Polinomi i njihove derivacije

Bogner, Anton

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anton Bogner

POLINOMI I NJIHOVE DERIVACIJE

Diplomski rad

Suvoditelji rada:
prof.dr.sc.Sanja Varošanec
doc.dr.sc.Mea Bombardelli

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Polinom je riječ koja se prvi put pojavljuje u 17. stoljeću. Riječ polinom spaja dva različita korijena: grčki *poli*, što znači "mnogo", i latinski *nomen*, što znači "ime". Točnije, to znači zbroj mnogih članova, odnosno mnoštvo monoma. Kao što je polinom zbir mnoštvo monoma, tako je i ovaj diplomski rad zbir mnoštvo teorema, korolara i lema kojima će se pokušati pokazati razne tvrdnje za polinome, njihove derivacije te maksimume njihovih modula na raznim područjima.
Glavni cilj ovog diplomskog rada je istražiti razne varijante Bernsteinove nejednakosti za polinome. Rad se sastoji od tri poglavlja. Počinjemo s uvodnim poglavljem u kojem se navode određene definicije i osnovni teoremi ključni u proučavanju teme ovog rada. Navode se definicije polinoma, holomorfne funkcije te teoremi principa maksimuma modula, osnovni teorem algebre, Rouchéov teorem te Gauss-Lucasov teorem.
U drugom poglavlju dokazujemo osnovnu Bernsteinovu nejednakost za polinome te dva teorema: Erdős-Laxov i Turánov teorem. Dok u Bernsteinovoj nejednakosti nema posebnog uvjeta o položaju nultočaka promatranog polinoma, u spomenutim teoremima se pojavljuju dodatni uvjeti o položaju nultočaka polinoma. U Erdős-Laxovom teoremu promatraju se polinomi čije se nultočke nalaze izvan otvorenog jediničnog kruga, a u Turánovom teoremu se promatraju polinomi čije se nultočke nalaze u zatvorenom jediničnom krugu $|z| \leq 1$. U sva se tri teorema uspostavlja nejednakost između maksimuma modula polinoma i maksimuma modula prve derivacije tog polinoma na jediničnoj kružnici. U tom istom poglavlju dokazali smo i nekoliko teorema koji poboljšavaju ova tri klasična rezultata.
U trećem poglavlju dokazali smo niz teorema u kojima se, osim maksimuma modula polinoma i njegove derivacije pojavljuje i minimum modula polinoma.

Poglavlje 1

Osnovne definicije i teoremi

U ovom radu proučavamo rezultate koji povezuju maksimum modula polinoma i njegove derivacije. Navedimo osnovne definicije i teoreme.

Definicija 1.1. *Funkcija $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana s*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

gdje su $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ naziva se polinom n-tog stupnja. Brojeve $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ zovemo koeficijentima polinoma, a_n vodeći koeficijent, a a_0 slobodni koeficijent.

Funkciju $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = 0$, dogovorno smatramo polinom. Njezin stupanj se obično ne definira. Jedan od najbitnijih rezultata za polinome je osnovni teorem algebre koji glasi:

Teorem 1.2. *Svaki polinom P stupnja $n \geq 1$ ima nultočku u $\mathbb{C}$.*

Neposredna posljedica tog teorema koju ćemo često koristiti u ovom radu je da se polinom P stupnja $n \geq 1$ može napisati u obliku

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

gdje su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nultočke od P i a_n je vodeći koeficijent od P.
Budući da je polinom kompleksna funkcija kompleksne varijable, izreći ćemo definiciju holomorfne funkcije i nekoliko teorema koje ćemo rabiti u preostalom dijelu rada.

Definicija 1.3. *Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$, pri čemu je Ω otvoreni podskup u $\mathbb{C}$, kažemo da je holomorfna ako je derivabilna i njena derivacija f' je neprekidna u Ω. Za funkciju f kažemo da je holomorfna u točki $z_0 \in \Omega$, ako postoji okolina od z_0 na kojoj je f holomorfna.*

Teorem 1.4 (Princip maksimuma modula)**.** *Neka je $K \subseteq \mathbb{C}$ kompaktan skup, a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija koja nije konstantna niti na jednoj okolini niti jedne točke nutrine skupa K. Tada modul funkcije $f\big|_K$ poprima maksimum samo u nekoj točki ruba ∂K skupa K.*

Drugim riječima, ako je nekonstantna funkcija f holomorfna u svim točkama kompaktnog skupa K, tada njezin modul $|f|$ ima maksimum i taj se maksimum postiže u nekoj točki ruba skupa K.

Teorem 1.5 (Rouchéov[1] teorem)**.** *Neka su funkcije f i g holomorfne na otvorenom skupu Ω, i neka je $\Gamma \subseteq \Omega$ kontura čije je i unutrašnje područje sadržano u Ω. Ako za svaki $z \in \Gamma$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, onda Γ obuhvaća jednak broj nultočaka funkcija f i $f + g$ (pritom svaku nultočku treba računati onoliko puta koliko i njezin red).*

Teorem 1.6 (Gauss-Lucasov[2] teorem)**.** *Ako je P nekonstantan polinom, tada sve nultočke njegove derivacije P' leže u konveksnoj ljusci skupa svih nultočaka od P.*

Dokazi teorema 1.4 i 1.5 mogu se naći u [7], a ovdje ćemo dokazati teorem 1.6.

Dokaz

Ako su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nultočke polinoma P, tada ga prema osnovnom teoremu algebre možemo zapisati kao

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Deriviranjem dobivamo:

$$P'(z) = c(z-z_2)(z-z_3)\ldots(z-z_n)+c(z-z_1)(z-z_3)\ldots(z-z_n)+\ldots+c(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1}).$$

Tada je

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z} - \overline{z_k}}{|z - z_k|^2}.$$

Ako je z nultočka od P', tada je $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = 0$ pa vrijedi

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{z}{|z - z_k|^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j}{\left|z - z_j\right|^2},$$

$$z \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^{-2} = \sum_{j=1}^{n} z_j \left|z - z_j\right|^{-2},$$

[1] Eugène Rouché (Sommières, 1832.-Lunel, 1910.)

[2] Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 1777.-Göttingen, 1855.)
Édouard Lucas (Amiens, 1842.-Pariz, 1891.)

$$z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left|z - z_j\right|^{-2}}{\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^{-2}} \cdot z_j,$$

tj. z je linearna kombinacija nultočaka $z_1, z_2, \ldots, z_n$, a budući da je suma svih koeficijenata $\dfrac{\left|z - z_j\right|^{-2}}{\sum |z - z_k|^{-2}}$ jednaka 1, radi se o konveksnoj kombinaciji. ■

U cijelom radu umjesto teksta koji u potpunosti objašnjava položaj točke z: ”točka z pripada skupu $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$” koristimo ili frazu ”točka z leži na jediničnoj kružnici” ili samo pišemo uvjet $|z| = 1$. Ovakvo skraćivanje teksta uobičajeno je u radovima o polinomima koje smo koristili pri izradi rada. Analognu terminologiju koristimo kad točka z pripada otvorenom jediničnom krugu (tj. kad za z vrijedi $|z| < 1$), odnosno kad z pripada drugim promatranim područjima.

Poglavlje 2

Bernsteinova nejednakost i njezine varijante

Bernsteinova[1] nejednakost opisuje vezu između maksimuma modula polinoma i njegove derivacije na jediničnoj kružnici. Prije dokaza Bernsteinovog teorema, dokažimo dvije pomoćne tvrdnje.

Lema 2.1. *Ako je P polinom stupnja n takav da je $|P(z)| \leq M$ na kružnici $|z| = 1$, onda za $R \geq 1$ vrijedi sljedeće:*

$$\max_{|z|=R} |P(z)| \leq MR^n.$$

Dokaz

Za polinom $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ promatramo polinom

$$r(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = z^n \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}.$$

Po pretpostavci znamo da je $|z| = 1$, a budući da je $\frac{1}{z} = \overline{z}$, tada vrijedi

$$\|r\| = \|P\|,$$

gdje je

$$\|r\| = \max_{|z|=1} |r(z)| \ \text{ i } \ \|P\| = \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

[1] Sergei Bernstein (Odesa, 1889.-Moskva, 1968.)

Po principu maksimuma modula teorem 1.4, uz uvjet $|z| \leq 1$ vrijedi

$$|r(z)| \leq \|r\| = \|P\| \leq M.$$

Odnosno

$$\left| z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq M, \text{ za } |z| \leq 1.$$

Zamijenimo li z s $\frac{1}{z}$ dolazimo do nejednakosti

$$\left| \frac{1}{z^n} P(z) \right| \leq M \text{ za } |z| \geq 1,$$

tj.

$$|P(z)| \leq M\,|z|^n \text{ za } |z| \geq 1.$$

Ukoliko točke z pripadaju kružnici $|z| = R$, gdje je $R \geq 1$, tada prethodna nejednakost postaje

$$|P(z)| \leq MR^n \text{ za } |z| = R,$$

tj.

$$\max_{|z|=R} |P(z)| \leq MR^n.$$

Time je lema dokazana. ■

Lema 2.2. *Neka su P i Q polinomi istog stupnja takvi da je*

$$|P(z)| \leq |Q(z)| \text{ za } |z| = 1$$

i sve nultočke od Q su u krugu $|z| < 1$.
Tada je $|P'(z)| \leq |Q'(z)|$ *za* $|z| = 1$.

Dokaz

Neka je λ bilo koji kompleksan broj takav da je $|\lambda| > 1$. Primijenimo Rouchéov teorem 1.5 na funkcije $f(z) = -\lambda Q(z)$ i $g(z) = P(z)$. Za konturu γ uzmimo jediničnu kružnicu $|z| = 1$. Za točke z s jedinične kružnice vrijedi

$$|P(z)| \leq |Q(z)| < |\lambda||Q(z)| = |-\lambda Q(z)|,$$

tj. zadovoljena je pretpostavka Rouchéovog teorema.
Prema Rouchéovom teoremu funkcije $-\lambda Q(z)$ i $h(z) = P(z) - \lambda Q(z)$ imaju jednak broj nultočaka unutar konture, a budući da Q ima sve nultočke u krugu $|z| < 1$, njih n, gdje je $n = st\ Q$, slijedi da i h ima n nultočaka u $|z| < 1$. Dakle, sve nultočke od h su u $|z| < 1$, a onda, prema Gauss-Lucasovom teoremu 1.6 zaključujemo da i sve nultočke od h' leže u

krugu $|z| < 1$, tj. u točkama izvan kruga je $h'(z) \neq 0$, tj. $P'(z) \neq \lambda Q'(z)$ za $|z| \geq 1$. Dokažimo tvrdnju da je $|P'(z)| \leq |Q'(z)|$ za $|z| \geq 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji $z_1 \in \mathbb{C}$, $|z_1| \geq 1$ takav da je

$$|P'(z)| > |Q'(z)|.$$

Budući da je z_1 izvan jediničnog kruga $|z| < 1$, ta točka nije nultočka od Q' jer prema Gauss-Lucasovom teoremu sve nultočke od Q' nalaze se u konveksnoj ljusci nultočaka od Q, a ta ljuska je podskup skupa $|z| < 1$. Stoga možemo definirati broj λ ovako:

$$\lambda = \frac{P'(z_1)}{Q'(z_1)}.$$

Za λ vrijedi

$$|\lambda| = \left|\frac{P'(z_1)}{Q'(z_1)}\right| > 1.$$

Za taj broj λ vrijedi $P'(z) \neq \lambda Q'(z)$ za sve brojeve z, $|z| \geq 1$ pa bi ta nejednakost vrijedila i za $z = z_1$, tj vrijedilo bi $P'(z_1) \neq \lambda Q'(z_1)$. što je u suprotnosti s definicijom broja λ. Dakle, dokazali smo da vrijedi

$$|P'(z)| \leq |Q'(z)|$$

za $|z| \leq 1$, a tada ta nejednakost vrijedi i za $|z| = 1$ čime je dokazana lema. ∎

Dokažimo sad i Bernsteinovu nejednakost o polinomima, [5].

Teorem 2.3. *Neka je P polinom stupnja n. Tada vrijedi*

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Dokaz

Prvo uvedimo oznake $M = \max_{|z|=1} |P(z)|$ te $Q(z)$ definiramo kao $Q(z) = Mz^n$. Tada je $|P(z)| \leq M$ na kružnici $|z| = 1$. Budući da je $|Q(z)| = M \cdot |z|^n = M$ za točke na kružnici $|z| = 1$ slijedi da je $|P(z)| \leq |Q(z)|$ za $|z| = 1$. Osim toga, jedina nultočka od Q je $z = 0$ pa možemo reći da sve nultočke od Q leže u krugu $|z| < 1$. Dakle, funkcije P i Q zadovoljavaju pretpostavke leme 2.2.

Prema lemi 2.2 dobivamo $|P'(z)| \leq |Q'(z)|$ za $|z| = 1$. Iz toga slijedi

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq \max_{|z|=1} |Q'(z)| = \max_{|z|=1} \left|nMz^{n-1}\right| = nM = n \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Konačno slijedi

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)|$$

čime je dokazana Bernsteinova nejednakost. ■

Dakle, ako je maksimum funkcije $|P(z)|$ na kružnici $|z| = 1$ jednak 1 pri čemu je P polinom stupnja n, tada, prema Bernsteinovom teoremu, maksimum funkcije $|P'(z)|$ nije veći od stupnja polinoma. Ova se gornja granica može poboljšati ukoliko se promatraju polinomi koji nemaju nultočke u krugu $|z| < 1$. U tom je slučaju gornja granica jednaka $\frac{n}{2}$ i to je sadržaj Erdős-Laxovog [1] teorema. Za dokaz tog teorema trebaju nam neke pomoćne tvrdnje iskazane kao leme 2.4 i 2.5. Leme 2.4 i 2.5 te dokaz Erdős-Laxovog teorema objavljeni su u [3].

Lema 2.4. *Ako je P polinom stupnja n i ako su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nultočke od $z^n + a$, gdje je a bilo koji kompleksni broj različit od nule i od -1, tada za svaki kompleksni broj t vrijedi,*

$$tP'(t) = \frac{n}{1+a}P(t) + \frac{1+a}{na}\sum_{k=1}^{n} P(tz_k)\frac{z_k}{(z_k-1)^2}. \tag{2.1}$$

Dokaz

Neka je t proizvoljno odabran kompleksni broj. Promotrimo funkciju

$$F_t(z) = \frac{P(tz) - P(t)}{z-1}.$$

Funkcija $P(tz) - P(t)$ je polinom s varijablom z stupnja n. Njezina nultočka je $z = 1$, pa kad se polinom $P(tz) - P(t)$ podijeli polinomom $z - 1$, opet se dobije polinom stupnja $n - 1$. Dakle, $F_t(z)$ je polinom stupnja $n - 1$.

Prisjetimo se Lagrangove interpolacijske formule. U općenitoj situaciji, imamo zadano n parova brojeva $(z_1, y_1), \ldots, (z_n, y_n)$, gdje su prve koordinate međusobno različiti brojevi. Lagrangeov interpolacijski polinom je polinom T stupnja najviše $n - 1$ za koji vrijedi $T(z_i) = y_i,\ i = 1, \ldots, n$ te je dan formulom

$$T(z) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{(z-z_1)\ldots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}{(z_k-z_1)\ldots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}. \tag{2.2}$$

U ovome dokazu ulogu polinoma T iz formule (2.2) ima polinom $F_t(z)$, vrijednosti y_k su jednake $F_t(z_k)$, a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ su upravo brojevi iz pretpostavke leme, tj. brojevi koji su nultočke polinoma $z^n + a$, $a \neq 0, -1$. Dakle,

$$F_t(z) = \sum_{k=1}^{n} F_t(z_k)\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}{(z_k-z_1)\ldots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}. \tag{2.3}$$

[1] Paul Erdős (Budimpešta 1913.-Varšava 1996.)
Peter D. Lax (Budimpešta 1926.)

Upravo koristeći činjenicu da su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nultočke od $z^n + a$, preuredit ćemo razlomke koji se javljaju u sumi. Prema osnovnom teoremu algebre polinom $z^n + a$ možemo prikazati u obliku produkta na sljedeći način

$$z^n + a = (z - z_1)\ldots(z - z_n),$$

pri čemu su $z_1, z_2 \ldots, z^n$ nultočke polinoma $z^n + a$.
Podijelimo gornji izraz sa $(z - z_k)$ i dobijemo:

$$(z - z_1)\ldots(z - z_{k-1})(z - z_{k+1})\ldots(z - z_n) = \frac{z^n + a}{z - z_k}. \tag{2.4}$$

Promatrajmo $(z - z_1)\ldots(z - z_n)$ kao funkciju s varijablom z, tj.

$$y(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_n)$$

Istaknimo na desnoj strani faktor $(z - z_k)$, a produkt ostalih označimo sa $g(z)$, tj.

$$y(z) = (z - z_k) \cdot g(z), \quad \text{gdje je} \quad g(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_{k-1})(z - z_{k+1})\ldots(z - z_n).$$

Derivirajmo y i u dobivenu formulu uvrstimo broj z_k:

$$y'(z) = g(z) + g'(z)(z - z_k).$$

Uvrštavanjem $z = z_k$ dobivamo:

$$\begin{aligned} y'(z_k) &= g(z_k) + g'(z_k) \cdot 0 \\ y'(z_k) &= g(z_k) \\ y'(z_k) &= (z_k - z_1)\ldots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\ldots(z_k - z_n). \end{aligned} \tag{2.5}$$

S druge strane, znamo da je $y(z) = z^n + a$. Kad deriviramo y dobivamo:

$$y'(z) = nz^{n-1}$$

pa uvrštanjem $z = z_k$ dobivamo

$$y'(z_k) = nz_k^{n-1}. \tag{2.6}$$

Izjednačavanjem izraza u (2.5) i (2.6) dobivamo

$$nz_k^{n-1} = (z_k - z_1)\ldots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\ldots(z_k - z_n). \tag{2.7}$$

Kad formule iz (2.4) i (2.7) uvrstimo u (2.2) dobivamo

$$F_t(z) = \sum_{k=1}^{n} F_t(z_k)\frac{z^n + a}{nz_k^{n-1}(z - z_k)}.$$

Ovaj se izraz može još transformirati budući da znamo da je $z_k^n + a = 0$, odakle slijedi da je

$$z_k^{n-1} \cdot z_k + a = 0, \; z_k^{n-1} = -\frac{a}{z_k}$$

pa dobivamo

$$F_t(z) = \frac{1}{na} \sum_{k=1}^{n} F_t(z_k) \frac{z_k(z^n + a)}{z_k - z}.$$

Budući da je $F_t(z)$ polinom, on je neprekidan u 1 pa vrijedi

$$F_t(1) = \lim_{z \to 1} F_t(z).$$

Tada imamo:

$$F_t(1) = \lim_{z \to 1} \frac{P(tz) - P(t)}{z - 1} = \lim_{z \to 1} \frac{P'(tz) \cdot t}{1} = tP'(t),$$

gdje smo koristili L'Hospitalovo pravilo.
Dobivamo

$$\begin{aligned} tP'(t) &= \frac{1}{na} \sum_{k=1}^{n} F_t(z_k) \frac{z_k(1+a)}{z_k - 1} = \frac{1+a}{na} \sum_{k=1}^{n} \left(P(tz_k) - P(t)\right) \frac{z_k}{(z_k-1)^2} \\ &= \frac{1+a}{na} \sum_{k=1}^{n} P(tz_k) \frac{z_k}{(z_k-1)^2} - \frac{(1+a)P(t)}{na} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Budući da je ovaj račun vrijedio za bilo koji polinom P stupnja n, vrijedi i za polinom t^n.
Ako koristimo $P(t) = t^n$ u izrazu (2.8) dobivamo

$$t \cdot nt^{n-1} = \frac{1+a}{na} \sum_{k=1}^{n} t^n z_k^n \frac{z_k}{(z_k-1)^2} - \frac{(1+a)t^n}{na} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2}.$$

Podijelimo li gornju nejednakost s t^n i iskoristimo u prvoj sumi $z_k^n = -a$ dobivamo:

$$\begin{aligned} n &= \frac{1+a}{na} \sum_{k=1}^{n} \frac{-az_k}{(z_k-1)^2} - \frac{1+a}{na} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2} \\ n &= \frac{1+a}{na} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2} (-a-1) \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2} &= \frac{-na}{(1+a)^2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Kombiniranjem izraza (2.8) i (2.9) dobivamo (2.1), što zapravo dokazuje ovu lemu. ∎

Lema 2.5. *Ako je P polinom stupnja n, tada*

$$|P'(z)| + |nP(z) - zP'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)| \quad za \quad |z| = 1. \tag{2.10}$$

Dokaz

Neka je a bilo koji kompleksan broj različit od -1 i 0 takav da $|a| = 1$. Tada su nultočke z_k od $z^n + a$ jediničnog modula i $z_k \neq 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Iz izraza (2.1) za $|t| = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned}
|atP'(t) + tP'(t) - nP(t)| &= |(1+a)tP'(t) - nP(t)| \\
&= \left| \frac{(1+a)^2}{na} \sum_{k=1}^{n} P(tz_k) \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right| \\
&\leq \left| \frac{(1+a)^2}{na} \right| \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right| \max_{|t|=1} |P(t)| \\
&= \max_{|t|=1} |P(t)| \cdot \left| \frac{(1+a)^2}{na} \right| \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} \right|.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dokažimo jednu općenitu tvrdnju: ako je $|z| = 1$ i $z \neq 1$, tada je $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ negativan realan broj. Dokaz provodimo koristeći trigonometrijski zapis broja z.
Neka je $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(z-1)^2} &= \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{(\cos\varphi - 1 + i\sin\varphi)^2} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\left(-2\sin^2\frac{\varphi}{2} + i2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(-\cos\varphi - i\sin\varphi\right)} = \frac{-1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}},
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili trigonometrijske identitete: $\sin x = 2\sin x \cos x$, $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
Dobili smo $\dfrac{z}{(z-1)^2} = \dfrac{-1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ što je očito negativan realan broj.
Kad u tu jednakost stavimo $z = -a$, dobivamo

$$-\frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{-a}{(-a-1)^2} = -\frac{a}{(a+1)^2},$$

tj. $\dfrac{(1+a)^2}{a}$ je pozitivan broj.

Iz toga svega zaključujemo po (2.9) sljedeće

$$\left|\frac{(1+a)^2}{na}\right|\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{(z_k-1)^2}\right| = -\frac{(1+a)^2}{na}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(z_k-1)^2} = \frac{(1+a)^2}{a}\cdot\frac{na}{(1+a)^2} = n.$$

Iz (2.11) slijedi

$$|atP'(t) + tP'(t) - nP(t)| \leq n \max_{|t|=1} |P(t)| \tag{2.12}$$

za $|t| = 1$, $|a| = 1$, $a \neq -1$.
Ako je $a = -1$, tada za $|t| = 1$ imamo:

$$\begin{aligned} |atP'(t) + tP'(t) - nP(t)| &= |-nP(t)| \\ &= n|P(t)| \\ &\leq n \max_{|t|=1} |P(t)|, \end{aligned}$$

tj. nejednakost (2.12) vrijedi za sve a takve da je $|a| = 1$.

Razmotrimo sad jedan postupak za proizvoljne brojeve z_1 i z_2, a koji ćemo upotrijebiti u specijalnom slučaju kad je $z_1 = tP'(t)$ i $z_2 = nP(t) - tP'(t)$. Kad broj z_1 pomnožimo s brojem a, $|a| = 1$, tada modul broja az_1 ostaje jednak modulu od z_1, a argument od az_1 jednak je argumentu od z_1 uvećanom za argument od a. Dakle, geometrijski gledano, množenje broja a, $|a| = 1$ pomiče točku z_1 po kružnici $|z| = |z_1|$. Odaberimo broj a, $|a| = 1$, tako da se točka z_1 pomakne u položaj az_1 tako da točke $az_1, 0$ i z_2 leže na istom pravcu pri čemu je ishodište između točaka az_1 i z_2. Tada je $|az_1 - z_2| = |az_1| + |z_2|$.
Vratimo se u dokaz leme. Prema upravo provedeneoj diskusiji, za točke $z_1 = tP'(t)$ i $z_2 = nP(t) - tP'(t)$ možemo izabrati broj a, $|a| = 1$, takav da je

$$|atP'(t) + tP'(t) - nP(t)| = |P'(t)| + |nP(t) - tP'(t)|,$$

dobivamo

$$|P'(z)| + |nP(z) - zP'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)| \quad \text{za} \quad |z| = 1.$$

Time je dokazana lema. ∎

Leme 2.4 i 2.5 su pomoćne tvrdnje potrebne za dokaz sljedećeg teorema poznatog pod nazivom Erdős-Laxov teorem.

Teorem 2.6. *Neka je P polinom stupnja n koji nema nultočke u otvorenom krugu $|z| < 1$ i za koji je* $\max_{|z|=1} |P(z)| = 1$. *Tada vrijedi*

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq \frac{n}{2}.$$

Dokaz

Budući da polinom P nema nultočaka u otvorenom krugu $|z| < 1$, možemo ga zapisati

$$P(z) = c\prod_{j=1}^{n}(z - w_j),$$

za $|w_j| \geq 1,\ j = 1, 2, \ldots, n$, pri čemu su $w_1, w_2, \ldots, w_n$ nultočke od P.
Ocijenimo izraz $\mathrm{Re}\dfrac{z}{z - w_j}$ pri čemu je z s jedinične kružnice i z nije nultočka. Tada je $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, te uz oznaku $w_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\frac{z}{z - w_j} &= \mathrm{Re}\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - r_j\cos\theta_j + i(\sin\varphi - r_j\sin\theta_j)} \\
&= \mathrm{Re}\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - r_j\cos\theta_j + i(\sin\varphi - r_j\sin\theta_j)} \cdot \frac{(\cos\varphi - r\cos\theta_j) - i(\sin\varphi - r\sin\theta_j)}{(\cos\varphi - r\cos\theta_j) - i(\sin\varphi - r\sin\theta_j)} \\
&= \frac{\cos\varphi(\cos\varphi - r_j\cos\theta_j) + \sin\varphi(\sin\varphi - r_j\sin\theta_j)}{\cos^2\varphi - 2r_j\cos\varphi\cos\theta_j + r_j^2\cos^2\theta_j + \sin^2\varphi - 2r_j\sin\varphi\sin\theta_j + r_j^2\sin^2\theta_j} \\
&= \frac{1 - r_j\cos\varphi\cos\theta_j - r_j\sin\varphi\sin\theta_j}{1 + r_j^2 - 2r_j\cos\varphi\cos\theta_j - 2r_j\sin\varphi\sin\theta_j} \\
&\leq \frac{1 - r_j\cos\varphi\cos\theta_j - r_j\sin\varphi\sin\theta_j}{2 - 2r_j\cos\varphi\cos\theta_j - 2r_j\sin\varphi\sin\theta_j} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili da je $r_j \geq 1$. Dakle, $\mathrm{Re}\dfrac{z}{z - w_j} \leq \dfrac{1}{2}$.
Korištenjem formule za derivaciju produkta od n funkcija

$$(f_1 f_2 \ldots f_n)' = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' f_3 \ldots f_n + \ldots f_1 f_2 \ldots . f_n'$$

dobivamo da je

$$P'(z) = c(z - w_2)\ldots(z - w_n) + c(z - w_1)(z - w_3)\ldots(z - w_n) + \ldots + c(z - w_1)\ldots c(z - w_{n-1}).$$

Kad taj identitet pomnožimo sa z i podijelimo s $P(z) = c(z - w_1)\ldots(z - w_n)$ dobijemo

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{z \cdot c\sum_{j=1}^{n}(z - w_1)\ldots(z - w_{j-1})(z - w_{j+1})\ldots(z - w_n)}{P(z)}$$

$$= cz\sum_{j=1}^{n}\frac{(z-w_1)\dots(z-w_{j-1})(z-w_{j+1})\dots(z-w_n)}{P(z)}$$
$$= cz\sum_{j=1}^{n}\frac{(z-w_1)\dots(z-w_{j-1})(z-w_{j+1})\dots(z-w_n)}{c(z-w_1)\dots(z-w_{j-1})(z-w_j)(z-w_{j+1})\dots(z-w_n)}$$
$$= z\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-w_j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{z}{z-w_j}$$

Realni dio svakog pribrojnika u sumi je manji ili jednak $\frac{1}{2}$ pa je

$$\mathrm{Re}\frac{zP'(z)}{nP(z)} = \frac{1}{n}\left(\mathrm{Re}\frac{z}{z-w_1} + \dots + \mathrm{Re}\frac{z}{z-w_n}\right) \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Označimo sa $w = \dfrac{zP'(z)}{nP(z)}$. Vrijedi Re $w \le \frac{1}{2}$. Dokazat ćemo da je tada $|w| \le |1-w|$. Kvadriramo li prethodnu nejednakost dobijemo ekvivalentnu:

$$|w|^2 \le |1-w|^2 \iff (\mathrm{Re}\, w)^2 + (\mathrm{Im}\, w)^2 \le (1-\mathrm{Re}\, w)^2 + (\mathrm{Im}\, w)^2$$
$$\iff (\mathrm{Re}\, w)^2 \le 1 - 2\mathrm{Re}\, w + (\mathrm{Re}\, w)^2 \iff \mathrm{Re}\, w \le \frac{1}{2}$$

što je istinito.
Time smo došli do

$$\left|\frac{zP'(z)}{nP(z)}\right| \le \left|1 - \frac{zP'(z)}{nP(z)}\right|, \quad |z| = 1$$

za sve točke z koje nisu nultočke od $P(z)$. Množenjem sa $|nP(z)|$ dobivamo

$$|P'(z)| \le |nP(z) - zP'(z)| \tag{2.13}$$

za sve točke z koje nisu nultočke od $P(z)$. Budući da nejednakost (2.13) trivijalno vrijedi za nultočke z polinoma P na jediničnoj kružnici, slijedi

$$|P'(z)| \le |nP(z) - zP'(z)| \quad \text{za} \quad |z| = 1. \tag{2.14}$$

Kombinirajući nejednakost (2.14) i lemu 2.5 dobivamo

$$|P'(z)| \le \frac{n}{2}\max_{|z|=1}|P(z)| \quad \text{za} \quad |z| = 1,$$

čime je i dokazan Erdős-Lax teorem 2.6. ■

Polinomi koji se javljaju u Erdős-Lax teoremu imaju nultočke u području $|z| \ge 1$, tj. u

uniji vanjštine jediničnog kruga i jedinične kružnice.
O polinomima čije se nultočke nalaze u krugu $|z| \leq 1$ govori sljedeći teorem kojeg je 1939. dokazao P. Turán[1] u [6].

Teorem 2.7 (Turánova nejednakost)**.** *Neka je P polinom stupnja n čije nultočke se nalaze u krugu $|z| \leq 1$. Tada vrijedi*

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|\,.$$

Dokaz
Ukoliko nultočke polinoma P označimo sa $w_1, w_2, \ldots, w_n$, tada je $|w_j| \leq 1$ za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$ i

$$P(z) = c \prod_{j=1}^{n} (z - w_j)$$

Već smo pokazali da za brojeve z koji nisu nultočke od P vrijedi

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{z}{z - w_j}.$$

Neka je z broj sa jedinične kružnice, tj. $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Istom metodom kao u dokazu Erdős-Laxovog teorema dobiva se da vrijedi

$$\mathrm{Re} \frac{z}{z - w_j} \geq \frac{1}{2}.$$

Sad ćemo ocijeniti razlomak $\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|$ gdje je z sa jedinične kružnice i z nije nultočka od P.

$$\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right| = \left|\frac{zP'(z)}{P(z)}\right| \geq \mathrm{Re}\left(\frac{zP'(z)}{P(z)}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{z}{z - w_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re} \frac{z}{z - w_j} \geq \frac{1}{2} n.$$

Dakle, ako z nije nultočka od P, $|z| = 1$, tada je

$$|P'(z)| \geq \frac{1}{2} n |P(z)|. \tag{2.15}$$

Ako je z nultočka od P, tada je $P(z) = 0$, pa nejednakost trivijalno vrijedi.
Dakle, za sve točke z sa jedinične kružnice vrijedi

$$|P'(z)| \geq \frac{n}{2} |P(z)|.$$

[1] Pál Turán (Budimpešta, 1910.-Budimpešta, 1976.

Neka je z_0 točka u kojoj se upravo postiže $\max_{|z|=1} |P(z)|$. Tada je

$$|P'(z_0)| \geq \frac{n}{2} |P(z_0)| = \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Ujedno, vrijedi i $|P'(z_0)| \leq \max\limits_{|z|=1} |P'(z)|$, pa je time dokazana tvrdnja teorema. ■

Sljedeći teorem 2.8 nam daje profinjenje Bernsteinove nejednakosti, a objavljen je u [1] zajedno s teoremom 2.12 i pripadajućim lemama i korolarima.

Teorem 2.8. *Ako je polinom P stupnja n, tada za svaki realni α vrijedi*

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq \frac{n}{2} \left(M_\alpha + M_{\alpha+\pi}\right), \tag{2.16}$$

gdje je

$$M_\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \left| P\left(e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{n}}\right) \right|. \tag{2.17}$$

Do $M_{\alpha+\pi}$, u jednakosti (2.17)*, dolazimo jednostavnom zamjenom α s $\alpha + \pi$.*

Prije dokaza teorema 2.8 obrazložimo zašto je (2.16) profinjenje Bernsteinove nejednakosti.
Budući da su brojevi $z = e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{n}}$ brojevi na kružnici $|z| = 1$, skup

$$S = \left\{ z = e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{n}} : k = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

je podskup skupa $K = \{z : \; |z| = 1\}$. Tada je $\max\limits_{w \in S} |P(w)| \leq \max\limits_{z \in K} |P(z)|$, tj. $M_\alpha \leq \max\limits_{|z|=1} |P(z)|$.
Analogno, $M_{\alpha+\pi} \leq \max\limits_{|z|=1} |P(z)|$, pa iz teorema 2.8 imamo

$$\begin{aligned} \max_{|z|=1} |P'(z)| &\leq \frac{n}{2} \left(M_\alpha + M_{\alpha+\pi}\right) \\ &\leq n \max_{|z|=1} |P(z)|. \end{aligned}$$

Također, prije dokaza teorema 2.8 iskažimo i dokažimo dvije leme koje će nam biti potrebne pri dokazivanju.

Lema 2.9. *Neka je P polinom stupnja n i $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nultočke polinoma $z^n + a$. Ako je a bilo koji kompleksni broj različit od nultočaka $z_1, z_2, \ldots, z_n$, tada za svaki kompleksni broj t i $t^n + a \neq 0$ vrijedi*

$$P'(t) = \frac{nt^{n-1}}{a + t^n} P(t) + \frac{a + t^n}{na} \sum_{k=1}^{n} P(z_k) \frac{z_k}{(z_k - t)^2} \tag{2.18}$$

i

$$\frac{1}{na} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k t}{(z_k - t)^2} = -\frac{nt^n}{(a + t^n)^2}. \tag{2.19}$$

Dokaz
Za fiksni broj $t \in \mathbb{C}$, $t^n + a \neq 0$, definira se funkcija

$$F_t(z) = \frac{P(z) - P(t)}{z - t}.$$

Označimo brojnik sa $\beta(z)$. Funkcija β je polinom n-tog stupnja u varijabli z i vrijedi:

$$\beta(t) = P(t) - P(t) = 0,$$

tj. t je polinom $(n-1)$-ovog stupnja. Za nju vrijedi

$$F_t(z) = \frac{1}{na} \sum_{k=1}^{n} F_t(z_k) \frac{z_k (z^n + a)}{z_k - z}. \tag{2.20}$$

$F_t(z)$ je polinom, pa je neprekidan u $z = t$, tj. vrijedi

$$F_t(t) = \lim_{z \to t} F_t(z) = \lim_{z \to t} \frac{P(z) - P(t)}{z - t} = P'(t)$$

pa kad u (2.20) uvrstimo $z = t$ i $F_t(t) = P'(t)$ dobivamo:

$$P'(t) = \frac{1}{na} \sum_{k=1}^{n} F_t(z_k) \frac{z_k (t^n + a)}{z_k - t} = \frac{1}{na} \sum_{k=1}^{n} (P(z_k) - P(t)) \frac{z_k (t^n + a)}{(z_k - t)^2} \tag{2.21}$$

Primijenimo tu formulu na funkciju $P(t) = t^n$ i iskoristimo $z_k^n = -a$:

$$\begin{aligned} nt^{n-1} &= \frac{1}{na} \sum_{k=1}^{n} (z_k^n - t^n) \frac{z_k (t^n + a)}{(z_k - t)^2} \\ &= \frac{1}{na} \sum_{k=1}^{n} (-a - t^n) \frac{z_k (t^n + a)}{(z_k - t)^2} \\ &= -\frac{1}{na} (a + t^n)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - t)^2}. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$\frac{1}{na} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - t)^2} = -\frac{nt^{n-1}}{(t^2 + a)^2}$$

što je formula (2.20). Kad se (2.20) uvrsti u (2.21) dobije se (2.18). ■

Lema 2.10. *Neka je P polinom stupnja n i neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nultočke polinoma $z^n + e^{i\beta}$, gdje je β bilo koji realni broj, tada vrijedi*

$$\left| z^{n-1} (zP'(z) - nP(z)) + e^{i\beta} P'(z) \right| \leq n \max_{1 \leq k \leq n} |P(z_k)|, \ |z| = 1. \tag{2.22}$$

Dokaz
Broj $e^{i\beta}$ označimo sa a.
Pomnožimo li jednakost (2.18) sa $a+t^n$ dobivamo

$$(a+t^n)\,P'(t) = nt^{n-1}P(t) + \frac{(a+t^n)^2}{na}\sum_{k=1}^{n} P\,(z_k)\,\frac{z_k}{(z_k-t)^2}$$

$$(a+t^n)\,P'(t) - nt^{n-1}P(t) = \frac{(a+t^n)^2}{na}\sum_{k=1}^{n} P(z_k)\frac{z_k}{(z_k-t)^2}.$$

Primijenimo li nejednakost trokuta dobivamo

$$\begin{aligned}
\left|(a+t^n)\,P'(t) - nt^{n-1}P(t)\right| &= \left|\frac{(a+t^n)^2}{na}\right|\cdot\left|\sum_{k=1}^{n} P(z_k)\frac{z_k}{(z_k-t)^2}\right| \\
&\le \left|\frac{(a+t^n)^2}{na}\right|\cdot\sum_{k=1}^{n} |P(z_k)|\left|\frac{z_k}{(z_k-t)^2}\right| \\
&\le \left|\frac{(a+t^n)^2}{na}\right|\cdot\sum_{k=1}^{n} \max|P(z_k)|\left|\frac{z_k}{(z_k-t)^2}\right| \\
&= \left|\frac{(a+t^n)^2}{na}\right|\cdot\max|P(z_k)|\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{(z_k-t)^2}\right|. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

U dokazu leme 2.5 dokazali smo da je broj $\frac{z}{(z-1)^2}$ negativan ako je $|z|=1,\ z\neq 1$. Kad umjesto z stavimo $\frac{z}{t}$ gdje je $|z|=|t|=1,\ z\neq t$ dobijemo

$$\frac{\frac{z}{t}}{\left(\frac{z}{t}-1\right)^2} = \frac{zt}{(z-t)^2}$$

i to je negativan broj prema tvrdnji iz dokaza leme 2.5.
Također, u dokazu leme 2.5 dokazano je da je broj $\frac{(1+a)^2}{a}$ ako je $a\neq 0,\ -1,\ |a|=1$, pozitivan. Kad u taj razlomak umjesto a stavimo $\frac{a}{t^n}$ gdje je $|a|=1,\ |t|=1,\ a\neq 0,\ -a\neq t^n$, dobijemo da je broj

$$\frac{\left(\frac{a}{t^n}+1\right)^2}{\frac{a}{t^n}} = \frac{(a+t^n)^2}{at^n}$$

također pozitivan.
Sad za $|t|=|a|=1$ i $t^n\neq -a$ izračunajmo sumu u (2.23):

$$\left|\frac{(a+t^n)^2}{na}\right|\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{(z_k-t)^2}\right| = \left|\frac{(a+t^n)^2}{nat^n}\right|\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{tz_k}{(z_k-t)^2}\right| = -\frac{(a+t^n)^2}{nat^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{tz_k}{(z_k-t)^2} = n,$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti upotrijebili (2.20).
Dakle, kad dobiveno iskoristimo u (2.23) dobijemo:

$$\left|(a+t^n)P'(t)-nt^{n-1}P(t)\right| \leq n\max_{1\leq k\leq n}|P(z_k)| \quad \text{za} \quad |t|=1, |a|=1, a+t^n\neq 0.$$

Ta nejednakost vrijedi i kad je $t = z_k$, pa kad se preuredi lijeva strana dobije se upravo nejednakost (2.22) koju je i trebalo dokazati. ∎

Nakon što smo dokazali prethodne dvije leme, dokažimo sad teorem 2.8.

Dokaz
Broj $2|P'(z)|$ napisat ćemo tako da možemo iskoristiti lemu 2.10.

$$\begin{aligned}
2|P'(z)| - \left|2e^{i\alpha}P'(z)\right| &= \left|e^{i\alpha}P'(z)+z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)+e^{i\alpha}P'(z)-z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)\right| \\
&\leq \left|e^{i\alpha}P'(z)+z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)\right| + \left|e^{i\alpha}P'(z)-z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)\right| \\
&= \left|z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)+e^{i\alpha}P'(z)\right| + \left|z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)-e^{i\alpha}P'(z)\right| \\
&= \left|z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)+e^{i\alpha}P'(z)\right| + \left|z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)-e^{i(\alpha+\pi)}P'(z)\right| \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Prema lemi 2.10 prvi pribrojnik u gornjem izrazu je manji ili jednak od $n\max\limits_{1\leq k\leq n}|P(z_k)|$, gdje su z_k nultočke od $z^n+e^{i\alpha}$.
Dakle, $z_k^n+e^{i\alpha}=0$, $z_k=-e^{i\alpha}=e^{i(\alpha+\pi)}$. n-ti korijen broja $e^{i(\alpha+\pi}$ ima modul 1, a argument mu je $\frac{\alpha+\pi+2k\pi}{n}$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Ako uzmemo k iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ dobije se isti skup korijena.
Dakle, $z_k = e^{\frac{i(\alpha+\pi+2k\pi)}{n}}$, $k=1,2,\ldots,n$, a maksimum skupa

$$\left\{\left|P\left(e^{\frac{i(\alpha+\pi+2k\pi)}{n}}\right)\right| : k=1,2,\ldots,n\right\}$$

označen je sa $M_{\alpha+\pi}$.
Dakle,

$$\left|z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)+e^{i\alpha}P'(z)\right| \leq nM_{\alpha+\pi}.$$

Prema lemi 2.10, drugi pribrojnik u (2.24) je manji ili jednak $n\max\limits_{1\leq k\leq n}|P(z_k)|$, gdje su z_k nultočke od $z^n+e^{i(\alpha+\pi)}$.
Dakle, $z_k^n+e^{i(\alpha+\pi)}=0$, $z_k^n=-e^{i(\alpha+\pi)}=e^{i\alpha}$. n-ti korijen iz $e^{i\alpha}$ je $e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{n}}$, $k=0,1,\ldots,n-1$, a to je isti skup kad se uzme $k-1,\ldots,n$.
Maksimum skupa

$$\left\{\left|P\left(e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{n}}\right)\right| : k=1,2,\ldots,n\right\}$$

je označen sa M_α pa vrijedi

$$\left|z^{n-1}\left(nP(z)-zP'(z)\right)-e^{i(\alpha+\pi)}P'(z)\right| \leq nM_\alpha.$$

Konačno,

$$2\,|P'(z)| \leq nM_\alpha + nM_{\alpha+\pi}, \text{ tj.}$$
$$|P'(z)| \leq \frac{n}{2}\,(M_\alpha + nM_{\alpha+\pi})\,.$$

To znači da je i $\max\limits_{|z|=1} |P'(z)|$ manji ili jednak od $\frac{n}{2}\,(M_\alpha + M_{\alpha+\pi})$ što je i trebalo dokazati. ■

Ako uzmemo vrijednost $\alpha = 0$ u teoremu 2.8, dolazimo do sljedećeg korolara.

Korolar 2.11. *Ako je $P(z)$ polinom stupnja n, tada vrijedi*

$$\max_{|z|=1} |P'\,(z)| \leq \frac{n}{2}\left\{\max_{1\leq k\leq n}\left|P\left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)\right| + \max_{1\leq k\leq n}\left|P\left(e^{\frac{(1+2k)\pi i}{n}}\right)\right|\right\}.$$

Kao primjena teorema 2.8 slijedi teorem, koji je odgovarajuće poboljšanje izraza iz leme 2.1:

$$\max_{|z|=R>1} |P(z)| \leq R^n \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Teorem 2.12. *Neka je P polinom stupnja n. Za svaki realni α i $R > 1$ vrijedi*

$$\max_{|z|=1} |P(Rz) - P(z)| \leq \frac{R^n - 1}{2}\,(M_\alpha + M_{\alpha+\pi})\,, \tag{2.25}$$

gdje je M_α definiran kao izraz (2.17).

Dokaz

Prema lemi 2.1 za polinom P stupnja n vrijedi da ako je $|P(z)| \leq M$ za $|z| = 1$, tada je

$$\max_{|z|=R} \leq MR^n,\ R > 1.$$

Primijenimo tu nejednakost za polinom P' koji je stupnja $n - 1$ i za $R = t \geq 1$. Tada je

$$|P'(z)| \leq \max_{|z|=t} |P'(z)| \leq Mt^{n-1},\ |z| = t,$$

gdje je $M = \max\limits_{|z|=1} |P'(z)|$.

Kad je $|z| = t$, tada z pišemo kao $z = te^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ pa gornja nejednakost glasi

$$\left|P'(te^{i\varphi}\right| \leq t^{n-1} \max_{|z|=1} |P'(z)| \leq \frac{nt^{n-1}}{2}\,(M_\alpha + M_{\alpha+\pi})$$

pri čemu smo u drugoj nejednakosti koristili tvrdnju teorema 2.8.
Računanjem integrala $\int_1^R e^{i\varphi} P'\left(te^{i\varphi}\right) dt$ dobivamo

$$\int_1^R e^{i\varphi} P'\left(te^{i\varphi}\right) dt = P\left(Re^{i\varphi}\right) - P\left(e^{i\varphi}\right).$$

Sad ocijenimo desnu stranu gornje jednakosti

$$\begin{aligned}
\left|P\left(Re^{i\varphi}\right) - P\left(e^{i\varphi}\right)\right| &= \left|\int_1^R e^{i\varphi} P'\left(te^{i\varphi}\right) dt\right| \leq \int_1^R \left|e^{i\varphi} P'\left(te^{i\varphi}\right)\right| dt \\
&= \int_1^R \left|P'\left(te^{i\varphi}\right)\right| dt \leq \int_1^R \frac{nt^{n-1}}{2} \left(M_\alpha + M_{\alpha+\pi}\right) dt \\
&= \frac{n}{2} \int_1^R t^{n-1} dt = \frac{R^n - 1}{2} \left(M_\alpha + M_{\alpha+\pi}\right),
\end{aligned}$$

a to je i trebalo dokazati. ∎

Korolar 2.13. *Ako je P polinom stupnja n, tada za sve* $R > 1$ *vrijedi*

$$\max_{|z|=R>1} |P(z)| \leq \frac{R^n - 1}{2} \left(M_0 + M_n\right) + \max_{|z|=1} |P(z)|$$

gdje je M_α *definiran kao izraz* (2.17) *za sve realne* α.

Također, još jedna posljedica teorema 2.12 dobije se primjenom (2.25) na polinom

$$Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)},$$

uz uvjet $|P(z)| = |Q(z)|$ za $|z| = 1$. To je upravo sljedeći korolar.

Korolar 2.14. *Neka je P polinom stupnja n. Za sve realne* α *i* $r \leq 1$ *vrijedi*

$$\max_{|z|=1} |P(rz) - r^n P(z)| \leq \frac{1 - r^n}{2} \left(M_\alpha + M_{\alpha+\pi}\right), \tag{2.26}$$

odnosno još preciznije

$$\max_{|z|=r<1} |P(z)| \leq \frac{1 - r^n}{2} \left(M_\alpha + M_{\alpha+\pi}\right) + r^n \max_{|z|=1} |P(z)|. \tag{2.27}$$

M_α *je definiran kao izraz* (2.17) *za sve* α.

Teorem 2.15. *Neka je P polinom stupnja n, koji nema nultočke unutar jediničnog otvorenog kruga* $|z| < 1$. *Za svaki realni* α *vrijedi*

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq \frac{n}{2}\left(M_\alpha^2 + M_{\alpha+\pi}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.28}$$

gdje je M_α *definirana izrazom* (2.17) *za svaki realni* α.

Prije dokaza ovog teorema iskazat ćemo i dokazati jednu pomoćnu lemu.

Lema 2.16. *Ako je P polinom stupnja n, tada za* $|z| = 1$ *i za svaki realni* α *vrijedi*

$$|P'(z)|^2 + |nP(z) - zP'(z)|^2 \leq \frac{n^2}{2}\left(M_\alpha^2 + M_{\alpha+\pi}^2\right), \tag{2.29}$$

gdje je $M_\alpha = \max_{1\leq k\leq n}\left|P\left(e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{n}}\right)\right|$.

Dokaz

Uzmemo li $\beta = \alpha$ u izrazu (2.22) dobivamo

$$\left|z^{n-1}\left(zP'(z) - nP(z)\right) + e^{i\alpha}P'(z)\right| \leq n\max_{1\leq k\leq n}\left|P\left(e^{\frac{i(\alpha+(1+2k)\pi)}{n}}\right)\right| = nM_{\alpha+\pi}. \tag{2.30}$$

Zatim uzmemo $\beta = \alpha - \pi$ u izrazu (2.22) te dobivamo

$$\left|z^{n-1}\left(zP'(z) - nP(z)\right) - e^{i\alpha}P'(z)\right| \leq n\max_{1\leq k\leq n}\left|P\left(e^{\frac{i(\alpha+2k\pi)}{n}}\right)\right| = nM_\alpha. \tag{2.31}$$

Kvadriramo li (2.30) i (2.31) i zbrojimo ih slijedi

$$\begin{aligned}\left|z^{n-1}\left(zP'(z) - nP(z)\right) + e^{i\alpha}P'(z)\right|^2 + \left|z^{n-1}\left(zP'(z) - nP(z)\right) - e^{i\alpha}P'(z)\right|^2 \\ \leq n^2\left(M_\alpha^2 + M_{\alpha+\pi}^2\right).\end{aligned} \tag{2.32}$$

Koristeći identitet

$$|A + B|^2 + |A - B|^2 = 2|A|^2 + 2|B|^2$$

za

$$A = z^{n-1}\left(zP'(z) - nP(z)\right) \quad \text{i} \quad B = e^{i\alpha}P'(z),$$

u (2.32) dobivamo

$$2\left(|zP'(z) - nP(z)|^2 + |P'(z)|^2\right) \leq n^2\left(M_\alpha^2 + M_{\alpha+\pi}^2\right)$$

$$|zP'(z) - nP(z)|^2 + |P'(z)|^2 \leq \frac{n^2}{2}\left(M_\alpha^2 + M_{\alpha+\pi}^2\right)$$

čime je lema dokazana. ■

Sada dokazujemo teorem 2.15.

Dokaz
Kao što smo vidjeli i u dokazu teorema 2.6, budući da polinom P nema nultočaka unutar kruga $|z| < 1$ dobivamo

$$|P'(z)| \leq |nP(z) - zP'(z)|, \quad |z| = 1. \tag{2.33}$$

Kombinirajući nejednakost (2.33) i (2.29) za $|z| = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} 2\,|P'(z)|^2 &\leq |P'(z)| + |nP(z) - zP'(z)|^2 \\ &\leq \frac{n^2}{2}\left(M_\alpha^2 + M_{\alpha+\pi}^2\right). \end{aligned}$$

Time je teorem dokazan. ■

Poglavlje 3

Rezultati za minimum modula polinoma i njegove derivacije

U prethodnom poglavlju razmatrali smo gornje granice skupa $\{|P'(z)| : |z| = 1\}$. Sad ćemo se pozabaviti donjim granicama tog skupa. Ovi su rezultati objavljeni u [2] i [4].

Teorem 3.1. *Ako je P polinom stupnja n kojemu su sve nultočke u krugu $|z| \leq 1$ onda vrijedi*

$$\min_{|z|=1} |P'(z)| \geq n \min_{|z|=1} |P(z)| \tag{3.1}$$

$$\min_{|z|=R>1} |P(z)| \geq R^n \min_{|z|=1} |P(z)|. \tag{3.2}$$

U objema nejednakostima jednakost vrijedi ako je $P(z) = me^{i\alpha}z^n,\ m \geq 0$.

Dokaz

Ako $P(z)$ ima bar jednu nultočku na kružnici $|z| = 1$, tada su nejednakosti (3.1) i (3.2) koje promatramo trivijalno dokazane. Naime, u tom slučaju je minimum modula polinoma P na jediničnoj kružnici (odnosno $|z| = 1$) jednak 0. Dakle, desna strana u obje nejednakosti iznosi 0, dok se na lijevoj strani nalazi nenegativan broj. Očito je da tada obje nejednakosti vrijede.

Preostalo je dokazati slučaj kada su sve nultočke od P u otvorenom krugu $|z| < 1$. Neka je α bilo koji kompleksni broj takav da je $|\alpha| < 1$. Tada definiramo funkciju g ovako: $g(z) = -\alpha m z^n$. Pokazat ćemo da polinomi P i g zadovoljavaju pretpostavke Rouchéovog teorema. Ustvari, treba samo provjeriti da je

$$|g(z)| < |P(z)|$$

za svaki z na jediničnoj kružnici. Izračunajmo $|g(z)|$. Vrijedi:

$$|g(z)| = |-\alpha m z^n| = |\alpha| \cdot m \cdot |z|^n = |\alpha| m < m.$$

Zadnja nejednakost vrijedi jer je α takav da mu je modul manji od 1. Budući da je m minimum od $|P|$ na jediničnoj kružnici imamo da je $m \leq |P(z)|$ za svaki $|z| = 1$, stoga vrijedi $|g(z)| < |P(z)|$ na jediničnoj kružnici. Prema Rouchéovom teoremu, funkcije P i $F = P + g$ imaju jednak broj nultočaka unutar jedinične kružnice. Budući da je P polinom stupnja n i da su sve njegove nultočke u otvorenom jediničnom krugu, slijedi da je i n nultočaka polinoma $F(z) = P(z) + g(z) = P(z) - \alpha m z^n$ unutar otvorenog jediničnog kruga. A budući da je F polinom stupnja n, te prema osnovnom teoremu algebre ima n nultočaka, zaključujemo da se sve njegove nultočke nalaze u otvorenom jediničnom krugu. Prema Gauss-Lucasovom teoremu polinom

$$F'(z) = P'(z) - n\alpha m z^{n-1}$$

ima sve nultočke unutar $|z| < 1$ za svaki kompleksni broj α s uvjetom $|\alpha| < 1$. Ta tvrdnja povlači

$$nm|z|^{n-1} \leq |P'(z)| \text{ za } |z| \geq 1.$$

Ako navedeni izraz ne bi bio istinit, tada bi postojala točka $z = z_0$, $|z_0| > 1$ takva da je

$$\left|nmz_0^{n-1}\right| > |P'(z_0)|.$$

Dakle, možemo uzeti $\alpha = \frac{P'(z_0)}{nmz_0^{n-1}}$. Onda je $|\alpha| < 1$ i $F'(z_0) = 0$. Dakle, funkcija F' ima nultočku z_0 koja se nalazi u vanjštini jediničnog kruga. To bi bila kontradikcija s $F'(z) \neq 0$ za $|z| \geq 1$. Otuda

$$|P'(z)| \geq nm|z|^{n-1} \text{ za } |z| \geq 1.$$

Ta nejednakost vrijedi i za točke na jediničnoj kružnici, tj. vrijedi: $|P'(z)| \geq nm$ za z takav da je $|z| = 1$. No, tada je i minimum od $|P'|$ veći ili jednak nm pa dobivamo

$$\min_{|z|=1} |P'(z)| \geq nm = n \min_{|z|=1} |P(z)|.$$

Time je dokazana nejednakost (3.1). U svrhu dokazivanja izraza (3.2) promatramo funkciju $Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$. $Q(z)$ ima sve nultočke u $|z| > 1$. Izračunajmo minimum od $|Q(z)|$ na jediničnoj kružnici. Za z takav da je $|z| = 1$ vrijedi:

$$|Q(z)| = |z^n| \left|\overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}\right| = \left|P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right|.$$

Budući da je $|z| = 1$, tada je $\left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$, tj. broj $\frac{1}{\overline{z}}$ je također broj sa jedinične kružnice, označimo ga s w. Dakle, imamo $|Q(z)| = |P(w)|$. Prema definiciji broja m, m je minimum svih brojeva $|P(w)|$ kad w leži na jediničnoj kružnici, a iz gornje jednakosti slijedi da je m i

minimum svih brojeva $|Q(z)|$ kad z leži na jediničnoj kružnici. Dakle, za svaki z s jedinične kružnice vrijedi $m \leq |Q(z)|$.
Budući da su sve nultočke od Q u vanjštini zatvorenog jediničnog kruga, slijedi da u zatvorenom jediničnom krugu funkcija Q nema nultočke pa je racionalna funkcija $\frac{m}{Q(z)}$ definirana na cijelom zatvorenom jediničnom krugu, a budući da je Q polinom, slijedi da je funkcija $\frac{m}{Q(z)}$ analitička u $|z| \leq 1$ i $\left|\frac{m}{Q(z)}\right| \leq 1$ za $|z| = 1$. Stoga po principu maksimuma modula slijedi da je $m \leq |Q(z)|$ za $|z| \leq 1$. Zamjenom z s $\frac{1}{z}$ uočavamo da je $z^n \overline{Q\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = P(z)$ zaključujemo da je $m|z|^n \leq |P(z)|$ za $|z| \geq 1$. Koristeći zapis kompleksnog broja u eksponencijalnom obliku $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $R \geq 1$ dobivamo

$$\left|P\left(Re^{i\theta}\right)\right| \geq mR^n,$$

pomoću čega naposljetku dobivamo

$$\min_{|z|=R>1} |P(z)| = \min_{|z|=1} |P(Rz)| \geq R^n \min |P(z)|.$$

Ovo dokazuje izraz (3.2), a samim time je potpuno dokazan teorem 3.1. ■

Prije iskaza sljedećeg teorema, dokazat ćemo jednu pomoćnu tvrdnju.

Lema 3.2. *Neka su P i h polinomi te neka je $R > 0$ takav da je $|h(z)| \geq R$ za $|z| = 1$. Ako za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $|\alpha| < 1$ i za svaki z takav da je $|z| = 1$ vrijedi:*

$$|P(z)| \leq |h(z) - \alpha R z^{k-1}|, \tag{3.3}$$

tada je

$$|P(z)| \leq |h(z)| - R, \quad |z| = 1. \tag{3.4}$$

Ako u (3.3) vrijedi drugi znak nejednakosti, tada vrijedi nejednakost

$$|P(z)| \geq |h(z)| + R.$$

Dokaz

Neka je z bilo koji broj s jedinične kružnice, tj. z je oblika $z = e^{i\varphi}$ pri čemu je φ argument od z, tj. broj iz intervala $[0, 2\pi\rangle$. Broj $h(z)$ zapišimo u obliku

$$|h(z)|e^{i\varphi_1}, \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi\rangle,$$

pri čemu je $|h(z)| \geq R$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\varphi_1 \geq \varphi$, jer ako vrijedi drugi znak nejednakosti, onda u daljnjem računu zamijenimo uloge ta dva argumenta.

Tvrdimo da postoji α iz jediničnog kruga takav da su točke $h(z)$ i αRz^{k-1} na istom polupravcu kroz ishodište, tj. imaju jednake argumente. Ako argument tog broja α označimo s φ_2, tada je

$$\varphi_2 \equiv \varphi_1 - (k-1)\varphi \pmod{2\pi}.$$

Provjerimo da $h(z)$ i αRz^{k-1} imaju jednake argumente.

$$\begin{aligned}
\arg(\alpha Rz^{k-1}) &\equiv \arg(\alpha) + \arg(R) + \arg(z^{k-1}) \pmod{2\pi} \\
&\equiv \varphi_2 + (k-1)\arg(z) \pmod{2\pi} \\
&\equiv \varphi_2 + (k-1)\varphi \pmod{2\pi} \\
&= \varphi_1 = \arg(h(z)).
\end{aligned}$$

Dakle, točke $h(z)$ i αRz^{k-1} nalaze se na istom polupravcu kroz ishodište. Njihova međusobna udaljenost jednaka je $|h(z) - \alpha Rz^{k-1}|$, a one su od ishodišta udaljene $|h(z)|$ i $|\alpha|R$. Budući da je $|\alpha| < 1$, slijedi $|\alpha|R < R \leq |h(z)|$, te dobivamo da je $|\alpha Rz^{k-1}| + |h(z) - \alpha Rz^{k-1}| = |h(z)|$, tj.

$$|h(z) - \alpha Rz^{k-1}| = |h(z)| - |\alpha|R.$$

Sad imamo nejednakosti $|P(z)| \leq |h(z) - \alpha Rz^{k-1}| = |h(z)| - |\alpha|R$, tj.

$$|P(z)| \leq |h(z)| - |\alpha|R.$$

Promijenimo li broju α modul (tako da i dalje ostane $|\alpha| < 1$), argument broja αRz^{k-1} se neće promijeniti, tj. točke αRz^{k-1} će i dalje ostati na polupravcu na kojem je $h(z)$.
Pustimo da $|\alpha|$ teži prema 1 i dobivamo da je

$$|P(z)| \leq |h(z)| - R,$$

što je i trebalo dokazati.
Za dokaz druge tvrdnje tražimo broj α_1 ($|\alpha_1| < 1$) takav da točke $\alpha_1 Rz^{k-1}$ i $h(z)$ leže na istom pravcu kroz ishodište, ali s različitih strana ishodišta. Argument broja α_1 označimo sa φ_3 i za njega vrijedi

$$\varphi_3 \equiv \pi + \varphi_1 - (k-1)\varphi \pmod{2\pi}.$$

Naime, za takav φ_3 vrijedi

$$\begin{aligned}
\arg(\alpha_1 Rz^{k-1}) &\equiv \arg(\alpha_1) + \arg(R) + \arg(z^{k-1}) \pmod{2\pi} \\
&\equiv \varphi_3 + 0 + (k-1)\arg(z) \pmod{2\pi} \\
&\equiv \pi + \varphi_1 - (k-1)\varphi + (k-1)\varphi \pmod{2\pi} \\
&\equiv \pi + \varphi_1 \pmod{2\pi} \\
&\equiv \pi + \arg(h(z)) \pmod{2\pi}.
\end{aligned}$$

Dakle, točke $\alpha_1 Rz^{k-1}$ i $h(z)$ nalaze se na istom pravcu kroz ishodište, a ishodište se nalazi između njih. Zamijetimo da se promjenom modula od α_1 ovaj zaključak neće promijeniti (samo će se točka $\alpha_1 Rz^{k-1}$ pomaknuti duž tog pravca).
Tada je

$$\left|h(z) - \alpha_1 Rz^{k-1}\right| = |h(z)| + \left|\alpha_1 Rz^{k-1}\right| = |h(z)| + |\alpha_1|R.$$

Iz nejednakosti $|P(z)| \geq \left|h(z) - \alpha_1 Rz^{k-1}\right|$ slijedi da je

$$|P(z)| \geq |h(z)| + |\alpha_1|\, R,$$

a kad pustimo da $|\alpha_1|$ teži k 1 dobivamo

$$|P(z)| \geq |h(z)| + R.$$

■

Teorem 3.3. *Ako je P polinom stupnja n koji nema nultočaka unutar otvorenog kruga $|z| < 1$, onda je*

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq \frac{n}{2}\left(\max_{|z|=1} |P(z)| - \min_{|z|=1} |P(z)|\right).$$

Dokaz

Ako definiramo $m = \min_{|z|=1} |P(z)|$, tada $m \leq |P(z)|$ za $|z| = 1$. Po pretpostavci teorema polinom P nema nultočaka unutar $|z| < 1$, odnosno sve njegove nultičke leže u $|z| \geq 1$. Neka je α kompleksni broj za koji vrijedi $|\alpha| < 1$. Kao i u dokazu prethodnog teorema definiramo funkciju $g(z) = -\alpha m$. Provjeravamo zadovoljavaju li polinomi g i P Rouchéov teorem, odnosno tvrdnju $|g(z)| < |P(z)|$, uz uvjet $m > 0$. Vrijedi sljedeće:

$$|g(z)| = |-\alpha m| = |-\alpha| \cdot |m| = |\alpha| \cdot m < m = \min_{|z|=1} |P(z)|.$$

Prema Rouchéovom teoremu, funkcije P i $F = P + g$ imaju jednak broj nultočaka unutar jedinične kružnice. Budući da je P polinom stupnja n i da su sve njegove nultočke izvan otvorenog jediničnog krugu, slijedi da je i n nultočaka polinoma $F(z) = P(z) + g(z) = P(z) - \alpha m$ izvan otvorenog jediničnog kruga. A budući da je F polinom stupnja n, te prema osnovnom teoremu algebre ima n nultočaka, zaključujemo da se sve njegove nultočke nalaze izvan otvorenog jediničnog kruga. Odnosno nema nultočaka unutar otvorenog jediničnog kruga $|z| < 1$.
Konačno, znamo da polinom $F(z) = P(z) - \alpha m$ nema nultočaka u $|z| < 1$. Stoga, ako su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nultočke od $F(z)$, tada znamo $|z_j| \geq 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ i također vrijedi

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{z}{z - z_j}.$$

Ova je tvrdnja detaljno dokazana u dokazu teorema 2.6. ■

U istom tom dokazu dokazali smo i ovu tvrdnju:

$$|F'(z)| \leq |nF(z) - zF'(z)| \quad \text{za} \quad |z| = 1. \tag{3.5}$$

Ako definiramo $Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$ i $G(z) = z^n \overline{F\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$, tada dobivamo $G(z) = Q(z) - \overline{\alpha} m z^n$, a i pokazat ćemo da vrijedi

$$|G'(z)| = |nF(z) - zF'(z)| \text{ za } |z| = 1.$$

Dokazujemo te tvrdnje. Krenimo od standardnog zapisa polinoma P, te pokažimo kako izgleda zapis polinoma Q i G. Imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \\
P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) &= a_n \frac{1}{\overline{z}^n} + a_{n-1} \frac{1}{\overline{z}^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{1}{\overline{z}} + a_0 \\
\overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} &= \overline{a_n} \frac{1}{z^n} + \overline{a_{n-1}} \frac{1}{z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1} \frac{1}{z} + \overline{a_0} \\
Q(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} &= \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z + \ldots + \overline{a_1} z^{n-1} + \overline{a_0} z^n.
\end{aligned}$$

Budući da je $F(z) = P(z) - \alpha m$, imamo:

$$\begin{aligned}
F(z) &= P(z) - \alpha m = a_n z^n + \ldots + a_0 - \alpha m \\
F\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) &= a_n \frac{1}{\overline{z}^n} + \ldots + a_0 - \alpha m \\
\overline{F\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} &= \overline{a_n} \frac{1}{z^n} + \ldots + \overline{a_0} - \overline{\alpha} m \\
G(z) = z^n \overline{F\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} &= \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z + \ldots + \overline{a_1} z^{n-1} + \overline{a_0} z^n - \overline{\alpha} m z^n \\
&= Q(z) - \overline{\alpha} m z^n,
\end{aligned}$$

čime je dokazana prva tvrdnja $G(z) = Q(z) - \overline{\alpha} m z^n$.

$$\begin{aligned}
nF(z) - zF'(z) &= na_n z^n + na_{n-1} z^{n-1} + \ldots + na_1 z + na_0 - \alpha mn \\
&\quad - z\Big(na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + 2a_2 z + a_1\Big) \\
&= a_{n-1} z^{n-1}\,(n - (n-1)) + a_{n-2} z^{n-2}(n - (n-2)) + \\
&\quad \ldots + a_1 z(n-1) + na_0 - \alpha mn \\
&= a_{n-1} z^{n-1} + 2a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + (n-1)a_1 z + na_0 - \alpha mn \\
&= z^{n-1}\Big[a_{n-1} + 2a_{n-2}\frac{1}{z} + \ldots + (n-1)a_1 \frac{1}{z^{n-2}} + na_0 \frac{1}{z^{n-1}} - \frac{\alpha mn}{z^{n-1}}\Big] \\
&= z^{n-1}\Big[a_{n-1} + 2a_{n-2}\overline{z} + \ldots + (n-1)a_1 \overline{z}^{n-2} + na_0 \overline{z}^{n-1} - \alpha mn \overline{z}^{n-1}\Big] \\
&= z^{n-1}\overline{\overline{a_{n-1}} + 2\overline{a_{n-2}} z + \ldots + (n-1)\overline{a_1} z^{n-2} + n\overline{a_0} z^{n-1} - \overline{\alpha} mn z^{n-1}} \\
&= z^{n-1}\overline{G'(z)},
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili svojstva konjugiranja i činjenicu da ako je $|z| = 1$, tada je $z \cdot \overline{z} = 1$, tj. $\frac{1}{z} = \overline{z}$.
Dobili smo $nF(z) - zF'(z) = z^{n-1}\overline{G'(z)}$.

$$|nF(z) - zF'(z)| = \left|z^{n-1}\overline{G'(z)}\right| = |z|^{n-1} \cdot \left|\overline{G'(z)}\right| = 1 \cdot \left|\overline{G'(z)}\right| = |G'(z)|\,,$$

jer kompleksni broj i njegov konjugirani broj imaju isti modul. Pomoću izraza (3.5) slijedi

$$|P'(z)| = |F'(z)| \leq |G'(z)| = \left|Q'(z) - \overline{\alpha} nm z^{n-1}\right| \tag{3.6}$$

za $|z| = 1$ i za svaki kompleksni broj α takav da $|\alpha| < 1$. Budući da sve nultočke od $Q(z)$ leže u $|z| \leq 1$, pomoću (3.1) za $|z| = 1$ dobivamo

$$|Q'(z)| \geq \min_{|z|=1} |Q'(z)| \geq n \min_{|z|=1} |P(z)| = nm.$$

Stavimo li u lemu 3.2 $h = Q'$, $P = P'$ i $R = nm$, dobivamo da je

$$|P'(z)| \leq |Q'(z)| - nm \quad \text{za } |z| = 1. \tag{3.7}$$

Budući da je P polinom stupnja n, tada prema lemi 2.5 vrijedi

$$|P'(z)| + |nP(z) - zP'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)| \quad \text{za } |z| = 1. \tag{3.8}$$

Budući da znamo

$$|Q'(z)| = |nP(z) - zP'(z)| \text{ za } |z| = 1$$

iz (3.8) slijedi

$$|P'(z)| + |Q'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)| \text{ za } |z| = 1. \tag{3.9}$$

Uz pomoć nejednakosti (3.7) i (3.9) dolazimo do

$$\begin{aligned} 2|P'(z)| &\leq |P'(z)| + |Q'(z)| - nm \\ &\leq n\left(\max_{|z|=1} |P(z)| - \min_{|z|=1} |P(z)|\right) \text{ za } |z| = 1, \end{aligned}$$

čime je dokazan teorem. ■

Teorem 3.4. *Ako je P polinom stupnja n koji nema nultočaka u otvorenom krugu* $|z| < 1$, *tada vrijedi*

$$\max_{|z|=R>1} |P(z)| \leq \left(\frac{R^n + 1}{2}\right) \max_{|z|=1} |P(z)| - \left(\frac{R^n - 1}{2}\right) \min_{|z|=1} |P(z)|$$

Dokaz

Neka je $M = \max_{|z|=1} |P(z)|$ i $m = \min_{|z|=1} |P(z)|$. Budući da je P polinom stupnja n i također nema nultočaka unutar $|z| < 1$, prema teoremu 3.3 znamo

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq \frac{n}{2}\,(M - m)\,.$$

Budući da za svaki polinom P stupnja n vrijedi $\max_{|z|=R>1} |P(z)| \leq R^n \max_{|z|=1} |P(z)|$, kad to svojstvo primijenimo na polinom P' stupnja $n-1$ dobivamo da za $z = re^{i\theta}$, $r \geq 1$ vrijedi:

$$|P'(z)| \leq \max_{|z|=r>1} |P'(z)| \leq r^{n-1} \max_{|z|=1} |P'(z)| \leq r^{n-1}\frac{n}{2}(M - m),$$

tj.

$$\left|P'\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{n}{2}\, r^{n-1}\,(M - m)\,. \tag{3.10}$$

Također, za svaki θ, $0 \leq \theta < 2\pi$ i $R > 1$ imamo

$$P\left(Re^{i\theta}\right) - P\left(e^{i\theta}\right) = \int_1^R e^{i\theta} P'\left(te^{i\theta}\right) dt.$$

Znajući da se $e^{i\theta}$ nalazi na jediničnoj kružnici i da je $t \in [1, R]$, tj. $t \geq 1$ možemo primijeniti (3.10) te dobivamo

$$\begin{aligned} \left|P\left(Re^{i\theta}\right) - P\left(e^{i\theta}\right)\right| &\leq \int_1^R \left|P'\left(te^{i\theta}\right)\right| dt \\ &\leq \frac{M-m}{2} \int_1^R nt^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{2}\,(R^n - 1)\,(M - m)\,, \end{aligned}$$

za svaki θ takav da $0 \le \theta < 2\pi$ i $R > 1$. Stoga slijedi

$$\begin{aligned}\left|P\left(Re^{i\theta}\right)\right| &= \left|\left(P\left(Re^{i\theta}\right) - P\left(e^{i\theta}\right) + P\left(e^{i\theta}\right)\right)\right| \\ &\le \left|P\left(Re^{i\theta}\right) - P\left(e^{i\theta}\right)\right| + \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right| \\ &\le \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right| + \frac{1}{2}(M-m)(R^n-1) \\ &\le M + \frac{1}{2}(R^n-1)(M-m),\end{aligned}$$

za svaki θ, $0 \le \theta < 2\pi$. Budući da je

$$M + \frac{1}{2}(M-m)(R^n-1) = \frac{R^n+1}{2}M - \frac{R^n-1}{2}m$$

slijedi

$$|P(z)| \le \frac{R^n+1}{2}M - \frac{R^n-1}{2}m, \tag{3.11}$$

za $z = Re^{i\theta}$.
Odnosno, iz (3.11) možemo zaključiti da vrijedi

$$\max_{|z|=R>1}|P(z)| \le \frac{R^n+1}{2}M - \frac{R^n-1}{2}m,$$

čime je dokazan teorem. ■

Teorem 3.5. *Ako je P polinom stupnja n koji ima sve nultočke unutar područja $|z| \le 1$ tada vrijedi*

$$\max_{|z|=1}|P'(z)| \ge \frac{n}{2}\left(\max_{|z|=1}|P(z)| + \min_{|z|=1}|P(z)|\right).$$

Dokaz

Neka je $m = \min_{|z|=1}|P(z)|$, tada je $m \le |P(z)|$ za $|z| = 1$. Znamo da sve nultočke od P leže u $|z| \le 1$ i neka je α kompleksni broj takav da $|\alpha| < 1$. Definiramo funkciju $g(z) = -\alpha m$ i provjeravamo vrijedi li pretpostavka Rouchéovog teorema za polinome P i g. Drugim riječima, provjeravamo tvrdnju $g(z) \le P(z)$, uz uvjet $m > 0$. Kao što je već pokazano u teoremu 3.3 vrijedi

$$|g(z)| = |-\alpha m| = |\alpha|\cdot|m| < m = \min_{|z|=1}|P(z)|.$$

Dakle polinom $F(z) = P(z) - \alpha m$ ima sve svoje nultočke u otvorenom krugu $|z| < 1$. Stoga, ako su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nultočke polinoma F, tada je $|z_j| \le 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ i vrijedi

$$\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}F'\left(e^{i\theta}\right)}{F\left(e^{i\theta}\right)} = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_j} \ge \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{n}{2},$$

za svaku točku $e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, koja nije nultočka od $F(z)$. Ovime dolazimo do izraza

$$\left|\frac{F'\left(e^{i\theta}\right)}{F\left(e^{i\theta}\right)}\right| \geq \operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}F'\left(e^{i\theta}\right)}{F\left(e^{i\theta}\right)} \geq \frac{n}{2},$$

za svaku točku $e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, koja nije nultočka od $F(z)$. Nadalje slijedi da je

$$\left|F'\left(e^{i\theta}\right)\right| \geq \frac{n}{2}\left|F\left(e^{i\theta}\right)\right|$$

za svaku točku $e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Vrijedi

$$|P'(z)| = |F'(z)| \geq \frac{n}{2}|F(z)| = \frac{n}{2}|P(z) - \alpha m| \text{ za } |z| = 1$$

i za svaki α, uz uvjet $|\alpha| < 1$. Primijenimo li lemu 3.2 uz oznake $P = P'$, $h(z) = \frac{n}{2}P(z)$, $R = \frac{mn}{2}$, $k = 1$ dobivamo da je

$$|P'(z)| \geq \frac{n}{2}\Big(|P(z)| + m\Big) \text{ za } |z| = 1,$$

što nam daje

$$\max_{|z|=1}|P'(z)| \geq \frac{n}{2}\left(\max_{|z|=1}|P(z)| + \min_{|z|=1}|P(z)|\right).$$

Time je gotov dokaz teorema. ■

Sad slijedi nekoliko rezultata iz članka [2] u kojima se također pojavljuje minimum funkcije $|P|$.

Teorem 3.6. *Neka je P polinom stupnja n, koji nema nultočaka u $|z| < k$, gdje je $k > 0$. Tada za $0 \leq rR \leq k^2$ i $r \leq R$ vrijedi*

$$\max_{|z|=r}|P(z)| \geq \left(\frac{r+k}{R+K}\right)^n \max_{|z|=R}|P(z)| + \left[1 - \left(\frac{r+k}{R+K}\right)^n\right] \min_{|z|=k}|P(z)|. \tag{3.12}$$

Dokaz

Po pretpostavci polinom $P(z)$ ima sve nultočke u području $|z| \geq k$, $k > 0$ i $m = \min_{|z|=k}|P(z)|$, stoga je $m \leq |P(z)|$ za $|z| \leq k$. Dokazat ćemo da za bilo koji dani kompleksni broj α uz uvjet $|\alpha| \leq 1$, polinom $F(z) = P(z) + \alpha m$ ima sve nultočke u $|z| \geq k$. Ako je $m = 0$, onda je $F(z) = P(z)$, a za P znamo da nema nultočke u $|z| < k$. Dakle, ima ih u $|z| \geq k$. Ako je $m > 0$, to znači da P nema nultočku u $|z| = k$, tj. sve su mu nultočke u $|z| > k$. Stoga je $\frac{m}{P(z)}$ holomorfna za $|z| \leq k$ i $\left|\frac{m}{P(z)}\right| \leq 1$ za $z = k$. Štoviše, $\frac{m}{P(z)}$ nije konstanta i stoga po principu maksimuma modula slijedi

$$m < |P(z)| \text{ za } |z| < k. \tag{3.13}$$

Pretpostavimo da $F(z) = P(z) + \alpha m$ ima neku nultočku u $|z| < k$ i označimo ju sa z_0, tada vrijedi

$$P(z_0) + \alpha m = F(z_0) = 0, \text{ tj. } P(z_0) = -\alpha m.$$

Odakle dobivamo

$$|P(z_0)| = |\alpha m| \leq m, \text{ jer je } |\alpha| \leq 1,$$

što je kontradikcija s (3.13). Iz toga zaključujemo da $F(z) = P(z) + \alpha m$ mora imati sve nultočke u području $|z| \geq k$. Ako su

$$R_1 e^{i\theta_1}, R_2 e^{i\theta_2}, \ldots, R_n e^{i\theta_n}$$

nultočke polinoma $F(z)$ tada $R_j \geq k$, $j = 1, 2, \ldots, n$, i također znamo da vrijedi

$$F(z) = C \prod_{j=1}^{n} \left(z - R_j e^{i\theta_j}\right).$$

Dakle, za svaki $0 \leq \theta < 2\pi$ vrijedi

$$\left|\frac{F\left(re^{i\theta}\right)}{F\left(Re^{i\theta}\right)}\right| = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{re^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}{Re^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}\right|. \tag{3.14}$$

Pokazat ćemo da je modul svakog faktora u produktu (3.14) veći ili jednak od $\dfrac{r + R_j}{R + R_j}$.
Prvo brojnik i nazivnik razlomka podijelimo sa $e^{i\theta}$ i razliku $\theta - \theta_j$ označimo s φ_j, tj. imamo

$$\frac{re^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}{Re^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}} = \frac{re^{i(\theta-\theta_j)} - R_j}{Re^{i(\theta-\theta_j)} - R_j} = \frac{re^{i\varphi_j} - R_j}{Re^{i\varphi_j} - R_j}.$$

Izračunamo modul brojnika:

$$\begin{aligned}\left|re^{i\varphi_j} - R_j\right|^2 &= \left|\left(r\cos\varphi_j - R_j\right) + ir\sin\varphi_j\right|^2 \\ &= \left(r\cos\varphi_j - R_j\right)^2 + \left(r\sin\varphi_j\right)^2 = r^2 + R_j^2 - 2rR_j\cos\varphi_j.\end{aligned}$$

Budući da je $\cos\varphi_j \geq -1$, dobivamo

$$\left|re^{i\varphi_j} - R_j\right|^2 \geq r^2 + R_j^2 + 2rR_j = \left(r + R_j\right)^2.$$

Za modul nazivnika na sličan način dobijemo:

$$\begin{aligned}\left|R^{i\varphi_j} - R_j\right|^2 &= R^2 + R_j^2 - 2RR_j\cos\varphi_j \\ &\leq R^2 + R_j^2 + 2RR_j \\ &= (R + R_j)^2\end{aligned}$$

Konačno, dobivamo

$$\left|\frac{re^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}{Re^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}\right| \geq \frac{r + R_j}{R + R_j}.$$

Budući da je $R_j \geq k$, za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$, iz izraza (3.14) slijedi, ako $r \leq R$ i $0 \leq rR \leq k^2$, sljedeće

$$\left|\frac{F\left(re^{i\theta}\right)}{F\left(Re^{i\theta}\right)}\right| \geq \prod_{j=1}^{n} \frac{r + R_j}{R + R_j} \geq \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n \tag{3.15}$$

za svaki θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Zamijenimo li $F(z)$ s $P(z) + \alpha m$ u izrazu (3.15) za svaki $0 \leq \theta < 2\pi$ dobivamo

$$\left|P\left(re^{i\theta}\right) + \alpha m\right| \geq \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n \left|P\left(Re^{i\theta}\right) + \alpha m\right|,$$

što daje sljedeći izraz

$$|P(rz) + \alpha m| \geq \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n \left\{|P(Rz)| - |\alpha m|\right\} \text{ za } |z| = 1.$$

Birajući argument od α, takav da $|\alpha| = 1$, slijedi za $|z| = 1$

$$|P(rz)| - m \geq \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n \left\{|P(Rz)| - m\right\} \text{ za } |z| = 1.$$

Odavde slijedi

$$|P(rz)| \geq \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n |P(Rz)| + \left\{1 - \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n\right\} \cdot m,$$

za $|z| = 1$, pa je

$$\max_{|z|=r} |P(z)| \geq \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n \max_{|z|=R} |P(z)| + \left\{1 - \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n\right\} \min_{|z|=k} |P(z)|$$

što je zapravo izraz (3.12) čime je i dokazan teorem. ■

Uvrstimo li $k = 1$ u prethodni teorem dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 3.7. *Ako je P polinom stupnja n koji nema nultočaka u* $|z| < 1$*, tada za* $0 \le r\rho \le 1$ *i* $r \le \rho$ *vrijedi*

$$\max_{|z|=r} |P(z)| \ge \left(\frac{r+1}{\rho+1}\right)^n \max_{|z|=R} |P(z)| + \left[1 - \left(\frac{r+1}{\rho+1}\right)^n\right] \min_{|z|=k} |P(z)|.$$

Lema 3.8. *Ako je P polinom stupnja n takav da su mu sve nultočke unutar* $|z| < k,\ k > 0$*, tada za* $rR \ge k^2$ *i* $r \le R$ *dobivamo*

$$|P(Rz)| \ge \left(\frac{R+k}{r+k}\right)^n |P(rz)|,\ |z| = 1. \tag{3.16}$$

Dokaz

Budući da sve nultočke $z_j = R_j e^{i\theta_j}$ polinoma P leže unutar $|z| \le k,\ k > 0$, pišemo

$$P(z) = C \prod_{j=1}^{n} \left(z - R_j e^{i\theta_j}\right),$$

gdje je $R_j \le k,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n$. Stoga, za $0 \le \theta < 2\pi$ dobivamo

$$\left|\frac{P\left(re^{i\theta}\right)}{P\left(Re^{i\theta}\right)}\right| = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{re^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}{Re^{i\theta} - R_j e^{i\theta_j}}\right| = \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{re^{i\left(\theta-\theta_j\right)} - R_j}{Re^{i\left(\theta-\theta_j\right)} - R_j}\right|. \tag{3.17}$$

Sada za $R \ge r$, $Rr \ge R_j^2$ i za svaki $0 \le \theta < 2\pi$ kao u dokazu teorema 3.6 dobivamo

$$\left|\frac{re^{i\left(\theta-\theta_j\right)} - R_j}{Re^{i\left(\theta-\theta_j\right)} - R_j}\right|^2 \le \left(\frac{r+R_j}{R+R_j}\right)^2.$$

Budući da je $R_j \le k,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n$, iz (3.17) slijedi da ako $r \le R$ i $rR \ge k^2$, onda vrijedi

$$\left|\frac{P\left(re^{i\theta}\right)}{P\left(Re^{i\theta}\right)}\right| \le \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{r+R_j}{R+R_j}\right) \le \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n.$$

Odakle množenjem s $\left|P\left(Re^{i\theta}\right)\right|$ dobivamo

$$\left|P\left(re^{i\theta}\right)\right| \le \left(\frac{r+k}{R+k}\right)^n \left|P\left(Re^{i\theta}\right)\right|.$$

Time je dokazana lema. ■

Teorem 3.9. *Ako je P polinom stupnja n koji ima sve nultočke unutar* $|z| \leq k,\ k \leq 1$. *Tada za* $rR \geq k^2$ *i* $r \leq R$, *vrijedi*

$$\max_{|z|=R} |P'(z)| \geq \frac{n\,(R+k)^{n-1}}{(r+k)^n} \left\{ \max_{|z|=r} |P(z)| + \min_{|z|=k} |P(z)| \right\}. \tag{3.18}$$

Dokaz

Neka je $m = \min_{|z|=k} |P(z)|$. Tada je $m \leq |P(z)|$ za $|z| = k$. Budući da sve nultočke od $P(z)$ leže unutar $|z| \leq k \leq 1$, za svaki kompleksni broj α, takav da $|\alpha| < 1$, slijedi (po Rouchéovom teoremu za $m > 0$) da polinom $G(z) = P(z) + \alpha m$ ima sve nultočke u $|z| \leq k$. Iz svega navedenog zaključujemo da $H(z) = G(Rz)$ ima sve nultočke unutar $|z| \leq \frac{k}{R} < 1$. Označimo li nultočke od $H(z)$, sa $z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n$ i tada je $|z_j| \leq \frac{k}{R} \leq 1$ za svaki $j = 1, 2, \ldots,\ n$ i vrijedi

$$\frac{zH'(z)}{H(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{z}{z - z_j}.$$

Dokažimo da za svaku točku $e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, koja nije nultočka od H vrijedi

$$\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_j} \geq \frac{1}{1 + \frac{k}{R}},$$

gdje je z_j bilo koja nultočka od H. Zapišimo z_j ovako:

$$z_j = r_j e^{i\varphi_j},\ \ \varphi_j \in [0, 2\pi\rangle\,,\ \ r_j \leq \frac{k}{R} < 1.$$

Tada je

$$\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_j} = \mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - r_j e^{i\varphi_j}} = \mathrm{Re}\frac{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}}}{\frac{e^{i\theta} - r_j e^{i\varphi_j}}{e^{i\theta}}} = \mathrm{Re}\frac{1}{1 - r_j e^{i\beta}},$$

gdje smo sa β označili razliku $\varphi_j - \theta$. Tada imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\frac{1}{1 - r_j e^{i\beta}} &= \mathrm{Re}\frac{1}{\left(1 - r_j \cos\beta\right) + i r_j \sin\beta} \cdot \frac{\left(1 - r_j \cos\beta\right) - i r_j \sin\beta}{\left(1 - r_j \cos\beta\right) - i r_j \sin\beta} \\ &= \frac{1 - r_j \cos\beta}{1 - 2r_j \cos\beta + r_j^2}. \end{aligned}$$

Treba dokazati da je

$$\frac{1 - r_j \cos\beta}{1 - 2r_j \cos\beta + r_j^2} \geq \frac{1}{1 + \frac{k}{R}},$$

a to je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned}\left(1-r_j\cos\beta\right)\left(1+\frac{k}{R}\right)&\geq 1-2r_j\cos\beta+r_j^2\\ \frac{k}{R}-r_j^2+r\cos\beta\left(1-\frac{k}{R}\right)&\geq 0.\end{aligned}$$

Dakle, trebamo dokazati da je istinita posljednja nejednakost. Budući da je $\cos\beta \geq -1$ i $1-\frac{k}{R}>0$, vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{k}{R}-r_j^2+r_j\cos\beta\left(1-\frac{k}{R}\right)&\geq \frac{k}{R}-r_j^2-r_j\left(1-\frac{k}{R}\right)\\ &=\frac{k}{R}-r_j^2-r_j+r_j\frac{k}{R}\\ &=\left(1+r_j\right)\left(\frac{k}{R}-r_j\right).\end{aligned}$$

Iz uvjeta da je $\left|z_j\right| \leq \frac{k}{R}$ slijedi da je $\frac{k}{R} \geq r_j$ pa je gornji izraz nenegativan i time smo dokazali traženju tvrdnju.
To nam daje

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}H'\left(e^{i\theta}\right)}{H\left(e^{i\theta}\right)}&=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z_j}\geq\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{R}}\\ &=\sum_{j=1}^{n}\frac{R}{R+k}=\frac{nR}{R+k},\end{aligned}$$

za svaku točku $e^{i\theta}$, $0\leq\theta<2\pi$, koja nije nultočka od $H(z)$. Dobivamo

$$\left|\frac{H'\left(e^{i\theta}\right)}{H\left(e^{i\theta}\right)}\right|\geq \mathrm{Re}\left|\frac{e^{i\theta}H'\left(e^{i\theta}\right)}{H\left(e^{i\theta}\right)}\right|\geq\frac{nR}{R+k},$$

za svaku točku $e^{i\theta}$, $0\leq\theta<2\pi$, koja nije nultočka od $H(z)$. Stoga slijedi sljedeće

$$\left|H'\left(e^{i\theta}\right)\right|\geq\frac{nR}{R+k}\left|H\left(e^{i\theta}\right)\right|, \tag{3.19}$$

za svaku točku $e^{i\theta}$, $0\leq\theta<2\pi$, koja nije nultočka od $H(z)$. Nejednakost (3.19) je trivijalno ispunjena za točke $e^{i\theta}$ koje su nultočke od H, pa konačno imamo da vrijedi

$$|H'(z)|\geq\frac{nR}{R+k}|H(z)|,\ \text{ za } |z|=1.$$

Ako zamijenimo $H(z)$ s $G(Rz)$, dobivamo izraz

$$|G'(Rz)| \geq \frac{nR}{R+k}|G(Rz)|,\ \text{za}\ |z| = 1.$$

Primijenjujući lemu 3.8 na polinom $G(z)$ dolazimo do

$$|G'(Rz)| \geq \frac{n}{R+k}\left(\frac{R+k}{r+k}\right)^n |G(rz)|,\ \text{za}\ |z| = 1,$$

gdje je $r \leq R$ i $rR \geq k^2$. Znamo da je $G(z) = P(z) + \alpha m$ te slijedi

$$|P'(Rz)| \geq \frac{n(R+k)^{n-1}}{(r+k)^n}|P(rz) + \alpha m|,\ \text{za}\ |z| = 1.$$

Primjenom leme 3.2 na

$$P(z) = \frac{(r+k)^n}{n\,(R+k)^{n-1}}P'\,(Rz)\,,\ h(z) = P\,(Rz)\,,\ \alpha = -\alpha iR = n,\ k = 0$$

dobivamo

$$|P'(Rz)| \geq \frac{n(R+k)^{n-1}}{(r+k)^n}\Big\{|P(rz)| + m\Big\},\ |z| = 1$$

gdje je $r \leq R$ i $rR \geq k^2$. Konačno, iz toga slijedi

$$\max_{|z|=R}|P'(z)| \geq \frac{n(R+k)^{n-1}}{(r+k)^n}\Big\{\max_{|z|=r}|P(z)| + \max_{|z|=k}|P(z)|\Big\}$$

gdje je $r \leq R$ i $rR \geq k^2$. Time je dokazan teorem. ■

Ako uzmemo u teoremu 3.9 $r = 1$ i $k = 1$ tada dobivamo sljedeću tvrdnju.

Korolar 3.10. *Ako je $P(z)$ polinom stupnja n koji ima sve nultočke unutar $|z| \leq 1$, tada za $R \geq 1$ imamo*

$$\max_{|z|=R}|P'(z)| \geq \frac{n}{2}\left(\frac{1+R}{2}\right)^{n-1}\left\{\max_{|z|=1}|P(z)| + \min_{|z|=1}|P(z)|\right\}.$$

Očito je da za $R = 1$ korolar 3.10 postaje izraz

$$\max_{|z|=1}|P'(z)| \geq \frac{n}{2}\left\{\max_{|z|=1}|P(z)| + \min_{|z|=1}|P(z)|\right\},$$

tj. dobili smo tvrdnju teorema 3.5.

Bibliografija

[1] A. Aziz, A Refinement of an Inequality of S. Bernstein, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 144 (1989), 226-235.

[2] A. Aziz, Q.M. Dawood, Inequalities for a Polynomial and Its Derivate, Journal of Approximation Theory, 54 (1988), 306-313.

[3] A. Aziz, Q.G. Mohammad, Simple Proof of a Theorem of Erdős and Lax, Proceedings of The American Mathematical Society, Volume 80, Number 1 (1980), 119-122.

[4] A. Aziz, B.A. Zargar, Inequalities for a Polynomial and Its Derivate, Proceedings of The American Mathematical Society, Volume 1, Number 4 (1980), 543-550.

[5] R. Gardner, Bernstein Inequalities for Polynomials, East Tennessee State University (2013), https://faculty.etsu.edu/gardnerr/talks/Bernstein-Beamer.pdf pristupljeno 06.09.2023.

[6] P. Turán, Über die ableitung von polynomen, Compositio Math. 7 (1939), 89-95.

[7] Š. Ungar, Kompleksna analiza, Prirodoslovno matematički fakultet Zagreb (2009), https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/KA/kompleksna.pdf pristupljeno 06.09.2023.

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/GaussLucas_theorem pristupljeno 06.09.2023.

Sažetak

U ovom radu govorimo o poznatom teoremu, Bernsteinovoj nejednakosti za polinome i njihove derivacije. Polazeći od definicije polinoma i nekih bitnih teorema za holomorfne funkcije dolazimo do Bernsteinove nejednakosti i niza njezinih varijacija. Nadalje, proučavamo Erdős-Laxov i Turánov teorem za polinome, u kojima se pojavljuju uvjeti na položaj nultočaka. Na kraju dokazujemo nekoliko teorema u kojima se, za razliku od prijašnjih, javlja minimum modula polinoma i njegove prve derivacije.

Summary

In this paper we talk about the famous theorem, Bernstein's inequality for polynomials and their derivatives. Starting from the definition of polynomials and some essential theorems for anayltic functions we obtain Bernstein's inequality and a number of its variations. Furthermore, we study Erdős-Lax's and Turán's theorem for polynomials, which include conditions at the position of zeros. In the final chapter, we prove theorems in which, unlike the previous ones, the minimum of the modulus of the polynomial and its first derivation occurs.

Životopis

Moje ime je Anton Bogner. Rođen sam 17. kolovoza 1996. u Zagrebu. Djetinjstvo sam proveo u Slavonskom Brodu gdje sam i pohađao Osnovnu školu Antuna Mihanovića te srednju školu Gimaziju Matija Mesić. Nakon završene srednje škole, 2015. upisujem Integrirani preddiplomski i diplomski studij matematika i fizika; smjer: nastavnički. Tijekom studija sam redovito volontirao na projektu Otvoreni dani PMF-a, radio razne studentske poslove, bio studentski predstavnik u Vijeću Matematičkog odsjeka te pohađao praksu iz matematike i fizike u Osnovnoj školi Dragutina Tadijanovića, Osnovnoj školi Prečko i III. gimnaziji u Zagrebu.