulirati gornju opservaciju: svaki morfizam $f : X \to \operatorname{Spec} A$ pretvara strukturni snop u snop A-algebri. Uočimo da homomorfizmi $A \to \mathcal{O}_X(U)$ komutiraju s restrikcijama. Može se pokazati da vrijedi i obrat: ako je $\mathcal{O}_X$ snop A-algebri, onda možemo prirodno definirati morfizam $X \to \operatorname{Spec} A$.

Ako uz shemu X imamo definiran i morfizam $X \to \operatorname{Spec} A$, kažemo da se radi o shemi nad A ili kraće, A-shemi. Morfizam A-shema je morfizam $X \to Y$ takav da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} A & \end{tikzcd}$$

Ekvivalentan je zahtjev da su svi ψ_U homomorfizmi A-algebri, to jest da komutiraju s homomorfizmima $A \to \mathcal{O}(U)$. Napomenimo da je, budući da svaki prsten možemo promatrati kao $\mathbb{Z}$-algebru, svaka shema ujedno i $\mathbb{Z}$-shema.

Konačno, promotrimo neke osnovne primjere shema:

Primjer 4.2.5. *Opišimo način na koji afine mnogostrukosti možemo promatrati kao sheme. Neka je X afina mnogostrukost i $k[X]$ njezin koordinatni prsten. Jasno je da skup $\operatorname{Spec} k[X]$ nije jednak skupu X: točke skupa X odgovaraju maksimalnim idealima prstena $k[X]$, dok elementi skupa $\operatorname{Spec} k[X]$ odgovaraju ireducibilnim afinim podmnogostrukostima od X (propozicija 1.4.10). Ipak, mnogostrukost X možemo poistovjetiti sa shemom $\operatorname{Spec} k[X]$. Naime, skup X možemo promatrati kao topološki potprostor od $\operatorname{Spec} k[X]$, a regularna preslikavanja $X \to Y$ možemo identificirati s morfizmima shema $\operatorname{Spec} k[X] \to \operatorname{Spec} k[Y]$: i morfizmi i regularna preslikavanja odgovaraju homomorfizmima prstenova $k[Y] \to k[X]$.*

Naravno, i opće kvaziprojektivne mnogostrukosti možemo promatrati kao sheme. Sljedeći rezultat poopćuje prethodni primjer i opisuje način na koji proizvoljnoj kvaziprojektivnoj mnogostrukosti možemo pridružiti odgovarajuću shemu.

Propozicija 4.2.6. *Neka je k algebarski zatvoreno polje. Svakoj kvaziprojektivnoj mnogostrukosti X nad k možemo pridružiti shemu $s(X)$ tako da vrijedi:*

i) skup regularnih preslikavanja $X \to Y$ je u bijekciji sa skupom morfizama shema $s(X) \to s(Y)$,

ii) topološki prostor mnogostrukosti X je homeomorfan sa skupom zatvorenih točaka prostora $s(X)$.

Dokaz. Za proizvoljan topološki prostor T označimo sa $s(T)$ skup svih ireducibilnih zatvorenih podskupova od T. Neka je sada X kvaziprojektivna mnogostrukost. Ako su F_1 i F_2 zatvoreni podskupovi od X, lako je vidjeti da vrijedi $s(F_1) \cup s(F_2) = s(F_1 \cup F_2)$ (podsjećamo, ako je G zatvoren ireducibilan podskup od $F_1 \cup F_2$, onda G zbog ireducibilnosti mora biti sadržan u F_1 ili u F_2). Slično, za proizvoljnu familiju zatvorenih skupova $F_\alpha \subseteq X$ očito vrijedi $\bigcap s(F_\alpha) = s\left(\bigcap F_\alpha\right)$. Odavde vidimo da na $s(X)$ možemo uvesti topologiju u kojoj je familija zatvorenih skupova jednaka $\{s(F) : F \subseteq X \text{ zatvoren}\}$. Nije teško provjeriti da su otvoreni skupovi u ovoj topologiji oblika $s(U)$ gdje je U otvoren skup u X. Naravno, skupovi iz $s(U)$ (ireducibilni zatvoreni podskupovi od U) nisu nužno sadržani u $s(X)$, no to ne predstavlja problem. Naime, preslikavanje $F \mapsto \overline{F}$ kojim skupu $F \in s(U)$ pridružujemo njegov zatvarač u X je injektivno, a zatvarač ireducibilnog prostora je nužno ireducibilan. To pokazuje da skup $s(U)$ možemo promatrati kao podskup od $s(X)$. Štoviše, lako je provjeriti da je $U \mapsto s(U)$ bijekcija s topologije prostora X na topologiju prostora $s(X)$.

Za kraj topoloških razmatranja uočimo da je točka iz $s(X)$ zatvorena ako i samo ako odgovara zatvorenom ireducibilnom skupu u X koji ne sadrži pravi zatvoren ireducibilan podskup. Kako je svaka točka mnogostrukosti X zatvoren i ireducibilan skup, zaključujemo da je skup zatvorenih točaka u $s(X)$ jednak skupu svih točaka u X. Nije teško provjeriti da je skup svih zatvorenih točaka u $s(X)$ s naslijeđenom topologijom k tome i homeomorfan s X.

Nakon što smo konstruirali topologiju na $s(X)$, nije teško zadati i strukturni snop: za otvoreni skup $s(U) \subseteq s(X)$ stavimo $\mathcal{O}_{s(X)}(s(U)) := k[U] = \mathcal{O}_X(U)$, a za restrikcije ρ uzimamo prirodne restrikcije regularnih funkcija. Time smo očito dobili snop na $s(X)$.

Trebali bismo provjeriti da je upravo konstruirani oprstenjeni prostor $s(X), \mathcal{O}_{s(X)}$ doista shema. To znači da za svaku točku iz $s(X)$ trebamo naći afinu okolinu koja ju sadrži. U tu svrhu, prisjetimo se propozicije 1.6.20 iz uvoda: svaka točka kvaziprojektivne mnogostrukosti ima okolinu izomorfnu afinoj mnogostrukosti. Uzmimo sada točku $x \in s(X)$; točka x odgovara nekom ireducibilnom zatvorenom podskupu $F_x \subseteq X$. Neka je $U \subseteq X$ afina mnogostrukost koja siječe F_x. Prema diskusiji o izgledu topologije na $s(X)$, znamo da ovo implicira $x \in s(U)$. No, skup U smo birali tako da bude afina mnogostrukost, što znači da je $s(U)$ (skup svih ireducibilnih zatvorenih podskupova od U) upravo jednak $\operatorname{Spec} k[U]$. Nadalje, prema načinu na koji smo definirali snop $\mathcal{O}_{s(X)}$ vidimo da je $\mathcal{O}_{s(X)}(s(U)) = k[U]$. Drugim riječima, $s(U)$ je doista izomorfan afinoj shemi $\operatorname{Spec} k[U]$. Time smo za proizvoljnu točku $x \in s(X)$ našli afinu okolinu koja ju sadrži; zaključujemo da je $s(X)$ doista shema (štoviše, vidimo da se radi o k-shemi).

Proučimo i odnos regularnih preslikavanja $X \to Y$ s morfizmima $s(X) \to s(Y)$. Uočimo da je svakim regularnim preslikavanjem $f : X \to Y$ zadano i preslikavanje $\tilde{f} : s(X) \to s(Y)$, pri kojem se zatvoren ireducibilan podskup $F \subseteq X$ slika u zatvarač skupa $f(F)$ u Y. (Podsjećamo da je regularno preslikavanje neprekidno, a slika ireducibilnog prostora po neprekidnom preslikavanju ireducibilan skup; osim toga, opet koristimo činjenicu da je zatvarač ireducibilnog skupa također ireducibilan). Odmah vidimo da je i $\tilde{f}$ neprekidno: za svaki zatvoren skup $F \subseteq Y$ vrijedi $\tilde{f}^{-1}(s(F)) = s\left(f^{-1}(F)\right)$, dakle praslika zatvorenog skupa je zatvoren skup. Da bismo konstruirali morfizam shema, moramo osim neprekidnog preslikavanja specificirati i morfizme $\psi_{s(U)}$. Definiramo ih koristeći osnovno svojstvo regularnih preslikavanja – f inducira homomorfizam k-algebri $f^* : k[U] \to k[f^{-1}(U)]$, stoga upravo ovaj homomorfizam možemo uzeti za

$$\psi_{s(U)} : O_{s(Y)}(s(U)) \to O_{s(X)}\left(\tilde{f}^{-1}(s(U))\right).$$

Lako je provjeriti da smo ovako doista zadali morfizam oprstenjenih prostora. Uvjet lokalnosti se ovdje prenosi kao sljedeći zahtjev: neka su $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ afine mnogostrukosti takve da vrijedi $f(X) \subseteq Y$ i F zatvoren ireducibilan skup u X. Tada se, za svaku regularnu funkciju $\varphi \in k[V]$ koja se poništava na $f(F)$, funkcija $f^*(\varphi)$ poništava na F.

Budući da je uvjet lokalnosti očito zadovoljen, zaključujemo da je konstruirani morfizam $\tilde{f}$ doista morfizam shema (štoviše, $\tilde{f}$ je morfizam k-shema jer su svi $\psi_{s(U)}$ homomorfizmi k-algebri). Konačno, preslikavanje $f \mapsto \tilde{f}$ je očito injektivno, a nije teško pokazati ni da je surjektivno. Odavde slijedi da postoji bijekcija između regularnih preslikavanja $X \to Y$ i morfizama k-shema $s(X) \to s(Y)$. □

Napomena 4.2.7. *Dokazom prethodne propozicije smo konstruirali funktor $X \mapsto s(X)$ iz kategorije $\mathfrak{Var}(k)$ kvaziprojektivnih mnogostrukosti u kategoriju $\mathfrak{Sch}(k)$ shema nad k.*

Primjer 4.2.8. *Neka je k algebarski zatvoreno polje. Definiramo afini pravac nad k kao shemu $A_k^1 = Spec\ k[T]$. Znamo da se A_k^1 sastoji od maksimalnih ideala u $k[T]$ (koji odgovaraju elementima iz k) i nul-ideala. Točka ξ koja odgovara nul-idealu je generička: njezin zatvarač je jednak cijelom prostoru A_k^1.*

Primjer 4.2.9. *Neka je k algebarski zatvoreno polje. Definirajmo* afinu ravninu *nad k kao shemu $A_k^2 = Spec\ k[T_1, T_2]$. Skup zatvorenih točaka u A_k^2 je izomorfan s afinom ravninom $\mathbb{A}^2$ s kojom smo radili u uvodu. Postoje i točke koje nisu zatvorene: na primjer, točka ξ koja odgovara nul-idealu je generička točka, tj. gusta je u A_k^2. Preostale točke odgovaraju jednodimenzionalnim ireducibilnim mnogostrukostima u $\mathbb{A}^2$ – za svaku ireducibilnu afinu mnogostrukost $X \subseteq \mathbb{A}^2$ postoji točka $\eta \in A_k^2$ čiji zatvarač je jednak uniji točaka iz X i η. Kažemo da se radi o generičkoj točki mnogostrukosti X.*

Za kraj sekcije, konstatirajmo da se mnogi pojmovi koje smo uveli za kvaziprojektivne mnogostrukosti prenose direktno na sheme. Primjerice, racionalno preslikavanje sheme X u shemu Y je klasa ekvivalencije morfizama $\varphi : U \to Y$, pri čemu je U gust otvoren podskup od X, a morfizme $\varphi : U \to Y$ i $\psi : V \to Y$ poistovjećujemo ako se podudaraju na $U \cap V$. Za sheme X i Y kažemo da su biracionalno ekvivalentne ako sadrže izomorfne guste otvorene skupove.

4.3 Lijepljenje

Vidjeli smo da je, po definiciji, svaka shema pokrivena afinim otvorenim skupovima. U ovom dijelu utvrđujemo uvjete uz koje shemu možemo rekonstruirati iz takvog otvorenog pokrivača.

Počinjemo od indeksirane familije shema $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$. Ako je $\{U_\alpha\}$ otvoren pokrivač sheme X, očito je da skupovi U_α i U_β nisu sasvim nepovezani – imaju izomorfne podskupove $U_\alpha \cap U_\beta$. Zbog toga su minimalne pretpostavke sljedeće: za svaki indeks $\alpha \in I$ imamo zadanu familija otvorenih podskupova $\{U_{\alpha\beta} \subseteq U_\alpha : \beta \in I\}$ takvih da je $U_{\alpha\alpha} = U_\alpha$. Također, pretpostavljamo da su za svaki par indeksa $\alpha, \beta \in I$ sheme $U_{\alpha\beta}$ i $U_{\beta\alpha}$ izomorfne; s $\varphi_{\alpha\beta}$ označimo izomorfizam $U_{\alpha\beta} \to U_{\beta\alpha}$.

Odredimo uvjete uz koje je moguće konstruirati shemu X, otvoren pokrivač $X = \bigcup V_\alpha$ i familiju izomorfizama $\psi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ za koje je restrikcija ψ_α na $U_{\alpha\beta}$ izomorfizam između $U_{\alpha\beta}$ i $V_\alpha \cap V_\beta$ te vrijedi $\psi_\beta \circ \varphi_{\alpha\beta} \circ \psi_\alpha^{-1} = \mathrm{id}_{V_\alpha \cap V_\beta}$. Ako ovakva shema postoji, reći ćemo da je dobivena lijepljenjem shema U_α.

Iz činjenice da je $\psi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\alpha} \circ \psi_\alpha^{-1} = \mathrm{id}_{V_\alpha}$ čitamo prvi nužan uvjet:

$$\varphi_{\alpha\alpha} = id, \quad \text{za svaki } \alpha \in I. \tag{4.1}$$

Slično, komponirajuči jednakosti $\psi_\beta \circ \varphi_{\alpha\beta} \circ \psi_\alpha^{-1} = \mathrm{id}_{V_\alpha \cap V_\beta}$ i $\psi_\alpha \circ \varphi_{\beta\alpha} \circ \psi_\beta^{-1} = \mathrm{id}_{V_\alpha \cap V_\beta}$ dobivamo

$$\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = id, \quad \text{za sve } \alpha, \beta \in I. \tag{4.2}$$

Konačno, za proizvoljne indekse $\alpha, \beta, \gamma \in I$ promotrimo skup $V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma$. Imamo $\psi_\alpha^{-1}\left(V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma\right) = \psi_\alpha^{-1}\left(V_\alpha \cap V_\beta\right) \cap \psi_\alpha^{-1}\left(V_\alpha \cap V_\gamma\right) = U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha\gamma}$. Odavde (i iz analognih relacija za ostale kombinacije indeksa) te iz već korištenog svojstva $\psi_\beta \circ \varphi_{\alpha\beta} \circ \psi_\alpha^{-1} = \mathrm{id}_{V_\alpha \cap V_\beta}$ lako dobivamo i treći uvjet:
Restrikcija $\varphi'_{\alpha\beta}$ preslikavanja $\varphi_{\alpha\beta}$ na $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha\gamma}$ je izomorfizam $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha\gamma} \to U_{\beta\alpha} \cap U_{\beta\gamma}$ i vrijedi

$$\varphi'_{\alpha\gamma} = \varphi'_{\beta\gamma} \circ \varphi'_{\alpha\beta}, \quad \text{za sve indekse } \alpha, \beta, \gamma \in I. \tag{4.3}$$

Ispostavlja se da su nužni uvjeti koje smo naveli ujedno i dovoljni za lijepljenje. Tehničke detalje dokaza preskačemo radi preglednosti te opisujemo konstrukciju sheme X u glavnim crtama.

Označimo s T disjunktnu uniju skupova U_α i uvedimo na T relaciju $\sim$ s

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x \in U_{\alpha\beta}, y \in U_{\beta\alpha} \text{ i } y = \varphi_{\alpha\beta}(x).$$

Iz uvjeta (4.1), (4.2) i (4.3) vidimo da se radi o relaciji ekvivalencije. Označimo s X skup klasa $T/\sim$, a s $p : T \to X$ kvocijentno preslikavanje.

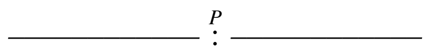
Na T uvedemo topologiju tako da za otvorene skupove uzmemo skupove oblika $\bigcup W_\alpha$, gdje su $W_\alpha \subseteq U_\alpha$ otvoreni skupovi. Iz ove topologije možemo preko p konstruirati kvocijentnu topologiju na X. Nadalje, pomoću p možemo zadati homeomorfizam $\psi_\alpha : U_\alpha \to p(U_\alpha) = V_\alpha$; očito je da su V_α otvoreni skupovi čija unija pokriva X.

Snop $\mathcal{O}_X$ definiramo na sljedeći način. Ako je otvoren skup W sadržan u nekom V_α, stavimo $\mathcal{O}_X(W) = \mathcal{O}_{V_\alpha}\left(\psi_\alpha^{-1}(W)\right)$ (nije teško provjeriti da je defincija dobra, to jest da ne ovisi o izboru skupa V_α koji sadrži W). Restrikcije $\rho_W^{W'}$ za $W \subseteq W' \subseteq V_\alpha$ također prenosimo iz snopa $\mathcal{O}_{V_\alpha}$. Sada se nalazimo u sličnoj situaciji kao pri konstrukciji strukturnog snopa za Spec A: predsnop nije definiran na cijeloj topologiji, ali jest na skupovima koji tvore bazu topologije na X. Zbog toga za proizvoljan otvoren skup $U \subseteq X$ možemo staviti $\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim \mathcal{O}_X(W)$ po svim otvorenim skupovima $W \subseteq U$ koji su sadržani u nekom od skupova V_α.

Kao što je bilo najavljeno, preskačemo provjeru da smo ovime doista konstruirali snop te da je dobiveni oprstenjeni prostor zaista shema; umjesto toga, ilustriramo koncept lijepljenja pomoću dva zanimljiva primjera.

Primjer 4.3.1. *Neka je k algebarski zatvoreno polje i neka je $U_1 = U_2 = \mathbb{A}_k^1$, gdje je $\mathbb{A}_k^1$ afini pravac nad k uveden u primjeru 4.2.8. Odaberimo neku zatvorenu točku $P \in \mathbb{A}_k^1$ i stavimo $U_{12} = U_{21} = \mathbb{A}_k^1 \backslash \{P\}$. Definirajmo još i $\varphi_{12} = \varphi_{21} = id$.*

Vidimo da su uvjeti lijepljenja trivijalno zadovoljeni, stoga možemo konstruirati shemu X dobivenu lijepljenjem dvije kopije sheme $\mathbb{A}_k^1$. Uočimo i da je u ovom slučaju konstrukcija snopa trivijalna: za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ vrijedi $\mathcal{O}_X(U) = k[T]$. Dobivenu shemu nazivamo pravcem s udvostručenom točkom P, a lako je možemo i vizualizirati:



Primjer 4.3.2. *Neka je A proizvoljan prsten. Definiramo shemu $\mathbb{P}_A^n$, tzv. projektivni n-prostor nad A. Počnimo od prstena polinoma $A[T_0, \ldots, T_n]$; označimo s A_i potprsten $A[T_0/T_i, \ldots, T_n/T_i]$ prstena razlomaka $A[T_0, \ldots, T_n]_{(T_0 \cdots T_n)}$. Neka je, nadalje, $U_i = \operatorname{Spec} A_i$, a $U_{ij} = D(T_j/T_i) \subseteq U_i$. Vidimo da vrijedi $U_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$, gdje smo s A_{ij} označili skup svih elemenata oblika $F(T_0, \ldots, T_n)/(T_i^p T_j^q)$, pri čemu je F polinom stupnja $p + q$. Odavde odmah slijedi $A_{ij} = A_{ji}$, a onda i $U_{ij} = U_{ji}$, stoga možemo staviti $\varphi_{ij} = id$. I ovdje lako vidimo da su zadovoljeni uvjeti lijepljenja; shemu dobivenu lijepljenjem shema U_i nazivamo projektivnim n-prostorom nad A i označavamo s $\mathbb{P}_A^n$. Nije teško provjeriti da u slučaju kada je $A = k$ algebarski zatvoreno polje ovom konstrukcijom dobivamo shemu koja odgovara uobičajenom projektivnom prostoru $\mathbb{P}^n$.*

4.4 Zatvorene podsheme

Već smo komentirali da proizvoljan otvoren podskup sheme možemo promatrati kao shemu. U ovom dijelu uvodimo pojmove koji će nam omogućiti da i neke zatvorene podskupove promatramo kao sheme. Za početak, promotrimo jednostavniju situaciju s afinim shemama: ako je $\lambda : A \to B$ epimorfizam prstenova, onda je pridruženo preslikavanje ${}^a\lambda : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ homeomorfizam između Spec B i zatvorenog skupa $V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec} A$, pri čemu smo s $\mathfrak{a}$ označili ideal Ker λ. Ovaj primjer prenosimo na opći slučaj u sljedećoj definiciji.

Definicija 4.4.1. *Kažemo da je morfizam shema $\varphi : Y \to X$ zatvoreno ulaganje ako svaka točka $x \in X$ ima afinu okolinu U takvu da je $\varphi^{-1}(U) \subseteq Y$ afini skup, a homomorfizam $\psi_U : O_X(U) \to O_Y(\varphi^{-1}(U))$ surjektivan. U tom slučaju kažemo da je Y zatvorena podshema od X*

Napomena 4.4.2. *Pretpostavka da je ψ_U epimorfizam implicira da je preslikavanje φ injektivno na $\varphi^{-1}(U)$. Odavde slijedi da je φ injektivno i na cijeloj domeni. Nadalje, budući da je slika skupa $\varphi^{-1}(U)$ zatvorena u U (što pokazuje primjer prije definicije), vidimo da je skup $\varphi(Y) \cap U$ zatvoren u U za svaki otvoren skup $U \subseteq X$. Odavde lako vidimo da je $\varphi(Y)$ zatvoren u X. Ove opservacije opravdavaju nazive "zatvoreno ulaganje" i "zatvorena podshema".*

Uvodni primjer pokazuje da je, da bismo definirali zatvorenu podshemu afine sheme $\operatorname{Spec} A$, dovoljno zadati neki epimorfizam prstenova $A \to B$. Sljedeći rezultat pokazuje da su sve zatvorene podsheme od $\operatorname{Spec} A$ dobivene upravo na taj način.

Propozicija 4.4.3. *Neka je $X = \operatorname{Spec} A$ afina shema i $\varphi : Y \to X$ zatvoreno ulaganje. Tada je Y također afina shema, tj. vrijedi $Y = \operatorname{Spec} B$, a φ je oblika ${}^a\lambda$ za neki epimorfizam prstenova $\lambda : A \to B$.*

Dokaz. Po definiciji zatvorenog ulaganja, možemo naći otvoren pokrivač $X = \bigcup U_i$ gdje su svi U_i afini skupovi takvi da su i $\varphi^{-1}(U_i)$ afini, a homomorfizmi $\psi_i : O_X(U_i) \to O_Y(\varphi^{-1}(U_i))$ surjektivni. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su U_i glavni otvoreni skupovi. Nadalje, zbog kompaktnosti prostora $X = \operatorname{Spec} A$ možemo pretpostaviti da se radi o konačnom pokrivaču. Imamo, dakle, sljedeću situaciju: konačno mnogo skupova $U_i = D(f_i)$ prekriva X, shema $\varphi^{-1}(U_i)$ je jednaka $\operatorname{Spec} A_i$ za neki prsten A_i, a homomorfizmi $\psi_i : A_{f_i} \to A_i$ su surjektivni. Uvedimo i kraće oznake ρ_i za restrikcije $\rho^X_{U_i}$. Nadalje, označimo s $\mathfrak{a}_i$ ideal $\operatorname{Ker} \psi_i$ te definirajmo $\mathfrak{a} := \bigcap \rho_i^{-1}(\mathfrak{a}_i)$. Sada smo spremni za početak dokaza.

U poglavlju 4.2 smo konstatirali da morfizam $Y \to \operatorname{Spec} A$ snop O_Y u snop A-algebri. Podsjetimo, u ovakvoj situaciji kažemo da je Y shema nad A. Po konstrukciji je $\mathfrak{a}$ sadržan u jezgri svakog od homomorfizama $A \to O_Y(\varphi^{-1}(U_i))$, a skupovi $\varphi^{-1}(U_i)$ prekrivaju Y. Odavde slijedi da je za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$ ideal $\mathfrak{a}$ sadržan u jezgri homomorfizma $A \to O_Y(V)$. Drugim riječima, ovaj homomorfizam možemo faktorizirati preko $A/\mathfrak{a}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & O_Y(V) \\ & A/\mathfrak{a} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Zaključujemo da je Y ujedno i shema nad $A/\mathfrak{a}$ te imamo i sljedeći komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "u"'] & & \operatorname{Spec} A \\ & \operatorname{Spec}\,(A/\mathfrak{a}) \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Pritom je morfizam v jednak ${}^a\pi$, gdje je $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ kanonski epimorfizam. Zaključujemo da se radi o zatvorenom ulaganju. Da bismo dokazali tvrdnju propozicije, sada je dovoljno pokazati da je u izomorfizam.

Uočimo da je morfizam u potpuno određen svojim lokalnim djelovanjem, tj. restrikcijama na $\varphi^{-1}(U_i)$. Lako je vidjeti da je restrikcija morfizma u na $\varphi^{-1}(U_i)$ zadana prirodnim homomorfizmom

$$\upsilon_i : (A/\mathfrak{a})_{\overline{f_i}} \longrightarrow A_{f_i}/\mathfrak{a}_i = A_i,$$

gdje smo s $\overline{f_i}$ označili sliku elementa f_i u $A/\mathfrak{a}$. Za dokaz tvrdnje da je u izomorfizam dovoljno je pokazati da je svaki od homomorfizama υ_i izomorfizam. (Poneki tehnički detalj ovdje preskačemo radi preglednosti, no suština prethodne tvrdnje leži u činjenici da lijepljenjem izomorfnih shema po izomorfnim "presjecima" dobivamo izomorfne sheme). Surjektivnost je ovdje očita; da bismo pokazali injektivnost, uočimo da prsten $\mathcal{O}_Y\big(\varphi^{-1}(U_i \cap U_j)\big)$ možemo prikazati na dva načina:

$$\mathcal{O}_Y\big(\varphi^{-1}(U_i \cap U_j)\big) = (A_i)_{\psi_i(\rho_i(f_j))} = (A_j)_{\psi_j(\rho_j(f_i))}.$$

Promotrimo lokalizacije $\rho^i_j : A_{f_i} \to (A_{f_i})_{\rho_i(f_j)} = A_{(f_i f_j)}$. Iz dvostrukog prikaza prstena $\mathcal{O}_Y\big(\varphi^{-1}(U_i \cap U_j)\big)$ dobivamo da vrijedi

$$\rho^i_j(\mathfrak{a}_i) = \rho^j_i(\mathfrak{a}_j), \tag{$*$}$$

pri čemu je $\rho^i_j(\mathfrak{a}_i)$ ideal u $A_{(f_i f_j)}$ generiran s elementima $\rho^i_j(\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{a}_i$. Uočimo, ovaj ideal je jednak jezgri homomorfizma $A_{(f_i f_j)} \to \mathcal{O}_Y\big(\varphi^{-1}(U_i \cap U_j)\big)$.

Neka je sada $a \in A$ takav da je $a + \mathfrak{a} \in (A/\mathfrak{a})_{\overline{f_i}}$ sadržan u jezgri homomorfizma υ_i. Iz $(*)$ dobivamo

$$\rho^i_j\,(\rho_i(a)) \in \rho^j_i(\mathfrak{a}_j).$$

Element na lijevoj strani je slika elementa a po lokalizaciji $A_{(f_i f_j)}$, stoga je jednak $\rho^j_i\,\big(\rho_j(a)\big)$; s druge strane, elementi skupa na desnoj strani su oblika $\rho^j_i(a_j)/\rho_j(f_i)^k$. Zbog toga postoji $a_j \in \mathfrak{a}_j$ takav da vrijedi

$$\rho^j_i\,\big(\rho_j(f_i)^k \rho_j(a) - a_j\big) = 0.$$

Odavde vidimo da za neki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\rho_j(f_i)^{k+l}\rho_j(a) = \rho_j(f_i)^l a_j \in \mathfrak{a}_j,$$

iz čega zaključujemo

$$\rho_j\left(f_i^{k+l}a\right) \in \mathfrak{a}_j.$$

Nadalje, zbog konačnosti pokrivača možemo za svaki j uzeti iste k i l. To pokazuje da (budući da gornja relacija vrijedi za svaki j) vrijedi $f_i^{k+l} \in \mathfrak{a}$, to jest $(\overline{f_i})^{k+l}\overline{a} = 0$, pri čemu smo s $\overline{a}$ označili sliku elementa a u $A/\mathfrak{a}$. Zaključujemo da je element $\overline{a}$ jednak nuli u prstenu $(A/\mathfrak{a})_{\overline{f_i}}$, dakle jezgra homomorfizma υ_i je doista trivijalna. Ovime je tvrdnja propozicije dokazana. □

Primijetimo da kvaziprojektivne mnogostrukosti sadrže mnogo više zatvorenih podshema nego zatvorenih podmnogostrukosti: promotrimo, na primjer, afini pravac $A_k^1 = \operatorname{Spec} k[T]$ uveden u primjeru 4.2.8. Prema upravo dokazanom rezultatu, zatvorene podsheme od A_k^1 dobivamo iz epimorfizama $k[T] \to B$. Kako je $k[T]$ domena glavnih ideala, jezgra ovakvog epimorfizma je ideal generiran jednim polinomom, stoga je prsten B izomorfan prstenu $k[T]/(F)$, gdje je $F \in k[T]$ proizvoljan polinom. Odavde slijedi da su zatvorene podsheme od A_k^1 oblika $\operatorname{Spec} k[T]/(F)$. S druge strane, znamo da zatvorene podsheme odgovaraju samo skupu nultočaka polinoma F, ne uzimajući u obzir njihove kratnosti.

Neka je $\varphi : X \to Y$ morfizam shema, a $Y' \subseteq Y$ zatvorena podshema. Sada smo u prilici definirati tzv. povlak sheme Y', to jest shematsko–teoretsku prasliku $\varphi^{-1}(Y')$; dobiveni objekt bit će zatvorena podshema od X. Za početak se zadržimo na jednostavnijem slučaju u kojem su $X = \operatorname{Spec} A$ i $Y = \operatorname{Spec} B$ afine sheme, a φ oblika ${}^a\lambda$ za neki homomorfizam $\lambda : B \to A$. Tada je zatvoreno ulaganje $Y' \hookrightarrow Y$ definirano kanonskim epimorfizmom $B \to B/\mathfrak{b}$, gdje je $\mathfrak{b} \subseteq B$ neki ideal. Ako je $\lambda(\mathfrak{b})A = A$, shematsko-teoretska praslika $\varphi^{-1}(Y')$ je prazna. U suprotnom, za $\varphi^{-1}(Y')$ uzimamo shemu $X' = \operatorname{Spec}\ (A/\ (\lambda(\mathfrak{b})A))$. Lako je provjeriti da je odgovarajući topološki prostor doista praslika skupa Y' po φ.

Opći slučaj praslike zatvorene podsheme razradit ćemo u poglavlju o produktima shema. Do tada, promotrimo neke jednostavne, a zanimljive primjere.

Primjer 4.4.4. *Neka su sheme X i Y jednake afinom pravcu $A_k^1 = \operatorname{Spec} k[T]$ nad algebarski zatvorenim poljem k (karakteristike različite od 2). Promotrimo homomorfizam $\lambda : k[T] \to k[T]$ zadan s*

$$T \mapsto T^2$$

i označimo $\varphi = {}^a\lambda$. Nije teško vidjeti da za zatvorene točke $x \in X$ (koje odgovaraju elementima iz k) vrijedi $\varphi(x) = x^2$. Ako je $y \neq 0 \in k$ zatvorena točka u Y, vidimo da se $\varphi^{-1}(y)$ sastoji od dvije zatvorene točke, $\sqrt{y}$ i $-\sqrt{y}$. S druge strane, za $y = 0$ dobivamo $\varphi^{-1}(y) = \operatorname{Spec}\left(k[T]/T^2\right)$.

Primjer 4.4.5. *Neka su X i Y sheme kao u prethodnom primjeru, uz dodatni zahtjev: uzimamo da je k algebarski zatvoreno polje karakteristike p. Zadamo li homomorfizam*

$\lambda : k[T] \to k[T]$ *s*

$$T \to T^p,$$

dobivamo zanimljive posljedice. Odgovarajuće preslikavanje $\varphi = {}^a\lambda$ *je sada dano s* $\varphi(x) = x^p$*. Budući da u karakteristici* p *vrijedi* $(x - y)^p = x^p - y^p$*, vidimo da je* φ *bijekcija, no očito nije izomorfizam shema, jer* λ *nije izomorfizam. Točka* $y \in Y$ *je zadana idealom svih polinoma iz* $k[T]$ *koji se poništavaju u* y*, to jest sa* $(T - y)k[T]$*; zbog toga je njezina praslika jednaka* Spec $(k[T]/(T^p - y)k[T])$*. Sada uočimo da, opet zbog pretpostavke da radimo u karakteristici* p*, imamo* $(T^p - y) = (T - \sqrt[p]{y})^p$*, gdje smo s* $\sqrt[p]{y}$ *označili* p*-ti korijen iz* y*. Osim toga, očito vrijedi* $k[T] = k[T - \sqrt[p]{y}]$*. Zbog ovih jednakosti možemo umjesto* Spec $(k[T]/(T^p - y)k[T])$ *pisati* Spec $(k[T]/T^pk[T])$*. Drugim riječima, za svaku točku* $y \in Y$ *vrijedi* $\varphi^{-1}(y) = \text{Spec } (k[T]/T^pk[T])$*. Posebno, vidimo da praslika svake točke sadrži nilopotentne elemente u strukturnom snopu.*

Poglavlje 5

Osnovna svojstva shema

U ovom poglavlju razmatramo neka od osnovnih svojstava shema i proučavamo njihovu povezanost. Također, uvodimo produkte shema, čime dobivamo vrlo važan novi način konstrukcije shema.

5.1 Reduciranost i ireducibilnost

Vidjeli smo da se već među prvim primjerima shema prirodno javljaju sheme s nilpotentnim elementima u strukturnom snopu. S druge strane, svakoj shemi X možemo pridružiti zatvorenu podshemu $X' \subseteq X$ koja je jednaka shemi X na razini topoloških prostora, ali ne sadrži nilpotentne elemente u strukturnom snopu. Ovo postižemo tako da za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ definiramo $\mathcal{O}_{X'}(U)$ kao kvocijent prstena $\mathcal{O}_X(U)$ po vlastitom nilradikalu. Općenito, za shemu X kažemo da je reducirana ako prsteni $\mathcal{O}_X(U)$ nemaju nilpotentnih elemenata. Upravo konstruiranu shemu X' najčešće označavamo s X_{red}.

Definicija 5.1.1. *Kažemo da je shema X integralna ako je za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ prsten $\mathcal{O}_X(U)$ integralna domena.*

Dva upravo uvedena svojstva izrazili smo isključivo u algebarskim terminima, to jest preko svojstava prstena $\mathcal{O}_X(U)$. Ipak, ova svojstva su u uskoj vezi s čisto topološkim pojmom kojeg smo već promatrali u raznim kontekstima:

Definicija 5.1.2. *Za shemu X kažemo da je ireducibilna ako je odgovarajući topološki prostor ireducibilan.*

Propozicija 5.1.3. *Shema je integralna ako i samo ako je reducirana i ireducibilna.*

Dokaz. Očito je svaka integralna shema ujedno i reducirana. Pretpostavimo da je X shema koja nije ireducibilna. Tada postoje dva disjunktna otvorena skupa $U_1, U_2 \subseteq X$; nije teško vidjeti da za disjunktne skupove vrijedi $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$, no direktan produkt prstena ne može biti integralna domena. Zaključujemo da shema X nije integralna; time je dokazana jedna implikacija.

Obratno, neka je shema X reducirana i ireducibilna. Pretpostavimo da nije integralna, to jest da postoji otvoren skup $U \subseteq X$ i elementi $0 \neq f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ takvi da vrijedi $fg = 0$. Označimo s $U_1 = \{x \in U : \rho_x^U(f) \neq 0\}$ i $U_2 = \{x \in U : \rho_x^U(g) \neq 0\}$. Očito se radi o otvorenim skupovima, i to disjunktnim, zato što $fg = 0$ implicira da za svaki $x \in U$ vrijedi $\rho_x^U(f) = 0$ ili $\rho_x^U(g) = 0$. Nadalje, očito su oba skupa neprazna: primjerice, $U_1 = \emptyset$ bi impliciralo $\rho_x^U(f) = 0$ za svaku točku $x \in U$, odakle bismo mogli zaključiti da je f nilpotentan. Kako je shema X reducirana, to bi značilo $f = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkama. Konačno, egzistencija disjunktnih otvorenih skupova U_1 i U_2 je u kontradikciji s činjenicom da je shema X ireducibilna. Time je i drugi smjer tvrdnje dokazan. □

5.2 Uvjeti konačnosti

U ovom dijelu proučavamo svojstva sheme X vezana uz Noetherino svojstvo prstenova $\mathcal{O}_X(U)$.

Definicija 5.2.1. *Kažemo da je shema X Noetherina ako postoji konačan otvoren pokrivač $X = \bigcup U_i$ koji se sastoji od afinih skupova $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ takvih da su svi A_i Noetherini prstenovi.*

Ako je pritom X shema nad prstenom B, te ako su svi prstenovi A_i konačnogenerirane B-algebre, kažemo da se radi o shemi konačnog tipa nad B.

Iz Hilbertovog teorema o bazi slijedi da je svaka konačnogenerirana B-algebra nad Noetherinim prstenom B i sama Noetherin prsten. Odavde zaključujemo da je svaka shema konačnog tipa nad Noetherinim prstenom B ujedno i Noetherina shema. Dokažimo dva rezulata vezana uz upravo uvedene pojmove:

Propozicija 5.2.2. *Ako je shema $\operatorname{Spec} A$ Noetherina, onda je A Noetherin prsten.*

Dokaz. Neka je $X = \operatorname{Spec} A$ Noetherina shema; bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su elementi pokrivača U_i iz definicije glavni otvoreni skupovi. Imamo, dakle, elemente $f_1, \ldots, f_n \in A$ takve da vrijedi $\operatorname{Spec} A = \bigcup D(f_i)$, a svaki od prstenova A_{f_i} je Noetherin. Neka je

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots$$

rastući niz ideala u A; da bismo dokazali da je A Noetherin, dovoljno je pokazati da se svaki ovakav niz stabilizira. Za svaki $i = 1, \ldots, n$ možemo promatrati ideale $\mathfrak{a}_n^{(i)} = \rho_{U_i}^X(\mathfrak{a}_n) A_{f_i}$. Time dobivamo rastući niz ideala u Noetherinom prstenu A_{f_i}, stoga zaključujemo da se niz

$\mathfrak{a}_n^{(i)}$ stabilizira. Budući da imamo konačan pokrivač, možemo uzeti dovoljno veliki $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$\mathfrak{a}_{n+1}^{(i)} = \mathfrak{a}_n^{(i)} \quad \text{za sve } i \text{ i sve } n \geq n_0.$$

Tvrdimo da vrijedi $\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{a}_n$ za svaki $n \geq n_0$; u nastavku dokaza se koristimo već viđenim pristupom:

Neka je $n \geq n_0$ i $a \in \mathfrak{a}_{n+1}$. Za svaki indeks i je restrikcija $\rho^X_{U_i}(a)$ po definiciji sadržana u $\mathfrak{a}_{n+1}^{(i)}$, no budući da imamo $\mathfrak{a}_{n+1}^{(i)} = \mathfrak{a}_n^{(i)}$, vrijedi i $\rho^X_{U_i}(a) \in \mathfrak{a}_n^{(i)}$. To znači da postoje $a_i \in \mathfrak{a}_n$ i $k \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$af_i^k = a_i.$$

Pritom zbog konačnosti pokrivača možemo pretpostaviti da je broj k jednak za sve i. Sada koristimo poznati argument – činjenica da skupovi $D(f_i)$ prekrivaju X implicira da je ideal generiran elementima f_i^k jednak cijelom prstenu A. Posebno, postoje $c_1, \ldots, c_n \in A$ takvi da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i^k = 1.$$

Sada možemo pomnožiti jednakost $af_i^k = a_i$ s c_i; budući da vrijedi $a_i \in \mathfrak{a}_n$, dobivamo

$$af_i^k c_i \in \mathfrak{a}_n, \quad \text{za svaki indeks } i.$$

Sumiranjem slijedi

$$a = a\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i^k\right) = \sum_{i=1}^{n} ac_i f_i^k \in \mathfrak{a}_n.$$

Zaključujemo da vrijedi $\mathfrak{a}_{n+1} \subseteq \mathfrak{a}_n$ za svaki $n \geq n_0$; drugim riječima, niz ideala $(\mathfrak{a}_n)$ se stabilizira. Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 5.2.3. *Ako je afina shema Spec A konačnog tipa nad prstenom B, onda je A konačnogenerirana B-algebra.*

Dokaz (skica). Kao u prethodnom dokazu, možemo pretpostaviti da su elementi pokrivača glavni otvoreni skupovi. Možemo, dakle, pretpostaviti da vrijedi $U_i = D(f_i)$ te da je prsten $A_i = A_{f_i}$ generiran elementima $x_{ij}/f_i^{n_{ij}}$ nad B. Budući da skupovi $D(f_i)$ pokrivaju cijeli Spec A, postoje elementi g_i takvi da vrijedi

$$\sum f_i g_i = 1.$$

Sada se pokazuje, koristeći slične argumente kao u prethodnom dokazu, da elementi x_{ij}, f_i i g_i generiraju prsten A kao B-algebru. □

5.3 Produkti shema

Kao što je bilo najavljeno, u ovom dijelu uvodimo produkte shema. Podsjetimo da smo produkte već promatrali u slučaju afinih mnogostrukosti, u primjerima 1.2.6 i 1.3.4 iz uvodnog poglavlja. Tamo je topološki prostor koji je odgovarao produktu mnogostrukosti X i Y bio upravo Kartezijev produkt $X \times Y$. Konstrukcija produkta u općem slučaju bit će kudikamo složenija[1] – primjerice, ako $X = Y = \mathbb{A}^1$ promatramo kao sheme, onda je produkt $X \times Y$ jednak $\mathbb{A}^2$. Odavde slijedi da je skup svih točaka u produktu jednak skupu svih ireducibilnih afinih mnogostrukosti u $\mathbb{A}^2$, što je očito bogatije nego skup svih parova (x, y) gdje su x i y točke (tj. ireducibilne afine mnogostrukosti) iz $\mathbb{A}^1$.

Gornja diskusija pokazuje da u općem slučaju ne možemo promatrati produkt shema X i Y kao Kartezijev produkt odgovarajućih prostora. Zbog toga postupamo kao što je uobičajeno u teoriji kategorija – definiciju produktne sheme oblikujemo prema svostvima koja očekujemo od produkta. Prije same definicije, trebamo specificirati kategoriju u kojoj radimo. Pojam sheme nad A ovdje poopćujemo do pojma sheme nad S, gdje je S proizvoljna shema:

Definicija 5.3.1. *Neka je S shema. Shemu X, promatranu zajedno s morfizmom $X \to S$, zovemo shemom nad S. Morfizam shema $\varphi : X \to S$ i $Y \to S$ nad S je morfizam $f : X \to Y$ za koji vrijedi $\psi \circ f = \varphi$.*

Sada smo spremni za definiciju produkta:

Definicija 5.3.2. *Neka je S shema i neka su X, Y sheme nad S. Produkt shema X i Y nad S je produkt objekata u kategoriji shema nad S; označavamo ga s $X \times_S Y$. Preciznije, produkt shema X i Y nad S je shema $X \times_S Y$, zajedno s morfizmima $p_1 : X \times_S Y \to X$ i $p_2 : X \times_S Y \to Y$ koji tvore sljedeći komutativni dijagram:*

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Pritom zahtijevamo da shema $X \times_S Y$ zadovoljava sljedeće univerzalno svojstvo: za svaku shemu Z nad S i morfizme $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ shema nad S postoji jedinstveni morfizam $h : Z \to X \times_S Y$ takav da sljedeći dijagram komutira:

[1] U kategoriji kvaziprojektivnih mnogostrukosti produkt ostvarujemo pomoću takozvanog Segreovog ulaganja, koje omogućuje da skup $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ promatramo kao mnogostrukost u prostoru $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, dashed, "\exists!"] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & X \times_S Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
& X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& & S &
\end{tikzcd}$$

Jedinstveni morfizam h često označavamo i s (f, g). Morfizme p_1 i p_2 iz definicije zovemo projekcijama.

Napomena 5.3.3. *Prisjetimo se da svaku shemu možemo promatrati kao shemu nad $\mathbb{Z}$. Zbog toga, ako shema S nije specificirana, produkt $X \times Y$ shvaćamo kao produkt shema nad $\mathbb{Z}$.*

Napomenimo i da je, zbog univerzalnog svojstva iz definicije, produkt shema X i Y jedinstven do na izomorfizam. Iz definicije produkta nije očita njegova egzistencija, no sljedeći teorem pokazuje da produkt doista postoji:

Teorem 5.3.4. *Za svake dvije sheme X i Y nad S postoji produkt $X \times_S Y$.*

Dokaz. Dokaz provodimo u nekoliko koraka.

Korak 1. (Produkt afinih shema). Neka su $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ i $S = \operatorname{Spec} R$ afine sheme. Prsteni A i B su tada R-algebre; tvrdimo da je $\operatorname{Spec}\,(A \otimes_R B)$ produkt shema X i Y nad S. Neka je Z shema nad S i neka su zadani morfizmi $f : Z \to X$ i $g : Z \to Y$ shema nad S. Znamo da su f i g jedinstveno određeni homomorfizmima $\varphi : A \to O_Z(Z)$ i $\psi : B \to O_Z(Z)$. Budući da su f i g morfizmi shema nad S, homomorfizmi φ i ψ tvore komutativni dijagram sa zadanim homomorfizmima $R \to A$ i $R \to B$. Direktno iz definicije tenzorskog produkta R-algebri sada vidimo da postoji jedinstveni homomorfizam $\theta : A \otimes_R B \to O_Z(Z)$ koji tvori komutativni dijagram s φ, ψ i homomorfizmima

$$\alpha : a \mapsto a \otimes 1, \quad \beta : b \mapsto 1 \otimes b.$$

Lako je provjeriti da upravo θ zadaje jedinstveni morfizam $Z \to \operatorname{Spec}\,(A \otimes_R B)$ iz definicije produkta. Time smo pokazali da je $\operatorname{Spec}\,(A \otimes_R B)$, zajedno s projekcijama ${}^a\alpha$ i ${}^a\beta$ doista produkt shema X i Y.

Korak 2. Neka su X i Y sheme nad S takve da postoji produkt $X \times_S Y$. Tada je za svaki otvoren podskup $U \subseteq X$ shema $p_1^{-1}(U) \subseteq X \times_S Y$ produkt shema U i Y nad S. Doista, neka je Z shema nad S i pretpostavimo da su zadani morfizmi $f : Z \to U$ i $g : Z \to Y$. Primijetimo da je time zadan i morfizam $\overline{f} : Z \to X$, kojeg dobivamo komponiranjem morfizma f s inkluzijom $U \hookrightarrow Z$. Zbog toga po definiciji produkta postoji jedinstveni morfizam $h : Z \to X \times_S Y$ koji tvori komutativni dijagram s $\overline{f}$, g i projekcijama. Zbog $\overline{f}(Z) \subseteq U$ vrijedi i $h(Z) \subseteq p_1^{-1}(U)$, stoga h možemo promatrati kao morfizam $Z \to p_1^{-1}(U)$. Time smo dobili (očito jedinstveni) morfizam $Z \to p_1^{-1}(U)$ koji je kompatibilan s f, g i projekcijama p_1 i p_2, pa zaključujemo da doista vrijedi $U \times_S Y = p_1^{-1}(U)$.

U trećem koraku trebat ćemo sljedeću tvrdnju.

Napomena 5.3.5. (Lijepljenje morfizama) *Neka su X i Y sheme i neka je $\{U_i\}$ otvoren pokrivač prostora X. Tada svaki morfizam $f : X \to Y$ možemo zadati kao familiju morfizama $f_i : U_i \to Y$ čije se restrikcije podudaraju na presjecima $U_i \cap U_j$.*

Korak 3. Neka su X i Y sheme nad S; pretpostavimo da je $\{U_i\}$ otvoren pokrivač od X takav da za svaki indeks i postoji produkt $U_i \times_S Y$. Pokažimo da tada postoji produkt $X \times_S Y$. Označimo za svaki par indeksa i, j s U_{ij} otvoren skup $p_1^{-1}(U_i \cap U_j)$. U Koraku 2 smo pokazali da je tada U_{ij} produkt shema $U_i \cap U_j$ i Y nad S. Zbog jedinstvenosti produkta vidimo da za svaki par indeksa i, j postoji izomorfizam $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j$ koji je kompatibilan s projekcijama. Nije teško provjeriti da ovi izomorfizmi zadovoljavaju uvjete lijepljenja iz poglavlja 4.3. Označimo s $X \times_S Y$ shemu dobivenu lijepljenjem shema $U_i \times Y$; tvrdimo da je $X \times_S Y$ doista produkt shema X i Y nad S. Pripadne projekcie p_1 i p_2 dobivamo lijepljenjem projekcija (u smislu napomene 5.3.5) definiranih za dijelove $U_i \times_S Y$. Za zadanu shemu Z i morfizme $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$, možemo uvesti oznake $Z_i = f^{-1}(U_i)$. Po definiciji produkta, dobivamo morfizme $h_i : Z_i \to U_i \times_S Y$. Možemo ih dokomponirati s inkluzijama $U_i \times_S Y \hookrightarrow X \times_S Y$, čime dolazimo do morfizama $h_i : Z_i \to X \times_S Y$. Nije teško provjeriti da se ovi morfizmi podudaraju na presjecima $Z_i \cap Z_j$, stoga ih (opet po napomeni 5.3.5) možemo zalijepiti u morfizam $h : Z \to X \times_S Y$. Jedinstvenost morfizma h slijedi iz jedinstvenosti restrikcija na Z_i, tj. morfizama h_i.

Korak 4. Ako su X, Y i S afine sheme, iz Koraka 1 znamo da produkt $X \times_S Y$ postoji. Kako svaka shema X ima pokrivač koji se sastoji od afinih shema, Korak 3 pokazuje da produkt postoji i u slučaju kada je X proizvoljna, a Y afina shema nad S. Uz ovo saznanje, možemo opet iskoristiti Korak 3 (zamijenivši uloge X i Y) pa dobivamo egzistenciju produkta proizvoljnih shema X i Y nad afinom shemom S.

Korak 5. Neka su X, Y i S proizvoljne sheme te $q : X \to S$ i $r : Y \to S$ dani morfizmi. Neka je $\{S_i\}$ otvoren afini pokrivač sheme S. Označimo s X_i, odnosno Y_i praslike $q^{-1}(S_i)$, odnosno $r^{-1}(S_i)$. Prema Koraku 4, znamo da postoji produkt $X_i \times_S Y_i$. Uočimo da je ovaj produkt zapravo jednak produktu $X_i \times_S Y$: ako su $f : Z \to X_i$ i $g : Z \to Y$ morfizmi shema nad S, slika morfizma g je nužno sadržana u Y_i. Drugim riječima, imamo egzistenciju produkta $X_i \times_S Y$, stoga je dovoljno još jednom primijeniti Korak 3 kako bismo dobili produkt $X \times_S Y$. Time je dokaz teorema završen. □

Upravo konstruirani produkt shema ima mnoge primjene. Za početak, navodimo definiciju praslike zatvorene podsheme, kao što je najavljeno u poglavlju 4.4 o zatvorenim podshemama. Neka je $i : Y \hookrightarrow X$ zatvoreno ulaganje, te neka je $\varphi : Z \to X$ proizvoljan morfizam. Pokazali smo da u ovom slučaju postoji produkt $Y \times_X Z$; nije teško pokazati da je projekcija $Y \times_X Z \to Z$ zatvoreno ulaganje. Zatvorenu podshemu $Y \times_X Z$ sheme Z zovemo praslikom zatvorene podsheme Y po φ. U slučaju afinih shema imamo sljedeću situaciju: $Z = \text{Spec}\, A$, $X = \text{Spec}\, B$ i $Y = \text{Spec}\, B/\mathfrak{b}$ (gdje je $\mathfrak{b} \subseteq B$ neki ideal), a morfizam φ je zadan homomorfizmom $\lambda : B \to A$. Znamo da je tada produkt $Y \times_X Z$ jednak afinoj shemi $\text{Spec}\,(A \otimes_B B/\mathfrak{b})$. Lako je pokazati da su prsteni $A \otimes_B B/\mathfrak{b}$ i $A/\lambda(\mathfrak{b})A$ izomorfni, odakle vidimo da se nova, općenita definicija podudara s pojmom praslike uvedenim za afine sheme u poglavlju 4.4.

Sličnu konstrukciju možemo primijeniti i u općenitijim situacijama. Neka je $f : X \to Y$ morfizam shema i neka je $y \in Y$ proizvoljna (ne nužno zatvorena) točka. Prisjetimo se diskusije na kraju poglavlja 3.4 i evaluacije elemenata u rezidualnom polju $k(y)$: za točku y postoji prirodni morfizam $\text{Spec}\, k(y) \to Y$. To nas dovodi do sljedeće definicije:

Definicija 5.3.6. *Vlakno morfizma f nad točkom $y \in Y$ je shema*

$$X_y = X \times_Y Spec\ k(y).$$

Vlakno X_y je shema nad $k(y)$ i može se pokazati da je odgovarajući topološki prostor jednak skupu $f^{-1}(y) \subseteq X$. Ova definicija daje nam alternativni pogled na morfizme shema: svaki morfizam $f : X \to Y$ možemo promatrati kao familiju shema (to jest, odgovarajućih vlakana) indeksiranu po točkama sheme Y.

5.4 Separiranost

Produkti shema omogućuju nam uvođenje još jednog vrlo bitnog svojstva – separiranosti.

Definicija 5.4.1. *Za svaku shemu X nad S možemo promatrati njezinu* dijagonalu*, to jest sliku $\Delta(X)$ morfizma $\Delta = (id, id) : X \to X \times_S X$. Kažemo da je shema X nad S separirana ako je dijagonala $\Delta(X)$ zatvoren skup. U slučaju da shema S nije specificirana, shemu X nazivamo separiranom ako je separirana nad $\mathbb{Z}$.*

Najjednostavnije sheme, to jest one afine, uvijek su separirane, kao što pokazuje sljedeći rezultat:

Propozicija 5.4.2. *Afina shema X nad prstenom B je separirana, a preslikavanje $\Delta = (id, id) : X \to X \times_B X$ je zatvoreno ulaganje.*

Dokaz. Iz uvjeta propozicije vidimo da je X oblika $\text{Spec}\, A$, gdje je A neka B-algebra. Po definiciji je $X \times_B X = \text{Spec}\ (A \otimes_B A)$, a morfizam Δ je zadan homomorfizmom $\lambda : A \otimes_B A \to A$. Homomorfizam λ je ovdje određen relacijama

$$\lambda \circ u = \text{id}, \qquad \lambda \circ v = \text{id},$$

pri čemu su $u, v : A \to A \otimes_B A$ homomorfizmi zadani s

$$u(a) = a \otimes 1, \qquad v(a) = 1 \otimes a.$$

Odavde odmah čitamo da vrijedi $\lambda(a \otimes b) = ab$; posebno, preslikavanje λ je surjektivno, što znači da je Δ zatvoreno ulaganje. Time je tvrdnja dokazana. □

Svaka shema je pokrivena afinim skupovima, koji su, kao što smo upravo pokazali, separirani. Zaključujemo da je svojstvo separiranosti direktno povezano s načinom na koji lijepimo afine dijelove. Upravo o tome govore sljedeći primjer i propozicija nakon njega.

Primjer 5.4.3. *Nije teško pokazati da pravac s udvostručenim ishodištem, tj.shema X iz primjera 4.3.1 nije separirana shema. Po definiciji je X pokrivena s dva afina skupa* $V_1 \cong V_2 \cong A_k^1$*, no lako je pokazati da skup* $\Delta(X) \cap V_1 \times V_2$ *nije zatvoren u otvorenom skupu* $V_1 \times V_2 \subseteq X \times X$.

Propozicija 5.4.4. *Neka je X shema nad afinom shemom* $S = Spec\ B$ *i neka je* $X = \bigcup U_\alpha$ *afini pokrivač koji zadovoljava sljedeće uvjete:*

i) svi presjeci $U_\alpha \cap U_\beta$ *su afini,*

ii) Prsten $O_X\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ *je generiran s* $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(O_X(U_\alpha))$ *i* $\rho^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(O_X(U_\beta))$*, za svaki par* α, β.

Tada je shema X separirana nad B.

Dokaz. Neka su $p_1, p_2 : X \times_B X \to X$ projekcije. Tada imamo

$$\Delta^{-1}\left(p_1^{-1}(U_\alpha) \cap p_2^{-1}(U_\beta)\right) = \Delta^{-1}\left(p_1^{-1}(U_\alpha)\right) \cap \Delta^{-1}\left(p_2^{-1}(U_\beta)\right) = U_\alpha \cap U_\beta.$$

Također, uočimo da vrijedi $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) = U \times V$ (na isti načina kao u Koraku 2. dokaza teorema o egzistenciji produkta). Odavde i iz gornje relacije vidimo da je dovoljno dokazati da restrikcija

$$\Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{|U_\alpha \cap U_\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to U_\alpha \times_B U_\beta$$

ima zatvorenu sliku. Po pretpostavci (i) je $U_\alpha \cap U_\beta$ afina shema, tj. imamo $U_\alpha \cap U_\beta = \operatorname{Spec} C_{\alpha\beta}$. Iz pretpostavke (ii) vidimo da je (uz oznaku $U_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha$) homomorfizam $A_\alpha \otimes_B A_\beta \to C_{\alpha\beta}$ surjektivan. To znači da je morfizam $\Delta_{\alpha\beta}$ zatvoreno ulaganje, što je i trebalo pokazati. □

Može se pokazati da vrijedi i obrat gornje tvrdnje; budući da je često koristan, dokažimo barem jedan dio:

Propozicija 5.4.5. *Presjek afinih podskupova separirane sheme je i sam afin skup.*

Dokaz. Ako su $U, V \subseteq X$ afini skupovi, onda je i njihov produkt $U \times V$ afin skup. Nadalje, pokazali smo da je, budući da je X separirana shema, preslikavanje Δ zatvoreno ulaganje. Iz jednakosti

$$U \cap V = \Delta^{-1}(U \times V)$$

sada čitamo da je $U \cap V$ zatvorena podshema afine sheme $U \times V$. Prema propoziciji 4.4.3, ovo znači da je shema $U \cap V$ afina. □

Zanimljivo je primijetiti da uvjeti u propoziciji 5.4.4 ne ovise o morfizmu $X \to S$. Drugim riječima, ako je S afina shema, svojstvo separiranosti za shemu X nad S ne ovisi o shemi S niti o morfizmu $X \to S$. Sljedeći primjer pokazuje primjenu ove propozicije nadovezujući se na konstrukciju projektivnog prostora iz primjera 4.3.2:

Primjer 5.4.6. *Prisjetimo se da za projektivni prostor $\mathbb{P}^n_A$ vrijedi $\mathbb{P}^n_A = \bigcup U_i$, gdje je $U_i = \operatorname{Spec} A[T_0/T_i, \dots, T_n/T_i]$. Znamo da vrijedi $U_i \cap U_j = \operatorname{Spec} A_{ij}$, gdje je A_{ij} skup svih elemenata oblika $F(T_0, \dots, T_n)/(T_i^p T_j^q)$, pri čemu je F polinom stupnja $p + q$. Posebno, $U_i \cap U_j$ je afin skup, dakle uvjet (i) iz propozicije je zadovoljen. Nadalje, potprsteni $\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(U_i)\right)$ i $\rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}\left(U_j\right)\right)$ sastoje se od elemenata oblika F/T_i^p, odnosno G/T_j^q, pri čemu je F stupnja p, a G stupnja q. Odavde čitamo da oni generiraju A_{ij}, dakle, i uvjet (ii) je zadovoljen. Zaključujemo da je $\mathbb{P}^n_A$ separirana shema.*

Za kraj, komentirajmo neke posljedice separiranosti. Podsjetimo na činjenicu koju smo konstatirali na samom kraju uvodnog poglavlja: regularna preslikavanja kvaziprojektivnih mnogostrukosti su jedinstveno određena svojom restrikcijom na proizvoljan gust otvoren podskup. Generalizacija ove tvrdnje vrijedi za separirane sheme:

Pretpostavimo da je shema X separirana. Tada je za svaku shemu Y i morfizme $f, g : Y \to X$ skup $Z := \{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ zatvoren u Y: doista, skup Z je praslika dijagonale sheme X po morfizmu $(f, g) : Y \to X \times X$. Budući da je dijagonala zatvorena, i skup Z je zatvoren. Ako je Z gust u Y, ovo povlači da vrijedi $f = g$ na cijeloj shemi Y.

Još jedno važno svojstvo je zatvorenost grafa regularnog preslikavanja. Za morfizam $f : Y \to X$ možemo promatrati odgovarajući graf, tj. sliku morfizma $(\mathrm{id}, f) : Y \to Y \times X$. Lako je provjeriti da je graf jednak praslici dijagonale po morfizmu $f \times \mathrm{id} : Y \times X \to X \times X$ definiranom s $f \times \mathrm{id} = (f \circ p_Y, p_X)$ (ovdje smo s p_Y i p_X označili projekcije s $Y \times X$ na Y, odnosno X). Ovo pokazuje da je, ako je X separirana shema, graf morfizma f zatvoren.

Ovime završavamo pregled osnovnih svojstava shema. Naravno, postoji mnoštvo zanimljivih činjenica i primjera koje nismo stigli obuhvatiti. Brojni ilustrativni zadaci koji dodatno pojašnjavaju ove koncepte mogu se pronaći u [1]. Većinu uvedenih svojstava koristit ćemo u sljedećem, završnom poglavlju prilikom definiranja mnogostrukosti i razmatranja baričnih činjenica vezanih uz njih.

5.5 Mnogostrukosti

U posljednjem dijelu zaključujemo rad uvođenjem algebarskih mnogostrukosti. Slične objekte smo već promatrali, no ovdje ih konačno uvodimo u punoj općenitosti. Time dolazimo do definicije osnovnih objekata iskazane jezikom teorije shema. Navodimo i neke rezultate koji pobliže objašnjavaju vezu između ”novih” mnogostrukosti i ”klasičnih” objekata poput kvaziprojektivnih mnogostrukosti.

Definicija 5.5.1. *Neka je k algebarski zatvoreno polje. Mnogostrukost nad k je integralna i separirana shema konačnog tipa nad k. Ako je shema koju promatramo k tome i afina, kažemo da se radi o afinoj mnogostrukosti.*

Komentirajmo najprije neka svojstva mnogostrukosti vezana uz dimenziju. Po definiciji, svaka mnogostrukost X ima konačan pokrivač $X = \bigcup U_i$ koji se sastoji od afinih Noetherinih shema. Odavde zaključujemo da je X konačnodimenzionalna. Na samom početku ovog poglavlja pokazali smo da integralnost mnogostrukosti X implicira ireducibilnost (prop. 5.1.3). Posebno, svi skupovi U_i su gusti u X i vrijedi $\dim X = \dim U_i$. Nadalje, za svaki par indeksa i i j su U_i i U_j biracionalno ekvivalentni, jer imaju zajednički gust otvoren podskup $U_i \cap U_j$. To znači da možemo poistovjetiti polja $k(U_i)$ i $k(U_j)$, dobivena kao polja razlomaka prstena $\mathcal{O}_X(U_i)$, odnosno $\mathcal{O}_X(U_j)$ (podsjetimo, ovi prstenovi su integralne domene). Dobiveno polje označavamo s $k(X)$ i zovemo funkcijskim poljem mnogostrukosti X, baš kao u klasičnom slučaju kvaziprojektivnih mnogostrukosti. Može se pokazati da je dimenzija mnogostrukosti X jednaka stupnju transcendencije polja $k(X)$ nad k.

U primjeru 4.3.2 opisali smo projektivni prostor nad prstenom A. Slično kao u klasičnoj terminologiji, zavorene podsheme projektivnog prostora nazivamo projektivnim shemama; njihove otvorene podsheme zovemo kvaziprojektivnim shemama.

Prisjetimo se funktora $s : \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sch}(k)$ kojim smo u propoziciji 4.2.6 mnogostrukostima pridruživali sheme. Pokazuje se da vrijedi sljedeći rezultat:

Teorem 5.5.2. *Neka je k algebarski zatvoreno polje.*

i) Slika funktora $s : \mathfrak{Var}(k) \to \mathfrak{Sch}(k)$ je skup svih kvaziprojektivnih, integralnih shema nad k. Slika skupa svih projektivnih mnogostrukosti je upravo skup projektivnih integralnih shema.

ii) Svaka kvaziprojektivna mnogostrukost nad k je konačnog tipa i separirana; posebno, za svaku kvaziprojektivnu mnogostrukost X, shema $s(X)$ je algebarska mnogostrukost (u smislu definicije 5.5.1).

U dokazu ovog teorema, ali i u mnogim drugim razmatranjima, bitna je sljedeća činjenica:

Propozicija 5.5.3. *Skup svih zatvorenih točaka je gust u svakom zatvorenom podskupu mnogostrukosti X.*

Budući da je svaka mnogostrukost reducirana shema, elementi prstena $\mathcal{O}_X(U)$ jedinstveno su određeni vrijednostima koje poprimaju u rezidualnim poljima $k(x)$ za $x \in U$. Nadalje, budući da su zatvorene točke guste u X, element $f \in \mathcal{O}_X(U)$ je jednoznačno određen svojim djelovanjem na zatvorene točke. Nije teško pokazati da je točka x mnogostrukosti X zatvorena ako i samo ako vrijed $k(x) = k$. Ova opservacija pokazuje da svaki element prstena $\mathcal{O}_X(U)$ možemo promatrati kao funkciju na skupu zatvorenih točaka od U s vrijednostima u k.

Slično, morfizmi u slučaju mnogostrukosti postaju znatno jednostavniji. Ako je $\varphi : X \to Y$ morfizam mnogostrukosti i $y = \varphi(x)$ za $x \in X$, onda prirodni homomorfizam lokalnih prstenova $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ inducira inkluziju rezidualnih polja $k(y) \hookrightarrow k(x)$. Ako je točka x zatvorena, onda je $k(x) = k$, no kako $k(y)$ sadrži k, odavde slijedi i jednakost $k(y) = k$. Zaključujemo da je slika zatvorene točke i sama zatvorena točka. Nastavimo li promatrati elemente $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ kao funkcije na skupu zatvorenih točaka, vidimo da je homomorfizam $\psi_U : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ određen relacijom $\psi_U(f)(x) = f(\varphi(x))$. Odavde zaključujemo da je, da bismo zadali morfizam $\varphi : X \to Y$, dovoljno zadati (topološko) preslikavanje φ.

Već ova razmatranja pokazuju kako su mnogostrukosti vrlo slične klasičnim kvaziprojektivnim mnogostrukostima. Ipak, jedno vrlo bitno svojstvo projektivnih mnogostrukosti ne vrijedi za opće algebarske mnogostrukosti, stoga ga obuhvaćamo u sljedećoj definiciji.

Definicija 5.5.4. *Kažemo da je mnogostrukost X potpuna ako je za svaku mnogostrukost Y projekcija $p : X \times Y \to Y$ zatvoreno preslikavanje.*

Za potpune algebarske mnogostrukosti možemo dokazati sve tvrdnje koje su u slučaju projektivnih mnogostrukosti slijedile iz činjenice da su projekcije pridružene produktu zatvorena preslikavanja. Primjerice, može se pokazati da je slika potpune mnogostrukosti po proizvoljnom morfizmu nužno zatvorena, kao i da vrijedi $\mathcal{O}_X(X) = k$ (tj. jedine svugdje regularne funkcije su konstante). Ispostavlja se da su potpune mnogostrukosti toliko slične projektivnim mnogostrukostima da je pitanje egzistencije potpunih mnogostrukosti koje nisu projektivne sasvim netrivijalno. Ipak, pokazuje se da je klasa potpunih mnogostrukosti strogo veća (prvi primjer pronašao je M. Nagata).

Definiravši algebarske mnogostrukosti uspostavili smo vezu između klasičnih objekata proučavanja i odgovarajućih pojmova smještenih u kontekst teorije shema. Time se vraćamo na osnovna pitanja algebarske geometrije, no ovaj put u znatno opširnijem okruženju i s brojnim algebarskim alatima na raspolaganju. Smjerova za nastavak proučavanja ima mnogo, no oni ne potpadaju pod opseg ovog rada; ovime završavamo naš uvod u geometriju shema.

Bibliografija

[1] Robin C. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[2] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, 2003.

[3] Serge Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, 2002.

[4] Igor R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1*, Springer-Verlag, 2013.

[5] ______, *Basic Algebraic Geometry 2*, Springer-Verlag, 2013.

Sažetak

Koncept shema uveo je Alexander Grothendieck 1960. godine kao pokušaj objedinjenja raznih dotadašnjih pristupa centralnim problemima algebarske geometrije. U međuvremenu su se sheme pokazale vrlo efikasnim oruđem te su postale dio standardnog repertoara u algebarskoj geometriji i srodnim granama matematike. Cilj ovog rada bio je izložiti osnove teorije shema i povezati ih s odgovarajućim pojmovima u klasičnoj teoriji projektivnih mnogostrukosti.

U uvodnom poglavlju uveli smo pojmove koje ćemo kasnije generalizirati shemama: afine, projektivne i kvaziprojektivne mnogostrukosti; iskazali smo neke osnovne rezultate vezane uz njih i komentirali njihova najvažnija svojstva.

U sljedećim poglavljima detaljno smo opisali dva objekta ključna za definiciju sheme: spektar prstena i odgovarajući strukturni snop. U drugom smo poglavlju promatrali primjere spektra u slučaju nekih dobro poznatih prstenova; uvođenjem topologije Zariskog na skup svih prostih ideala definirali smo spektar kao topološki prostor. Osim toga, proučili smo topološke sličnosti i razlike spektra s klasičnim afinim mnogostrukostima. Glavnina trećeg poglavlja sastojala se od uvođenja (pred)snopova i dokazivanja činjenice da je strukturni predsnop doista snop.

Ovi pojmovi omogućili su nam da definiramo shemu kao oprstenjeni prostor koji "lokalno nalikuje" spektru nekog prstena. Proučavali smo i morfizme shema, te neke osnovne konstrukcije kao što su lijepljenje shema i zatvorene podsheme. Važan dio četvrtog poglavlja bio je opis načina na koji klasične kvaziprojektivne mnogostrukosti možemo promatrati kao sheme.

Konačno, u posljednjem, petom poglavlju, proučili smo neka od najvažnijih svojstava shema i morfizama. Rad smo završili definicijom algebarskih mnogostrukosti i poveznicom opisanih svojstava s nekim poznatim rezultatima iz klasične teorije.

Summary

The concept of schemes was introduced in 1960 by Alexander Grothendieck as an attempt to unify many different approaches to some of the most important questions of algebraic geometry. In the meantime, the scheme-theoretic approach proved very efficient, and schemes became a standard feature of algebraic geometry as well as other related disciplines. The goal of this paper was to provide an exposition of the fundamentals of scheme theory and to establish a connection between the newly introduced concepts and their counterparts in the classical theory of projective varieties.

In the opening chapter we introduced the notions we would ultimately generalize using schemes: affine, projective, and quasi-projective varieties. We also commented on some of the more important properties of varieties and stated some basic results concerning them.

In the following chapters we described the key components of schemes: the spectrum of a ring and its associated structure sheaf. In the second chapter we observed quite a few examples of spectra; by introducing the Zariski topology, we made the spectrum into a topological space and discussed its topological similarities and differences with respect to the classical affine varieties. The main content of the third chapter was the introduction of (pre-)sheafs as well as the proof of the fact that the structure presheaf is indeed a sheaf.

These concepts enabled us to define a scheme as a ringed space which ”locally looks like” the spectrum of a ring. We also studied morphisms of schemes and some basic constructions, such as gluing and closed subschemes. An important part of the fourth chapter consisted of describing the way in which we can regard any quasi-projective variety as a scheme.

Finally, in the last chapter, we studied in detail some of the most important properties of schemes. We concluded the paper by defining algebraic varieties and linking the described properties to some familiar results of the classical theory of projective varieties.

Životopis

Rođen sam 3. 10. 1990. u Zagrebu. Početno obrazovanje stekao sam u Osnovnoj školi Jure Kaštelana u Zagrebu i Pattonville Heights Middle School u St. Louisu (Missouri, SAD). Po završetku osnovne škole upisao sam XV. gimnaziju u Zagrebu. U srednjoj školi sam se aktivno zainteresirao za matematiku; sudjelovao sam na nekoliko državnih natjecanja iz matematike, ali i fizike i kemije.

Maturirao sam 2009. godine te sam u istoj godini upisao preddiplomski studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta. Neposredno nakon završetka preddiplomskog studija 2012. godine sam na istom fakultetu upisao diplomski studij Teorijska matematika, kojeg završavam ovim radom.

Dobitnik sam dvije nagrade Fakultetskog vijeća za izniman uspjeh u studiju. Tokom studija sam sudjelovao i u brojnim izvannastavnim aktivnostima kao što su mentorstvo učenicima XV. gimnazije na matematičkim natjecanjima te sudjelovanje na studentskim natjecanjima Vojtech Jarnik i International Mathematics Competition. Aktivni sam član udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" u kojoj trenutno obnašam dužnost tajnika.