Ograničenja kompaktnosti astrofizičkih tijela

Kompar, Ema

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:256701

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-24**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Ema Kompar

OGRANIČENJA KOMPAKTNOSTI ASTROFIZIČKIH TIJELA

Diplomski rad

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Ema Kompar

Diplomski rad

Ograničenja kompaktnosti astrofizičkih tijela

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____
Zagreb, 2023.

Zahvaljujem se prijateljima i obitelji na podršci te mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Smoliću na strpljenju, razumijevanju i prenesenom znanju tijekom studija i izrade rada.

Sažetak

Bilo kakva gravitirajuća materija u ravnotežnom je stanju gravitacijskog stiskanja i internih tlakova. U određenim silovitim procesima, moguće je materiju toliko sabiti da se ona ne može oduprijeti gravitacijskom sažimanju i dolazi do gravitacijskog kolapsa u crnu rupu. Astrofizička tijela mogu se u potpunosti opisati masom, nabojem, angularnim momentom i površinom, te kompaktnost tijela određujemo međusobnim odnosima tih veličina. Razmatranja provodimo u kontekstu opće teorije relativnosti koja omogućuje povezivanje fizikalnih i geometrijskih veličina. Ograničenja općenito proizlaze iz energijskih uvjeta, kozmičke cenzure i uvjeta stvaranja crnih rupa te se iskazuju u obliku nejednakosti. Promotrit ćemo važne rezultate u odnosima mase, naboja, angularnog momenta i površine s raznim uvjetima na prostorvrijeme i početni skup podataka. Pobliže ćemo se baviti dinamičnim crnim rupama sa i bez simetrijskog uvjeta, kao i općenitim rotirajućim osnosimetričnim tijelima. Dodatno, objasnit ćemo pojam geometrijske nejednakosti te za početak opisati izoperimetrijsku nejednakost, kao i neke otvorene probleme.

Ključne riječi: opća teorija relativnosti, geometrijske nejednakosti, energijski uvjeti, teorem pozitivne energije, Buchdahlova granica, inverzni srednji tok zakrivljenosti

Bounds on compactness of astrophysical bodies

Abstract

Any kind of gravitating matter is in a state of equilibrium between gravitational contraction and internal pressure. In certain extreme processes, it is possible to compress the matter in such a way that it can no longer resist the gravitational contraction and a gravitational collapse into a black hole occurs. Astrophysical bodies can be completely determined by their mass, charge, angular moment and area, and compactness is established by the relations between those quantities. We are conducting our research in the context of general relativity which enables connections between physical and geometric quantities. Bounds arise from energy conditions, cosmic censorship and conditions on black hole formation and we express them in terms of inequalities. We consider some important results in relations of mass, charge, angular moment and area with various conditions on spacetime and initial dataset. We will closely work on dynamical black holes with and without symmetry assumptions, as well as generic rotating axially symmetric bodies. In addition, we will explain the notion of a geometric inequality and describe firstly the isoperimetric inequality.

Keywords: general relativity, geometric inequalities, energy conditions, positive energy theorem, Buchdahl bound, inverse mean curvature flow

Sadržaj

1 Uvod **1**

1.1 Izoperimetrijska nejednakost 1

1.2 Teorem pozitivne energije 2

1.3 Energijski uvjeti 3

1.4 Geometrijske veličine 4

2 Buchdahlova granica **6**

2.1 Schwarzschildovo rješenje 6

2.2 Buchdahlova granica 10

3 Geometrijske nejednakosti crnih rupa **11**

3.1 Fizikalna pozadina 12

3.2 Veličine u osnoj simetriji 17

3.3 Glavni rezultati 24

3.3.1 Globalna nejednakost 24

3.3.2 Kvazilokalne nejednakosti 26

4 Nejednakosti površine i naboja **27**

4.1 Nejednakost površine i naboja 28

4.2 Površina, naboj i globalna topologija 32

5 Nejednakosti veličine i angularnog momenta **38**

6 Bekensteinove granice **45**

6.1 Elektromagnetizam 46

6.2 Opća teorija relativnosti 56

6.2.1 Nejednakosti veličine, naboja i angularnog momenta 56

6.3 Vremenski simetrični početni podatci 57

7 Zaključak **60**

Dodaci **61**

A Dopunski dokazi **61**

A.1 Operator varijacije δ 61

A.2 Dominantni energijski uvjet 62

B Nekoliko važnih teorema **62**

C Inverzni srednji tok zakrivljenosti **65**

C.1 Gerochova monotonost i Hawkingova masa 66

Literatura **67**

1 Uvod

Kompaktni astrofizički objekti karakterizirani su svojim fizikalnim i geometrijskim veličinama, prije svega masom, nabojem, angularnim momentom i površinom. U ovom radu zanimaju nas veze između tih veličina koje dobijemo metodama opće teorije relativnosti i diferencijalne geometrije te gledamo granične i ekstremalne slučajeve. Te veze su uglavnom geometrijske nejednakosti veličina koje su primjenjive na širok spektar objekata, i jednakosti koje, kao što ćemo vidjeti, vrijede u točno određenim slučajevima. Najjednostavniji objekti u fokusu ovog rada su crne rupe, ali zanimaju nas i astrofizička tijela kod kojih se nije dogodio gravitacijski kolaps, kao što su neutronske zvijezde i bijeli patuljci.

Opća teorija relativnosti je geometrijska teorija gravitacije koju je A. Einstein objavio 1915. godine. Ona predstavlja poopćenje specijalne relativosti i Newtonovog zakona univerzalne gravitacije te ju opisuje kao geometrijsko svojstvo $4-$dimenzionalnog prostorvremena. Središnji objekt opće relativnosti je Einsteinova jednadžba polja:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \ , \tag{1.1}$$

ovdje zapisana u prirodnim jedinicama ($G = c = 1$).

Za uvod instruktivno je pogledati izoperimetrijsku nejednakost kao važan geometrijski rezultat. Iznosimo iskaze energijskih uvjeta i definicije raznih geometrijskih veličina koje ćemo koristiti. Također, pogledat ćemo neke heurističke nejednakosti već spomenutih fizikalnih veličina koje će nam koristiti u daljnjoj analizi, kao što su teorem pozitivne mase i Penroseova nejednakost. Ukratko ćemo opisati i primjer Buchdahlove granice za masu Schwarzschildove crne rupe, iako se u daljenjem razmatranju posvećujemo objektima s nabojem i angularnim momentom.

1.1 Izoperimetrijska nejednakost

Izoperimetrijska nejednakost povezuje granicu nekog područja s površinom ili volumenom geometrijskog objekta koji zatvara to područje. Ovo nam daje informaciju koliku površinu ili volumen možemo obuhvatiti zadanom duljinom granice.

Jednostavnije, u dvije dimenzije krivulja u ravnini s fiksnom duljinom zadovoljava nejednakost povezanu s površinom koju obuhvaća, s tim da je ta površina najveća

kad je krivulja kružnica.

Teorem 1.1. *Neka je L duljina zatvorene, povezane i glatke krivulje Γ u euklidskoj ravnini $\mathbb{R}^2$ i neka je A površina obuhvaćenog područja. Vrijedi:*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} \,. \tag{1.2}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je krivulja kružnica. [1]

Ako je r radijus kružnice, onda je duljina krivulje $L = 2\pi r$, a površina $A = \pi r^2$. Lako se uvjerimo da jednakost vrijedi:

$$\pi r^2 = \frac{\cancel{4}\pi^{\cancel{2}} r^2}{\cancel{4\pi}} = \pi r^2 \,. \tag{1.3}$$

Koncept izoperimetrijske nejednakosti može se proširiti na više dimenzije, u kojima promatramo primjerice nejednakosti povezane s površinom i volumenom geometrijskih tijela.

1.2 Teorem pozitivne energije

Teorem pozitivne energije (ili mase) odnosi se na skup fundamentalnih rezultata koji prije svega postavljaju ograničenje na nenegativnost gravitacijske energije izoliranog sustava, koja je nula jedino kad sustav nema gravitirajućih tijela i polja. Iako su spomenuti pojmovi fizikalne prirode, mogu se formalizirati metodama diferencijalne geometrije, parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i geometrijske teorije mjerenja. Schoen i Yau su prvi iznijeli dokaz teorema, a Witten je kasnije postavio osnove alternativnog dokaza preko spinora.

Teorem 1.2. *Za asimptotski ravan početni skup podataka definiramo energiju i impuls svakog beskonačnog područja kao da je element prostorvremena Minkowskog. Ako je početni skup podataka geodetski potpun i zadovoljava dominantni energijski uvjet, svaki takav element mora biti kauzalna budućnost izvora. Ako bilo koje područje u beskonačnosti ima energiju i impuls jednake nuli, onda je početni skup podataka trivijalan, tj. može se geometrijski smjestiti u prostorvrijeme Minkowskog. [6]*

Drugim riječima, masa prostorvremena treba biti pozitivna ili nula ako i samo ako je prostorvrijeme ravno. Za razumijevanje nam je potrebno nekoliko definicija:

Definicija 1.1. *Početni skup podataka sastoji se od Riemannove mnogostrukosti* $(\mathcal{M}, g)$ *sa simetričnim* $2-$*tenzorskim poljem* K *na* $\mathcal{M}$*. Kažemo da je početni skup podataka* $(\mathcal{M}, g, K)$*:*

1. *vremenski simetričan : ako je* $K = 0$
2. *maksimalan : ako je* $tr^g K = 0$*, tj. u lokalnim koordinatama* $g^{ij} K_{ij} = 0$
3. *zadovoljava dominantni energijski uvjet :* $R - |K|_g^2 + (tr_g K)^2 \geq 2|\nabla_g K - d(tr_g K)|_g$*, gdje je* R *skalarna zakrivljenost.*

Vremenski simetrični podatci moraju imati nenegativnu skalarnu zakrivljenost.

Važna pretpostavka je da sva polja materije moraju zadovoljavati neki energijski uvjet, što smo u eksperimentima uočili da vrijedi za klasičnu materiju.

1.3 Energijski uvjeti

Općenito, energijski uvjeti su skup pretpostavki ili ograničenja na raspodjelu tvari i energije u prostorvremenu; matematički postavljene granice da bi se osigurala nenegativnost mase i energije.
U općoj teoriji relativnosti, raspodjela energije, momenta i naprezanja opisana je tenzorom energije i impulsa $T^{\mu\nu}$. Energijski uvjeti su zapravo ograničenja na svojstvene vektore i vrijednosti tog tenzora.
Jedinično vremensko vektorsko polje $\mathbf{X}$ možemo interpretirati kao da definira svjetske linije nekih idealnih opažača. Tada skalarno polje

$$\rho = T_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \tag{1.4}$$

možemo interpretirati kao gustoću mase i energije koju mjeri opažač u svakom događaju na svojoj svjetskoj liniji. Vektorsko polje s komponentama $-T^\mu{}_\nu X^\nu$ predstavlja impuls. Ako imamo proizvoljno svjetlosno vektorsko polje $\mathbf{l}$, skalarno polje $T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu$ je granični slučaj gustoće mase i energije.

1. **Svjetlosni energijski uvjet**
   Za svaki buduće orjentirani svjetlosni vektor $\mathbf{l}$ vrijedi:

$$T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \geq 0 \ . \tag{1.5}$$

2. **Slabi energijski uvjet**

   Za svako vremensko vektorsko polje $\mathbf{X}$, gustoća materije koju mjere odgovarajući opažači je uvijek nenegativna,

$$\rho = T_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \geq 0 \,. \tag{1.6}$$

3. **Dominantni energijski uvjet**

   Dominantni uvjet nalaže da, osim što slabi uvjet treba vrijediti, za svako buduće orjentirano kauzalno vektorsko polje (ili vremensko ili svjetlosno) $\mathbf{Y}$, vektorsko polje $-T^\mu{}_\nu Y^\nu$ mora biti buduće orjentirani kauzalni vektor. To znači da se masa i energija ne mogu izmjeriti s brzinom većom od c.

4. **Snažni energijski uvjet**

   Snažni energijski uvjet kaže da za svako vremensko vektorsko polje $\mathbf{X}$ trag plimnog tenzora koji mjere opažači mora biti nenegativan:

$$\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\Big) X^\mu X^\nu \geq 0 \,. \tag{1.7}$$

   Postoje konfiguracije koje narušavaju snažni energijski uvjet, primjerice skalarno polje s pozitivnim potencijalom.

1.4 Geometrijske veličine

Prije nego počnemo s detaljnom analizom nejednakosti, potrebne su nam definicije pojmova koje ćemo koristiti. Prvo dajemo definiciju asimptotskih krajeva.

Definicija 1.2. *Promatramo početni skup podataka $(\mathcal{M}, g, K)$ koje može, ali ne mora imati granicu, dimenzije n. Neka je $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ kompaktan podskup takav da svaka povezana komponenta komplementa $\mathcal{M} - \mathcal{N}$ je difeomorfna komplementu zatvorene kugle u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Takve povezane komponente zovu se asimptotski krajevi $\mathcal{M}$.*

Također, za diskusiju su nam bitni pojmovi *ploha*. Općenito, hiperploha u 4-dimenzionalnoj mnogostrukosti je $3-$dimenzionalna podmnogostrukost koja može biti vremenska, prostorna ili svjetlosna. Može biti zadana parametarskim jednadžbama ili restrikcijom koordinata. Sve počinje od minimalne plohe, koja se definira kao ploha koja lokalno smanjuje svoju površinu, tj. srednja zakrivljenost joj je nula.

Također, minimalna ploha je vanjska (eng. outermost) ako nije odvojena od beskonačnosti nekom drugom minimalnom plohom. Mi se općenito bavimo kompaktnim $2-$plohama $\mathcal{S}$ koje su u $3-$dimenzionalnim hiperplohama S.

Definicija 1.3. *Kažemo da je ploha zatvorena ako je kompaktna i ima granicu.*

Definicija 1.4. *Zatvorena prostorna ploha S u prostorvremenu $(\mathcal{M}, g)$ je zatočena ako buduće orjentirane svjetlosne zrake koje izlaze iz S konvergiraju.*

Definicija 1.5. *Kažemo da je $2-$ploha koja je upisana u $4-$dimenzionalnu mnogostrukost marginalno zatočena ako je ekspanzija buduće orjentiranih izlaznih svjetlosnih geodezika ortogonalna na plohu nula.*

Drugim riječima, svjetlosni geodezici koji se emitiraju prema van okomito na plohu ne konvergiraju niti divergiraju, nego ostaju paralelni s plohom.

Definicija 1.6. *Promatramo fiksirani asimptotski kraj Σ_e. Kompaktna orjentirana, ne nužno povezana ploha $\mathcal{S}$ zaklanja kraj Σ_e ako je granica otvorenog i povezanog područja Ω koja sadržava taj asimptotski kraj i nijedan drugi. Tada kažemo da je Ω zaklonjeno područje.*

2 Buchdahlova granica

Buchdahlov teorem precizno određuje maksimalnu održivu gustoću obične gravitacijske tvari. Daje nejednakost na omjer mase i radijusa koja mora biti zadovoljena za statične, sferno-simetrične konfiguracije tvari pod određenim uvjetima. Točnije, za radijus $\mathcal{R}$ i masu m mora biti zadovoljeno:

$$m \leq \frac{4}{9}\mathcal{R} \tag{2.1}$$

u prirodnim jedinicama. Rezultat dobijemo iz vakuumskog Schwarzschildovog rješenja Einsteinove jednadžbe i unutarnjeg rješenja za zvijezdu koja se aproksimira idealnim fluidom. Idealni fluid može se u potpunosti opisati gustoćom u mirujućem sustavu ρ i izotropnim tlakom P. Dodatno, fluid nema viskoznost te ne podliježe smicanju i toplinskoj vodljivosti. Pretpostavlja se pozitivnost gustoće i tlaka. Koristimo i Tolman-Oppenheimer-Volkoffova (TOV) jednadžba koju koristimo u dokazivanju Buchdahlove granice. Jednakost u (2.1) vrijedi za Schwarzschildovo prostorvrijeme.

2.1 Schwarzschildovo rješenje

Rješenje Einsteinove jednadžbe koje opisuje vanjsko gravitacijsko polje statičnog sferno-simetričnog tijela opisujemo četverodimenzionalnom Lorentzovom metrikom čiji Riccijev tenzor iščezava, koja je statična i sferno-simetrična.
Prostorvrijeme je stacionarno ako ima Killingovo vektorsko polje ξ^μ koje je vremenskog tipa, a statično ako je stacionarno i postoji prostorna hiperploha Σ na koju je ξ^μ ortogonalno. Iz uvjeta statičnosti dobivamo neovisnost prostornih članova metrike o vremenu i nedostatak mješanog člana tipa $dtdx^\mu$ te iz sferne simetrije dobivamo invarijantnost na rotacije. Općenita statična sferno simetrična metrika može se zapisati u obliku:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\ . \tag{2.2}$$

Trebalo bi naglasiti da ovakav koordinatni sustav, uz probleme na polovima ($\theta = 0, \pi$), u točkama gdje je $\xi^\mu = 0$ ili $\nabla_\mu r = 0$ također nailazi na probleme.
Dobivanje Schwarzschildovog rješenja svodi se na određivanje 10 funkcija – komponenata metrike $g_{\mu\nu}$ – od 4 varijable (koordinate), te određivanje dvaju funkcija $f(r)$ i $h(r)$. Potreban nam je Riccijev tenzor $R_{\mu\nu}$ metrike, koji se dobije iz komponenti Ri-

emannovih tenzora $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\gamma}$, koji se pak dobiju iz Christoffelovih simbola $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$. Želimo dobiti vakuumsko rješenje Einsteinove jednadžbe $R_{\mu\nu} = 0$. Točnije, nakon računa Riccijevog tenzora, svaku neovisnu komponentu izjednačimo s nulom. Komponenta $R_{\phi\phi}$ je proporcionalna s komponentom $R_{\theta\theta}$ te je nećemo razmatrati. Krećemo od vremenske:

$$R_{tt} = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{h(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h^2(r)} - \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)h(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)} = 0 \,, \tag{2.3}$$

iz čega možemo dobiti:

$$\frac{1}{2}f''(r) = \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)} - \frac{1}{r}f'(r) \,. \tag{2.4}$$

Nadalje, imamo

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)f(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)} + \frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} \,, \tag{2.5}$$

iz čega također dobivamo:

$$\frac{1}{2}f''(r) = \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)} + \frac{1}{r}\frac{f(r)}{h(r)} \cdot h'(r) \,. \tag{2.6}$$

Izjednačavanjem komponenti R_{tt} i R_{rr} dobivamo vezu $f(r)$ i $h(r)$:

$$f(r) = \frac{C}{h(r)} \,, \tag{2.7}$$

te reskaliranjem vremenske koordinate, možemo postaviti $C = 1$. Nadalje iz θ komponente imamo

$$R_{\theta\theta} = 0 = -\frac{r}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{r}{2}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + 1 - \frac{1}{h(r)} \,, \tag{2.8}$$

te korištenjem izraza (2.7), konačno dobivamo oblik funkcije $f(r)$:

$$f(r) = 1 + \frac{C}{r} \,. \tag{2.9}$$

Metriku možemo pisati na sljedeći način:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{C}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \ . \tag{2.10}$$

Schwarzschildovo rješenje je asimptotski ravno, tj. kako $r \to \infty$, komponente metrike se približavaju analognim u prostorvremenu Minkowskog u sfernim koordinatama. To omogućuje interpretaciju Schwarzschildove metrike kao vanjskog gravitacijskog polja izoliranog tijela. Za konstantu C promatra se ponašanje probnog tijela u režimu slabog polja ($r \to \infty$) s ponašanjem u Newtonovoj teoriji gravitacije. Za velike vrijednosti radijalne koordinate r, ponašanje u Schwarzschildovoj metrici s parametrom C slaže se s ponašanjem u newtonovskom gravitacijskom polju mase $m = -\frac{C}{2}$ te se $-\frac{C}{2}$ interpretira se kao ukupna masa Schwarzshildovog polja pa se metrika piše u obliku:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \ . \tag{2.11}$$

Što se tiče unutarnjih rješenja, razmatramo statična sferno-simetrična rješenja Einsteinove jednadžbe sa tenzorom energije i impulsa koji opisuje idealni fluid:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \ . \tag{2.12}$$

Da bi bila kompatibilna sa statičnom simetrijom prostorvremena, 4-brzina u^μ mora biti u smjeru statičnog Killingovog vektorskog polja ξ^μ:

$$u^\mu = -f^{-\frac{1}{2}}(r)(dt)^\mu \ . \tag{2.13}$$

Tražimo rješenja mogućih unutarnjih izvora fluidnog karaktera za vanjsku Schwarzschildovu metriku, koji opisuju strukturu statičnih fluidnih objekata kao što su zvijezde. Za rješavanje Einsteinove jednažbe, potrebno je prvo izračunati Riccijev skalar.

$$\begin{aligned} R = -\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{2}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)} + \frac{1}{2}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)} \\ - \frac{2}{r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{2}{r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + \frac{2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Rješavamo Einsteinovu jednadžbu komponentu po komponentu:

$$8\pi\rho = \frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) , \tag{2.15}$$

$$8\pi P = \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)f(r)} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) , \tag{2.16}$$

$$8\pi P = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)} - \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)} + \frac{1}{2r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{2r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} . \tag{2.17}$$

Jednadžba (2.15) ovisi samo o $h(r)$ pa iz nje možemo dobiti:

$$h(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} , \tag{2.18}$$

gdje je $m(r)$ masa zvijezde zadana jednadžbom:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + a . \tag{2.19}$$

Postavimo $a = 0$ da bismo izbjegli singularitet u $r = 0$. Budući da hiperploha Σ mora biti prostornog tipa, nužan uvjet statičnosti je $h(r) \geq 0$, tj. $r \geq 2m(r)$. Ako je $\rho > 0$ za $r > \mathcal{R}$, rješenje za $h(r)$ spaja se se sa Schwarzschildovim vakuumskim rješenjem s ukupnom masom preko

$$m = m(\mathcal{R}) = 4\pi \int_0^{\mathcal{R}} \rho(r)r^2 dr . \tag{2.20}$$

Funkciju $f(r)$ iz metrike pišemo kao $f(r) = e^{2\phi(r)}$, gdje je $\phi(r)$ proizvoljna funkcija od r. TOV jednadžba glasi:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P + \rho}{r}\frac{4\pi r^3 P + m(r)}{r - 2m(r)} , \tag{2.21}$$

što je jednadžba hidrostatske ravnoteže zvijezde. Konačno, za statičnu i sferno-simetričnu fluidnu zvijezdu, geometrija prostorvremena opisana je metrikom:

$$ds^2 = -e^{2\phi}dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) . \tag{2.22}$$

Nužan i dovoljan uvjet stabilnosti je zadovoljena TOV jednadžba.

Razmatramo konfiguraciju konstantne gustoće ρ_0 nestlačivog fluida.

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \, . \end{cases} \tag{2.23}$$

Za takvu raspodjelu gustoće, masa je zadana sa:

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \, , \tag{2.24}$$

a ukupna masa:

$$m = 4\pi \int_0^{\mathcal{R}} \rho_0 r^2 dr = \frac{4\pi}{3}\rho_0 \mathcal{R}^3 \tag{2.25}$$

Dalje integriramo TOV jednažbu (2.21) i postavljamo $P(\mathcal{R}) = 0$:

$$P(r) = \rho_0 \frac{(3 - 8\pi r^2 \rho_0)^{\frac{1}{2}} - (3 - 8\pi \mathcal{R}^2 \rho_0)^{\frac{1}{2}}}{3\,(3 - 8\pi \mathcal{R}^2 \rho_0)^{\frac{1}{2}} - (3 - 8\pi r^2 \rho_0)^{\frac{1}{2}}} \, . \tag{2.26}$$

Zapisujemo gornji izraz preko mase i postavljamo $r = 0$, tj. gledamo tlak u središtu

$$P_c = \rho_0 \frac{1 - \left(1 - \frac{2m}{\mathcal{R}}\right)^{\frac{1}{2}}}{3\left(1 - \frac{2m}{\mathcal{R}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \, . \tag{2.27}$$

Središnji tlak postaje beskonačan kad je:

$$3\left(1 - \frac{2m}{\mathcal{R}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \, , \tag{2.28}$$

tj. kad je:

$$\mathcal{R} = \frac{9}{4} m \, . \tag{2.29}$$

Bitno je primijetiti pretpostavke koje smo koristili: za gustoću $\rho(r) = \rho_0$ =konst. i $\rho_0 > 0$ te za tlak $P(r) \geq 0$ i $P'(r) < 0$.

2.2 Buchdahlova granica

U općoj relativnosti, zvijezde konstantne gustoće s masom $m > 4\mathcal{R}/9$ ne mogu postojati. Drugim riječima, najveća moguća masa zvijezde konstantne gustoće ρ_0 dana

je izrazom

$$m_{max} = \frac{4}{9}\mathcal{R} = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \rho_0^{-\frac{1}{3}} M^{\frac{1}{3}}$$
$$m_{max} = \frac{4}{9(3\pi)^{\frac{1}{2}}} \rho_0^{-\frac{1}{2}} \tag{2.30}$$

gdje je korištena veza mase i radijusa iz (2.25). Masa zvijezde ima gornju granicu definiranu s

$$m \leq \frac{4}{9}\mathcal{R} \tag{2.31}$$

koja je tzv. Buchdahlova granica. Jednakost se postiže samo u slučaju unutarnjeg Schwarzschildovog rješenja kada središnji tlak divergira. Time se usput krši jaki energetski uvjet.

Postojanje gornje granice na masu zvijezde zadanog radijusa $\mathcal{R}$ već dolazi iz uvjeta $h(r) \geq 0$, što daje nužan uvjet statičnosti:

$$m \leq \frac{\mathcal{R}}{2}\,, \tag{2.32}$$

ali Buchdahlov teorem pruža oštriju granicu.

3 Geometrijske nejednakosti crnih rupa

Opća teorija relativnosti je geometrijska teorija, u kojoj se geometrijske nejednakosti prirodno pojavljuju. Mnoge od njih su u istom duhu kao i izoperimetrijska nejednakost. Često je slučaj da veličine imaju jasnu fizikalnu interpretaciju te očekivana ponašanja gravitacijskih polja i tvari predlažu netrivijalne geometrijske nejednakosti. U našoj analizi oslanjamo se na teorem pozitivne mase. Za uobičajene astrofizičke objekte, općenita svojstva tvari imaju kompliciranu strukturu te je teže pronaći odgovarajuće nejednakosti, dok su crne rupe u tom kontekstu poprilično jednostavni objekti koji igraju ulogu "elementarnih čestica" u teoriji. Teorem o jedinstvenosti crnih rupa kaže da u elektrovakuumu crne rupe karakteriziramo s trima parametrima: površinom A, angularnim momentom J i nabojem Q. Masu crne rupe m dobijemo direktno iz tih parametara kojima je jednoznačno određena. Prva i najvažnija nejednakost je Penroseova:

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}\,. \tag{3.1}$$

Točnije, ako je $(\mathcal{M}, g)$ asimptotski ravna Riemannova $3-$mnogostrukost s nenegativnom skalarnom zakrivljenosti i Arnowitt - Deser - Misner (ADM)[1] masom m, gdje je A površina krajnje (outermost) minimalne plohe s proizvoljnim brojem povezanih komponenti, vrijedi (3.1). Ta nejednakost je čisto geometrijska činjenica i odgovara slučaju potpune $3-$dimenzionalne prostorne geodetske podmnogostrukosti u $(3+1)-$dimenzionalnom prostorvremenu. Takva podmnogostrukost se često zove vremenski simetričan početni skup podataka za prostorvrijeme. Zahtjev da $(\mathcal{M}, g)$ ima nenegativnu skalarnu zakrivljenost ekvivalentan je zahtjevu da prostorvrijeme zadovoljava dominantni energijski uvjet. Jednakost u (3.1) vrijedi ako je prostorvrijeme izometrično sa prerezom Schwarzschildovog prostorvremena izvan vanjske minimalne plohe, tj. izvan horizonta događaja.
Također, nejednakosti:

$$m^2 \geq \frac{Q^2 + \sqrt{Q^4 + 4J^2}}{2} \,, \tag{3.2}$$

$$A \geq 4\pi\sqrt{Q^4 + 4J^2} \,, \tag{3.3}$$

igraju važnu ulogu. Jednakosti u (6.4) i (3.3) vrijede samo za ekstremalne crne rupe. Ekstremalne crne rupe, po definiciji, imaju površinsku gravitaciju nula, a to povlači specifičan odnos među njihovim parametrima. Naime, crne rupe općenito nisu stacionarne te se često ne mogu opisati s nekolicinom parametara. Svakako se izrazi (3.1) - (3.3) mogu prenijeti u potpuno dinamične slučajeve jer su povezani s globalnom evolucijom Einsteinovih jednadžbi i kozmičkom cenzurom.
Velik problem je definicija parametara parametara crne rupe, posebno angularnog momenta dinamične crne rupe, ali za osnosimetrične, J je dobro definiran i očuvan u vakuumu.

3.1 Fizikalna pozadina

Najvažnija nejednakost za dinamične crne rupe je upravo Penroseova koja povezuje globalna svojstva gravitacijskog kolapsa s geometrijskim nejednakostima na početne uvjete. Pretpostavimo da u gravitacijskom kolapsu vrijedi:

1. Gravitacijski kolaps rezultira crnom rupom (slaba kozmička cenzura).

2. Prostorvrijeme u konačnici postaje stacionarno. Nakon nekog vremena sva ma-

[1] Ukupna masa asimptotski ravnih prostorvremena

terija je upala u crnu rupu tako da je sve oko crne rupe elektrovakuum.

Preispitajmo drugu točku. Teorem jedinstvenosti crne rupe povlači da je konačno stanje dano Kerr-Newmanovim rješenjem. Označimo s m_0, A_0, J_0, Q_0 masu, površinu, angularni moment i naboj konačne Kerr-Newmanove crne rupe. Da bi je dobro opisali, mora vrijediti nejednakost

$$d = m_0^2 - Q_0^2 - \frac{J_0^2}{m_0^2} \geq 0 \,, \tag{3.4}$$

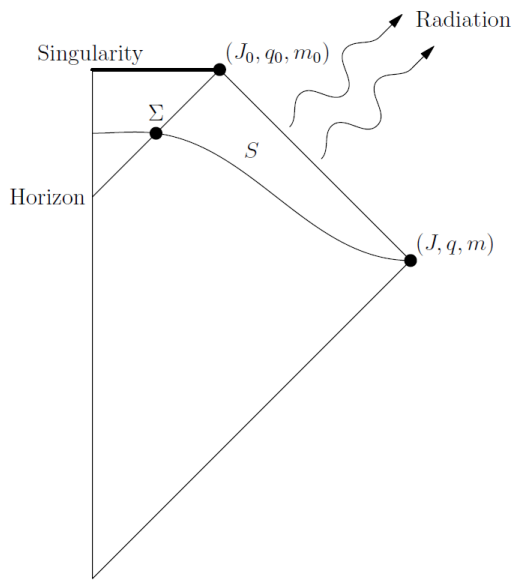
što je ekvivalentno nejednakosti

$$m_0^2 \geq \frac{Q_0^2 + \sqrt{Q_0^4 + 4J_0^2}}{2} \,. \tag{3.5}$$

Kerr-Newmanova crna rupa je ekstremalna ako u (3.5) vrijedi jednakost. Površina crne rupe dana je sa:

$$A_0 = 4\pi\Big(2m_0^2 - Q_0^2 + 2m_0\sqrt{d}\Big) \,, \tag{3.6}$$

koja ima smisla jedino ako je nejednakost (3.5) zadovoljena. Penroseov argument u gravitacijskom kolapsu promatra Cauchyjevu plohu S u prostorvremenu u kojem se kolaps već dogodio. Neka je Σ sjecište horizonta događaja i plohe S i neka je



Slika 3.1: Shematski prikaz gravitacijskog raspada. Preuzeto iz: [10]

A njegova površina. Neka su (m, Q, J) ukupna masa, naboj i angularni moment u prostornoj beskonačnosti. Sve veličine se mogu dobiti iz početne plohe S. Teorem o

evoluciji površine crne rupe (B.2) kaže da se površina crne rupe povećava s vremenom:

$$A_0 \geq A \,, \tag{3.7}$$

i budući da gravitacijski valovi odnose pozitivnu energiju, ukupna masa prostorvremena bi trebala biti veća od mase crne rupe:

$$m \geq m_0 \,. \tag{3.8}$$

Površina preostale crne rupe A_0 dana je jednadžbom (3.6) preko konačnih parametara i monotono je rastuća funkcija od m_0. Koristeći tu monotonost i nejednakosti (3.7) i (3.8), dobivamo:

$$A \leq A_0 \leq 4\pi\left(2m^2 - Q_0^2 + 2m\Big(m^2 - Q^2 - \frac{J_0^2}{m^2}\Big)^{1/2}\right) . \tag{3.9}$$

Budući da nam nisu poznati parametri Q_0 i J_0, a svakako se pojavljuju s negativnim predznakom, možemo pisati:

$$A \leq A_0 \leq 4\pi\left(2m^2 - Q_0^2 + 2m\Big(m^2 - Q^2 - \frac{J_0^2}{m^2}\Big)^{1/2}\right) \leq 16\pi m^2 \,. \tag{3.10}$$

Jedino pitanje koje preostaje je procjena površine od plohe Σ preko geometrijskih veličina te nam treba cijelo prostorvrijeme da znamo gdje je horizont događaja. Pretpostavimo da ploha S sadrži buduću zarobljenu $2-$plohu Σ_0. Općenito, Σ_0 bi trebala biti sadržana u Σ, ali to ne znači da je nužno manja od nje. Ako uzmemo sve plohe $\tilde{\Sigma}$ koje okružuju Σ_0, s $A_{min}(\Sigma_0)$ označujemo infimum svih površina takvih ploha. Tada imamo $A_{min}(\Sigma_0) \leq A(\Sigma)$. Prednost takve konstrukcije je da $A_{min}(\Sigma_0)$ možemo dobiti iz Cauchyjeve plohe S. Kombinacijom nejednakosti opet dobivamo Penroseovu:

$$m \geq \sqrt{\frac{A_{min}(\Sigma_0)}{16\pi}} \tag{3.11}$$

Daljnje pitanje je kako uključiti parametre Q i J u takvu nejednakost, tj. kako se odnose konačni i početni parametri. Ako materija nije nabijena, onda je naboj očuvan:

$$Q = Q_0 \,, \tag{3.12}$$

te imamo verziju nejednakosti s nabojem:

$$A_{min}(\Sigma_0) \leq A \leq 4\pi\left(2m^2 - Q_0^2 + 2m\Big(m^2 - Q^2\Big)^{1/2}\right) . \tag{3.13}$$

Angularni moment je malo kompliciraniji jer općenito nije očuvan. Osna simetrija daje iznimku u vakuumskim prostorvremenima:

$$J = J_0 . \tag{3.14}$$

Osnosimetrični gravitacijski valovi ne prenose angularni moment. Za nevakuumska prostorvremena to ne vrijedi te materija može prenositi J i u osnoj simetriji. U elektrovakuumu, zbroj gravitacijskog i elektromagnetskog angularnog momenta je očuvan. Ukupna Penroseova nejednakost za osnosimetrične elektrovakuumske početne podatke glasi:

$$A_{min}(\Sigma_0) \leq A \leq 4\pi\left(2m^2 - Q_0^2 + 2m\Big(m^2 - Q^2 - \frac{J^2}{m^2}\Big)^{1/2}\right) \tag{3.15}$$

gdje se angularni moment može dobiti iz bilo koje zatvorene plohe koja okružuje crnu rupu. Nejednakost (3.15) implicira granicu:

$$m^2 \geq \frac{Q^2 + \sqrt{Q^4 + 4J^2}}{2} . \tag{3.16}$$

Ova nejednakost se može gledati kao pojednostavljena verzija Penroseove nejednakosti, jedina razlika je da se ne pojavljuje površina horizonta. Nejednakost je također globalna; prije svega koristi masu prostorvremena te globalne restrikcije na početne podatke: osnu simetriju i elektrovakuum. Površina A, angularni moment J i naboj Q su kvazilokalni u osnoj simetriji jer nose informaciju o ograničenoj domeni prostorvremena. Pitanje je, zadovoljavaju li dinamične crne rupe kvazilokalne nejednakosti, čija je prednost bolja kontrola nad dinamikom crne rupe.

Energiju gravitacijskog polja ne možemo lokalno opisati, ali možemo pokušati kvazilokalno. Po formuli (3.6) za površinu, želimo napisati izraz za masu:

$$m_{bh} = \sqrt{\frac{A}{16\pi} + \frac{Q^2}{2} + \frac{\pi(Q^4 + 4J^2)}{A}} , \tag{3.17}$$

gdje smo izbacili indekse 0 i masu crne rupe označili s m_{bh} Ovaj izraz poznat je kao Christodoulouova masa crne rupe. No opisuje li i kvazilokalnu masu nestacionarne crne rupe? Gledamo odnos mase crne rupe i mase prostorvremena:

$$m \geq m_{bh} \ . \tag{3.18}$$

Ova nejednakost implicira Penroseovu, ali za slučaj više crnih rupa ne vrijedi. Izraz (3.17) trivijalno zadovoljava i (3.16). Ako prihvatimo (3.17) kao točan izraz, onda nam on daje kvazilokalnu verziju od (3.16).

U evoluciji mase crne rupe m_{bh}, po teoremu evolucije površine (B.2), površina horizonta će rasti. Pretpostavimo li osnu simetriju i elektrovakuum, angularni moment će biti očuvan na kvazilokalnoj razini. Fizikalno, i masa crne rupe se treba povećavati s vremenom. Uzet ćemo vremensku derivaciju od m_{bh}. Prije svega, zapisat ćemo prvi zakon termodinamike

$$\delta m_{bh} = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \tag{3.19}$$

gdje su:

$$\kappa = \frac{1}{4m_{bh}}\left(1 - \left(\frac{4\pi}{A}\right)^2 (Q^4 + 4J^2)\right) , \tag{3.20}$$

površinska gravitacija,

$$\Omega_H = \frac{4\pi J}{A m_{bh}} , \tag{3.21}$$

kutna brzina crne rupe, i

$$\Phi_H = \frac{4\pi(m_{bh} + \sqrt{d})Q}{A} \tag{3.22}$$

potencijal na horizontu. Pojavljuje se ranije definirani d, koji zapisan preko A, J i Q glasi:

$$d = \frac{1}{m_{bh}^2}\left(\frac{A}{16\pi}\right)^2 \left(1 - (Q^4 + 4J^2)\left(\frac{4\pi}{A}\right)^2\right) . \tag{3.23}$$

Po našim pretpostavkama, dobivamo odnos derivacija mase i površine (po vremenu vanjskog opažača):

$$\dot{m}_{bh} = \frac{\kappa}{8\pi}\dot{A} , \tag{3.24}$$

gdje smo koristili činjenicu da su naboj i angularni moment očuvani. Po teoremu evolucije površine (B.2) imamo

$$\dot{A} \geq 0 \ . \tag{3.25}$$

Vremenska derivacija mase m_{bh} je također pozitivna ako i samo ako je $\kappa \geq 0$, tj.:

$$4\pi\sqrt{Q^4 + 4J^2} \leq A \ . \tag{3.26}$$

Možemo zaključiti da bi nejednakost (3.26) trebala biti zadovoljena za sve osnosimetrične crne rupe. Jednakost je zadovoljena samo za ekstremalnu Kerr-Newmanovoj crnu rupu. Konačno, možemo reći da je veličina crne rupe ograničena odozdo nabojem i angularnim momentom. Također imamo netrivijalnu monotonu veličinu m_{bh} u elektrovakuumu.
Fizikalni argumenti koji podupiru nejednakost (3.26) slabiji su od onih za Penroseovu nejednakost. Kršenje (3.26) bi samo ukazalo da kvazilokalna masa nije dobra za opis nestacionarnih crnih rupa.

3.2 Veličine u osnoj simetriji

Osna simetrija ima važnu ulogu u nejednakostima s angularnim momentom. Prije svega, osna simetrija osigurava očuvanje angularnog momenta na globalnoj razini, a kvazilokalni angularni moment se može definirati samo u osnoj simetriji. Ta svojstva su usko vezana za vakuumska prostorvremena jer Komarov integral osigurava i očuvanje veličine i definiciju. Za nevakuumska prostorvremena možemo dobiti dobar izraz, ali više nema očuvanja gravitacijskog angularnog momenta. Zato nam je bitna osna simetrija jer je u elektrovakuumu ukupni angularni moment očuvan.

Definicija 3.1. *Prostorvrijeme $(\mathcal{M}, g)$ je osno simetrično ako njegova grupa izometrija ima podgrupu izomorfnu s $SO(2)$.*

Neka je $\mathcal{M}$ $4-$dimenzionalna mnogostrukost s metrikom $g_{\mu\nu}$ i Levi-Civita konekcijom ∇_μ. Promatramo proizvoljni tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$ koji zadovoljava očuvanje:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{3.27}$$

Ako prostorvrijeme ima Killingovo vektorsko polje ξ^μ, onda vektor

$$K_\mu = T_{\mu\nu}\xi^\nu \ , \tag{3.28}$$

ima iščezavajuću divergenciju,

$$\nabla_\mu K^\mu = 0 \,. \tag{3.29}$$

Ova jednadžba nam daje integralni zakon očuvanja preko Stokesovog teorema. Dalje ćemo umjesto tenzora koristiti diferencijalne forme. Neka je $\mathbf{K}$ $1-$forma definirana preko (3.28). Onda je (3.29) zapisana kao:

$$d * \mathbf{K} = 0 \,, \tag{3.30}$$

gdje je d vanjska derivacija, a dual $p-$forme je definiran u odnosu na volumni element $\epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}$ s obzirom na metriku $g_{\mu\nu}$ formulom:

$$*\alpha_{\mu_1\ldots\mu_{4-p}} = \frac{1}{p!}\alpha^{\nu_1\ldots\nu_p}\epsilon_{\nu_1\ldots\nu_p\mu_1\ldots\mu_{4-p}} \,. \tag{3.31}$$

Neka je Ω proizvoljna $4-$dimenzionalno, orijentabilno područje u $\mathcal{M}$ i neka je $\partial\Omega$ njena $3-$dimenzionalna granica koja može imati nepovezane komponente. Onda, koristeći Stokesov teorem imamo

$$0 = \int_\Omega d * \mathbf{K} = \int_{\partial\Omega} *\mathbf{K} \,. \tag{3.32}$$

Gledamo neku prostornu $3-$plohu S. Očuvana veličina koja odgovara Killingovom vektoru ξ^μ u odnosu na S je:

$$K(S) = \int_S *\mathbf{K} \,. \tag{3.33}$$

Za malo bolji uvid, recimo da je Ω vremenski cilindar takav da je granica $\partial\Omega$ sastavljena od donje i gornje plohe S_1 i S_2 i vremenskog dijela $\mathcal{C}$. Imamo

$$0 = \int_{\partial\Omega} *\mathbf{K} = K(S_1) - K(S_2) + \int_{\mathcal{C}} *\mathbf{K} \,. \tag{3.34}$$

Integral po vremenskoj krivulji $\mathcal{C}$ je tok od $K(S)$ te se gornja jednadžba može interpretirati kao zakon očuvanja $K(S)$.

Ako je Killingov vektor ξ^μ također simetrija tenzora $T_{\mu\nu}$,

$$\pounds_\xi T_{\mu\nu} = 0 \,, \tag{3.35}$$

gdje je $\pounds$ Liejeva derivacija, onda sljedeći vektor ima iščezavajuću divergenciju,

$$\hat{K}_\mu = 8\pi(T_{\mu\nu}\xi^\nu - \frac{1}{2}T\xi_\mu) \ , \tag{3.36}$$

gdje je T trag od $T_{\mu\nu}$.

Očuvane veličine $K(S)$ prirodno su definirane kao integrali po prostornim $3-$plohama, a u ravnom prostorvremenu možemo ih prebaciti u granične integrale po $2-$plohama. U zakrivljenim prostorima općenito ne možemo preći iz prostornih u granične integrale, osim u slučaju elektromagnetskog polja kao što ćemo vidjeti, te se prije svega posvećujemo naboju. Električni naboj predstavlja "očuvani naboj" u zakrivljenom prostorvremenu. Maxwellove jednadžbe dane su sa:

$$\begin{aligned} \nabla^\mu F_{\mu\nu} &= -4\pi j_\nu \ , \\ \nabla_{[\mu} F_{\nu\alpha]} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.37}$$

Maxwellove jednadžbe napisane u obliku formi dane su sa:

$$\begin{aligned} d * \mathbf{F} &= 4\pi * \mathbf{j} \ , \\ d\mathbf{F} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.38}$$

Tenzor energije i impulsa zadan je preko elektromagnetskog tenzora:

$$T^{EM}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\gamma}F^{\lambda\gamma}\right) \ . \tag{3.39}$$

Neka je $\mathcal{S}$ zatvorena orijentabilna $2-$ploha upisana u $\mathcal{M}$. Električni naboj je definiran integralom:

$$Q(\mathcal{S}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} *\mathbf{F} \ . \tag{3.40}$$

Neka je S $3-$ploha s granicom $\mathcal{S}$, pa koristeći Stokesov teorem i Maxwellove jednadžbe, imamo

$$Q(\mathcal{S}) = \int_S *\mathbf{j} \ . \tag{3.41}$$

Iz jednadžbi (3.38) dobijemo izraz analogan (3.30):

$$d * \mathbf{j} = 0 \ . \tag{3.42}$$

Uzmemo li opet područje Ω i Stokesov teorem, dobit ćemo izraz analogan s (3.34) za struju:

$$0 = \int_{S_1} *\mathbf{j} - \int_{S_2} *\mathbf{j} + \int_{\mathcal{C}} *\mathbf{j} \ . \tag{3.43}$$

Konačno, uz (3.41) dobivamo:

$$Q(S_1) - Q(S_2) = \int_{\mathcal{C}} *\mathbf{j} \ , \tag{3.44}$$

što je zakon očuvanja naboja. U tom izrazu imamo integrale po $2-$plohama, u suprotnosti s izrazom (3.34) gdje su integrali po $3-$plohama. To je zato što imamo Maxwellovu jednadžbu (3.38) koja nam to omogućuje. Kad nema struje, naboj je strogo očuvan.

$$Q(\mathcal{S}_1) = Q(\mathcal{S}_2) \tag{3.45}$$

Kao i ranije, ξ^μ je Killingov vektor u osnoj simetriji. Orbite vektorskog polja ξ^μ su ili točke ili kružnice. Pretpostavljamo da je skup točaka orbite Γ, tj. os simetrije, ploha, stoga je ξ^μ prostoran oko Γ. Nadalje pretpostavljamo da je uvijek prostoran izvan Γ. Ako to ne bi bilo zadovoljeno, imali bismo zatvorene kauzalne krivulje, što izbjegavamo zato što ne podržavaju stacionarnost i očuvanje veličina. Formu označavamo podebljanim znakom $\boldsymbol{\xi}$, a kvadrat norme sa ξ.

Promatramo Einsteinove jednadžbe na osnosimetričnom prostorvremenu,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \ . \tag{3.46}$$

Komarov integral Killingovog polja definiran je po dvodimenzionalnoj plohi $\mathcal{S}$ na sljedeći način:

$$J(\mathcal{S}) = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{S}} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \nabla^\lambda \xi^\gamma = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{S}} *d\boldsymbol{\xi} \ , \tag{3.47}$$

te preko Stokesovog teorema dobijemo:

$$J(\mathcal{S}) = \frac{1}{16\pi} \int_{S} d * d\boldsymbol{\xi} \ , \tag{3.48}$$

gdje je S $3-$ploha s rubom $\mathcal{S}$. Definiramo $1-$formu $\mathbf{K}$ na način:

$$\mathbf{K} = K_\mu = R_{\mu\nu} \xi^\nu \ , \tag{3.49}$$

koju možemo napisati preko tenzora energije i impulsa:

$$K_\mu = 8\pi(T_{\mu\nu}\xi^\nu - \frac{1}{2}T\xi_\mu) \ . \tag{3.50}$$

Nadalje, dobijemo zakon očuvanja angularnog momenta u osnoj simetriji na sličan način kao i zakon očuvanja naboja:

$$J(\mathcal{S}_1) - J(\mathcal{S}_2) = \frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{C}} *\mathbf{K} \ . \tag{3.51}$$

Desna strana predstavlja promjenu momenta gravitacijskog polja. U vakuumu imamo strogo očuvanje,

$$J(\mathcal{S}_1) = J(\mathcal{S}_2) \tag{3.52}$$

Masu promatramo preko energije. Ukupna energija polja s Killingovim vektorom vremenske translacije ξ^μ na prostornoj Cauchyjevoj hiperplohi Σ definirana je sa

$$\mathcal{E} = \int_\Sigma T_{\mu\nu} n^\mu \xi^\nu \ , \tag{3.53}$$

gdje je n_μ jedinični vektor normalan na Σ. Uvjet $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ brine se za očuvanje ukupne energije, neovisno o odabiru Σ. Energetska svojstva su predstavljena tenzorom $T_{\mu\nu}$ te lokalna energija koju mjeri opažač ostaje dobro definirana.
Iako ne postoji dobra definicija gustoće energije gravitacijskog polja, postoji korisna ukupna energija izoliranog sustava, tj. ukupan $4-$vektor energije i impulsa u asimptotski ravnom prostorvremenu. Prvi korak je promatranje izoliranog sustava u općoj relativnosti kao analognog čestici u specijalnoj relativnosti, s vektorom energije i impulsa p^μ, gdje je energija vremenska komponenta $\mathcal{E} = -p_\mu \xi^\mu$. Masa čestice je:

$$m = \sqrt{-p_\mu p^\mu} \ , \tag{3.54}$$

tako da ako čestica miruje imamo $\mathcal{E} = m$. U Newtonovoj gravitaciji, potencijal ϕ zadovoljava Laplaceovu jednadžbu u vanjskom vakuumskom području:

$$\nabla^2\phi = 0 \ , \tag{3.55}$$

stoga imamo multipolni razvoj od ϕ i masa m izoliranog sustava može se definirati

kao minus koeficijent vodećeg člana. Za asimptotska svojstva gravitacijskog polja možemo dati definiciju mase preko "Gaussovog zakona":

$$m = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n} dA \ , \tag{3.56}$$

gdje smo uzeli integral preko bilo koje topološke $2-$sfere $\mathcal{S}$ koja zatvara sve izvore s $\hat{n}$ jediničnim normalnim vektorom prema van. Integral ne ovisi o $\mathcal{S}$ zbog uvjeta (3.55). Budući da je $\vec{\nabla}\phi$ sila koja djeluje na probnu masu da je drži u mjestu, $4\pi m$ je samo ukupna sila prema van koja drži u mjestu probnu materiju s jediničnom površinskom gustoćom mase koja je raspoređena po $\mathcal{S}$.

Promatramo sad statično asimptotski ravno prostorvrijeme čiji je vremenski Killingov vektor ξ^μ normaliziran tako da faktor crvenog pomaka $V = \sqrt{-\xi_\mu \xi^\mu}$ ide u 1 u beskonačnosti. U statičnim prostorvremenima stajanje u mjestu je definirano kao praćenje orbite Killingovog vektora, čija je orbita zadana akceleracijom:

$$a^\nu = \frac{\xi^\mu}{V} \nabla_\mu \left(\frac{\xi^\nu}{V} \right) = \frac{1}{V^2} \xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu \ , \tag{3.57}$$

te sila na probnu masu mora biti proporcionalna toj akceleraciji. Ako želimo opisati silu kojom djeluje opažač u beskonačnosti, sila će se razlikovati od lokalne za faktor V. Promatramo topološku $2-$sferu $\mathcal{S}$ koja je na hiperplohi ortogonalnoj s ξ^μ. Veličina

$$F = \int_{\mathcal{S}} n^\nu \left(\frac{\xi^\mu}{V} \right) \nabla_\mu \xi_\nu dA \ , \tag{3.58}$$

može se interpretirati kao ukupna vanjska sila kojoj udaljeni opažač mora djelovati da bi zadržao u mjestu jediničnu površinsku gustoću mase koja je raspodijeljena po $\mathcal{S}$. Killingova jednadžba $\nabla_\mu \xi_\nu = \nabla_{[\mu} \xi_{\nu]}$ omogućava da zapišemo jednadžbu kao:

$$F = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} N^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu dA = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \nabla^\lambda \xi^\gamma \ , \tag{3.59}$$

gdje je $N^{\mu\nu} = 2V^{-1} \xi^{[\mu} N^{\nu]}$ bivektor normalan na $\mathcal{S}$ i $\epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}$ volumni element na prostorvremenu u odnosu na metriku i drugi integrand je $2-$forma $\boldsymbol{\alpha}$ koja se integrira

preko dvodimenzionalne podmnogostrukosti $\mathcal{S}$. Integrand zadovoljava:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\nabla_\sigma[\epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}\nabla^\lambda\xi^\gamma] &= \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}\nabla_\sigma\nabla^\lambda\xi^\gamma \\ &= -4\nabla_\sigma\nabla^{[\rho}\xi^{\sigma]} \\ &= 4\nabla_\sigma\nabla^\sigma\xi^\rho \\ &= -4R^\rho{}_\sigma\xi^\sigma \ ,\end{aligned} \tag{3.60}$$

gdje smo koristili (B.2.13, iz [9]):

$$\epsilon^{\mu_1\ldots\mu_j\mu_{j+1}\ldots\mu_n}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_j\nu_{j+1}\ldots\nu_n} = (-1)^s(n-j)!j!\delta^{[\mu_{j+1}}{}_{\nu_{j+1}}\ldots\delta^{\mu_n]}{}_{\nu_n} \ , \tag{3.61}$$

gdje je s broj minusa u signaturi metrike, i (C.3.9, iz [9]):

$$\nabla^\mu\nabla_\mu\xi_\nu = -R_\nu{}^\lambda\xi_\lambda \ . \tag{3.62}$$

Pomnožimo li jednadžbu (3.60) sa $\epsilon_{\rho\kappa\alpha\beta}$ i kontrahiramo po ρ, dobijemo:

$$\nabla_{[\kappa}\Big(\epsilon_{\alpha\beta]\lambda\gamma}\nabla^\lambda\xi^\gamma\Big) = \frac{2}{3}R^\rho{}_\sigma\xi^\sigma\epsilon_{\rho\kappa\alpha\beta} \ , \tag{3.63}$$

što iščezava u vakuumu $R_{\mu\nu} = 0$, stoga diferencijalna forma $\alpha_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}\nabla^\lambda\xi^\gamma$ zadovoljava:

$$d\boldsymbol{\alpha} = 0 \ . \tag{3.64}$$

Upotrebom Stokesovog teorema, integral na desnoj strani (3.59) je neovisan o odabiru $\mathcal{S}$ kao i u Newtonovom slučaju. Budući da integrali predstavljaju istu fizikalnu veličinu, dolazimo do definicije ukupne mase:

$$m = -\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{S}}\epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}\nabla^\lambda\xi^\gamma \ , \tag{3.65}$$

koja je poznata kao Komarova masa, te daje dobru definiciju ukupne mase u stacionarnim asimptotski ravnim prostorvremenima. Također, opisuje masu kao očuvanu veličinu u stacionarnim prostorvremenima u odnosu na vremensku translaciju.
Ako je $2-$sfera $\mathcal{S}$ granica prostorne hiperplohe Σ takva da je $\Sigma\cup\mathcal{S}$ kompaktna mnogostrukost s granicom, možemo koristiti Stokesov teorem da dobijemo volumni inte-

gral:

$$
\begin{aligned}
m &= -\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma} d\boldsymbol{\alpha} \\
&= -\frac{3}{8\pi}\int_{\Sigma} \nabla_{[\rho}\Big(\epsilon_{\mu\nu]\lambda\gamma}\nabla^{\lambda}\xi^{\gamma}\Big) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} R^{\gamma}{}_{\sigma}\xi^{\sigma}\epsilon_{\gamma\rho\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} R_{\mu\nu}n^{\mu}\xi^{\nu}dV \\
&= 2\int_{\Sigma}\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\Big)n^{\mu}\xi^{\nu}dV\ .
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

Primijetimo da u zadnjem redu pod integralom imamo izraz sličan (1.7) pa dobivamo vezu teorema pozitivne mase i snažnog energijskog uvjeta.

3.3 Glavni rezultati

3.3.1 Globalna nejednakost

Promotrimo sada nejednakost ukupne mase i naboja, tj. postavljamo $J = 0$ u (3.16).

Teorem 3.1. *Promatramo osnosimetrične, asimptotski ravne maksimalne početne podatke u elektrovakuumu s dva asimptotska kraja. Neka su m, J i Q ukupna masa, angularni moment i naboj na jednom od krajeva. Tada vrijedi nejednakost [10]:*

$$
m^2 \geq \frac{Q^2 + \sqrt{Q^4 + 4J^2}}{2}\ . \tag{3.67}
$$

Sve veličine su dobro definirane za općenite asimptotski ravne podatke koji nisu nužno osnosimetrični, ali nejednakost ne vrijedi bez pretpostavke o simetriji. Ako je topologija mnogostrukosti trivijalna, onda se teorem reducira na teorem o pozitivnoj masi. Primjer netrivijalnog skupa početnih podataka je prerez t =konst. u neekstremalnoj Kerr-Newmanovoj crnoj rupi u Boyer-Lindquist koordinatama.
Ograničenja ovog teorema su:

1. maksimalnost podataka,

2. nema uvjeta rigidnosti (nije jasno vrijedi li jednakost isključivo u nekom specijalnom slučaju ili za cijelu klasu rješenja),

3. podatci imaju samo dva asimptotska kraja.

Maksimalni podatci imaju veliku ulogu u dokazu jer osiguravaju pozitivno definiranu skalarnu zakrivljenost.
Kerr-Newmanova crna rupa, tj. njeni početni podatci, koji imaju jednakost u (3.67), imaju jedan ravan i jedan cilindričan asimptotski kraj. Da bi i njih uključili u teorem, uzet ćemo u obzir drugi skup podataka, Brillove početne podatke.
Brillovi početni podatci sastoje se od dvije nerotirajuće izolirane i nenabijene crne rupe s određenim pozicijama u prostoru, sa svojim raspodjelama masa i momenta. Metrika prostorvremena i tenzor ekstrinzične zakrivljenosti su određeni tim početnim uvjetima.

Teorem 3.2. *Promatramo vakuumske Brillove početne podatke. Vrijedi nejednakost:*

$$m \geq \sqrt{|J|}\,. \tag{3.68}$$

Jednakost vrijedi samo ako su podatci vremenski izrezak ekstremalnog Kerrovog prostorvremena [10].

Očekujemo da nejednakost (3.67) vrijedi za mnogostrukosti s proizvoljnim brojem asimptotskih krajeva, ali to je i dalje otvoreno pitanje. Postoji parcijalni rezultat koji ćemo opisati preko masenog funkcionala $\mathcal{M}$, koji predstavlja donju granicu za masu.

Teorem 3.3. *Promatramo osnosimetrični vakuumski i asimptotski ravni maksimalni skup početnih podataka s N asimptotskih krajeva. Označavamo sa m_i, J_i $(i = 1, ..., N)$ masu i angularni moment pojedinog kraja. Uzmemo li masu jednog kraja (prvog), ta masa zadovoljava nejednakost:*

$$m_1 \geq \mathcal{M}(J_2, ..., J_N)\,, \tag{3.69}$$

gdje $\mathcal{M}(J_2, ..., J_N)$ predstavlja numeričku vrijednost masenog funkcionala na odgovarajućim harmoničkim preslikavanjima [10].

Maseni funkcional opisuje gravitacijske efekte tvari i energije te utjecaj na gravitacijsko polje i zakrivljenost prostorvremena. Definira se kao integral gustoće energije u promatranom području. Ovaj teorem za sobom povlači nejednakost:

$$\mathcal{M}(J_2, ..., J_N) \geq \sqrt{|J_1|}\,, \tag{3.70}$$

koja je numerički ispitana za tri asimptotska kraja.
Svi gornji rezultati pretpostavljaju potpune mnogostrukosti bez unutarnjih rubova, tj. potpune mnogostrukosti bez rubnih točaka unutar mnogostrukosti.

3.3.2 Kvazilokalne nejednakosti

Promatramo Einsteinove jednadžbe s kozmološkom konstantom Λ,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T^{EM}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) - \Lambda g_{\mu\nu} \ , \tag{3.71}$$

gdje je $T^{EM}_{\mu\nu}$ elektromagnetski tensor energije i impulsa definiran preko tenzora $F_{\mu\nu}$ kao u (3.39). Naboj proizvoljne zatvorene orjentirane $2-$plohe $\mathcal{S}$, koja je upisana u prostorvrijeme, definiran je preko (3.40).

Teorem 3.4. *Ako za zatvorenu marginalno zatočenu plohu $\mathcal{S}$ koja zadovoljava vanjski stabilni (eng. stably outermost) uvjet, u prostorvremenu koje zadovoljava Einsteinove jednadžbe s nenegativnom kozmološkom konstantom i ako neelektromagnetski tenzor $T_{\mu\nu}$ zadovoljava dominantni energijski uvjet, tada vrijedi nejednakost [10]:*

$$A \geq 4\pi Q^2 \ . \tag{3.72}$$

Ovaj teorem je u potpunosti kvazilokalan i primjenjiv na općenite crne rupe bez ikakvog simetrijskog uvjeta. Također, pretpostavlja se da je materija nenabijena, tj. $\nabla_\mu F^{\mu\nu} \neq 0$. Jedini uvjet koji je postavljen je da $T_{\mu\nu}$ zadovoljava dominantni energijski uvjet.

Teorem 3.5. *Promatramo maksimalne početne podatke u elektrovakuumu s nenegativnom kozmološkom konstantom. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ stabilna izoperimetrijska sfera. Tada vrijedi [10]:*

$$A \geq \frac{4\pi}{3} Q^2 \ . \tag{3.73}$$

Ova nejednakost ima drugačiji koeficijent od prethodne. Treba imati na umu da je izoperimetrijska sfera konceptualno slična minimalnoj: diferencijalni operator je isti, jedina razlika je da izoperimetrijske maksimiziraju volumen koji obuhvaćaju, dok minimalne lokalno minimiziraju površinu.

Teorem 3.6. *Promatramo osnosimetrični, vakuumski i maksimalni skup početnih podataka s nenegativnom kozmološkom konstantom. Pretpostavimo da početni podatci*

sadrže orjentabilnu zatvorenu stabilnu minimalnu osnosimetričnu plohu $\mathcal{S}$. Vrijedi:

$$A \geq 8\pi|J| \,. \tag{3.74}$$

Ako vrijedi jednakost, onda je $\Lambda = 0$ i lokalna geometrija plohe $\mathcal{S}$ je sfera grla ekstremalne Kerrove crne rupe [10].

Kerrova sfera grla geometrijski je objekt unutar ergopodručja; $2-$dimenzionalna ploha koja predstavlja grlo ergopodručja, nalazi se na ekvatoru, konstantnog radijusa koji predstavlja statični limes.
Ovaj teorem ima dvije glavne restrikcije: uvjet maksimalnih podataka i vakuum. One se mogu zaobići sljedećim teoremom:

Teorem 3.7. *Za osnosimetričnu marginalno zarobljenu plohu $\mathcal{S}$ koja zadovoljava prostorvremenski stabilni vanjski uvjet koji je kompatibilan s osnom simetrijom, s nenegativnom kozmološkom konstantom i zadovoljava dominantni energijski uvjet, vrijedi nejednakost:*

$$A \geq 8\pi|J| \,, \tag{3.75}$$

gdje je J Komarov angularni moment od $\mathcal{S}$. Ako vrijedi jednakost onda je $\mathcal{S}$ dio nešireća horizonta s geometrijom Kerrove sfere grla [10].

Angularni moment koji se ovdje pojavljuje čisto je gravitacijski. Polja materije također mogu imati angularni moment koji se može prenijeti na crnu rupu, ali nejednakost vrijedi i u tom slučaju.

4 Nejednakosti površine i naboja

Zanima nas postoje li slične nejednakosti bez pretpostavke o simetriji pa ćemo promatrati nejednakosti koje uključuju električni naboj jer je on uvijek dobro definirana kvazilokalna veličina.
Promatramo Einsteinove jednadžbe

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\left(T^{EM}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}\right) - \Lambda g_{\mu\nu} \,, \tag{4.1}$$

gdje je $T^{EM}_{\mu\nu}$ elektromagnetski tenzor energije i impulsa (3.39). Naboji proizvoljne zatvorene, orjentirane $2-$plohe $\mathcal{S}$ koja je upisana u prostorvrijeme definirani su sa:

$$\begin{aligned} Q_E &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} *F_{\mu\nu} \ , \\ Q_M &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}} F_{\mu\nu} \ , \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdje je $*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}F^{\lambda\gamma}$. Ovdje samo pretpostavljamo da tenzor $T_{\mu\nu}$ zadovoljava dominantni energijski uvjet.

4.1 Nejednakost površine i naboja

Promatramo zatvorenu orijentabilnu $2-$plohu $\mathcal{S}$ smještenu u prostorvrijeme $\mathcal{M}$ s metrikom $g_{\mu\nu}$ i Levi-Civita koneksijom ∇_μ. Induciranu metriku na $\mathcal{S}$ označavamo s $q_{\mu\nu}$, Levi-Civita konekciju s D_μ i Riccijev skalar ${}^2R$. Označavamo s dA mjeru površine na $\mathcal{S}$. Promatramo svjetlosne vektore l^μ i k^μ koji razapinju ravninu normalnu sa $\mathcal{S}$ i normalizirani su na način $l^\mu k_\mu = -1$ tako da imamo slobodu skaliranja:

$$l'^\mu = f l^\mu \quad , \quad k'^\mu = f^{-1}k^\mu \ . \tag{4.3}$$

Uzimamo l^μ kao svjetlosni vektor prema van. Ekspanzija $\theta^{(l)}$ i smicanje $\sigma^{(l)}_{\mu\nu}$ povezani sa svjetlosnom normalom l^μ dani su sa

$$\theta^{(l)} = q_{\mu\nu}\nabla_\mu l_\nu \quad , \quad \sigma^{(l)}_{\mu\nu} = q^\lambda{}_\mu q^\gamma{}_\nu \nabla_\lambda l_\gamma - \frac{1}{2}\theta^{(l)}q_{\mu\nu} \ . \tag{4.4}$$

Normalna fundamentalna forma $\Omega^{(l)}_\mu$ dana je sa:

$$\Omega^{(l)}_\mu = -k^\lambda q^\gamma{}_\mu \nabla_\gamma l_\lambda \ . \tag{4.5}$$

Transformacije uzrokovane reskaliranjem daju veličine:

$$\theta^{(l')} = f\theta^{(l)} \quad , \quad \sigma^{(l')}_{\mu\nu} = f\sigma^{(l)}_{\mu\nu} \quad , \quad \Omega^{(l')}_\mu = \Omega^{(l)}_\mu + D_\mu(\ln f) \ . \tag{4.6}$$

Metrika prostorvremena može se zapisati na sljedeći način:

$$g_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} - l_\mu k_\nu - l_\nu k_\mu \ . \tag{4.7}$$

Ploha $\mathcal{S}$ je marginalno vanjska zatočena ploha ako je $\theta^{(l)} = 0$.

Definicija 4.1. *Za zatvorenu marginalno zatočenu plohu $\mathcal{S}$ i vektor v^μ ortogonalan na nju, kažemo da zadovoljava vanjski stabilni uvjet u odnosu na smjer v^μ ako i samo ako postoji funkcija $\psi > 0$ na $\mathcal{S}$ takva da varijacija $\theta^{(l)}$ po ψv^μ zadovoljava:*

$$\delta_{\psi v}\theta^{(l)} \geq 0\,, \tag{4.8}$$

gdje nam δ označava operator varijacije povezan s deformacijom plohe.

Općenito, varijacija $\delta_p\alpha$ nekog geometrijskog objekta α na plohi S u smjeru vektora p^μ je definirana kao:

$$\delta_p\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma}\,, \tag{4.9}$$

za bilo koju jednoparametarsku familiju ploha S_σ sa $S_0 = S$ i $p^\mu\partial_{x^\mu} = \partial/\partial\sigma|_{\sigma=0}$. Varijacija je aditivna na sljedeći način:

$$\delta_{\psi k+l}\theta^{(l)} = \delta_{\psi k}\theta^{(l)} + \delta_l\theta^{(l)}\,, \tag{4.10}$$

ali općenito imamo

$$\delta_{\psi k}\theta^{(l)} \neq \psi\delta_k\theta^{(l)}\,. \tag{4.11}$$

Ovaj uvjet stabilnosti nam je potreban samo uzduž nekog proizvoljnog izlaznog nevremenskog vektora.

Definicija 4.2. *Zatvorena marginalno zatočena ploha $\mathcal{S}$ zadovoljava prostorvremenski vanjski stabilni uvjet ako postoji izlazni $-k^\mu$ orjentirani vektor $x^\mu = \bar{\gamma}l^\mu - k^\mu$, s $\bar{\gamma} \geq 0$, u odnosu na plohu $\mathcal{S}$ koja zadovoljava taj uvjet.*

Dalje ćemo koristiti vektor $x^\mu \equiv \psi x^\mu = \gamma l^\mu - \psi k^\mu$, gdje je ψ funkcija spomenuta u (4.1) i $\gamma \equiv \psi\bar{\gamma}$, tako da vrijedi $\delta_x\theta^{(l)} \geq 0$.

Teorem 4.1. *Za zadanu orjentabilnu zatvorenu marginalno zatočenu plohu $\mathcal{S}$ koja zadovoljava prostorvremenski stabilni vanjski uvjet, u prostorvremenu koje zadovoljava Einsteinove jednadžbe s nenegativnom kozmološkom konstantom Λ i tako da neelektromagnetski tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$ zadovoljava dominantni energijski uvjet, vrijedi nejednakost:*

$$A \geq 4\pi(Q_E^2 + Q_M^2)\,, \tag{4.12}$$

gdje je A površina plohe, a Q_E i Q_M naboji plohe $\mathcal{S}$ [12].

Ovaj teorem predstavlja proširenje za stabilne minimalne plohe (B.6) i uključuje dodatno magnetski naboj. Za naše razmatranje, magnetski naboji su uključeni prije svega zato što dokaz uključuje samo tok od $F_{\mu\nu}$ kroz minimalnu ili marginalno zatočenu plohu bez potrebe za vektorskim potencijalom magnetskih monopola.

Lema 4.1. *Za zatvorenu marginalno zatočenu plohu $\mathcal{S}$ koja zadovoljava prostorvremenski vanjski stabilni uvjet, vrijedi nejednakost:*

$$\int_{\mathcal{S}} \left(G_{\mu\nu} l^\mu \left(k^\nu + \frac{\gamma}{\psi} l^\nu \right) \right) dA \leq 4\pi(1-g) \,, \tag{4.13}$$

gdje je g genus plohe $\mathcal{S}$. Također, pretpostavimo li da je lijeva strana nejednakosti pozitivna $g = 0$ i $\mathcal{S}$ ima $\mathbb{S}^2$ topologiju (zbog $g = 0$) [12].

Sljedeća lema će nam omogućiti da pišemo važne normalne komponente elektromagnetskog polja preko naboja.

Lema 4.2. *Neka je $T^{EM}_{\mu\nu}$ elektromagnetski tenzor energije i impulsa. Vrijedi jednakost [12]:*

$$T^{EM}_{\mu\nu} l^\mu k^\nu = \frac{1}{8\pi} [(l^\mu k^\nu F_{\mu\nu})^2 + (l^\mu k^\nu * F_{\mu\nu})^2] \,. \tag{4.14}$$

Dokaz. Pomoću forme metrike (4.7), dobivamo sljedeće izraze:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2(l^\mu k^\nu F_{\mu\nu})^2 - 4 q^{\mu\nu} k^\lambda F_{\mu\lambda} l^\gamma F_{\nu\gamma} + F_{\mu\nu} F_{\lambda\gamma} q^{\mu\lambda} q^{\nu\gamma} \,, \tag{4.15}$$

$$l^\mu k^\lambda F_{\mu\nu} F_\lambda{}^\nu = (l^\mu k^\nu F_{\mu\nu})^2 + q^{\mu\nu} k^\lambda F_{\mu\lambda} l^\gamma F_{\nu\gamma} \,. \tag{4.16}$$

Povlačenje tenzora $F_{\mu\nu}$ na plohi $\mathcal{S}$ proporcionalno je volumnom elementu $\epsilon_{\mu\nu}$ plohe, promatramo izraze za $F_{\mu\nu} F_{\lambda\gamma} q^{\mu\lambda} q^{\nu\gamma}$ i $(\epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2$ čijom kombinacijom dobivamo:

$$F_{\mu\nu} F_{\lambda\gamma} q^{\mu\lambda} q^{\nu\gamma} = \frac{1}{2} (\epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2 = 2(*F_{\mu\nu} l^\mu k^\nu)^2 \,, \tag{4.17}$$

gdje smo koristili identitet:

$$*F_{\mu\nu} l^\mu k^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} \,. \tag{4.18}$$

Identitet proizlazi iz izraza $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} l^\lambda k^\gamma$. Kombinacijom gornjih izraza, dobivamo traženu relaciju. $\square$

Električni i magnetski naboji mogu se zapisati preko svjetlosnih vektora l^μ i k^μ na način:

$$Q_E = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} F_{\mu\nu} l^\mu k^\nu dA \quad , \quad Q_M = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} *F_{\mu\nu} l^\mu k^\nu dA \, . \tag{4.19}$$

Dalje predstavljamo dokaz teorema (4.1).

Dokaz. Koristimo nejednakost (4.13) i Einsteinove jednadžbe. Budući da je vektor $k^\mu + \gamma l^\mu/\psi$ ili vremenski ili svjetlosni, tenzor $T_{\mu\nu}$ zadovoljava dominantni energijski uvjet i kako imamo $\Lambda \geq 0$, iz (4.13) dobivamo:

$$8\pi \int_{\mathcal{S}} T^{EM}_{\mu\nu} l^\mu k^\nu dA \leq 8\pi \int_{\mathcal{S}} \left(T^{EM}_{\mu\nu} l^\mu \Big(k^\nu + \frac{\gamma}{\psi} l^\nu \Big) \right) dA \leq 4\pi(1-g) \, . \tag{4.20}$$

U prvoj nejednakosti imamo dodatni član $T^{EM}_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \gamma/\psi$. Znamo da vrijedi $T^{EM}_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \geq 0$, tj. da tenzor energije i impulsa zadovoljava svjetlosni energijski uvjet. Također, u Einsteinovoj jednadžbi vidimo odnos tenzora $G_{\mu\nu}$ i $T^{EM}_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T^{EM}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) - \Lambda g_{\mu\nu} \, . \tag{4.21}$$

Znamo iz uvjeta da $T_{\mu\nu}$ zadovoljava dominantni energijski uvjet, pa i svjetlosni, za fizikalno realističan slučaj imamo

$$8\pi \int_{\mathcal{S}} \left(T^{EM}_{\mu\nu} l^\mu \Big(k^\nu + \frac{\gamma}{\psi} l^\nu \Big) \right) dA \leq \int_{\mathcal{S}} \left(G_{\mu\nu} l^\mu \Big(k^\nu + \frac{\gamma}{\psi} l^\nu \Big) \right) dA \leq 4\pi(1-g) \, . \tag{4.22}$$

Nadalje, koristeći (4.14), iz gornje nejednakosti dobivamo:

$$\int_{\mathcal{S}} \Big((l^\mu k^\nu F_{\mu\nu})^2 + (l^\mu k^\nu * F_{\mu\nu})^2 \Big) dA \leq 4\pi(1-g) \, . \tag{4.23}$$

Ako je lijeva strana točno 0, onda nema naboja i nejednakost (4.12) je trivijalna. Onda možemo pretpostaviti da nije nula u nekoj točki i $g = 0$.

Da bismo ograničili lijevu stranu nejednakosti (4.23), koristimo Hölderovu nejednakost na $\mathcal{S}$ u sljedećem obliku. Za integrabilne funkcije f i h, Hölderova nejednakost

dana je sa:

$$\int_{\mathcal{S}} fhdA \leq \Big(\int_{\mathcal{S}} f^2 dA\Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathcal{S}} h^2 dA\Big)^{1/2} . \tag{4.24}$$

Ako stavimo $h = 1$, dobivamo:

$$\int_{\mathcal{S}} fdA \leq \Big(\int_{\mathcal{S}} f^2 dA\Big)^{1/2} A^{1/2} . \tag{4.25}$$

Koristeći ovu nejednakost u (4.23), dobivamo:

$$A^{-1}\Big\{\Big(\int_{\mathcal{S}} l^\mu k^\nu F_{\mu\nu}\, dA\Big)^2 + \int_{\mathcal{S}} l^\mu k^\nu * F_{\mu\nu}\Big)^2\Big\} = 16\pi^2 A^{-1}(Q_E^2 + Q_M^2) \leq 4\pi . \tag{4.26}$$

Napokon slijedi nejednakost:

$$4\pi(Q_E^2 + Q_M^2) \leq A , \tag{4.27}$$

čime je dokazana tvrdnja teorema 4.1. □

4.2 Površina, naboj i globalna topologija

Nadalje, želimo proširiti nejednakost (4.12) na proizvoljne plohe tako što ćemo postaviti uvjete na početne podatke.

Teorem 4.2. *Neka su* $\Big(\mathcal{M}, (g, K), (E, B)\Big)$ *potpuni maksimalni i asimptotski ravni početni podatci za Einstein-Maxwellove jednadžbe. Pretpostavljamo da su neelektromagnetska polja materije nenabijena i da zadovoljavaju dominantni energijski uvjet. Tada, za svaku orjentiranu plohu* $\mathcal{S}$ *koja zaklanja kraj* Σ_e *imamo*

$$A(\mathcal{S}) \geq 4\pi\Big(\tilde{Q}_E^2 + \tilde{Q}_M^2\Big) \geq \frac{4\pi(Q_E^2 + Q_M^2)}{|H_2|} . \tag{4.28}$$

gdje su $\tilde{Q}_E$ *i* $\tilde{Q}_M$ *apsolutni centralni naboji i* H_2 *drugi Bettijev broj od* $\mathcal{M}$ *[12].*

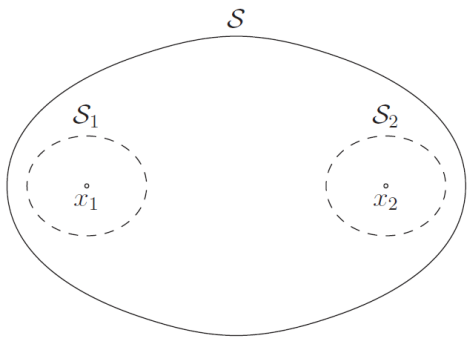
Naboji u teoremu proizvedeni su netrivijalnom topologijom mnogostrukosti, tj. da je topologija trivijalna, ne bi bilo naboja pa bi i teorem bio trivijalan. Ovaj teorem također ima globalne uvjete: asimpototski ravne podatke, potpunost i nenabijenost materije u suprotnosti s prošlim teoremom koji je bio čisto kvazilokalan gdje su jedini uvjeti bili na plohu.

Promatramo Brill-Lindquistove početne podatke: vremenski simetrični, konformalno

ravni[2] početni podatci s N asimptotskih krajeva (uzimamo $N = 3$). Mnogostrukost je $\mathcal{M} := \mathbb{R}^3 \backslash \{x_1, x_2\}$, gdje su x_1 i x_2 proizvoljne točke u $\mathbb{R}^3$. Neka je $L = |x_1 - x_2|$ euklidska udaljenost u odnosu na ravnu konformalnu metriku. Krajnje točke x_1 i x_2 imaju električne naboje Q_1 i Q_2. Drugi kraj ima naboj Q dan sa:

$$Q = Q_1 + Q_2 \ . \tag{4.29}$$

Promatramo familije početnih podataka sa zadanim nabojima s drugačijim udaljenostima L. Kad je L dovoljno velik, može se pokazati da postoje samo dvije stabilne minimalne plohe $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ koje okružuju svaku točku. Uzmimo sad sferu $\mathcal{S}$ koja zatvara



Slika 4.1: Brill-Lindquistovi početni podatci s velikom udaljenosti između krajnjih točaka. Iscrtkane plohe $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ su minimalne. Ploha $\mathcal{S}$ je zaklanjajuća. Preuzeto iz: [12]

dvije krajnje točke x_1 i x_2 te je ta ploha zaklanjajuća. Budući da su $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ minimalne, imamo

$$A \geq A_1 + A_2 \ , \tag{4.30}$$

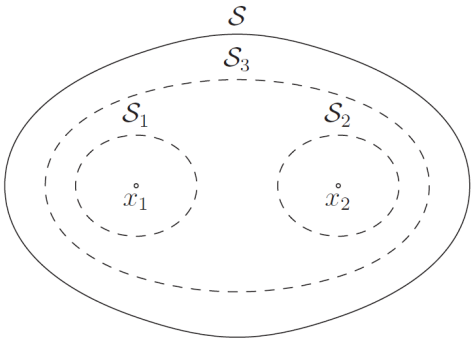
gdje je A površina od $\mathcal{S}$, a A_1 i A_2 površine od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Koristeći teorem (B.6), dobivamo:

$$A \geq 4\pi(Q_1^2 + Q_2^2) \ . \tag{4.31}$$

Uzmimo sad dovoljno malen L. Tada se pojavljuje treća minimalna ploha $\mathcal{S}_3$ s površinom A_3 koja zatvara obje krajnje točke. Ta ploha je zadnja vanjska i imamo

$$A \geq A_3 \ . \tag{4.32}$$

[2]Konformalnom transformacijom se mogu transformirati u podatke vezane za prostorvrijeme Minkowskog. Metrika je povezana s ravnom konformalnim faktorom.



Slika 4.2: Brill-Lindquistovi početni podatci s malom udaljenosti između krajnjih točaka. Pojavljuje se nova minimalna ploha $\mathcal{S}_3$ koja obuhvaća oba kraja i minimalne plohe $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Ploha $\mathcal{S}$ je zaklanjajuća, ali ne nužno minimalna. Preuzeto iz: [12]

Ponovno, koristeći teorem (B.6) dobijemo:

$$A(\mathcal{S}) \geq 4\pi(Q_1 + Q_2)^2 = 4\pi Q^2 \ , \tag{4.33}$$

gdje smo koristili činjenicu da je naboj plohe $\mathcal{S}_3$ jednak naboju kraja. Kombiniramo li nejednakosti, dobijemo:

$$A(\mathcal{S}) \geq 4\pi \inf\{Q_1^2 + Q_2^2, (Q_1 + Q_2)^2\} \ . \tag{4.34}$$

Ova nejednakost vrijedi za sve zaklanjajuće plohe $\mathcal{S}$ i ne ovisi o L. Desna strana nejednakosti je točno kvadrat apsolutnog centralnog naboja:

$$\tilde{Q}(\mathcal{S}) = \sqrt{\inf\{Q_1^2 + Q_2^2, (Q_1 + Q_2)^2\}} \ . \tag{4.35}$$

Ako Q_1 i Q_2 imaju suprotne predznake, apsolutni centralni naboj je zadan kao:

$$\tilde{Q}(\mathcal{S}) = |Q_1 + Q_2| \ , \tag{4.36}$$

a ako imaju iste, vrijedi izraz:

$$\tilde{Q}_{\mathcal{S}} = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} \ . \tag{4.37}$$

Bettijev broj H_2 je broj "rupa" plohe $\mathcal{S}$, u ovom slučaju imamo $H_2 = 2$. Stoga imamo

$$\tilde{Q}_{\mathcal{S}} \geq \frac{|Q_1 + Q_2|}{2} = \frac{Q(\mathcal{S})}{H_2} \ . \tag{4.38}$$

Dobili smo upravo drugu nejednakost u (4.28). Poznavajući L dobijemo preciznije informacije.

Ovaj teorem generalizira prethodni u smislu da se odnosi na plohe koje nisu nužno horizonti crnih rupa, ali postavlja se uvjet nenabijenih polja materije.

Gledamo zaklanjajuće plohe $\mathcal{S}$ za odabrani asimptotski kraj Σ_e. Svaka komponenta plohe $\mathcal{S}$ uvijek dobiva orijentaciju izlazne normale područja Ω.

Za upisanu orjentiranu i kompaktnu plohu S i nedivergirajući vektor X^μ definiramo naboj $Q(\mathcal{S})$ kao:

$$Q(\mathcal{S}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} X_\mu n^\mu dA \ , \tag{4.39}$$

gdje je n^μ normalno polje na $\mathcal{S}$ u $\mathcal{M}$, koje zajedno s orjentacijom $\mathcal{M}$ daje orjentaciju plohe $\mathcal{S}$. Budući da X^μ ne divergira, naboj $Q(\mathcal{S})$ ovisi samo o homološkom tipu[3] plohe $\mathcal{S}$ koja se označava s $[\mathcal{S}]$. Kad je $X^\mu = E^\mu$ ili $X^\mu = B^\mu$, električno ili magnetsko polje, onda su pridruženi naboji električni ili magnetski. Po Gaussovom teoremu, ako je $\mathcal{S}$ zaklanjajuća ploha, onda je naboj plohe jednaki naboju zaklonjenog asimptotskog kraja Σ_e.

Definicija 4.3. *Fiksiramo asimptotski kraj Σ_e. Neka je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup ... \cup \mathcal{S}_{k(\Omega)} = \partial\Omega$ zaklanjajuća ploha kraja Σ_e. Neki $\mathcal{S}_i$-jevi su dio granice neograničenog povezanog područja $\mathcal{M}\backslash\Omega$. Pretpostavimo da su $\{\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_{k(\Omega)}\}$ poredani tako da su $\{\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_{n(\Omega)}\}$, $n(\Omega) \leq k(\Omega)$ takve komponente. Tada definiramo apsolutni centralni električni ili magnetski naboj, $\tilde{Q}_E$ ili $\tilde{Q}_M$, povezan s krajem Σ_e na način:*

$$\tilde{Q} = \inf_{\Omega} \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n(\Omega)} Q^2(\mathcal{S}_i)} \ . \tag{4.40}$$

gdje Ω ide po zaklonjenim područjima kraja Σ_e.

Promatramo općenitu vezu naboja i površine za stabilne minimalne plohe. Neka je $(\mathcal{M}, g)$ orijentirana Riemannova $3-$mnogostrukost s moguće mnogo asimptotski

[3]Homologija je općenito način povezivanja algebarskih s drugim matematičkim objektima npr. topološkim prostorima. Definirana je kao način analiziranja i klasificiranja mnogostrukosti po njihovim ciklusima – zatvorenim krivuljama ili podmnogostrukostima koje se mogu "nacrtati" na danoj $n-$dimenzionalnoj mnogostrukosti bez da se kontinuirano deformiraju jedna u drugu.

ravnih krajeva. Pretpostavimo da skalarna zakrivljenost zadovoljava $R \geq 2|X|^2$, gdje vektorsko polje X^μ ne divergira. Za bilo koju orjentiranu plohu $\mathcal{S}$, naboj $Q([\mathcal{S}])$ dan je izrazom (4.39). Za stabilnu minimalnu plohu vrijedi (B.6):

$$A \geq 4\pi Q^2 \ . \tag{4.41}$$

Za dokaz teorema (4.2), radimo s izrazima:

$$R \geq 2|X|^2 \quad , \quad D_\mu X^\mu = 0 \ . \tag{4.42}$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{S}$ orjentirana ploha upisana u $\mathcal{M}$ i zaklanja kraj Σ_e. Postoje upisane minimalne plohe $S_1, ..., S_k$ i prirodni brojevi $n_1, ..., n_k$, $n_i \geq 0$ takvi da:

1. $A(\mathcal{S}) \leq \inf_{\tilde{\mathcal{S}} \sim \mathcal{S}} A(\tilde{\mathcal{S}}) = n_1 A(\mathcal{S}_1) + ... + n_k A(\mathcal{S}_k)$, gdje $\tilde{\mathcal{S}} \sim \mathcal{S}$ znači da je infimum uzet preko svih ploha $\tilde{\mathcal{S}}$ koje su izotopne sa $\mathcal{S}$,

2. postoji niz ploha $\{\tilde{\mathcal{S}}\}$ izotopnih sa $\mathcal{S}$ tako da za bilo koju neprekidnu funkciju h imamo
$$\lim \int_{\tilde{\mathcal{S}}} h dA = \sum_{i=1}^{i=k} n_i \int_{\mathcal{S}_i} h dA \ , \tag{4.43}$$
što znači da za $h = 1$, imamo
$$\lim A(\tilde{\mathcal{S}}) = n_1 A(\mathcal{S}_1) + ... + n_k A(\mathcal{S}_k) \ . \tag{4.44}$$

Kako $\mathcal{S}$ zaklanja kraj Σ_e, tvrdimo da postoji podskup ploha $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_k$ koje zaklanjaju Σ_e. Tvrdimo da postoji zaklonjeno područje $\tilde{\Omega}$, takvo da je $\partial\tilde{\Omega}$ unija nekih ili svih ploha $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_k$. Za početak pretpostavimo da su plohe $\mathcal{S}_i$ poredane tako da je $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_l$, $l \leq k$, takav skup orjentiranih ploha, točnije $\partial\tilde{\Omega} = \mathcal{S}_1 \cup ... \cup \mathcal{S}_l$.
Dalje računamo nejednakost:

$$A(S) \geq \sum_{i=1}^{i=k} n_i A(\mathcal{S}_i) \geq 4\pi \sum_{i=1}^{i=l} n_i Q^2(\mathcal{S}_i) \geq 4\pi \sum_{i=1}^{i=l} Q^2(\mathcal{S}_i) \geq 4\pi Q^2 \geq \frac{4\pi Q^2}{|H_2|} \ . \tag{4.45}$$

Sad trebamo pokazati da postoji podskup $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_k$ koji zaklanja Σ_e. Pokazat ćemo da za svaku upisanu nerastezljivu krivulju ζ koja počinje u Σ_e i završava u nekom drugom kraju mora presijecati jednu od $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_k$. U tom slučaju, definiramo Ω kao skup točaka p u $\mathcal{M} \backslash (\mathcal{S}_1 \cup ... \cup \mathcal{S}_k)$ takav da postoji nerastezljiva krivulja β koja počinje u

Σ_e i završava u p i ne dira nijednu plohu $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_k$. Takav otvoren skup ne bi sadržavao nijedan kraj osim Σ_e i njegova granica bi bila podskup od $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_k$. Onda zatvarač $\tilde{\Omega}$ od Ω mora biti zaklonjeno područje i njegova granica $\partial\tilde{\Omega}$ mora biti podskup od $\mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_k$. Treba imati na umu da $\partial\tilde{\Omega}$ nije nužno isti kao $\partial\Omega$.
Neka je sad $T(r)$, za mali r, cjevasto okruženje krivulje ζ radijusa r takvo da $T(r) \cap (\mathcal{S}_1 \cup ... \cup \mathcal{S}_k) = \emptyset$. Neka je ϕ nenegativna funkcija takva da:

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{na} \quad T(r/2)\,, \\ 0 & \text{na} \quad T^c(r/2)\,, \end{cases} \tag{4.46}$$

gdje je $T^c(r/2)$ komplement od $T(r/2)$ u $\mathcal{M}$. Također, neka je f (eng. support function) funkcija s nosačem u $T^c(r)$. Imamo

$$\lim \int_{\tilde{S}} (f + \phi) dA = \sum_{i=1}^{i=k} \int_{\mathcal{S}_i} (f + \phi) dA = \sum_{i=1}^{i=k} \int_{\mathcal{S}_i} f dA\,. \tag{4.47}$$

S druge strane imamo

$$\lim \int_{\tilde{\mathcal{S}}} f dA = \sum_{i=1}^{i=k} \int_{\mathcal{S}_i} f dA\,, \tag{4.48}$$

i

$$\lim \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \phi dA \geq c > 0\,, \tag{4.49}$$

za neku fiksiranu konstantu $c > 0$ i svaki element niza $\tilde{\mathcal{S}}$. Zadnja nejednakost proizlazi iz toga da svaki element $\tilde{\mathcal{S}}$ mora presijecati svaku krivulju na udaljenosti $d < r/2$ od ζ, u suprotnom broj sjecišta bi bio nula, što znači da bi broj sjecišta ζ i S također bio nula. Izrazi (4.48) i (4.49) su u kontradikciji s (4.47). □

Sad ćemo dati iskaz teorema koji uzima u obzim stabilnu izoperimetrijsku sferu.

Teorem 4.3. *Promatramo elektrovakuumske maksimalne početne podatke s nenegativnom kozmološkom konstantom. Pretpostavljamo da je $\mathcal{S}$ stabilna izoperimetrijska sfera. Onda vrijedi:*

$$A(\mathcal{S}) \geq \frac{4\pi}{3}(Q_E^2 + Q_M^2)\,, \tag{4.50}$$

gdje su Q_E i Q_M električni i magnetski naboj plohe [12].

Kažemo da je ploha $\mathcal{S}$ izoperimetrijska ako po svim plohama koje zatvaraju isti volumen kao i $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ ima najmanju površinu. Ovaj teorem je kvazilokalan jer uključuje

samo uvjete na plohu, elektrovakuum je zahtjev samo na plohi dok oko nje materija smije biti nabijena.

5 Nejednakosti veličine i angularnog momenta

Promatramo rotirajuće tijelo U s angularnim momentom $J(U)$ i postavljamo $\mathcal{R}(U)$ kao mjeru veličine tijela, s mjernom jedinicom duljine. Kasnije ćemo bolje definirati radijus $\mathcal{R}$, zasad nam je bitan sami pojam veličine. Postavlja se univerzalna nejednakost za sva tijela u obliku:

$$\mathcal{R}^2(U) \gtrsim \frac{G}{c^3}|J(U)| \,, \tag{5.1}$$

gdje su G gravitacijska konstanta, c brzina svjetlosti te znak $\gtrsim$ označava red veličine te bi izraz bio precizniji kad bismo imali dobru definiciju $\mathcal{R}$.
Za početak navodimo fizikalne argumente koji podupiru ovu nejednakost i utemeljeni su na fizikalnim principima:

1. brzina svjetlosti c je maksimalna brzina,

2. za tijela koja nisu u crnoj rupi vrijedi nejednakost:

$$\mathcal{R}(U) \gtrsim \frac{G}{c^2}m(U) \,, \tag{5.2}$$

   gdje je $m(U)$ masa tijela,

3. nejednakost (5.1) vrijedi za crne rupe.

Drugi argument posljedica je hipoteze o zatočenim plohama (B.3), koja kaže da za suprotnu nejednakost, zatočena ploha zatvara U. Drugim riječima, ako je materija zatvorena u dovoljno malo područje, sustav će propasti u crnu rupu. Za treći argument, nejednakost:

$$A \geq 8\pi\frac{G}{c^3}|J| \,, \tag{5.3}$$

vrijedi za osnosimetrične crne rupe, gdje je A površina stabilne marginalno zatočene plohe i J njezin angularni moment. Površina je mjera veličine u kojoj se nalazi $\mathcal{R}^2$, tako da gornji izraz predstavlja verziju izraza (5.1) za osnosimetrične crne rupe. Moguća generalizacija na tijela bi išla preko površine ruba $A(\partial U)$, ali to nije dobra mjera u zakrivljenim prostorima, primjerice rotirajući torus u limesu slabog polja, s

velikim većim radijusom i malim manjim. Prvi i treći argument su dokazane činjenice, dok je drugi posljedica te pretpostavke. Želimo dokazati (5.1) uz pretpostavku da sva tri gore navedena argumenta vrijede. Promotrimo slučaj, u Newtonovoj teoriji, koji opisuje osnosimetrično tijelo U s gustoćom mase $\bar{\rho}$ i angularnom brzinom ω; te veličine ne moraju biti konstantne na U. Angularni moment i ukupna masa su dani sa:

$$\begin{aligned} J(U) &= \int_U \bar{\rho}\omega r^2 dV_0 \ , \\ m(U) &= \int_U \bar{\rho} dV_0 \ , \end{aligned} \tag{5.4}$$

gdje je r euklidska udaljenost od osi rotacije i dV_0 volumni element. Kutna brzina je ograničena sa:

$$|\omega| = \frac{|v|}{r} \leq \frac{c}{r} \ , \tag{5.5}$$

gdje koristimo činjenicu da je c maksimalna brzina. Dalje ograničavamo angularni moment:

$$|J(U)| \leq c \int_U \bar{\rho} r dV_0 \leq cm(U) \sup_U r \ . \tag{5.6}$$

Ako je tijelo unutar crne rupe, onda nejednakost (5.1) vrijedi za granicu crne rupe po trećem argumentu. Ako pretpostavimo da tijelo nije u crnoj rupi, vrijedi (5.2). Koristeći tu nejednakost za masu, dalje dobivamo:

$$\frac{G}{c^3} J(U) \lesssim \mathcal{R}(U) \sup_U r \ . \tag{5.7}$$

Možemo pretpostaviti da, barem u ravnim prostorima, vrijedi:

$$\sup_U r \leq \mathcal{R}(U) \ , \tag{5.8}$$

te kad to ubacimo u (5.7), dobivamo početni izraz (5.1). Čak i ako ne vrijedi (5.8), desna strana izraza (5.7) može se interpretirati kao kvadrat mjere veličine tijela U te bi svakako vrijedila jedna vrsta nejednakosti kao (5.1).

Velik izazov proučavanja nejednakosti oblika (5.1) i (5.2) leži u samoj definiciji veličina, točnije mjere veličine $\mathcal{R}$. Ne postoji univerzalna mjera tako da vrijedi pretpostavka o zatočenim plohama, ali vidjet ćemo kasnije da nam za pronalazak idealne mjere $\mathcal{R}$ i samim time dokaz (5.1) ne treba (5.2) ni mjera mase $m(U)$ za pretpostavku o zatočenim plohama.

Postoje dva načina na koja možemo povećati angularni moment tijela fiksne veličine: povećamo angularnu brzinu ili masu tijela. Oba mehanizma su ograničena. Angularna brzina je ograničena brzinom svjetlosti c, a masa za zadanu veličinu će ograničena stvaranjem crne rupe, gdje svakako vrijedi nejednakost (5.1). Očekujemo univerzalnu nejednakost takvog oblika za sva tijela.

Prije svega, precizirat ćemo sve veličine u nejednakosti (5.1). Tijelo U je povezan otvoren podskup $U \subset S$ s glatkom granicom ∂U, gdje je S prostorna $3-$ploha na kojoj je definiran početni skup podataka za Einsteinove jednadžbe. Početni skup podataka dan je sa $(S, h_{\mu\nu}, K_{\mu\nu}, \rho, j^\mu)$, gdje je S povezana $3-$dimenzionalna mnogostrukost, $h_{\mu\nu}$ pozitivno definitna Riemannova metrika, $K_{\mu\nu}$ simetrično tenzorsko polje, j^μ vektorsko polje i ρ skalarno polje na S, tako da su na plohi S zadovoljene jednadžbe ograničenja:

$$D_\nu K^{\mu\nu} - D^\mu K = -8\pi \frac{G}{c^4} j^\mu \,, \tag{5.9}$$

$$R - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} + K^2 = 16\pi \frac{G}{c^4} \rho \,, \tag{5.10}$$

gdje je D_μ Levi-Civita koneksija, R skalarna zakrivljenost povezana s $h_{\mu\nu}$ i $K = K_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$. Polja zadana preko tenzora energije i impulsa $T_{\mu\nu}$ su $\rho = T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$ i $j_\nu = -h_\nu{}^\lambda T_{\lambda\nu} n^\nu$, gdje je n^μ vremenski jedinični vektor normalan na prerez od S. Veza gustoće mase $\bar{\rho}$ i gustoće energije ρ je: $\rho = c^2 \bar{\rho}$. Potrebno nam je da polja zadovoljavaju dominantni energijski uvjet (A.8),

$$\rho \geq \sqrt{j^\mu j_\mu} \,. \tag{5.11}$$

Za preciznu definiciju angularnog momenta pretpostavljamo da su početni podatci osnosimetrični, tj. da postoji Killingovo vektorsko polje ξ^μ,

$$\pounds_\xi h_{\mu\nu} = 0 \,, \tag{5.12}$$

gdje je $\pounds$ Liejeva derivacija i vrijedi

$$\pounds_\xi \rho = \pounds_\xi j^\nu = \pounds_\xi K_{\mu\nu} = 0 \,. \tag{5.13}$$

Uvodimo normu Killingovog vektora: $\xi = (\xi^\mu \xi_\nu)^{1/2}$. Angularni moment tijela U je definiran sa

$$J(U) = -\frac{1}{c}\int_U j_\mu \xi^\mu dV \ , \tag{5.14}$$

gdje je sad dV volumni element u odnosu na metriku $h_{\mu\nu}$.
Sada definiramo veličinu tijela U kao varijantu definicije radijusa koju su predstavili Schoen i Yau.

Definicija 5.1. *Neka je Γ jednostavna zatvorena krivulja u U koja zatvara neki disk u U. Neka je p najveća konstanta takva da je skup točaka koje su za p udaljeni od Γ unutar U i čini pravilni torus. Onda je p mjera veličine od U u odnosu na Γ. Radijus $\mathcal{R}_{SY}(U)$ je definiran kao najveća moguća vrijednost od p po svim krivuljama Γ, tj. preko najvećeg torusa koji se može upisati u U.*

Ovom definicijom dokazan je sljedeći duboki teorem.

Teorem 5.1. *Neka je U neki podskup od S. Pretpostavljamo skalarnu zakrivljenost R metrike $h_{\mu\nu}$ koja je ograničena od ispod $R \geq \Lambda$ u U s nekom pozitivnom konstantom Λ. Tada vrijedi [3]:*

$$\Lambda \leq \frac{8\pi^2}{3}\frac{1}{\mathcal{R}_{SY}^2} \ . \tag{5.15}$$

Ovo je potpuno lokalan i Riemannov rezultat, nema zahtjeva na S, nego samo na metriku $h_{\mu\nu}$.
Nadalje, Ó Murchadha je također dao definiciju radijusa.

Definicija 5.2. *Neka je $\mathcal{R}_{OM}(U)$ veličina najveće stabilne minimalne $2-$plohe koja se može upisati u U, gdje je veličina plohe, s obzirom na metriku $h_{\mu\nu}$, udaljenost od granice plohe do unutarnje najudaljenije točke.*

U tom slučaju je

$$\mathcal{R}_{OM}(U) \geq \mathcal{R}_{SY}(U) \ , \tag{5.16}$$

i ista granica (5.15) vrijedi za $\mathcal{R}_{OM}(U)$.

$$\Lambda \leq \frac{8\pi^2}{3}\frac{1}{\mathcal{R}_{OM}^2} \ . \tag{5.17}$$

Zbog nejednakosti (5.16), $\mathcal{R}_{OM}$ daje bolju granicu.
Kako bismo bolje razumjeli ove mjere veličine, promotrit ćemo ih u ravnom prostoru,

gdje su ravnine minimalne stabilne plohe. Za sferu radijusa b, imamo $\mathcal{R}_{SY} = b/2$, a $\mathcal{R}_{OM} = b$. Za torus velikom radijusa b i malog a, imamo $\mathcal{R}_{SY} = a/2$ i $\mathcal{R}_{OM} = a$. Oba radijusa su neovisna o velikom radijusu b, zbog čega ne možemo očekivati nejednakost oblika (5.1) za $\mathcal{R}_{SY}$ ili $\mathcal{R}_{OM}$, zato što u limesu slabog polja torus velikog b i malog a ima velik angularni moment J i mali $\mathcal{R}_{SY}$ i $\mathcal{R}_{OM}$. Promotrimo sad cilindar radijusa a i visine L. Imamo $\mathcal{R}_{SY} = \min\{a/2, L/2\}$ i $\mathcal{R}_{OM} = a$. Kad je $L > a$, oba radijusa daju sličnu vrijednost, ali za tanki disk $L < a$ imamo $\mathcal{R}_{SY} = L/2$ i $\mathcal{R}_{OM} = a$, tj. $\mathcal{R}_{SY} \to 0$ kako $L \to 0$ dok je $\mathcal{R}_{OM}$ neovisan o L.
Definirat ćemo novi radijus za osnosimetrična tijela.

Definicija 5.3. *Promatramo područje U s Killingovim vektorom ξ^μ s normom ξ. Definiramo radijus:*

$$\mathcal{R}(U) = \frac{2}{\pi} \frac{\left(\int_U \xi dV\right)^{1/2}}{\mathcal{R}_{OM}(U)} , \tag{5.18}$$

koji će biti naša mjera veličine za nejednakost (5.1). Najčešća normalizacija za $\mathcal{R}$ je radijus sfere u ravnim prostorima, stoga se dodaje faktor $2/\pi$.

Također možemo definirati analogni radijus u odnosu na $\mathcal{R}_{SY}$ na način:

$$\mathcal{R}'(U) = \frac{2}{\pi} \frac{\left(\int_U \xi dV\right)^{1/2}}{\mathcal{R}_{SY}(U)} , \tag{5.19}$$

iz čega dalje imamo

$$\mathcal{R}'(U) \geq \mathcal{R}(U) , \tag{5.20}$$

pa $\mathcal{R}(U)$ pruža oštriju granicu za nejednakost (5.1).
Vraćamo se na primjer torusa u ravnom prostoru. Volumni integral norme Killingovog vektora dan je sa:

$$\int_{torus} r dV_0 = 2\pi^2 a^2 \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right) , \tag{5.21}$$

iz čega možemo dobiti:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= 2^{3/2} \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)^{1/2} , \\ \mathcal{R}' &= 2\mathcal{R} . \end{aligned} \tag{5.22}$$

U slučaju $a \to 0$ imamo $\mathcal{R} = 2^{3/2} b$, što znači da torus s velikim b također ima veliku "veličinu" u odnosu na $\mathcal{R}_{SY}$ i $\mathcal{R}_{OM}$. Također, možemo izračunati $\mathcal{R}$ za zvijezdu konstantne gustoće ukupne mase m s radijusom jednakim Schwarzschilovom $2mG/c^2$.

Promatramo slučaj točno prije stvaranja crne rupe. $\mathcal{R}_{OM}$ je pronađen u [16]. Dobivamo:

$$\mathcal{R} = \frac{2^{11/2}}{\pi\sqrt{3}}\frac{G}{c^2}m \approx 8.16\frac{G}{c^2}m \ , \tag{5.23}$$

koji je istog reda veličine kao i površinski radijus što ga čini dobrom mjerom veličine. Nadalje, imamo

Teorem 5.2. *Neka je $(S, h_{\mu\nu}, K_{\mu\nu}, \rho, j^\mu)$ početni skup podataka koji zadovoljavaju dominantni energijski uvjet. Pretpostavljamo maksimalne podatke: $K = 0$ i osnu simetriju. Neka je U otvoren podskup od S. Pretpostavljamo da je gustoća energije ρ konstantna na U. Vrijedi nejednakost*

$$\mathcal{R}'^2(U) \geq \frac{24}{\pi^3}\frac{G}{c^3}|J(U)| \ . \tag{5.24}$$

Ista nejednakost vrijedi za $\mathcal{R}(U)$ ako pretpostavimo da je granica ∂U prosječno konveksna (eng. mean convex), tj. da je srednja zakrivljenost pozitivna i prema van [3].

Dokaz. Angularni moment dan je izrazom (5.14). Definiramo jedinični vektor $\hat{\xi}^\mu$:

$$\hat{\xi}^\mu = \frac{\xi^\mu}{\xi} \ . \tag{5.25}$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} |J(U)| &\leq \frac{1}{c}\int_U |j^\mu \xi_\mu| dV = \frac{1}{c}\int_U \left| j^\mu \hat{\xi}_\mu \right| \xi dV \\ &\leq \frac{1}{c}\int_U \sqrt{j^\mu j_\mu}\xi dV \\ &\leq \frac{1}{c}\int_U \rho\xi dV \ , \end{aligned} \tag{5.26}$$

gdje smo koristili jediničnu duljinu vektora $\hat{\xi}^\mu$ i dominantni energijski uvjet. Pretpostavili smo maksimalne podatke $K = 0$, pa po jednadžbi (5.10), imamo

$$R \geq 16\pi\frac{G}{c^4}\rho \ . \tag{5.27}$$

Pretpostavili smo da je ρ konstantna (i pozitivna po energijskom uvjetu) na U, stoga možemo uzeti:

$$\Lambda = 16\pi\frac{G}{c^4}\rho \ , \tag{5.28}$$

te vrijedi Schoen-Yauov teorem, tj. vrijedi izraz (5.15) i imamo

$$\rho \leq \frac{\pi}{6}\frac{c^4}{G}\frac{1}{\mathcal{R}_{SY}^2} \ . \tag{5.29}$$

Koristimo ovu granicu u (5.26) i dobijemo

$$|J(U)| \leq \frac{\pi}{6}\frac{c^3}{G}\frac{1}{\mathcal{R}_{SY}^2}\int_U \xi dV = \frac{\pi^3}{24}\frac{c^3}{G}\mathcal{R}'^2 \ , \tag{5.30}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili (5.19) definiciju $\mathcal{R}'$. Pod pretpostavkom srednje konveksnosti, ista nejednakost vrijedi i za $\mathcal{R}$. Ovim je dokazan iskaz teorema. □

Pod pretpostavkom osne simetrije gravitacijski valovi nemaju angularni moment; sav je sadržan u materiji. Zato je Newtonov izraz sličan relativističkom. Uvjet maksimalne brzine c izražen je u dominantnon energijskom uvjetu (5.11). Također, iz nejednakosti (5.26) bez pretpostavke o konstantnosti ρ, dobivamo nejednakost:

$$|J(U)| \leq cm(U)\sup_U \xi \ , \tag{5.31}$$

s masom definiranom kao:

$$m(U) = \frac{1}{c^2}\int_U \rho dV \ , \tag{5.32}$$

što je ekvivalentno nejednakosti (5.6). Duljina azimutalnih kružnica je $2\pi\xi$, stoga ξ predstavlja prirodnu generalizaciju od r u zakrivljenim prostorima. Također, ovdje smo koristili Schoen-Yauovu granicu za gustoću energije (5.15), umjesto (5.2) za masu što nam je omogućilo da zaobiđemo hipotezu o obruču (eng. hoop conjecture) (B.4). Nadalje, bitno je naglasiti da se ovaj radijus ne može primijeniti na crne rupe jer zahtijeva regularnu unutrašnjost, a nema ni povezanost s površinom crne rupe.
Nejednakost (5.1) je neovisna o modelu materije, jedino zahtijeva da vrijedi dominantni energijski uvjet. Također je posljedica Einsteinove teorije. Da bi tijelo narušavalo nejednakost trebalo bi biti malih dimenzija s velikom kutnom brzinom, kao neutronska zvijezda. Za neke tipične vrijednosti kutne brzine, mase i radijusa,

$$\begin{gathered} \omega \approx 4.5 \times 10^3 \quad rad/s \quad , \quad m \approx 3M_\odot \ , \\ \mathcal{R} \approx 1.2 \times 10^4 \quad m \ , \end{gathered} \tag{5.33}$$

svakako dobijemo da nejednakost vrijedi:

$$\frac{G}{c^3}|J| = \frac{G}{c^3}m\omega\mathcal{R}^2 \approx 3.8 \times 10^6 \quad m^2 \quad \leq \quad \mathcal{R}^2 \approx 1.44 \times 10^8 \quad m^2 \ . \tag{5.34}$$

Konačno, zanimljivo je promotriti i elementarne čestice.

$$J = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad , \hbar = 1.05 \times 10^{-34} \quad kg \quad m^2/s \ , \tag{5.35}$$

gdje je s spin čestice. Koristeći izraz (5.1), dobijemo da klasična teorija ograničava minimalnu veličinu čestice spina s:

$$\mathcal{R}_0 = (s(s+1))^{1/4} l_p \quad , \quad l_p = \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2} , \tag{5.36}$$

gdje je $l_p = 1.6 \times 10^{-35}\ m$ Planckova duljina, koju dobijemo zato što je red veličine univerzalne konstante 1 u (5.1). Zanimljiva je posljedica Einsteinovih jednadžbi da predviđaju minimalnu duljinu reda veličine Planckove konstante ako postoji minimum angularnog momenta dan kvantnom mehanikom.

6 Bekensteinove granice

Bekensteinove granice za entropiju tijela postavljaju univerzalnu nejednakost koja povezuje veličinu, energiju, angularni moment i naboj. Nejednakost ćemo pokazati pomoću elektromagnetizma i posebno, za slučaj bez angularnog momenta, putem opće teorije relativnosti.

Univerzalna granica na entropiju makroskopskog tijela dana je s:

$$\frac{\hbar c}{2\pi k_B} S \leq \mathcal{E}\mathcal{R}, \tag{6.1}$$

gdje je S entropija, k_B Boltzmannova konstanta, $\mathcal{R}$ radijus najmanje sfere koja zatvara tijelo, $\mathcal{E}$ ukupna energija, $\hbar$ reducirana Planckova konstanta i c brzina svjetlosti. Poopćenje gornje relacije na nabijeno tijelo s angularnim momentom glasi:

$$\frac{\hbar c}{2\pi k_B} S \leq \sqrt{(\mathcal{E}\mathcal{R})^2 - c^2 J^2} - \frac{Q^2}{2} \ . \tag{6.2}$$

Ove nejednakosti sastavljene su s crnim rupama na umu, stoga je zanimljivo da se gravitacijska konstanta G ne pojavljuje. Budući da je entropija nenegativna, za desnu stranu nejednakosti imamo granicu koju možemo preoblikovati u nejednakost koja isključuje entropiju i $\hbar$:

$$\frac{Q^2}{4\mathcal{R}^2} + \frac{c^2 J^2}{\mathcal{R}^2} \leq \mathcal{E}^2 \ . \tag{6.3}$$

Iz jednakosti u gornjem izrazu, dobili bismo entropiju jednaku nuli, što je posebno stanje sustava. Jedina konstanta koja se pojavljuje u (6.3) je c te je elektromagnetizam prvi izbor za ispitivanje nejednakosti. Pokazat ćemo da je izraz (6.3) posljedica Maxwellovih jednadžbi preko indirektnog, ali netrivijalnog dokaza.

6.1 Elektromagnetizam

Za početak, zapišimo Maxwellove jednadžbe.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad , \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \ , \tag{6.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \ . \tag{6.5}$$

Ovdje su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ električno i magnetsko polje, ρ je gustoća naboja, a $\mathbf{j}$ je gustoća struje. Jednadžbe su napisane u odnosu na inercijalni sustav $(t, \mathbf{x})$ gdje su prostorne koordinate centrirane oko proizvoljne točke x_0.
Neka je U proizvoljno prostorno područje. Naboj unutar U je dan s:

$$Q(U) = \int_U \rho \ , \tag{6.6}$$

a energija elektromagnetskog polja u U:

$$\mathcal{E}(U) = \frac{1}{8\pi}\int_U \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) \ . \tag{6.7}$$

Angularni moment u smjeru jediničnog vektora $\mathbf{k}$ u odnosu na točku x_0 dan je s:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{4\pi c}\int_U \big(\mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\big) \cdot \mathbf{k} \ . \tag{6.8}$$

Za daljnje proučavanje izraza (6.3), trebamo definirati radijus $\mathcal{R}$ područja U.

Definicija 6.1. *Definiramo radijus $\mathcal{R}$ područja U kao radijus najmanje sfere koja za-*

tvara U.

S $B_{\mathcal{R}}$ označavamo kuglu koja zatvara U sa središtem u x_0, a s $\partial B_{\mathcal{R}}$ granicu od $B_{\mathcal{R}}$, tj. sferu radijusa $\mathcal{R}$. Počinjemo s elektrostatskim slučajem koji implicira $J = 0$. Elektrostatske jednadžbe su:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \, . \tag{6.9}$$

Potencijal Φ definira se izrazom $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \Phi$ i zadovoljava Poissonovu jednadžbu:

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho \, . \tag{6.10}$$

Pomoću Gaussovog teorema, naboj možemo zapisati preko integrala:

$$Q(U) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial U} \partial_n \Phi \, , \tag{6.11}$$

gdje je ∂_n parcijalna derivacija po vanjskom jediničnom normalnom vektoru granice ∂U. Ukupna elektrostatska energija je:

$$\mathcal{E}(U) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 \, . \tag{6.12}$$

Teorem 6.1. *Pretpostavimo da gustoća naboja ρ ima kompaktan zatvarač u području U. Tada u elektrostatici vrijedi nejednakost:*

$$Q^2 \leq 2\mathcal{E}\mathcal{R} \, , \tag{6.13}$$

gdje je Q naboj sadržan u U, $\mathcal{R}$ radijus definiran ranije i $\mathcal{E}$ ukupna elektrostatska energija. Jednakost se postiže kada je električno polje jednako polju sferne tanke ljuske konstantne površinske gustoće naboja i radijusa $\mathcal{R}$, što dodatno implicira da električno polje iščezava u U [2].

Dokaz. Sustav ima električno polje $\mathbf{E}$ s potencijalom Φ, gustoću naboja ρ i naboj Q. Neka su $\mathcal{R}$ radijus od U i $B_{\mathcal{R}}$ kugla centrirana u x_0. Uvodimo pomoćni potencijal:

$$\Phi_0 = \begin{cases} \frac{Q}{r} & \text{za } r \geq \mathcal{R} \, , \\ \frac{Q}{\mathcal{R}} & \text{za } r \leq \mathcal{R} \, , \end{cases} \tag{6.14}$$

sa r kao radijalnom udaljenosti od x_0. Potencijal Φ_0 odgovara potencijalu tanke sferne ljuske radijusa $\mathcal{R}$, konstantne površinske gustoće i ukupnog naboja Q.
Definiramo razliku

$$\Phi_1 = \Phi - \Phi_0 \ , \tag{6.15}$$

koji zadovoljava:

$$\Delta\Phi_1 = \begin{cases} 0 & \text{za } r > \mathcal{R} \ , \\ -4\pi\rho & \text{za } r < \mathcal{R} \ , \end{cases} \tag{6.16}$$

$$\oint_{\partial B_{\mathcal{R}}} \partial_r \Phi_1 = 0 \ . \tag{6.17}$$

Jednadžba (6.17) vrijedi zato što smo u definiciji Φ_0 iskoristili ukupni naboj Q potencijala Φ. Ukupna energija sustava dana je sa

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\Phi|^2 \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla\Phi_0|^2 + |\nabla\Phi_1|^2 + 2\nabla\Phi_0 \cdot \nabla\Phi_1 \right) \ . \end{aligned} \tag{6.18}$$

Zadnji član ćemo razmotriti tako da domenu podijelimo na dva dijela: $\mathbb{R}^3 \backslash B_{\mathcal{R}}$ i $B_{\mathcal{R}}$. Imamo

$$\int_{B_{\mathcal{R}}} \nabla\Phi_0 \cdot \nabla\Phi_1 = 0 \ , \tag{6.19}$$

jer je Φ_0 konstantan na $B_{\mathcal{R}}$. Za drugi integral imamo

$$\int_{\mathbb{R}^3 \backslash B_{\mathcal{R}}} \nabla\Phi_0 \cdot \nabla\Phi_1 = \int_{\mathbb{R}^3 \backslash B_{\mathcal{R}}} \left(\nabla \cdot (\Phi_0 \nabla\Phi_1) - \Phi_0 \Delta\Phi_1 \right) \ . \tag{6.20}$$

Drugi član s desne strane iščezava zbog uvjeta (6.16) izvan kugle. Prvi član možemo pretvoriti u rubni integral

$$\int_{\mathbb{R}^3 \backslash B_{\mathcal{R}}} \nabla \cdot (\Phi_0 \nabla\Phi_1) = \lim_{r\to\infty} \oint_{\partial B_r} \Phi_0 \partial_r \Phi_1 - \oint_{\partial B_{\mathcal{R}}} \Phi_0 \partial_r \Phi_1 \ . \tag{6.21}$$

Prvi član iščezava zbog uvjeta trnjenja u beskonačnosti. Za drugi član imamo

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B_{\mathcal{R}}} \Phi_0 \partial_r \Phi_1 &= \Phi_0 \oint_{\partial B_{\mathcal{R}}} \partial_r \Phi_1 \\ &= 0 \ , \end{aligned} \tag{6.22}$$

gdje smo koristili Φ_0 =konst. na sferi i jednadžbu (6.17). Pokazali smo da je ukupna

energija zadana sa

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla \Phi_0|^2 + |\nabla \Phi_1|^2 \right) . \tag{6.23}$$

Prvi član možemo eksplicitno izračunati koristeći definiciju potencijala Φ_0.

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2\mathcal{R}} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \Phi_1|^2 . \tag{6.24}$$

Ova jednakost dokazuje izraz (6.13). Ako vrijedi jednakost u (6.13), onda (6.24) ukazuje na $\nabla \Phi_1 = 0$ i $\mathbf{E} = -\nabla \Phi_0$. □

Jednakost (6.24) također daje procjenu polja unutar domene U,

$$\mathcal{E} - \frac{Q^2}{2\mathcal{R}} \geq \frac{1}{8\pi} \int_U |\mathbf{E}|^2 , \tag{6.25}$$

gdje koristimo $\nabla \Phi_1 = \nabla \Phi = \mathbf{E}$ u U. Bitno je naglasiti da je energija $\mathcal{E}$ u izrazu (6.13) ukupna elektrostatska energija sustava, tj. energija vezanja: rad potreban za dovođenje naboja iz beskonačnosti.

Alternativan način dokaza nejednakosti (6.13) je pomoću Thomsonovog teorema, koji kaže da tijelo fiksnog oblika, veličine i naboja ima minimalnu elektrostatsku energiju kad se naboj ravnomjerno rasporedi po njegovoj površini s konstantnim potencijalom unutar tijela. U tom slučaju razmatramo vodič s istim ukupnim nabojem i veličinom, s manjom ili jednakom ukupnom energijom. Neka je U vodič i definiramo potencijal Φ_1 na način:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1 &= 0 \text{ u } \mathbb{R}^3 \backslash U , \\ \Phi_1 &= 1 \text{ na } \partial U , \\ \lim_{r \to \infty} \Phi_1 &= 0 . \end{aligned} \tag{6.26}$$

Kapacitet je dan jednadžbom:

$$C = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial U} \partial_n \Phi_1 , \tag{6.27}$$

te zadovoljava poznati izraz:

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C} . \tag{6.28}$$

Za vodič, izraz (6.13) ekvivalentan je izrazu:

$$C \leq \mathcal{R} \,. \tag{6.29}$$

Koristimo varijaciju kapaciteta:

$$C = \frac{1}{4\pi} \inf_{\Phi \in K} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus U} |\nabla \Phi|^2 \,, \tag{6.30}$$

gdje je K skup svih funkcija Φ koje trnu u beskonačnosti i jednake su 1 na rubu ∂U. Koristeći sljedeću testnu funkciju:

$$\Phi_R = \begin{cases} \frac{\mathcal{R}}{r} & \text{za } r \geq \mathcal{R} \,, \\ 1 & \text{za } r \leq \mathcal{R} \,, \end{cases} \tag{6.31}$$

vrijedi $\Phi_R \in K$ i koristeći varijaciju od C možemo pisati:

$$C \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\mathcal{R}}} |\nabla \Phi|^2 = \mathcal{R} \,. \tag{6.32}$$

Izraz (6.13) ne vrijedi ako imamo puno nepovezanih područja i gledamo radijus i naboj jednog s energijom cijelog sustava. Izraz također ne vrijedi ako radijus definiramo preko površine tijela:

$$\mathcal{R}_A = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \,, \tag{6.33}$$

gdje je A površina granice ∂U. $\mathcal{R}_A$ je najjednostavnija definicija radijusa koja se može prenijeti u zakrivljene prostore, čak i u ravnim nije dovoljno dobra u našem kontekstu.

U nastavku bavimo se potpunim Maxwellovim jednadžbama. Za početak ćemo dokazati izraz (6.3) kad je $Q = 0$ i $J \neq 0$.

Teorem 6.2. *Razmatramo rješenje Maxwellovih jednadžbi u domeni U. Neka je $\mathcal{R}$ radijus ranije definiran i x_0 središte odgovarajuće sfere. Vrijedi nejednakost*

$$c|J(U)| \leq \mathcal{R}\mathcal{E}(U) \,, \tag{6.34}$$

gdje je $J(U)$ angularni moment elektromagnetskog polja dan jednadžbom (6.8) u odnosu na točku x_0. Jednakost se postiže ako i samo ako elektromagnetsko polje iščezava

u U [2].

Jednadžba (6.34) je kvazilokalna, u suprotnosti s prošlom (6.13); pojavljuju se veličine definirane samo na U. Budući da je $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}(U)$, implicira se i globalna nejednakost,

$$c|J(U)| \leq \mathcal{R}\mathcal{E} \ . \tag{6.35}$$

Dokaz. Procjenjujemo razliku:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(U) - \frac{c}{\mathcal{R}}|J(U)| &= \frac{1}{8\pi}\int_U \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) - \frac{1}{4\pi\mathcal{R}}\left|\int_U \big(\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\big)\cdot\mathbf{k}\right| \\ &\geq \frac{1}{8\pi}\int_U \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - \frac{2}{\mathcal{R}}\big|\big(\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\big)\cdot\mathbf{k}\big|\right) \ . \end{aligned} \tag{6.36}$$

Promatramo integrand angularnog momenta, tj. gustoću angularnog momenta,

$$\begin{aligned} \big|\big(\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\big)\cdot\mathbf{k}\big| &\leq |\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})|\cdot|\mathbf{k}| \\ &= |\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})| \\ &\leq |\mathbf{x}||\mathbf{E}||\mathbf{B}| \ . \end{aligned} \tag{6.37}$$

Koristili smo nejednakost $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$, činjenicu da je $\mathbf{k}$ jedinični vektor i nejednakost $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Cijeli integrand možemo zapisati u obliku:

$$|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - \frac{2}{\mathcal{R}}\big|\big(\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\big)\cdot\mathbf{k}\big| \geq |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2\frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}|\mathbf{E}||\mathbf{B}| \ . \tag{6.38}$$

Desnu stranu nejednakosti raspisujemo prema:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - 2\frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}|\mathbf{E}||\mathbf{B}| &= |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 - \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) \\ &\quad + \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) - 2\frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}|\mathbf{E}||\mathbf{B}| \\ &= \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}\right)\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) + \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}\left(|\mathbf{E}| - |\mathbf{B}|\right)^2 \\ &\geq \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}\right)\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) \ . \end{aligned} \tag{6.39}$$

S ovim nejednakostima, konačno možemo pisati

$$\mathcal{E}(U) - \frac{c}{\mathcal{R}}|J(U)| \geq \frac{1}{8\pi}\int_U \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}\right)\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) \ . \tag{6.40}$$

Po definiciji $\mathcal{R}$, imamo $|\mathbf{x}| \leq \mathcal{R}$ na U, tako da je integrand na desnoj strani nenega-

tivan, što dokazuje izraz (6.34). Također, ako vrijedi jednakost, onda integrand na desnoj strani iščezava. Tada za svaki $\mathbf{x} \in U$ koji nije na sferi $\partial B_{\mathcal{R}}$ imamo da su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ nula. Zbog kontinuiteta, polja su također nula na točkama na sferi $\partial B_{\mathcal{R}}$. $\square$

Izraz (6.34) može se generalizirati za bilo koju klasičnu teoriju polja i pokazuje se kao posljedica dominantnog energijskog uvjeta. Neka je $T_{\mu\nu}$ elektromagnetski tenzor energije i impulsa, s 4-dimenzionalnim indeksima i koristimo signaturu $(-,+,+,+)$. Imamo tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$ ranije definiran izrazom (3.39). Promatramo prostornu plohu U s normalom n^μ. Energija je dana s integralom:

$$\mathcal{E} = \int_U T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \ . \tag{6.41}$$

Neka je ξ^μ Killingovo vektorsko polje koje odgovara prostornim rotacijama. Angularni moment dan je sa:

$$J(U) = \frac{1}{c} \int_U T_{\mu\nu} n^\mu \xi^\nu \ . \tag{6.42}$$

Biramo prostorne koordinate x^i na plohi U i $n^\mu = (1,0,0,0)$, Što čini prostorne rotacije karakterizirane sa

$$\xi_i = \epsilon_{ijk} k^j x^k \ , \tag{6.43}$$

gdje je k proizvoljni konstantni prostorni vektor koji predstavlja os rotacije.
Pretpostavljamo da $T_{\mu\nu}$ zadovoljava dominantni energijski uvjet,

$$T_{\mu\nu} k^\mu l^\nu \geq 0 \ , \tag{6.44}$$

za sve buduće orjentirane vremenske ili svjetlosne vektore k^μ i l^μ. Označimo s ξ kvadratnu norme od ξ^i na način $\xi = \xi^i \xi_i = \xi^\mu \xi_\mu$ i definiramo jedinični vektor $\hat{\xi}^\mu = \xi^\mu \xi^{-1/2}$. Tada je vektor

$$k^\mu = n^\mu - \hat{\xi}^\mu \ , \tag{6.45}$$

buduće orjentirani svjetlosni jer je $n^\mu \xi_\mu = 0$. Biramo n^μ umjesto l^μ i koristimo gore zadani k^μ da zapišemo dominantni energijski uvjet:

$$T_{\mu\nu} n^\mu k^\mu = T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \ , \tag{6.46}$$

pa dalje imamo

$$T_{\mu\nu}\, n^\mu n^\nu \geq T_{\mu\nu}\, n^\mu \hat{\xi}^\nu \ . \tag{6.47}$$

Budući da je ξ kvadrat udaljenosti od osi, pišemo:

$$\xi \leq \mathcal{R}^2 \ , \tag{6.48}$$

gdje je $\mathcal{R}$ radijus kugle koja zatvara U. Dalje raspisujemo angularni moment,

$$\begin{aligned} J(U) = \frac{1}{c}\int_U T_{\mu\nu}\, n^\mu \xi^\nu &= \frac{1}{c}\int_U T_{\mu\nu}\, n^\mu \xi^{1/2}\hat{\xi}^\nu \\ &\leq \frac{\mathcal{R}}{c}\int_U T_{\mu\nu}\, n^\mu \hat{\xi}^\nu \\ &\leq \frac{\mathcal{R}}{c}\int_U T_{\mu\nu}\, n^\mu n^\nu \\ &= \frac{\mathcal{R}\mathcal{E}(U)}{c} \ , \end{aligned} \tag{6.49}$$

te je ovim općenito dokazan izraz (6.34) za proizvoljni tenzor energije i impulsa koji zadovoljava dominantni energijski uvjet.
Dokazujemo (6.3) u elektromagnetizmu u najopćenitijem slučaju.

Teorem 6.3. *Pretpostavimo da $\rho(x, t_0)$ za neki t_0 ima kompaktan zatvarač u U. Promatramo rješenje Maxwellovih jednadžbi koje iščezava u beskonačnosti. Vrijedi nejednakost u t_0:*

$$\frac{c|J(U)|}{\mathcal{R}} + \frac{Q^2}{2\mathcal{R}} \leq \mathcal{E} \ , \tag{6.50}$$

koja implicira nejednakost:

$$\frac{Q^4}{4\mathcal{R}^2} + \frac{c^2|J(U)|^2}{\mathcal{R}^2} \leq \mathcal{E}^2 \ . \tag{6.51}$$

Štoviše, ako vrijedi jednakost u (6.50), elektromagnetsko polje je ono koje stvara elektrostatska tanka sferna ljuska radijusa $\mathcal{R}$ i naboja Q. U tom slučaju magnetsko polje iščezava svugdje i $J = 0$ [2].

Dokaz. Počinjemo s Coulombovim baždarenjem:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \ , \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \ , \end{aligned} \tag{6.52}$$

gdje je $\mathbf{A}$ potencijal koji zadovoljava:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \,. \tag{6.53}$$

Energiju možemo pisati kao:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla \Phi|^2 + 2\nabla\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 + |\mathbf{B}|^2 \right) , \end{aligned} \tag{6.54}$$

gdje smo električno polje rastavili u skladu s baždarenjem. Drugi izraz u integralu možemo raspisati na sljedeći način:

$$\nabla\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\Phi \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \Phi \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\Phi \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) . \tag{6.55}$$

Koristeći asimptotsko iščezavanje polja, dobivamo:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \left(\Phi \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \,, \tag{6.56}$$

tako da energija sad izgleda ovako:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla \Phi|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 + |\mathbf{B}|^2 \right) . \tag{6.57}$$

Potencijal $\Phi(x,t)$ zadovoljava Poissonovu jednadžbu:

$$\Delta \Phi(x,t) = -4\pi\rho(x,t) \,, \tag{6.58}$$

za svaki t. Fiksiramo li t, možemo ponoviti dekompoziciju potencijala na Φ_0 i Φ_1. Ovdje imamo

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2\mathcal{R}} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla \Phi_1|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 + |\mathbf{B}|^2 \right) . \tag{6.59}$$

Iz jednadžbe (6.56) istim argumentima dolazimo i do izraza:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \,, \tag{6.60}$$

kojeg možemo ubaciti u jednadžbu za energiju:

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2\mathcal{R}} + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\left|\nabla\Phi_1 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + |\mathbf{B}|^2\right). \tag{6.61}$$

Integral rastavljamo na domene $\mathbb{R}^3\backslash U$ i U.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\Phi_1 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 &= \int_{\mathbb{R}^3 U}\left|\nabla\Phi_1 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + \int_U\left|\nabla\Phi_1 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3\backslash U}\left|\nabla\Phi_1 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + \int_U\left|\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3\backslash U}\left|\nabla\Phi_1 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + \int_U |\mathbf{E}|^2,\end{aligned} \tag{6.62}$$

gdje smo koristili $\nabla\Phi_1 = \nabla\Phi$ na U jer je Φ_0 konstanta na U, i izraz za električno polje u Coulombovom baždarenju. Dalje pišemo energiju:

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2\mathcal{R}} + \mathcal{E}(U) + \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^3\backslash U}\left(|\nabla\Phi_1|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + |\mathbf{B}|^2\right). \tag{6.63}$$

Koristimo izraz (6.40) da ograničimo $\mathcal{E}(U)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} - \frac{Q^2}{2\mathcal{R}} - \frac{c|J(U)|}{\mathcal{R}} \geq \frac{1}{8\pi}\Bigg(\Bigg(\int_{\mathbb{R}^3\backslash U}\left(|\nabla\Phi_1|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) \\ + \int_U\left(1 - \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}}\right)\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right)\Bigg)\Bigg).\end{aligned} \tag{6.64}$$

Budući da je lijeva strana nenegativna, nejednadžba (6.50) je dokazana. Ako pretpostavimo jednakost u (6.50), gornji integrand iščezava svugdje. To implicira $\mathbf{B} = 0$ svugdje, pa je potencijal $\mathbf{A}$ gradijent. Onda, koristeći uvjet $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ i uvjet iščezavanja u beskonačnosti, zaključujemo da je $\mathbf{A} = 0$. Koristeći gornji izraz dobivamo i $\nabla\Phi_1 = 0$. Kvadriranjem dobivene nejednakosti (6.50) dobivamo

$$\frac{c|J(U)|Q^2}{\mathcal{R}} + \frac{Q^4}{4\mathcal{R}^2} + \frac{c^2J^2}{\mathcal{R}^2} \leq \mathcal{E}^2. \tag{6.65}$$

□

6.2 *Opća teorija relativnosti*

Sad proučavamo nejednakost (6.3) u kontekstu opće teorije relativnosti.

6.2.1 Nejednakosti veličine, naboja i angularnog momenta

Za crnu rupu, entropija je zadana površinom horizonta:

$$S_{bh} = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A \ . \tag{6.66}$$

Izraz (6.2) je konstruiran tako da, koristeći (6.66), za Kerr-Newmanovu crnu rupu dobijemo jednakost. Za obična tijela nejednakost (6.3) je usko povezana s nejednakostima veličine, angularnog momenta i naboja. Hipoteza o obruču (B.4) kaže da ako je materija zatvorena u dovoljno malo područje, sustav propada u crnu rupu. Stoga, ako tijelo nije crna rupa, vrijedi nejednakost

$$\frac{G}{c^4}\mathcal{E} \leq k\mathcal{R} \ , \tag{6.67}$$

gdje je k univerzalna bezdimenzionalna konstanta reda 1, čiji iznos ovisi o formulaciji hipoteze. Gornji izraz koristimo za ograničavanje energije u (6.3) i dobivamo

$$\frac{Q^4}{4} + c^2 J^2 \leq k^2 \frac{c^8}{G^2}\mathcal{R}^4 \ , \tag{6.68}$$

gdje se sad pojavljuje gravitacijska konstanta G, uz konstantu c, ali i jedna manje fizikalna veličina (nema energije). Granica implicira nejednakost za angularni moment,

$$\frac{G}{c^3}|J| \leq k\mathcal{R}^2 \ , \tag{6.69}$$

i za naboj,

$$|Q| \leq (2k)^{1/2} \frac{c^2}{G^{1/2}}\mathcal{R} \ . \tag{6.70}$$

Veza Bekensteinovih granica i nejednakosti (6.69) i (6.70) daje nam važan uvid. Izraz (6.69) smo ranije pokazali u poglavlju (5) heurističkim argumentima te se slično može dobiti i (6.70) te su izrazi posebno pronađeni. Naime, tako se ne dobiva potpuna nejednakost (6.68). Također, trebala bi se fiksirati univerzalna konstanta k u limesu sferne simetrije s $J = 0$, a se na tome još radi.

Dodatno, posvetimo se ograničenju koje stvara nejednakost (6.68). Kad bi se ostvarila jednakost, budući da objekt nije crna rupa, možemo koristiti hipotezu o obruču i dobiti

$$\frac{Q^4}{4} + c^2 J^2 = k^2 \frac{c^8}{G^2} \mathcal{R}^4 \geq \mathcal{E}^2 \ . \tag{6.71}$$

Onda možemo koristiti izraz (6.3) da zaključimo, ako vrijedi jednakost u (6.68), onda mora vrijediti i u (6.3), što znači da po Bekensteinovoj granici (6.2) entropija tijela mora biti nula. Imamo sljedeće ograničenje za (6.68): jednakost se postiže ako i samo ako je entropija tijela nula. U općoj relativnosti, jednakost je postignuta ako i samo ako je prostorvrijeme ravno (Minkowski).

6.3 Vremenski simetrični početni podatci

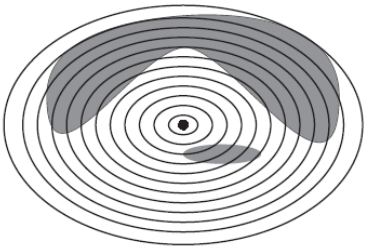
Sad gledamo generalizaciju vremenski simetričnih podataka u općoj relativnosti. Najveći izazov je definicija mjere veličine $\mathcal{R}$ u zakrivljenim prostorima. Definicija se temelji na inverznom srednjem toku zakrivljenosti (eng. inverse mean curvature flow). Familija $2-$ploha na Riemannovoj mnogostrukosti evoluira pod inverznim srednjim tokom zakrivljenosti ako je normalna brzina prema van kojom se točka na plohi giba dana recipročnom vrijednosti srednje zakrivljenosti plohe (C). Definiramo radijus $\mathcal{R}$ područja U na Riemannovoj mnogostrukosti.

Definicija 6.2. *Promatramo područje U na potpunoj, asimptotski ravnoj Riemannovoj mnogostrukosti. Uzmimo točku x_0 na mnogostrukosti i promatramo inverzni srednji tok zakrivljenosti koji počinje iz te točke. Promatramo površinu prve $2-$plohe na toku koja zatvara područje U i definiramo $\mathcal{R}_{x_0}$ kao radijus te plohe. Radijus $\mathcal{R}$ je definiran kao infimum od $\mathcal{R}_{x_0}$ po svim točkama x_0 na mnogostrukosti.*

U ravnom prostoru, inverzni srednji tok zakrivljenosti koji počinje u nekoj točki generira sfere, tako da se gornja definicija podudara s prošlom.

Radijus $\mathcal{R}$ može se eksplicitno numerički procijeniti za proizvoljne zakrivljenosti. Također, bitno je spomenuti da će tok razviti singularitete, ali mi ćemo pretpostaviti glatkoću.

Teorem 6.4. *Promatramo asimptotski ravan, potpun, vremenski simetričan skup početnih podataka za Einsteinove jednadžbe koji zadovoljava dominantni energijski uvjet i nema minimalnih ploha. Pretpostavljamo da postoji domena U izvan koje su podatci u*



Slika 6.1: Shematski crtež inverznog srednjeg toka zakrivljenosti iz neke točke. Zadnja ploha je definirana kao prva koja u potpunosti zatvara područje U. Preuzeto iz [2].

elektrovakuumu. Imamo

$$Q^2 \leq 2\mathcal{E}\mathcal{R}\,, \tag{6.72}$$

gdje je $\mathcal{E}$ ADM masa, Q naboj sadržan u U i $\mathcal{R}$ radijus od U gore definiran. Nadalje, ako vrijedi jednakost, onda su podatci ravni u U [2].

Dokaz. Važno svojstvo inverznog srednjeg toka zakrivljenosti je Gerochova monotonost Hawkingove energije (C) koja je dana izrazom:

$$\mathcal{E}_H(\mathcal{S}) = \sqrt{\frac{A}{16\pi}}\Big(1 - \frac{1}{16\pi}\int_{\mathcal{S}} H^2\Big)\,, \tag{6.73}$$

gdje je H srednja zakrivljenost plohe i A njena površina. Gerochovu monotonost možemo zapisati na sljedeći način: promatramo tok između dviju ploha $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_s$, $r < s$; imamo

$$\mathcal{E}_H(\mathcal{S}_s) \geq \mathcal{E}_H(\mathcal{S}_r) + \frac{1}{(16\pi)^{3/2}}\int_r^s A_t^{1/2}\int_{\mathcal{S}_t} R dt\,, \tag{6.74}$$

gdje je R skalarna zakrivljenost. Prisjetimo se da dominantni energijski uvjet za vremenski simetrične podatke nalaže da je $R \geq 0$.

Promatramo proizvoljnu točku x_0 i pustimo tok iz točke. Budući da podatci zadovoljavaju dominantni energijski uvjet, mala sfera će se formirati oko x_0 koja ima nenegativnu Hawkingovu masu. Pretpostavka da nema minimalnih ploha znači da tok ide do beskonačnosti. Iz jednadžbe (6.74) zaključujemo da za bilo koji ovako zadan tok imamo nenegativnu Hawkingovu energiju, posebno za plohu $\mathcal{S}_{x_0}$ koja zatvara U:

$$\mathcal{E}_H(\mathcal{S}_{x_0}) \geq 0\,. \tag{6.75}$$

Označavamo s A_{x_0} površinu plohe $\mathcal{S}_{x_0}$ i površinski radijus:

$$\mathcal{R}_{x_0} = \sqrt{\frac{A_{x_0}}{4\pi}} \ . \tag{6.76}$$

Dalje nastavljamo tok od $\mathcal{S}_{x_0}$ do beskonačnosti. Ograničavamo integral skalarne zakrivljenosti nabojem:

$$\frac{1}{(16\pi)^{3/2}} \int_{x_0}^{\infty} (A_t)^{1/2} \int_{\mathcal{S}_t} R dt \geq \frac{Q^2}{2\mathcal{R}_{x_0}} \ , \tag{6.77}$$

gdje smo koristili činjenicu da je naboj očuvan izvan $\mathcal{S}_{x_0}$ jer po konstrukciji ploha $\mathcal{S}_{x_0}$ zatvara područje U i po pretpostavci gustoća naboja je zatvorena u U. Dalje imamo

$$\mathcal{E} - \frac{Q^2}{2\mathcal{R}_{x_0}} \geq \mathcal{E}_H(\mathcal{S}_{x_0}) \ , \tag{6.78}$$

tj. konačno

$$\mathcal{E} - \frac{Q^2}{2\mathcal{R}_{x_0}} \geq 0 \ . \tag{6.79}$$

Ako vrijedi jednakost, to znači da je $\mathcal{E}_H(\mathcal{S}_{x_0}) = 0$ i možemo zaključiti da su podatci unutar $\mathcal{S}_{x_0}$ ravni. □

Sličan rezultat dobili smo u (6.25), gdje je $\mathcal{E}_H(\mathcal{S}_0)$ interpretirana kao kvazilokalna energija unutar $\mathcal{S}_0$. Zanima nas vrijedi li za teorem (6.4) da ako vrijedi jednakost u (6.79) da je polje proizvedeno tankom sfernom ljuskom, kao u elektromagnetskom slučaju. To se ipak neće dogoditi jer u općoj relativnosti moramo u obzir uzeti i energiju mirovanja ljuske. Zato nam treba jači uvjet za jednakost: prostorvrijeme Minkowskog.

7 Zaključak

Promatrali smo ograničenja kompaktnosti astrofizičkih tijela izražena preko geometrijskih nejednakosti parametara mase, naboja, angularnog momenta i površine. Počevši od izoperimetrijske nejednakosti, tako reći uvoda u temu, sve do formalizama za definiciju veličine u zakrivljenim prostorima, oslanjali smo se na dominantni energijski uvjet i teorem pozitivne energije.

Ispitali smo omjer mase i radijusa fizikalno mogućeg, statičnog sferno-simetričnog objekta obične gravitirajuće materije i pokazali da teorija daje gornju granicu ispod vrijednosti na kojoj se stvara horizont. Buchdahlov teorem koristan je u promatranju alternativa crnim rupama. Dobre alternative konstruirane su u uvjetima ekstremne kompaktnosti i kršenja Buchdahlove nejednakosti, što bi značilo da pretpostavke teorema nisu dobre, npr. sferna simetrija, materija opisana idealnim fluidom itd.

Nadalje, promatrali smo nejednakosti osnosimetričnih crnih rupa, predstavili globalne i kvazilokalne nejednakosti s raznim pretpostavkama na početne podatke ili mnogostrukosti. Značajni otvoreni problemi vezani su uz Penroseovu nejednakost, tj. uključivanje angularnog momenta u istu, kao i uvjeti maksimalnih početnih podataka i više asimptotskih krajeva. Također, poopćivanje nejednakosti (3.75) na slučaj bez simetrijskog uvjeta.

Promatrali smo nejednakosti površine i naboja $A \geq 4\pi Q^2$ bez simetrijskih uvjeta za crne rupe i općenita područja prostorvremena koja nisu nužno granice crnih rupa. Opisali smo formalizam marginalno zarobljenih ploha i uvjeta koje za sobom vuku, kao i koncept apsolutnih naboja i zaklanjajućih ploha.

Predstavili smo i nejednakost koja ograničava angularni moment tijela kvadratom mjere veličine. Promotrili smo nekoliko definicija veličine tijela i time poboljšavali početnu pretpostavku nejednakosti.

Konačno smo predstavili Bekensteinove granice koje smo elegantno objasnili u formalizmu elektromagnetizma i opće teorije relativnosti. Dodatno smo uveli inverzni srednji tok zakrivljenosti koji nam je pomogao pri definiranju veličine tijela za vremenski simetrične početne podatke.

Dodaci

Dodatak A Dopunski dokazi

A.1 Operator varijacije δ

Varijacija ili deformacija $2-$plohe S_0 je glatka $1 \to 1$ funkcija tipa:

$$\Phi(s, \lambda) : S_0 \times [-\lambda_0, \lambda_0] \to \mathcal{M} \ , \tag{A.1}$$

gdje su λ_0 neki realni brojevi, takva da je $\Phi(S_0, 0) = S_0$.
Neka je mnogostrukost $\mathcal{M}$ sastavljena od familije prostornih Cauchyjevih ploha $\{\Sigma_t\}$. Prividni horizont definiran je kvazilokalno kao familija granica područja koja sadrže zatočene plohe u $\{\Sigma_t\}$. Ako je dovoljno gladak, prividni horizont sastoji se od marginalno zatočenih vanjskih ploha, koje imaju iščezavajuću svjetlosnu ekspanziju prema van: $\theta^{(l)} = 0$. Pratimo izvod iz [14], tj. koristimo dobivene varijacije veličina i primjenjujemo na naš slučaj.

Dokaz. Dokazujemo lemu (4.1). Promatramo $(\delta_x \theta^{(l)})/\psi$ s osnosimetričnim γ i ψ, i zahtijevamo $\theta^{(l)} = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\psi}\delta_x\theta^{(l)} = -\frac{\gamma}{\psi}\Big(\sigma^{(l)}_{\mu\nu}\sigma^{(l)\mu\nu} + G_{\mu\nu}l^\mu l^\nu\Big) - {}^2\Delta \ln\psi - D_\mu \ln\psi D^\mu \ln\psi \\ + 2\Omega^{(l)}_\mu D^\mu \ln\psi - \Big(- D^\mu\Omega^{(l)}_\mu + \Omega^{(l)}_\lambda\Omega^{(l)\lambda} - \frac{1}{2}\,{}^2R + G_{\mu\nu}k^\mu l^\nu\Big) \ ,\end{aligned} \tag{A.2}$$

gdje su korišteni izrazi (2.23) i (2.24) iz [14]. Dalje izraz integriramo na plohi $\mathcal{S}$.

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{1}{\psi}\delta_x\theta^{(l)} dA \geq 0 \tag{A.3}$$

. Integriramo po dijelovima:

$$\begin{aligned}0 \leq \int_{\mathcal{S}} \frac{\gamma}{\psi}\Big(- \sigma^{(l)}_{\mu\nu}\sigma^{(l)\mu\nu} - G_{\mu\nu}l^\mu l^\nu\Big)dA + \int_{\mathcal{S}}\Big(- \Omega^{(l)}_\mu\Omega^{(l)\mu} + \frac{1}{2}{}^2R - G_{\mu\nu}k^\mu l^\nu\Big)dA \\ - \int_{\mathcal{S}} D_\mu \ln\psi D^\mu \ln\psi dA + \int_{\mathcal{S}} 2\Omega^{(l)}_\mu D^\mu \ln\psi dA \ .\end{aligned} \tag{A.4}$$

Iz osne simetrije imamo nam članovi $D^\mu\Omega^{(l)}_\mu$ i ${}^2\Delta \ln\psi$ integriraju u 0. Organiziramo

članove u kvadrat:

$$0 \leq \int_{\mathcal{S}} \frac{\gamma}{\psi}\Big(- \sigma^{(l)}_{\mu\nu}\sigma^{(l)\mu\nu} - G_{\mu\nu}l^\mu l^\nu\Big)dA + \int_{\mathcal{S}} \Big(\frac{1}{2}{}^2R - G_{\mu\nu}k^\mu l^\nu\Big)dA \\ - \int_{\mathcal{S}} \big(D_\mu \ln\psi - \Omega^{(l)}_\mu\big)\big(D^\mu \ln\psi - \Omega^{(l)\mu}\big)dA\ . \quad \text{(A.5)}$$

Iz Gauss-Bonnetovog teorema imamo

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{1}{2}{}^2R dA = 4\pi(1-g)\ . \quad \text{(A.6)}$$

Član sa $\sigma^{(l)}_{\mu\nu}\sigma^{(l)\mu\nu}$ nije pozitivan, kao ni treći integral u (A.5). Kombinacijom zaključaka, lema vrijedi. □

A.2 Dominantni energijski uvjet

Sad ćemo pokazati da vrijedi (5.11).

$$\begin{aligned} \rho^2 &\geq j^\mu j_\mu = h_{\mu\nu}j_\nu j_\mu \\ T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu &\geq g^{\mu\nu}(-h_\nu{}^\lambda T_{\lambda\nu}n^\nu)(-h_\mu{}^\sigma T_{\sigma\mu}n^\mu) \\ &\geq g^{\mu\nu}h_\nu{}^\lambda h_\mu{}^\sigma T_{\lambda\nu}n^\nu T_{\sigma\mu}n^\mu \\ &\geq \delta^\lambda_\mu \delta^\sigma_\nu T_{\lambda\nu}n^\nu T_{\sigma\mu}n^\mu \\ &\geq T_{\lambda\nu}n^\nu T^\lambda{}_\mu n^\mu\ . \end{aligned} \quad \text{(A.7)}$$

Konačno:

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \geq \sqrt{T_{\lambda\nu}n^\nu T^\lambda{}_\mu n^\mu}\ . \quad \text{(A.8)}$$

Dodatak B Nekoliko važnih teorema

Ovdje predstavljamo neke važne teoreme ranije spomenute da što bolje razumijemo crne rupe, plohe i naboje.

Teorem B.1. *(Teorem o jedinstvenosti crne rupe) Jedino moguće stacionarno i osnosimetrično rješenje crne rupe za Einstein-Maxwellove jednadžbe, koje zadovoljava odgovarajuće asimptotske rubne uvjete, je Kerr-Newmanovo rješenje, koje je ograničeno sa:*

$$m^2 - \Big(\frac{J}{m}\Big)^2 - Q^2 > 0 \quad \text{(B.1)}$$

Crna rupa je u potpunosti karakterizirana trima parametrima: ukupnom masom m, ukupnim angularnim momentom J i ukupnim nabojem Q [13].

Ovaj teorem prije svega postavlja zahtjev da ne postoji više rješenja Einsteinove jednadžbe koja mogu biti opisana istim parametrima.

Teorem B.2. *(Teorem o površini crne rupe) Za bilo koji dinamični proces koji uključuje crne rupe (npr. gravitacijski raspad) ukupna površina horizonta događaja ne može se smanjivati u vremenu. Ukupna površina crne rupe u zatvorenom sustavu može samo ostati ista ili rasti [19].*

Teorem B.3. *(Pretpostavka o zatočenim plohama – eng. trapped surface conjecture) Neka je $(\mathcal{M}, g)$ prostorvrijeme koje zadovoljava Einsteinove jednadžbe i sadrži zatočenu plohu. Pretpostavimo da je prostorvrijeme globalno hiperbolno i ne sadrži zatvorene vremenske krivulje. Tada postoji buduće orjentirana neprostorna krivulja u $(\mathcal{M}, g)$ koja stiže u svjetlosnu beskonačnost [14].*

Neformalno, teorem kaže da se prije stvaranja singulariteta mora stvoriti zatočena ploha.

Teorem B.4. *(Hipoteza o obruču – eng. hoop conjecture) Neka je $\mathcal{S}$ zatvorena, orjentabilna i kompaktna ploha upisana u $3-$dimenzionalnu Riemannovu mnogostrukost s pozitivno definitnom metrikom g. Promatramo vektorsko polje X^μ na $\mathcal{S}$ koje nije nigdje tangencijalno na $\mathcal{S}$ i zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *ne iščezava nigdje na $\mathcal{S}$,*
2. *integralna krivulja od X^μ koja prolazi kroz bilo koju točku p na $\mathcal{S}$ vraća se u istu točku p bez presjecanja $\mathcal{S}$ i tvori zatvorenu krivulju,*
3. *duljina te zatvorene krivulje je manja ili jednaka $2\pi\sqrt{\max\{A\}}$ gdje je A površina od $\mathcal{S}$ s obzirom na metriku.*

Ako su gornji uvjeti zadovoljeni, onda $\mathcal{S}$ ima opseg manji ili jednak $2\pi\sqrt{\max\{A\}}$, što je kriterij za gravitacijski raspad i potencijalno stvaranje crne rupe [20].

Neformalno, ako se objekt može stisnuti u prostorno područje opsega manjeg ili jednakog $2\pi\sqrt{\max\{A\}}$ onda je vrlo izgledno da će se dogoditi gravitacijski raspad i stvaranje crne rupe.
Gledamo općenitu relaciju naboja i površine stabilne minimalne plohe.

Teorem B.5. *(Gauss-Bennet) Neka je $\mathcal{M}$ kompaktna, orjentirana i glatka $4-$mnogostrukost i Σ zatvorena, orjentabilna, $2-$ploha smještena u $\mathcal{M}$ kao prostorna hiperploha s Lorentzovom metrikom. Neka je R skalarna zakrivljenost i K Gaussova zakrivljenost inducirane metrike na Σ. Imamo*

$$\int\int_{\Sigma} K dA = 2\pi\chi(\Sigma) - 2\pi g \,, \tag{B.2}$$

gdje je $\chi(\Sigma)$ Eulerova karakteristika plohe, koja je topološka invarijanta ovisna o genusu i broju rubnih komponenti [18].

Teorem B.6. *(Gibbons) Neka je $\mathcal{S}$ stabilna minimalna ploha. Tada je*

$$A \geq 4\pi Q^2 \,, \tag{B.3}$$

gdje je A površina plohe i Q njen naboj [12].

Dokaz. Nejednakost stabilnosti

$$\int_{\mathcal{S}} \Big(|D\alpha|^2 + \frac{1}{2}{}^2 R\alpha^2\Big) dA \geq \frac{1}{2}\int_S R dA \,, \tag{B.4}$$

gdje s $\alpha = 1$ dobivamo:

$$4\pi \geq \frac{1}{2}\int_S R dA \geq \int_S |X|^2 dA \geq \frac{\Big(\int_S X_\mu n^\mu dA\Big)^2}{A} = \frac{(4\pi Q)^2}{A} \,, \tag{B.5}$$

gdje je zadnja nejednakost dolazi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti. □

Dio dokaza usput pokazuje da vrijedi:

$$A \leq \frac{4\pi}{\overline{|X|^2}} \,, \tag{B.6}$$

gdje je $\overline{|X|^2}$ prosjek $|X|^2$ po S. Kombinacijom ovog rezultata i (B.3), u slučaju elektromagnetskog polja, imamo

$$\overline{|E|^2 + |B|^2} \leq \frac{1}{Q_E^2 + Q_M^2} \tag{B.7}$$

Drugim riječima, prosjek elektromagnetske energije po $\mathcal{S}$ je omeđen odozgo zbrojem

kvadrata električnog i magnetskog naboja. Elektromagnetska energija ne može biti proizvoljno velika po $\mathcal{S}$ ako je S minimalna i stabilna.

Propozicija B.1. *Neka je Ω zaklonjeno područje asimptotskog kraja Σ_e i neka je $\mathcal{S} = \partial\Omega$ zaklanjajuća ploha. Onda imamo*

1. $|Q(\Sigma_e)| = \left|\sum_{i=1}^{i=n(\Omega)} Q(\mathcal{S}_i)\right| \leq n(\Omega)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{i=n(\Omega)} Q^2(\mathcal{S}_i)\Big)^{1/2}$, *gdje je Q ili električni ili magnetski naboj,*

2. $n(\Omega) \leq |H_2|$, *gdje je H_2 drugi Bettijev broj,*

3. $\frac{Q^2(\Sigma_e)}{|H_2|} \leq \tilde{Q}^2(\mathcal{S})$

Dodatak C Inverzni srednji tok zakrivljenosti

Inverzni srednji tok zakrivljenosti geometrijski opisuje vremensku evoluciju hiperplohe na osnovi srednje zakrivljenosti te hiperplohe u svakoj točki.

Definicija C.1. *Neka je S glatka hiperploha u $n-$dimenzionalnoj Riemannovoj mnogostrukosti s metrikom g. Za hiperplohu imamo funkciju $\phi : \mathcal{S} \to S$, gdje je $\mathcal{S}$ $(n-1)-$dimenzionalna podmnogostrukost, i za svaku točku u $\mathcal{S}$, $\phi(p)$ je točka na S. Promatramo jednoparametarsku familiju preslikavanja $\phi_t : \mathcal{S} \to S$, gdje je vrijeme $t \geq 0$. Imamo $S_t = \phi_t(\mathcal{S})$. Evolucijska jednadžba za inverzni srednji tok zakrivljenosti dana je diferencijalnom jednadžbom:*

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = -H(p,t) \cdot v(p,t) \tag{C.1}$$

Svaka točka na hiperplohi giba se u smjeru normalnog vektora $v(p,t)$ prema van, skalirana srednjom zakrivljenosti $H(p,t)$ u toj točki prostorvremena. Hiperploha se ovim jednadžbama širi.
Cilj korištenja ove metode je razumijevanje geometrijskih svojstava hiperploha pod utjecajem toka i stvaranje singulariteta u procesu.

C.1 Gerochova monotonost i Hawkingova masa

Modificirana Hawkingova masa na $2-$plohama definirana je kao:

$$m_H(\mathcal{S}_t) = \int \Big(R - H^2 + \lambda\Big) dA \tag{C.2}$$

gdje je R skalarna zakrivljenost, H srednja zakrivljenost i λ konstanta. Promatramo monotonost Hawkingove mase, tj. da je funkcija $m_H(\mathcal{S}_t)$ nepadajuća funkcija of t. Geroch je pokazao da je masa nepadajuća kad ploha $\mathcal{S}$ ide prema van brzinom inverznog srednjeg toka zakrivljenosti. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}_t$ familija povezanih ploha koja evoluira jednadžbom:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{v}{H} \tag{C.3}$$

gdje je v jedinični vektor koji je suprotan smjeru srednje zakrivljenosti. Dobivena je monotonost:

$$\frac{d}{dt} m(\mathcal{S}_t) \geq 0 \tag{C.4}$$

Bibliography

[1] Treibergs, A. Inequalities that Imply the Isoperimetric Inequality, (4.3.2002), University of Utah, http://www.math.utah.edu/~treiberg/isoperim/isop.pdf, 12.09.2023

[2] Dain, S. : Bekenstein bounds and inequalities between size, charge, angular momentum, and energy for bodies. // Phys. Rev. Lett., Vol. 92, 4(2015)

[3] Dain, S. : Inequality between size and angular momentum for bodies. // Phys. Rev. Lett., Vol. 112, 4(2014),

[4] Riemannian Penrose Inequality, https://en.wikipedia.org/wiki/Riemannian_Penrose_inequality

[5] Positive Energy Theorem, https://en.wikipedia.org/wiki/Positive_energy_theorem

[6] Schoen, R.; Yau, S. T : On the Proof of the Positive Mass Conjecture in General Relativity, Commun. math. Phys., Vol. 65, 45—76 (1979)

[7] Carroll, S. M. Spacetime and Geometry : Addison Wesley, 2004.

[8] Buchdahl, H. A. : General relativistic fluid spheres, Phys. Rev. Lett., Vol. 116, 1027 (1959)

[9] Wald, R. M. General Relativity : University of Chicago Press, 1984.

[10] Dain, S. : Geometric inequalities for axially symmetric black holes // Classical and Quantum Gravity. Vol. 22, 7(2012)

[11] Radjabaycolle, F. et al : Modified Hawking Mass and Geroch Monotonicity on 2-Surfaces // J. Phys.: Conf. Ser. 739 012046 (2016)

[12] Dain, S.; Jaramillo, J. L.; Reiris, M. : Area-charge inequality for black holes // Classical and Quantum Gravity, Vol. 29, 10(2011)

[13] Mazur, P. O. : Black Hole Uniqueness Theorems, (31.12.2000), arXiv, https://arxiv.org/abs/hep-th/0101012, 4.9.2023.

[14] Booth, I.; Fairhurst, S. : Isolated, slowly evolving, and dynamical trapping horizons: geometry and mechanics from surface deformations // Phys. Rev. D, Vol. 75, 8(2007)

[15] Jaramillo, J. L.; Reiris, M.; Dain, S. : Black hole Area-Angular momentum inequality in non-vacuum spacetimes // Phys. Rev. D, Vol. 84, 12(2012)

[16] O Murchadha, N. : How large can a star be? Phys. Rev. Lett., 57(19):2466–2469, 1986.

[17] Huisken, G.; Ilmanen, T. : The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality // J. Diff. Geom. Vol. 59, 352 (2001).

[18] Gauss-Bonnet theorem, Wolfram MathWorld, `https://mathworld.wolfram.com/Gauss-BonnetFormula.html`, 12.9.2023.

[19] Bardeen, J. M.; Carter, B.; Hawking, S. W. : The four laws of black hole mechanics Communications in Mathematical Physics. Vol. 31 (2): 161–170 (1973)

[20] Flanagan, E. E. Topics in general relativity : the hoop conjecture and theoretical aspects of gravitational wave detection. Dissertation (Ph.D.), California Institute of Technology. doi:10.7907/7SW7-8076. (1994) `https://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-11132006-095610`, 12.9.2023.