

# Kvarkovski modeli bariona i mezon

---

Vujica, Martina

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:893630>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-11**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Martina Vujica

KVARKOVSKI MODELI BARIONA I MEZONA

Diplomski rad

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

**Martina Vujica**

Diplomski rad

# **Kvarkovski modeli bariona i mezona**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Davor Horvatić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2023.

Želim iskazati svoju duboku zahvalnost mentoru, prof. dr. sc. Davoru Horvatiću na pomoći, strpljenju i vrijednim savjetima koje je pružio tijekom pisanja ovog rada.

Također, želim zahvaliti svojoj obitelji, posebno mami na razumijevanju i neizmjerne podršci.

Ova prilika za zahvalu ne bi bila potpuna bez spomena svih mojih kolega i prijatelja. Hvala što ste uljepšali moje studentske dane.

## Sažetak

Kvantna kromodinamika (QCD) opisuje jaku nuklearnu silu koja kvarkove i gluone veže u mezone i barione čije se karakteristike u niskoenergetskom režimu ne mogu odrediti pomoću QCD-a što je potaknulo razvoj raznih fenomenoloških modela. Jedan od takvih modela za predviđanje svojstava mezona i bariona, korišten u ovom radu, je kvarkovski model koji se temelji na dva važna svojstva kvantne kromodinamike: asimptotskoj slobodi i svojstvu zatočenja kvarkova unutar hadrona. Prema kvarkovskom modelu, mezoni su vezana stanja kvarka i antikvarka te se smatraju nerelativističkim vezanim sustavima opisani Schrödingerovom jednađbom. Interakciju između kvarkova modelira fenomenološki Cornell potencijal s linearnim članom koji opisuje njihovo zatočenje i Coulombskim članom koji predstavlja asimptotsku slobodu. Prilagodбом parametara Cornell potencijala i rješavanjem Schrödingerove jednađbe, numeričkim ili analitičkim metodama, reproduciraju se eksperimentalno opaženi maseni spektri vezanih stanja  $c\bar{c}$  i  $b\bar{b}$ . U svrhu boljeg modeliranja interakcije među kvarkovima, Cornell potencijal proširuje se članom  $ar^2$  čime se dobiva Coulombov perturbirani potencijal za koji je Schrödingerova jednađba riješena Nikiforov-Uvarov metodom funkcionalne analize (NUFA) što rezultira svojstvenim energijama pomoću kojih se određuju maseni spektri mezona  $b\bar{s}$  i  $b\bar{q}$  ( $q = u, d$ ). Nakon odgovarajuće prilagodbe parametara potencijala, maseni spektri dobiveni NUFA metodom dobro se slažu s rezultatima dobivenim drugim metodama, kao i s dostupnim eksperimentalnim podacima u literaturi. Prema kvarkovskom modelu, barioni se sastoje od tri kvarka koji se tretiraju relativističkom kvantnom mehanikom rješavajući Diracovu jednađbu u jednostavnom, ali uspješnom fenomenološkom modelu bariona poznatom kao MIT model vreće koji modelira zatočenje kvarkova podložnima dva linearna rubna uvjeta u ograničenom sfernom volumenu radijusa  $R$  unutar kojeg se kvarkovi gibaju kao slobodne čestice. Model je primijenjen za procjenu prosječnog radijusa naboja protona koja se s eksperimentalnom vrijednošću slaže unutar 20 %. Procjena magnetskog momenta protona, ali i ostalih hadrona, pomoću ovog modela znatno je manja od eksperimentalnih vrijednosti, no omjeri magnetskih momenata u skladu su s eksperimentalnim rezultatima. Kvarkovski modeli, unatoč ograničenjima, omogućuju predviđanje svojstava hadrona i međudjelovanja kvarkova te doprinose interpretaciji eksperimentalnih podataka i dubljem razumijevanju jake nuklearne sile koja djeluje unutar hadrona.

Ključne riječi: kvantna kromodinamika, kvarkovski modeli, mezoni, Schrödingerova jednađba, Cornell potencijal, maseni spektri, barioni, Diracova jednađba, MIT model vreće

# Quark Models of Baryons and Mesons

## Abstract

Quantum Chromodynamics (QCD) describes the strong nuclear force that binds quarks and gluons into mesons and baryons, whose characteristics in the low-energy regime cannot be determined using QCD, prompting the development of various phenomenological models. One such model for predicting the properties of mesons and baryons, used in this thesis, is the quark model, which is based on two important properties of quantum chromodynamics: asymptotic freedom and quark confinement within hadrons. According to the quark model, mesons are bound states of a quark and an antiquark, and they are considered non-relativistic bound systems described by the Schrödinger equation. The interaction between quarks is modeled by the phenomenological Cornell potential, which includes a linear term representing their confinement. By fitting the parameters of the Cornell potential and solving the Schrödinger equation using numerical or analytical methods, the experimentally observed mass spectra of bound states, such as  $c\bar{c}$  and  $b\bar{b}$ , have been successfully reproduced. For a better modeling of interactions between quarks, the Cornell potential is extended with a term  $ar^2$ , resulting in a Coulomb perturbed potential for which the Schrödinger equation is solved using the Nikiforov-Uvarov Functional Analysis (NUFA) method, yielding eigenenergies which were used to determine the mass spectra of  $b\bar{s}$  and  $b\bar{q}$  ( $q = u, d$ ) mesons. The mass spectra obtained by the NUFA method agree well with results obtained by other methods and experimental data. According to the quark model, baryons consist of three quarks for which the Dirac equation is solved in a simple yet successful phenomenological model of baryons known as the MIT bag model. This model describes the confinement of quarks subject to two linear boundary conditions within a confined spherical volume of radius  $R$ , in which quarks move as free particles. The model estimate of the mean charge radius of the proton agrees with the experimental value within 20%. The estimation of the magnetic moment of the proton, as well as that of other hadrons, using this model is significantly lower than the experimental values, still, the ratios of magnetic moments are in good agreement with experimental results. Despite its limitations, quark models enable the prediction of hadron properties and quark interactions, contributing to the interpretation of experimental data and a deeper understanding of the strong nuclear force acting within hadrons.

Keywords: quantum chromodynamics, quark models, mesons, Schrödinger equation, Cornell potential, mass spectra, baryons, Dirac equation, MIT bag model

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Fizika elementarnih čestica</b>	<b>3</b>
2.1	Ključna otkrića u povijesti fizike čestica . . . . .	3
2.2	Standardni model . . . . .	4
2.3	Prirodni sustav jedinica . . . . .	7
2.4	Kvantna kromodinamika . . . . .	7
2.4.1	Boja . . . . .	7
2.4.2	Svojstva kvantne kromodinamike . . . . .	9
2.5	Kvarkovski modeli . . . . .	11
2.5.1	Hadroni . . . . .	13
2.5.2	Hadronski multipleti . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Modeli mezona</b>	<b>18</b>
3.1	Razvoj spektroskopije kvarkonija . . . . .	18
3.2	Schrödingerova jednađžba . . . . .	20
3.2.1	Stacionarna stanja . . . . .	22
3.3	Modeliranje mezona Cornell potencijalom . . . . .	22
3.3.1	Kvantnomehanički model vodikovog atoma . . . . .	24
3.3.2	Maseni spektar mezona . . . . .	32
3.3.3	Analiza masenih spektara mezona NUFA metodom . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Modeli bariona</b>	<b>40</b>
4.1	Relativistička kvantna mehanika . . . . .	40
4.1.1	Relativistička kovarijantnost i četverovektori . . . . .	40
4.1.2	Klein-Gordonova jednađžba . . . . .	43
4.1.3	Diracova jednađžba . . . . .	45
4.2	MIT model vreće . . . . .	48
4.2.1	Porijeklo modela . . . . .	49
4.2.2	Formule i pretpostavke modela . . . . .	50
4.2.3	Primjena modela na protonu . . . . .	58
4.2.4	Prednosti i nedostaci modela . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>64</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Vodikov atom: raspis Frobeniusove metode</b>	<b>67</b>

# 1 Uvod

Teorija jake sile, poznata i kao kvantna kromodinamika, predstavlja teoriju razvijenu krajem 20. stoljeća za opisivanje jake nuklearne sile kojom međudjeluju gluoni i kvarkovi od kojih se sastoje hadroni. U okviru kvantne kromodinamike, primjećuje se značajno različita priroda interakcije između kvarkova na malim i velikim udaljenostima. Na malim udaljenostima, efektivna interakcija između kvarkova je izuzetno slaba zbog čega se gibaju poput slobodnih čestica, što je poznato kao svojstvo asimpotske slobode. Nasuprot tome, na velikim udaljenostima, interakcija među njima postaje iznimno jaka, rezultirajući svojstvom zatočenja kvarkova unutar hadrona. Jaka nuklearna interakcija povezuje kvarkove u mezone i barione, čije se karakteristike i međudjelovanja nastoje odrediti pomoću kvantne kromodinamike, što nije uvijek moguće zbog matematičkih poteškoća, stoga su razvijeni razni fenomenološki modeli temeljeni na gore navedenim svojstvima. Jedan od takvih modela, korišten u ovom radu je kvarkovski model, koji omogućuje bolje razumijevanje eksperimentalnih rezultata i njihovo povezivanje s teorijskim predviđanjima.

Prema kvarkovskom modelu, mezoni su vezana stanja kvarka i antikvarka, dok se barioni sastoje od tri kvarka. U ranoj fazi razvoja kvarkovskog modela, lakši mezoni, čije su energije vezanja znatno manje od masa njihovih konstituentnih kvarkova, bili su uspješno opisani primjenom nerelativističke kvantne mehanike, rješavanjem Schrödingerove jednadžbe. Međutim, postalo je očito da nerelativistički pristup nije odgovarajući za opis bariona kod kojih su pobuđene energije usporedive s masama konstituentnih kvarkova zbog čega je potrebno koristiti relativističku kvantnu mehaniku rješavajući Diracovu jednadžbu za opisivanje dinamike kvarkova.

U ovom radu, nerelativistički pristup mezonima obuhvaća ponavljanje kvantne mehanike, dok se kroz primjenu kvarkovskog modela na barionima uvodi relativistička kvantna mehanika, što pruža temeljno razumijevanje matematičkih metoda i daje čvrstu osnovu za daljnje istraživanje u području fizike elementarnih čestica.

Struktura ovog diplomskog rada prati tematski organizirana poglavlja, pri čemu svako od njih dublje istražuje specifične elemente teme.

U drugom poglavlju dan je kratki pregled fizike elementarnih čestica s naglaskom na kvantnu kromodinamiku i kvarkovske modele.

U trećem poglavlju detaljno se razmatra kvarkovski model mezona, prvo uvodeći spektroskopiju kvarkonija i Schrödingerovu jednadžbu koja se najprije rješava za potencijal vodikovog atoma koji služi kao osnova za proučavanje mezona. Potom se Schrödingerova jednadžba rješava za Cornell potencijal koji proširuje potencijal vodikovog atoma linearnim članom i tako modelira interakciju mezona te omogućuje računanje njihovih masenih spektara. Budući da se egzaktne rješenja Schrödingerove jednadžbe ne mogu izračunati, predstavljaju se metode za njeno rješavanje, uključujući Nikiforov-Uvarov metodu funkcionalne analize.

U četvrtom poglavlju temeljito se istražuje kvarkovski model bariona. Na početku



se detaljno razmatra formalizam relativističke kvantne mehanike, a zatim se primjenjuje Diracova jednačba u jednostavnom, ali uspješnom fenomenološkom modelu bariona, poznatom kao MIT model vreće, koji modelira zatočenje slobodnih kvarkova podložnima rubnim uvjetima u ograničenom sfernom volumenu. Model je primijenjen za procjenu prosječnog radijusa naboja protona.

Navedeni kvarkovski modeli mezona i bariona omogućili su proučavanje njihovih svojstava, doprinoseći razumijevanju jake nuklearne sile.

## 2 Fizika elementarnih čestica

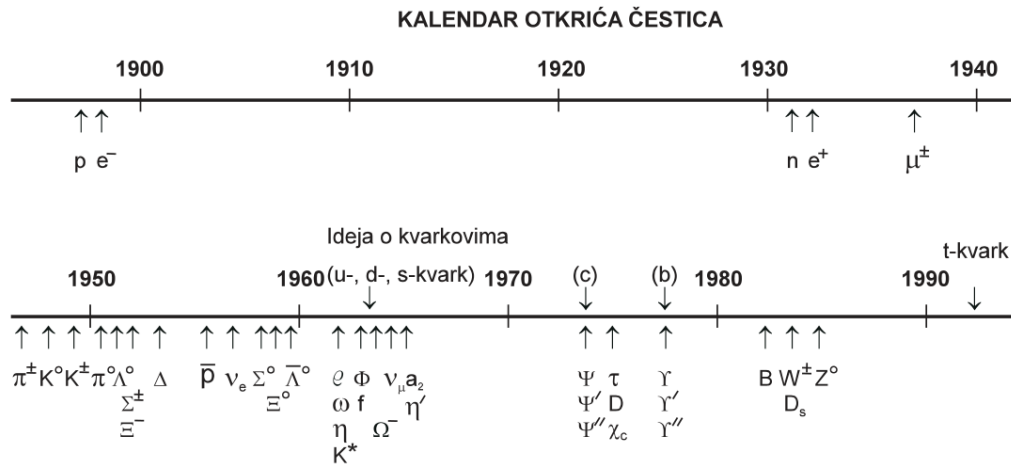
Fizika elementarnih čestica pridonosi razumijevanju zakona prirode kojima se pokoravaju najmanji građevni blokovi svemira i opisuje njihova međudjelovanja. Trenutno razumijevanje utjelovljeno je u Standardnom modelu koji predstavlja jedan od trijumfa moderne fizike.

### 2.1 Ključna otkrića u povijesti fizike čestica

Otkrićem elektrona 1897. godine kao prve elementarne čestice, počinje se razotkrivati struktura atoma koju nadopunjuju Rutherfordova otkrića u eksperimentima raspršenja alfa čestica. Međutim, poznavanje elektrona i protona nije bilo dovoljno za razumijevanje atomskih jezgara, što je postalo moguće tek nakon otkrića dvije nove čestice, neutrona i pozitrona. Za objašnjenje  $\beta$ -radioaktivnih raspada jezgara, Pauli uvodi još jednu neutralnu česticu, poznatu kao neutrino, koja nije bila direktno opažena. U to doba još kao neriješen problem ostalo je jako nuklearno vezanje između nukleona u jezgri. Inspiriran konceptom fotona kao kvanta elektromagnetskog međudjelovanja, Yukawa je uspješno riješio problem "nuklearnog ljepila" uvođenjem principa koji se kasnije pokazao ključnim za razumijevanje subatomske fizike: koncept medijatora za razne sile. Slično kao što je elektromagnetska sila posredovana virtualnom izmjenom fotona, Yukawa je pretpostavio postojanje "U-kvanta" kao medijatora nuklearne sile. Taj medijator je trebao uspješno prevladati odbojne sile između pozitivno nabijenih protona unutar atomske jezgre, što je dovelo do predviđanja mase medijatora,  $m_U \simeq 200 m_e$ . Godine 1935., iste godine kada je objavljena Yukawina teorija, C. D. Anderson je promatrajući trag u maglenoj komori primijetio česticu mase  $130 m_e$  koja je bila gotovo identična elektronu, osim po masi, i nazvana je "mezon" ( $\mu$  lepton). Jedno desetljeće kasnije C. F. Powell u eksperimentima s kozmičkim zračenjem otkriva  $\pi$  mezon (pion), česticu čija su svojstva odgovarala Yukawinim teorijskim predviđanjima. Nakon otkrića piona, uslijedila su otkrića ostalih mezona, kako je prikazano na Slici 2.1, najprije u kozmičkom zračenju, a potom su eksperimenti s akceleratorima doveli do procvata otkrića čestica u drugoj polovici 20. stoljeća [1].

Jedan od značajnih iskoraka dogodio se 1964. godine kada su Gell-Mann, Ne'eman i Zweig istraživali simetriju do tada poznatih hadrona i predložili da su sastavljeni od još elementarnijih čestica, koje je Gell-Mann nazvao kvarkovima. KomPLICIRANI spektar hadrona i njihova svojstva postaju znatno jasnija u kvarkovskim modelima.

Ta otkrića zahtijevala su objašnjenje novim teorijskim okvirima jer Schrödingero-va jednadžba nije mogla opisati relativističke čestice iz kozmičkog zračenja ni objasniti njihovo stvaranje i anihilaciju. Tijekom 1930-ih razvila se kvantna teorija polja za elektromagnetske interakcije elektrona i fotona - kvantna elektrodinamika (QED) gdje su interakcije između nabijenih čestica posredovane razmjennom virtual-



Slika 2.1: Najvažnija otkrića novih čestica nakon primjene akceleratora [1]. (Slika preuzeta iz [1]).

nih fotona. Opisujući silu putem razmjene čestica, više nema tajanstvenog djelovanja na daljinu. QED je jedna od najuspješnijih teorija u fizici, što potvrđuje zadivljujuća kvantitativna točnost njenih predviđanja i ogroman energetske raspon u kojem se primjenjuje. Smatralo se da je taj raspon neograničen, no sada je poznato da se za točna predviđanja na visokim energijama kvantna elektrodinamika ujedinjuje s teorijom slabe interakcije u elektroslabu teoriju. Najnoviji razvoji u fizici čestica, međutim, otkrili su važnost posebne klase takvih teorija nazvanih baždarnim teorijama; kvantna elektrodinamika je najjednostavniji primjer takve teorije. Vjeruje se da su slabe i jake interakcije kvarkova i leptona opisane baždarnim teorijama: ujedinjenom elektroslabom teorijom i kvantnom kromodinamikom (QCD) [2, 3].

## 2.2 Standardni model

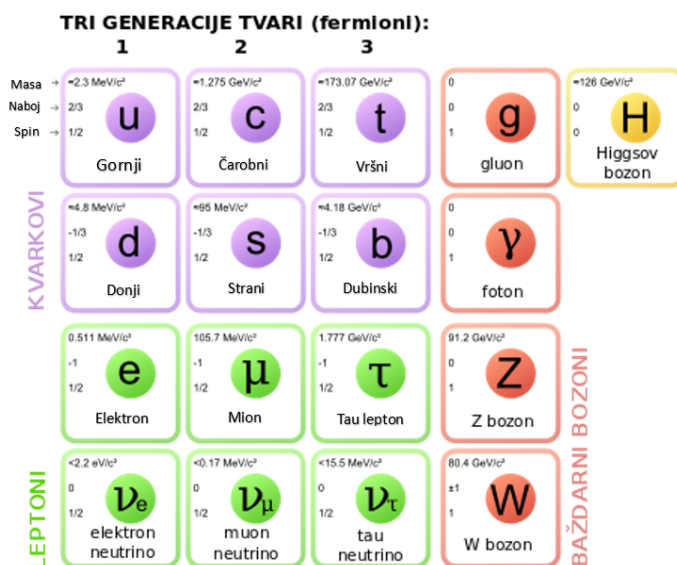
Nekoliko desetljeća eksperimentalnih rezultata i raznih teorijskih okvira 1970-ih objedinjeni su u općeprihvaćeni naziv Standardni model, jednim od središnjih stupova moderne fizike. Standardni model, unatoč svojem imenu koje sugerira običan model, zapravo predstavlja matematički preciznu teoriju koja opisuje elementarne čestice. Ova teorija se ističe iznimnom preciznošću, budući da su njezina predviđanja dosljedno potvrđena eksperimentalnim rezultatima.

Osnove Standardnog modela uključuju:

- *kvantnu teoriju polja* koja pruža temeljni opis čestica i njihovih interakcija;
- *baždarni princip* koji određuje točnu prirodu tih interakcija;
- *Higgsov mehanizam* lomljenja elektroslabe simetrije koji generira mase čestica;
- *eksperimentalne rezultate* koji usmjeravaju način na koji se gradi Standardni model i iz kojih određujemo nepoznate parametre modela, poput kvarkovske

mase.

Prema Standardnom modelu materiju grade fermioni koji se dijele na šest leptona i šest kvarkova kao što je prikazano na Slici 2.2.



Slika 2.2: Standardni model elementarnih čestica. (Slika preuzeta iz [4]).

Elementarne čestice klasificirane su prema masi, spinu i očuvanim veličinama. Uz očuvanje energije i impulsa vrtnje, u svim reakcijama između elementarnih čestica vrijedi i očuvanje električnog naboja  $Q$ , zasebnih leptonskih brojeva  $L_e$ ,  $L_\mu$  i  $L_\tau$  te barionskog broja  $B$ . Zakoni očuvanja putem Noetherinog teorema povezani su s internim simetrijama koje služe kao osnova za baždarne teorije, koje su renormalizabilne kvantne teorije polja. U ovim teorijama, čestice se predstavljaju titrajima odgovarajućih polja, a međudjelovanja između čestica su potpuno određena simetrijom teorije, što omogućuje preciznu identifikaciju medijatora sila. Standardni model, temeljni okvir za opisivanje elementarnih čestica i njihovih međudjelovanja, primjer je teorije koja se temelji na baždarnom principu. U okviru Standardnog modela koristi se Liejeva grupa simetrija  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  pri čemu dvanaest generatora ovog umnoška grupe odgovara baždarnim bozonima koji prenose interakciju između fermiona; 4 elektroslaba bozona ( $\gamma$ ,  $W^\pm$ ,  $Z^0$ ) i 8 gluona jakog međudjelovanja.

Elektron, elektronski neutrino, gornji ( $u$ ) i donji ( $d$ ) kvark poznati su kao prva generacija koja čini 100 % vidljivog svemira. Međutim, kada se proučavaju interakcije čestica na visokim energijama, otkriva se daljnja složenost, što rezultira s tri generacije fermiona:

$$\begin{pmatrix} e^- & u \\ \nu_e & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^- & c \\ \nu_\mu & s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^- & t \\ \nu_\tau & b \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

U drugoj i trećoj generaciji postoji po dvije identične kopije svake od četiri čestice iz prve generacije, razlikujući se samo po masama. Primjerice, mion je teža verzija

elektrona s masom  $m_\mu \approx 200 m_e$ , a član treće generacije, tau-lepton, je još teža kopija s masom  $m_\tau \approx 3\,500 m_e$  [2]. Unatoč razlike u masama, koje imaju fizičke posljedice, ove čestice dijele iste fundamentalne interakcije. Čestice druge i treće generacije su nestabilne čestice s kratkim životnim vijekom proizvedene u akceleratorima te se raspadaju u čestice prve generacije putem slabe interakcije.

Unutar Standardnog modela, Higgsov bozon je jedinstven; on je jedini fundamentalni skalar u modelu.

Leptoni se u Standardnom modelu grupiraju u tri dubleta:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Elektron  $e^-$ , mion  $\mu^-$  i  $\tau^-$  lepton nose električni naboj<sup>1</sup>  $-e$ , a svakom od njih pripada odgovarajući neutrino  $\nu_i$  koji je električki neutralan.

Kao i leptoni, kvarkovi se također grupiraju u tri izospinska dubleta:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Kvarkovi u gornjem redu dubleta ( $u, c$  i  $t$ ) nose električni naboj  $+2/3 e$ , dok kvarkovi u donjem redu dubleta ( $d, s$  i  $b$ ) nose električni naboj  $-2/3 e$ . Svim kvarkovima pridružen je i barionski kvantni broj  $B = +1/3$ , a prema konvenciji imaju pozitivni paritet<sup>2</sup>.

Dinamika svakog od dvanaest fermiona opisana je Diracovom jednačbom, koja rezultira postojanjem odgovarajuće antičestice iste mase i spina, ali suprotnog predznaka svih kvantnih brojeva.

To mnoštvo čestica međusobno djeluje putem četiri fundamentalne sile: gravitacijske, slabe, elektromagnetske i jake nuklearne sile. Gravitacijska sila je najslabija od sila i kao rezultat toga, nema mjerljivih učinaka na subatomske skali. Svih dvanaest fermiona međudjeluje slabom silom, elektromagnetskom silom međudjeluju svi fermioni, osim neutrina koji su električki neutralni, a jakom silom međudjeluju samo kvarkovi i gluoni. Jakost pojedine temeljne sile karakterizirana je "konstantom fine strukture": za elektromagnetsku interakciju  $\alpha = 1/137$ , za slabu interakciju  $\alpha_W \approx 1/30$  i za jaku interakciju  $\alpha_S \approx 1$  [2].

Fermioni kao čestice polucjelobrojnog spina poštuju Fermi - Diracovu statistiku, a bozoni kao čestice cjelobrojnog spina poštuju Bose - Einsteinovu statistiku<sup>3</sup>.

Uspjeh Standardnog modela u opisu širokog raspona eksperimentalnih mjerenja izvanredno je postignuće. Međutim, Standardni model nije krajnja teorija jer postoji mnogo nerazriješenih pitanja. Nova generacija eksperimenata tražit će odgovore izvan Standardnog modela [2].

<sup>1</sup> $e = 1,602176565(35) \times 10^{-19} \text{ C}$  [5].

<sup>2</sup>Paritet je kvantni broj koji odražava simetriju valne funkcije pri transformaciji  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ .

<sup>3</sup>Utjecaj spina na statistiku, uspostavljen u kvantnoj teoriji polja, temelji se na "teoremu spina-statistike" koji je detaljnije objašnjen u [6].

## 2.3 Prirodni sustav jedinica

Međunarodni sustav mjernih jedinica (SI) čini prirodnu osnovu za mjerenje mase, duljine i vremena za svakodnevne makroskopske objekte, međutim, nije prirodan izbor za opis čestica, gdje su prisutne vrlo male veličine, poput mase elektrona, koja u SI jedinicama iznosi  $9,1 \times 10^{-31}$  kg [5]. Stoga je praktičnije koristiti sustav jedinica koji odražava prirodne skale duljine i vremena koje se susreću u fizici čestica, a taj sustav poznat je kao prirodne jedinice. Temelji se na fundamentalnim konstantama kvantne mehanike i specijalne teorije relativnosti. U prirodnim jedinicama, [kg, m, s] zamijenjeni su s [ $\hbar$ , c, GeV], gdje je  $\hbar = 1,055 \times 10^{-34}$  J · s [5] Planckova konstanta,  $c = 2,998 \times 10^8$  m/s [5] brzina svjetlosti u vakuumu, i  $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-10}$  J [5] je približno energija mirovanja protona. U Tablici 2.1 prikazane su mjerne jedinice za nekoliko veličina u SI sustavu i u sustavu prirodnih jedinica [2].

Veličina	[kg, m, s]	$\hbar = c = 1$
Energija	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	GeV
Impuls	$\text{kg m s}^{-1}$	GeV
Masa	kg	GeV
Vrijeme	s	$\text{GeV}^{-1}$
Duljina	m	$\text{GeV}^{-1}$

Tablica 2.1: Veza između SI i prirodnih mjernih jedinica.

Prirodne jedinice mogu se pojednostaviti izborom  $\hbar = c = 1$ , što ne dovodi do gubitka informacija o navedenim konstantama, budući da dimenzionalnom analizom možemo jednoznačno odrediti prisutnost  $\hbar$  i  $c$  u bilo kojoj formuli. Ovaj izbor omogućuje da sve veličine budu izražene u jedinicama GeV, dok umnožak  $\hbar \cdot c = 197 \text{ MeV} \rightarrow 1$  opisuje pretvorbu između energije i udaljenosti:  $\text{MeV} \simeq 1/197 \text{ fm}^{-1}$ . U fizici čestica koristi se i Heaviside-Lorentzov sustav jedinica koji odgovara izboru  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ . Stoga, u kombiniranom sustavu prirodnih jedinica i Heaviside-Lorentz jedinica u fizici čestica vrijedi:  $\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ .

## 2.4 Kvantna kromodinamika

Otkriće kvarkova predstavljalo je prekretnicu u razumijevanju unutarnje strukture tvari i potaknulo razvoj teorije kvantne kromodinamike (QCD), koja opisuje jaku nuklearnu silu i interakcije kvarkova i gluona.

### 2.4.1 Boja

S obzirom na električni naboj koji nose kvarkovi, moguće je istraživati jaku interakciju istim teorijskim tehnikama koje su bile uspješne u opisu svojstava i elektromagnetskih interakcija elektrona.

Eksperimenti izvedeni pod vodstvom Fermija 1951. godine, tijekom kojih su se  $\pi^+$  mezoni sudarali s protonima, doveli su do otkrića  $\Delta^{++}$  čestice s kvarkovskim sadržajem  $uuu$ . Drugim riječima,  $\Delta^{++}$  čestica sastoji se od tri identična fermiona u potpuno simetričnom osnovnom stanju, što je zabranjeno Paulijevim principom prema kojem dva ili više fermiona ne mogu istovremeno zauzeti isto kvantno stanje. Uvođenjem novog kvantnog broja za kvarkove poznatog kao "boja"<sup>4</sup>, kvarkovi dobivaju dodatni stupanj slobode, što pruža rješenje navedenog problema sa statistikom. Pretpostavljamo da kvarkovi dolaze u tri primarne boje: crvena ( $R$ ), zelena ( $G$ ) i plava ( $B$ ), dok se antikvarkovima dodjeljuju komplementarne boje: cijan ( $\bar{R}$ ), magenta ( $\bar{G}$ ) i žuta ( $\bar{B}$ ). Tri kvarka koja čine  $\Delta^{++}$  česticu sada možemo razlikovati kvantnim brojem boje tako da kvarkovski sadržaj čestice napišemo u obliku  $u_R u_G u_B$ , čime smo uspješno riješili problem statistike eliminirajući identične kvarkove.

Uzimajući proton kao sljedeći primjer sastavljen od dva  $u$  kvarka i jednog  $d$  kvarka, prisutnost tri različita naboja boje sugerira postojanje različitih kvarkovskih konfiguracija unutar protona, koje ovisno o bojama uključenih konstitutivnih kvarkova, imaju različitu ukupnu boju. Međutim, eksperimentalno opažamo samo jedno stanje protona, što zahtijeva uvođenje kvantnog broja boje bez povećanja broja stanja. Ovaj rezultat postiže se pretpostavkom da su sva stanja čestica u prirodi "bezbojna" (singleti boja), odnosno preciznije, nepromijenjena rotacijama u prostoru  $R, G, B$ , što odgovara ireducibilnim reprezentacijama boje simetrije  $SU(3)$ . Stoga postoji jedinstven niz načina za dobivanje bezbojnih kombinacija miješanjem boja (kvarkova) i komplementarnih boja (antikvarkova):

- Jednaka mješavina crvene, zelene i plave ( $RGB$ ).
- Jednaka mješavina cijana, magente i žute ( $\bar{R}\bar{G}\bar{B}$ ).
- Jednake mješavine boje i komplementarne boje ( $R\bar{R}, G\bar{G}, B\bar{B}$ ).

Ove mogućnosti odgovaraju česticama promatranim u prirodi poznate kao barioni, antibarioni i mezoni. Na primjer:

$$\begin{aligned}
 p &= RGB \\
 n &= \bar{R}\bar{G}\bar{B} \\
 \Delta^{++} &= R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Stanje  $q\bar{q}$  ( $R\bar{R}, G\bar{G}$  i  $B\bar{B}$ ) je bezbojno, ali samo je kombinacija  $R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}$ , nepromijenjena rotacijama u prostoru boja  $R, G, B$ , koja može oblikovati promatrani mezon.

---

<sup>4</sup>Termin "boja" u kontekstu kvantne kromodinamike nije povezana s bojama iz svakodnevnog života, već je terminologija temeljena na analogiji da aditivnim zbrajanjem osnovne tri boje dobivamo bijelu, jer taj naboj ne opažamo direktno kod mezona i bariona.

Za razliku od posrednika elektromagnetske interakcije, fotona, koji nemaju električni naboj, gluoni kao posrednici jake interakcije nose naboj boje, zbog čega mogu međusobno interagirati<sup>5</sup>.

Kvarkovi međudjeluju razmjenom boje putem "obojenih" gluona za koje može postojati devet stanja:  $R\bar{R}$ ,  $R\bar{G}$ ,  $R\bar{B}$ ,  $G\bar{R}$ ,  $G\bar{G}$ ,  $G\bar{B}$ ,  $B\bar{R}$ ,  $B\bar{G}$ ,  $B\bar{B}$ . Međutim, ako promotrimo rastav produkta reprezentacija  $SU(3)$  grupe na oktet i singlet:

$$\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} + \mathbf{1} \quad (2.5)$$

uočavamo da je deveto stanje:

$$|9\rangle = (R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}) / \sqrt{3} \quad (2.6)$$

singlet boje koje predstavlja bezbojni gluon koji kao takav ne može prenositi interakciju između kvarkova. Stoga postoji ukupno osam gluona, koji su podvrgnuti  $SU(3)$  simetriji i opisani Gell-Mannovim  $\lambda$  matricama:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Primjer promjene boje "crvenog" kvarka u "zeleni" kvark emisijom "crveno-antizelenog" gluona prikazan je na Slici 2.3

#### 2.4.2 Svojstva kvantne kromodinamike

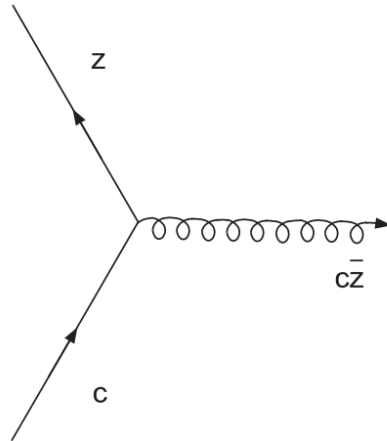
Usporedba efekata zasjenjivanja naboja u kvantnoj elektrodinamici i kvantnoj kromodinamici otkriva značajne posljedice međusobne interakcije gluona.

Naime, elektron je okružen  $e^-e^+$  parovima, a zbog privlačne sile između raznoimenih naboja, pozitroni će biti privučeni bliže elektronu, što rezultira elektronskim oblakom naboja koji je polariziran tako da su pozitivni naboji bliži elektronu, dok su negativni naboji elektrona zasjenjeni. Efekt zasjenjivanja električnog naboja u elektrodinamici prikazan je na Slici 2.4.

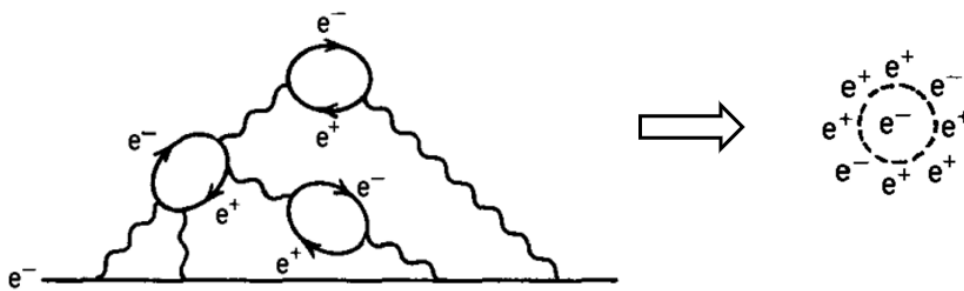
Efekt zasjenjivanja električnog naboja rezultira ovisnosti električnog naboja elektrona o udaljenosti na kojoj se istražuje elektron, smanjujući se kako se ta udaljenost povećava, kao što je prikazano na Slici 2.5.

<sup>5</sup>Teorije u kojima kvanti polja mogu direktno interagirati nazivaju se neabelovske.

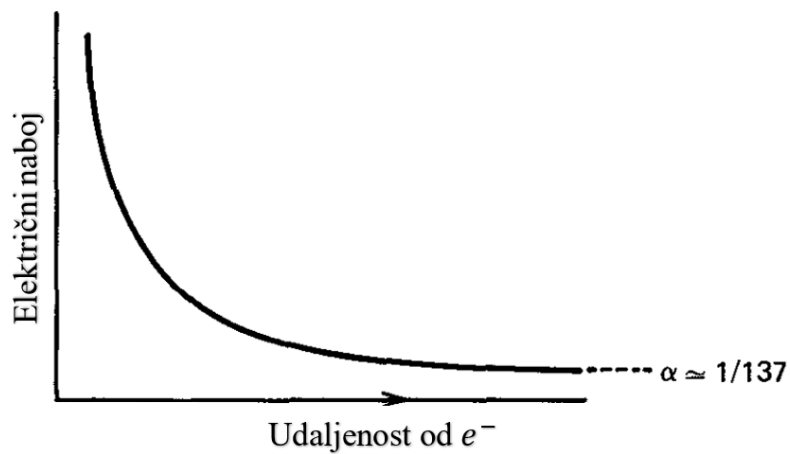




Slika 2.3: Primjer promjene boje kvarka pri emisiji obojenog gluona [1]. (Slika preuzeta iz [1]).



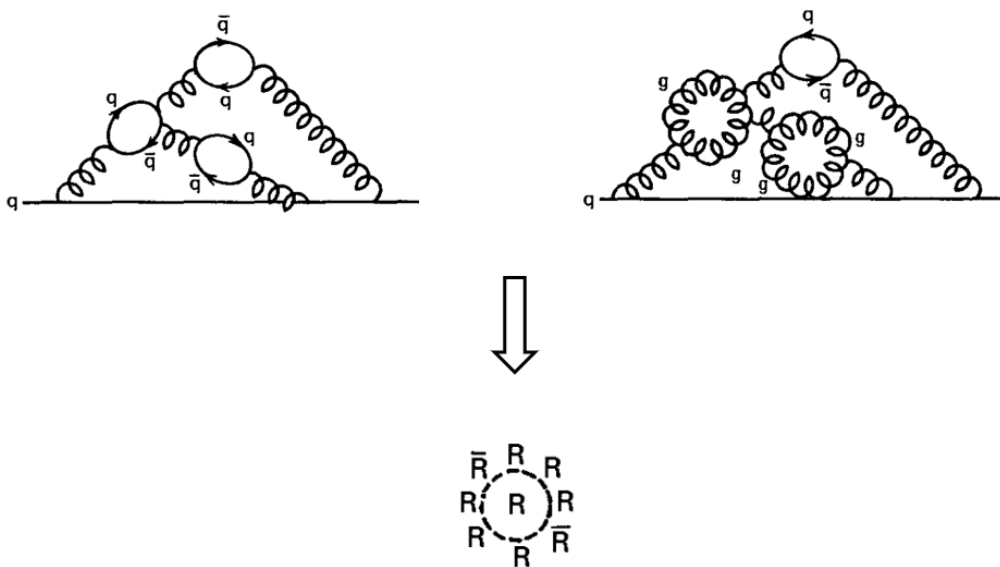
Slika 2.4: Zasjenjenje električnog naboja. (Slika preuzeta iz [7]).



Slika 2.5: Ovisnost električnog naboja o udaljenosti od elektrona. (Slika preuzeta iz [7]).

U kvantnoj kromodinamici efekt zasjenjivanja naboja boje bio bi ekvivalentan zasjenjenju električnog naboja, da nema novih konfiguracija koje uključuju parove gluona. Samointerakcije gluona mijenjaju poznati rezultat kvantne elektrodinamike tako da su kvarkovi nabijeni crvenom bojom, uslijed privlačne jake sile, skloni okruživati kvarkove također nabijene crvenom bojom. Ovaj efekt je upravo suprotan zasjenjenju električnog naboja u QED-u zbog čega se naziva efekt antizasjenjenja, poznatiji kao "asimptotska sloboda" koja kvarkovima unutar hadrona omogućuje asimptotско približavanje stanjima slobodnih čestica što su bliže jedan drugome. Na visokim energijama, njihova efektivna interakcija je vrlo slaba na vrlo kratkim udaljenostima.

Efekt antizasjenjenja naboja boje prikazan je na Slici 2.6.



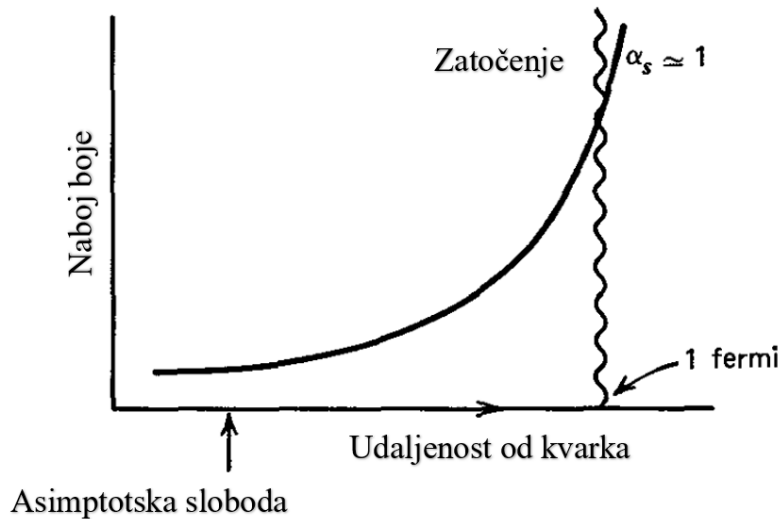
Slika 2.6: Antizasjenjenje naboja boje. (Slika preuzeta iz [7]).

U QED-u relativno je lako izdvojiti atom iz molekule, elektron iz atoma ili proton iz jezgre atoma. No, u QCD-u, budući da je efektivna interakcija između kvarkova vrlo jaka na velikim udaljenostima, ni znatne količine energije nisu uspjele osloboditi kvark iz bilo kojeg hadrona. Neopažanje kvarkova ni gluona kao slobodnih čestica vodi na pretpostavku da su kvarkovi zatočeni u unutrašnjosti hadrona, što je poznato kao svojstvo zatočenja. Ovo svojstvo objašnjava postojanje samo bezbojnih stanja hadrona.

Međusobna interakcija gluona rezultira povećanjem interakcijskog potencijala među kvarkovima kako raste udaljenost između njih, što je prikazano na Slici 2.7.

## 2.5 Kvarkovski modeli

Tijekom 1960-ih, eksperimenti provedeni u akceleratorima rezultirali su otkrićem velikog broja novih čestica koje nisu bile elementarne. Gell-Mann i Zweig su 1964.



Slika 2.7: Ovisnost naboja boje o udaljenosti od kvarka. (Slika preuzeta iz [7]).

godine predložili postojanje kvarkova<sup>6</sup> koji grade novootkrivene čestice, hadrone.

Prema hipotezi o kvarkovima, postojala su tri različita kvarka,  $u$ ,  $d$  i  $s$ , zajedno s njihovim odgovarajućim antikvarkovima iz kojih su mogle nastati tri različite vrste hadrona: mezoni, sastavljeni od kvarka i antikvarka; barioni, sastavljeni od tri kvarka; i antibarioni, sastavljeni od tri antikvarka. Pomoću ove jednostavne hipoteze objašnjeni su svi hadroni poznati u to vrijeme.

Ne'emann i Gell-Mann predložili su svrstavanje hadrona u multiplete koristeći Lie grupu  $SU(3)$  kao osnovnu simetriju unutar koje su do tada devet poznatih bariona<sup>7</sup> s ukupnim angularnim momentom  $J = 3/2$  svrstani u oktetnu reprezentaciju, što je poznato kao "osmerostruki put" (od eng. *eightfold way*). Svaki multiplet se može karakterizirati dimenzijom reprezentacije i s dva generatora koji komutiraju. Uobičajeno se koriste treća komponenta izospina  $I_3$  i stranost  $S$ , ili ekvivalentno može se koristiti hipernaboj  $Y$  definiran kao  $Y = B + S$ , gdje je  $B$  barionski broj. Gell-Mann je primijetio da bi se do tada poznati barioni mogli uklopiti u deкупletnu reprezentaciju grupe  $SU(3)$ , pod uvjetom da postoji čestica  $\Omega^-$  s predviđenom masom od 1,67 GeV [8]. U vrijeme uvođenja "osmerostrukog puta", kvarkovi su smatrani matematičkim entitetima koji objašnjavaju novootkrivene hadrone. Prve naznake da ovi objekti imaju fizikalnu stvarnost postale su očite upravo otkrićem čestice  $\Omega^-$  predviđene deкупletom u eksperimentu u Brookhavenu upravo s masom koju je predvidio Gell-Mann. 1969. godine, postojanje kvarkova potvrđeno je na MIT-u i SLAC-u nizom eksperimenata duboko neelastičnih raspršenja elektrona na protonima, što je značajno doprinijelo razvoju kvarkovskog modela.

<sup>6</sup>Riječ "kvark" preuzeta je iz rečenice "Tri kvarka za Muster Marka!" iz djela Finneganovo bdijenje [8].

<sup>7</sup>četiri  $\Delta$  čestice s nabojem od  $-1$  do  $+2$ , tri  $\Sigma^*$  sa stranosti  $S = -1$  i dvije  $\Xi^*$  sa stranosti  $S = -2$  [8].

Kvarkovski model koji su predložili Gell-Mann i Zweig omogućava uspješnu klasifikaciju čestica, čineći ga "periodičnom tablicom" hadrona [1].

### 2.5.1 Hadroni

Kvarkovi nikada nisu opaženi kao slobodne čestice, već se uvijek nalaze u vezanim stanjima, poznatim kao hadroni.

Jedini hadroni koji su do sada opaženi su mezoni sastavljeni od kvarka i antikvarka ( $q\bar{q}$ ), barioni koji su vezano stanje tri kvarka ( $qqq$ ), i antibarioni koji se sastoje od tri antikvarka ( $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ ). Ukupni spin mezona određuje se vektorskim zbrojem spinova kvarka i antikvarka, što rezultira spinom 0 ili 1, čime se klasificiraju kao bozoni. S druge strane, ukupni spin bariona može biti 1/2 ili 3/2, što ih svrstava u fermione.

Konstituentni kvarkovi koji se pojavljuju u šest "okusa" dovoljni su za rekonstrukciju cijelog spektra hadrona [1]:

$$\begin{array}{llll}
 \pi^+ = u\bar{d}, & K^+ = u\bar{s}, & K^0 = d\bar{s}, & \pi^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2} \\
 D^+ = c\bar{d}, & D^0 = c\bar{u}, & D_s^+ = c\bar{s} & \\
 B^+ = u\bar{b}, & B^0 = d\bar{b}, & B_s^0 = s\bar{b}, & B_c^+ = c\bar{b} \\
 \\ \\
 p = uud, & n = udd, & \Sigma^+ = uus, & \Sigma^0 = uds \\
 \Sigma_c^+ = udc, & \Sigma_c^{++} = uuc, & \Xi_c^+ = usc, & \Xi_c^0 = dsc \\
 \Xi_{cc}^+ = dcc, & \Xi_{cc}^{++} = ucc, & \Omega_{cc}^+ = scc & 
 \end{array}$$

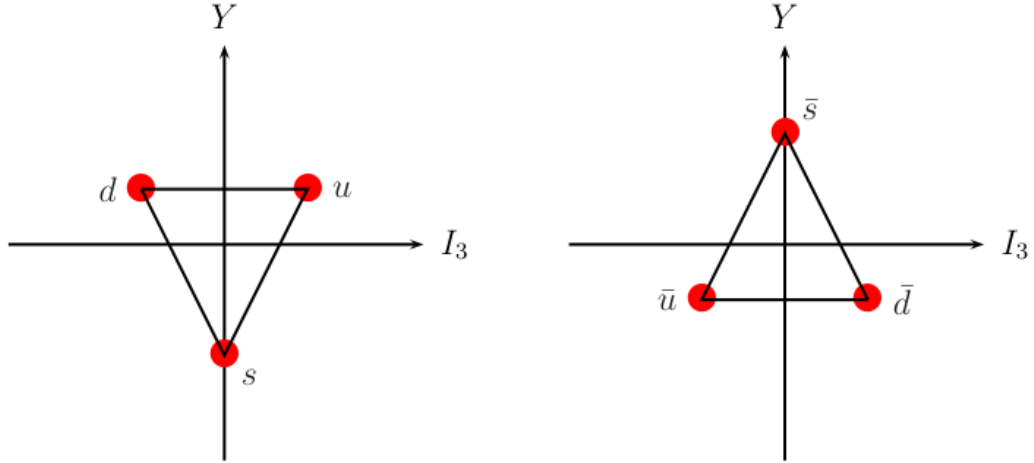
Osim što je moguće hadronska stanja predstaviti njihovim kvarkovskim sadržajem, također se mogu karakterizirati ukupnim angularnim momentom  $J$  i paritetom  $P$ . Na primjer, za pozitivno nabijeni pion  $\pi^+$  ( $ud$ ), vrijedi:  $J^P = 0^-$  [2].

### 2.5.2 Hadronski multiplieti

Razumijevanje kvarkova i njihove uloge u hadronskim strukturama omogućeno je putem izgradnje  $SU(n)$  multiplleta unutar aditivnih kvarkovskih modela. Ovi multiplieti grupiraju čestice koje imaju otprilike istu masu i identična svojstva, s izuzetkom električnog naboja, pružajući uvid u približne simetrije prisutne u spektru hadrona.

Pomoću dva osnovna tripleta grupe  $SU(3)$  okusa, prikazana na Slici 2.8, konstruirat ćemo mezone i barione [1].

U kvarkovskom modelu, mezoni predstavljaju vezana stanja kvarkova i antikvarkova. Paritet  $P$  za stanje koje ima orbitalni angularni moment  $\ell$  računa se kao  $(-1)^{\ell+1}$ . Spin mezona, označen s  $J$ , određen je standardnim odnosom  $|\ell - s| \leq J \leq |\ell + s|$ , pri čemu je  $s = 0$  u slučaju antiparalelnih spinova kvarkova, ili  $s = 1$  ako



Slika 2.8: Tripleti grupe  $SU(3)$  okusa. (Slika preuzeta iz [8]).

su spinovi kvarkova paralelni. Koncept pariteta konjugacije naboja, poznat kao C-paritet, označava se s  $C$  i definira se samo za stanja  $q\bar{q}$  koja se sastoje od kvarkova i njihovih vlastitih antikvarkova, a računa se kao  $(-1)^{\ell+s}$ . Dodatno, C-paritet se može generalizirati u G-paritet,  $G = (-1)^{I+\ell+s}$  za mezone sastavljene od kvarkova i njihovih vlastitih antikvarkova (izospin  $I_z = 0$ ) te za nabijena stanja  $u\bar{d}$  i  $d\bar{u}$  (izospin  $I = 1$ ) [9].

Mezoni se klasificiraju u multiplete prema njihovim kvantnim brojevima  $J^{PC}$ . Stanja s orbitalnim angularnim momentom  $\ell = 0$  predstavljaju pseudoskalarne čestice ( $0^{-+}$ ) i vektore ( $1^{--}$ ), dok stanja s orbitalnim angularnim momentom  $\ell = 1$  uključuju skalarne ( $0^{++}$ ), aksijalne vektore ( $1^{++}$ ) i ( $1^{+-}$ ) te tenzore ( $2^{++}$ ) [9].

U skladu s teorijom grupa, devet mezonskih  $q\bar{q}$  stanja koja sadrže kvarkove  $u$ ,  $d$  i  $s$  će biti svrstana u ireducibilne reprezentacije grupe kvarkovskih okusa  $SU(3)_F$ , koje uključuju singlete (1) i oktete (8) [1]:

$$3 \times \bar{3} = 1 + 8 \quad (2.10)$$

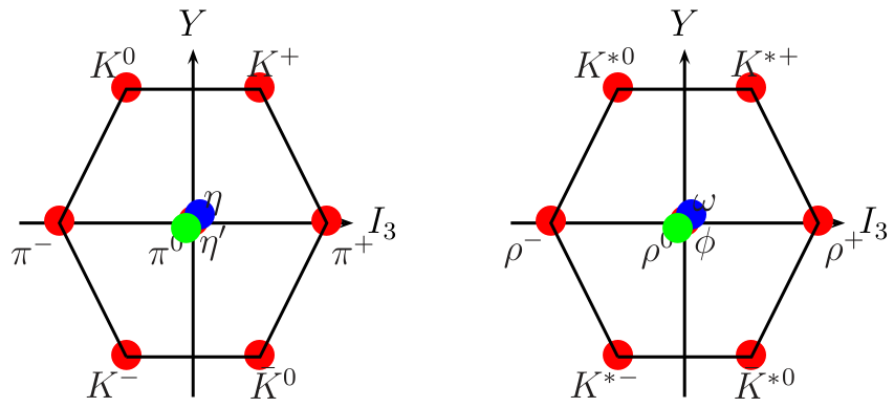
Broj 1 predstavlja kvarkovsku konfiguraciju  $uds$  koja se može opisati kao  $\Lambda_1$  stanje, dok se oktet odnosi na slično kvarkovsko stanje koje je označeno kao  $\Lambda_8$ .

Na Slici 2.9 prikazani su pseudoskalarni mezoni ( $\pi$ ,  $\eta$ ,  $K$ ,  $\bar{K}$ ) grupirani u oktet i singlet. Uz pretpostavku da postoji miješanje između singleta i izoskalarne člana okteta<sup>8</sup>, razvila se terminologija "nonet". Isto vrijedi i za vektorske mezone [8].

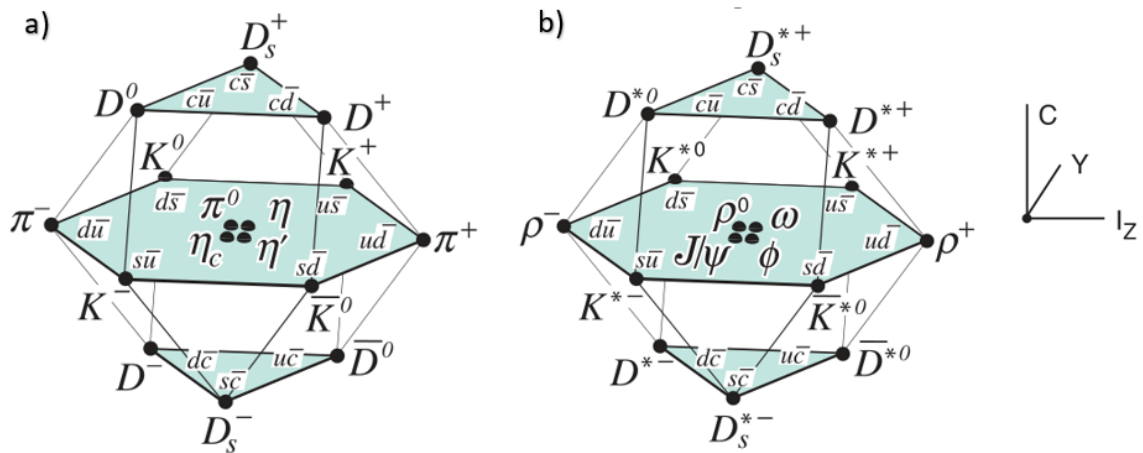
Uvođenje  $c$  kvarka proširuje simetriju okusa  $SU(3)_f$  na  $SU(4)_f$ . Međutim, zbog velike mase  $c$  kvarka, ova simetrija je narušena. Ipak  $SU(4)_f$  reprezentacija je korisna te se pomoću nje šesnaest mezona grupira u 15-plet i singlet što je prikazano na Slici 2.10 [9] :

$$4 \times \bar{4} = 15 + 1 \quad (2.11)$$

<sup>8</sup>Mogu se miješati ako imaju isti spin i paritet.



Slika 2.9: Oktet i singlet pseudoskalarnih mezona ( $0^-$ ) (lijevo) i vektorskih mezona ( $1^-$ ) (desno). (Slika preuzeta iz [8]).



Slika 2.10:  $SU(4)$  multiplieti: 15-plet plus singlet (a) pseudoskalarnih mezona i (b) vektorskih mezona sastavljeni od  $u$ ,  $d$ ,  $s$  i  $c$  kvarkova. (Slika preuzeta iz [9]).

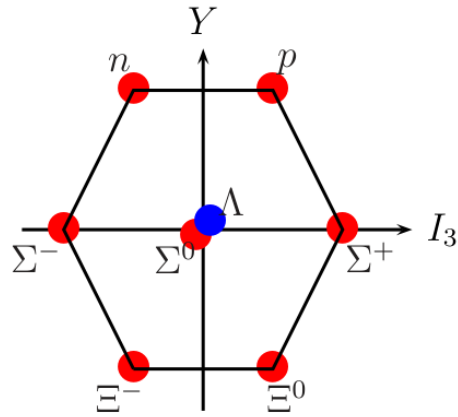
Barioni se u kvarkovskom modelu sastoje se od tri kvarka  $qqq$  i matematički su razloženi na podreprezentacije prema izrazu:

$$3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10 \quad (2.12)$$

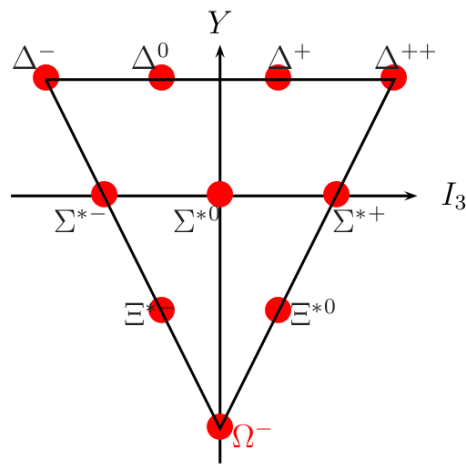
što omogućuje smještanje bariona u oktet ( $1/2^+$ ) stanja prikazanog na Slici 2.11 i u deкупlet ( $3/2^+$ ) stanja prikazanog na Slici 2.12 .

Analogno kao kod mezona, uključivanje  $c$  kvarka proširuje simetriju okusa na  $SU(4)_f$  te su barioni klasificirani u trodimenzionalnoj reprezentaciji s tri koordinate ( $I_z, Y, C$ ) što je prikazano na Slici 2.13 [9].

Uvođenje  $b$  kvarka vodilo bi na  $SU(5)$  multiplete koji se prikazuju u četiri dimenzije [1].



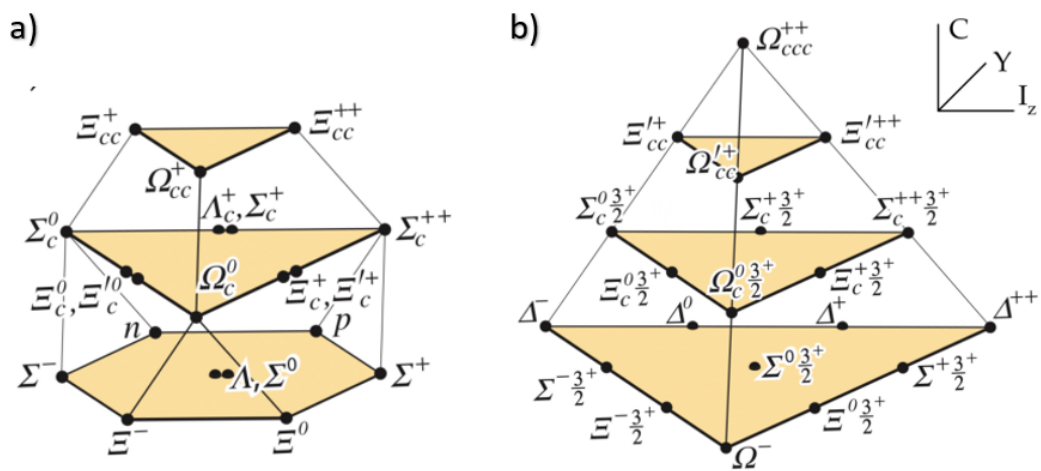
Slika 2.11: Oktet bariona najnižeg spina  $J = 1/2$ . (Slika preuzeta iz [8]).



Slika 2.12: Dekuplet bariona spina  $J = 3/2$ . (Slika preuzeta iz [8]).

Iznimno kratak životni vijek  $t$  kvarka sugerira da vjerojatno ne postoje vezani hadroni koji sadrže  $t$  kvarkove i/ili njihove antikvarkove.

Svi barioni i mezoni osnovnih stanja multipleta su poznati. Mnoga njihova svojstva, a posebno mase, dobro se slažu čak i s najosnovnijim verzijama kvarkovskih modela.



Slika 2.13:  $SU(4)$  multiplieti osnovnog stanja bariona sastavljeni od  $u$ ,  $d$ ,  $s$  i  $c$  kvarkova. a) 20-plet bariona s oktetom bariona spina 1/2, b) 20-plet bariona s dekupletom bariona spina 3/2. (Slika preuzeta iz [9]).



### 3 Modeli mezona

Istraživanje svojstava teških mezona, poznatih kao kvarkoniji, doprinosi razumijevanju kvantne kromodinamike kroz analizu njihovih spektara i radijativnih prijelaza. Teorijski pristupi kao što su QCD na rešetci, sumacijska pravila QCD-a (od eng. *QCD sum rules*), perturbativna QCD i druge teorijske metode pružaju temelj za predviđanje masenih spektara kvarkonija na osnovu kvantne kromodinamike. No, ovi pristupi su često složeni i računalno zahtjevni pa su razvijeni modeli potencijala kojima se reproduciraju eksperimentalno opaženi maseni spektri kvarkonija.

Slaganje eksperimentalno dobivenih vrijednosti s predviđanjima modela ovisi o izboru potencijala, koji se temelji na dva važna svojstva kvantne kromodinamike: zatočenju i asimptotskoj slobodi kvarkova. Za proučavanje vezanih stanja kvark-antikvark, neki od često korištenih potencijala su [10]:

- Cornell potencijal:  $-\frac{a}{r} + br + c$
- Potencijal s potencijama:  $-ar^\alpha + br^\beta + c$
- Logaritamski potencijal:  $a + b \ln(r)$
- Richardson potencijal:  $ar - \frac{b}{r \ln(\lambda^{-r})}$

Energije vezanja kvarkonija male su u usporedbi s masama konstituentnih kvarkova pa vezana stanja težih kvarkova možemo tretirati nerelativistički, rješavanjem Schrödingerove jednadžbe.

Iako su takvi modeli proučavani tijekom mnogo godina, egzaktna rješenja Schrödingerove jednadžbe s navedenim interakcijskim potencijalima ne možemo izračunati. Stoga u literaturi postoje različite metode za njeno rješavanje, uključujući analitičke metode poput metode Laplaceove transformacije (LTM), Nikiforov-Uvarov (UV) metode i metoda asimptotske iteracije (AIM), kao i numeričke metode poput Crank-Nicolson metode i metode strojnog učenja poput neuronskih mreža (ANN).

Navedeni modeli potencijala imaju značajnu ulogu u istraživanju spektroskopije kvarkonija omogućujući dublje razumijevanje jake interakcije između kvarkova.

#### 3.1 Razvoj spektroskopije kvarkonija

Eksperimenti elektron-pozitron anihilacije koji su rezultirali novim hadronskim rezonancama, imali su značajan utjecaj na razvoj kvarkovskih modela mezona.

Udarni presjek za proces stvaranja parova  $\mu^+\mu^-$  u elektron-pozitron sudarima je:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (3.1)$$

Odgovarajući udarni presjek za stvaranje para  $q\bar{q}$  je:

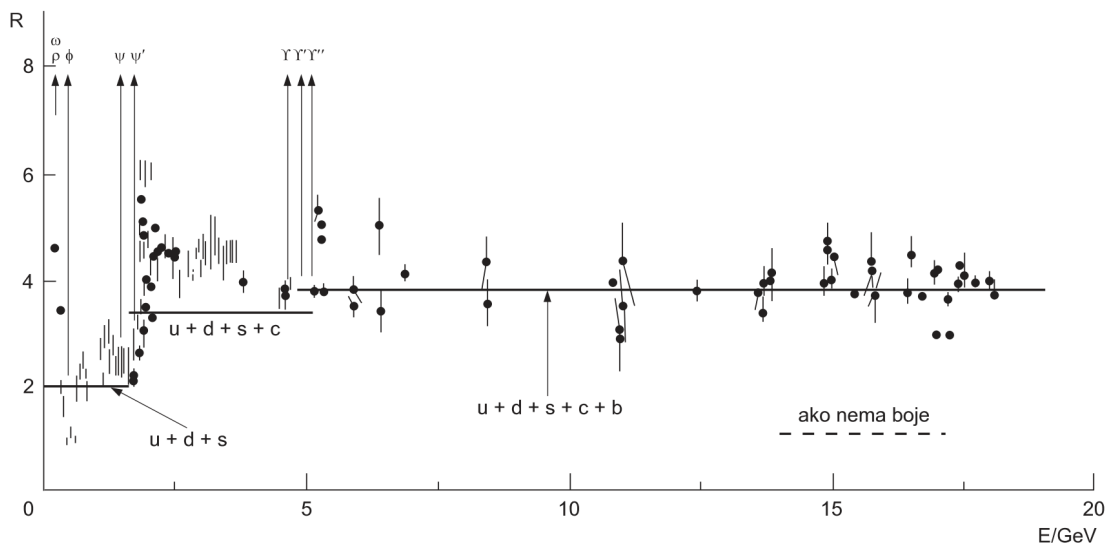
$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = 3 \times \frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q_q^2 \quad (3.2)$$

gdje faktor tri predstavlja tri moguće kombinacije boja u konačnom stanju  $q\bar{q}$  koje se može proizvesti kao  $R\bar{R}$ ,  $G\bar{G}$  ili  $B\bar{B}$  [2].

U svrhu smanjivanja sistematskih pogrešaka, korisno je izraziti omjer ovih udarnih presjeka:

$$R_\mu \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_{\text{okusi}} Q_q^2 \quad (3.3)$$

Kada su mjerenja omjera udarnih presjeka  $R$  dosegla energijski raspon u GeV-ima, primijetio se neočekivan linearni porast omjera  $R$  s energijom, što je prikazano na Slici 3.1 [1]. Ovaj linearni porast razlikuje se od očekivanog konstantnog ponašanja koje proizlazi iz osnovnog procesa stvaranja kvark-antikvark para.



Slika 3.1: Omjer  $R$  u ovisnosti o energiji elektrona [1]. (Slika preuzeta iz [1]).

Znanstveni tim SLAC-LBL pod vodstvom Burtona Richtera započeo je temeljita istraživanja omjera  $R$  1973. godine na ubrzivaču SPEAR (od eng. *Stanford Positron Electron Asymmetric Ring*). Paralelno ovim istraživanjima, na Brookhaven-u grupa pod vodstvom Samuela Tinga tijekom ljeta 1974. godine u nizu rezonanci  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\phi$  pronalazi novu rezonancu na 3,1 GeV [1]. Međutim, Ting je želio provjeriti svoje rezultate prije objavljivanja pa je otkriće nove rezonance ostalo dobro čuvana tajna sve do vikenda 10. i 11. studenog, kada je znanstveni tim SLAC-a reanalizom podataka neovisno otkrio istu rezonancu na 3,1 GeV. Oba tima su objavila rezultate istodobno; Ting je česticu nazvao  $J$ , a Richter  $\psi$  zbog čega je usvojeno ime  $J/\psi$ . Objava oba otkrića 11. studenog 1974. godine poznato je u fizici kao “novembarska revolucija 1974”. Samo deset dana nakon otkrića  $J/\psi$  čestice na SLAC-u je otkrivena teža čestica  $\psi'$  na 3,695 GeV [1]. Postojanje rezonanci  $J/\psi$  i  $\psi'$  objasnilo je lažni linearni porast omjera  $R(E)$ .

U narednim mjesecima, istraživanje prave prirode čestice  $J/\psi$  bilo je predmet intenzivnih znanstvenih rasprava. Objašnjenje daju Appelquist i Politzer 1975. godine u kontekstu kvarkovskog modela: riječ je o vezanim stanjima novog kvarka  $c$  pri čemu su  $J/\psi$  i  $\psi'$  energijske razine  $c\bar{c}$  vezanog stanja “skrivena čari” [1]. Novim otkrićima mezona 1976. godine,  $D^0$  ( $\bar{u}c$ ) u lipnju i  $D^+$  ( $\bar{d}c$ ) u srpnju, otvoren je put spektroskopiji čarobnih hadrona.

Sredinom 1977. godine Ledermanov tim s Fermilaba, izveo je eksperiment sličan Tingovom, ali s intenzivnijim snopom čestica i unaprijeđenim detektorom. Rezultat tog eksperimenta bilo je otkriće čestica  $\Upsilon$  na 9,5 GeV i  $\Upsilon'$ , koje su odmah interpretirane kao vezano stanje ( $b\bar{b}$ ) [1]. Nekoliko mjeseci kasnije ustanovljen je niz stanja “skrivena ljepote” (b od eng. *beauty* ili *bottom*) [1]:

$$\Upsilon(9,4), \quad \Upsilon'(10), \quad \Upsilon''(10,4)$$

a prvi mezoni “otkrivena ljepote” identificirani su na Cornellu 1980. godine [1]. Time je potaknuta nova era spektroskopije teških kvarkovskih stanja.

### 3.2 Schrödingerova jednadžba

Jednadžbu gibanja kvantnomehaničkog sustava konstruiramo koristeći matematički formalizam inherentan kvantnoj mehanici.

Vektor stanja sadrži potpunu informaciju o stanju kvantnog sustava u određenom trenutku. U svrhu opisivanja dinamike kvantnomehaničkog sustava, određujemo kako sustav evoluiru u vremenu. U klasičnoj mehanici, sustav s  $N$  stupnjeva slobode možemo opisati ili s  $2n$  Hamiltonovih jednadžbi 1. reda ili s  $n$  Lagrange jednadžbi 2. reda. U oba slučaja potrebna su nam dva početna uvjeta kako bismo riješili jednadžbe. Međutim, u kvantnoj mehanici budući da je stanje sustava potpuno određeno vektorom stanja, tada jednadžba koja daje vremensku evoluciju kvantnog stanja, mora sadržavati samo prvu vremensku derivaciju vektora stanja. Prema tome jednadžbu vremenske evolucije možemo napisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{O}|\psi\rangle \quad (3.4)$$

gdje je  $\hat{O}$  operator vremenske evolucije koji mora biti linearan, kako bi vrijedio princip superpozicije, što implicira da jednadžba evolucije u vremenu mora biti linearna i homogena. Operator  $\hat{O}$  u jednadžbi (3.4) nužno mora predstavljati generator vremenskih translacija ili, ekvivalentno, veličinu koja je očuvana pri vremenskim translacijama. Iz klasične mehanike poznato je da se takva veličina predstavlja energijom ili funkcijom Hamiltonijana sustava. Stoga, slijedeći princip korespondencije, operator  $\hat{O}$  je funkcija Hamiltonijana  $\hat{H}$  pa jednadžbu (3.4) zapisujemo kao:

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = f(\hat{H})|\psi\rangle \quad (3.5)$$

Osim toga, u slučaju složenog sustava sastavljenog od dva podsustava s Hamiltonijanima  $\hat{H}_1$  i  $\hat{H}_2$ , uz pretpostavku da je ukupni Hamiltonijan zbroj Hamiltonijana svakog podsistema, generator vremenskih translacija, zbog linearnosti, mora zadovoljavati uvjet:

$$f(\hat{H}) = f(\hat{H}_1) + f(\hat{H}_2) \quad (3.6)$$

Iz jednadžbe (3.6) zaključujemo da  $f(\hat{H})$  može biti Hamiltonijan do na kompleksnu konstantu  $a$  koju tek treba odrediti:

$$\hat{O} = f(\hat{H}) = a\hat{H} \quad (3.7)$$

Kako bismo odredili konstantu  $a$ , pretpostavimo da je valna funkcija normirana:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (3.8)$$

Derivacija uvjeta normiranja po vremenu daje:

$$\frac{\partial \langle \psi | \psi \rangle}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

Uz jednadžbu vremenske evolucije (3.4) prethodni izraz svodi se na:

$$\langle \psi | a^* \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | a \hat{H} | \psi \rangle = 0 \quad (3.10)$$

$$\langle \psi | (a^* \hat{H} + a \hat{H}) | \psi \rangle = 0 \quad (3.11)$$

S obzirom da je  $\hat{H}$  hermitski operator, kako bi jednadžba (3.11) vrijedila za proizvoljno stanje  $|\psi\rangle$ , mora vrijediti  $a^* = -a$ , odnosno  $a$  mora biti imaginarni broj. Inverz konstante  $a$  radi praktičnosti i u skladu s načelom korespondencije možemo izraziti kao:  $\frac{1}{a} = i\hbar$ . Konačno, kvantnomehanička jednadžba vremenske evolucije sustava ima sljedeći oblik:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad (3.12)$$

Jednadžba (3.12) zove se vremenski ovisna Schrödingerova jednadžba. Množenje jednadžbe (3.12) s lijeve strane s  $\langle x |$  rezultira koordinatnom reprezentacijom Schrödingerove jednadžbe za jednodimenzionalnu česticu:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(x, t) \right] \psi(x, t) \quad (3.13)$$

gdje je  $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + V(x, t)$ . Koristeći definiciju operatora impulsa u koordinatnoj reprezentaciji:  $\hat{p}_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  dobivamo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \psi(x, t) \quad (3.14)$$

Koristan je i zapis Schrödingerove jednadžbe u koordinatnoj reprezentaciji za tro-dimenzionalni slučaj:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (3.15)$$

gdje je  $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  Laplacijan u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

### 3.2.1 Stacionarna stanja

U slučaju kada potencijal ne ovisi eksplicitno o vremenu, formalno rješenje Schrödingerove jednadžbe dobiveno integriranjem jednadžbe (3.12) je:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} |\psi(0)\rangle \quad (3.16)$$

gdje je  $|\psi(0)\rangle$  početni vektor stanja. Pretpostavimo da  $|\psi(0)\rangle$  nije svojstveno stanje Hamiltonijana. Tada je potrebno riješiti svojstvenu jednadžbu Hamiltonijana, odnosno stacionarnu Schrödingerovu jednadžbu:

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \quad (3.17)$$

## 3.3 Modeliranje mezona Cornell potencijalom

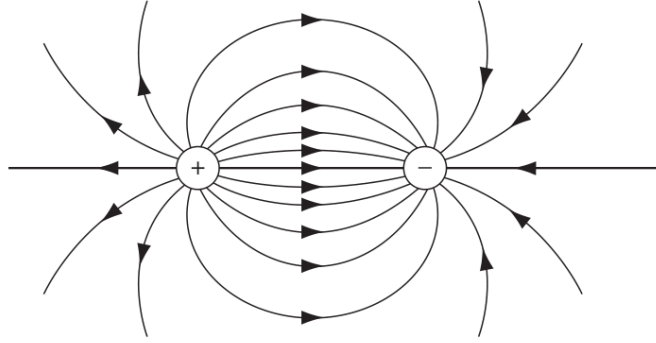
U nerelativističkoj kvantnoj kromodinamici, međudjelovanje između kvarkova ili između kvarka i antikvarka može se opisati statičkim potencijalom  $V(\vec{r})$ . Pri kratkim udaljenostima između čestica, kvantna kromodinamika slična je kvantnoj elektrodinamici. Naime, u kvantnoj kromodinamici kvarkovi na kratkim udaljenostima međudjeluju izmjenom jednog gluona, kao što u kvantnoj elektrodinamici nabijene čestice međudjeluju izmjenom jednog fotona. Pri tome dvije čestice nabijene istoimenim električnim nabojem međudjeluju odbojnim Coulombskim potencijalom  $V(\vec{r}) = \alpha/r$ , dok dvije čestice nabijene raznoimenim električnim nabojem međudjeluju privlačnim Coulombskim potencijalom  $V(\vec{r}) = -\alpha/r$ . Linije električnog polja između dva raznoimena naboja prikazane su na Slici 3.2.

Budući da su gluon i foton oboje bezmasene čestice spina jedan, međudjelovanje kvarka i antikvarka na kratkim udaljenostima također je predstavljeno Coulombskim potencijalom:

$$V_{q\bar{q}}(r \ll) = -\frac{4\alpha_s}{3r} \quad (3.18)$$

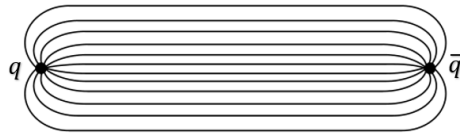
gdje su  $4/3$  odgovarajući SU(3) faktor boje, a "konstanta" fine strukture jakog međudjelovanja<sup>9</sup>  $\alpha_s$  je QCD ekvivalent konstante fine strukture  $\alpha$  u kvantnoj elek-

<sup>9</sup> $\alpha_s$  zapravo nije konstanta, već ovisi o udaljenosti između kvarkova; kada se udaljenost smanjuje i  $\alpha_s$  se smanjuje, dovodeći do asimptotske slobode koja oslabljuje Coulombov član.



Slika 3.2: Linije električnog polja između dva raznoimena naboja. (Slika preuzeta iz [11]).

trodinamici. S druge strane, s povećanjem udaljenosti između kvarkova interakcija među njima jača, energija polja linearno raste, što objašnjava zatočenje kvarkova unutar hadrona. Umjesto da se linije polja šire kao u QED-u, one poprimaju oblik cijevi između kvarkova kao što je prikazano na Slici 3.3.



Slika 3.3: Linije polja za potencijal ( $V \propto r$ ) između kvarka i antikvarka. (Slika preuzeta iz [12]).

Stoga na velikim udaljenostima između kvarkova gustoća energije je konstantna i prema tome proporcionalna razmaku između kvarkova, rezultirajući potencijalom oblika:

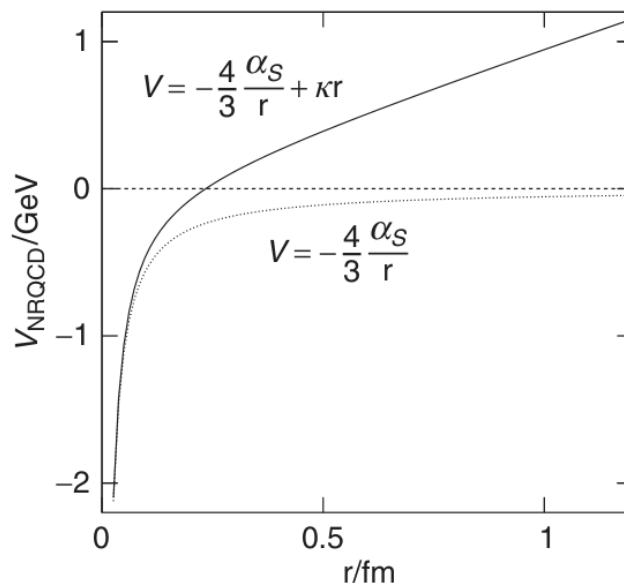
$$V_{q\bar{q}}(r \gg) = \kappa r \quad (3.19)$$

gdje je  $\kappa(\text{eksp.}) = 1 \text{ GeV/fm}$  [2]. Na Slici 3.4 prikazan je nerelativistički QCD potencijal između kvarka i antikvarka kao zbroj (3.18) i (3.19).

Zbroj Coulombovog (3.18) i linearnog potencijala (3.19) uz faktor skaliranja  $c$ :

$$V(r) = -\frac{a}{r} + br + c \quad (3.20)$$

predstavlja potencijal između kvarka i antikvarka, poznatijeg kao Cornell potencijal gdje su  $a$ ,  $b$  i  $c$  konstante čijom se varijacijom može postići dobro slaganje s eksperimentalnim rezultatima. Schrödingerova jednačba s Cornell potencijalom predstavlja važan nerelativistički model za izračun spektra i radijativnih prijelaza vezanih sustava težih kvarkova i antikvarkova. Posebno uspješnim pokazao se u spektroskopiji kvarkonija  $\psi$  i  $\Upsilon$ .



Slika 3.4: Približni oblik nerelativističkog QCD potencijala za vezano stanje  $q\bar{q}$ , uz  $\alpha_s = 0,2$  i  $b = 1$  GeV/fm. (Slika preuzeta iz [2]).

Vodikov atom, kao sustav dvije nabijene čestice u Coulombskom potencijalu, predstavlja temelj za izgradnju i daljnji razvoj modela za proučavanje mezona.

### 3.3.1 Kvantnomehanički model vodikovog atoma

Vodikov atom, sastavljen od protona i elektrona, predstavlja problem dva tijela koji se može riješiti analitički, što ga čini značajnim i realističnim kvantnim sustavom. U ovom modelu, elektron nije više predstavljen kao točkasta čestica, kako je to slučaj u klasičnoj mehanici, već se opisuje valnom funkcijom koja odražava njegovu kvantnu prirodu. Energije na kojima promatramo vodikov atom ne obuhvaćaju kvantna svojstva elektromagnetskog polja, stoga je elektron smješten u klasično polje koje stvara proton. Ovaj pristup ne opisuje u potpunosti atom vodika jer zanemarujemo spin elektrona, spin-orbit međudjelovanje i relativističke korekcije. Dodatno pojednostavljenje dolazi od toga što je masa protona 1836 puta veća od mase elektrona<sup>10</sup> što znači da je centar mase sustava u ishodištu gdje se nalazi mirujući proton oko kojeg se giba elektron. Budući da razmatramo relativno gibanje elektrona u odnosu na stacionarnu jezgru, masa koja će se pojaviti u Schrödingerovoj jednadžbi je reducirana masa  $\mu$  koja je približno jednaka masi elektrona:

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \approx m_e \quad (3.21)$$

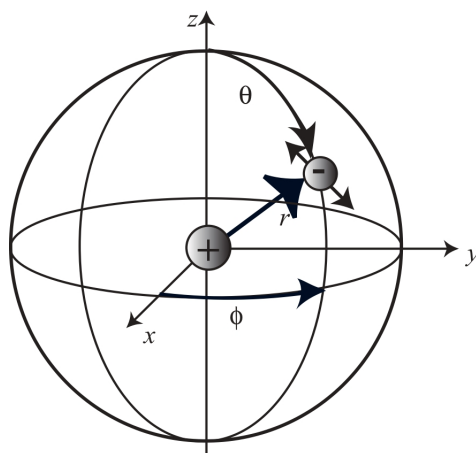
Zbog toga se problem vodikovog atoma svodi na problem jednog tijela u centralnom potencijalu oblika  $V(r) = -e^2/r$ . U ovom najelementarnijem pristupu vremen-

<sup>10</sup>Vidi [5] str. 1-1.

ski neovisna Schrödingerova jednađzba za vodikov atom je:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 + V(r)\right)\psi = E\psi \quad (3.22)$$

Zbog sferne simetrije atoma račun će biti najjednostavniji uz odabir sfernog koordinatnog sustava gdje je točka opisana radijalnom koordinatom  $r$  te polarnim  $\theta$  i azimutalnim kutem  $\phi$ .



Slika 3.5: Sferne koordinate elektrona u vodikovom atomu. (Slika preuzeta iz [13]).

Jednađzba (3.22) uz zapis  $\nabla^2$  u sfernim koordinatama<sup>11</sup> poprima oblik:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] + V(r)\psi = E\psi \quad (3.23)$$

Nastojimo pronaći valne funkcije  $\psi(r, \theta, \phi)$  koje zadovoljavaju jednađzbu (3.23). Budući da je polje centralno, valnu funkciju možemo separirati na radijalni  $R(r)$  i kutni dio  $Y(\theta, \phi)$ :

$$\psi(\vec{r}) = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (3.24)$$

S obzirom na poznato rješenje kutnog dijela u obliku kuglinih funkcija  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ , rješavamo radijalni dio Schrödingerove jednađzbe:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}R - \frac{e^2}{r}R = ER \quad (3.25)$$

Uvodimo sljedeću supstituciju:

$$R(r) = \frac{\xi(r)}{r} \quad (3.26)$$

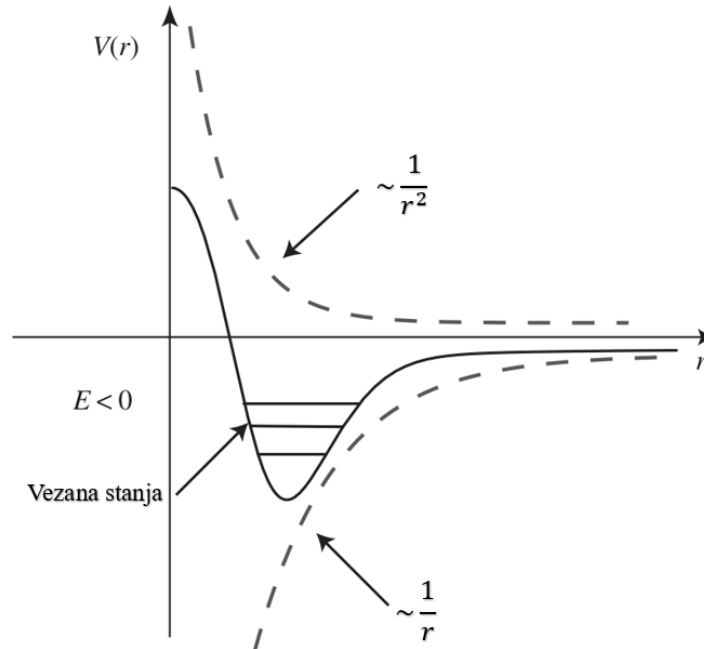
gdje je  $\xi(r)$  nepoznata funkcija. Cilj ove supstitucije je da se jednađzba (3.25) pretvori u oblik jednodimenzionalne Schrödingerove jednađzbe. Nakon transformacije derivacije i kraćenja dobijemo jednađzbu:

<sup>11</sup>Vidi [14] str. 133.



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\xi'' + \left(-\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right)\xi = E\xi \quad (3.27)$$

Jednadžbu (3.27) prepoznavamo kao standardnu jednodimenzionalnu Schrödingerovu jednadžbu gdje je  $-\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$  efektivni potencijal prikazan na Slici 3.6.



Slika 3.6: Suma člana potencijala  $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$  i Coulombovog potencijala  $-\frac{e^2}{r}$  rezultira potencijalom vodikovog atoma koji je oblika jame. Prikazana su i vezana stanja u vodikovom atomu [13]. (Slika preuzeta iz [13]).

Promatramo vezana stanja, a ona će biti vezana za energije koje u klasičnoj mehanici odgovaraju omeđenim putanjama kada čestica titra između dvije točke obrata, što je u ovom slučaju za negativne energije.

U svrhu prelaženja na bezdimenzionalne varijable uvodimo tzv. Bohrov radijus:

$$r_0 \equiv \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0,53 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (3.28)$$

Primjećujemo da  $r_0$  približno odgovara dimenziji vodikovog atoma, što opravdava njegovu upotrebu kao prirodne prostorne skale, stoga ćemo udaljenost izražavati u jedinicama Bohrovog radijusa, odnosno uvodimo bezdimenzionalnu veličinu  $\tilde{r}$ :

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_0} \quad (3.29)$$

Konstanta  $E_0$  će biti od značaja za daljnja razmatranja jer predstavlja približnu energijsku skalu vodikovog atoma i poslužiti će kao prirodna jedinica za energiju. Definira se na sljedeći način:

$$E_0 \equiv \frac{me^4}{\hbar^2} = 27,2 \text{ eV} \quad (3.30)$$

Nakon transformacije derivacije i sređivanja izraza dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$\frac{d^2\xi}{d\tilde{r}^2} + \left( \frac{2me^2r_0}{\hbar^2} \frac{1}{\tilde{r}} - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2} \right) \xi + \frac{2mr_0^2}{\hbar^2} E \xi \quad (3.31)$$

Uz definicije (3.28) i (3.30) dobivamo:

$$\frac{d^2\xi}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}}\xi - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2}\xi + \frac{2E}{E_0}\xi = 0 \quad (3.32)$$

Uvodimo oznaku za bezdimenzionalnu energiju:  $\tilde{E} \equiv E/E_0$  što daje jednadžbu:

$$\frac{d^2\xi}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}}\xi - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2}\xi + 2\tilde{E}\xi = 0 \quad (3.33)$$

Definiramo izraz koji će kasnije biti koristan:  $\tilde{E} \equiv -\frac{1}{2n^2}$  gdje je  $n \in \mathbb{R}$  što konačno daje jednadžbu u bezdimenzionalnom obliku:

$$\frac{d^2\xi}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}}\xi - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2}\xi - \frac{1}{n^2}\xi = 0 \quad (3.34)$$

Pri rješavanju takve diferencijalne jednadžbe, početni korak je analizirati asimptotsko ponašanje rješenja u granicama kada  $r$  teži nuli i kada teži beskonačnosti. Kada  $r$  teži u beskonačnost, 2. i 3. član u jednadžbi (3.34) možemo zanemariti i preostaje jednadžba:

$$\frac{d^2\xi}{d\tilde{r}^2} - \frac{1}{n^2}\xi = 0 \quad (3.35)$$

koju prepoznamo kao diferencijalnu jednadžbu za eksponencijalne funkcije, prema tome njena rješenja možemo zapisati kao:

$$\xi \sim e^{-\tilde{r}/n} \quad (3.36)$$

$$\xi \sim e^{+\tilde{r}/n} \quad (3.37)$$

Budući da promatramo vezana stanja, moramo zadržati rješenje koje konvergira, stoga se rješenje (3.37) mora odbaciti jer divergira kada  $r$  teži u beskonačnost.

Kada  $r$  teži u nulu, 1. i 3. član u jednadžbi (3.34) možemo zanemariti i preostaje nam sljedeća jednadžba:

$$\frac{d^2\xi}{d\tilde{r}^2} - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2}\xi = 0 \quad (3.38)$$

Pretpostavljamo rješenje oblika:

$$\xi \sim \tilde{r}^p \quad (3.39)$$

te ga uvrštavamo u jednadžbu (3.38) što daje:

$$p(p-1)\tilde{r}^{(p-2)} - l(l+1)\tilde{r}^{(p-2)} = 0 \quad (3.40)$$

Izraz (3.40) se svodi na kvadratnu jednadžbu:

$$p^2 - p - l(l+1) = 0 \quad (3.41)$$

čija su rješenja:

$$p = \frac{1 \pm (2l+1)}{2} \quad (3.42)$$

Uz (3.42) rješenja jednadžbe (3.38) su:

$$\xi \sim \tilde{r}^{l+1} \quad (3.43)$$

$$\xi \sim \tilde{r}^{-l} \quad (3.44)$$

Rješenje (3.44) možemo odbaciti jer divergira u ishodištu.

Razmatranje asimptotskog ponašanja ukazuje na potrebu pronalaska općenitih rješenja radijalne jednadžbe ako funkciju  $\xi$  napišemo kao produkt asimptotskog rješenja za nulu (3.43), asimptotskog rješenja za beskonačnost (3.36) i nepoznate funkcije  $W(\tilde{r})$  koju tek trebamo odrediti:

$$\xi(r) = \tilde{r}^{l+1} e^{-\tilde{r}/n} W(\tilde{r}) \quad (3.45)$$

Ansatz (3.45) uvrštavamo u izraz (3.34) što nakon sređivanja daje jednadžbu:

$$\tilde{r}W'' + 2\left(1 + l - \frac{\tilde{r}}{n}\right)W' + 2\frac{n-l-1}{n}W = 0 \quad (3.46)$$

Radi daljnje jednostavnosti uvodimo sljedeću supstituciju:

$$\eta = \frac{2\tilde{r}}{n} \quad (3.47)$$

te nakon transformacije derivacije dobivamo jednadžbu:

$$\eta \frac{d^2W}{d\eta^2} + (2 + 2l - \eta) \frac{dW}{d\eta} - (1 + l - n)W = 0 \quad (3.48)$$

Preostaje pronaći rješenje za funkciju  $W(\tilde{r})$ . Jednadžbu (3.48) prepoznamo kao homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad (3.49)$$

Ako postoji  $x_0$  takav da je  $p(x) = 0$  onda je  $x_0$  singularna točka diferencijalne jednadžbe.

U jednadžbi (3.48) prepoznavamo da je  $p(x) = \eta$  pa je singularna točka jednadžbe (3.48)  $\eta = 0$ .

Kako bismo analizirali prirodu ove singularne točke, nužno je ispitati granice sljedećih omjera:

ako je

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - x_0) \frac{q(x)}{p(x)} \quad (3.50)$$

konačan i ako je

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)} \quad (3.51)$$

konačan, tada je singularna točka tzv. regularna singularna točka [15].

Provjerimo vrijedi li to za jednadžbu (3.48):

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (\eta - \eta_0) \frac{2 + 2l - \eta}{\eta} = 2 + 2l \quad (3.52)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (\eta - \eta_0)^2 \frac{-(1 + l - n)}{\eta} = 0 \quad (3.53)$$

Ovi limesi su konačni, dakle  $\eta = 0$  je uistinu regularna singularna točka i jednadžbu (3.48) možemo rješavati Frobeniusovom metodom (Dodatak A) tako da rješenje pretpostavimo kao razvoj u red:

$$W = \eta^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k \quad (3.54)$$

i uvrštavamo ga u jednadžbu (3.48). Kao rezultat dobivamo izraz za  $c_1$  i rekurzivsku relaciju s kojom možemo generirati sve koeficijente u razvoju:

$$c_1 = \frac{1 + l - n}{2 + 2l} c_0 \quad (3.55)$$

$$c_{k+1} = \frac{k + 1 + l - n}{(k + 1)(k + 2 + 2l)} c_k \quad (3.56)$$

pri čemu je  $c_0$  slobodan koeficijent kojeg određujemo normiranjem valne funkcije. Koeficijenti koji se pojavljuju u vodikovom atomu su Laguerrovi polinomi<sup>12</sup>.

Preostaje provjeriti prihvatljivost rješenja u smislu asimptotskog ponašanja. Posebno promatramo granicu kada  $\eta$  teži u beskonačnost, gdje doprinosi koeficijenta  $k$  postaju dominantni pa izraz (3.56) poprima sljedeći oblik:

$$c_{k+1} \approx \frac{c_k}{k} \quad (3.57)$$

Usporedbom s funkcijom  $e^\eta$ , čiji je razvoj u red:

---

<sup>12</sup>Vidi [16] str. 889-892.

$$e^\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \eta^k \quad (3.58)$$

gdje je  $\frac{1}{k!} = b_k$  pri čemu su  $b_k$  koeficijenti, vrijedi:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \quad (3.59)$$

što je za velike vrijednosti koeficijenta  $k$ :

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} \approx \frac{1}{k} \quad (3.60)$$

Posljedično:

$$W(\eta) \propto e^\eta \quad (3.61)$$

Uzimajući to u obzir, ukupno rješenje se ponaša kao  $e^{\tilde{r}/n}$ , što, kako smo ranije raspravili, divergira kada  $r$  teži beskonačnosti. Kako bismo spriječili tu divergenciju, red:

$$W(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k \quad (3.62)$$

je potrebno prekinuti zahtjevom da je  $n \in \mathbb{N}$ , tako da red nije beskonačan, već se zaustavi nakon konačnog broja  $k$ , što rezultira polinomom. Upravo uvjet da  $n$  može poprimiti samo vrijednosti iz skupa prirodnih brojeva daje kvantizaciju energije u vodikovom atomu.

Za svaku vrijednost glavnog kvantnog broja  $n$  kojeg definiramo kao:

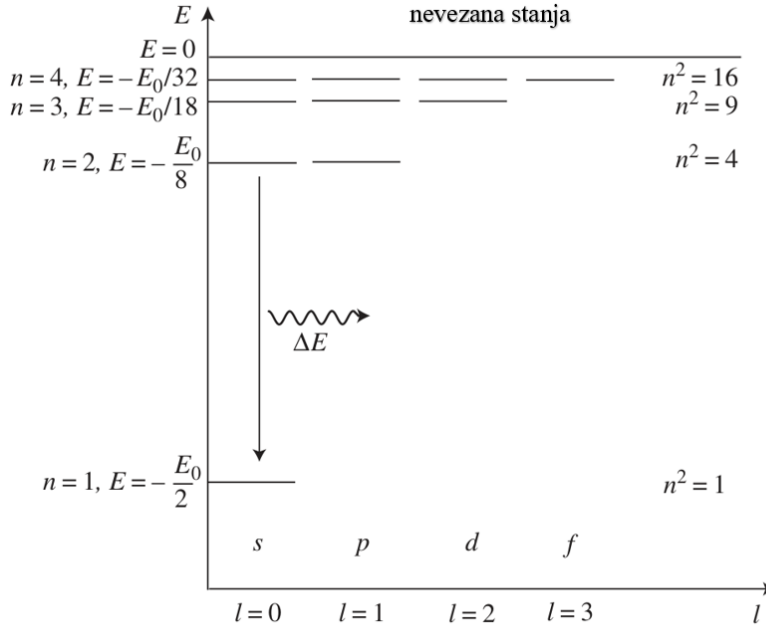
$$n = k + l + 1 \quad (3.63)$$

odgovarajuća vrijednost energije je dana s:

$$E = -E_0 \frac{1}{2n^2} \quad (3.64)$$

Za dani glavni kvantni broj,  $l$  poprima vrijednosti  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Vodikov atom je zanimljiv jer u osnovi posjeduje beskonačno mnogo vezanih stanja budući da s porastom glavnog kvantnog broja  $n$  energetske nivou vezanih stanja postaju gušći. Iako valna funkcija ovisi o tri kvantna broja ( $n, l$  i  $m$ ), energetske nivou prikazani na Slici 3.7 ovise samo o  $n$ , što je karakteristično za Coulombov potencijal. Ovo implicira da sva energijska stanja s istim  $n$ , ali različitim orbitalnim kvantnim brojem  $l$  i magnetskim kvantnim brojem  $m$  imaju istu energiju što ukazuje na degeneraciju energijskih stanja. Vodikov atom ima visok stupanj degeneracije jer za svaki  $n$  postoji  $n^2$  stanja. Energetske nivou s istim orbitalnim kvantnim brojem  $l$  mogu se



Slika 3.7: Shematski prikaz energetske strukture vodikovog atoma. (Slika preuzeta iz [13]).

grupirati, što rezultira serijama spektralnih linija. Primjerice, za  $l = 0$  Lymanova serija, za  $l = 1$  Balmerova serija, za  $l = 2$  Paschenova serija, za  $l = 3$  Brackettova serija, i za  $l = 4$  Pfundova serija.

Energija osnovnog stanja vodikovog atoma iznosi:

$$E = -13,6 \text{ eV} \quad (3.65)$$

Iz uvjeta:

$$\int_0^{+\infty} dr |R_{nl}(r)|^2 r^2 = 1 \quad (3.66)$$

dobiva se norma radijalnog rješenja Schrödingerove jednadžbe čiji je konačan izraz:

$$R_{nl}(r) = r_0^{-3/2} \sqrt{\left(\frac{2}{n}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2r}{nr_0}\right)^l e^{-r/nr_0} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{nr_0}\right) \quad (3.67)$$

gdje su  $L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{nr_0}\right)$  pridruženi Laguerrovi polinomi<sup>13</sup>.

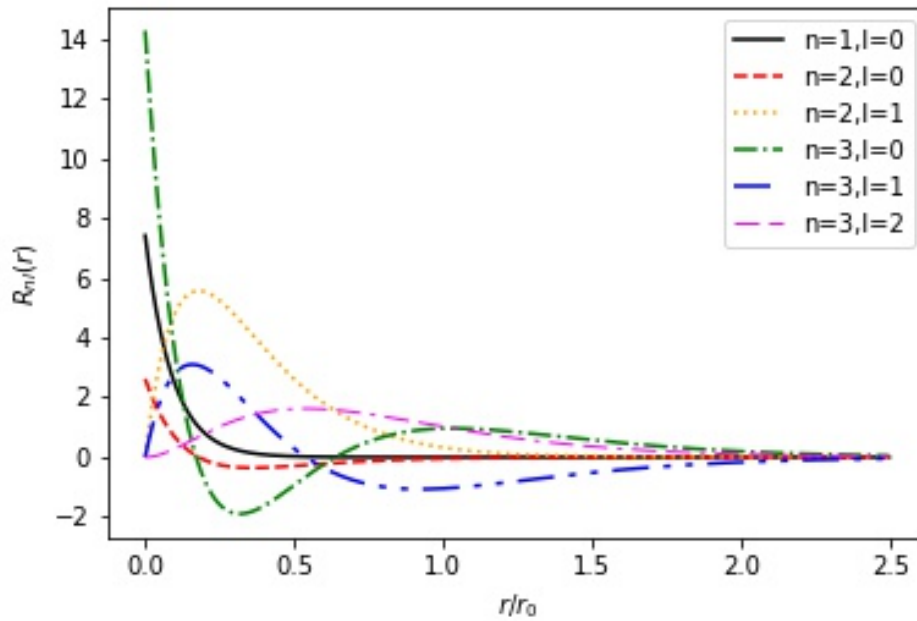
U Tablici 3.1 prikazani su izrazi za nekoliko prvih radijalnih funkcija vodikovog atoma. Radijalne funkcije navedene u Tablici 3.1 prikazane su na Slici 3.8.

Radijalna gustoća vjerojatnosti pruža informaciju na kojoj će se udaljenosti od jezgre elektron najvjerojatnije nalaziti i dana je izrazom:

<sup>13</sup>Vidi [16], str. 892.

$$\begin{aligned}
R_{10}(r) &= 2r_0^{-3/2} e^{-r/r_0} \\
R_{20}(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} r_0^{-3/2} \left(1 - \frac{r}{2r_0}\right) e^{-r/2r_0} \\
R_{21}(r) &= \frac{1}{2\sqrt{6}} r_0^{-3/2} \frac{r}{r_0} e^{-r/2r_0} \\
R_{30}(r) &= \frac{2}{3\sqrt{3}} r_0^{-3/2} \left(1 - \frac{2r}{3r_0} + \frac{2r^2}{27r_0^2}\right) e^{-r/3r_0} \\
R_{31}(r) &= \frac{8}{27\sqrt{6}} r_0^{-3/2} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{6r_0}\right) e^{-r/3r_0} \\
R_{32}(r) &= \frac{4}{81\sqrt{30}} r_0^{-3/2} \frac{r^2}{r_0^2} e^{-r/3r_0}
\end{aligned}$$

Tablica 3.1: Radijalne funkcije vodikovog atoma.



Slika 3.8: Graf radijalnih funkcija vodikovog atoma.

$$\wp_{nl}(\tilde{r}) = |R_{nl}(r)|^2 r^2 \quad (3.68)$$

### 3.3.2 Maseni spektar mezona

Valna funkcija koja opisuje mezone je:

$$\psi = \frac{u_\ell(r)}{r} Y_\ell^{\ell_z}(\hat{r}) \times \text{spin} \times \text{boja} \quad (3.69)$$

a njena radijalna jednačba je:

$$-u''(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u(r) + m_c V(r) u(r) = m E u(r) \quad (3.70)$$

gdje je  $m_c$  masa  $c$  kvarka i rubni uvjeti za valnu funkciju su  $u(0) = u(\infty) = 0$ .

Ovisno o obliku potencijala  $V(r)$ , moguće je dobiti egzaktna rješenja radijalne jednačbe (3.70) za nekoliko slučajeva potencijala, kao što su Coulombski potencijal, potencijal harmoničkog oscilatora i linearni potencijal. Za ostale potencijale, uključujući Cornell potencijal koji modelira interakciju između kvarka i antikvarka, kao i za ostale mezonima karakteristične potencijale, nemamo egzaktna rješenja pa se koriste različite metode za pristup tim problemima, primjerice Hartree metoda, metoda diskretizacije ili varijaciona metoda.

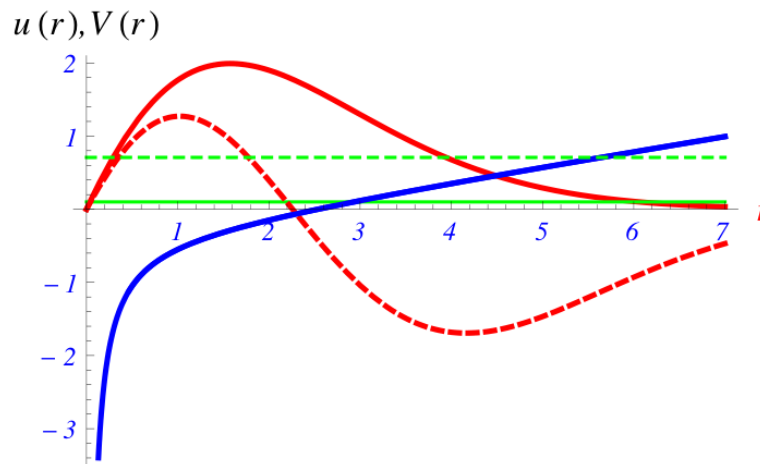
Za Cornell potencijal radijalnu jednačbu (3.70) možemo pojednostaviti na jednoparametarski problem izražen kao:

$$\left[ -\Delta - \frac{\lambda}{r} + r - \epsilon \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (3.71)$$

gdje se  $\lambda$  može izraziti kao funkcija mase kvarka  $m$  te parametara Cornell potencijala  $a$  i  $b$ .

Krajem sedamdesetih godina nekoliko znanstvenih skupina riješilo je jednačbu (3.71) za problem koji opisuje međudjelovanje kvarkova. Prilagodбом parametara bili su u mogućnosti reproducirati niže energetske nivoe vezanog stanja  $c\bar{c}$  te su također bili u mogućnosti predviđati nova, do tada nepoznata stanja.

U svrhu ilustracije na Slici 3.9 prikazan je tipični potencijal za vezano stanje  $c\bar{c}$ , zajedno s reduciranom radijalnom valnom funkcijom  $u(r)$  za stanja 1S i 2S uz prilagodbu parametara:  $m_c \approx 1,5$ ,  $a \approx 0,4$ ,  $b \approx 0,2$  i  $c \approx -0,35$  [8]. Uz te parametre Cornell potencijal je:  $V(r) = -0,4/r + 0,2r - 0,35$ .



Slika 3.9: Jednostavan centralni potencijal  $-0,4/r + 0,2r - 0,35$  i prva dva S-vala za masu  $c$  kvarka  $m_c = 1,5$ . Jedinice su GeV za  $V$ ,  $\text{GeV}^{-1}$  za  $r$  i proizvoljne za reducirane radijalne funkcije  $u(r)$  [8]. (Slika preuzeta iz [8]).

Odgovarajući rezultati prikazani su u Tablici 3.2.

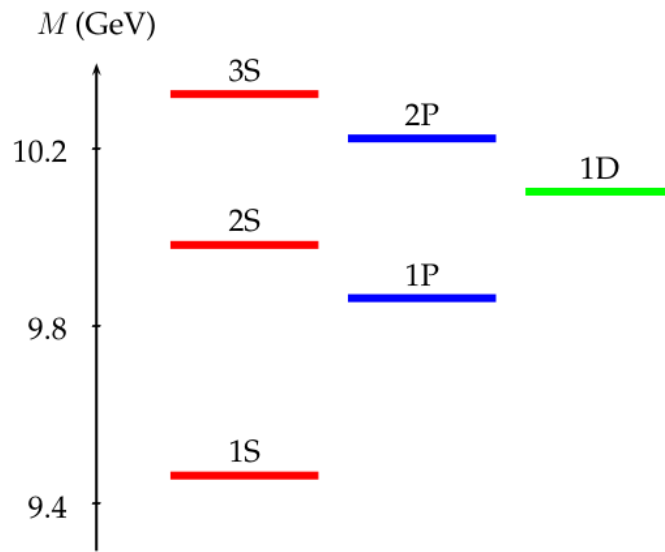
Na Slici 3.10 prikazani su nivoui vezanog stanja  $b\bar{b}$  dobiveni koristeći potencijal  $-0,4/r + 0,2r - 0,35$  i masu  $b$  kvarka  $m_b = 4,5$  GeV [8]. Raspored energetskih nivoo



	$c\bar{c}$				$b\bar{b}$				
	1S	2S	1P	1D	1S	2S	1P	1D	2P
Model	3,07	3,68	3,48	3,78	9,47	9,99	9,87	10,11	10,23
Eksp.	3,07	3,67	3,52	3,77	9,44	10,01	9,89	10,16	10,26

Tablica 3.2: Gruba prilagodba za energetske nivoe kvarkonija [8]. (Podaci preuzeti iz [8]).

simuliran ovim modelom odgovara eksperimentalnim rezultatima.



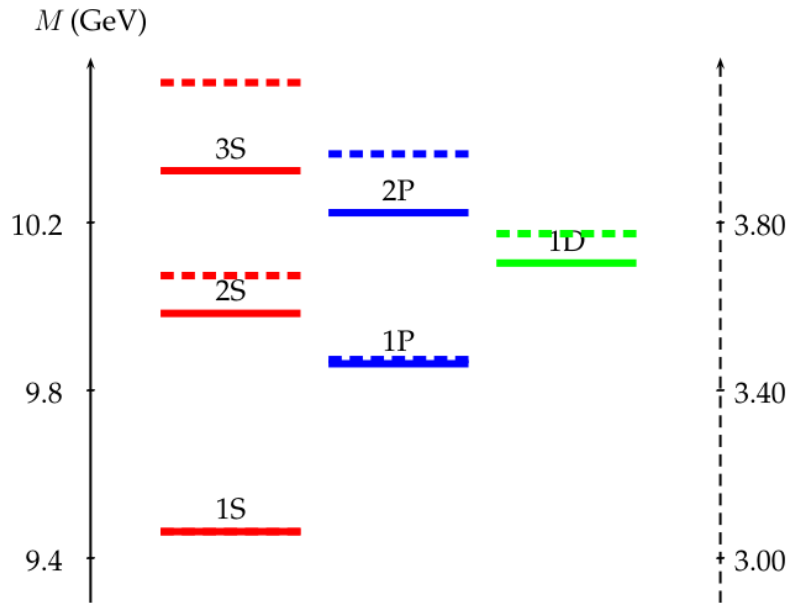
Slika 3.10: Predviđanja za spektar vezanog stanja  $b\bar{b}$  koristeći potencijal  $-0,4/r + 0,2r - 0,35$  [8]. (Slika preuzeta iz [8]).

Na Slici 3.11, nadopunjujemo Sliku 3.10 energetske nivoe vezanog stanja  $c\bar{c}$ , izračunatim koristeći isti potencijal, pri čemu su 1S nivoe postavljeni tako da se podudaraju. Potencijal je podešen tako da proizvede približno jednake energijske razmake za najniža stanja. Međutim, za viša stanja, u spektru počinje dominirati linearni član potencijala što rezultira značajno većim razmacima između energetskih razina za  $(c\bar{c})$  u usporedbi s  $(b\bar{b})$  sustavima [8].

### 3.3.3 Analiza masenih spektara mezona NUFA metodom

Jedna od metoda za rješavanje Schrödingerove jednadžbe za potencijale koji karakteriziraju međudjelovanje između kvarkova je Nikiforov-Uvarov metoda funkcionalne analize (NUFA).

Generalizirani Cornell potencijal proširuje standardni Cornell potencijal dodatnim članovima:



Slika 3.11: Usporedba predviđanja energetskih nivoa za  $(b\bar{b})$  (pune linije) i  $(c\bar{c})$  (crtkane linije) koristeći potencijal  $V(r) = -0,4/r + 0,2r - 0,35$  [8]. (Slika preuzeta iz [8]).

$$V(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r} + \frac{d}{r^2} + g \quad (3.72)$$

gdje su  $a, b, c, d$  i  $g$  konstantni parametri potencijala koji se prilagođavaju određenom fizikalnom sustavu kako bi se postigli rezultati koji su usporedivi s eksperimentalnim i teorijskim podacima. Prednost korištenja generaliziranog Cornell potencijala za rješavanje Schrödingerove jednadžbe je da se opća rješenja takvog potencijala mogu praktično koristiti za dobivanje rezultata nekih fizikalno relevantnih potencijala. Dodatni član  $d/r^2$  poboljšava ponašanje potencijala u području  $r \rightarrow 0$ , tj. bolje modelira zatočenje kvarkova u odnosu na Cornell potencijal.

Potencijal (3.72) je centralan, što omogućuje separiranje Schrödingerove jednadžbe i rješavamo radijalnu Schrödingerovu jednadžbu za generalizirani Cornell potencijal (3.72):

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - ar^2 - br + \frac{c}{r} - \frac{d}{r^2} - g - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] R(r) = 0 \quad (3.73)$$

Za rješavanje jednadžbe (3.73) koristi se Nikiforov-Uvarov metoda funkcionalne analize kako bismo dobili svojstvene energije i svojstvene funkcije koje opisuju vezana stanja u sustavima s generaliziranim Cornell potencijalom.

Nikiforov-Uvarov metodu funkcionalne analize koristimo za rješavanje diferencijalne jednadžbe oblika:

$$\frac{d^2\psi(s)}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d\psi(s)}{ds} + \frac{1}{s^2(1 - \alpha_3 s)^2} \left[ -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \right] \psi(s) = 0 \quad (3.74)$$

Uz odabir valne funkcije:

$$\psi(s) = s^\lambda (1 - \alpha_3 s)^\nu f(s) \quad (3.75)$$

jednadžba (3.74) se svodi na Gaussovu hipergeometrijsku jednadžbu<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned} S(1 - \alpha_3 s) \frac{d^2 f(s)}{ds^2} + \left[ \alpha_1 + 2\lambda - (2\lambda\alpha_3 + 2\nu\alpha_3 + \alpha_2)s \right] \frac{df(s)}{ds} \\ - \alpha_3 \left( \lambda + \nu + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 1 \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 1 \right)^2 + \frac{\xi_1}{\alpha_3^2}} \right) \\ \times \left( \lambda + \nu + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 1 \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 1 \right)^2 + \frac{\xi_1}{\alpha_3^2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

ako i samo ako vrijedi:

$$\lambda(\lambda - 1) + \alpha_1 \lambda - \xi_3 = 0 \quad (3.77)$$

$$\alpha_2 \nu - \alpha_1 \alpha_3 \nu + \nu(\nu - 1) \alpha_3 + \xi_2 - \xi_3 \alpha_3 - \frac{\xi_1}{\alpha_3} = 0 \quad (3.78)$$

Jednadžbe (3.77) i (3.78) su kvadratne jednadžbe koje možemo zapisati u obliku:

$$\lambda = \frac{(1 - \alpha_1)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \alpha_1)^2 + 4\xi_3} \quad (3.79)$$

$$\nu_{\pm} = \frac{(\alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2) \pm \sqrt{(\alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2)^2 + 4 \left( \frac{\xi_1}{\alpha_3} + \alpha_3 \xi_3 - \xi_2 \right)}}{2\alpha_3} \quad (3.80)$$

Konačno, jednadžbe (3.79), (3.80) i (3.75) rezultiraju valnom funkcijom:

$$\psi(s) = N s^{\frac{(1-\alpha_1)+\sqrt{(1-\alpha_1)^2+4\xi_3}}{2}} \times (1 - \alpha_3 s)^{\nu_+} \times {}_2F_1(a_1, b_1, c_1; s) \quad (3.81)$$

i jednadžbom za svojstvene energije:

$$\lambda^2 + 2\lambda \left( \nu + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 1 \right) + \frac{n}{\sqrt{\alpha_3}} \right) + \left( \nu + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 1 \right) + \frac{n}{\sqrt{\alpha_3}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - 1 \right)^2 - \frac{\xi_3}{\alpha_3^2} = 0 \quad (3.82)$$

Primjenom NUFA metode na jednadžbu (3.73) dobivamo svojstvene energije:

<sup>14</sup>Vidi [17], str. 23-42.

$$E = \frac{-\hbar^2\alpha^2}{2\mu} \left[ \frac{-(\nu+n)^2 + \tau_1 - \tau_3}{2(\nu+n)} \right]^2 + \frac{\hbar^2\alpha^2\tau_3}{2\mu} \quad (3.83)$$

i svojstvene funkcije:

$$R_{nl}(r) = N (e^{-\alpha r})^{\sqrt{\epsilon+\tau_3}} (1 - e^{-\alpha r})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4(\tau_1-\tau_2+\tau_3)}} \times {}_2F_1(a_1, b_1, c_1; e^{-\alpha r}) \quad (3.84)$$

gdje je  $N$  konstanta normalizacije i  ${}_2F_1(a_1, b_1, c_1; e^{-\alpha r})$  je hipergeometrijska funkcija pri čemu su parametri  $a_1$ ,  $b_1$  i  $c_1$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= (\lambda + \nu + \sqrt{\xi_1}) \\ b_1 &= (\lambda + \nu - \sqrt{\xi_1}) \\ c_1 &= 1 + 2\lambda \end{aligned} \quad (3.85)$$

Podешavanjem različitih parametara potencijala (3.72), moguće je dobiti neke važne oblike fizikalnih potencijala, kao što su Kratzerov potencijal, pseudo-harmonički potencijal i Coulombov perturbirani potencijal koji ćemo koristiti za računanje masenih spektara mezona  $b\bar{s}$  i  $b\bar{q}$  ( $q = u, d$ ).

Polazeći od generaliziranog Cornell potencijala izborom parametara:  $d = g = 0$  dobivamo Coulombov perturbirani potencijal:

$$V(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r} \quad (3.86)$$

Ovisnost Coulombovog perturbiranog potencijala o  $r$  za mezone  $b\bar{s}$  i  $b\bar{q}$  prikazana je na Slici 3.12.

Rješavanjem Schrödingerove jednadžbe za Coulombov perturbirani potencijal koristeći NUFA metodu dobivamo jednadžbu za svojstvene energije:

$$E = N_5 - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2\mu} \left[ \frac{N_6 - (\nu+n)^2}{2(\nu+n)} \right]^2 \quad (3.87)$$

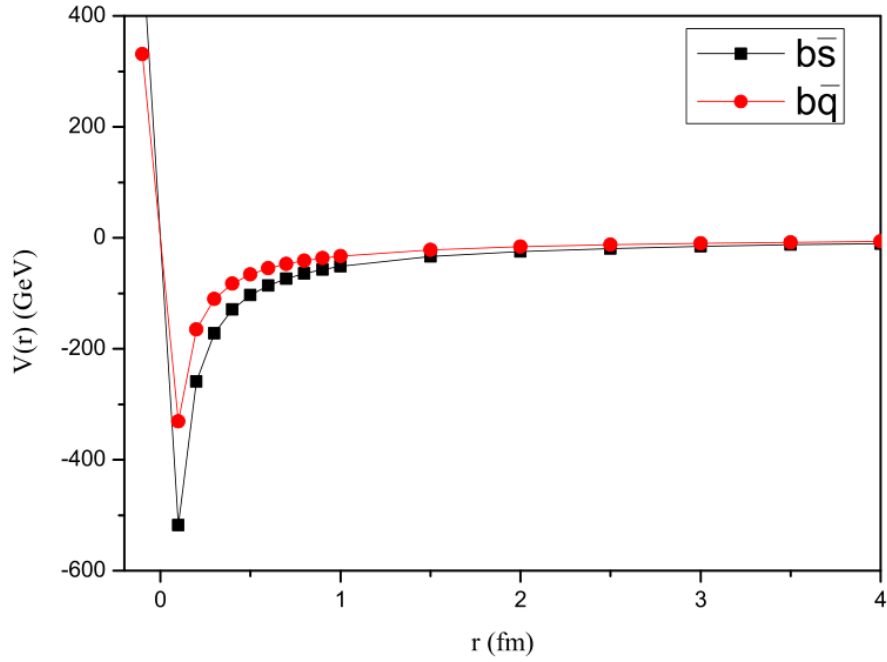
gdje je:

$$N_5 = \frac{a}{\alpha^2} - c\alpha + \frac{b}{\alpha} + \frac{\hbar^2\alpha^2 l(l+1)}{2\mu} \quad (3.88)$$

$$N_6 = \frac{10\mu a}{\hbar^2\alpha^4} + \frac{4\mu b}{\hbar^2\alpha^3} + \frac{2\mu c}{\hbar^2\alpha} - l(l+1) \quad (3.89)$$

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{24\mu a}{\hbar^2\alpha^4} + \frac{8\mu b}{\hbar^2\alpha^3} + 4l(l+1)} \quad (3.90)$$

U svrhu računanja masenih spektara mezona  $b\bar{s}$  i  $b\bar{q}$ , ( $q = u, d$ ), koristimo sljedeći izraz:



Slika 3.12: Ovisnost Coulombovog perturbiranog potencijala o  $r$  za lakše mezone  $b\bar{s}$  i  $b\bar{q}$ . (Slika preuzeta iz [18]).

$$M = 2m + E_{nl} \quad (3.91)$$

pri čemu su  $m_b$ ,  $m_s$  i  $m_q$  mase odgovarajućih kvarkova, s vrijednostima od 4,584 GeV, 0,419 GeV i 0,220 GeV, redom [18]. Uz svojstvenu energiju Coulombova perturbiranog potencijala (3.87) konačno jednačba za određivanje masenih spektara je:

$$M = 2m + N_1 - \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2\mu} \left[ \frac{N_2 - (\nu + n)^2}{2(\nu + n)} \right]^2 \quad (3.92)$$

Rezultati masenih spektara za mezone  $b\bar{s}$  i  $b\bar{q}$  prikazani su u Tablicama 3.3 i 3.4. Parametri potencijala ( $a$ ,  $b$  i  $c$ ) za odabrani sustav prilagođavaju se kako bi se postigli rezultati usporedivi s teorijskim i eksperimentalnim vrijednostima. Prosječno odstupanje masenih spektara izraženo u postocima za  $b\bar{s}$  iznosi 1,5%, a za  $b\bar{q}$  iznosi 1,94% u odnosu na [19, 20], redom [18].

Iz rezultata u Tablicama 3.3 i 3.4 zaključujemo da se maseni spektri određeni NUFA metodom dobro slažu s rezultatima iz [20] koji su dobiveni koristeći Cornell potencijal s relativističkim korekcijama i dobro se slažu s eksperimentalnim rezultatima iz [21]. Dobiveni rezultati su znatno poboljšani u odnosu na istraživanje [19] gdje su maseni spektri izračunati metodom asimptotske iteracije. Ovi rezultati ukazuju na pouzdanost NUFA metode i potvrđuju njezinu primjenjivost u predviđanju masenih spektara mezona.

Stanja	Rezultati	Rezultati iz [19]	Rezultati iz [20]	Eksp. rezultati [21]
1S	5,451	5,415	5,450	5,415
2S	6,012	6,819	6,012	–
3S	6,511	8,225	6,429	–
4S	6,954	9,629	6,773	–
5S	7,345	–	7,076	–
1P	5,499	5,830	5,857	5,830
2P	6,058	6,786	6,279	–
3P	6,555	–	6,635	–
4P	6,995	–	6,946	–
1D	5,596	6,264	6,182	–
2D	6,149	–	6,542	–
3D	6,640	–	6,855	–

Tablica 3.3: Maseni spektar mezona  $b\bar{s}$  (GeV) ( $a = 0,0296 \text{ GeV}^3$ ,  $b = 0,5076 \text{ GeV}^2$ ,  $c = 51,8139$  i  $\alpha = 0,0926$ ) [18]. (Podaci preuzeti iz [18]).

Stanja	Rezultati	Rezultati iz [19]	Rezultati iz [20]	Eksp. rezultati [21]
1S	5,369	5,325	5,371	5,325
2S	5,932	6,413	5,933	–
3S	6,385	7,501	6,355	–
4S	6,742	8,589	6,703	–
5S	7,014	–	7,008	–
1P	5,464	5,723	5,777	5,723
2P	6,019	6,486	6,197	–
3P	6,464	–	6,557	–
4P	6,814	–	6,872	–
1D	5,653	6,131	6,110	–
2D	6,191	–	6,475	–
3D	6,621	–	6,792	–

Tablica 3.4: Maseni spektar mezona  $b\bar{q}$  (GeV) pri čemu je  $q = (u, d)$  ( $a = 0,0296 \text{ GeV}^3$ ,  $b = 0,3098 \text{ GeV}^2$ ,  $c = 33,1102$  i  $\alpha = 0,1009$ ) [18]. (Podaci preuzeti iz [18]).

## 4 Modeli bariona

U počecima razvoja modela kvarkova, lakši hadroni tretirali su se kao sustavi vezanih kvarkova koji se gibaju nerelativistički, a zbog potencijala su zatočeni unutar hadrona. Nerelativistički sustavi imaju pobuđene energije koje su zanemarive u usporedbi s masama pojedinih kvarkova, zbog čega se često zanemaruju kao nevažne za opisivanje sustava. Međutim, za teže hadrone, pobuđene energije usporedive su s masama kvarkova zbog čega imaju značajan utjecaj na njihova svojstva. Kako bismo pravilno opisali sustave s energijama koje su usporedive s masama čestica, potrebno je koristiti relativističku kvantnu mehaniku. Budući da je masa mirovanja  $u$  i  $d$  kvarkova jako mala<sup>15</sup>, dinamika njihovog gibanja mora se tretirati Diracovom jednadžbom.

U razumijevanju kvarkova i gluona unutar kvantne kromodinamike, analiziramo njihova međudjelovanja i svojstva, kako na kratkim udaljenostima ( $r \ll 1$  fm), gdje se primjenjuje perturbativna teorija, tako i na velikim udaljenostima ( $r \approx 1$  fm), za koje postoji obilje eksperimentalnih podataka, ali QCD postaje izazovna za analizu. Složenosti QCD-a na velikim udaljenostima zahtijevale su razvoj fenomenoloških modela, a neki od njih su MIT model vreće, SLAC model vreće, model vreće solitona i kiralni model vreće. Ovi modeli nastoje uključiti neka bitna obilježja strukture hadrona koja su izostavljena iz ranijeg nerelativističkog QCD pristupa. Modeli vreće kvarkova uzimaju u obzir asimptotsku slobodu na kratkim udaljenostima, uvode gluone kao sastavnike hadrona i posrednike kratkodosežnih interakcija između kvarkova te osiguravaju relativistički i baždarno invarijantan okvir za proučavanje svojstava hadrona [23].

### 4.1 Relativistička kvantna mehanika

U okviru proučavanja modela bariona uvodimo formalizam relativističke kvantne mehanike koja omogućuje analizu svojstava čestica u skladu sa specijalnom teorijom relativnosti.

#### 4.1.1 Relativistička kovarijantnost i četverovektori

U fizici čestica poželjno je veličine izraziti u eksplicitno Lorentz-invarijantnom obliku koji se može primijeniti izravno u svim inercijalnim sustavima. Za veličine koje su invarijantne na Lorentzove transformacije, kažemo da su Lorentz kovarijantne, odnosno relativistički kovarijantne. Iako Lorentzove transformacije čine temelj specijalne teorije relativnosti, Lorentzova invarijantnost je važniji koncept, a najbolje se izražava pomoću četverovektora [2].

Lorentzova transformacija povezuje prostorno-vremenske koordinate u dva Lorentzova sustava [1]. Primjerice, za dva sustava koja su u relativnom gibanju duž

---

<sup>15</sup>Mase mirovanja kvarkova dostupne su na [22].

x-osi, prijelaz sa sustava  $S$  na sustav  $S'$  koji se giba brzinom  $v$  u odnosu na sustav  $S$  opisan je izrazima:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

gdje je  $\gamma$  relativistički faktor:  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . U limesu malih brzina  $v \ll c$ , relativistički faktor  $\gamma$  jednak je jedan pa se Lorentzove transformacije reduciraju na Galilejeve transformacije.

Uz pokratu  $\beta = v/c$  i u prirodnim jedinicama, gdje je  $c = 1$ , Lorentzove transformacije su:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta t) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma(t - \beta x)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Uvodimo kontravarijantni četverovektor s komponentama  $t = x^0$ ,  $x = x^1$ ,  $y = x^2$  i  $z = x^3$  koje se, mjerene u dva inercijalna sustava, povezuju Lorentzovim transformacijama.

$$\text{kontravarijantni vektor : } x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})\tag{4.3}$$

$$\text{kovarijantni vektor : } x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\vec{x})\tag{4.4}$$

Indeksi četverovektora označeni su grčkim slovom i imaju četiri vrijednosti ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Nulta komponenta je vremenska, a tri prostorne komponente označene su latinskim indeksima ( $i = 1, 2, 3$ ). "Događaj" koji označava prostorno-vremensku točku predstavljen je četverovektorom i može se interpretirati kao, na primjer, položaj čestice u određenom trenutku. Kontravarijantni i kovarijantni vektori povezani su tenzorom dizanja i spuštanja indeksa koji se naziva tenzorom Minkowskog ili metričkim tenzorom  $g_{\mu\nu}$  [1]:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{4.5}$$

Skalarni produkt bilo koja dva četverovektora:



$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \equiv a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \quad (4.6)$$

je Lorentz-invarijantan i ne ovisi o inercijalnom sustavu.

U Newtonovom prostor-vremenu postoje dvije udaljenosti:

$$\text{prostorna udaljenost : } l^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.7)$$

$$\text{vremenska udaljenost : } t \quad (4.8)$$

dok u geometriji Minkowskog, koja vrijedi u odsutnosti gravitacijskih polja, postoji jedinstvena udaljenost:

$$\text{prostorno – vremenski interval : } s^2 = t^2 - l^2 \quad (4.9)$$

Kao i prostorno-vremenske točke, i ostale veličine će se prikazivati pomoću četvero-vektora uključujući i diferencijale:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (4.11)$$

koji će voditi na D’Alambertov operator:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right)^2 \quad (4.12)$$

Pomoću izraza (4.11) možemo zapisati koordinatnu reprezentaciju kvantnomehaničkog operatora impulsa:

$$p^\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( i \frac{\partial}{\partial t}, -i \vec{\nabla} \right) \quad (4.13)$$

U specijalnoj teoriji relativnosti, energija  $E$  i impuls  $\vec{p}$  izoliranog sustava čine komponente četverovektora energije impulsa:

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \quad (4.14)$$

Po uvođenju četverovektora prostorno vremenskog položaja Lorentzova transformacija (4.2) poprima oblik:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma (x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma (x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sada je moguće Lorentzove transformacije prikazati u kompaktnoj formi, kao linearne transformacije na četverovektorima, pri čemu koristimo Einsteinovu sumaciju po ponovljenom indeksu [1]:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \equiv \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (4.16)$$

#### 4.1.2 Klein-Gordonova jednađžba

U nerelativističkoj kvantnoj mehanici Schrödingerovu jednađžbu za slobodnu česticu mase  $m$  čija je energija  $E = p^2/2m$  možemo dobiti koristeći supstitucije:

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.17)$$

$$\vec{p} \rightarrow -i \vec{\nabla} \quad (4.18)$$

Dobivena jednađžba je operatorska i s njom djelujemo na valnu funkciju  $\psi(\vec{x}, t)$  što daje:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi = 0 \quad (4.19)$$

Pri tome  $\psi(\vec{x}, t)$  interpretiramo kao amplitudu vjerojatnosti nalaženja čestice u intervalu  $(x, x + dx)$ , a  $|\psi|^2$  kao gustoću vjerojatnosti koja zadovoljava jednađžbu kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (4.20)$$

Budući da je  $\rho = \psi^* \psi$ , onda je  $\rho$  pozitivan kompleksan broj.

U svrhu dobivanja relativističkog oblika Schrödingerove jednađžbe koristimo Einsteinov relativistički izraz za energiju:

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (4.21)$$

te supstituciju:

$$p_{\mu} \rightarrow i \partial_{\mu} \quad (4.22)$$

što nas vodi na Klein-Gordonovu jednađžbu koja je drugog reda u prostornoj i vremenskoj derivaciji:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi = 0 \quad (4.23)$$

Uz D'Alambertov operator  $\square \equiv \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2$ , Klein-Gordonova jednađžba poprima eksplicitno kovarijantni oblik [1]:

$$(\square + m^2) \psi = 0 \quad (4.24)$$

S obzirom da se radi o slobodnoj čestici, rješenje ove jednadžbe imat će oblik ravnog vala:

$$\psi(x) = N e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} \quad (4.25)$$

Međutim, prema izrazu (4.21), energija može biti pozitivna i negativna, stoga dobivamo dva rješenja:

$$\psi_+ = N e^{-i(\sqrt{p^2 + m^2}t - \vec{p}\vec{x})} \quad (4.26)$$

gdje je  $E = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$

$$\psi_- = N e^{-i(-\sqrt{p^2 + m^2}t - \vec{p}\vec{x})} \quad (4.27)$$

gdje je  $E = -\sqrt{p^2 + m^2} < 0$

No, slobodna čestica može imati samo pozitivne energije, stoga bi rješenje  $\psi_-$  s negativnim energijama bilo nefizikalno te se kao takvo u klasičnoj mehanici može odbaciti. Međutim, u kvantnoj mehanici, sva rješenja čine potpuni skup stanja koji razapinje vektorski prostor, zbog čega su pozitivne i negativne energije jednako ravnopravne. Prema tome oba vala jednako dobro zadovoljavaju Klein-Gordonovu jednadžbu i relativistički izraz za energiju (4.21) pa negativna energijska rješenja ne možemo jednostavno odbaciti i ona predstavljaju prvi problem Klein-Gordonove jednadžbe.

U vremenu kada je Klein-Gordonova jednadžba bila razvijena, nije bilo jasnog tumačenja negativnih energijskih rješenja, no postoji ozbiljniji problem s pripadajućim gustoćama vjerojatnosti. Naime, ako Klein-Gordonovu jednadžbu pomnožimo s lijeva s  $(-i\psi^*)$  i od toga oduzmemo kompleksno konjugiranu Klein-Gordonovu jednadžbu pomnoženu s desna s  $(-i\psi)$  dobijemo [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ i \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \vec{\nabla} \left[ -i \left( \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \right] \quad (4.28)$$

gdje je sada gustoća vjerojatnosti  $\rho = i \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$ . Prva derivacija valne funkcije po vremenu i sama valna funkcija su dvije potpuno nezavisne varijable našeg sustava te njihov produkt može biti negativan, zbog čega  $\rho$  može poprimiti negativne vrijednosti - to je drugi problem. Negativna gustoća vjerojatnosti je matematički nekonzistentna.

Budući da je  $\rho = 2E|N|^2$ , ova dva problema su povezana jer će rješenja Klein-Gordonove jednadžbe  $\psi_-$  koja imaju negativne energije biti upravo ona koja će rezultirati i negativnom vjerojatnošću. Iz prisutnosti negativnih rješenja gustoće vjerojatnosti može se zaključiti da Klein-Gordonova jednadžba ne pruža dosljedan opis

stanja pojedinačnih čestica za relativistički sustav što je u povijesti vodilo na odbacivanje Klein-Gordonove jednačbe kao relativističkog poopćenja Schrödingerove jednačbe.

Unatoč ovim problemima, Klein-Gordonova jednačba nije pogrešna, budući da ovaj problem ne postoji u kvantnoj teoriji polja, gdje valne funkcije ne interpretiramo kao amplitude vjerojatnosti pronalazjenja čestica, već kao operatore pa se Klein-Gordonova jednačba koristi za opisivanje višestrukih pobuđenja kvantnog polja spina nula [2].

### 4.1.3 Diracova jednačba

Dirac uvidjevši da je glavni uzrok problemu negativnih energija i negativnih gustoća vjerojatnosti upravo kvadratna ovisnost o energiji u izrazu (4.21), predlaže ansatz za Hamiltonijan:

$$\hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m \quad (4.29)$$

S takvim Hamiltonijanom djelujemo na valnu funkciju  $\psi$  i dobijemo jednačbu koja je linearna u energiji, a kako bi jednačba bila kovarijantna, mora biti linearna i u impulsu:

$$\left( \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m \right) \psi = E\psi \quad (4.30)$$

Rješavanjem ove jednačbe dobivamo stacionarna stanja. Varijable  $\vec{\alpha}$  i  $\beta$  određujemo zahtjevom da rješenja  $\psi$  ovako postavljene jednačbe zadovoljavaju Einsteinovu relaciju (4.21), što automatski znači da ta rješenja moraju zadovoljavati i Klein-Gordonovu jednačbu. S obzirom na dodatnu jednačbu (4.30) i zahtjev da ona bude zadovoljena, broj ukupnih valnih funkcija bit će smanjen, što rezultira rješenjima koja imaju samo pozitivnu gustoću vjerojatnosti.

Umjesto da određujemo  $\vec{\alpha}$  i  $\beta$  iz zahtjeva da Klein-Gordonova jednačba bude zadovoljena, uvest ćemo ekvivalentne objekte:

$$(\gamma^0)^{-1} \vec{\gamma} \equiv \vec{\alpha} \quad (4.31)$$

$$(\gamma^0)^{-1} \equiv \beta \quad (4.32)$$

Uz (4.31) i (4.32) Diracov ansatz možemo zapisati:

$$(\gamma^0)^{-1} \vec{\gamma} \cdot \vec{p} \psi + (\gamma^0)^{-1} m \psi = E\psi \quad (4.33)$$

Množenjem jednačbe (4.33) s lijeva strane s  $\gamma^0$  i uvođenjem standardne zamjene operatora impulsa (4.18) i energije (4.17) dobivamo:

$$\gamma^0 \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi - \vec{\gamma} \left( -i \vec{\nabla} \right) \psi - m \psi = 0 \quad (4.34)$$

Definiramo četverekomponentni objekt, koji će se algebarski ponašati kao četverovektor:

$$\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad (4.35)$$

i definiramo četverovektor čija je nulta komponenta derivacija po vremenu, a prostorna komponenta je operator nabra:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (4.36)$$

Ove zamjene rezultiraju jednažbom:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (4.37)$$

Ovime smo Diracov ansatz pretvorili u jednažbu koja ima kovarijantnu formu i naziva se Diracova jednažba, no tek trebamo ustanoviti što su objekti  $\gamma^\mu$  i što moraju zadovoljavati kako bi rješenja jednažbe (4.37) zadovoljavala Klein-Gordonovu jednažbu. Kako bi to ustanovili, budući da je Klein-Gordonova jednažba kvadratna u derivacijama, možemo (4.37) s lijeve strane pomnožiti s  $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$  što daje:

$$\left[ -\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu + im(\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\nu \partial_\nu) - m^2 \right] \psi = 0 \quad (4.38)$$

Možemo uočiti da je mijesani član  $(\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\nu \partial_\nu) = 0$  jer su  $\gamma^\mu \partial_\mu$  i  $\gamma^\nu \partial_\nu$  isti do na slijepe indekse. Kako bi jednažba (4.38) bila ekvivalentna Klein-Gordonovoj jednažbi mora vrijediti:

$$\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu = \partial^\mu \partial_\mu \quad (4.39)$$

i onda će zadovoljavanje jednažbe (4.37) osigurati istovremeno i zadovoljavanje Klein-Gordonove jednažbe, a time i istovremeno poštivanje Einsteinove energijske relacije (4.21).

Pogledajmo što moraju biti  $\gamma$  objekti da bi ovo bilo zadovoljeno. Neka su  $\gamma^\mu$  konstante u prostoru i vremenu, zbog čega na njih ne djeluje derivacija te ih možemo izlučiti i zapisati u obliku:

$$\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu \stackrel{!}{=} \partial^\mu \partial_\mu \quad (4.40)$$

Raspis  $\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu$  po komponentama je:

$$\gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \partial_0 + \gamma^0 \gamma^i \partial_0 \partial_i + \gamma^i \gamma^0 \partial_i \partial_0 + \gamma^i \gamma^j \partial_i \partial_j = \partial_0 \partial_0 - \partial_i \partial_i \quad (4.41)$$

Usporedbom lijeve i desne strane u izrazu (4.41), uz napomenu da derivacije komutiraju, zaključujemo:

$$(\gamma^0)^2 = 1 \rightarrow (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0 \quad (4.42)$$

$$\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = 0 \quad (4.43)$$

$$\gamma^1 \gamma^1 \partial_1 \partial_1 + \gamma^2 \gamma^2 \partial_2 \partial_2 + \gamma^3 \gamma^3 \partial_3 \partial_3 + \sum_{i \neq j} \gamma^i \gamma^j \partial_i \partial_j = -\partial_1 \partial_1 - \partial_2 \partial_2 - \partial_3 \partial_3 \quad (4.44)$$

Iz jednadžbe (4.44) usporedbom lijeve i desne strane iz dijagonalnih članova dobivamo uvjet:

$$(\gamma^i)^2 = -1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.45)$$

a iz miješanih članova, nakon što izlučimo derivacije dobivamo uvjet:

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 0, \quad i \neq j \quad (4.46)$$

Dakle, objekti  $\gamma$  moraju zadovoljavati uvjete (4.42), (4.43), (4.45) i (4.46) kako bi rješenja jednadžbe (4.37) zadovoljavala Klein-Gordonovu jednadžbu.

Iz uvjeta (4.43) i (4.46) zaključujemo da  $\gamma^0$  i  $\gamma^i$  ne komutiraju, a nekomutativne objekte možemo reprezentirati matricama. Ta četiri uvjeta koja moraju zadovoljavati  $\gamma$  matrice možemo združeno napisati u obliku:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \equiv [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu} \quad (4.47)$$

gdje je  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+$  antikomutator.

Objekti koji zadovoljavaju relaciju (4.47), zovemo Diracove gamma matrice:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

koje su u Dirac-Pauli reprezentaciji oblika:

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$\vec{\beta} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

Uz ovako definirane matrice  $\gamma^\mu$  Diracova jednadžba (4.37) predstavlja ispravnu relativističku diferencijalnu jednadžbu čija rješenja zadovoljavaju Klein-Gordonovu

jednadžbu. Diracova jednadžba vrijedi za sve čestice materije. Iako smo četiri matrice  $\gamma^\mu$  udružili u četverovektor, one se ne transformiraju kao četverovektori. Premda tako izgledaju, nemaju ključno svojstvo četverovektora, a to je da za različite promatrače izgledaju drugačije. Matrice  $\gamma^\mu$  su konstante i jednake za sve promatrače. S druge strane, derivacija po koordinatama  $\partial_\mu$  se transformira kao četverovektor i kako bi Diracova jednadžba ostala relativistički kovarijantna, rješenje Diracove jednadžbe  $\psi$  mora imati netrivialnu transformaciju između promatrača.

Uz Feynmanovu slash notaciju:

$$\gamma^\mu a_\mu \equiv \not{a}, \quad \forall \text{ četverovektor } a^\mu \quad (4.52)$$

Diracova jednadžba postiže elegantni oblik:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (4.53)$$

Diracova jednadžba predstavlja jedan od velikih teorijskih napredaka dvadesetog stoljeća. Prisutnost negativnih energijskih rješenja je neizbježna i njihova interpretacija razvijena je zahvaljujući Stückelbergu i Feynmanu u kontekstu kvantne teorije polja. Negativna energijska rješenja se tumače kao negativna energija čestica koje propagiraju unatrag u vremenu, odnosno ekvivalentno, pozitivna energija antičestica koje propagiraju prema naprijed u vremenu. Rješenja Diracove jednadžbe pružaju relativistički kvantnomehanički opis čestica i antičestica polucjelobrojnog spina.

## 4.2 MIT model vreće

Eksperimenti duboko neelastičnih raspršenja potvrdili su postojanje kvarkova i potaknuli istraživanja koja su se razvijala u tri osnovna smjera; objašnjenje svojstava hadrona, predviđanje novih hadrona i fizika interakcija nukleona [24]. U sva tri slučaja model vreće imao je važnu ulogu i predstavlja jedan od najuspješnijih fenomenoloških modela zatočenja kvarkova.

Fizikalna slika modela vreće povezana je s dvofaznim opisom vakuuma. Fizički vakuum u "normalnoj" fazi izvan hadrona ne podržava širenje kvarkovskih i gluonskih polja. Koncentracijom energije može se stvoriti domena različite faze unutar fizičkog vakuuma. U unutrašnjosti te domene kvarkovska i gluonska polja mogu se širiti na uobičajeni način. Zamislimo hadron kao malu domenu u toj novoj fazi s kvarkovima i gluonima - to je vreća. Unutar te vreće, pretpostavlja se da kvarkovi interagiraju putem perturbativne razmjene gluona, što opisuje fiziku kratkih udaljenosti među njima. Granica između dviju faza vakuuma je površina vreće koja djeluje kao nepropusna barijera za kvarkovska i gluonska polja tako da ona ne mogu prodrijeti u „normalnu fazu“ vakuuma, stoga izvan vreće nema slobodnih kvarkova. Ovo objašnjava dugodosežni efekt zatočenja kvarkova postavljanjem rubnih uvjeta. S druge strane, površina vreće dopušta neometan prolaz leptonima i posrednicima elektromagnetskih i slabih interakcija koji mogu propagirati u obje faze vakuuma [25, 26].

U ovom pojednostavljenom pristupu zanemarujemo izmjenu gluona. Također, pretpostavljamo da su kvarkovi zatočeni unutar sfernog područja radijusa  $R$ . Unutar tog područja, zbog asimptotske slobode, kvarkovi se gibaju kao slobodne čestice, ali su podložni rubnim uvjetima koji jednostavno diktiraju zatočenje uvođenjem tlaka  $B$ . MIT model vreće podsjeća na beskonačno duboku sfernu jamu u tri dimenzije, a može se proširiti uvođenjem interakcija i dodatnih korekcija. Model vreće je prvi put primijenjen kako bi se objasnila svojstva hadrona. U jednom od prvih radova na tu temu, DeGrand i sur. [27] uspjeli su pronaći mase lakših hadrona, njihove magnetske momente, konstante slabog raspadanja i radijuse naboja.

Setovi od dva i tri kvarka i njihova moguća stanja unutar vreće omogućuju predviđanje novih hadronskih sustava, međutim poteškoće se pojavljuju pri izračunavanju svojstava tih novih hadrona. Utvrđeno je da model vreće pruža čvrstu osnovu za takva istraživanja.

#### 4.2.1 Porijeklo modela

Model vreće je prvi put opisan 1967. godine u radu P. N. Bogolioubova naslova "Sur un modèle à quarks quasi-indépendants"<sup>16</sup> [28]. Bogolioubov je nastojao modelirati zatočenje kvarkova u okviru QCD-a dajući kvarkovima izrazito veliku masu te ih istovremeno ograničavajući dubokim potencijalom. Time je omogućio da opaženi hadronski sustavi zadrže razumne mase. Postavljanjem beskonačne mase kvarkova, ograničio je njihovo slobodno gibanje, što se suprotstavlja asimptotskoj slobodi koja je primijećena na kratkim udaljenostima. Rješenje za ovaj problem pronašao je zatvaranjem kvarkova unutar sfernog volumena radijusa  $R$ , gdje su podložni privlačnom skalarnom polju jačine  $m$  [29]. To je rezultiralo Bogoljubovljevim modelom vreće, gdje su se kvarkovi mogli slobodno gibati unutar vreće, ali su bili zatočeni u njoj.

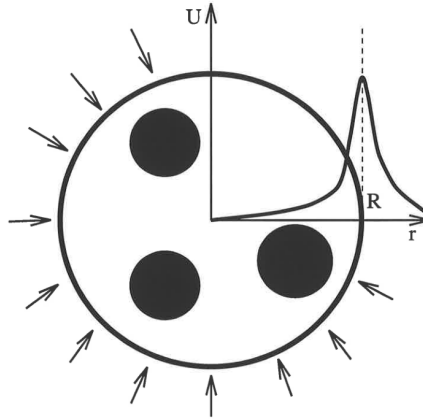
Jedan od nedostataka ovog modela je da prilikom minimizacije energije dobivamo da  $R \rightarrow \infty$ , stoga je radijus  $R$  za svaki hadron bio slobodan parametar. Ovaj model ima još nekoliko nedostataka, jedan od glavnih je narušenje zakona očuvanja energije i impulsa. Unatoč tome daje dobro slaganje s eksperimentalnim vrijednostima. Primjerice procjena modela za masu nukleona, uz prijelaz jednog od njegovih kvarkova iz stanja  $1s_{1/2}$  u stanje  $2s_{1/2}$ , je 1,446 GeV, što se dobro slaže s eksperimentalnom vrijednošću koja iznosi 1,412 GeV [24]. Čini se da zbog toga što je rad napisan na francuskom jeziku, nije dobio zasluženu pozornost te je s vremenom gotovo pao u zaborav.

Sedam godina kasnije, 1974. godine znanstveni tim sa Sveučilišta Massachusetts Institute of Technology ponovno je razvio model vreće [30]. Danas se njihov model, koji je u svojoj srži unaprijeđena verzija Bogoljubovljevog, naziva MIT modelom vreće. Problem narušenja zakona očuvanja energije i impulsa riješen je uključivanjem fenomenološkog tlaka  $B$  što je omogućilo QCD zatočenje. Ova korekcija značajno je

<sup>16</sup>O modelu kvazi-neovisnih kvarkova.



poboljšala slaganje između predviđanja temeljenih na modelu i eksperimentalnih vrijednosti masa različitih hadrona. Ovaj model omogućio je računanje svojstava nukleona, poput radijusa naboja, aksijalnih naboja i giro-magnetskih omjera te čak i sada, 49 godina kasnije, MIT model vreće koristi se u mnogim izračunima.



Slika 4.1: Primjena MIT modela vreće na barionu. Tri kvarka zatočena su vanjskim tlakom u sferi radijusa  $R$ . Gibanje kvarkova definirano je oblikom skalarnog potencijala  $U$  [24]. (Slika preuzeta iz [24]).

#### 4.2.2 Formule i pretpostavke modela

U MIT modelu vreće polazimo od pretpostavke da kvark-kvark interakcija onemogućuje razdvajanje obojenih kvarkova. To se najlakše postiže određivanjem proizvoljne površine i zahtijevanjem da struja boje kroz nju iščezava. Struja boje analogna je elektromagnetskoj struji i ima oblik [31]:

$$\hat{J}_\mu^\alpha = (\bar{q}_R, \bar{q}_B, \bar{q}_G) \lambda^\alpha \gamma_\mu \begin{pmatrix} q_R \\ q_B \\ q_G \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

gdje su  $\lambda^\alpha$  osam SU(3) matrica boje, a indeksi kvarkova predstavljaju tri boje ( $R$ ,  $G$ ,  $B$ ). Neka je izabrana površina karakterizirana vektorom normale  $n_\mu$ . Tada uvjet možemo napisati kao:

$$n^\mu \cdot \hat{J}_\mu^\alpha = 0 \Big|_{\text{površina}} \quad (4.55)$$

pri čemu je  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, 8$ .

Uvođenjem četverodimenzionalnog vektora normale dobivamo kovarijantni oblik, ali to ne odgovara općem kovarijantnom obliku modela jer još uvijek moramo definirati površinu vreće. Ograničavamo se na površine koje ne uključuju vremensku dimenziju, tj.:  $n_\mu \rightarrow \mathbf{n} \equiv \vec{n}$ :

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^\alpha \Big|_{R=R(\theta,\varphi)} = 0 \quad (4.56)$$

Nadalje, možemo pojednostaviti izraz (4.56) tako da zahtijevamo da je valna funkcija koja opisuje kvarkove unutar vreće neovisna o boji, tj.  $q_i(x) = q(x)$ ,  $i = R, G, B$  što implicira da svi kvarkovi unutar hadrona imaju istu valnu funkciju. Na ovaj način dobivamo kvadratni rubni uvjet:

$$\mathbf{n} \cdot \bar{q}\gamma q \Big|_{R=R(\theta,\varphi)} = 0 \quad (4.57)$$

Kvadrat izraza  $\mathbf{n} \cdot \gamma$  je negativna jedinična matrica:

$$(\mathbf{n} \cdot \gamma)^2 = n_i n_j \frac{1}{2} (\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i) = -n_i n_i \mathbb{I} = -(\mathbf{n})^2 \cdot \mathbb{I} = -\mathbb{I} \quad (4.58)$$

Njegove svojstvene vrijednosti su stoga  $\pm i$ . Sada, svako stanje kvarka možemo proširiti u odgovarajuće svojstvene vektore, a izraz (4.57) je zadovoljen samo za ta svojstvena stanja. Stoga, umjesto da rješavamo izraz (4.57) koji je bilinearan u valnoj funkciji kvarka  $q(x)$ , možemo rješavati puno jednostavnije linearne jednadžbe:

$$\mathbf{n} \cdot \gamma q = \pm i q \quad (4.59)$$

Svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednosti  $-i$  odgovaraju rješenjima za antičestice koja imaju svojstvenu vrijednost  $+i$  pa se možemo ograničiti na jedan predznak:

$$i\mathbf{n}(\theta, \varphi) \cdot \gamma q(x) = -q(x) \Big|_{R=R(\theta,\varphi)} \quad (4.60)$$

Izraz (4.60) koristi se kao rješenje za čestice i rješavamo ga da bi dobili spektar kvarkova u MIT modelu vreće.

U načelu možemo odabrati bilo koji oblik vreće, tj. proizvoljnu funkciju  $R = R(\theta, \varphi)$  i odgovarajući vektor normale  $\mathbf{n}(\theta, \varphi)$ . Najjednostavniji oblik je sfera, tj.:

$$R(\theta, \varphi) = R = konst. \quad (4.61)$$

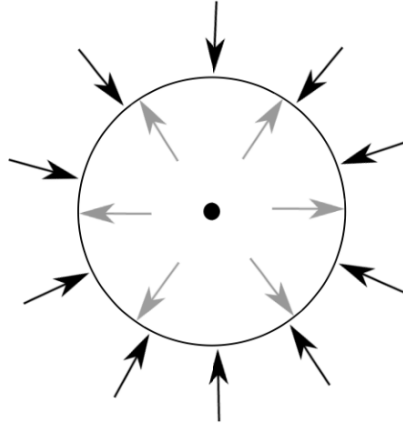
$$\mathbf{n}(\theta, \varphi) = \mathbf{e}_r \quad (4.62)$$

Uz takav odabir izraz (4.60) poprima oblik:

$$-i\mathbf{e}_r \cdot \gamma q(|\mathbf{x}| = R) = q(|\mathbf{x}| = R) \quad (4.63)$$

Preostaje još jedan parametar koji nije fiksiran pretpostavkama modela, a to je radijus vreće  $R$ . Budući da nije zadovoljavajuće birati  $R$  proizvoljno za svaki hadron, kao što je to slučaj u Bogoljubovljevom modelu, to nas vodi do još jednog rubnog uvjeta. Naime, ako su kvarkovi zatočeni u vreći konačne veličine koja se u jednom

smjeru proteže za  $\Delta x$ , tada se prema relaciji neodređenosti, kvarkovi kreću s impulsom reda veličine  $\hbar/\Delta x$  i stoga vrše pritisak na unutarnju površinu vreće. Taj tlak koji stvaraju kvarkovi je konstantan. Na nekoj ravnotežnoj vrijednosti tlak koji stvaraju kvarkovi na unutarnjoj površini uravnotežuje tlak  $B$  na vanjsku površinu vreće kojeg stvara vakuum. Tlakovi su prikazani na Slici 4.2.



Slika 4.2: Tlak koji stvaraju kvarkovi na unutarnjoj površini uravnotežuje tlak  $B$  na vanjsku površinu vreće kojeg stvara vakuum. (Slika preuzeta iz [32]).

Upravo ta ravnotežna vrijednost određuje radijus vreće, odnosno veličinu hadrona. Ako tlak  $B$  premašuje unutarnji tlak koji stvaraju kvarkovi, vreća se smanjuje; inače se dalje širi. Rubni uvjet za tlak glasi:

$$B = \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla \sum_q \bar{q}q \Big|_{R=R(\theta,\varphi)} \quad (4.64)$$

Linearni rubni uvjeti (4.63) i (4.64), zajedno s konvencijom da se kvarkovi smatraju slobodnima unutar vreće, definiraju MIT model vreće. Uvođenjem novog parametra  $B$ , fiksiraju se radijusi vreća svih hadrona. Rubni uvjeti zahtijevaju da svaki kvark zauzme najniže stanje koje ima ukupni angularni moment  $j = 1/2$ .

U nastavku ćemo pretpostaviti da je vreća sferična. Prednost sferičnih vreća je da se rješenja mogu pronaći većinom analitički. S obzirom da ćemo MIT model vreće primijeniti na proton koji se sastoji od dva  $u$  kvarka i jednog  $d$  kvarka koje smatramo bezmasenim, tražimo rješenja stacionarne slobodne Diracove jednadžbe za bezmasene čestice:

$$\not{p}\Psi = 0 \quad (4.65)$$

uz rubne uvjete:

$$-\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\gamma}\Psi = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_r \\ i\sigma_r & 0 \end{pmatrix} \Psi = \Psi \Big|_{|x|=R} \quad (4.66)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \sum_q \bar{q}q \Big|_{|x|=R} = B \quad (4.67)$$

Zbog sferne simetrije problema, koristimo ansatz:

$$\Psi = N \begin{pmatrix} g(r) \chi_{\kappa}^{\mu}(\theta, \phi) \\ -i f(r) \chi_{-\kappa}^{\mu}(\theta, \phi) \end{pmatrix} e^{-iEt} \quad (4.68)$$

gdje su  $f(r)$  i  $g(r)$  radijalne funkcije,  $\chi_{\kappa}^{\mu}(\theta, \phi)$  dvokomponentni spinor, kvantni broj  $\kappa$  je svojstvena vrijednost operatora  $\hat{K}$  koji komutira s  $\hat{H}$  i  $\hat{J}$ , a definira se kao  $\hat{K} = \beta(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{L} + 1)$  pri čemu  $\boldsymbol{\Sigma}$  predstavlja Paulijeve matrice, a  $\mathbf{L}$  je operator angularnog momenta. Svojstvena jednažba operatora  $\hat{K}$  je:

$$\hat{K} \chi_{\kappa}^{\mu} = -\kappa \chi_{\kappa}^{\mu} \quad (4.69)$$

Svojstvene vrijednosti  $\kappa$  su:

$$\kappa = -j - \frac{1}{2} \quad \text{za } \ell = j - \frac{1}{2} \quad (4.70)$$

$$\kappa = j + \frac{1}{2} \quad \text{za } \ell = j + \frac{1}{2} \quad (4.71)$$

Operator kinetičke energije je:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} &= -i\alpha_r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\alpha_r}{r} (\beta \hat{K} - 1) \\ &= -i\alpha_r \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{\beta}{r} \hat{K} \right) \end{aligned} \quad (4.72)$$

gdje je

$$\alpha_r = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_r \\ \sigma_r & 0 \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Uz (4.65) dobivamo jednažbu:

$$-i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_r \\ \sigma_r & 0 \end{pmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{\beta}{r} \hat{K} \right) \Psi = E\Psi \quad (4.74)$$

Uzimajući u obzir da radijalna Paulijeva matrica  $\sigma_r$  mijenja predznak radijalne komponente spinora:

$$\sigma_r \chi_{\kappa}^{\mu} = -\chi_{-\kappa}^{\mu}$$

te koristeći ansatz (4.68) u jednažbi (4.74) dobivamo dvije vezane jednažbe:

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} - \frac{\kappa}{r} \right) f(r) = E g(r) \Rightarrow \left( \frac{d}{d(Er)} + \frac{1-\kappa}{Er} \right) f = g \quad (4.75)$$

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\kappa}{r} \right) g(r) = -E f(r) \Rightarrow \left( \frac{d}{d(Er)} + \frac{1+\kappa}{Er} \right) g = -f \quad (4.76)$$

Uz zamjenu  $Er =: z$  sustav vezanih jednažbi poprima oblik:

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{1-\kappa}{z}\right) f = g \quad (4.77)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{1+\kappa}{z}\right) g = -f \quad (4.78)$$

Derivacija jednažbe (4.77) po  $z$  daje:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{1-\kappa}{z^2} f + \frac{1-\kappa}{z} \frac{df}{dz} = \frac{d}{dz} g \quad (4.79)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1-\kappa}{z^2} + \frac{1-\kappa}{z} \frac{d}{dz}\right) f = \frac{d}{dz} g \quad (4.80)$$

Iz jednažbe (4.78) možemo izraziti  $\frac{d}{dz} g$ :

$$\frac{dg}{dz} + \frac{1+\kappa}{z} g = -f \quad (4.81)$$

$$\frac{dg}{dz} = -\frac{1+\kappa}{z} g - f \quad (4.82)$$

Uvrštavanje izraza (4.82) u izraz (4.80) daje:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1-\kappa}{z^2} + \frac{1-\kappa}{z} \frac{d}{dz}\right) f = -\frac{1+\kappa}{z} g - f \quad (4.83)$$

Iz jednažbe (4.77) izrazimo  $g$ :

$$g = \frac{df}{dz} + \frac{1-\kappa}{z} f \quad (4.84)$$

i uvrstimo u (4.82) što daje:

$$\frac{dg}{dz} = -\frac{1+\kappa}{z} \frac{df}{dz} - \frac{1+\kappa}{z} \frac{1-\kappa}{z} f - f \quad (4.85)$$

$$\frac{dg}{dz} = -\left[\frac{1+\kappa}{z} \frac{d}{dz} + \frac{1-\kappa^2}{z^2}\right] f - f \quad (4.86)$$

Izjednačavamo izraze (4.82) i (4.86):

$$\frac{1+\kappa}{z} g = \left[\frac{1+\kappa}{z} \frac{d}{dz} + \frac{1-\kappa^2}{z^2}\right] f \quad (4.87)$$

Izraz (4.87) uvrstimo u (4.83):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1-\kappa}{z^2} + \frac{1-\kappa}{z} \frac{d}{dz}\right) f = -\left[\frac{1+\kappa}{z} \frac{d}{dz} + \frac{1-\kappa^2}{z^2}\right] f - f \quad (4.88)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left(\frac{1-\kappa}{z} + \frac{1+\kappa}{z}\right) + \frac{1-\kappa^2}{z^2} - \frac{1-\kappa}{z^2} + 1\right] f = 0 \quad (4.89)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d}{dz} + \frac{\kappa(1-\kappa)}{z^2} + 1 \right] f = 0 \quad (4.90)$$

Jednadžba (4.90) je upravo diferencijalna jednadžba koju zadovoljavaju Besselove funkcije. Budući da funkcije  $f$  i  $g$  ne smiju u ishodištu divergirati brže od  $1/r$ , moramo odabrati funkcije  $j_\ell$  [31]:

$$f(r) = konst \times j_\ell(Er), \ell = \begin{cases} -\kappa & \text{ako je } \kappa < 0 \\ \kappa - 1 & \text{ako je } \kappa > 0 \end{cases} \quad (4.91)$$

Analogno:

$$g(r) = konst \times j_{\bar{\ell}}(Er), \bar{\ell} = \begin{cases} -\kappa - 1 & \text{ako je } \kappa < 0 \\ \kappa & \text{ako je } \kappa > 0 \end{cases} \quad (4.92)$$

Preostaje odrediti relativni faktor  $A$  između funkcija  $f$  i  $g$  iz (4.87):

$$f(r) = j_{\bar{\ell}}(Er), g(r) = A j_\ell(Er) \quad (4.93)$$

Koristeći relaciju (4.87) dobivamo jednadžbe:

$$\left( \frac{d}{dz} + \frac{1-\kappa}{z} \right) j_{\bar{\ell}}(z) = A j_\ell(z) \quad (4.94)$$

$$\left( \frac{d}{dz} + \frac{1+\kappa}{z} \right) A j_\ell(z) = -j_{\bar{\ell}}(z) \quad (4.95)$$

Za  $\kappa < 0$  prethodne dvije jednadžbe za  $A = 1$  daju uobičajene rekursijske relacije između sfernih Besselovih funkcija reda  $\ell$  i  $\bar{\ell} = \ell - \text{sgn}(\kappa)$ , dok za  $\kappa > 0$  prethodne dvije jednadžbe daju  $A = -1$ .

Prema tome valna funkcija bezmasenog kvarka u MIT modelu vreće je:

$$\Psi = N \begin{pmatrix} j_\ell(Er) \chi_\kappa^\mu(\theta, \phi) \\ i \text{sgn}(\kappa) j_{\bar{\ell}}(Er) \chi_{-\kappa}^\mu(\theta, \phi) \end{pmatrix} e^{-iEt} \quad (4.96)$$

gdje su  $j_\ell(Er)$  i  $j_{\bar{\ell}}(Er)$  sferne Besselove funkcije prve vrste i  $N$  je konstanta normalizacije:

$$N_\kappa = \frac{E}{R |j_{l_\kappa}(ER)|} \frac{1}{\sqrt{2E(\kappa + ER)}} \quad (4.97)$$

Uvrštavanjem valne funkcije (4.96) u rubni uvjet (4.67) u svrhu provjere je li on zadovoljen, dobivamo:

$$B = -\frac{1}{2} \frac{d}{dR} \sum_q N_q^2 [j_{\bar{\ell}_q}^2(E_q R) \chi_{\kappa_q}^{\mu_q}(\theta, \phi)^+ \chi_{\kappa_q}^{\mu_q}(\theta, \phi) - j_{\bar{\ell}_q}^2(E_q R) \chi_{-\kappa_q}^{\mu_q}(\theta, \phi)^+ \chi_{-\kappa_q}^{\mu_q}(\theta, \phi)] \quad (4.98)$$

gdje je  $N_q$  broj kvarkova u vreći. Ova jednadžba zadovoljena je ako desna strana jednakosti ne ovisi o  $\theta$  i  $\phi$ , što vrijedi samo za  $\kappa = \pm 1$ . Stoga je rubni uvjet (4.67) zadovoljen samo za  $|\kappa| = 1$  [31]. U tom slučaju vrijedi:

$$\chi_{\kappa}^{\mu+} \chi_{\kappa}^{\mu} = \chi_{-\kappa}^{\mu+} \chi_{-\kappa}^{\mu} = \frac{1}{4\pi} \quad (4.99)$$

zbog čega se (4.98) svodi na:

$$B = -\frac{1}{4\pi} \sum_q N_q^2 \left( j_{\ell_q}(E_q R) E_q \frac{d}{d(E_q R)} j_{\ell_q}(E_q R) - j_{\bar{\ell}_q}(E_q R) E_q \frac{d}{d(E_q R)} j_{\bar{\ell}_q}(E_q R) \right) \quad (4.100)$$

Kada su svi kvarkovi u najnižem stanju vrijedi  $\kappa = -1$  i dobivamo:

$$B = \frac{1}{4\pi} N_q \frac{E}{R^3} \quad (4.101)$$

odnosno

$$R^4 = \frac{N_q E R}{4\pi B} \quad (4.102)$$

Prema tome jednadžba (4.98) daje odgovarajući radijus vreće  $R$  kao funkciju konstantnog tlaka  $B$  na vreću za kvarkove unutar vreće.

Međutim izrazi (4.101) i (4.102) upućuju da nukleon (proton/neutron) i pion (koji se sastoji od jednog kvarka i jednog antikvarka) imaju gotovo isti radijus [31]:

$$\frac{R_N}{R_\pi} = \left( \frac{3}{2} \right)^{1/4} = 1,107 \quad (4.103)$$

i masa piona predviđena modelom je prevelika:

$$\frac{M_N}{M_\pi} = \frac{3 \cdot 2,043/R_N}{2 \cdot 2,043 R_\pi} = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^{1/4} = 1,36 \quad (4.104)$$

Kako bismo dobili realističniji model prije nego što prijedemo na primjene MIT modela vreće, potrebno je napraviti dodatne pretpostavke. Do sada se energija sastojala od dva člana; energije povezane uz tlak  $B$  i jednočestičnih energija [31]:

$$E = B \frac{4\pi}{3} R^3 + \sum_q \frac{\omega_q}{R} \quad (4.105)$$

gdje je  $w_q = E_q R = \text{konst.}$

Uvest ćemo dodatni član koji se fizikalno interpretira kao Kazimirova energija:

$$E_0 = -\frac{Z}{R}, \quad Z = \text{konst.} \quad (4.106)$$

Tada izraz (4.102) postaje:

$$R^4 = \frac{N_q \omega_q - Z}{4\pi B} \quad (4.107)$$

Dovoljno velika vrijednost  $Z$  omogućuje nam prilagodbu razlike u masi i radijusu između mezona i bariona. Model vreće daje donju granicu za energiju osnovnog stanja polja gluona. Što je vreća manja, to je veća energija osnovnog stanja oscilacija vakuuma. Stoga  $E_0$  iščezava kada  $R \rightarrow \infty$  i divergira kada  $R \rightarrow 0$ . Rubni uvjeti ne vrijede za vrijednosti  $R$  koje su manje od tipičnih udaljenosti promatranih reakcija. Stoga  $R$  ne smije biti manji od 0,2 fm. Za energije veće od  $\sim 1 \text{ GeV}^2$  moramo primijeniti perturbativnu QCD, koja modelira interakciju između kvarkova i gluona. Individualne interakcije kvarkova i gluona ne mogu se opisati jednostavnim rubnim uvjetima. Prema tome jednadžba (4.98) je samo fenomenološka korekcija [31].

Sljedeća poteškoća u modelu je opisivanje razlike u masi unutar barionskog multipleta. Budući da su sve čestice čija je stranost različita od nule znatno teže od onih sa stranosti  $S = 0$ , uvođenje masa kvarkova čini se razumnim korakom pa rješavamo Diracovu jednadžbu za masivne čestice:

$$(\not{p} - m)\Psi = 0 \quad (4.108)$$

koja će dati valnu funkciju za masivne kvarkove u MIT modelu vreće:

$$\Psi = N \begin{pmatrix} j_{\ell_\kappa}(pr) \chi_\kappa^\mu \\ i \frac{p}{E+m} \text{sgn}(\kappa) j_{\bar{\ell}_\kappa}(pr) \chi_{-\kappa}^\mu \end{pmatrix} e^{-iEt} \quad (4.109)$$

Mase  $u$ ,  $d$  i  $s$  kvarkova tretiraju se kao slobodni parametri. Međutim, ova generalizacija nije dovoljna za opisivanje relativno male razlike masa između  $\Sigma$  i  $N$  te velike razlike masa između  $K$  i  $\pi$  [31]. Potrebna je dodatna korekcija koja pretpostavlja različite vrijednosti za mezone i barione. Prema tome uzimajući u obzir magnetsku interakciju boje između kvarkova dobivamo sljedeću korekciju:

$$E_{qG} = \alpha_c N \cdot \sum_{i < j} (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j) \frac{\mu_i \mu_j}{R^3} \left( 1 + 2 \int_0^R \frac{dr}{r^4} \mu_i \mu_j \right) \quad (4.110)$$

gdje je  $N = 2$  za barione i  $N = 4$  za mezone, dok je  $\mu_i$  magnetski moment kvarka s indeksom  $i$ ,  $\alpha_c$  je konstanta jakog međudjelovanja.

Važno je istaknuti da smo u (4.110) zanemarili interakciju između gluona i postuliramo da su svi doprinosi osim izmjene jednog gluona opisani rubnim uvjetom vreće. Budući da se  $\alpha_c$  tretira uglavnom kao slobodan parametar (unutar određenih granica), (4.110) se također može tumačiti kao fenomenološka korekcija.

Zaključujemo da ukupna energija poprima oblik:

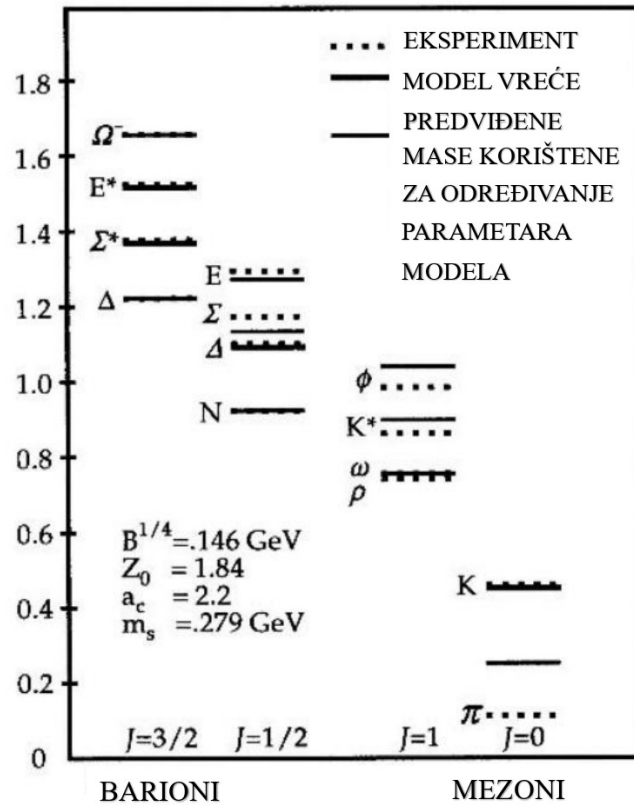
$$E = \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{\sum_q \omega_q - Z}{R} + E_{qG} \quad (4.111)$$

Radijus vreće, odnosno radijus svakog hadrona određujemo minimizacijom energije:



$$\frac{\partial E}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial R^2} > 0 \rightarrow R \quad (4.112)$$

Ukupno je dostupno otprilike 25 do 30 eksperimentalno promatranih vrijednosti masa, magnetskih momenata, radijusa naboja itd. za prilagodbu šest parametara  $B$ ,  $Z$ ,  $\alpha_c$ ,  $m_s$ ,  $m_u$  i  $m_d$ . Slaganje eksperimentalnih i teorijskih vrijednosti postignuta takvom prilagodbom obično je bolja od 30% [31]. Promotrimo primjerice za mase.



Slika 4.3: MIT model vreće za lakše mezone i barione. (Slika preuzeta iz [31]).

Na Slici 4.3 prikazane su eksperimentalne i teorijske vrijednosti za sljedeći skup parametara:

$$B = (146 \text{ MeV})^4, \quad Z = 1,84, \quad \alpha_c = 2,2, \quad (4.113)$$

$$m_u = 0 \text{ MeV}, \quad m_d = 0 \text{ MeV}, \quad m_s = 279 \text{ MeV}$$

Možemo uočiti dobro slaganje između teorijskih i eksperimentalnih vrijednosti masa za sve mezone i barione osim za pion. Kako bi dobili bolje slaganje za pion trebali bi koristiti hibridni model vreće.

#### 4.2.3 Primjena modela na protonu

Primijenit ćemo MIT model vreće kako bismo procijenili prosječni radijus naboja protona.

Kvadrat prosječnog radijusa naboja definiramo:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{e} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \int d^3r_3 \Psi_p^\dagger (\hat{Q}r^2) \Psi_p \quad (4.114)$$

gdje je  $\Psi_p$  valna funkcija protona koja se može napisati pomoću valnih funkcija kvarkova:

$$\begin{aligned} \Psi_p \left( m_s = \frac{1}{2} \right) = & \frac{1}{3\sqrt{2}} (2u^\uparrow(1)u^\uparrow(2)d^\downarrow(3) - u^\uparrow(1)u^\downarrow(2)d^\uparrow(3) \\ & - u^\downarrow(1)u^\uparrow(2)d^\uparrow(3) - u^\uparrow(1)d^\uparrow(2)u^\downarrow(3) + u^\uparrow(1)2d^\downarrow(2)u^\uparrow(3) \\ & - u^\downarrow(1)d^\uparrow(2)u^\uparrow(3) - d^\uparrow(1)u^\uparrow(2)d^\downarrow(3) \\ & - d^\uparrow(1)u^\downarrow(2)d^\uparrow(3) + 2d^\downarrow(1)u^\uparrow(2)d^\uparrow(3)) \end{aligned} \quad (4.115)$$

gdje  $u^\uparrow(1)$  označava valnu funkciju prvog  $u$  kvarka s projekcijom spina  $m_s = +1/2$ .

Budući da  $r^2$  ne mijenja kvantni broj  $m_s$ , sve orijentacije spina daju istu vrijednost. Stoga se možemo ograničiti na jedan određeni slučaj:

$$\begin{aligned} \Psi_p \left( m_s = \frac{1}{2} \right) \rightarrow & \frac{1}{\sqrt{6}} (2u^\uparrow(1)u^\uparrow(2)d^\downarrow(3) \\ & - u^\uparrow(1)d^\uparrow(2)u^\downarrow(3) - d^\uparrow(1)u^\uparrow(2)u^\downarrow(3)) \end{aligned} \quad (4.116)$$

Operator naboja  $\hat{Q}r^2$  djeluje na svaki pojedinačni kvark. Za proton ga možemo zamijeniti s:

$$\hat{Q}r^2 \rightarrow Q_1r_1^2 + Q_2r_2^2 + Q_3r_3^2 \quad (4.117)$$

Sada (4.114) se svodi na:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle = & \frac{1}{e} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \int d^3r_3 \frac{1}{6} (2u^\uparrow(1)u^\uparrow(2)d^\downarrow(3) \\ & - u^\uparrow(1)d^\uparrow(2)u^\downarrow(3) - d^\uparrow(1)u^\uparrow(2)u^\downarrow(3))^\dagger \\ & \times (Q_1r_1^2 + Q_2r_2^2 + Q_3r_3^2) (2u^\uparrow(1)u^\uparrow(2)d^\downarrow(3) \\ & - u^\uparrow(1)d^\uparrow(2)u^\downarrow(3) - d^\uparrow(1)u^\uparrow(2)u^\downarrow(3)) \end{aligned} \quad (4.118)$$

Pretpostavljamo da su  $u$  i  $d$  kvarkovi bezmaseni prema (4.113) te da se nalaze u istom stanju (1s stanju), tj. ne razlikujemo  $u$  i  $d$  kvarkove pa se  $r_2^2$  i  $r_3^2$  mogu zamijeniti s  $r_1^2$ :

$$Q_1r_1^2 + Q_2r_2^2 + Q_3r_3^2 \rightarrow (Q_1 + Q_2 + Q_3)r_1^2 = er_1^2 \quad (4.119)$$

Sada se integrali po  $r_2$  i  $r_3$  mogu izračunati koristeći svojstvo ortogonalnosti.

$$\int d^3r_2 q^{s\dagger}(2) q^{s'}(2) = \delta_{qq'} \delta_{ss'}, \quad \begin{cases} q, q' = u, d \\ s, s' = \uparrow, \downarrow \end{cases} \quad (4.120)$$

$$\langle r^2 \rangle = \int d^3 r_1 r_1^2 \frac{1}{6} (4u^{\uparrow\uparrow}(1)u^\uparrow(1) + u^{\uparrow\uparrow}(1)u^\uparrow(1) + d^{\uparrow\uparrow}(1)d^\uparrow(1)) \quad (4.121)$$

Prema gornjoj pretpostavci da ne razlikujemo  $u$  i  $d$  kvarkove, njihove valne funkcije daju iste doprinose te se izraz (4.121) svodi na:

$$\langle r^2 \rangle = \int d\Omega_1 \int dr_1 r_1^4 \frac{1}{6} (4u^{\uparrow\uparrow}(1)u^\uparrow(1) + u^{\uparrow\uparrow}(1)u^\uparrow(1) + u^{\uparrow\uparrow}(1)u^\uparrow(1)) \quad (4.122)$$

$$\langle r^2 \rangle = \int d\Omega_1 \int dr_1 r_1^4 u^{\uparrow\uparrow}(1)u^\uparrow(1) \quad (4.123)$$

Uvrštavamo valnu funkciju (4.96) i u daljnjem računu izostavljamo indeks 1:

$$\langle r^2 \rangle = N^2 \int dr \int d\Omega r^4 [j_0^2(Er) \chi_1^{\frac{1}{2}\uparrow}(\Omega) \chi_1^{\frac{1}{2}}(\Omega) + j_1^2(Er) \chi_{-1}^{\frac{1}{2}\uparrow}(\Omega) \chi_{-1}^{\frac{1}{2}}(\Omega)] \quad (4.124)$$

Uvrštavamo konstantu normalizacije (4.97) uz  $\kappa = -1$  što daje:  $N_{\kappa=-1}^2 = \frac{ER}{2R^3(ER-1)j_0^2(ER)}$  i uzimamo u obzir ortogonalnost spinora  $\chi$  te dobivamo [31]:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{ER}{2R^3(ER-1)j_0^2(ER)} \int_0^R dr r^4 (j_0^2(Er) + j_1^2(Er)) \quad (4.125)$$

Uz izraze za sferne Besselove funkcije:

$$\begin{aligned} j_0(z) = \frac{\sin z}{z} &\Rightarrow j_0^2(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2} \\ j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} &\Rightarrow j_1^2(z) = \frac{\sin^2 z}{z^4} + \frac{\cos^2 z}{z^2} - 2\frac{\sin z \cos z}{z^3} \end{aligned} \quad (4.126)$$

raspisujemo  $\langle r^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \frac{ER(ER)^2}{2R^3(ER-1)\sin^2(ER)} \int_0^R dr r^4 \left[ \frac{\sin^2(Er)}{E^4 r^4} - 2\frac{\sin(Er)\cos(Er)}{E^3 r^3} + \frac{1}{E^2 r^2} \right] \\ &= \frac{1}{2E(ER-1)\sin^2(ER)} \int_0^R dr r^4 \left[ \frac{\sin^2(Er)}{r^4} - 2E\frac{\sin(Er)\cos(Er)}{r^3} + \frac{E^2}{r^2} \right] \\ &= \frac{1}{2E(ER-1)\sin^2(ER)} \left[ \frac{r}{2} - \frac{\sin(Er)\cos(Er)}{2E} - \frac{\sin(Er)\cos(Er)}{2E} + \frac{r\cos(2Er)}{2} + \frac{r^3 E^2}{3} \right]_0^R \\ &= \frac{1}{2E(ER-1)\sin^2(ER)} \left[ \frac{r}{2} + \frac{r}{2}(1 - 2\sin^2(Er)) - \frac{1}{E}\sin(Er)\cos(Er) + \frac{r^3 E^2}{3} \right]_0^R \\ &= \frac{1}{2E(ER-1)\sin^2(ER)} \left[ -r\sin^2(Er) + r - \frac{1}{E}\sin(Er)\cos(Er) + \frac{r^3 E^2}{3} \right]_0^R \\ &= \frac{1}{2E(ER-1)\sin^2(ER)} \left[ -R\sin^2(ER) + R - \frac{1}{E}\sin(ER)\cos(ER) + \frac{R^3 E^2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2E(ER-1)\sin^2(ER)} \left[ R\cos(ER)\cos(ER) - \frac{1}{E}\sin(ER)\cos(ER) + \frac{R^3 E^2}{3} \right] \end{aligned} \quad (4.127)$$

Iz rubnog uvjeta:  $j_0(ER) = j_1(ER)$  dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(ER)}{ER} &= \frac{\sin(ER)}{E^2 R^2} - \frac{\cos(ER)}{ER} \\ ER \sin(ER) &= \sin(ER) - ER \cos(ER) \\ ER \cos(ER) &= (1 - ER) \sin(ER)\end{aligned}\tag{4.128}$$

Konačno,  $\langle r^2 \rangle$  se svodi na:

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= \frac{1}{2E(ER - 1) \sin^2(ER)} \left[ \left( \frac{1}{E} - R \right) \sin(ER) \cos(ER) - \frac{1}{E} \sin(ER) \cos(ER) + \frac{R^3 E^2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2E^2(ER - 1) \sin^2(ER)} \left[ -ER \sin(ER) \cos(ER) + \frac{R^3 E^3}{3} \right]\end{aligned}\tag{4.129}$$

Uvrštavanjem numeričke vrijednosti za  $ER$  koja iznosi 2,0428 dobivamo [31]:

$$\langle r^2 \rangle = 0,53 R^2\tag{4.130}$$

Radijus vreće  $R$  određujemo minimiziranjem energije (4.111) što daje:  $R = 1$  fm, stoga [31]:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,73 \text{ fm}\tag{4.131}$$

Ovaj rezultat se slaže s eksperimentalnom vrijednošću unutar 20 % [31]:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle}(\text{eksp.}) = 0,88 \pm 0,03 \text{ fm}\tag{4.132}$$

Magnetski moment određujemo računanjem očekivane vrijednosti odgovarajućeg operatora:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\hat{Q}}{2} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\alpha}}\tag{4.133}$$

$$\boldsymbol{\mu}_p = \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \int d^3 r_3 \Psi_p^\dagger \sum_i \left( \frac{\hat{Q}_i}{2} \hat{\mathbf{r}}_i \times \hat{\boldsymbol{\alpha}}_i \right) \Psi_p\tag{4.134}$$

Uvrštavanje valnih funkcija (4.96) i (4.115) daje rezultat:

$$\frac{|\boldsymbol{\mu}_p|}{\mu_0} = 1,9\tag{4.135}$$

gdje je  $\mu_0 = e/2m_p$  nuklearni magneton i  $m_p$  je masa protona. Ova vrijednost magnetskog momenta dobivena modelom znatno se razlikuje od eksperimentalne vrijednosti [31]:

$$|\boldsymbol{\mu}_p|(\text{eksp.}) = 2,79 \mu_0\tag{4.136}$$

Magnetski momenti predviđeni ovim modelom za ostale hadrone također su manji od eksperimentalno dobivenih vrijednosti, međutim omjeri magnetskih momenata dobro se slažu s eksperimentalnim rezultatima.

U Tablicama 4.1 i 4.2 uspoređeni su rezultati MIT modela za radijuse naboja i magnetskih momenata s odgovarajućim eksperimentalnim podacima.

Čestica	$\langle r^2 \rangle$ (eksp.)	$\langle r^2 \rangle$ (teor.)
$p$	$0,88 \pm 0,03$ fm	0,73 fm
$n$	$-0,12 \pm 0,01$ fm	0 fm
$\pi$	$0,78 \pm 0,10$ fm	0,5 fm

Tablica 4.1: Usporedba eksperimentalnih vrijednosti radijusa naboja s odgovarajućim rezultatima MIT modela vreće. (Podaci preuzeti iz [31]).

Čestica	$\frac{\mu}{\mu_0}$ (eksp.)	$\frac{\mu}{\mu_0}$ (teor.)	$\frac{\mu}{\mu_p}$ (eksp.)	$\frac{\mu}{\mu_p}$ (teor.)
$p$	2,793	1,90	–	–
$n$	-1,913	-1,27	-0,68	2/3
$\Lambda$	$0,613 \pm 0,004$	-0,48	$-0,219 \pm 0,001$	-0,26
$\Sigma^+$	$2,38 \pm 0,02$	1,84	$0,85 \pm 0,01$	0,97
$\Sigma^0$	–	0,59	–	0,31
$\Sigma^-$	$-1,14 \pm 0,05$	-0,68	$-0,36 \pm 0,02$	-0,36
$\Xi^0$	$-1,25 \pm 0,014$	-1,06	$-0,448 \pm 0,005$	-0,56
$\Xi^-$	$-0,69 \pm 0,04$	-0,44	$-0,25 \pm 0,01$	-0,23

Tablica 4.2: Usporedba eksperimentalnih vrijednosti omjera magnetskih momenata s odgovarajućim rezultatima MIT modela vreće. (Podaci preuzeti iz [31]).

#### 4.2.4 Prednosti i nedostaci modela

MIT model vreće pruža fenomenološki opis hadrona, a njegova velika prednost je omogućavanje grube procjene svih zanimljivih procesa i veličina koje još nisu eksperimentalno utvrđene. Model dobro predviđa mase različitih hadrona, izuzev mase piona. Unatoč tome što model koristi prilično dalekosežne aproksimacije, daje zadovoljavajuće rezultate koje ne može predvidjeti QCD zbog matematičkih poteškoća. Osim toga, moguće je procijeniti fenomenološke posljedice koje proizlaze iz dodatnih interakcija među kvarkovima. Na primjer, model vreće omogućuje povezivanje poznate slabe interakcije hadrona sa slabom interakcijom kvarkova. Zahvaljujući svojoj jednostavnosti, model vreće se može primijeniti na različite sustave, uključujući primjene od atoma do zvijezda.

Svi modeli vreće moraju se smatrati čistom fenomenologijom zbog čega nisu konceptualno zadovoljavajući. Trenutačno nije jasno u kojoj mjeri pretpostavke modela mogu biti objašnjene teorijom QCD-a. Ako se u budućnosti problem zatočenja kvarkova riješi iz QCD jednadžbi, moglo bi se ispostaviti da su pretpostavke MIT modela vreće nefizikalne, a model nije renormalizabilan niti Lorentz-invarijantan. Osnovne pretpostavke ovog modela uključuju rubni uvjet, koji kvarkove ograničava unutar vreće, i slobodno kretanje kvarkova unutar te vreće. Ove pretpostavke drastično se razlikuju, što sugerira da barem jedna od njih nije točna. Sam rubni uvjet uzrokuje nekoliko problema, uključujući nefizikalno gibanje, poput oscilacija svih kvarkova u odnosu na vreću što nije Lorentz-invarijantno. Osim toga, taj uvjet dovodi do beskonačne mase kvarkova izvan vreće, što nepoželjno narušava kiralnu simetriju [23,31]. MIT model vreće suočava se i s problemom centra mase zbog čega nije prikladan za proučavanje raspada čestica [33].

MIT model vreće stekao je popularnost zbog svoje jednostavnosti, međutim većinu njegovih uspjeha i nedostataka nedvojbeno dijele i drugi modeli. Bardeen i suradnici razvili su SLAC model u kojem skalarno polje djeluje kao vreća, a kvarkovi se nalaze unutar tanke sferne ljuske i nisu raspoređeni po cijelom hadronu. Međutim, sferna ljuska nije u skladu s eksperimentalnim rezultatima i SLAC model je zamijenjen srodnim solitonskim modelom kojeg su razvili Hasenfratz i Kuti [25] koji uz tlak  $B$  uvode površinsku napetost  $\sigma$ . Osim ovih modela gdje se veličine mogu pronaći analitički, Wilson razvija numerički model - model QCD na prostorno-vremenskoj rešetci [34] za koju je potrebna izuzetna računalna snaga. Nedostatak koji QCD na rešetci dijeli s MIT modelom vreće je narušenje kiralne simetrije. Ovaj problem nije bio trivijalan i zahtijevao je napore prilično mnogo znanstvenih skupina da ga riješe i formiraju hibridne kiralne modele gdje vreću okružuje polje piona koje može prodrijeti u vreću. Kiralni kvark model ostaje važan, posebno u kontekstu nuklearne fizike. Svi navedeni modeli sa svojim prednostima i nedostacima doprinijeli su razumijevanju subhadronske fizike, a daljnji razvoj modela vreće mora proizaći iz boljeg razumijevanja kvantne kromodinamike.

## 5 Zaključak

Tijekom proteklih nekoliko desetljeća otkriveno je više od 200 različitih hadrona, koji se klasificiraju kao mezoni i barioni. Spektar mezona i bariona pokazuje visok stupanj pravilnosti koji je najbolje sadržan u kvarkovskom modelu prema kojemu se svi hadroni sastoje od šest kvarkova što omogućuje sistematično objašnjenje strukture hadrona. Prema kvarkovskom modelu, mezoni se sastoje od jednog para kvark-antikvark, dok se barioni sastoje od tri kvarka. Model kvarkova pruža elegantno objašnjenje svojstava mnogobrojnih hadrona i omogućuje predviđanje karakteristika novih hadrona.

Razvoju kvarkovskog modela doprinijelo je otkriće  $\psi$  čestice u eksperimentima  $e^-e^+$  anihilacije koje je potaknulo razvoj spektroskopije vezanih stanja teških kvarkova. Za istraživanje ove spektroskopije razvijeni su razni fenomenološki potencijali koji modeliraju interakcije između kvarkova s ciljem reprodukcije eksperimentalno opaženih masenih spektara mezona. U tu svrhu u ovom radu koristi se Cornell potencijal koji obuhvaća očekivana svojstva iz interakcije kvarkova, s Coulombskim članom ( $\approx 1/r$ ) dominantnim na kratkim udaljenostima koji predstavlja jednogluonsku izmjenu između kvarka i antikvarka, te s linearnim članom ( $\approx r$ ) koji dominira na većim udaljenostima opisujući zatočenje kvarkova.

U analizi mezona primjenjuje se nerelativistički pristup, rješavanjem Schrödingerove jednadžbe s Cornell potencijalom, koja predstavlja važan nerelativistički model za izračun masenih spektara i radijativnih prijelaza vezanih sustava težih kvarkova i antikvarkova. Budući da egzaktni analitički pristup Schrödingerovoj jednadžbi s Cornell potencijalom nije izvediv, primjenjuju se različite numeričke metode, uključujući Hartree metodu i metodu diskretizacije ili varijacioni postupak. Uz prilagodbu parametara:  $m_c \approx 1,5$ ,  $m_b = 4,5$  GeV,  $a \approx 0,4$ ,  $b \approx 0,2$  i  $c \approx -0,35$ , Cornell potencijal definiran je kao  $V(r) = -0,4/r + 0,2r - 0,35$ . Ovom prilagodbom uspješno se reproduciraju niži energetske nivoi vezanih stanja  $c\bar{c}$  i  $b\bar{b}$ , a također se omogućuje predviđanje novih stanja. Raspored energetskih nivoa dobiven ovim modelom odgovara eksperimentalnim rezultatima.

U svrhu boljeg modeliranja interakcije među mezonima, Cornell potencijal može se proširiti članom  $ar^2$  čime se dobiva Coulombov perturbirani potencijal oblika  $V(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r}$ . Parametri potencijala ( $a$ ,  $b$  i  $c$ ) za odabrani sustav prilagođavaju se kako bi se postigli rezultati usporedivi s teorijskim i eksperimentalnim podacima. Schrödingerovu jednadžbu s perturbiranim Cornell potencijalom moguće je riješiti primjenom Nikiforov-Uvarov metode funkcionalne analize (NUFA) čime dobivamo jednadžbu za svojstvene energije koju koristimo za računanje masenih spektara mezona  $b\bar{s}$  i  $b\bar{q}$ , ( $q = u, d$ ). Dobiveni maseni spektri pokazuju prosječno odstupanje od 1,5% za  $b\bar{s}$  i 1,94% za  $b\bar{q}$  u usporedbi s referentnim vrijednostima iz [19] i [20], redom. Iz Tablica 3.3 i 3.4 zaključujemo da maseni spektri dobiveni NUFA metodom dobro reproduciraju rezultate iz [20], koji uključuju relativističke korekcije, te su u

skladu s eksperimentalnim podacima iz [21]. Ovi rezultati su znatno poboljšani u odnosu na prethodna istraživanja, posebice u usporedbi s radom [19], gdje su maseni spektri izračunati primjenom metode asimptotske iteracije. Ova uspješna usklađenost potvrđuje pouzdanost NUFA metode kao i njezinu primjenjivost u predviđanju masenih spektara mezona što je ključno za razumijevanje jake interakcije između kvarkova.

U okviru modeliranja zatočenja kvarkova unutar hadrona razvijen je MIT model vreće, koji se ističe kao jedan od najuspješnijih fenomenoloških modela za proučavanje bariona. Ovaj model pretpostavlja da su kvarkovi zatočeni unutar ograničenog sfernog volumena radijusa  $R$ . Unutar tog volumena, kvarkovi se gibaju kao slobodne čestice i podložni su dvama linearnim rubnim uvjetima koji diktiraju zatočenje uvođenjem tlaka  $B$  što je značajno poboljšalo predviđanja modela u usporedbi s eksperimentalnim vrijednostima masa različitih hadrona. Uvođenjem parametra  $B$  fiksirani su radijusi vreća. U ovom modelu zanemaruje se izmjena gluona. Za unaprjeđenje modela i postizanje realističnijih rezultata, uvode se dvije fenomenološke korekcije energije. Prva korekcija,  $E_{qG}$ , razmatra različite vrijednosti za mezone i barione. Druga korekcija je Kazimirova energija,  $-Z/R$ , gdje odabir dovoljno velike vrijednosti parametra  $Z$  omogućuje prilagodbu razlika u masi i radijusu između mezona i bariona. Radijusi svih hadrona određuju se minimizacijom energije.

MIT model vreće omogućio je računanje svojstava nukleona, poput radijusa naboja, aksijalnih naboja i giro-magnetskih omjera, te i dalje ima široku primjenu u suvremenim istraživanjima. Za prilagodbu šest parametara;  $B = (146 \text{ MeV})^4$ ,  $Z = 1,84$ ,  $\alpha_c = 2,2$ ,  $m_s = 279 \text{ MeV}$ ,  $m_u = 0 \text{ MeV}$  i  $m_d = 0 \text{ MeV}$ , dostupno je ukupno otprilike 25 do 30 eksperimentalno promatranih vrijednosti masa, magnetskih momenata, radijusa naboja itd. čije je slaganje s teorijskim vrijednostima bolje od 30 %. Na primjeru masa, primjećuje se dobro slaganje između teorijskih i eksperimentalnih vrijednosti masa za sve mezone i barione, osim za pion.

MIT model vreće primijenjen je na proton za procjenu prosječnog radijusa naboja rješavanjem Diracove jednadžbe za bezmasene čestice, rezultirajući vrijednošću:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,73 \text{ fm. Ovaj rezultat se slaže s eksperimentalnom vrijednošću koja iznosi } \sqrt{\langle r^2 \rangle}(\text{eksp.}) = 0,88 \pm 0,03 \text{ fm s odstupanjem manjim od 20 \%.$$

Pomoću ovog modela moguće je procijeniti magnetski moment protona koji iznosi:  $|\mu_p|/\mu_0 = 1,9$ . Ova vrijednost znatno odstupa od eksperimentalne vrijednosti za magnetski moment iznosa  $|\mu_p|(\text{eksp.}) = 2,79 \mu_0$ . Magnetski momenti predviđeni ovim modelom za ostale hadrone također su manji od eksperimentalno dobivenih vrijednosti, no omjeri magnetskih momenata usklađeni su s eksperimentalnim rezultatima. MIT model vreće ima mnogo nedostataka, uključujući pitanje konzistencije s QCD-om, nefizikalne pretpostavke i probleme vezane uz rubni uvjet te centar mase. Unatoč ovim nedostacima i grubim aproksimacijama model pruža zadovoljavajuće rezultate za mase hadrona i omogućava procjenu različitih procesa i veličina.

Razmatranje kvarkovskih modela mezona i bariona pridonosi istraživanju i interpre-



taciji eksperimentalnih podataka i na taj način pruža dublji uvid u prirodu jake sile koja djeluje među kvarkovima.

# Dodaci

## Dodatak A Vodikov atom: raspis Frobeniusove metode

Izračunajmo derivacije pretpostavljene funkcije  $W$  (3.54):

$$W' = r\eta^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta^k + \eta^r \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} \quad (\text{A.1})$$

$$W'' = r(r-1)\eta^{r-2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta^k + 2r\eta^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} + \eta^r \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) \eta^{k-2} \quad (\text{A.2})$$

Uvrštavanjem izraza (3.54) i derivacija (A.1) i (A.2) u jednadžbu (3.48), dobivamo:

$$\begin{aligned} & \eta r(r-1)\eta^{r-2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta^k + 2\eta r \eta^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} + \eta \eta^r \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) \eta^{k-2} + 2r\eta^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta^k \\ & + 2\eta^r \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} + 2lr\eta^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta^k + 2l\eta^r \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} - \eta r \eta^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta^k \\ & - \eta \eta^{r-1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} - \eta^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k - l\eta^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k + n\eta^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Množenje s  $\eta^{-r}$  daje:

$$\begin{aligned} & r(r-1) \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta^{k-1} + 2r \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) \eta^{k-1} + 2r \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta^{k-1} \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} + 2lr \sum_{k=1}^{\infty} c_k \eta^{k-1} + 2l \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} - r \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k - l \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k + n \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Najniža potencija je  $\eta^{-1}$  koja se pojavljuje za  $k = 0$ . Zahtjevamo da član uz  $\eta^{-1}$  iščezava i dobivamo indicijalnu jednadžbu:

$$r(r-1)c_0 + 2rc_0 + 2lrc_0 = 0 \quad (\text{A.5})$$

iz koje slijedi da je

$$r = 0$$

ili

$$r = -2l - 1$$

dok je  $c_0 \neq 0$  po definiciji.

Rješenje  $r = 0$  je ispravno, dok rješenje  $r = -2l - 1$  nije prihvatljivo jer ono divergira u ishodištu.

Uz rješenje  $r = 0$  izraz za funkciju  $W$  (3.54) se pojednostavljuje:

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k \quad (\text{A.6})$$

Izračunajmo derivacije:

$$W' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} \quad (\text{A.7})$$

$$W'' = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) \eta^{k-2} \quad (\text{A.8})$$

Uvrštavanje u (3.48) daje:

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) \eta^{k-1} + (2+2l) \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^k - (1+l-n) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k = 0 \quad (\text{A.9})$$

Kako bismo prilagodili sve članove na istu potenciju, npr.  $\eta^k$ , uvedimo varijablu  $k' = k - 1$ .

$$\sum_{k'=1}^{\infty} c_{k'+1} (k'+1) k' \eta^{k'} + (2+2l) \sum_{k'=0}^{\infty} c_{k'+1} (k'+1) \eta^{k'} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^k - (1+l-n) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k = 0 \quad (\text{A.10})$$

Radi jednostavnijeg zapisa, uvodimo oznaku:  $k' \equiv k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} (k+1) k \eta^k + (2+2l) \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} (k+1) \eta^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k k \eta^k - (1+l-n) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k = 0 \quad (\text{A.11})$$

Uočavamo dvije sume koje počinju s 1 i dvije sume koje počinju s nulom, stoga članove s nulom možemo izdvojiti:

$$(2+2l)c_1 - (1+l-n)c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ c_{k+1} \left[ k(k+1) + (k+1)(2+2l) \right] - c_k \left[ k+1+l-n \right] \right\} \eta^k = 0 \quad (\text{A.12})$$

Zahtjevamo da koeficijenti svake potencije od  $\eta$  iščezavaju zasebno pa vrijedi:

$$(2+2l)c_1 - (1+l-n)c_0 = 0 \quad (\text{A.13})$$

i

$$c_{k+1} \left[ k(k+1) + (k+1)(2+2l) \right] - c_k \left[ k+1+l-n \right] = 0 \quad (\text{A.14})$$

Iz toga slijedi koeficijent:

$$c_1 = \frac{1+l-n}{2+2l} c_0 \quad (\text{A.15})$$

i rekurzijaska relacija:

$$c_{k+1} = \frac{k+1+l-n}{(k+1)(k+2+2l)} c_k \quad (\text{A.16})$$

## Literatura

- [1] Picek I. Fizika elementarnih čestica. 1st ed. Zagreb : Hinus 1997.
- [2] Thomson, M. Modern particle physics. 1st ed. Cambridge : Cambridge University Pres, 2013.
- [3] Williams, W. S. C. Nuclear and particle physics. 1st ed. Oxford : Clarendon Press, 1991.
- [4] Standardni model, *Wikipedia*, [https://hr.wikipedia.org/wiki/Standardni\\_model](https://hr.wikipedia.org/wiki/Standardni_model), 5.9.2023.
- [5] Haynes, W. M. CRC Handbook of Chemistry and Physics. 95th ed. Hoboken : CRC Press, 2014.
- [6] Streater, R. F.; Wightman A. S. PCT, Spin and Statistics, and All That. 2nd ed. New Jersey : Princeton University Press, 1989.
- [7] Halzen, F.; Martin, A. D. Quarks & Leptons: An introductory course in modern particle physics. 1st ed. New York : John Wiley & Sons, 1984.
- [8] Richard, J. M. An introduction to the quark model. // arXiv. 2012, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1205.4326>
- [9] Amsler, C.; DeGrand, T.; Krusche, B. Quark Model (kolovoz 2021) Particle Data Group, <https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/rpp2022-rev-quark-model.pdf>, 27.9.2023.
- [10] Pathak, K. K.; Bhattacharya, S.; Das, T. Parameterisation space for Cornell potential in a QCD potential model. // The European Physical Journal C. Vol. 82 (2022), str. 1081-1085.
- [11] Griffiths, D. J. Introduction to electrodynamics. 4th ed. New Jersey : Pearson, 2013.
- [12] Povh, B.; Rith, K.; Scholz C.; Zetsche F. Particles and Nuclei. 6th ed. Berlin : Springer, 2008.
- [13] Auletta, G.; Fortunato, M.; Parisi, G. Quantum mechanics. 1st ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2009.
- [14] Griffiths, D. J. Introduction to Quantum Mechanics. 2nd ed. New Jersey : Pearson Prentice Hall, 2005.
- [15] Riley, K. F.; Hobson, M. P.; Bence, S. J. Mathematical methods for physics and engineering. 3rd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2006.

- [16] Arfken, G. B.; Weber, H. J.; Harris, F. E. *Mathematical methods for physicists*. 7th ed. Amsterdam : Elsevier, 2013.
- [17] Holzapfel, R. P.; Uludağ, M.; Yoshida, M. *Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions: Lecture Notes of a CIMPA Summer School held at Galatasaray University, Istanbul, 2005*. 2007th ed. Basel : Birkhäuser, 2007.
- [18] Kumar, V.; Bhardwaj, S. B.; Singh, R. M.; Chand, F. On the solutions and applications of the generalised Cornell potential. // *Molecular Physics*. Vol 120, 22 (2022), <https://doi.org/10.1080/00268976.2022.213218>.
- [19] Rani, R.; Bhardwaj, S. B.; Chand, F. Mass Spectra of Heavy and Light Mesons Using Asymptotic Iteration Method. // *Communications in Theoretical Physics*. Vol. 70, 2 (2018), str. 179-184.
- [20] Godfrey, S.; Moats, K.; Swanson, E. S.  $B$  and  $B_s$  meson spectroscopy. // *Phys. Rev. D*. Vol. 94, 5 (2016), str. 054025 <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.054025>
- [21] Beringer, J. et al. Review of Particle Physics. // *Phys. Rev. D*. Vol 86, 1 (2012), str. 010001, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.86.010001>
- [22] Barnett, R. M.; Lellouch, L.P.; Manohar, A. V. Quark Masses, (kolovoz, 2021) Particle Data Group Review of Particle Physics, <https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/rpp2022-rev-quark-masses.pdf>, 25.9.2023.
- [23] DeTar, C. E.; Donoghue, J. F. Bag Models Of Hadrons. // *Annual Review Nuclear and Particle Science*. Vol. 33 (2003), str. 235-264.
- [24] Rodionov, E.N. The MIT bag model in nuclear and particle physics. Doktorski rad. Adelaide : The University of Adelaide, 1997.
- [25] Hasenfratz, P; Kuti, J. The quark bag model. // *Physics Reports*. Vol. 40, 2 (1978), str. 75-179.
- [26] Klabučar, D. Instantons and baryon mass splittings in the MIT bag model. // *Phys. Rev. D*. Vol. 49, 3 (1994), str. 1506-1512.
- [27] DeGrand, T.; Jaffe, R. L.; Johnson, K.; Kiskis, J. Masses and other parameters of the light hadrons. // *Phys. Rev. D*. Vol 12, 7 (1975), str. 2060-2076.
- [28] Bogolioubov, P. N. Sur un modèle à quarks quasi-indépendants. // *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*. Vol. 8, 2 (1968), str. 163-189.
- [29] Bag models (17.4.2008.) [https://www.physi.uni-heidelberg.de/~fschney/2008SS-Preseminar/Bag\\_models.pdf](https://www.physi.uni-heidelberg.de/~fschney/2008SS-Preseminar/Bag_models.pdf), 20.09.2023.

- [30] Chodos, A.; Jaffe, R. L.; Johnson, K.; Thorn, C. B.; Weisskopf, V. F. New extended model of hadrons. // Phys. Rev. D. Vol. 9, 12 (1974), str. 3471-3495.
- [31] Greiner, W.; Schramm, S.; Stein, E. Quantum chromodynamics. 3rd ed. Berlin : Springer, 2007.
- [32] Lagerkvist, L.; Samuelsson, F. The MIT bag-model. Završni rad. Stockholm : Royal Institute of Technology, 2015.
- [33] Chia-Wei, L.; Geng, C. Center of mass motion in bag model. // Chinese Physics C. 2022, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.08158>
- [34] Wilson, K. G. Confinement of quarks. // Phys. Rev. D. Vol 10, 8 (1974), str. 2445-2459.