Tvorba mase – 1. dio

Žugec, Petar; Rukelj, Zoran; Friščić, Ivica

Source / Izvornik: **Matematičko fizički list, 2023, 73, 152 - 162**

Journal article, Published version
Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:231392

Tvorba mase – 1. dio

Petar Žugec[1], *Zoran Rukelj*[2], *Ivica Friščić*[3]

Ovaj prilog sastoji se od dva dijela, u kojima ćemo na jednostavnome primjeru proučiti *intrinzično relativistički* problem pretvorbe energije u masu. U prvome dijelu problem ćemo riješiti relativističkim pristupom na više različitih načina. Korištenjem pristupa primjerenog relativističkoj prirodi problema, različitim načinima rješavanja doći ćemo do konzistentnih rezultata. U drugome dijelu isti problem rješavat ćemo aproksimativnim nerelativističkim pritupom, što je vrlo česta i uobičajena praksa. Iako numerički rezultati takvog pristupa mogu sasvim zanemarivo odstupati od ispravnih relativističkih, vidjet ćemo da nerelativistički tretman intrinzično relativističkog problema za sobom nosi drastične konceptualne posljedice.

Problem

Promotrimo tipičan problem nuklearne fizike i fizike elementarnih čestica: čestica mase m nalijeće na *mirujuću* česticu iste mase i pokreće endotermnu reakciju u kojoj se stvaraju nove čestice ukupne mase M, koja je veća od ukupne mase početnih dviju čestica $(M > 2m)$. Koliki je energijski prag reakcije, tj. minimalna kinetička energija čestice projektila potrebna za pokretanje reakcije?

Ključan fenomen o ovome problemu pretvorba je (kinetičke) energije u masu. Kako su jednakost mase i energije (slavna Einsteinova $E = mc^2$) i mogućnost njihove međusobne pretvorbe *potpuno relativistički pojmovi*, morat ćemo koristiti relativistički račun [1]. Sve dok je ukupna promjena mase puno manja od početne mase (tako da je $M \approx 2m$), mogli bismo problem "na silu" riješiti i klasičnim, nerelativističkim računom. To se često i radi u praksi jer su u takvim okolnostima klasični rezultati numerički sasvim prihvatljivi kao dovoljno dobre aproksimacije relativističkih. No kasnije (u drugome dijelu članka) ćemo vidjeti da oni sa sobom nose određene proturječnosti.

Što uopće početni problem čini zahtjevnim? Nije li dovoljno samo osigurati energiju $\Delta E = (M - 2m)c^2$ koja odgovara razlici konačne i početne mase? Odgovor ovisi o promatračkom sustavu iz kojeg promatramo reakciju, tj. o gibanju čitavog skupa čestica spram promatrača – bilo početnih dviju čestica prije reakcije, bilo svih novonastalih čestica nakon reakcije. Sustav koji nas zanima definiran je uvjetom problema, odnosno zahtjevom da jedna čestica prije reakcije miruje. U takvome sustavu jedna čestica ponaša se kao projektil, a druga kao meta, stoga se on i primjereno naziva *sustavom mirujuće mete*. Radi jednostavnosti ćemo u daljnjem tekstu taj sustav zvati *laboratorijskim sustavom*[4]. U njemu problem je složen zbog očuvanja ukupne količine gibanja tijekom reakcije. Količina gibanja vektorska je veličina. Budući da vektorski zbroj količina

[1] Autor je s Fizičkog odsjeka PMF-a Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `pzugec@phy.hr`

[2] Autor je docent s FO PMF-a; e-pošta: `zrukelj@phy.hr`

[3] Autor je docent s FO PMF-a; e-pošta: `ifriscic@phy.hr`

[4] Poistovjećivanje sustava mirujuće mete s laboratorijskim sustavom uobičajena je praksa jer se velik dio eksperimenata diljem svijeta doista provodi u laboratorijskim okolnostima u kojima jedan od reaktanata prije

gibanja projektila i mete u laboratorijskom sustavu na iščezava, čitav sustav giba se kao cjelina. Ukupna količina gibanja sve vrijeme je očuvana, stoga se sustav novonastalih čestica nastavlja gibati kao cjelina i nakon reakcije. Prema tome, osim energije potrebne za tvorbu dodatne mase, projektil mora osigurati i dovoljnu kinetičku energiju za nastavak gibanja produkata reakcije. Upravo taj višak kinetičke energije nije jednostavno unaprijed odrediti bez detaljnog računa.

Konačno rješenje do kojeg ćemo doći sasvim je sporedan rezultat i treba ga tretirati tek kao usputni nusprodukt računa. Naime, u ovome članku naglasak će biti na različitim pristupima problemu i njihovoj dosljednosti. Stoga ćemo relativističkim pristupom problem riješiti na tri načina, a kasnije pokazati kako se formalno neprimjeren pristup (nerelativistički tretman intrinzično relativističkog problema) odražava u nedosljednosti njegovih rezultata. Dva su osnovna relativistička izraza koji će nam trebati. Za česticu mase m prvi je veza njezine *ukupne relativističke* energije E i iznosa p njezine količine gibanja[5]

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4, \tag{A.1}$$

pri čemu je c brzina svjetlosti u vakuumu. Važnost ove relacije u tome je što ona vrijedi u svakom sustavu, tj. za svakog promatrača. Ona pokazuje da iako su u različitim sustavima (koji se gibaju različitim brzinama spram čestice i jedan spram drugoga) energija i količina gibanja čestice različiti, njihova veza i unutar danog sustava i između njih različitih vrlo je stroga i određena baš masom čestice: upravo tako da je u svim sustavima zadovoljena prethodna relacija. Pri tome je masa m jedinstvena veličina, unutarnje svojstvo čestice koje ne ovisi o njezinom gibanju, tj. ista je za sve promatrače. Kao takva masa je *relativistička invarijanta*. To je suvremeno shvaćanje mase koje je u suprotnosti sa zastarjelim povijesnim konceptom "relativističke mase" [2].

Druga bitna relacija Lorentzova je transformacija energije između sustava u relativnom gibanju. Unutar okvira problema kakav smo si postavili pokazat će se da je gibanje svih čestica sve vrijeme ograničeno duž pravca. U tom slučaju, ako u jednom sustavu čestica ima energiju E i količinu gibanja p, njezina energija E' u drugome sustavu koji se giba spram prvoga brzinom V, i to po istome pravcu kao i čestica, određena je Lorentzovom transformacijom

$$E' = \gamma(E + \beta cp), \tag{A.2}$$

gdje su

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \text{i} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{A.3}$$

tipične relativističke pokrate. Član γ zove se Lorentzov faktor. U relativističkim izrazima brzine se tipično pojavljuju u omjeru s brzinom svjetlosti, stoga je prirodno uvijek

reakcije miruje, npr. unutar čvrstog uzorka. No općenito laboratorijski sustav je sustav detektora, tj. onaj sustav u kojem detektori kao "promatrači reakcije" miruju. U najvećem i najpoznatijem akceleratorskom pokusu na svijetu – mjerenju Higgsovog bozona u velikom hadronskom sudarivaču (LHC – *Large Hadron Colider*) u CERN-u – laboratorijski sustav nije sustav mirujuće mete, već sustav centra mase parova protona iz dvaju ukrštenih protonskih snopova.

[5] Ukupna relativistička energija E sastoji se od kinetičke energije E_{kin} i masenog doprinosa mc^2 (tzv. energije mirovanja): $E = E_{\text{kin}} + mc^2$. Za česticu brzine v ukupna relativistička energija dana je izrazom $E = \gamma mc^2$, gdje je γ poznat Lorentzov faktor: $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. To znači da je relativistički ispravan izraz za kinetičku energiju

$$E_{\text{kin}} = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 = \left(1/\sqrt{1-v^2/c^2} - 1\right)mc^2.$$

Poznat nerelativistički izraz $E_{\text{kin}} = mv^2/2$ samo je niskoenergijska aproksimacija prethodnoga izraza, primjenjiva za $v \ll c$, tj. kad je $E_{\text{kin}} \ll mc^2$.

koristiti bezdimenzionalni faktor β. Zbog toga ćemo u daljnjem tekstu član β zvati *faktorom brzine*. U zapisu iz (A.2) članovi β i p ulaze kao *vektorske komponente* brzine i količine gibanja pa ovisno o smjeru gibanja čestice i promatrača mogu imati i negativan predznak, što ćemo kasnije pažljivo uzeti u obzir. Kod Lorentzovih transformacija bitno je primijetiti da brzina V nije brzina predmeta promatranja (naše čestice), već brzina između različitih sustava, tj. relativna brzina dvaju promatrača! Samo kad za jednog promatrača čestica miruje, za drugog promatrača i brzina prvog i brzina čestice bit će jednake (jer se za drugog promatrača prvi i čestica gibaju zajedno). Ovaj specifični scenarij često dovodi do pogrešnog miješanja dviju brzina (predmeta promatranja i promatrača) pri primjeni Lorentzovih transformacija.

Prvi pristup (laboratorijski sustav)

U prvome pristupu s računom ćemo se sve vrijeme zadržati u laboratorijskom sustavu. Kako bismo sa sigurnošću utvrdili kako se rekacija odvija u istome sustavu na samome energijskom pragu, samo ćemo se nakratko pozvati na sustav centra mase.

U bilo kojem promatračkom sustavu ukupnoj količini gibanja $\vec{p}_{\mathrm{uk}}$ doprinose količine gibanja $\vec{p}_i$ svih pojedinih čestica u sustavu: $\vec{p}_{\mathrm{uk}} = \sum_i \vec{p}_i$. Sustav centra mase definiramo kao onaj sustav u kojem ukupna količina gibanja *kao vektorska veličina* iščezava:

$$\vec{p}_{\mathrm{uk}}^{\,(\mathrm{cm})} = \sum_i \vec{p}_i^{\,(\mathrm{cm})} = \vec{0}. \tag{A.4}$$

Već smo zaključili da se u laboratorijskom sustavu (koji smo za svoje potrebe poistovijetili sa sustavom mirujuće mete) skup svih produkata reakcije nastavlja gibati kao cjelina zbog očuvanja ukupne količine gibanja. No u sustavu centra mase i skup reaktanata (prije reakcije) i skup produkata (poslije reakcije) kao cjelina miruje. Ako nakon reakcije postoji više reaktanata, tj. ako se novonastala masa M sastoji od više čestica, tada se i u sustavu centra mase pojedine čestice mogu nastaviti gibati svaka u svoju stranu, što odgovara gibanju *unutar sustava*. No kako u sustavu centra mase nikoji dio energije ne treba biti "rezerviran" za gibanje sustava kao cjeline, u njemu ćemo jasno moći identificirati scenarij "minimalnog gibanja", koji odgovara upravo pragu reakcije. U tom slučaju minimalna energija potrebna za pokretanje reakcije zadužena je tek za stvaranje dodatne mase $(2m \to M)$, bez potrebe za osiguravanjem naknadnoga gibanja. Stoga na pragu reakcije u sustavu centra mase sva novonastala masa M – bilo da se sastoji od više čestica ili od samo jedne jedine – ostaje mirovati na mjestu. Promotrimo li ovaj scenarij iz bilo kojeg drugog sustava (koji se giba spram sustava centra mase), zaključit ćemo da se u takvom sustavu svi "komadi" mase M gibaju kao jedno jedino tijelo, jedinstvenom brzinom! Stoga ćemo svu masu M *na pragu reakcije* računom moći tretirati kao jedno tijelo. Da je projektil ušao u reakciju s imalo više energije, u sustavu centra mase produkti bi se morali razletjeti svaki u svoju stranu zbog viška kinetičke energije nakon stvaranja dodatne mase. Stoga bi se i u svakom drugom sustavu pojedini produkti gibali brzinama općenito različitih iznosa i usmjerenja te bismo ih u računu morali tretirati odvojeno, zasebno prateći energije i količine gibanja svakoga od njih. A u tom slučaju morali bismo osim njihove ukupne mase M poznavati i sve ostale detalje reakcije: koliko ih je ukupno stvoreno i kolika je masa svakoga od njih.

Sada kad smo identificirali kako izgleda scenarij "minimalnog gibanja" na pragu reakcije, moramo samo postaviti zakone očuvanja u laboratorijskom sustavu. Prvo ćemo popisati sve doprinose ukupnoj energiji i ukupnoj količini gibanja prije reakcije. Kako se projektil (p) prije reakcije giba, njegova energija sastoji se i od masenog doprinosa mc^2

i od kinetičke energije koju odmah poistovjećujemo s energijskim pragom reakcije E_{prag}. Energiji mirujuće mete (m) doprinosi samo energija mirovanja, stoga:

$$E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} = mc^2 + E_{\mathrm{prag}}, \tag{A.5}$$

$$E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})} = mc^2. \tag{A.6}$$

Iako i sam prag reakcije ovisi o danome sustavu, u daljnjim pozivima na E_{prag} uvijek ćemo podrazumijevati laboratorijski sustav pa ćemo u zapisu izostavljati oznaku sustava. Ukupna energija na pragu reakcije u laboratorijskom sustavu stoga je

$$E_{\mathrm{uk}}^{(\mathrm{lab})} = 2mc^2 + E_{\mathrm{prag}}. \tag{A.7}$$

Kako se u laboratorijskom sustavu samo projektil giba prije reakcije, samo on doprinosi ukupnoj količini gibanja sustava: $p_{\mathrm{uk}}^{(\mathrm{lab})} = p_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})}$. Posredstvom relacije (A.1) njegova količina gibanja već je određena njegovom energijom iz (A.5) $\left[p_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} c\right]^2 = \left[E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})}\right]^2 - m^2c^4$, odakle:

$$cp_{\mathrm{uk}}^{(\mathrm{lab})} = \sqrt{\left(E_{\mathrm{prag}} + mc^2\right)^2 - m^2c^4}. \tag{A.8}$$

Sada koristimo činjenicu da se na pragu reakcije sva novonastala masa M nastavlja gibati kao jedno tijelo, stoga za njezinu energiju $E_M^{(\mathrm{lab})}$ i količinu gibanja $p_M^{(\mathrm{lab})}$ *na pragu* možemo postaviti *jedinstvenu* relaciju iz (A.1)

$$cp_M^{(\mathrm{lab})} = \sqrt{\left[E_M^{(\mathrm{lab})}\right]^2 - M^2c^4}. \tag{A.9}$$

Budući da novonastala masa nosi svu energiju i količinu gibanja poslije reakcije, iz zakona očuvanja slijedi $E_M^{(\mathrm{lab})} = E_{\mathrm{uk}}^{(\mathrm{lab})}$ i $p_M^{(\mathrm{lab})} = p_{\mathrm{uk}}^{(\mathrm{lab})}$. Odavde uvrštavanjem (A.7) u (A.9) pa izjednačavanjem (A.8) i (A.9) dolazimo do

$$\overbrace{\left(E_{\mathrm{prag}} + mc^2\right)^2 - m^2c^4 = \underbrace{\left(E_{\mathrm{prag}} + 2mc^2\right)^2}_{\text{očuvanje energije}} - \underbrace{M^2c^4}_{\text{na pragu}}}^{\text{očuvanje količine gibanja}}. \tag{A.10}$$

Jasno smo naznačili pojedine fizikalne uzroke ovoj središnjoj jednadžbi, koju samo treba riješiti po E_{prag}

$$\boxed{E_{\mathrm{prag}} = 2mc^2\left[\left(\frac{M}{2m}\right)^2 - 1\right],} \tag{A.11}$$

što predstavlja konačno rješenje početnoga problema. Ponavljamo, naglasak nije na samome rješenju, već na jednome od mogućih pristupa rješavanju.

Drugi pristup (sustav centra mase)

U ovome pristupu računom ćemo prijeći u sustav centra mase (Lorentzovom transformacijom lab $\to$ cm) jer u njemu unaprijed znamo odrediti tijek reakcije na pragu. Nakon toga samo trebamo relevantan dio reakcije obrnutom transformacijom (cm $\to$ lab) vratiti u laboratorijski sustav te iščitati željeni rezultat.

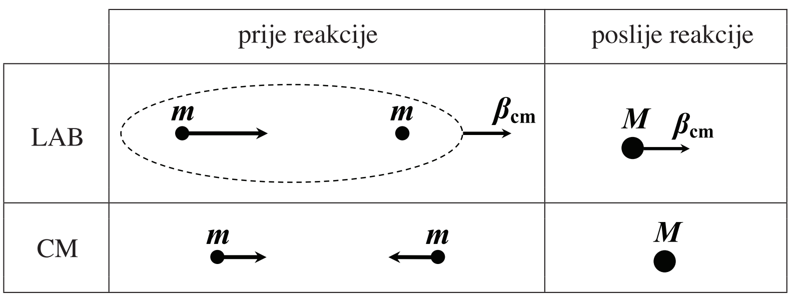
Budući da prije reakcije imamo samo dvije čestice, prema definiciji iz (A.4) za količine gibanja projektila i mete u sustavu centra mase vrijedi $\vec{p}_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} + \vec{p}_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})} = \vec{0}$, odnosno: $\vec{p}_\mathrm{p}^{(\mathrm{cm})} = -\vec{p}_\mathrm{m}^{(\mathrm{cm})}$. Dakle u sustavu centra mase *dviju čestica*, one se *uvijek* gibaju u suprotnim smjerovima, količinama gibanja istog iznosa! Zbog ove simetrije u sustavu centra mase gubi se razlika između projetila i mete (jer obje čestice nalijeću jedna na drugu), ali ćemo ih i dalje smatrati projektilom ili metom na temelju uloga koje imaju u laboratorijskom sustavu. Iz (A.1) zbog jednakih iznosa količina gibanja i zbog *jednakih pretpostavljenih masa* mete i projektila izravno zaključujemo da su im u sustavu centra mase i enegije iste $E_\mathrm{p}^{(\mathrm{cm})} = E_\mathrm{m}^{(\mathrm{cm})}$. Iz ranije rasprave također znamo da je u sustavu centra mase minimalna ukupna energija potrebna za pokretanje reakcije baš energija mirovanja novonastale mase

$$E_\mathrm{p}^{(\mathrm{cm})} + E_\mathrm{m}^{(\mathrm{cm})} = Mc^2. \tag{A.12}$$

Iz simetrije dviju čestica odmah slijedi da na pragu reakcije svaka nosi polovicu potrebne energije

$$E_\mathrm{p}^{(\mathrm{cm})} = E_\mathrm{m}^{(\mathrm{cm})} = \frac{Mc^2}{2}. \tag{A.13}$$

Upravo je to ključna informacija koja ovaj pristup čini korisnim! Sve što trebamo učiniti jest odavde izračunati pripadnu energiju projektila u laboratorijskom sustavu te iz nje iščitati udio koji otpada na kinetičku energiju, koja predstavlja traženi prag reakcije. No kako napraviti prijelaz između sustava? Kojom brzinom se sustav centra mase giba spram laboratorijskog sustava, tj. koji faktor brzine β_cm i pripadni Lorentzov faktor γ_cm trebamo koristiti u Lorentzovim transformacijama energije? Upravo je to središnji problem ovog pristupa.



Pri raspisu Lorentzovih transformacija možemo birati smjer prijelaza između sustava: cm $\to$ lab ili lab $\to$ cm. Pri tome u prototipu transformacija iz (A.2) pažljivo moramo uzeti u obzir predznak člana βcp, ovisno o smjeru gibanja čestice i smjeru gibanja sustava u koji prelazimo. Kako bismo te smjerove jasno držali pod kontrolom, članove β i p tretirat ćemo kao pozitivne veličine (kao iznose umjesto komponenata vektorskih veličina), a samostalno ćemo se pobrinuti za izbor pravilnih predznaka. Iako nam neće biti sve potrebne, iz pedagoških razloga raspisat ćemo sve transformacije energija koje imamo na raspolaganju, za scenarij *prije reakcije*. Kako se u sustavu centra mase projektil giba u istome smjeru kao i sam sustav (smjeru kakav vidimo iz laboratorijskog sustava), očekujemo da će u laboratorijskom sustavu imati veću energiju nego u sustavu centra mase. Meta pak u laboratorijskom sustavu miruje pa baš u njemu ima najmanju moguću energiju. Ova opažanja pomažu nam u izboru pravilnih predznaka unutar svih transformacija koje su nam na raspolaganju. Dvije transformacije u cm $\to$ lab smjeru su:

$$E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} = \gamma_{\mathrm{cm}} \left(E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} + \beta_{\mathrm{cm}} c p_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} \right), \tag{A.14}$$

$$E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})} = \gamma_{\mathrm{cm}} \left(E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})} - \beta_{\mathrm{cm}} c p_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})} \right), \tag{A.15}$$

a dvije u lab $\rightarrow$ cm smjeru su:

$$E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} = \gamma_{\mathrm{cm}} \left(E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} - \beta_{\mathrm{cm}} c p_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} \right), \tag{A.16}$$

$$E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})} = \gamma_{\mathrm{cm}} \left(E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})} + \beta_{\mathrm{cm}} c p_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})} \right). \tag{A.17}$$

Da bismo odredili β_{cm}, odnosno γ_{cm}, potrebna nam je samo jedna jednadžba, stoga se postavlja pitanje koju je najmudrije izabrati. Ako "najbolja" uopće postoji, onda bi to mogla biti ona s kojom ćemo imati najmanje računa. A količinu računa mogli bismo smanjiti ako uspijemo pronaći veličinu čija je vrijednost 0. Kao takvu prepoznajemo količinu gibanja mete u laboratorijskom sustavu, gdje ona miruje: $p_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})} = 0$. Ova veličina pojavljuje se u (A.17) pa je biramo kao najpoželjniju transformaciju. Nakon uvrštavanja te nule od jednadžbe preostaje $E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})} = \gamma_{\mathrm{cm}} E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})}$. A energija mete na pragu reakcije već nam je poznata u oba sustava: ona u laboratorijskome sustavu iz (A.6), a ona u sustavu centra mase iz (A.13). Uvrštavanjem ovih vrijednosti izravno nalazimo tražene relativističke faktore za prijelaz između dvaju sustava:

$$\gamma_{\mathrm{cm}} = \frac{E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})}}{E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})}} = \frac{M}{2m} \quad \text{i} \quad \beta_{\mathrm{cm}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_{\mathrm{cm}}^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{2m}{M} \right)^2}. \tag{A.18}$$

Energiju projektila u laboratorijskom sustavu, potrebnu za pokretanje reakcije, sada lako određujemo iz (A.14). Pri tome nam je pored njegove energije u sustavu centra mase, koju znamo iz (A.13), potrebna i njegova količina gibanja u istome sustavu. A ona je izravno određena njegovom energijom preko opće relativističke relacije (A.1)

$$c p_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} = \sqrt{\left[E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} \right]^2 - m^2 c^4} = \frac{c^2}{2} \sqrt{M^2 - 4m^2}. \tag{A.19}$$

Uvrštavanjem (A.13) i (A.19) u (A.14) napokon slijedi

$$E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} = \left(\frac{M^2}{2m^2} - 1 \right) mc^2. \tag{A.20}$$

Ne zaboravimo da smo ovime odredili ukupnu energiju projektila, dok energijski prag reakcije odgovara kinetičkome dijelu. Stoga iz prethodnog rješenja samo moramo ukloniti energijski ekvivalent mase projektila $E_{\mathrm{prag}} = E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{lab})} - mc^2$, što u konačnici vodi na rješenje identično onome iz (A.11).

Treći pristup (inverzni problem)

U trećem pristupu izokrenut ćemo problem "naglavačke". Dosad smo na temelju poznate mase M koju je trebalo stvoriti određivali *minimalnu energiju* projektila. Pretpostavimo da umjesto toga unaprijed znamo energiju projektila pa se pitamo: kolika je sada *maksimalna masa* koju možemo stvoriti?

U kakvoj je vezi ovaj problem s prethodnim? Ponovno promotrimo scenarij u sustavu centra mase. Kada svu dostupnu energiju uložimo u stvaranje nove mase, tj. kad stvorimo maksimalnu moguću masu za danu ulaznu energiju, sva masa u sustavu centra mase ostaje mirovati jer nam nije ostalo nimalo energije za ikakvo dodatno gibanje. A ovaj scenarij prepoznajemo kao stvaranje mase na pragu reakcije! Prema tome, uspijemo li za danu kinetičku energiju projektila u laboratorijskom sustavu odrediti *maksimalnu ostvarivu* masu, inverz tog rješenja predstavljat će *minimalnu potrebnu* energiju za stvaranje iste mase.

Ovaj pristup razlikuje se od prethodnoga prema toku računa. Ranije smo tražili nepoznati faktor brzine β_{cm} potreban za prijelaz između sustava. Sada nam je on unaprijed poznat jer je gibanje sustava kao cjeline ispočetka zadano poznatom energijom projektila. Pri tome ga nalazimo na vrlo jednostavan način. Samo moramo promatrati sustav projektil-meta kao jedinstvenu cjelinu (kao da ne raspoznajemo njegovu unutarnju strukturu, već ga vidimo kao jedno "tijelo") kako bismo na cjeloviti sustav primijenili jednostavne relativističke izraze za *ukupnu* energiju E_{lab} i količinu gibanja p_{lab} *jedinstvenoga* objekta:

$$E_{\mathrm{lab}} = \gamma_{\mathrm{cm}} m_{\mathrm{s}} c^2 \quad \text{i} \quad p_{\mathrm{lab}} = \gamma_{\mathrm{cm}} m_{\mathrm{s}} v_{\mathrm{cm}}. \tag{A.21}$$

Dijeljenjem tih dviju relacija odmah nalazimo brzinu centra mase v_{cm}, odnosno pripadni faktor brzine $\beta_{\mathrm{cm}} = v_{\mathrm{cm}}/c$ kao:

$$\beta_{\mathrm{cm}} = \frac{p_{\mathrm{lab}} c}{E_{\mathrm{lab}}}. \tag{A.22}$$

Prije nastavka tehničkog računa bitno je prepoznati da je m_{s} iz (A.21) masa *sustava kao cjeline* i općenito *nije* jednaka $2m$. Već znamo da će se na pragu reakcije sva *unutarnja* energija (tj. sva energija iz sustava centra mase) pretvoriti u masu M koja u sustavu centra mase ostaje mirovati, a u laboratorijskom se sustavu nastavlja gibati kao jedno tijelo. U tom slučaju primjena izraza za energiju jedinstvenoga tijela nakon reakcije

$$E_{\mathrm{lab}} = \gamma_{\mathrm{cm}} M c^2 \tag{A.23}$$

postaje doslovna, a ne samo efektivna. Drugim riječima, u (A.21) smo je primijenili *kao da* se tijela različitih brzina gibaju poput jednoga tijela jedinstvene brzine, ali i jedinstvene "redefinirane" mase m_{s}, dok se u (A.23) novonastala masa M *doista* giba kao jedno tijelo upravo tolike mase i upravo brzinom v_{cm} koja se nalazi unutar Lorentzovog faktora γ_{cm}. Temeljem očuvanja ukupne energije možemo izjednačiti izraze prije i poslije reakcije: $\gamma_{\mathrm{cm}} m_{\mathrm{s}} c^2 = \gamma_{\mathrm{cm}} M c^2$. Budući da prema prvom Newtonovom zakonu bez djelovanja vanjskih sila sustav ne može promijeniti svoje stanje gibanja[6], brzina v_{cm} i faktor γ_{cm} ostaju isti prije i poslije reakcije. Odavde slijedi

$$m_{\mathrm{s}} = M, \tag{A.24}$$

odnosno masa *cjelovitog sustava* projektil-meta jednaka je masenom ekvivalentu *sve unutarnje energije* sustava – tj. baš maksimumu mase koju bismo mogli dobiti pretvorbom sve unutarnje energije – neovisno o tome koliki dio te energije otpada na mase pojedinih čestica, a koliki na njihove kinetičke energije.

[6] Newtonovi zakoni i dalje vrijede u Einsteinovoj teoriji relativnosti, s time da valja imati na umu *ispravan* oblik drugog Newtonovog zakona, koji kaže da ukupna sila koja djeluje na tijelo uzrokuje promjenu njegove količine gibanja: $\vec{F} = \mathrm{D}\vec{p}/\mathrm{D}t$. Jedino se u nerelativističkom računu i u posebnim okolnostima (kad sila ne djeluje na dijelove mase koji ulaze u sustav ili izađu iz njega) ovaj zakon svodi na poznatiju, ali ne-općenito-valjanu inačicu $\vec{F} = m\vec{a}$.

FIZIKALNA POZADINA

U vrlo stvarnom i doslovnom smislu ovakva veza između ukupne unutarnje energije i mase sustava *definira što masa (složenog) sustava uopće jest*. Kao takav, ispravan koncept mase u suprotnosti je s uobičajenim, "svakodnevnim" shvaćanjem mase kao puke "količine materijala" koja se sastoji tek od zbroja "količina materijala" pojedinih sastavnica sustava. Drugim riječima, masa složenog sustava općenito *nije* jednaka zbroju masa pojedinih dijelova sustava: $m_\mathrm{s} \neq \sum_i m_i$! Štoviše, pitanje fundamentalne prirode mase (što ona jest na mikroskopskoj razini) posve je netrivijalno. Najnapredniji i najpoznatiji eksperiment fizike elementarnih čestica na svijetu – danas već uspješno završena potraga za Higgsovim bozonom s CERN-a – vezan je uz samo neke aspekte odgovora na ovo pitanje (jer, ponovno suprotno uobičajenom shvaćanju, Higgsov mehanizam [3] ne generira *svu* masu u svemiru, već samo jedan njezin dio).

Neaditivnost masa ($m_\mathrm{s} \neq \sum_i m_i$) posebno se lijepo vidi na atomskoj i subatomskoj skali, u situacijama kad doista nismo u stanju raspoznati unutarnju strukturu sustava. Kad god je uspijemo raspoznati naprednijim eksperimentalnim metodama, fina mjerenja nedvosmisleno potvrđuju da je masa takvih složenih sustava različita od zbroja masa pojedinih sastavnica. Tako danas znamo da je masa molekule manja od zbroja masa pojedinih atoma od kojih je sastavljena (zbog negativne energije vezanja). Masa atoma manja je od zbroja masa njegovih elektrona i atomske jezgre. Masa atomske jezgre manja je od zbroja masa njezinih nukleona – u slučaju atomske jezgre ovaj efekt nosi i poznato povijesno ime "defekt mase". Pri tome, naravno, smanjena masa vezanog sustava poput molekule, atoma ili jezgre ne znači da je nestao dio ukupne energije dostupne prije vezanja, već da je taj višak energije izašao iz sustava, npr. emisijom γ-zračenja. Nasuprot tome, masa nukleona (protona i neutrona, a i drugih čestica sastavljenih od kvarkova) *veća* je od zbroja masa njihovih sastavnih kvarkova – upravo scenarij kakav imamo u svojem problemu! Ovo sve, naravno, kritično ovisi o našoj definiciji mase. Međutim, što god odlučimo smatrati masom mora biti logički neproturječno te mora biti u skladu sa stvarnim eksperimentalnim opažanjima. A većina naših intuitivnih poimanja mase ne zadovoljava te zahtjeve.

Valja napomenuti da bi čak i pokušaj određivanja mase sustava mjerenjem njegove težine hipotetskom "savršenom vagom" polučio iste rezultate! Drugim riječima, čak niti takva vaga ne bi bila u stanju raspoznati "gole" mase pojedinih sastavnica od ostalih doprinosa unutarnoj energiji sustava – i ona bi mjerila *maseni ekvivalent* ukupne energije sustava. Naime, Einsteinova opća teorija relativnosti, čiji su brojni aspekti također eksperimentalno potvrđeni, pokazuje da gravitacija – ključna za mjerenje težine vagom – na isti način djeluje i na energiju i na masu (i suprotno, i energija i masa na isti način utječu na gravitaciju). Stoga čak niti vagom ne bismo uspjeli "prevariti prirodu" te je natjerati da nam otkrije "gole" mase unutar sustava ako pri tome sami nismo u stanju raspoznati njegove unutarnje dijelove.

Usko vezano uz ovo jest značenje zakona očuvanja energije. Danas kad na temelju Einsteinove teorije relativnosti znamo za ekvivalenciju mase i energije, razumijemo da se očuvanje energije odnosi na energiju *u širem smislu*: u smislu ukupne relativističke energije koja se sastoji i od mase i od energije *u užem smislu*, tj. u smislu ne-mase. Drugim riječima, masa i energija-u-užem-smislu očuvane su *zajedno*. Nasuprot tome, unutar nerelativističke fizike – koja nije jednakovrijedna alternativa relativističkoj fizici, već samo njezina aproksimacija – masa i enegija-u-užem-smislu očuvane su *svaka za sebe*. Naime, nerelativisitička fizika ne poznaje ekvivalenciju mase i energije niti slobodu njihove međusobne pretvorbe. Njihova jednakost ($E = mc^2$) je ono što se "izgubi u prijevodu" tijekom aproksimacije jedne teorije drugom.

Ohrabreni ovim razumijevanjem, spremni smo nastaviti s računom. Prema (A.23) maksimalnu novonastalu masu M možemo odrediti izravno iz ukupne energije sustava kao $M = E_{\text{lab}}/\gamma_{\text{cm}}c^2$. Unutar ovoga pristupa ukupna energija projektila i mirujuće mete već nam je poznata jer smo gibanje projektila unaprijed parametrizirali zadavanjem njegove kinetičke energije. U slučaju kad se sva unutarnja energija sustava pretvori u masu, ta kinetička energija odgovarat će upravo energijskom pragu reakcije E_{prag}. Korištenjem te podudarnosti zapis energije projektila i mete u laboratorijskom sustavu svodi se na ranije izraze (A.5) i (A.6), s time da E_{prag} ovaj put smatramo unaprijed zadanom veličinom. Ukupna dostupna energija u laboratorijskom sustavu stoga je

$$E_{\text{lab}} = E_{\text{p}}^{(\text{lab})} + E_{\text{m}}^{(\text{lab})} = E_{\text{prag}} + 2mc^2. \tag{A.25}$$

Kako meta miruje ($p_{\text{m}}^{(\text{lab})} = 0$), ukupnoj količini gibanja p_{lab} sustava doprinosi samo količina gibanja projektila ($p_{\text{lab}} = p_{\text{p}}^{(\text{lab})}$) pa iz (A.5) imamo

$$p_{\text{lab}}c = \sqrt{\left[E_{\text{p}}^{(\text{lab})}\right]^2 - m^2c^4} = \sqrt{E_{\text{prag}}(E_{\text{prag}} + 2mc^2)}. \tag{A.26}$$

Za traženu masu M iz relacije (A.23) sad nam samo treba Lorentzov faktor γ_{cm}, koji nam je odmah dostupan iz unaprijed poznatog faktora brzine (A.22), i to potpuno neovisno o našem (ne)poznavanju mase m_{s} cjelovitog sustava unaprijed! Nju, naposlijetku, prema ranijem zaključku iz (A.24) upravo i tražimo! Uvrštavanjem (A.25) i (A.26) u (A.22) nalazimo da su β_{cm} i γ_{cm} formulacijom inverznog problema *unaprijed* određeni kao:

$$\beta_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{E_{\text{prag}}}{E_{\text{prag}} + 2mc^2}} \quad \text{i} \quad \gamma_{\text{cm}} = \sqrt{1 + \frac{E_{\text{prag}}}{2mc^2}}. \tag{A.27}$$

Konačno, povratkom (A.25) i (A.27) u (A.23) za maksimalnu traženu masu nalazimo

$$M = \frac{E_{\text{lab}}}{\gamma_{\text{cm}}c^2} = 2m\sqrt{1 + \frac{E_{\text{prag}}}{2mc^2}}. \tag{A.28}$$

Sukladno izloženoj strategiji, inverzijom ovog izraza za energijski prag reakcije ponovno nalazimo rezultat identičan onome iz (A.11).

⋆ ⋆ ⋆

U prethodnome pristupu ponovno smo sve vrijeme ostali u laboratorijskom sustavu. No isto tako smo mogli prijeći u sustav centra mase te ondje završiti postupak. Prijelaz lab → cm proveli bismo Lorentzovim transformacijama (A.16) i (A.17). Ovaj put potrebni faktori β_{cm} i γ_{cm} unaprijed su nam poznati iz (A.27) pa nam preostaje samo malo jednostavnog računa. U sustavu centra mase *sva* se dostupna energija može pretvoriti u novu masu, stoga bismo maksimalnu traženu masu jednostavno odredili izravno iz sve dostupne energije

$$M = \frac{E_{\text{p}}^{(\text{cm})} + E_{\text{m}}^{(\text{cm})}}{c^2}. \tag{A.29}$$

Sve što preostaje jest uvrstiti (A.5), (A.6) i (A.27), uz malo sređivanja, u (A.16) i (A.17). Pri tome bismo mogli zasebno računati za metu i zasebno za projektil. No mogli bismo si i olakšati posao simetrijom problema koju smo već koristili u (A.13). Kako zbog jednakih masa mete i projektila u sustavu centra mase njihove energije moraju biti jednake, između (A.16) i (A.17) dovoljno je izačunati jednostavniji izraz jer smo njime odmah odredili i rezultat složenijega. Za potrebe nalaženja (A.18) već smo bili zaključili da je jednostavniji izraz onaj za metu jer u laboratorijskom sustavu na početku miruje pa njezina količina gibanja iščezava: $p_{\text{m}}^{(\text{lab})} = 0$. To nas je posredstvom (A.17) dovelo do $E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})} = \gamma_{\mathrm{cm}} E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{lab})}$, a iz (A.6) odmah slijedi:

$$E_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{cm})} = E_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{cm})} = \gamma_{\mathrm{cm}} mc^2, \tag{A.30}$$

što uvrštavanjem u (A.29) daje:

$$M = 2\gamma_{\mathrm{cm}} m. \tag{A.31}$$

Uvrštavanjem Loretnzovog faktora iz (A.27) dolazimo do istog rezultata kao u (A.28), a time i do istog izraza za prag reakcije kao u (A.11).

Primijetimo sljedeće. Jednom kad smo odredili β_{cm} i γ_{cm} iz (A.27), u prethodnome pristupu *odmah* smo došli do rješenja temeljem jednostavne relacije (A.23). U ovome smo pristupu imali nešto više tehničkoga posla s Lorentzovim transformacijama. Cijena jednostavnijeg računa bila je potreba za dubokim konceptualnim razumijevanjem mase kako u (A.21) ne bismo naivno uvrstili $2m$ na mjesto unaprijed nepoznate mase sustava m_{s}. No duboko razumijevanje olakšalo nam je tehnički dio posla. U pristupu s Lorentzovim transformacijama pitanje mase sustava nikad se nije pojavilo! Mogli bismo reći da smo tim pristupom "vješto" zaobišli komplicirana konceptualna pitanja. No točnije bi bilo reći da su nam tim pristupom ista pitanja *uskraćena* te da smo njime mogli ostati *zakinuti* za dubinu razumijevanja svojega problema.

Primjeri

Primijenimo rješenje (A.11) na dva primjera. Prvi je stvaranje neutralnoga piona u sudaru dvaju protona

$$p^+ + p^+ \to p^+ + p^+ + \pi^0.$$

Naravno, pretpostavljamo scenarij u kojem je jedan od protona prije reakcije mirujuća meta, s obzirom da se rješenje za E_{prag} upravo odnosi na takav slučaj. Energija mirovanja (tj. energijski ekvivalent mase) svakog protona jednaka je $m_p c^2 = 938$ MeV, dok je za neutralni pion: $m_\pi c^2 = 135$ MeV. Dvije jednake mase m prije reakcije očito odgovaraju masama protona: $m = m_p$. Međutim, masa M nakon reakcije odgovara *ukupnoj* masi svih čestica (ne samo novostvorenoj masi piona), stoga: $M = 2m_p + m_\pi$. Uvrštavanjem u (A.11) slijedi: $E_{\mathrm{prag}} = \dfrac{m_\pi(4m_p + m_\pi)}{2m_p} c^2 = 280$ MeV. Energija koju trebamo uložiti za stvaranje piona na mirujućem protonu više je nego dvostruko veća od mase samog novonastalog piona! Prisjetimo se da je taj višak energije potreban za nastavak gibanja čitavog sustava i nakon reakcije, zbog očuvanja ukupne količine gibanja.

Drugi primjer jest stvaranje Higgsovog bozona u sudaru dvaju protona

$$p^+ + p^+ \to p^+ + p^+ + H^0.$$

Ovo je krajnje pojednostavnjena verzija izlaznih produkata reakcije, no poslužit će za naše potrebe. Masa Higgsovog bozona približno je 130 puta veća od mase protona: $m_H c^2 = 125$ GeV (ne MeV!). Kad bismo ovu reakciju pokušali pokrenuti na mirujućoj protonskoj meti – što nije ništa drugo negoli tekući ili plinoviti vodik – prema (A.11) trebali bismo protonski snop energije od barem: $E_{\mathrm{prag}} = \dfrac{m_H(4m_p + m_H)}{2m_p} c^2 = 8.3$ TeV po protonu (1 TeV $= 10^3$ GeV $= 10^6$ MeV)! No u sustavu centra mase svaki proton mora nositi tek pola energije mirovanja Higgsovog bozona, odnosno "svega" 60-ak GeV. Drugi riječima, energija potrebna za stvaranje Higgsovog bozona na mirujućoj protonskoj meti je $E_{\mathrm{prag}}/m_H c^2 \approx 67$ puta veća od energije potrebne za njegovo stvaranje sudaranjem protonskoga snopa o snop! Upravo je to razlog zašto se u CERN-u Higgsov bozon proizvodi baš sudaranjem snopa o snop. (Primijetimo da u tom slučaju laboratorijski sustav više nije sustav mirujuće mete, već je laboratorijski sustav istovremeno i sustav centra mase parova protona iz ukrštenih snopova.) Štoviše, trenutna maksimalna energija protonskoga snopa s CERN-a od 6.8 TeV bitno je manja od energijskog praga za stvaranje Higgsovog bozona na mirujućoj protonskoj meti! Današnjom tehnologijom bilo bi sasvim nemoguće proizvesti Higgsov bozon na taj način! A da ne govorimo o tome da nije dovoljno tek dosegnuti prag reakcije. Potrebno ga je *znatno premašiti* kako bi reakcija, čija vjerojatnost ispočetka raste s energijom reaktanata, postala dovoljno učestala da se zaista mogu izvesti korisna mjerenja. Čak i uz trenutnu energiju snopa, mjerenja na CERN-u tipično traju mjesecima kako bi se skupila dovoljna količina statističkih podataka!

Općenitiji slučaj

Zainteresiranome čitatelju za vježbu ostavljamo da nekim od pristupa (ili svima njima) samostalno riješi općenitiju formulaciju problema u kojoj projektil i meta imaju različite mase: projektil masu m_{p}, meta masu m_{m}. U slučaju različitih masa, naravno, njihovo gibanje u sustavu centra mase više nije potpuno simetrično pa više ne možemo koristiti izraze poput (A.13) i (A.30), već moramo tretirati projektil i metu zasebno. Ovdje samo navodimo konačno rješenje

$$E_{\mathrm{prag}} = \frac{M^2 - (m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}})^2}{2m_{\mathrm{m}}} c^2. \tag{A.32}$$

Lako je provjeriti da se za iste mase projektila i mete $(m_{\mathrm{p}} = m_{\mathrm{m}} = m)$ ono svodi na (A.11). Zgodno je izraziti rješenje i preko tzv. Q-vrijednosti reakcije. Ona se tipično definira kao energijski ekvivalent razlike ukupne mase prije i poslije reakcije: $Q = (m_{\mathrm{prije}} - m_{\mathrm{poslije}})c^2$. Prema takvoj definiciji pozitivna je za egzotermne reakcije (u kojima se masa smanjuje, a energija oslobađa), a negativna za endotermne reakcije (u kojima se masa povećava, a energiju je potrebno uložiti). Nas zanimaju samo endotermne reakcije jer egzotermne nemaju energijski prag pa ne samo da ih se može pokrenuti projektilom bilo koje energije, već su neke od njih i spontane, tj. odvijaju se same od sebe. Stoga ćemo za svoje potrebe definirati Q-vrijednost sa suprotnim predznakom od uobičajenoga

$$Q \equiv \left[M - (m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{m}})\right] c^2, \tag{A.33}$$

da bi za nas bila pozitivna. Izrazimo li novostvorenu masu M preko Q-vrijednosti, izraz (A.32) svodi se na

$$\boxed{E_{\mathrm{prag}} = \left(\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{m}}} + 1\right) Q + \frac{Q^2}{2m_{\mathrm{m}}c^2}.} \tag{A.34}$$

U drugome dijelu članka vidjet ćemo da (uvjetno govoreći) prvi član možemo smatrati nerelativističkim rezultatom, prema čemu drugi predstavlja relativističku popravku.

Literatura

[1] PETAR ŽUGEC, BRUNO KLAJN, *Malo relativistike*, Matematičko-fizički list 259 (2015) 180–190, `https://hrcak.srce.hr/242526`

[2] EUGENE HECHT, *Einstein Never Approved of Relativistic Mass*, The Physics Teacher 47 (2009) 336–341, `https://doi.org/10.1119/1.3204111`

[3] GIOVANNI ORGANTINI, *The Higgs mechanism for undergraduate students*, Nuclear and Particle Physics Proceedings 273–275 (2016) 2572–2574, `https://doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2015.09.463`