Teorija aukcija

Draškić, Ivan Petar

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Petar Draškić

TEORIJA AUKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Rudi Mrazović

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvale mentoru, obitelji i prijateljima te pogotovo ocu koji me naveo na ovaj put.

Sadržaj

Uvod

Aukcije (lat. augere – povećati), još poznate kao i dražbe i licitacije, postoje kao mehanizam trgovine još od antičkih vremena. Herodot, često smatran ocem povijesti, tako opisuje aukciju u Babilonu u kojoj bi se neženje nadmetale za prava ženidbe te bi prihodi od aukcije išli siromašnijima. U kasnoj Rimskoj republici porez su prikupljali privatnici, a to su pravo dobili putem aukcije. Sve što su prikupili išlo bi njima, a ono što su platili putem aukcije smatralo bi se plaćenim porezom. No, puno poznatiji primjer aukcija u Rimu dogodio se 193. godine, u kojoj, nakon što su ubili cara Pertinaksa, pretorijanci su putem aukcije prodali titulu cara. Pobjedu na aukciji odnio je Didije Julian, koji je svakom pretorijancu ponudio 25 000 sestercija, rimskog brončanog novca. Na njegovu nesreću, njegova vladavina nije dugo trajala jer je precijenio odanost pretorijanaca. Nakon pada Zapadnog Rimskog Carstva 476. godine, aukcije u Europi većinom zamiru, izuzev trgovine među seljacima. Međutim, razvojem globalne trgovine u novom vijeku (15. stoljeće – 1918.), aukcije se ponovno počinju primjenjivati kao mehanizam prodaje. One se većinom razvijaju u Nizozemskoj, gdje se prodajom nekretnina i slika razvija nizozemska aukcija; te u Ujedinjenom Kraljevstvu, gdje se otvaraju institucije specijalizirane za aukcije – poput institucija Sotheby's i Christie's, obiju smještenih u Londonu. S obzirom na sve spomenuto, nije iznenađujuće da su aukcije našle svoje mjesto u suvremenom svijetu. U današnje vrijeme aukcije se obično asociraju s prodajom umjetnina u kojima su kupci kolekcionari. Također, upotrebljavaju se i u prodaji državnih obveznica i državne imovine, to jest, privatizaciji; ali i u koncesijama, u kojima kupci žele iskoristiti predmet prodaje poput prava na istraživanje naftnih polja ili prava na korištenje određene radiofrekvencije – za daljnji profit. Razvojem interneta, aukcije postaju popularne i široj javnosti, koja se sada može nadmetati na stranicama poput eBaya, a koje omogućuju razmjene širom svijeta.

Teorija aukcija, studija koja se bavi analizom aukcija, počinje se razvijati drugom polovicom 20. stoljeća u sklopu teorije igara. William Vickrey 1961. objavljuje rad smatran prvom pravom analizom aukcija, a njemu u čast, dano je ime i jednoj vrsti aukcija. U daljnjoj analizi sudjeluju i ekonomisti i matematičari, od kojih su neki i dobitnici Nobelove nagrade za ekonomiju, na primjer Robert Butler Wilson, Paul Milgrom i već spomenuti Vickrey. Njihovi se radovi dotiču analize otprije poznatih vrsta aukcija, kao i razvoja novih vrsta aukcija prilagođenih određenim potrebama. U proučavanju teorije aukcija, stoga, prirodno se javljaju neka od optimizacijskih pitanja: koju bi ponudu kupac trebao ponuditi da maksimizira svoju dobit ili kojom bi se vrstom aukcije prodavač trebao koristiti da dobije željeni ishod? U ovome radu, uz predstavljanje osnova teorije aukcija iz matematičke perspektive, bavit ćemo se tim pitanjima u aukcijama jednog, nerazdvojnog predmeta prodaje. Glavni izvori za ovaj rad bit će [3] i [2].

Poglavlje 1

Vrste aukcija

1.1 Primjeri aukcija

Postoje različiti načini provođenja aukcija, koji najčešće dovode do rezultata različitih za kupce i prodavače. Također, model aukcija ne mora opisivati financijske transakcije, već može opisivati druge situacije iz prirode ili svakodnevnog života. Pogledajmo nekoliko vrsta aukcija putem nekoliko primjera.

Primjer 1.1. Tvornica automobila želi napraviti novi model. Dizajn koji su napravili zahtijeva novi motor, pa da bi dobili što više ideja, odlučuju raspisati natječaj na kojem se sa svojim dizajnima javlja više tvrtki. Najbolji dizajn bit će nagrađen novčanim iznosom X. Tvrtke ulažu vlastite resurse, čija se vrijednost može kvantificirati novcem. Taj se ulog direktno odražava u kvaliteti dizajna, ali tvornica automobila ne može točno procijeniti koji je najkvalitetniji, pa njezin izbor pobjednika možemo modelirati slučajno, gdje je vjerojatnost da je određena tvrtka pobijedila proporcionalno svojem ulogu naspram ukupnom ulogu u dizajn, odnosno ulogu svih tvrtki.

Natječaj možemo shvatiti kao aukciju u kojoj je tvornica prodavač, tvrtke koje dizajniraju su kupci, a predmet prodaje, u prvi mah apsurdno, novčani iznos. Ova je aukcija kombinacija dvaju tipova aukcija: *aukcije u kojoj svi plaćaju* i *aukcije u kojoj je pobjednik određen lutrijom*. U aukcijama u kojima je pobjednik određen lutrijom, kupac s najvišom ponudom ne mora dobiti aukciju, nego se pobjednik određuje slučajno. Obično je šansa za pobjedu proporcionalna ponudi –u našem primjeru, ulogu resursa. U aukciji u kojoj svi plaćaju svaki sudionik plaća svoju ponudu – sudionici mogu biti na gubitku iako nisu dobili predmet prodaje. To se u većini drugih aukcija događa kada pobjednik aukcije plaća više nego što predmet vrijedi.

Tvrtke neće uložiti više od X jer ne žele ostvariti gubitak, a taj koncept nazivamo *racionalnost*. Općenito, od racionalnog kupca očekujemo da mu ponude nikada ne budu puno veće od procijenjene vrijednosti predmeta prodaje.

Sličan tip aukciji u kojoj svi plaćaju je *rat iscrpljivanja*, koji je dobar za modeliranje sukoba za ograničene resurse, poput borbe dvaju grabežljivaca za lovinu. Taj tip je na drugačiji način ilustriran idućim primjerom.

Primjer 1.2. U etno selu Montenegro, nedaleko od grada Nikšića u Crnoj Gori, od 2011. svake se godine održava natjecanje u ljenčarenju. Natjecateljima je cilj što dulje izdržati u ležećem položaju, a pravila natjecanja nalažu da sudionicima nije dozvoljeno jedino dizanje s mjesta, dok su im sve ostale radnje dozvoljene. Pobjednik natjecanja osvaja novčanu nagradu i smještaj u selu na nekoliko dana.

U ovom primjeru, da bi dobili nagradu, sudionici ulažu svoje vrijeme i fizičku i psihološku (ne)ugodnost. Glavna razlika u odnosu na aukciju u kojoj svi plaćaju jest da se trošak sudionika sustavno povećava, dok god se žele boriti za nagradu, pa je tako i vezan za trajanje aukcije; dok je u aukciji u kojoj svi plaćaju on jednokratan i neovisan o trajanju aukcije. Čest fenomen u ovakvom tipu aukcije je *greška nepovratnih troškova*, koja se odnosi na ponašanje kupca koji je već utrošio resurse i u aukciji nastavlja sudjelovati zbog njih, a ne radi mogućeg dobitka.

Također, u ovom primjeru javljaju se dva koncepta: *privatna* i *javna* vrijednost. Privatna vrijednost je subjektivna, ovisi od osobe do osobe i njihovih preferencija. U našem primjeru je to vrijeme sudionika te fizički i mentalni napor. Drugi primjer za nju je sentimentalni predmet iz djetinjstva, kojem bi vlasnik pripisivao puno veću vrijednost nego što bi to činila neka druga osoba. Matematički, privatne vrijednosti modeliramo nezavisnošću. Javna vrijednost je univerzalna i općenito prihvaćena i kao takvoj joj se može pripisati novčana vrijednost. U ovom primjeru su to novčana nagrada i smještaj. Jedan primjer javne vrijednosti obuhvaća vrijednosne papire, kada ulagači često računaju da trenutačna cijena nije usklađena s pravom (javnom) vrijednosti. U interakcijama tog tipa često se događa da kupci ne znaju kolika je javna vrijednost predmeta prodaje prije nego što ga osvoje, zbog manjka informacija o predmetu. Naprimjer, zainteresirane energetske kompanije ne znaju kolika je prava vrijednost potencijalnog naftnog polja prije nego što to istraže. Naravno, kupci mogu procijeniti pravu vrijednost prateći postupke ostalih kupaca te koliko su oni voljni platiti – ako velik broj kupaca odustane na početku aukcije, ostali mogu smanjiti svoju procjenu vrijednosti predmeta prodaje.

U nastavku rada fokusirat ćemo se na aukcije predmeta privatnih vrijednosti.

Primjer 1.3. 2017. godine odlučeno je prodati sliku *Salvator Mundi* Leonarda da Vincija putem *engleske aukcije*, u kojoj prodavač nakon davanja početne cijene postepeno povisuje cijenu, sve dok ne ostane jedan zainteresirani kupac, koji onda plaća zadnju spomenutu cijenu. Kupci svoju zainteresiranost, odnosno to da su voljni platiti cijenu, pokazuju davanjem nekog znaka – poput uzvika ili podizanja ruke. Prije nego što su potencijalni kupci mogli pristupiti aukciji, da ne bi došao bilo tko, morali su platiti pristojbu za pristup. Na kraju je slika postigla cijenu od 450 312 500 američkih dolara, a dobitnik je bio jedan od saudijskih prinčeva.

Isti rezultat postigao bi se, uz pretpostavku racionalnosti kupca i privatnosti vrijednosti, primjenom *aukcije zapečaćenih ponuda po drugoj najvišoj cijeni*. Tu ćemo tvrdnju dokazati kasnije. Tijekom aukcije zapečaćenih ponuda po drugoj najvišoj cijeni, kupci zapisuju cijenu koju su voljni platiti, na papir koji potom stavljaju u omotnicu, koju daju prodavaču. Prodavač zatim određuje koji je kupac dao najvišu ponudu i taj kupac plaća predmet u iznosu druge najviše ponude.

Međusobno jednake rezultate, ali bez pretpostavke privatnosti, daju još i dvije, naizgled različite aukcije; već spomenuta *nizozemska* i *aukcija zapečaćenih ponuda po prvoj najvišoj cijeni*. Prije nego što neformalno pokažemo zašto one daju iste rezultate, objasnit ćemo ta dva mehanizma. U nizozemskoj aukciji prodavač daje visoku početnu cijenu, koju snižava sve dok se ne javi prvi zainteresirani kupac koji plaća tu cijenu, a aukcija zatvorenih ponuda po prvoj najvišoj cijeni održava se isto kao i aukcija zapečaćenih ponuda po drugoj najvišoj cijeni, samo što pobjednik aukcije plaća iznos koji je on sâm ponudio.

Dokaz o ekvivalenciji aukcija može se naći u [4] ili [5], a temelji se na činjenici da kupci imaju isti skup informacija. Kupci mogu prije aukcije dobiti naznake evaluacije drugih kupaca, ali tijekom aukcija neće dobiti nove informacije o ponudama drugih kupaca. Naime, u aukciji zapečaćenih ponuda po prvoj najvišoj cijeni, kupci nezavisno, bez podataka o tome koju su brojku zapisali drugi kupci, zapisuju po kojoj bi cijeni kupili predmet. Slično, u nizozemskoj aukciji ne dobivaju relevantne podatke o cijeni po kojoj bi ostali kupci bili voljni kupiti predmet, jer jedini podatak o ponudama drugih igrača događa se kada se jedan od njih javi, ali tada je aukcija gotova. U obje aukcije, kupci koji su dali svoju ponudu plaćaju je.

1.2 Aukcije zapečaćenih ponuda privatnih vrijednosti

Kao što smo vidjeli, postoji više vrsta aukcija, a neke od njih mogu se objediniti istom definicijom.

Definicija 1.4. Aukcija zapečaćenih ponuda predmeta privatne vrijednosti je uređena petorka $(N, (\mathbb{V}_i, F_i)_{i\in N}, B, p, C)$, gdje su:

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}$, je **skup kupaca**.
- Za $i \in N$, $\mathbb{V}_i \subseteq \mathbb{R}_+$, $\mathbb{V}_i$ Borelov, je **skup mogućih privatnih vrijednosti** kupca i. $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \times \ldots \mathbb{V}_n$ je **skup mogućih vektora privatnih vrijednosti**.
- B_i, $B_i \subseteq \mathbb{R}_+$, zatvoreni interval, tako da mu je lijevi rub jednak 0, je **skup ponuda** kupca i. $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$

- F_i je vjerojatnosna funkcija distribucije nad skupom $\mathbb{V}_i$, za $i \in N$.
- $p : B \to \Delta N$ je funkcija koja svakom vektoru ponuda $b \in B$ pridružuje funkciju s pomoću koje se određuje pobjednik,

$$\Delta N = \left\{ x \in [0,1]^N : \sum_{i \in N} p(i) \leq 1 \right\}.$$

- $C : N \times B \to \mathbb{R}^n$ je funkcija koja određuje koliko koji kupac plaća, ovisno o pobjedniku $i_* \in N$ i vektoru ponuda $b \in B$.

Aukcija se održava u fazama. Najprije se svakom kupcu i pridružuje njegova privatna vrijednost predmeta, uz pomoć slučajne varijable V_i, čija je funkcija distribucije F_i. Privatne vrijednosti međusobno su nezavisne zbog svojih definicijskih karakteristika. Iz tog razloga, vektor $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{V}$ je određen u skladu s funkcijom distribucije F, za koju vrijedi $F(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \prod\limits_{i \in N} F_i(v_i)$.
Kupac zatim, na temelju svoje privatne vrijednosti, daje ponudu $b_i \in B$. Izmjerivu funkciju koja utvrđuje tu vezu nazivat ćemo **čista strategija** kupca i

$$\beta_i : \mathbb{V}_i \to B_i.$$

Općenitije, čiste strategije mogu biti i funkcije više varijabli, koje za varijable uzimaju i podatke dostupne kupcu i, ali u ovom je slučaju to samo njegova privatna cijena. $\beta = (\beta_i)_{i \in N}$ ćemo zvati **strateškim vektorom**.

Pobjednik $i_* \in N$ se određuje uz pomoć vjerojatnosne mjere, koja svakom kupcu pridružuje vjerojatnost pobjede. Tu vjerojatnosnu mjeru dobivamo uz pomoć preslikavanja p, koje za argument uzima vektor ponuda $b \in B$. Najčešće je to vjerojatnosna mjera koja kupcu s najvišom ponudom pripisuje vjerojatnost 1. Ako se nađe M takvih kupaca, onda se pobjednik određuje *metodom bacanja novčića*, to jest, svaki takav kupac ima jednaku vjerojatnost pobjede $\frac{1}{M}$, a drugi imaju vjerojatnost 0. Na kraju, funkcija C, čiji su argumenti uređeni parovi kupaca i vektora ponuda, pridružuje koliko će koji kupac platiti. **Profit** kupca i za $b \in B$ je onda

$$\mathbb{1}_{\{W_i = i\}} v_i - \sum_{i_* \in N} \mathbb{1}_{\{W_i = i^*\}} C_i(i_*; b),$$

gdje je W slučajna varijabla s distribucijom

$$W \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 - \sum\limits_{i \in N} p_i(b) & p_1(b) & p_2(b) & \ldots & p_n(b) \end{pmatrix}.$$

Kada W poprimi vrijednost 0, nitko ne dobiva aukciju. Za vektor x s x_{-i} ćemo označavati taj isti vektor kojemu je izbačen i-ti član, a s x^*, x_{-i} vektor kojemu je i-ti član zamijenjen s x^*. **Očekivani profit** kupca i je

$$\int_{\mathbb{V}_{-i}} \Big(\mathbb{1}_{\{W_i=i\}} v_i - \sum_{i_* \in N} \mathbb{1}_{\{W_i=i^*\}} C_i(i_*; \beta_1(v_1), \dots \beta_n(v_n))\Big) dF_{-i}(v_{-i}),$$

gdje je $\beta = (\beta_i)_{i\in N}$ strateški vektor. Zbog prirode problema, tj. neznanja kupaca o stvarnim tuđim ponudama, cilj svakog kupca je maksimizirati vlastiti očekivani profit. Primijetimo sljedeće: ako kupac želi maksimizirati očekivani profit, on mora znati moguće privatne vrijednosti drugih kupaca i njihove distribucije. Stoga ćemo u nastavku pretpostaviti da su svi kupci svjesni tuđih mogućih privatnih vrijednosti i njihovih distribucija i da su svjesni tuđe svjesnosti, svjesni svjesnosti o svjesnosti, svjesni o. . . i tako *ad infinitum*.
U aukcijama u kojima je pobjednik određen najvišom ponudom vjerojatnošću jednakom 1, uz pretpostavku da bacanje kocke neće biti potrebno, profit možemo modelirati izrazom

$$p_i(b)v_i - \sum_{i_* \in N} p_{i_*}(b) C_i(i_*; b),$$

a očekivani profit

$$\int_{\mathbb{V}_{-i}} \Big(p_i(\beta_1(x_1), \dots, \beta(x_i), \dots, \beta_n(x_n))x_i - \sum_{i_* \in N} p_{i_*}(b) C_i(i_*; \beta_1(x_1), \dots \beta_n(x_n))\Big) dF_{-i}(x_{-i}).$$

U radu ćemo se najviše fokusirati na aukcije u kojima je pobjednik određen najvišom ponudom i bez mogućnosti poklapanja ponuda.

Predstavljeni model dopušta opisivanje raznih vrsta aukcija zapečaćenih ponuda u kojima predmet prodaje ima privatnu vrijednost, no kako i samo ime govori, ne dopušta opisivanje aukcija predmeta javne vrijednosti. Takav bi model trebao dodati i podatke o javnoj vrijednosti predmeta i signale kojima kupci mogu pobliže odrediti pravu vrijednost predmeta. Tada bi čiste strategije bile funkcije više varijabli, koje u obzir uzimaju i signale. Ovakav model neće biti obrađen u ovom radu.

Poglavlje 2

Optimalne ponude

Vratimo se na Primjer 1.3. Kupci, razumno, u aukciji ne žele samo osvojiti predmet po cijeni nižoj od vrijednosti predmeta koju sami procjenjuju, nego žele i da ta cijena bude što manja.

2.1 Bayesovske igre

Aukcije podrazumijevaju dozu neznanja koja se prvo javlja u procjeni vrijednosti predmeta prodaje, a zatim utječe na odluke kupaca i prodavača – kupci u aukcijama ne bi imali problema kod davanja svojih ponuda kada bi znali kakve su čije procjene. Iz tog razloga, aukcije se često modeliraju kao igre nepotpunih podataka, pa je zgodno razviti širu teoriju i primijeniti je na aukcije. Jedan takav model pogodan za proučavanje aukcija razvio je mađarsko-američki matematičar John C. Harsanyi.

Definicija 2.1. **Bayesovska igra**[1] je uređena četvorka $(N, (T_i)_{i\in N}, \mathbb{P}, S)$, u kojoj su:

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, je **skup igrača**.
- T_i je **skup tipova igrača** i, za svaki $i \in N$. $T = T_1 \times T_2 \times \dots T_n$ je **skup vektora tipova**.
- $\mathbb{P}$ vjerojatnosna mjera nad T.
- S je **skup stanja prirode**. Stanje prirode $s \in S$ je uređena trojka ovisna o $t \in T$, $s = (N, (A_{i,t})_{i\in N}, (u_{i,t})_{i\in N})$, gdje su N skup igrača, $A_{i,t} \neq \emptyset$ **skup poteza igrača** i, a $u_i : A_1 \times A_2 \times \dots A_n \times T \to \mathbb{R}$ **funkcija korisnosti igrača** i.

[1] U literaturi se još naziva i Harsanyijev model igre nepotpunih informacija.

Pokažimo kako se aukcije zapečaćenih ponuda predmeta privatnih vrijednosti uklapaju u Bayesovske igre:

- Skup kupaca je skup igrača.
- Skup mogućih privatnih vrijednosti kupca i, $\mathbb{V}_i$, je skup tipova igrača i
- Vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}$ iz definicije Bayesovske igre povezujemo s vjerojatnosnom mjerom, induciranom[2] distribucijom F, s pomoću koje se određuje vektor privatnih vrijednosti v.
- Za svaki $v \in \mathbb{V}$, trojku $(N, B, (u_i)_{i\in N})$ shvaćamo kao jedno stanje prirode, gdje je u_i funkcija profita.

Zbog predstavljenog, u nastavku ćemo se ponašati kao da su aukcije Bayesovske igre.
Kao i kod aukcija zapečaćenih ponuda, uvodimo pojam čiste strategije. **Čista strategija** igrača i je preslikavanje $\beta_i : T_i \to \bigcup\limits_{t_i\in T_i} A_i(t_i)$ – tako da vrijedi

$$\beta_i(t_i) \in A_i(t_i).$$

$\beta = (\beta_i)_{i\in N}$ ćemo zvati **čistim strateškim vektorom**.

Napomena 2.2. Epitet „čista“ naglašavamo, jer postoje i takozvane mješovite strategije, u kojima kupci slučajno odabiru neku od čistih strategija ovisno o dodijeljenim vjerojatnostima. Takve se strategije često primjenjuju u Bayesovskim igrama, jer je traženje Bayes-Nashova ekvilibrija (pojam koji ćemo uskoro uvesti) među njima lakše, ali ih nećemo uvoditi jer nisu potrebne za glavne rezultate u teoriji aukcija. Ubuduće, pod pojmom strategija smatramo samo čiste strategije.

Prirodno se postavlja pitanje koju bi strategiju igrač morao odabrati da bi maksimizirao svoju očekivanu korisnost. Slično mogu razmišljati i drugi igrači, pa nas to dovodi do „stabilnog“ stanja, u kojem se promjenom strategije nijedan od igrača ne može više okoristiti. Razlikujemo dvije vrste ovakvih stanja, ovisno o tome u kojoj se fazi igre događaju – prije određivanja tipa igrača ili *ex ante* poslije određivanja tipa igrača. U aukcijama nas zanimaju ponašanja kupaca nakon njihove procjene vrijednosti ili općenitije, dodjeljivanja tipa u Bayesovskim igrama, stoga ćemo se baviti drugim slučajem.

Definicija 2.3. **Čisti Bayes-Nashov ekvilibrij** je strateški vektor β za koji vrijedi:

$$\beta_i(t_i) \in \arg\max_{a_i\in A_i} \left\{ \int\limits_{T_{-i}} u_i((a_i, \beta_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i}) d\mathbb{P}(t_{-i} \,|\, t_i) = \mathbb{E}_{t_{-i}} \left[u_i(a_i, \beta_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i}) \mid t_i \right] \right\}$$

[2]Egzistencija je garantirana Teoremom 9.2, str. 252, iz [6]

za svaki $i \in N$.

U nastavku rada, sve ekvilibrije ćemo smatrati Bayes-Nashovim. Sada ćemo pokazati tvrdnju koju smo ostali dužni iz prvog dijela, da pod određenim pretpostavkama aukcija zapečaćenih ponuda po drugoj najvišoj cijeni i engleska aukcija daju iste rezultate. U sklopu toga ćemo i identificirati neke ekvilibrije. Idući će nam teorem dati elegantan ekvilibrij u aukcijama zapečaćenih ponuda po drugoj najvišoj cijeni.

Teorem 2.4. U aukciji zapečaćenih ponuda, strateški vektor u kojem je svaka strategija $\arg\min_{b_i \in B_i} |b_i - v_i|$ Bayes-Nashov ekvilibrij, gdje je v_i njegova privatna vrijednost.

Dokaz. Pokazat ćemo jaču tvrdnju -– ovakva strategija maksimizira očekivanu dobit neovisno o strategijama ostalih kupaca. Primijetimo, ako za svakog kupca postoji takva strategija, strateški vektor sačinjen od tih strategija je ekvilibrij – tvrdnja slijedi direktno iz definicije Bayes-Nashova ekvilibrija. Bez smanjenja općenitosti, problem gledamo iz perspektive prvog kupca.

Neka je $b^* := \arg\min_{b_1 \in B_1} |b_1 - v_1|$, gdje je v_1 njegova procjena vrijednosti predmeta i neka su ostali kupci primijenili proizvoljne strategije, redom, $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$ te neka je

$$Y = \max\{\beta_2(V_2), \beta_3(V_3), \ldots, \beta_n(V_n)\},$$

tada je profit jednak

$$(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b^*\}}. \tag{2.1}$$

Kako je B_1 zatvoren interval koji uključuje 0, razlikujemo dva slučaja, ovisno o tome nalazi li se privatna vrijednost u skupu ponuda.

1. slučaj: $v_1 \notin B_1$.

Tada je b^* jednak desnom rubu intervala B_1. Pretpostavimo da mu neka druga strategija nalaže da dâ ponudu $b^{'}$ manju od b^*. Profit će mu biti

$$(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b'\}}. \tag{2.2}$$

Uzimanjem uvjetnog matematičkog očekivanja $\mathbb{E}_{v_{-i}}[\cdot \mid v_1]$ od (2.1) dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v_{-i}}[(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b^*\}} \mid v_1] &= \mathbb{E}_{v_{-i}}[v_1 \mathbb{1}_{\{Y \le b^*\}} \mid V_1 = v_1] - \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{Y \le b^*\}} \mid v_1] \\
&= v_1 \mathbb{P}(Y \le b^* \mid v_1) - \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{Y \le b^*\}} \mid V_1 = v_1] \\
&= v_1 \mathbb{P}(Y \le b^{'} \mid V_1 = v_1) + v_1 \mathbb{P}(b^{'} \le Y \le b^* \mid v_1) \\
&- \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{Y \le b'\}} \mid v_1] - \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{b' \le Y \le b^*\}}, \mid v_1] \\
&= \mathbb{E}_{v_{-i}}[(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b'\}} \mid v_1] + v_1 \mathbb{P}(b^{'} \le Y \le b^* \mid V_1 = v_1) \\
&- \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{b' \le Y \le b^*\}} \mid v_1] \\
&\ge \mathbb{E}_{v_{-i}}[(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b'\}} \mid v_1] + (v_1 - b^{'})\mathbb{P}(b^{'} \le Y \le b^* \mid V_1 = v_1) \\
&\ge \mathbb{E}_{v_{-i}}[(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b'\}} \mid v_1],
\end{aligned}$$

a to smo i trebali pokazati.
2.slučaj:$v_1 \in B_1$.
Primijetimo da je u ovom slučaju $b^* = v_1$. Neka je $b^{'}$ neka druga ponuda. Slučaj u kojem je ona manja od v_1 već smo obradili. Pretpostavimo da je $b^{'} > v_1$. Uzimanjem uvjetnog očekivanje od $(v_1 - Y)\mathbb{1}_{Y \le b'}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{v_{-i}}[(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b'\}} \,|\, v_1] &= \mathbb{E}_{v_{-i}}[v_1 \mathbb{1}_{\{Y \le b'\}} \,|\, v_1] - \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{Y \le b'\}} \,|\, v_1] \\
&= v_1 \mathbb{P}(Y \le b^{'} \,|\, v_1) - \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{Y \le b^{i}\}} \,|\, v_1] \\
&= v_1 \mathbb{P}(Y \le b^* \,|\, V_1 = v_1) + v_1 \mathbb{P}(b^* \le Y \le b^{'} \,|\, V_1 = v_1) \\
&- \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{Y \le b^*\}} \,|\, v_1] - \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{b^* \le Y \le b'\}} \,|\, v_1] \\
&= \mathbb{E}_{v_{-i}}[(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b^*\}} \,|\, v_1] + v_1 \mathbb{P}(b^* \le Y \le b^{'} \,|\, V_1 = v_1) \\
&- \mathbb{E}_{v_{-i}}[Y\mathbb{1}_{\{b^* \le Y \le b'\}} \,|\, v_1] \\
&\le \mathbb{E}_{v_{-i}}[(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b^*\}} \,|\, v_1] + (v_1 - b^{'})\mathbb{P}(b^{'} \le Y \le b^* \,|\, V_1 = v_1) \\
&\le \mathbb{E}_{v_{-i}}[(v_1 - Y)\mathbb{1}_{\{Y \le b^*\}} \,|\, v_1].
\end{aligned}$$

Time smo dokazali i drugi slučaj □

Teorem 2.5. U engleskoj aukciji predmeta privatne vrijednosti optimalna strategija bilo kojeg igrača je spuštanje ruke (odustajanje od aukcije) kada cijena predmeta dosegne njegovu procijenjenu vrijednost ili, ako mu skup ponuda ne dozvoljava davanje ponude jednake svojoj procijenjenoj vrijednosti, najvišu moguću ponudu koju može dat. Strateški vektor sačinjen od takvih strategija je ekvilibrij.

Dokaz. Ako kupac odluči odustati prije nego što cijena dosegne njegovu procijenjenu, onda će mu profit sigurno biti 0, a u suprotnom postoji šansa da bude pozitivan. Ako kupac odluči ostati u aukciji nakon što cijena prijeđe njegovu procijenjenu, onda će sigurno biti na gubitku. U svakom slučaju, kupcu je u interesu sudjelovati u aukciji sve dok cijena ne dosegne njegovu procijenjenu. Tvrdnja da je takav strateški vektor ekvilibrij, slijedi iz istih razloga kao i u prošlom teoremu. □

Pretpostavka o privatnim vrijednostima u ovom teoremu bila je nužna, za razliku od prethodnog, jer bi kupci mogli ispraviti procjenu stvarne vrijednosti prateći kako se drugi kupci ponašaju.

2.2 Simetrične aukcije

Optimalne ponude ne moraju uvijek postojati, u što ćemo se uvjeriti na idućem primjeru.

Primjer 2.6. Neka na aukciji predmeta zapečaćenih ponuda predmeta privatne vrijednosti po prvoj najvećoj cijeni sudjeluju dva kupca. Pretpostavimo da im vrijednosti dolaze iz uniformnih distribucija nad, redom: $[0, 1]$ i $\{0\}$, a neka su im skupovi mogućih ponuda jednaki $[0, 1]$. Neka se u slučaju kada kupci daju istu ponudu pobjednik određuje bacanjem novčića. Pretpostavimo da je privatna vrijednost prvog kupca jednaka $v \in [0, 1]$, $v \neq 0$, a privatna vrijednost drugog kupca je sigurno 0 jer mu je skup mogućih privatnih vrijednosti jednočlan. Prvi kupac neće dati ponudu veću od v, a drugi će kupac sigurno dati ponudu jednaku 0 jer će davanjem više ponude, njihovi očekivani profiti biti negativni. No, imajući na umu da drugi kupac neće dati ponudu veću od 0 jer zna skup njegovih mogućih privatnih vrijednosti, da bi dobio aukciju, prvom je kupcu dovoljno ponuditi bilo koju ponudu veću od 0. Pretpostavimo da je ponudio vrijednost $b > 0$. Tada mu je očekivani profit jednak $v - b$, ali može još više profitirati dajući ponudu $\frac{b}{2}$. Iz toga zaključujemo da prvi kupac nema optimalnu strategiju, koja je odgovor strategiji drugog igrača, a koja mu nalaže da ponudi 0; tako da mu ta strategija nalaže da ponudi strogo pozitivan broj. Jedino mu preostaje da optimalna strategija potencijalno nalaže kako da dâ ponudu 0. Tada mu je očekivani profit jednak $\frac{v}{2}$, koji se onda može povećati davanjem bilo koje strogo pozitivne ponude $b < \frac{v}{2}$. Zaključujemo da Bayes-Nashov ekvilibrij ne postoji, jer prvi kupac nema optimalnu strategiju koja odgovara strategiji prvog kupca, a koja mu nalaže da ponudi 0.

Zato ćemo se baviti određenom vrstom aukcija, koja će se zbog ograničenja na određene elemente zvati *simetrične aukcije* i za njih pretpostavljamo da su sve privatne vrijednosti V_i jednako distribuirane i neprekidne sa strogo pozitivnom funkcijom gustoće f nad $\mathbb{V}_i$ i funkcijom distribucije F. Kako su svakom kupcu privatne vrijednosti iz istog skupa dobivene jednako distribuiranim slučajnim varijablama V_i, tako se, prirodno, nameće ekvilibrij u kojem svi kupci imaju istu strategiju.

Definicija 2.7. U simetričnoj se aukciji ekvilibrij $(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_n^*)$ zove **simetričnim ekvilibrijem** ako je $\beta_i = \beta_j$ za svaki $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Radi jednostavnosti, u simetričnim ekvilibrijima nećemo raditi notacijsku razliku među strategijama pojedinih igrača, nego ćemo ih označavati s β^*, to jest, ekvilibriji $(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_n^*)$ postaju $(\beta^*, \beta^*, \ldots, \beta^*)$. Strategiju β^* nazivamo **strategijom simetričnog ekvilibrija**. Za proučavanje simetričnih strategija bit će potrebno svojstvo stroge monotonosti. Preciznije, od strategije simetričnog ekvilibrija očekivat ćemo da je strogo rastuća. To je razumna pretpostavka jer ako kupac ima veću procjenu vrijednosti predmeta, od njega očekujemo da će biti voljan dati veću ponudu. Tada, ako je β^* strogo rastuća strategija simetričnog ekvilibrija, onda je pobjednik aukcije onaj s najvišom privatnom vrijednošću. Neka je sada

$$Y = \max \{V_2, V_3, \ldots, V_n\} . \tag{2.3}$$

Y je slučajna varijabla čija je vrijednost najveća privatna vrijednost kupaca $2, 3, \ldots, n$. Y je neprekidna slučajna varijabla. Naime, za njezinu funkciju distribucije F_Y vrijedi

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\
&= \mathbb{P}(\max\{V_2, V_3, \ldots, V_n\} \leq y) \\
&= \prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq y) \\
&= \prod_{i=2}^{n} F(y) \\
&= F^{n-1}(y).
\end{aligned}$$

Deriviranjem dobivamo funkciju gustoće f_Y slučajne varijable Y:

$$f_Y(y) = (n-1)f(y)F^{n-2}(y).$$

Ako je primijenjena strogo rastuća strategija simetričnog ekvilibrija, onda kupac 1 dobiva aukciju ako i samo ako $Y < V_1$ (slučaj jednakosti zanemarujemo jer je on vjerojatnosti 0 zbog neprekidnosti slučajnih varijabli $V_1, V_2, \ldots, V_n$.
Idući će nam teorem dati jednu strategiju simetričnog ekvilibrija, no najprije, pokažimo jednu pomoćnu lemu.

Lema 2.8. Za proizvoljnu slučajnu varijablu i bilo koja dva disjunktna događaja A i B vrijedi

$$\mathbb{E}[X \mid A \cup B] = \mathbb{P}(A \mid A \cup B)\mathbb{E}[X \mid A] + \mathbb{P}(B \mid A \cup B)\mathbb{E}[X \mid B]. \tag{2.4}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \mid A \cup B] &= \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A\cup B}]}{\mathbb{P}(A \cup B)} \\
&= \frac{\mathbb{E}[X(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(A \cup B)} \\
&= \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(A \cup B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{E}[X] + \mathbb{P}(B)\mathbb{E}(X)}{\mathbb{P}(A \cup B)} \\
&= \mathbb{P}(A \mid A \cup B)\mathbb{E}[X \mid A] + \mathbb{P}(B \mid A \cup B)\mathbb{E}[X \mid B].
\end{aligned}$$

□

Teorem 2.9. U simetričnoj aukciji predmeta privatnih vrijednosti po prvoj najvišoj cijeni, iduća strategija definira simetrični ekvilibrij:

$$\beta(v) := \begin{cases} 0, & v = 0, \\ \mathbb{E}[Y \mid Y \leq v], & \text{inače}, \end{cases}$$

gdje je Y slučajna varijabla definirana s (2.3).

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u nekoliko koraka. Najprije ćemo pokazati da je ovako definirana strategija strogo rastuća, a potom da je i neprekidna funkcija. U trećem, zadnjem koraku, iz inverza od β, za koji znamo da postoji i da je neprekidan (iz prva dva koraka), pokazat ćemo da je β strategija simetričnog ekvilibrija.
1. korak:
Neka je v unutrašnja točka intervala $\mathbb{V}$ i $\delta > 0$ takav da vrijedi $v + \delta \in V$. Tada po Lemi 2.8 vrijedi:

$$\begin{aligned} \beta(v+\delta) &= \mathbb{E}[Y \mid Y \leq v+\delta] \\ &= \mathbb{P}(Y \leq v \mid Y \leq v+\delta)\mathbb{E}[Y \mid Y \leq v] \\ &+ \mathbb{P}(v < Y \leq v+\delta \mid Y \leq v+\delta)\mathbb{E}[Y \mid v < Y \leq v+\delta], \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdje su uvjetne vjerojatnosti u zadnjem izrazu strogo pozitivne, što slijedi iz definicije uvjetnih vjerojatnosti i činjenice da je f_Y pozitivna na unutrašnjosti intervala $\mathbb{V}$.
Također vrijedi, po definiciji uvjetnog očekivanja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y \mid Y \leq v] &= \int_0^v y \frac{f_Y(y)}{\mathbb{P}(Y \leq v)} dy \leq \int_0^v v \frac{f_Y(y)}{\mathbb{P}(Y \leq v)} dy = v \\ &= \int_v^{v+\delta} v \frac{f_Y(y)}{\mathbb{P}(v \leq Y < v+\delta)} dy < \int_v^{v+\delta} y \frac{f_Y(y)}{\mathbb{P}(v \leq Y < v+\delta)} dy = \mathbb{E}[Y \mid v < Y \leq v+\delta], \end{aligned}$$

tj. vrijedi

$$\mathbb{E}[Y \mid Y \leq v] < \mathbb{E}[Y \mid v < Y \leq v+\delta]. \tag{2.6}$$

S obzirom na to da je izraz (2.5) zapravo ponderirana aritmetička sredina sa strogo pozitivnim težinama, iz toga uz (2.6) slijedi

$$\beta(v+\delta) > \mathbb{E}[Y \mid Y \leq v] = \beta(v).$$

Dakle, β je strogo rastuća funkcija.
2. korak:

Najprije ćemo pokazati neprekidnost funkcije u 0, a zatim ćemo pokazati neprekidnost na cijeloj domeni. Iz (2.6), za proizvoljan $v \in \mathbb{V}$ vrijedi

$$0 \leq \beta(v) = \mathbb{E}[Y \,|\, Y \leq v] = \beta(v),$$

iz čega slijedi $\lim\limits_{v \to 0} \beta(v) = 0 = \beta(0)$. Za proizvoljnu točku v iz interiora skupa

$$\beta(v) = [Y \,|\, Y \leq v] = \frac{1}{\mathbb{P}(Y \leq v)} \int_0^v y f_Y(y) dy = \frac{1}{F_Y(v)} \int_0^v y f_Y(y) dy.$$

$F_Y(v) > 0$ jer je $v > 0$, a kako je Y neprekidna slučajna varijabla, tako je i β neprekidna kao kvocijent dviju neprekidnih funkcija (integrali su neprekidne funkcije) u kojima je nazivnik uvijek različit od nule.

3. korak:

Pretpostavimo da su kupci $2, 3, \ldots, n$ primijenili strategiju β. Dokazat ćemo da je tada najbolji odgovor prvoga kupca isto primjenjivanje strategije β.

Neka je $v_1 \in \mathbb{V}$ njegova privatna vrijednost. β je strogo rastuća i neprekidna, pa po Teoremu 3.14 iz [1] postoji inverzna funkcija od β, β^{-1} i ona je neprekidna. Tada, ako ponudi iznos b_1, njegov očekivani profit je

$$U_1(b_1, \beta_{-1}; v_1) = \mathbb{P}(\beta(Y) < b_1)(v_1 - b_1).$$

Ako ponudi iznos $b_1 = 0$, neće dobiti aukciju, jer je Y neprekidna slučajna varijabla na $\mathbb{V}$, pa je vjerojatnost $Y > 0$ jednaka 1, tj.

$$U_1(0, \beta_{-1}; v_1) = 0.$$

Ako mu je vrijednost ponude b_1 veća od v_1, onda za njegov očekivani profit vrijedi

$$U_1(b_1, \beta_{-1}; v_1) \leq 0.$$

Za $b_1 \in (0, v_1)$ vjerojatnost $\mathbb{P}(\beta(Y) < b_1)$ veća je od nule, uz to da za takav b_1 je $v_1 - b_1 > 0$ zaključujemo da očekivani profit bude strogo pozitivan za $b_1 \in (0, v_1)$, jer je produkt dviju pozitivnih funkcija, a nepozitivan za $b_1 \in \mathbb{V} \setminus (0, v_1)$, tj. maksimum očekivanog profita tražit ćemo na interioru intervala $[0, v_1]$.

Za očekivani profit $U_1(b_1, \beta_{-1}; v_1)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} U_1(b_1, \beta_{-1}; v_1) &= \mathbb{P}(\beta(Y) < b_1)(v_1 - b_1) \\ &= \mathbb{P}(Y < \beta^{-1}(b_1))(v_1 - b_1) \\ &= F_Y(\beta^{-1}(b_1))(v_1 - \beta(\beta^{-1}(b_1))) \\ &= F_Y(\beta^{-1}(b_1))(v_1 - \mathbb{E}[Y \,|\, Y \leq \beta^{-1}(b_1)]). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Neka je b_1 unutrašnja točka intervala $\beta(\mathbb{V})$ i $z_1 := \beta^{-1}(b_1)$. Tada je $b_1 = \beta(z_1)$ i iz (2.7) vrijedi

$$\begin{aligned}
U_1(\beta(z_1), \beta_{-1}; v_1) &= F_Y(z_1)(v_1 - \mathbb{E}[Y \mid Y \leq z_1]) \\
&= F_Y(z_1)(v_1 - z_1) + F_Y(z_1)z_1 - F_Y(z_1)\mathbb{E}[Y \mid Y \leq z_1] \\
&= F_Y(z_1)(v_1 - z_1) + F_Y(z_1)z_1 - \int_0^{z_1} y f_Y(y) dy \\
&= F_Y(z_1)(v_1 - z_1) + F_Y(z_1)z_1 - F_Y(z_1)z_1 + \int_0^{z_1} F_Y(y) dy \quad \text{(parc. integracija)} \\
&= F_Y(z_1)(v_1 - z_1) + \int_0^{z_1} F_Y(y) dy. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Za fiksan v_1 dovoljno je tražiti ekstrem od izraza (2.8) u ovisnosti o z_1. Izraz je diferencijabilan i njegova derivacija po z_1 iznosi

$$f_Y(z_1)(v_1 - z_1) - F_Y(z_1) + F_Y(z_1) = f_Y(z_1)(v_1 - z_1).$$

$f_Y(z_1)$ je, po pretpostavci, strogo pozitivna na intervalu $\mathbb{V}$ pa je derivacija onda jednaka nuli jedino za $z_1 = v_1$. Za svaki $z_1 < v_1$ derivacija je pozitivna, pa funkcija raste, a za $z_1 > v_1$ derivacija je negativna, pa funkcija pada. Iz toga slijedi da je u $z_1 = v_1$ maksimum. Iz definicije z_1 slijedi da je najbolja ponuda kupca 1, kada su drugi kupci implementirali strategiju β, b_1 jednaka $\beta(v_1)$, tj. β je strategija simetričnog ekvilibrija. □

Strategija definirana prethodnim teoremom jedina je simetrična strategija u simetričnim aukcijama predmeta privatne vrijednosti po prvoj najvišoj cijeni. Prije nego što pokažemo ovu tvrdnju, pokazat ćemo teorem koji nam govori o očekivanoj isplati pojedinog kupca, koju ćemo označavati s e_i te očekivanom prihodu π prodavača. U aukciji zapečaćenih ponuda $(N, (\mathbb{V}_i, F_i)_{i \in N}, [0, +\infty)^n, p, C)$ za isplatu e_i vrijedi

$$e_i(v_i) = \int_{V_{-i}} \sum_{i_* \in N} p_{i_*}(b) C_i(i_*; \beta_1(x_1), \ldots \beta_n(x_n)) dF_{-i}(x).$$

Teorem 2.10. Neka je β strogo rastuća strategija simetričnog ekvilibrija u aukciji zapečaćenih ponuda s privatnim vrijednostima i neka vrijedi:

1. Pobjednik aukcije je kupac s najvećom privatnom vrijednošću.

2. Očekivana isplata igrača s privatnom vrijednošću 0 je 0.

Tada za očekivanu isplatu vrijedi

$$e_i(v_i) = F_Y(v_i)\mathbb{E}[Y \mid Y \leq v_i],$$

a za očekivani prihod prodavača

$$\pi = n \int_{\mathbb{V}} e_i(v) f(v) dv.$$

Dokaz. Neka je $v_1 \in \mathbb{V}$ i neka nije nijedna od rubnih točaka intervala $\mathbb{V}$. Ako kupac 1 odluči da neće primijeniti strategiju β kako treba, nego dâ ponudu kao da mu je privatna vrijednost z_1 (ponuda je $\beta(z_1)$), onda će dobiti aukciju jedino ako je z_1 veća od privatnih vrijednosti drugih kupaca i vjerojatnost toga je $F_Y(z_1)$. Tada je njegov profit

$$U_1(\beta_{z_1}, \beta_{-1}; v_1) = v_1 F_Y(z_1) - e_1(z_1).$$

S obzirom na to da je β ekvilibrij, najbolja ponuda kupca 1 je kada primijeni β-u kao da je $z_1 = v_1$ (iz definicije Bayes-Nashova ekvilibrija), tj. funkcija $z_1 \mapsto U_1(\beta_{z_1}, \beta_{-1}; v_1)$ poprima maksimum za $z_1 = v_1$. Pokazat ćemo da je e_1 diferencijabilna. Funkcija $z_1 \mapsto U_1(\beta_{z_1}, \beta_{-1}; v_1)$ poprima maksimum za $z_1 = v_1$, stoga vrijedi

$$v_1 F_Y(z_1) - e_1(z_1) = U_1(\beta_{z_1}, \beta_{-1}; v_1) \leq U_1(\beta_{v_1}, \beta_{-1}; v_1) = v_1 F_Y(v_1) - e_1(v_1). \tag{2.9}$$

Zamjenjivanjem uloga v_1-a i z_1, tj. z_1 sada postaje privatna vrijednost, dobivamo

$$z_1 F_Y(v_1) - e_1(v_1) = U_1(\beta_{v_1}, \beta_{-1}; z_1) \leq U_1(\beta_{z_1}, \beta_{-1}; z_1) = z_1 F_Y(z_1) - e_1(z_1). \tag{2.10}$$

Iz (2.9) i (2.10) dobivamo, redom

$$e_1(v_1) - e_1(z_1) \leq (F_Y(v_1) - F_Y(z_1))v_1 \tag{2.11}$$

i

$$e_1(v_1) - e_1(z_1) \geq (F_Y(v_1) - F_Y(z_1))z_1. \tag{2.12}$$

Za $z_1 \neq v_1$ dijeljenjem s $v_1 - z_1$ dobivamo

$$\frac{(F_Y(v_1) - F_Y(z_1))z_1}{v_1 - z_1} \leq \frac{e_1(v_1) - e_1(z_1)}{v_1 - z_1} \leq \frac{(F_Y(v_1) - F_Y(z_1))v_1}{v_1 - z_1}.$$

Uzimanjem limesa $\lim_{z_1 \to v_1}$ i po teoremu o sendviču dobivamo

$$\lim_{z_1 \to v_1} \frac{e_1(v_1) - e_1(z_1)}{v_1 - z_1} = v_1 f_Y(v_1) \quad \forall v_1 \in \mathbb{V},\ v_1 \neq \{0, \overline{v}\}.$$

tj. e_1 je diferencijabilna i derivacija iznosi $e_1'(v_1) = v_1 f_Y(v_1)$. S obzirom na to da je $e_1(0) = 0$, parcijalnom integracijom dobivamo

$$e_1(v_1) = e_1(0) + \int_0^{v_1} e_1'(y)dy = \int_0^{v_1} y f_Y(y)dy = F_Y(v_1)\mathbb{E}[Y \mid Y \leq v_1].$$

Tvrdnju o prihodu prodavača dobivamo sumiranjem po očekivanim isplatama kupaca. □

Prethodni teorem govori nam da, iz perspektive prodavača, određene aukcije donose iste prihode.
Pokažimo sada kako je simetričan ekvilibrij dobiven 2.9 jedinstven.

Teorem 2.11. Neka je β strogo rastuća strategija simetričnog ekvilibrija, koja zadovoljava $\beta(0) = 0$ u simetričnoj aukciji zapečaćenih ponuda po prvoj najvišoj cijeni s privatnim vrijednostima. Tada vrijedi

$$\beta(v) = \mathbb{E}[Y \mid Y \leq v].$$

Dokaz. S obzirom na to da je strategija β strogo rastuća, aukciju dobiva kupac s najvećom privatnom vrijednošću. Tada je za kupca s privatnom vrijednošću v vjerojatnost pobjede jednaka $F_Y(v)$, te ako pobjedi, platit će iznos $\beta(v)$, stoga je njegova očekivana isplata jednaka

$$e(v) = F_Y(v)\beta(v).$$

β zadovoljava uvjete Teorema 2.10, pa za očekivanu isplatu vrijedi

$$e(v) = F_Y(v)\mathbb{E}[Y \mid Y \leq v].$$

Kako je $F_Y(v)$ veći od 0 za svaki $v > 0$, tako izjednačavanjem izraza za e i dijeljenjem s F_Y dobivamo

$$\beta(v) = \mathbb{E}[Y \mid Y \leq v].$$

□

Na jednostavnom primjeru pokažimo određivanje optimalne strategije.

Primjer 2.12. Promatrajmo simetričnu aukciju zapečaćenih ponuda po prvoj najvišoj cijeni s $n \geq 2$ kupaca, gdje su privatne vrijednosti uzete iz uniforme distribucije $U(0, 1)$. Tada je $F_Y(v) = v^{n-1}$ i $f_Y(v) = (n-1)v^{n-2}$ za svaki $v \in [0, 1]$. Po Teoremu 2.9, strategija simetričnog ekvilibrija je

$$\beta(v) = \mathbb{E}[Y \mid Y \leq v] = \frac{1}{F_Y(v)} \int_0^{v} x f_Y(x)dx = \frac{1}{v^{n-1}} \int_0^{v} (n-1)x^{n-1}dx = \frac{n-1}{n}v.$$

Teorem 2.10 nam daje još jedan rezultat za aukcije u kojima svi plaćaju.

Teorem 2.13. Neka je β strogo rastuća strategija simetričnog ekvilibrija, koja zadovoljava $\beta(0) = 0$ u simetričnoj aukciji zapečaćenih ponuda u kojoj svi plaćaju s privatnim vrijednostima. Tada vrijedi

$$\beta(v) = F_Y(v)\mathbb{E}[Y|Y \leq v].$$

Dokaz. Kako i samo ime sugerira, svi kupci plaćaju svoju ponudu, pa za očekivanu isplatu vrijedi $e(v) = \beta(v)$. Uvjeti Teorema 2.10 su ispunjeni, pa i za isplatu vrijedi $e(v) = F_Y(v)\mathbb{E}[Y \mid Y \leq v]$, tj. $\beta(v) = F_Y(v)\mathbb{E}[Y \mid Y \leq v]$. □

Poglavlje 3

Mehanizmi prodaje

Do sada smo aukcije promatrali iz perspektive kupaca i načinima za maksimizaciju njihova profita u određenim aukcijama, no maksimiziranje profita se, naravno, može primijeniti i na prodavače. Promatrat ćemo općenitije mehanizme od aukcija.

Definicija 3.1. **Problem prodaje** je vektor $(N, (\mathbb{V}_i, F_i)_{i\in N})$, gdje su:

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je skup kupaca.
- $\mathbb{V}_i$,$\mathbb{V}_i \subseteq \mathbb{R}^+$ zatvoreni interval s lijevim rubom jednakim 0, skup je mogućih privatnih vrijednosti kupca i.
- F_i je vjerojatnosna funkcija distribucije nad skupom privatnih vrijednosti $\mathbb{V}_i$.

Od sada pa nadalje, pretpostavljamo iduće:

- Prodavač želi prodati jedan predmet te je njemu vrijednost predmeta jednaka 0.
- Svi kupci žele maksimizirati svoj očekivani profit.
- Privatna vrijednost kupca i je neprekidna slučajna varijabla nad $\mathbb{V}_i$ s funkcijom gustoće f_i, koja je strogo pozitivna na $\mathbb{V}_i$.
- Svaki kupac zna samo svoju privatnu vrijednost i ne zna tuđe, ali zna distribucije privatnih vrijednosti ostalih kupaca.

S $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2\times\cdots\times\mathbb{V}_n$ ćemo označavati prostor svih mogućih vektora privatnih vrijednosti. S f_V ćemo označavati funkciju gustoće slučajnog vektora $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$, te za njega vrijedi

$$f_V(v) = \prod_{i\in N} f_i(v_i).$$

Definicija 3.2. **Mehanizam prodaje** za problem prodaje $(N, (\mathbb{V}_i, f_i)_{i\in N})$ je vektor $((\Theta_i, \hat{q}_i, \hat{\mu}_i))$, gdje za svaki $i \in N$:

- Θ_i je izmjerivi **prostor poruka** kupca i. **Prostor profila poruka** je $\Theta = \Theta_i \times \Theta_2 \times \cdots \times \Theta_n$.
- $\hat{q}_i : \Theta \to [0, 1]$ je funkcija koja svakom vektoru poruka pridružuje vjerojatnost da je kupac i osvojio predmet.
- $\hat{\mu}_i : \Theta \to \mathbb{R}$ je funkcija koja svakom vektoru poruka pridružuje koliko kupac i mora platiti.

Za dani mehanizam prodaje, igra se iduća Bayesovska igra:

- Skup kupaca N je skup igrača.
- Skup privatnih vrijednosti kupca i je skup tipova igrača i.
- Vjerojatnosna mjera inducirana funkcijom distribucije $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ je vjerojatnosna mjera iz definicije Bayesovske igre.
- Za svaki $i \in N$, Θ_i je skup poteza igrača i.
- Za svaki $i \in N$ funkcija korisnosti u_i dana je s

$$u_i(\theta) = (\hat{q}_i(\theta))v_i - \hat{\mu}_i(\theta), \ \ \theta \in \Theta, v_i \in \mathbb{V}_i.$$

Lako se može primijetiti da su aukcije zapečaćenih ponuda inducirane mehanizmom prodaje u kojem je $\Theta = B$, dok funkcije C_i i p_i odgovaraju funkcijama $\hat{\mu}_i$ i $\hat{q}_i$. Općenito, prostori poruka igrača i mogu biti kompliciraniji od običnih intervala, tako da opisuju više njegovih radnji – poput dizanja ili spuštanja ruke tijekom engleske aukcije.

Definicija 3.3. Za mehanizam prodaje $((\Theta_i, \hat{q}_i, \hat{\mu}_i))$ kažemo da je **direktan** ako $\Theta_i = \mathbb{V}_i$, za svaki $i \in N$.

Prostori poruka jednaki su skupovima privatnih vrijednosti, stoga ćemo direktne mehanizme označavati skraćeno, s $(\hat{q}, \hat{\mu})$.
Uvodimo sljedeću definiciju, kojom se potiče da kupci šalju poruku koja govori o njihovoj stvarnoj procjeni predmeta.

Definicija 3.4. Direktni mehanizam $(\hat{q}, \hat{\mu})$ je **usklađen s poticajima** ako je vektor $\beta^* = (\beta_i^*)_{i\in N}$ ekvilibrij za $\beta_i^*(v_i) = v_i$.

Iako kupci mogu slati druge poruke, iz definicije vidimo da će se najviše okoristiti ako prijavljuju svoju stvarnu procjenu. Strategije koje nalažu da se prijavljuju stvarne privatne vrijednosti nazivat ćemo **iskrene**.

U prijašnjem poglavlju pokazali smo kako su aukcije zapečaćenih ponuda po drugoj najvišoj cijeni mehanizma usklađeni s poticajima.Sada predstavljamo teorem koji nam govori kako se prodavač u traženju svog željenog mehanizma može ograničiti na mehanizme usklađene s poticajima.

Teorem 3.5. (Princip otkrivanja) Neka je $((\Theta_i, \hat{q}_i, \hat{\mu}_i))$ mehanizam prodaje i $\hat{\beta}$ ekvilibrij tog mehanizma. Tada postoji direktni mehanizam (q, μ), usklađen s poticajima tako da originalni mehanizam i novi mehanizam daju iste rezultate.

Dokaz. Definirajmo direktni mehanizam (q, μ) tako da vrijedi

$$q(v_1, v_2, \dots, v_n) := \hat{q}(\hat{\beta}_1(v_1), \hat{\beta}_2(v_2), \dots, \hat{\beta}_n(v_n)),$$
$$\mu(v_1, v_2, \dots, v_n) := \hat{\mu}(\hat{\beta}_1(v_1), \hat{\beta}_2(v_2), \dots, \hat{\beta}_n(v_n)).$$

Preostaje pokazati da je prijavljivanje vlastite privatne vrijednosti optimalno za kupce, ali to slijedi direktno iz konstrukcije novog mehanizma i činjenice da $\hat{\beta}$ ekvilibrij u početnom mehanizmu. □

3.1 Teorem jednakosti prihoda

U ovom ćemo dijelu pokazati da određeni mehanizmi daju iste prihode prodavaču. Sličan rezultat već smo vidjeli u Teoremu 2.10.

Neka je (q, μ) direktni mehanizam. Kada igrač i s privatnom vrijednošću v_i odluči dati signal x_i, a svi ostali prijave svoju privatnu vrijednost, vjerojatnost da će osvojiti predmet prodaje je

$$Q_i(x_i) := \int_{\mathbb{V}_i} q_i(x_i, v_{-i}) f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i},$$

a njegova očekivana isplata prodavaču

$$M_i(x_i) := \int_{\mathbb{V}_i} \mu_i(x_i, v_{-i}) f_{-i}(v_i) dv_{-i}.$$

Njegov očekivani profit je onda

$$U_i(x_i, \beta^*_{-i}; v_i) = Q_i(x_i)v_i - M_i(x_i). \tag{3.1}$$

Označimo s W_i kupčev očekivani profit kada mu je poruka jednaka njegovoj evaluaciji,

$$W_i(v_i) := Q_i(v_i)v_i - M_i(v_i).$$

Teorem 3.6. Direktni mehanizam prodaje (q, μ) usklađen je s poticajima samo ako vrijedi

$$W_i(v_i) \geq W_i(x_i) + Q_i(x_i)(v_i - x_i)\, \forall i \in N, \forall v_i \in \mathbb{V}_i, \forall x_i \in \mathbb{V}_i.$$

Dokaz. Za očekivani profit vrijedi

$$\begin{aligned} U_i(x_i, \beta^*_{-i}; v_i) &= Q_i(x_i)v_i - M_i(x_i) \\ &= Q_i(x_i)x_i - M_i(x_i) + Q_i(x_i)(v_i - x_i) \\ &= W_i(x_i) + Q_i(x_i)(v_i - x_i). \end{aligned} \tag{3.2}$$

$\Rightarrow$
Direktni mehanizam prodaje je, po definiciji, onaj u kojem se ekvilibrij poprima kada kupci prijavljuju svoje stvarne procjene, tj. vrijedi

$$U_i(v_i, \beta^*_{-i}; v_i) = W_i(v_i) \geq u_i(x_i, \beta^*_{-i}; v_i).$$

Uzimajući to u obzir, uz (3.2), dobivamo

$$W_i(v_i) \geq W_i(x_i) + Q_i(x_i)(v_i - x_i).$$

$\Leftarrow$
Vrijedi

$$W_i(v_i) \geq W_i(x_i) + Q_i(x_i)(v_i - x_i) = U_i(x_i, \beta^*_{-i}; v_i),$$

tj. očekivani profit maksimizira se kada kupac šalje poruku jednaku svojoj stvarnoj procjeni. □

Idući će nam teorem dati formulu za računanje očekivanog profita.

Teorem 3.7. Neka je (q, μ) direktni mehanizam usklađen s poticajima. Tada je za svaki $v_i \in \mathbb{V}_i$

$$\begin{aligned} W_i(v_i) &= W_i(0) + \int_0^{v_i} Q_i(t_i)dt_i \\ &= -M_i(0) + \int_0^{v_i} Q_i(t_i)dt_i. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dokaz. Pokažimo da je Q_i neopadajuća.
Kako je (q, μ) mehanizam usklađen s poticajima, po Teoremu 3.6 vrijedi

$$W_i(v_i) - W_i(x_i) \geq Q_i(x_i)(v_i - x_i).$$

Zamjenjivanjem uloga v_i-a i x_i-a dobivamo

$$W_i(x_i) - W_i(v_i) \geq Q_i(v_i)(x_i - v_i).$$

Množenjem s -1 dobivamo

$$W_i(v_i) - W_i(x_i) \leq Q_i(v_i)(v_i - x_i).$$

Sve nejednadžbe vrijede i u posebnom slučaju, kada je $v_i \geq x_i$. Sve zajedno daje:

$$Q_i(x_i) \leq W_i(v_i)W_i(x_i) \leq Q_i(v_i)(v_i - x_i), \ \forall v_i \geq x_i. \tag{3.4}$$

Za $v_i > x_i$ možemo podijeliti (3.4) s $v_i - x_i$, te dobivamo da za $v_i > x_i$ vrijedi $Q_i(v_i) \geq Q_i(x_i)$, tj. funkcija je neopadajuća, te dobivamo da je i integrabilna na $[0, v_i]$ po Teoremu 5.5 iz [1].
Spremni smo pokazati tvrdnju teorema. Podijelimo interval $[0, v_i]$ u L intervala jednake duljine $\delta = \frac{v_i}{L}$ i neka je za k-ti podinterval $z^k = (k+1)\delta$ i $x^k = k\delta$. Uzimanjem $v_i = z^k$ i $x_i = x^k$ u (3.4) i sumiranjem po $k = 0, 1, \ldots, L-1$ dobivamo

$$\sum_{k=0}^{L-1} Q_i(x^k)(z^k - x^k) \leq \sum_{k=0}^{L-1} (W_i(z^k) - W_i(x^k)) \leq \sum_{k=0}^{L-1} Q_i(z^k)(z^k - x^k).$$

Svi se članovi u srednjoj sumi pokraćuju osim $-W_i(0)$ i $W_i(v_i)$, pa dobivamo da je ona jednaka $W_i(v_i) - W_i(0)$. Lijevi i desni izrazi u nejednakosti su donja, tj. gornja Darbouxova suma, stoga, kako je Q_i integrabilna, tako puštanjem L-a u beskonačnost sume, konvergiraju prema integralu $\int_0^{v_i} Q_i(t_i)dt_i$. Iz teorema o sendviču zaključujemo da je taj integral jednak $W_i(v_i) - W_i(0)$, čime smo dokazali prvu jednakost iz iskaza.
Dokažimo sada i drugu jednakost, tj. da vrijedi $W_i(0) = -M_i(0)$:

$$W_i(0) = U_i(0, \beta^*_{-i}; 0) = Q_i(0) \cdot 0 - M_i(0) = -M_i(0). \tag{3.5}$$

□

Iz prethodnog teorema i (3.4) dobivamo izraz za očekivane isplate kupaca

$$M_i(v_i) = M_i(0) + Q_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} Q_i(t_i)dt_i. \tag{3.6}$$

Idući rezultat govori nam o očekivanim isplatama kupaca.

Korolar 3.8. (Teorem o jednakosti prihoda) Za direktni mehanizam s usklađenim poticajima očekivana isplata $M_i(v_i)$ kupca i, jednaka je

$$M_i(0) + Q_i(v_i) - \int_0^{v_i} Q_i(t_i)dt_i.$$

Također, isplate kupaca u dvama različitim direktnim mehanizmima s usklađenim poticajima i s istim pravilom određivanje pobjednika, jednake su.

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz izraza (3.2) i Teorema 3.7. □

Posljedica korolara jest to da je očekivani prihod prodavača jednak (slično kao i u Teoremu 2.10) za direktne mehanizme s usklađenim poticajima u kojima su pravila određivanja pobjednika jednaka, pa je tako i dobio svoje ime.

3.2 Optimalni mehanizam

U ovom dijelu pronalazimo optimalni mehanizam iz prodavačeve perspektive, koji mu maksimizira prihode. Najprije uvedimo restrikciju na mehanizam koji će nam osigurati način kupčeva sudjelovanja u prodaji predmeta.

Definicija 3.9. Direktni mehanizam prodaje nazivamo **individualno-racionalnim** ako $W_i(v_i) \geq 0$ za svakog kupca i i svaki $v_i \in \mathbb{V}_i$.

Idući će nam teorem dati jednostavan način identificiranja individualno-racionalnih mehanizama s usklađenim poticajima. Takvi mehanizmi će nam kasnije biti kandidati za traženi optimalni mehanizam.

Teorem 3.10. Mehanizam s usklađenim poticajima je individualno-racionalan samo ako vrijedi $M_i(0) \leq 0$ za svakog kupca $i \in N$.

Dokaz. Iz Teorema 3.7 slijedi:

$$W_i(v_i) = -M_i(0) + \int_0^{v_i} Q_i(t_i)dt_i.$$

Kako je Q_i nenegativna funkcija, minimum od $W_i(v_i)$ postiže se za $v_i = 0$. Taj minimum će biti nenegativan jedino ako je $M_i(0) \leq 0$, čime smo dokazali teorem. □

Sada ćemo uvesti funkcije **virtualnih procjena** $c_i : \mathbb{V}_i \to \mathbb{R}$ koje će nam koristiti u traženju optimalnog mehanizma,

$$c_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}.$$

Definirajmo mehanizam (q^*, μ^*), koji će nam biti kandidat za traženi, optimalni, mehanizam:

$$q_i^*(v) = \begin{cases} 0, & c_i(v_i) \leq 0, \\ 0, & c_i(v_i) < \max\limits_{j \in N} c_j(v_j), \\ \frac{1}{\left|\{l : c_l(v_l) = \max\limits_{j \in N} c_j(v_j)\}\right|}, & c_i(v_i) = \max\limits_{j \in N} c_j(v_j) > 0, \end{cases}$$

$$\mu_i^*(v) = v_i q_i^*(v) - \int_0^{v_i} q_i^*(t_i, v_{-i}) dt_i.$$

Najprije pokažimo da ako je c_i neopadajuća, onda je (q^*, μ^*) usklađen s poticajima i individualno-racionalan. Slično kao što smo označavali i prije, s $Q_i^*(v_i)$ ćemo označavati vjerojatnost pobjede kupca i u slučaju da pošalje poruku v_i, a s $M_i^*(v_i)$ njegovu očekivanu isplatu prodavaču u slučajevima kada svi ostali kupci prijave svoju stvarnu privatnu vrijednost.

Teorem 3.11. Ako je za svakog kupca $i \in N$ funkcija c_i neopadajuća, onda je direktni mehanizam (q^*, μ^*) usklađen s poticajima i individualno-racionalan.

Dokaz. Dokaz provodimo u više koraka.

1.korak: Q_i^* je neopadajuća.

q_i^* je neopadajuća jer je i c_i neopadajuća, pa je Q_i^* neopadajuća iz monotonosti integrala.

2.korak:$U_i^*(x_i, \beta_{-i}^*; v_i) = Q_i^*(x_i)(v_i - x_i) + \int_0^{x_i} Q_i^*(t_i) dt_i$ za svaki $i \in N$ i svaki $x_i \in \mathbb{V}_i$. Po (3.1) slijedi

$$U_i^*(x_i, \beta_{-i}^*; v_i) = Q_i^*(x_i) v_i - M_i^*(x_i), \tag{3.7}$$

a po definiciji M_i^*

$$\begin{aligned} M_i^*(x_i) &= \int_{V_{-i}} \mu_i^*(x_i, v_{-i}) f_{-i}(v_{-i})\, dv_{-i} \\ &= \int_{\mathbb{V}_{-i}} \left(x_i q_i^*(x_i, v_{-i}) - \int_0^{x_i} q_i^*(t_i, v_{-i}) dt_i \right) f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i} \\ &= x_i Q_i^*(x_i) - \int_0^{x_i} Q_i^*(t_i) dt_i. \end{aligned}$$

Korištenjem prethodne jednakosti u (3.7) dobivamo

$$U_i^*(x_i, \beta_{-i}^*; v_i) = Q_i^*(x_i)(v_i - x_i) + \int_0^{x_i} Q_i^*(t_i)dt_i.$$

*3.korak:*Mehanizam je usklađen s poticajima.
Trebamo pokazati sljedeće: ako je kupčeva privatna vrijednost jednaka v_i, tada je najbolji signal koji mu maksimizira očekivani profit v_i, tj.

$$U_i^*(v_i, \beta^{-i}; v_i) \geq U_i^*(x_i, \beta^{-i}; v_i). \tag{3.8}$$

Koristeći se rezultatom iz drugog koraka, s obiju strana nejednakosti dobivamo da je mehanizam usklađen s poticajima – samo ako vrijedi:

$$Q_i^*(x_i)(v_i - x_i) + \int_0^{x_i} Q_i^*(t_i)dt_i \leq \int_0^{v_i} Q_i^*(t_i)dt_i.$$

Zadnji je izraz istinit ako vrijedi

$$Q_i^*(x_i)(v_i - x_i) \leq \int_{x_i}^{v_i} Q_i^*(t_i)dt_i, \ \forall v_i, x_i \in V_i. \tag{3.9}$$

Iz prvog koraka znamo da je Q_i^* neopadajuća. Razlikujemo dva slučaja, ovisno o tome je li x_i veći ili manji od v_i. Ako je x_i manji od v_i, onda tvrdnja vrijedi jer Q_i^* poprima minimum u x_i na intervalu $[x_i, v_i]$. Za $x_i > v_i$ vrijedi

$$Q_i^*(x_i)(x_i - v_i) = \int_{v_i}^{x_i} Q_i^*(x_i)dt_i \geq \int_{v_i}^{x_i} Q_i^*(t_i)dt_i$$

pa onda i

$$Q_i^*(x_i)(v_i - x_i) = -Q_i^*(x_i)(x_i - v_i) \leq -\int_{v_i}^{x_i} Q_i^*(t_i)dt_i = \int_{x_i}^{v_i} Q_i^*(t_i)dt_i$$

te smo time dokazali željeno.
*4.korak:*Mehanizam je individualno-racionalan.

S obzirom na to da je mehanizam direktan i usklađen s poticajima, po Teoremu 3.10 trebamo pokazati $M_i^*(0) \leq 0$ za svakog kupca. Iz definicije μ^* slijedi

$$\mu_i^*(0, v_{-i}) = 0 \cdot q_i^*(0, v_{-i}) + \int_0^0 q_i^*(t_i, v_{-i} dt_i = 0$$

pa vrijedi

$$M_i^*(0) = \int_{\mathbb{V}_i} \mu_i^*(0, v_{-i}) f_{-i}(v_{-i})\, dv_{-i} = 0,$$

tj. vrijedi tvrdnja četvrtog koraka i time je dokazu teorema kraj. □

Idući teorem nam govori sljedeće: ako su funkcije c_i neopadajuće, onda mehanizam (q^*, μ^*) maksimizira očekivani prihod prodavača.

Teorem 3.12. Neka je $(N, (\mathbb{V}_i, F_i)_{i \in N})$ problem prodaje i pretpostavimo da su sve funkcije c_i neopadajuće. Tada mehanizam (q^*, μ^*) maksimizira prodavačev očekivani prihod π među svim individualno-racionalnim mehanizmima usklađenima s poticajima.

Dokaz. Prodavačev prihod jednak je sumi očekivanih isplata kupaca

$$\pi = \sum_{i \in N} \mathbb{E}[M_i(V_i)].$$

Iz (3.6) dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_i(V_i)] &= \int_0^{\overline{v_i}} M_i(v_i) f_i(v_i) dv_i \\
&= M_i(0) + \int_0^{\overline{v_i}} Q_i(v_i) v_i f_i(v_i) dv_i - \int_0^{\overline{v_i}} \left(\int_0^{v_i} Q_i(t_i) dt_i \right) f_i(v_i) dv_i.
\end{aligned}$$

Koristeći se činjenicom da vrijedi $F_i(\overline{v_i}) = 1$ i zamjenom poretka integracije u zadnjem članu, dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\overline{v_i}} \left(\int_0^{v_i} Q_i(t_i) dt_i \right) f_i(v_i) dv_i &= \int_0^{\overline{v_i}} \left(\int_{t_i}^{\overline{v_i}} Q_i(t_i) f_i(v_i) dv_i \right) dt_i \\
&= \int_0^{\overline{v_i}} Q_i(t_i)(1 - F_i(t_i)) dt_i.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_i(V_i)] &= M_i(0) + \int_0^{\overline{v_i}} Q_i(v_i)v_if_i(v_i)dv_i - \int_0^{\overline{v_i}} Q_i(t_i)(1-F_i(t_i))dt_i \\
&= M_i(0) + \int_0^{\overline{v_i}} Q_i(v_i)f_i(v_i)\left(v_i - \frac{1-F_i(v_i)}{f_i(v_i)}\right)dv_i \\
&= M_i(0) + \int_0^{\overline{v_i}} Q_i(v_i)c_i(v_i)f_i(v_i)dv_i \\
&= M_i(0) + \int_{\mathbb{V}} q_i(v)c_i(v_i)f_V(v)dv,
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost dolazi iz nezavisnosti privatnih vrijednosti i definicije Q_i. Sumiranjem po N-u, za očekivani prihod prodavača dobivamo

$$\pi = \sum_{i\in N} M_i(0) + \int_{\mathbb{V}} \left(\sum_{i\in N} q_i(v)c_i(v_i)\right) f_V(v)dv.$$

Prvi pribrojnik ovisi samo o $M_i(0)$-evima, a drugi o q_i-evima, pa će se suma maksimizirati ako se maksimiziraju oba pribrojnika. Po Teoremu 3.10 $M_i(0) \leq 0$, a u našem slučaju je on 0 kada je $\mu = \mu^*$, tj. prvi se pribrojnik maksimizira. Maksimum drugog pribrojnika ovisi o $\sum_{i\in N} q_i(v)c_i(v_i)$. Ako je $c_i(v_i)$ za svaki $i \in N$, onda se suma maksimizira ako je za svaki i $q_i(v) = 0$. Ako $\max_{i\in N} c_i(v_i) \geq 0$, suma se maksimizira u slučaju kada je suma q_i-eva jednaka za kupce za koje je $c_i(v_i)$ maksimalan. Takav q je točno q^*. □

Idući korolar nam daje aukciju koja maksimizira očekivani prihod prodavača. Uvedimo prvo pojam rezervne cijene. *Rezervne cijena* je minimalna vrijednost po kojoj prodavač prodaje predmet. Naprimjer, ako je rezervna cijena jednaka 1000 eura, onda prodavač neće prodati predmet ako cijena ne dosegne tu razinu u aukciji.

Korolar 3.13. Ako su privatne vrijednosti jednako distribuirane i ako su funkcije virtualnih procjena c_i neopadajuće i neprekidne, tada mehanizam usklađen s poticajima, koji maksimizira prodavačev očekivani prihod predstavlja aukciju zapečaćenih ponuda po drugoj najvećoj cijeni s rezervnom cijenom.

Dokaz. Kako su privatne vrijednosti kupaca jednako distribuirane, tako slijedi da su im i virtualne procjene jednake. Označimo ih s $c := c_1$. Neka je

$$\rho := \inf\{t_1 \in \mathbb{V}_1 : c_1(t_1) > 0\}.$$

S obzirom na to da je c neprekidna funkcija, vrijedi $c(\rho) = 0$. Po definiciji od q^*, pobjednik će biti onaj koji dâ najvišu ponudu i ta ponuda prelazi rezervnu cijenu ρ

$$q_i^*(v_i) = \begin{cases} 0, & c_i(v_i) \leq 0 \text{ ili } c_i(v_i) < \max\limits_{j \in N} v_j \text{ ili } v_i < \rho, \\ \frac{1}{\left|\{l : c_l(v_l) = \max\limits_{j \in N} c_j(v_j)\}\right|}, & c_i(v_i) = \max\limits_{j \in N} v_j i v_i > \rho. \end{cases}$$

Računamo μ^*. Ako je $v_i \leq \rho$ ili $v_i < \max\limits_{j \neq i} v_j$, onda je $q_i(t_i) = 0$ za svaki $t_i \leq v_i$ i kupac ništa ne plaća. Ako je $v_i > \rho$ i $v_i \geq \max\limits_{j \neq i} v_j$, onda je $q_i^*(t_i) = \frac{1}{\left|\{l : c_l(v_l) = \max\limits_{j \in N} c_j(v_j)\}\right|}$ za svaki $t_i \in [\max\limits_{j \neq i}, v_i]$, a 0 inače. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \mu_i^*(v_i) &= v_i q_i^*(v_i) - \int_0^{v_i} q_i^*(t_i, v_{-i}) dt_{-i} \\ &= v_i q_i^*(v_i) - \int_{\max\limits_{j \neq i} v_j}^{v_i} q_i^*(t_i, v_{-i}) dt_{-i} \\ &= v_i \frac{1}{\left|\{l : c_l(v_l) = \max\limits_{j \in N} c_j(v_j)\}\right|} - \int_{\max\limits_{j \neq i} v_j}^{v_i} \frac{1}{\left|\{l : c_l(v_l) = \max\limits_{j \in N} c_j(v_j)\}\right|} dt_{-i} \\ &= v_i \frac{1}{\left|\{l : c_l(v_l) = \max\limits_{j \in N} c_j(v_j)\}\right|} - (v_i - \max_{j \neq i} v_j) \frac{1}{\left|\{l : c_l(v_l) = \max\limits_{j \in N} c_j(v_j)\}\right|} \\ &= \frac{\max\limits_{j \neq i} v_j}{\left|\{l : c_l(v_l) = \max\limits_{j \in N} c_j(v_j)\}\right|}, \end{aligned}$$

tj. isplata kupca koji osvoji aukciju ovisi o drugoj najvišoj ponudi. □

Napomena 3.14. Iako smo se u dokazu ponašali kao da se može dogoditi da više kupaca ponudi istu ponudu, te se u tom slučaju isplata dijeli na više igrača – neovisno o tome jesu li dobili aukciju, taj događaj je vjerojatnosti 0 jer su slučajne varijable V_i o procjenama bile neprekidne po pretpostavkama s početka poglavlja, a prethodni mehanizam bio je usklađen s ponudama. Iz tog razloga ih je u redu nazivati aukcijama zapečaćenih ponuda po drugoj najvećoj cijeni, kao što su bile opisane u prvom poglavlju (tamo su isplate uzimale i mogućnost bacanja novčića, pa se isplata nije dijelila) - mehanizmi su g.s. jednaki.

Bibliografija

[1] B. Guljaš, *Matematička analiza I i II*, 2018.

[2] V. Krishna, *Auction Theory*, Academic Press, 2009.

[3] E. i Zamir S. Maschler, M. i Solan, *Game Theory*, Cambridge University Press, 2013.

[4] P. Milgrom, *Auctions and Bidding: A Primer*, Journal of Economic Perspective **3** (1989), br. 3, 3–22.

[5] E. Rasmusen, *Games and Information: An Introduction to Game Theory*, Blackwell, 1990.

[6] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 1992.

Sažetak

U ovom radu predstavili smo osnove teorije aukcija i njezine glavne rezultate. Počeli smo nudeći više primjera različitih tipova aukcija i objašnjavajući njihovu mehaniku. Zatim smo identificirali optimalne strategije licitiranja za kupce u aukcijama sa zatvorenim ponudama prvog i drugog tipa, koje se pokazuju i elegantnima i jednostavnima. U drugom dijelu rada fokusirali smo se na pomoć prodavatelju u identificiranju tipa aukcije koji maksimizira prihod. Pokazali smo da aukcije sa zatvorenim ponudama prvog i drugog tipa donose isti prihod prodavatelju. U tom smo kontekstu pokazali da, kako bi maksimizirao prihod, prodavatelj treba odabrati aukciju sa zatvorenim ponudama drugog tipa s minimalnom cijenom.

Summary

In this thesis, we presented the fundamentals of auction theory along with its primary results. We began by offering multiple examples of different types of auctions and explaining their mechanics. After that, we identified the optimal bidding strategies for buyers in sealed-bid first and second-price auctions, which proved to be both elegant and straightforward. In the second part of the thesis, we focused on assisting the seller in identifying the auction type that maximizes revenue. We demonstrated that sealed-bid first and second-price auctions yield the same revenue for the seller. In this context, we showed the following: to maximize revenue, the seller should opt for a sealed-bid second-price auction with a reserve price.

Životopis

Rođen sam 28. 5. 1999. u Zagrebu, gdje sam proveo ostatak dosadašnjeg života. Pohađao sam OŠ Frana Galovića, a nakon završetka osnovnoškolskog obrazovanja, upisao sam I. gimnaziju u Zagrebu. 2018. godine upisao sam preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji sam završio 2021. godine i stekao titulu prvostupnika matematike (univ. bacc. math.). Po završetku preddiplomskog studija upisao sam diplomski studij Prirodoslovno-matematičkog fakulteta smjer Matematička statistika.