

# Određivanje optimalnog rješenja problema premještanja kauča

---

**Glasnović, Lea**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:532009>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-30**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Lea Glasnović

**ODREĐIVANJE OPTIMALNOG**  
**RJEŠENJA PROBLEMA**  
**PREMJEŠTANJA KAUČA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv. prof. dr. sc. Marko Erceg

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Za mamu i tatu.*

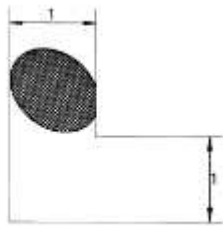
# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>1 Uvod i motivacija</b>	<b>1</b>
<b>2 Pokušaji rješavanja</b>	<b>3</b>
2.1 Najveća moguća površina kauča . . . . .	4
2.2 Hammersleyev kauč . . . . .	9
<b>3 Gergerov kauč</b>	<b>13</b>
<b>4 Poopćenje Gergerovog rješenja</b>	<b>17</b>
4.1 Rotacijska putanja, kontaktne točke i putanje . . . . .	18
4.2 Poopćenje Hammersleyjevog kauča . . . . .	22
4.3 Familija običnih diferencijalnih jednačbi . . . . .	23
4.4 Izvod Gergerovog rješenja . . . . .	29
4.5 Poboľšanje gornje granice . . . . .	32
4.6 Otvoreni problemi . . . . .	33
<b>5 Ambideksterni problem pomicanja kauča</b>	<b>34</b>
5.1 Egzaktno rješenje ambideksternog problema pomicanja kauča . . . . .	36
5.2 Geometrijska i algebarska svojstva rješenja . . . . .	41
<b>Bibliografija</b>	<b>43</b>

# Poglavlje 1

## Uvod i motivacija

Austrijsko-kanadski matematičar Leo Moser 1966. godine je postavio pitanje u uglednom matematičkom časopisu *Društva za industrijsku i primijenjenu matematiku* (naziv na izvornom jeziku: The Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM) koje glasi: *Koja je najveća površina skupa koji se može kretati kroz prugu širine 1?*



Slika 1.1: Originalna slika problema (slika preuzeta iz [13]).

Iako nije eksplicitno zadano, iz slike 1.1 vidimo da je Moser mislio na prugu u obliku slova  $L$ , odnosno ravnu prugu koja u jednom trenutku ima rotaciju za kut od  $90^\circ$ . To pitanje kasnije je postalo poznato pod nazivom *Problem premještanja kauča* (eng. Moving sofa problem), gdje se dana pruga zamišljala kao *hodnik* (eng. hallway), a traženi skup kao *kauč* (eng. sofa).

Ovaj naizgled jednostavan problem pokazao se znatno složeniji nego što se očekivalo, pa je time privukao i veliku pozornost u primijenjenoj matematici i računalnoj geometriji. O njegovoj složenosti najviše nam govori činjenica da još uvijek nije formalno riješen. Cilj ovog diplomskog rada je pružiti dublji uvid u različite aspekte i metode rješavanja ovog problema, s naglaskom na teoretskim pristupima.

Za početak, razmotrit ćemo prve pokušaje rješavanja problema, s fokusom na definiranje najveće moguće površine koja može proći kroz hodnik te na Hammersleyev model

kauča, koji smatramo prvim pravim kandidatom za rješenje. Ovi rani pristupi pružaju nam uvid u ograničenja i mogućnosti problematike.

Zatim ćemo se posvetiti Gergerovom modelu kauča koji je postavio novi standard u razumijevanju ovog problema. Naime, Joseph Gerger je u svom radu *On moving a sofa around a corner* [3] 1992. predstavio oblik kauča koji i danas smatramo najboljim. Njegov pristup bit će analiziran i objašnjen.

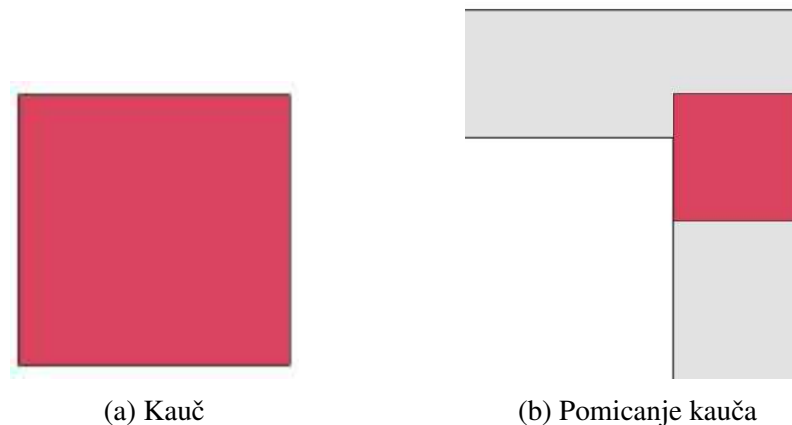
Preostala poglavlja fokusirat će se na recentne pokušaje rješavanja, pri čemu poseban naglasak stavljamo na doprinos Dana Romika. Predstaviti ćemo njegov rad, *Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem* [11], u kojem je popočio Gergerovo rješenje. Također ćemo analizirati ambideksterni problem pomicanja kauča kao jednu od inačica originalnog problema, te ćemo razmotriti Romikovog kandidata za rješenje koji je predstavio u istom radu.

Rad je prožet s više ilustracija koje su ili preuzete iz izvornih referenci ili napravljene u programu Geogebra. Za numerčko računanje korišten je program MATLAB.

## Poglavlje 2

### Pokušaji rješavanja

Krenimo redom od najjednostavnijih oblika. Prvi oblik kauča koji sigurno može proći kroz hodnik širine 1 je kvadrat duljine stranice  $a = 1$ .



Slika 2.1: Kauč u obliku kvadrata.

Njegova površina iznosi

$$P_{\text{kvadrat}} = a^2 = 1.$$

Može li bolje? Sljedeći jednostavniji mogući oblik kauča je polukrug radijusa 1. Po formuli za površinu kruga imamo:

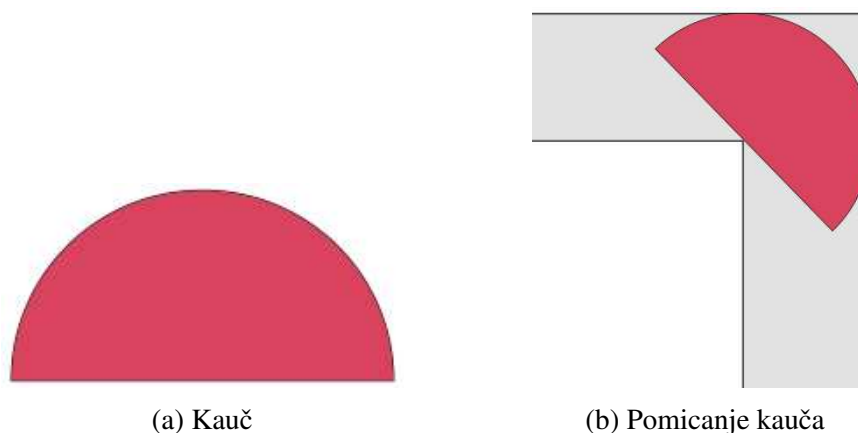
$$P_{\text{krug}} = r^2 \pi = \pi,$$

odnosno za polukrug

$$P_{\text{polukrug}} = \frac{\pi}{2} \approx 1.570796.$$

Vidimo da smo uspješno povećali površinu.





Slika 2.2: Kauč u obliku polukruga.

Iako je konstrukcija kauča u obliku polukruga relativno jednostavna, ovaj dizajn je znatno zanimljiviji od kvadratnog kauča zbog složenijeg načina prolaska kroz kut hodnika. Za razliku od kvadratnog kauča koji se samo translacija, polukružni kauč se rotira. Ova razlika u mehanizmu kretanja inspirirala je matematičare da razmisle o dizajnu kauča koji kombinira translaciju i rotaciju dok se kreće duž pruge.

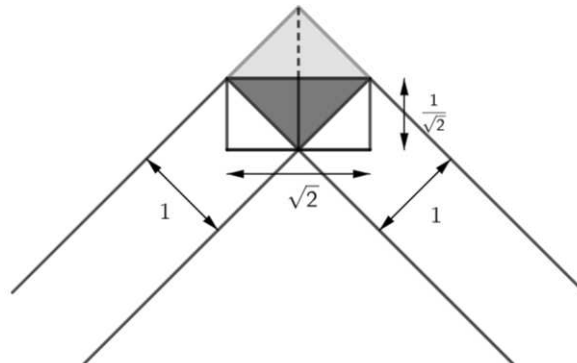
## 2.1 Najveća moguća površina kauča

S obzirom na predodređenu širinu hodnika za pretpostaviti je da će i površina kauča biti ograničena. Postoji, dakle, najveći mogući kauč koji može proći kroz zadani hodnik.

Kvadrat čija je duljina stranice 1 predstavlja najveći kvadrat koji može proći kroz hodnik širine 1. Značajno je napomenuti da ga nije moguće rotirati, već samo translirati duž hodnika, što ga čini jedinim geometrijskim oblikom s takvim svojstvom te će se daljnji pokušaji rješavanja temeljiti na oblicima koji kroz hodnik prolaze translacijom i rotacijom.

### Najveći pravokutnik

Jedinični kvadrat također može poslužiti kao osnova za konstrukciju najvećeg pravokutnika koji može prolaziti hodnikom. Rastavimo kvadrat na četiri sukladna pravokutna trokuta, označimo ih različito radi raspoznavanja. U ovom slučaju dva svjetlosiva i dva tamnosiva (slika 2.3). Katete sva četiri trokuta iznose  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , a hipotenuze 1. Presložimo trokute tako da spojimo hipotenuze. Duljina nastalog pravokutnika odgovara zbroju dviju kateta trokuta, odnosno  $\sqrt{2}$ , a širina je jednaka jednoj kateti, odnosno  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . To je ujedno i najveći pravo-



Slika 2.3: Dimenzije najvećeg pravokutnika.

kutnik koji se može rotirati za  $90^\circ$  unutar hodnika širine 1 i njegova je površina jednaka površini jediničnog kvadrata.

### Regija najveće površine

James D. Sebastian [13] svoj je odgovor na problem dao tako što je dokazao da je gornja granica najveće moguće površine kauča  $2\sqrt{2}$ . To je napravio na način da je najprije postavio blage restrikcije na klasu dopuštenih kaučeva, a zatim iz njih izvukao potrebne zaključke. Te restrikcije su bile sljedeće:

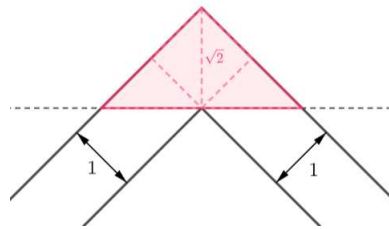
1. kauč ima os simetrije
2. kada kauč nije u kutu, simetrija može biti okomita na smjer hodnika
3. kako se kauč kreće oko ugla, simetrija kauča podudara se sa simetralom kuta

Posljedica prvog i drugog uvjeta je da kauč ima maksimalnu širinu u smjeru osi simetrije. Uzimajući u obzir i treći uvjet vidimo da kauč mora u potpunosti ležati unutar presjeka hodnika i jedinične pruge okomite na simetralu kuta. Kada se kauč nalazi unutar presjeka, okomicu, odnosno najveću udaljenost između vrha kuta hodnika i kauča označavamo s  $d$ . Da bi presjek bio neprazan mora vrijediti  $0 \leq d \leq \sqrt{2}$ , odnosno mora biti manji od dijagonale jediničnog kvadrata.

Razmotrimo situaciju kada je kauč rotiran za  $45^\circ$  u odnosu na kut hodnika. Da bi stao u ravni dio hodnika, kauč se mora nalaziti i unutar osjenčanog područja koji predstavlja presjek između zadanog hodnika i ravnog hodnika širine 1 (označenog ravnim iscrtkanim linijama na ilustracijama u nastavku).

Sa  $d$ , dakle, označimo udaljenost između vrha kuta hodnika i dijela kauča koji stane u ravni hodnik. Pomoću  $d$  možemo parametrizirati različite položaje kauča u odnosu na hodnik.

Sada ćemo izračunati koja je najveća moguća površina kauča. Za početak definirajmo **trokut kuta hodnika** kao dio hodnika omeđen kracima i okomicom simetrale unutarnjeg kuta hodnika.

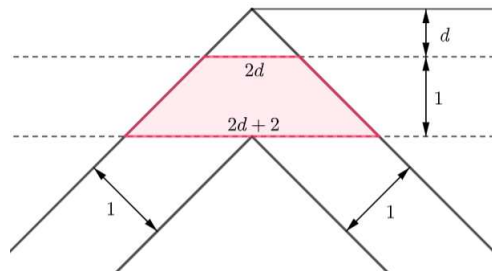


Slika 2.4: Trokut kuta hodnika.

Primijetimo da je visina trokuta kuta hodnika jednaka dijagonali jediničnog kvadrata i iznosi  $\sqrt{2}$ . Što se tiče odnosa između kauča i trokuta kuta hodnika imamo dvije mogućnosti:

### 1. Kauč stane u trokut kuta hodnika

To vrijedi kada je  $0 \leq d \leq \sqrt{2} - 1$ .



Slika 2.5

Na ilustraciji vidimo da imamo dva sukladna jednakokračna trokuta sa osnovicama redom  $2d$  i  $2d + 2$  i visinama  $d$  i  $d + 1$ . Sve veličine dobivamo direktno iz konstrukcije. Površina manjeg, bijelog trokuta iznosi

$$P_{t_1}(d) = \frac{2d \cdot d}{2} = d^2,$$

a površina većeg trokuta koji se sastoji od manjeg trokuta i osjenčanog dijela iznosi

$$P_{t_2}(d) = \frac{(2d+2)(d+1)}{2} = d^2 + 2d + 1.$$

Oduzimanjem tih dviju površina dobivamo površinu kauča. Ona je jednaka

$$\begin{aligned} P(d) &= P_{t_2} - P_{t_1} \\ &= d^2 + 2d + 1 - d^2 \\ &= 2d + 1. \end{aligned}$$

Dakle,

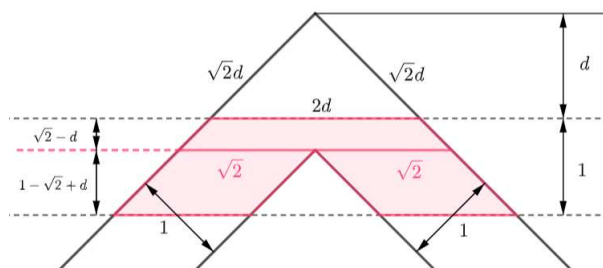
$$P(d) = 2d + 1, \quad 0 \leq d \leq \sqrt{2} - 1.$$

Funkcija postiže svoj maksimum za  $d = \sqrt{2} - 1$ , stoga najveća moguća površina kauča koji stane u kut hodnika iznosi:

$$P(d) = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1.828427.$$

## 2. Kauč ne stane u trokut kuta hodnika

To vrijedi kada je  $\sqrt{2} - 1 \leq d \leq \sqrt{2}$ .



Slika 2.6

Primijetimo da je površina trokuta iznad ružičaste linije jednaka

$$P_{t_1}(d) = \frac{2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - d + d)}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2.$$

Površina bijelog trokuta jednaka je

$$P_{t_2}(d) = \frac{2d \cdot d}{2} = d^2.$$

I naposljetku, površina svakog paralelograma ispod ružičaste linije iznosi

$$P_p(d) = (1 - \sqrt{2} + d) \sqrt{2} = \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}d.$$

Sada možemo izračunati površinu kauča na sljedeći način

$$\begin{aligned} P(d) &= P_{t_1} - P_{t_2} + 2P_p \\ &= 2 - d^2 + 2(\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}d) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2}d - d^2. \end{aligned}$$

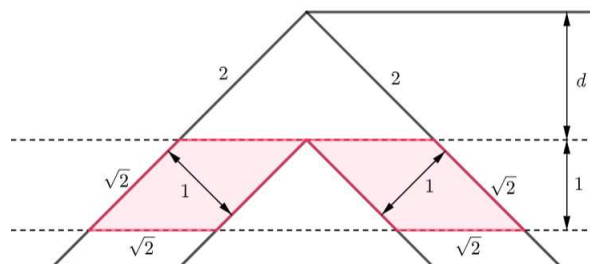
Funkcija postiže svoj maksimum za  $d = \sqrt{2}$ , stoga najveća moguća površina kauča koji stane u kut hodnika iznosi:

$$P(d) = 2\sqrt{2} \approx 2.828427.$$

Primijetimo da bi se za  $d > \sqrt{2}$  kauč podijelio na dva dijela prilikom prolaska kroz kut hodnika, a to ne bi bilo prikladno rješenje. Kada  $d$  iznosi točno  $\sqrt{2}$  tada je kauč u sredini još uvijek povezan beskonačno malim dijelom. Da sumiramo, maksimalna površina kauča iskazana kao funkcija od  $d$  je

$$P(d) = \begin{cases} 2d + 1, & 0 \leq d < \sqrt{2} - 1 \\ 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2}d - d^2, & \sqrt{2} - 1 \leq d \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Maksimalna površina regije koju kauč može zauzeti iznosi  $2\sqrt{2}$  i možemo ju vidjeti na sljedećoj ilustraciji.

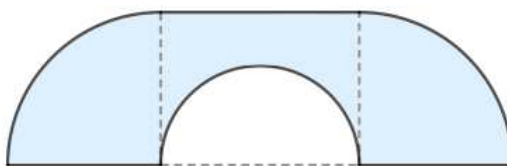


Slika 2.7

Primijetimo da smo ovime pokazali da najveća moguća površina kauča koji može proći kroz hodnik u obliku slova  $L$  iznosi  $2\sqrt{2}$ , no ne i da takav kauč eksplicitno postoji.

## 2.2 Hammersleyev kauč

Prvi ozbiljniji pokušaj rješavanja problema dao je John Michael Hammersley 1968. godine [7]. On je primijetio da ako se polukrug podijeli na dva dijela, a prostor između njih ispuni pravokutnikom, dobivamo veći oblik kauča. Taj kauč mogao se rotirati oko kuta pod uvjetom da se iz pravokutnika ukloni manji polukružni dio. Vizualni prikaz takvog kauča vidimo na sljedećoj ilustraciji.



Slika 2.8: Hammersleyev kauč.

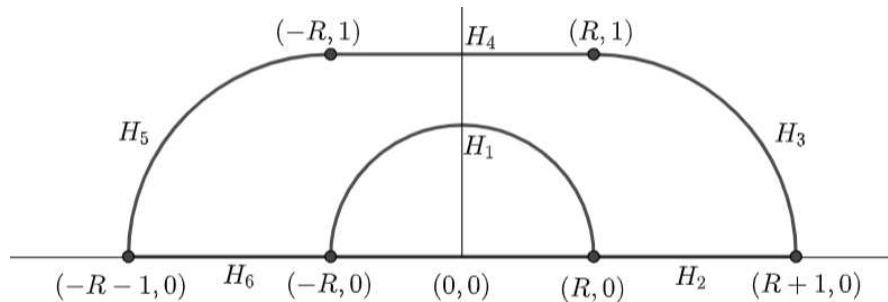
Sada ćemo rigoroznije definirati Hammersleyev kauč i pokazati da on prolazi kroz hodnik. Također ćemo i odrediti njegovu površinu.

**Definicija 2.2.1.** Za  $R \in (0, 1)$  odgovarajući Hammersleyev kauč omeđen je sa sljedećih šest krivulja

1. Kružni luk polukruga radijusa  $r \in [0, \pi]$  s centrom u  $(0, 0)$ . Polukrug počinje u  $(R, 0)$  i završava u  $(-R, 0)$
2. Dužina između točaka  $(R, 0)$  i  $(R + 1, 0)$
3. Kružni luk četvrtine kruga s centrom u  $(R, 0)$ . Četvrt kruga počinje u  $\frac{\pi}{2}$  i ide u 0. Četvrtina kruga počinje u  $(R + 1, 0)$  i završava u  $(R, 1)$
4. Dužina između točaka  $(R, 1)$  i  $(-R, 1)$
5. Kružni luk četvrtine kruga s centrom u  $(-R, 0)$ . Četvrt kruga počinje u  $\pi$ , a završava u  $\frac{\pi}{2}$ . Četvrtina kruga počinje u  $(-R, 1)$  i završava u  $(-R - 1, 0)$
6. Dužina između točaka  $(-R - 1, 0)$  i  $(-R, 0)$

Gornje krivulje označavamo redom  $H_1, H_2, \dots, H_6$ .

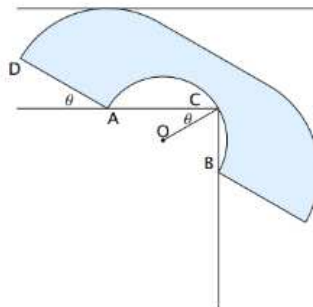
Vidimo da je ovdje zapravo riječ o familija skupova koji predstavljaju kauč. Pokažimo da je tako definirana krivulja dovoljno dobra i odredimo za koji  $R$  kauč poprima najveću površinu.



Slika 2.9: Krivulje Hammersleyevog kauča.

**Propozicija 2.2.2.** *Hammersleyev kauč radijusa  $R \in [0, 1]$  može se pomicati unutar hodnika koji sadrži pravi kut.*

*Dokaz.* Obzirom da imamo radijus  $R$ , sve točke na rotacijskoj putanji su oblika  $R(-\cos \alpha, -\sin \alpha)$ , za  $\alpha \in [0, \pi]$ . Budući da kauč pri rotaciji jedino dira gornji zid, desni zid i kut između njih za dokaz propozicije dovoljno je dokazati da su ta tri dijela kauča tangencijalna kutu i primijeniti Talesov teorem. Time ćemo osigurati da prilikom rotacije ne dolazi do kolizije između kauča i hodnika.



Slika 2.10: Rotacija Hammersleyevog kauča za  $\theta = \alpha$  (slika preuzeta iz [14].)

Da bismo pokazali da je krivulja  $H_3$  iz definicije 2.2.1 tangencijalna na kut dovoljno je pokazati da je točka  $O$  polovište dužine  $\overline{AB}$ . Koordinate točaka  $A$  i  $B$  su redom  $(-2R \cos \alpha, 0)$ ,  $(0, -2R \sin \alpha)$ .  $\alpha$  predstavlja kut rotacije kauča oko centra rotacije  $O$ , odnosno oko kuta hodnika. Neka je  $C$  točka u kojoj krivulja  $H_3$  dodiruje unutarnji kut hodnika. Tada vrijedi  $\angle OAC = \angle ACO = \alpha$  jer su  $\overline{OA}$  i  $\overline{OC}$  radijusi polukruga s lukom  $\overline{AB}$ . Analogno i za  $\overline{OB}$ . Sada po formuli za polovište dužine imamo da su koordinate točke  $O$  upravo  $R(-\cos \alpha, -\sin \alpha)$ .

Preostaje nam provjeriti tangencijalnost krivulja  $H_1$  i  $H_4$  prethodne definicije. Budući da su te dvije krivulje simetrične dovoljno je pokazati tangencijalnost za jednu od njih.

Krivulja  $H_1$  predstavlja četvrt kruga radijusa 1 koji se rotira oko točke  $A$ . Istovremeno se  $A$  translacija duž hodnika po donjem zidu. Budući da smo već dokazali da uvijek postoji dužina tangencijalna kutu dovoljno je primijeniti Talesov teorem da bismo potvrdili da se Hammersleyev kauč zaista može kretati duž hodnika s pravim kutom.  $\square$

### Površina Hammersleyevog kauča

Vidimo da se skup koji predstavlja kauč sastoji od dvije četvrtine jediničnog kruga i pravokutnika duljine  $2R$  i širine 1. Međutim, da bi se kauč mogao rotirati oko kuta hodnika, morali smo ukloniti polukružni dio radijusa  $R$  iz pravokutnika. Dakle, površina Hammersleyevog kauča je oblika

$$P = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2R \cdot 1 - \frac{R^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2R - \frac{R^2\pi}{2}, \quad R \in [0, 1].$$

Preostaje nam odrediti radijus  $R$  za koji funkcija površine poprima svoj maksimum.

**Propozicija 2.2.3.** *Površina Hammersleyevog kauča poprima najveću vrijednost za  $R = \frac{2}{\pi}$ .*

*Dokaz.* Neka je

$$P = \frac{\pi}{2} + 2R - \frac{R^2\pi}{2},$$

gdje je  $P$  površina Hammersleyevog kauča i  $R \in [0, 1]$ . Sada ćemo izračunati derivaciju površine  $P$  po parametru  $R$  kako bismo pronašli kritične točke i eventualne ekstreme,

$$P' = \frac{dP}{dR} = 2 - R\pi.$$

Izjednačimo derivaciju s nulom i rješavamo za  $R$ ,

$$0 = 2 - R\pi.$$

Dakle,

$$R = \frac{2}{\pi}.$$

Pokažimo još da je riječ o maksimumu. Za to nam je potrebna druga derivacija početne funkcije za površinu. Ona iznosi

$$P'' = -\pi.$$

Pošto je druga derivacija funkcije  $P$  negativna, to znači da je  $P$  konkavna i da je riječ je o maksimumu.

Time potvrđujemo da se za  $R = \frac{2}{\pi}$  postiže maksimum.  $\square$



Naravno, kako je  $P = P(R)$  kvadratna funkcija čiji graf je parabola s otvorom prema dolje, jasno je da se u tjemenu parabole (što upravo odgovara točki  $R = \frac{2}{\pi}$ ) postiže globalni maksimum funkcije  $P$ . Uvrštavanjem  $R = \frac{2}{\pi}$  u formulu za  $P$  imamo

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{2}{\pi} - \pi \cdot \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} - \pi \cdot \frac{2^2}{2\pi^2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Dakle, maksimalna površina Hammersleyevog kauča jednaka je

$$P = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \approx 2.20741609916.$$

U nastavku rada ćemo pod terminom *Hammersleyev kauč* podrazumijevati točno ovaj za  $R = \frac{2}{\pi}$ .

Međutim, Hammersleyev kauč nije optimalno rješenje zato što se uglovi na krajevima polukruga mogu dodatno zaokružiti, što omogućuje dodavanje više površine na vanjske lukove. Time je problem ostao otvoren i uslijedili su novi pokušaji njegovog rješavanja.

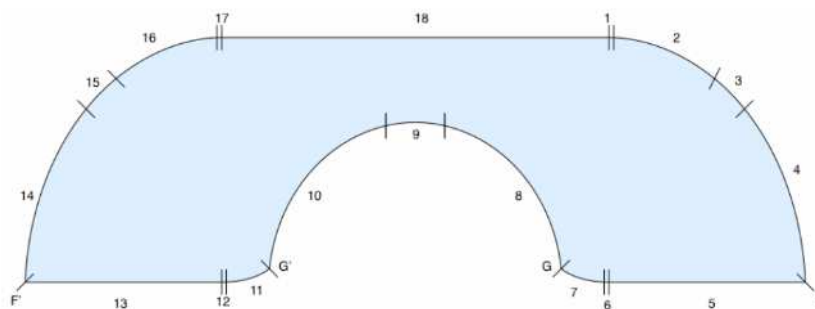
## Poglavlje 3

### Gerverov kauč

Hammersleyev kauč smatran je najvećim sve do 1992. godine kada Joseph L. Gerver u svom radu, *On moving a sofa around a corner* [3], daje inovativno rješenje za postavljeni problem. Rad započinje definicijom kojom postavlja uvjet za mnogokute koje će promatrati.

**Definicija 3.0.1.** *Mnogokut je uravnotežen ako, za svaku danu stranicu, ta stranica i svaka druga stranica paralelna s njom leže na jednom od dva pravca, gdje je udaljenost između pravaca 1 i ukupna dužina stranica koje leže na svakoj od dva pravca je jednaka.*

Glavna ideja Gerverovog rada je da je skup koji ima maksimalnu površinu zapravo limes uravnoteženih mnogokuta, odnosno, tvrdi da do skupa najveće površine možemo doći ako gledamo sve složenije uravnotežene mnogokute. U nastavku rada, Gerver predstavlja svoje rješenje preko dva teorema; prvi daje čvrsti uvjet koji mora vrijediti za barem jedan oblik maksimalne površine, a drugi daje oblik kauča koji zadovoljava taj uvjet. Oba teorema dokazana su na način da je hodnik taj koji se translacija i rotira oko fiksnog skupa koji predstavlja kauč. Najveća površina tako dobivenog skupa iznosi  $\approx 2.21953166\dots$



Slika 3.1: Gerverov kauč (slika preuzeta iz [14]).

Iako Gererverov kauč izgledom nalikuje na Hammersleyev, uz manje preinake oko kutova skupa, njegova je konstrukcija daleko kompliciranija. Omeđen je s 18 analitičkih funkcija koje možemo vidjeti na slici 3.1.

Krivulje 5, 13, 18 su dužine, 1, 6, 12, 17 su kružni lukovi, 2, 3, 7, 11, 15 i 16 su evolvente kružnice, a 4 i 14 su evolvente evolvenata kružnice. Evolventa krivulje (eng. involute) je krivulja dobivena tako što se na zadanu krivulju postavi zamišljena zategnuta nit čiji se slobodni kraj prati dok se ono namotava ili, obratno, odmotava po krivulji.

Gererver skup krivulja koji određuju kauč nije zadao eksplicitno, nego je svaka pojedina krivulja izražen u terminima četiri numeričke konstante,  $A, B, \varphi$  i  $\theta$ , koje su implicitno zadane kao rješenja sljedećeg sustava nelinearnih jednadžbi

$$\begin{cases} A(\cos \theta - \cos \varphi) - 2B \sin \varphi + (\theta - \varphi - 1) \cos \theta - \sin \theta + \cos \varphi + \sin \varphi = 0, \\ A(3 \sin \theta + \sin \varphi) - 2B \cos \varphi + 3(\theta - \varphi - 1) \sin \theta + 3 \cos \theta - \sin \varphi + \cos \varphi = 0, \\ A \cos \varphi - (\sin \varphi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \varphi + B \sin \varphi) = 0, \\ (A + \frac{1}{2}\pi - \varphi - \theta) - (B - \frac{1}{2}(\theta - \varphi)(1 + A) - \frac{1}{4}(\theta - \varphi)^2) = 0. \end{cases}$$

Jednadžbe ćemo riješiti u MATLAB-u tako da najprije definiramo jednadžbe:

```
function F = jednadzbe(x)
    A = x(1);
    B = x(2);
    phi = x(3);
    theta = x(4);

    F(1) = A*(cos(theta)-cos(phi))-2*B*sin(phi)+(theta-phi-1)*cos(theta)
        -sin(theta)+cos(phi)+sin(phi);
    F(2) = A*(3*sin(theta)+sin(phi))-2*B*cos(phi)+3*(theta-phi-1)*
        sin(theta)+3*cos(theta)-sin(phi)+cos(phi);
    F(3) = A*cos(phi)-(sin(phi)+1/2-(cos(phi)/2)+B*sin(phi));
    F(4) = (A+pi/2-phi-theta)-(B-(theta-phi)*(1+A)/2-(theta-phi)^2/4);
end
```

a zatim ih riješimo pomoću MATLAB-ove funkcije `fsolve`.

```
% Pocetni uvjeti
x0 = [0, 0, 0, 0];

options = optimset('Display', 'off', 'TolFun', 1e-12, 'MaxIter', 1000);
x = fsolve(@jedadzbe, x0, options);

% Rjesenja
fprintf('A = %f\n', x(1));
fprintf('B = %f\n', x(2));
fprintf('phi = %f\n', x(3));
fprintf('theta = %f\n', x(4));
```

Rješenja ovih jednažbi zaokružena na pet decimala su redom:

$$A = 0.09443,$$

$$B = 1.39920,$$

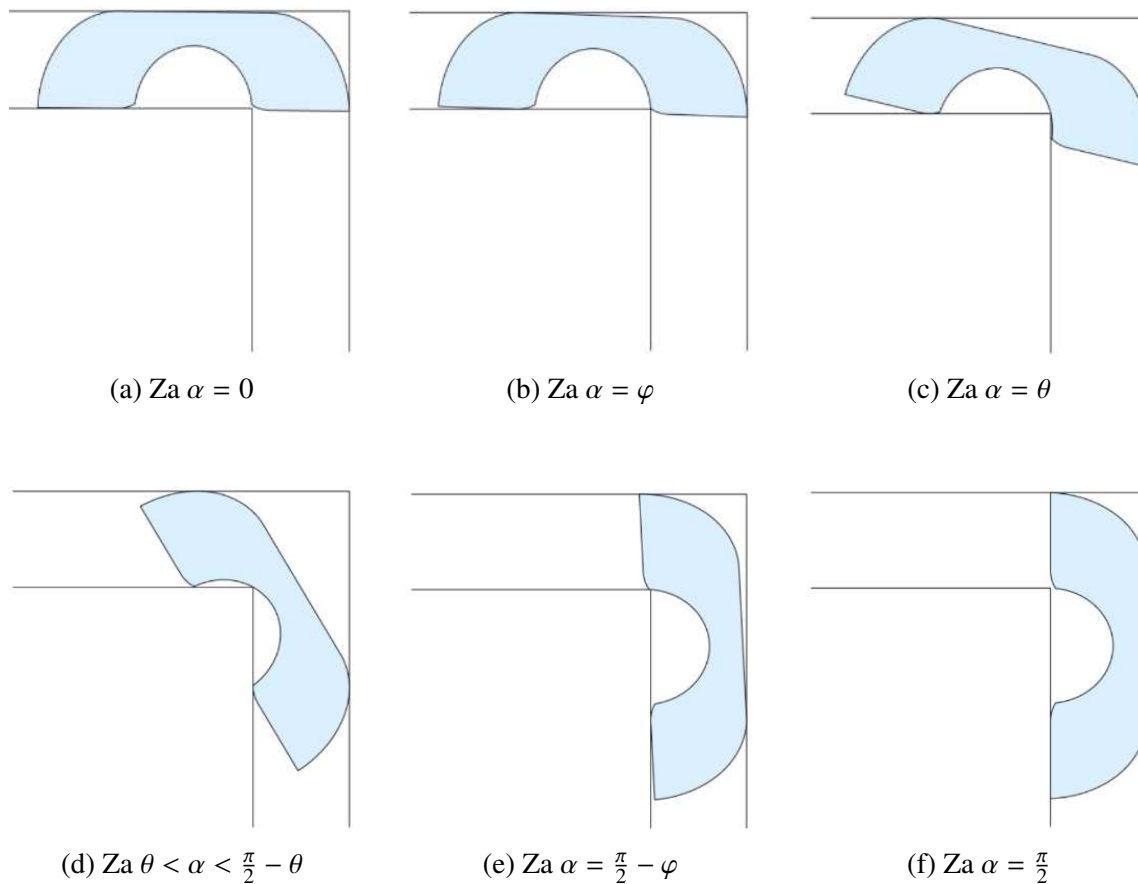
$$\varphi = 0.03918$$

$$\theta = 0.68130,$$

i ona optimiziraju krivulje od kojih je konstruiran Gerverov kauč.

Iako Gerverov kauč nalikuje na Hammersleyev, on ima drugačiji način prolaska kroz hodnik. Taj prolazak, koji uključuje translaciju i rotaciju za  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , odvija se na sljedeći način. Najprije kauč dodiruje gornji i donji zid hodnika dužinama pod oznakama 18, 5 i 13 na slici 3.1 i nastavlja se translirati dok ne dotakne desni zid hodnika točkom  $F$ . Prva faza rotacije odvija se za  $0 < \alpha \leq \varphi$  gdje kauč dotiče hodnik krivuljama 12 i 17. Ne mijenjajući kut rotacije, kauč se translira horizontalno dok ne dotakne hodnik točkom  $F$  ili krivuljom 7. Ova faza rotacije završava kada  $\alpha = \varphi$  i time kauč dotiče hodnik u točki  $G$  i tangencijalan je na desni zid hodnika u točki  $F$ . U drugoj fazi rotaciji, kauč se rotira za  $0 < \alpha \leq \theta$  i dodiruje hodnik s četiri krivulje, 11, 8, 4 i 16. Tada je udaljenost između točke  $G$  i zida veća od 0.0012. Ova faza rotacije završava kada  $G'$  dotakne hodnik. U trećoj i posljednjoj fazi rotacije, kauč se rotira za  $\theta < \alpha < \frac{\pi}{20}$  i tri puta dodiruje hodnik krivuljama 15, 3 i 9. Završne dvije faze rotacije dobivamo zrcaljenjem druge i prve faze. Prolazak kroz hodnik završavamo translacijom duž desnog hodnik.

Na sljedećim ilustracijama možemo vidjeti i vizualnu reprezentaciju prethodno objašnjenog postupka.



Slika 3.2: Rotacija Gerverovog kauča (slike preuzete iz [14]).

Gerberov je kauč općenito prihvaćen kao najveći, ali je važno napomenuti da to još uvijek nije formalno dokazano. Naime, Gerber je u svom istraživanju uspio konstruirati kauč veće površine od bilo kojeg prethodno poznatog, ali nije matematički dokazao da je on i najveći mogući. Bez obzira na to, njegova analiza i izvedeni skup postali su referentna točka za daljnje istraživanje.

## Poglavlje 4

# Poopćenje Gergerovog rješenja

Kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, Gergerov rad je označio prekretnicu u rješavanju problema pomicanja kauča. Njegovi uvidi i analitičke metode postavili su temelj za daljnje istraživanje, uvodeći ključne koncepte kao što je uravnoteženi poligon. Iako je rad bio revolucionaran u identificiranju specifičnog skupa s najvećom površinom, imao je i neke mane. Matematičari su smatrali da su njegovi izračuni situacijski i često usmjereni isključivo izvođenju jednog specifičnog oblika. U kontrastu s tim, Dan Romik u svome se radu pod nazivom *Differential Equations and Exact Solutions in the Moving Sofa Problem* [11] bavi razvojem novog pristupa na dani problem i generalizacijom Gergerovih ideja. Proces stvaranja novog pristupa problemu bio je sljedeći:

- Prvo je definirao novu terminologiju i notaciju koja parametrizira skupove oblika kauča u smislu *rotacijske putanje*, odnosno krivulje koja predstavlja put kojim unutarnji kut hodnika prolazi dok se translacija i rotira oko fiksnog skupa. Pritom, kao i Gerger, ima dualni pogled na problem u kojemu se hodnik translacija i rotira oko fiksnog skupa koji predstavlja kauč. Romik daje eksplicitan opis ove parametrizacije izvođeci formule za granicu skupa povezanog danom putanjom rotacije. Ova ideja opisana je u potpoglavlju 4.1.
- Nakon toga, Gergerovu ideju da skup koji se kreće oko ugla može imati maksimalnu površinu samo ako je limes uravnoteženih mnogokuta analizira iz novog ugla. Preoblikuje Gergerov uvjet ravnoteže u familiju od šest običnih diferencijalnih jednažbi. Na kraju pokazuje da je to, uz određene pretpostavke, nužan uvjet koji rotacijska putanja, povezana s oblikom kauča koji maksimizira površinu, mora zadovoljiti. ODJ-ovi su izvedeni i raspravljani u potpoglavlju 4.3.

Nakon što je definirao novi pristup problemu iskoristit će ga za novi izvod Gergerov rješenja. Ono će se sastojati od rješenja pet od šest prethodno spomenutih običnih diferen-

cijalnih jednadžbi (potpoglavlje 4.4). Kao glavni dio rada, Romik predstavlja konstrukciju svog rješenja za jednu od varijanti problema premještanja kauča (poglavlje 5).

U sklopu rada, Romik je objavio i prateći Mathematica softverski paket [1] koji sadrži sve izračune detaljno opisane u samom radu.

## 4.1 Rotacijska putanja, kontaktne točke i putanje

Zapišimo hodnik oblika slova  $L$  u terminima koordinata na sljedeći način:

$$\begin{aligned} L_{\text{horiz}} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \\ L_{\text{vert}} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}, \end{aligned}$$

te je tada

$$L = L_{\text{horiz}} \cup L_{\text{vert}}.$$

U kontekstu ovog rada gledat ćemo skupove koji se pomoću rotacija i translacija neprekidno kreću iz  $L_{\text{horiz}}$  u  $L_{\text{vert}}$  pritom ostajući unutar  $L$ . Radi jednostavnosti ograničit ćemo se na oblike koji se tijekom translacije monotono rotiraju za kut između  $0$  i  $\frac{\pi}{2}$  radijana. Iako još nije eksplicitno dokazano, smatra se vjerojatnim da optimalni oblik kauča koji se može pomicati duž hodnika oblika  $L$  zadovoljava gore navedena svojstva.

U ovom dijelu rada problem ćemo promatrati na malo drugačiji način. Sada će se hodnik translirati i rotirati u odnosu na fiksni kauč. S tog gledišta vidimo da se kauč  $S$ , u ostatku rada *skup*  $S$ , može pomicati duž hodnika ako zadovoljava

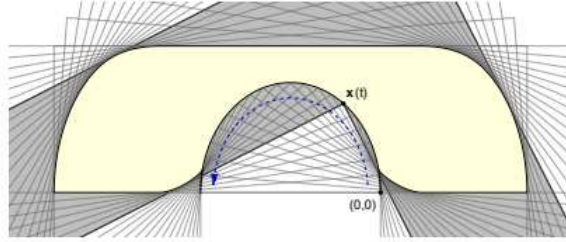
$$S \subseteq L_{\text{horiz}} \cap \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (\mathbf{x}(t) + R_t(L)) \cap \left( \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_{\text{vert}}) \right), \quad (4.1)$$

gdje s  $R_t$  označavamo rotacijsku matricu za kut  $t$  u pozitivnom smjeru:

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$  je neprekidna vektorska funkcija koja opisuje kretanje unutarnjeg kuta hodnika  $(0, 0)$ , pa time zadovoljava  $\mathbf{x}(0) = (0, 0)^\top$ , a parametar  $t$  predstavlja kut rotacije hodnika. Krivulja  $\mathbf{x}$  naziva se **rotacijskom putanjom**.

Primijetimo, uz danu rotacijsku putanju  $\mathbf{x}$  u (4.1) želimo gledati jednakost, jer u suprotnom ne bismo dobili optimalan skup, tj. skup najveće površine s traženim svojstvom.



Slika 4.1: Konstrukcija skupa  $S$  iz rotacijske putanje  $\mathbf{x}$  (slika preuzeta iz [11]).

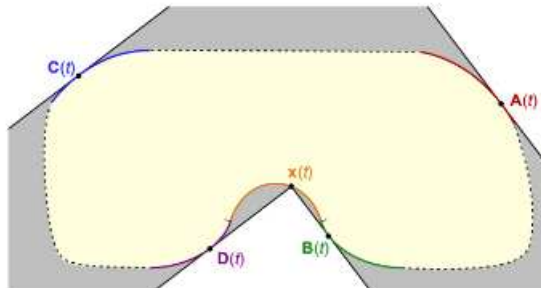
Definiramo

$$S_{\mathbf{x}} := L_{\text{horiz}} \cap \bigcap_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} (\mathbf{x}(t) + R_t(L)) \cap \left( \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_{\text{vert}}) \right), \quad (4.2)$$

kao skup povezan s rotacijskom putanjom  $\mathbf{x}$  (slika 4.1).  $S_{\mathbf{x}}$  predstavlja kauč, odnosno rješenje problema je skup  $S_{\mathbf{x}}$  maksimalne površine.

Postavlja se pitanje kako opisati preslikavanje  $\mathbf{x} \rightarrow S_{\mathbf{x}}$ , odnosno kako povezati skupove i rotacijske putanje. Potpun eksplicitan opis čini se zahtjevnim upravo zbog suptilnih efekata koje lokalne promjene rotacijske putanje imaju na različitim djelovima skupa  $S_{\mathbf{x}}$ . Za jednostavnije rotacijske putanje, kao što je naša, dovoljno je dati parcijalni opis.

Ideja je, uz praćenje pozicije  $\mathbf{x}$  rotirajućeg ugla hodnika pratiti i kontaktne, odnosno tangencijalne točke između četiri zida hodnika i našeg skupa  $S$ . Označavat ćemo ih s  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  gdje su  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  kontaktne točke vanjskih zidova hodnika, a  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  kontaktne točke unutarnjih zidova (v. sliku 4.2). Kako se hodnik rotira oko kauča tako pojedine kontaktne točke stvaraju četiri putanje koje nazivamo **kontaktne putanje** i označavamo ih s  $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t)$  i  $\mathbf{D}(t)$ . Pozicija rotirajućeg ugla hodnika,  $\mathbf{x}$ , također se smatra kontaktnom točkom ako dodiruje skup  $S_{\mathbf{x}}$ . Tada se njena pripadajuća kontaktna putanja označava se s  $\mathbf{x}(t)$ . Označimo s  $\Gamma_{\mathbf{x}}(t)$  skup kontaktnih točaka. U našem slučaju  $\Gamma_{\mathbf{x}}(t) = \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ .



Slika 4.2: Konstrukcija kontaktnih točaka i putanja (slika preuzeta iz [11]).



Primijetimo da kontaktne točke  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{D}$  ne moraju postojati za svaki  $t$ . Također, za neke rotacijske putanje i vrijednosti  $t$  unutarnji zidovi mogu imati više od jedne kontaktne točke. U tom slučaju ne vrijedi naš izbor točaka  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{D}$ , pa ćemo u ovom radu izostaviti takve slučajeve.

Kako bismo si olakšali daljnja računanja definiramo ortonormirani koordinatni sustav

$$\boldsymbol{\mu}_t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = R_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_t = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = R_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naš sljedeći rezultat eksplicitno opisuje kontaktne putanje  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  u terminima rotacijske putanje  $\mathbf{x}$ .

**Teorem 4.1.1.** [11, teorem 1] Imamo relacije

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{x}(t) + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\nu}_t + \boldsymbol{\mu}_t, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{x}(t) + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\nu}_t, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{x}(t) - \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{x}(t) - \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t, \quad (4.6)$$

koje su dobro definirane kada su dobro definirane i odgovarajuće kontaktne točke i kada su odgovarajuće kontaktne putanje neprekidne u  $t$ , a  $\mathbf{x}$  je diferencijabilna u  $t$ . Ovdje, i u ostatku rada,  $s \langle \cdot, \cdot \rangle$  označavamo skalarni produkt na  $\mathbb{R}^2$ .

*Dokaz.* Dokažimo prvu relaciju. Kontaktna točka  $\mathbf{A}(t)$  leži na pravcu

$$\ell_t := \left\{ \mathbf{p} : \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}_t \rangle = \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + 1 \right\}.$$

Naime, koristeći (4.1), očito imamo

$$\begin{aligned} \ell_t &= \left\{ \mathbf{p} = \mathbf{x}(t) + R_t \mathbf{q} : \langle \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}_0 \rangle = 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{p} : \langle R_{-t}(\mathbf{p} - \mathbf{x}(t)), \boldsymbol{\mu}_0 \rangle = 1 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{p} : \langle \mathbf{p} - \mathbf{x}(t), R_t \boldsymbol{\mu}_0 \rangle = 1 \right\}, \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili da je  $R_t^{-1} = R_t^* = R_{-t}$ .

Neka je  $s = t + \delta$ , gdje je  $\delta$  proizvoljno mali pozitivan broj. Neka je  $\mathbf{p}(t, s)$  sjecište pravaca  $\ell_t$  i  $\ell_s$ . Budući da je  $\mathbf{A}(\cdot)$  neprekidna u  $t$  znamo da vrijedi

$$\mathbf{A}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{p}(t, s).$$

Također,  $\mathbf{p}(t, s)$  zadovoljava

$$\langle \mathbf{p}(t, s), \boldsymbol{\mu}_t \rangle = \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + 1, \quad (4.7)$$

$$\langle \mathbf{p}(t, s), \boldsymbol{\mu}_s \rangle = \langle \mathbf{x}(s), \boldsymbol{\mu}_s \rangle + 1. \quad (4.8)$$

Koristeći adicijske formule za sinus i kosinus za  $\boldsymbol{\mu}_s$  imamo

$$\boldsymbol{\mu}_s = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \delta) \\ \sin(t + \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \cos \delta - \sin t \sin \delta \\ \sin t \cos \delta + \cos t \sin \delta \end{pmatrix} = \cos \delta \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\mu}_t} + \sin \delta \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\nu}_t}.$$

Dakle,

$$\boldsymbol{\mu}_s = \cos \delta \cdot \boldsymbol{\mu}_t + \sin \delta \cdot \boldsymbol{\nu}_t.$$

Uvrstimo izraz za  $\boldsymbol{\mu}_s$  u (4.8),

$$\langle \mathbf{p}(t, s), \cos \delta \cdot \boldsymbol{\mu}_t + \sin \delta \cdot \boldsymbol{\nu}_t \rangle = \langle \mathbf{x}(s), \cos \delta \cdot \boldsymbol{\mu}_t + \sin \delta \cdot \boldsymbol{\nu}_t \rangle + 1.$$

Po linearnosti skalarnog produkta slijedi

$$\cos \delta \langle \mathbf{p}(t, s), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + \sin \delta \langle \mathbf{p}(t, s), \boldsymbol{\nu}_t \rangle = \cos \delta \langle \mathbf{x}(s), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + \sin \delta \langle \mathbf{x}(s), \boldsymbol{\nu}_t \rangle + 1.$$

Sada iskoristimo (4.7):

$$\begin{aligned} \cos \delta \left( \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + 1 \right) + \sin \delta \langle \mathbf{p}(t, s), \boldsymbol{\nu}_t \rangle &= \cos \delta \langle \mathbf{x}(s), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + \sin \delta \langle \mathbf{x}(s), \boldsymbol{\nu}_t \rangle + 1 \\ \cos \delta \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + \cos \delta + \sin \delta \langle \mathbf{p}(t, s), \boldsymbol{\nu}_t \rangle &= \cos \delta \langle \mathbf{x}(s), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + \sin \delta \langle \mathbf{x}(s), \boldsymbol{\nu}_t \rangle + 1 \\ \cos \delta - 1 + \sin \delta \langle \mathbf{p}(t, s), \boldsymbol{\nu}_t \rangle &= \cos \delta \langle \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + \sin \delta \langle \mathbf{x}(s), \boldsymbol{\nu}_t \rangle. \end{aligned}$$

Nadalje, podijelimo prethodnu jednadžbu s  $\delta$ , pa puštanjem limesa  $\delta \rightarrow 0$  dobivamo,

$$\langle \mathbf{A}(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle = \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle,$$

pri čemu smo koristili  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\cos \delta - 1}{\delta} = 0$  i  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1$ .

S druge strane, iz  $\mathbf{A}(t) \in \ell_t$  imamo

$$\langle \mathbf{A}(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle = \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle + 1.$$

Prethodne dvije linearne jednadžbe daju nam ortogonalne projekcije od  $\mathbf{A}(t)$  u smjerovima  $\boldsymbol{\mu}_t$  i  $\boldsymbol{\nu}_t$ , pa dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \langle \mathbf{A}(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t + \langle \mathbf{A}(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle \boldsymbol{\nu}_t \\ &= \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\mu}_t + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\nu}_t + \langle \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle \boldsymbol{\nu}_t \\ &= \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\mu}_t + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\nu}_t. \end{aligned}$$

Preostale relacije, (4.4-4.6), dokazuju se analogno. □

Za  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  kažemo da se  $\mathbf{x}$  **dobro ponaša** u  $t$  ako je  $\mathbf{x}$  dva puta neprekidno diferencijabilna u  $t$  i ako vrijede sljedeći uvjeti:

1. Ako je  $\mathbf{x}(t)$  kontaktna točka, onda  $\langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \geq 0$  i  $\langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \leq 0$
2. Ako je  $\mathbf{A}(t)$  dobro definirana, onda  $\langle \mathbf{A}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \geq 0$
3. Ako je  $\mathbf{B}(t)$  dobro definirana, onda  $\langle \mathbf{B}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \leq 0$
4. Ako je  $\mathbf{C}(t)$  dobro definirana, onda  $\langle \mathbf{C}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \leq 0$
5. Ako je  $\mathbf{D}(t)$  dobro definirana, onda  $\langle \mathbf{D}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \geq 0$

Komentirajmo prethodne uvjete. Na primjer, uvjet 1 govori da u slučaju da je unutrašnji kut kontaktna točka, ona mora ići gore i lijevo kad se gleda iz donjeg hodnika.

Jako je vjerojatno da će rotacijska putanja povezana s oblikom najveće površine automatski biti dobro definirana osim u konačnom broju vrijednosti od  $t$  gdje neće vrijediti druga diferencijabilnost, ali time se ionako nećemo baviti u ovom radu.

## 4.2 Poopćenje Hammersleyjevog kauča

Sada ćemo poopćiti Hammersleyjevo rješenje koristeći novouvedene termine. Fiksirajmo radijus  $0 \leq r \leq 1$  i definirajmo rotacijsku putanju u obliku polukruga

$$\mathbf{x}^{(r)}(t) = r(\cos(2t) - 1, \sin(2t)), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

gdje se vrijednost rotacijske putanje kreće od  $(0, 0)$  do  $(-2r, 0)$ . Sada možemo preko relacija (4.3)-(4.6) izračunati i kontaktne putanje  $\mathbf{A}^{(r)}(t)$ ,  $\mathbf{B}^{(r)}(t)$ ,  $\mathbf{C}^{(r)}(t)$ ,  $\mathbf{D}^{(r)}(t)$ . Umjesto da računamo ručno, napisat ćemo kod u MATLAB-u za kontaktnu putanju  $\mathbf{A}^{(r)}(t)$ . Kod izgleda ovako:

```
% Definirajmo varijable
syms t r real;

% Definirajmo x(t) i x'(t)
x_t = [r*cos(2*t) - r; r*sin(2*t)];
x_t_der = diff(x_t, t);

% Definirajmo matrice mu_t i nu_t
mu_t = [cos(t); sin(t)];
nu_t = [-sin(t); cos(t)];
```

```

% Izracunajmo skalarni produkt
dot_product = dot(x_t_der, mu_t);

% Izracunajmo A(t)= x(t)+(x'(t) dot mu_t)nu_t + mu_t
A_t = x_t + dot_product * nu_t + mu_t;

% Pojednostavimo rjesenje
A_t = simplify(A_t);

```

Konačno rješenje je kontaktna putanja  $\mathbf{A}^{(r)}(t)$  dana s

$$\mathbf{A}^{(r)}(t) = (\cos t, \sin t)^\top.$$

Uočimo da je  $\mathbf{A}^{(r)}(t) = \boldsymbol{\mu}_t$ . Za preostale kontaktne putanje koristimo isti MATLAB kod i korigiramo potrebne izraze. Preostale kontaktne putanje su

$$\mathbf{B}^{(r)}(t) = (0, 0)^\top$$

$$\mathbf{C}^{(r)}(t) = (-2r, 0)^\top,$$

$$\mathbf{D}^{(r)}(t) = (-2r - \sin t, \cos t)^\top.$$

Vidimo da su  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$  fiksirane u kutovima polukruga, a  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{D}$  crtaju četvrtine jedinične kružnice koje predstavljaju bočne dijelove Hammersleyevog kauča. Skup  $S^{(r)} = S_{\mathbf{x}^{(r)}}$ , odnosno kauč, sastoji se od dvije četvrtine jediničnog kruga razdvojenih pravokutnikom sa stranicama duljine  $2r$  i  $1$ . Taj pravokutnik nije pun, nego smo iz njega maknuli polukrug radijusa  $r$ . Prisjetimo se, Hammersleyev kauč imao je najveću površinu za radijus  $r_* = \frac{2}{\pi}$ , a ovako definiran skup  $S^{(r_*)}$  odgovara skupu koji je Hammersley predstavio kao svoje rješenje.

### 4.3 Familija običnih diferencijalnih jednadžbi

Kao što smo već ranije napomenuli, Gerverov je rad bio revolucionaran u identificiranju specifičnog skupa s najvećom površinom, ali je ostao fokusiran na taj konkretan slučaj. U kontrastu s tim, Romik je otišao korak dalje, proširujući Gerverovu teoriju na općenitije uvjete. Romikova metoda uključuje modifikaciju Gerverovog kriterija "uravnoteženosti" i predstavlja se kroz teorem sa šest diferencijalnih jednadžbi koje skup mora zadovoljiti u različitim fazama kretanja.

**Teorem 4.3.1.** [11, teorem 2] *Neka je  $\mathbf{x}(t)$  rotacijska putanja s pripadajućim skupom  $S_{\mathbf{x}}$ , skupom kontaktnih točki  $\Gamma_{\mathbf{x}}$  i kontaktnim točkama  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$ . Neka je  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  točka gdje se  $\mathbf{x}(t)$  dobro ponaša. Pretpostavimo da je  $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{x}}$  konstantan u okolini od  $t$  i da je dan s jednom od 6 dolje navedenih mogućnosti. Tada je nužan uvijek da  $S_{\mathbf{x}}$  bude rješenje*

problema pomicanja kauča da  $\mathbf{x}$  u trenutno  $t$  zadovoljava jednu od sljedećih šest diferencijalnih jednačbi, ovisno o različitim mogućnostima za skup kontaktnih točaka.

- **1. slučaj:**  $\Gamma_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$

$$\mathbf{x}''(t) = R_t \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin t & -2 \cos t \\ 2 \cos t & 2 \sin t \end{pmatrix} \mathbf{x}'(t) \right) \quad (\text{ODJ1})$$

- **2. slučaj:**  $\Gamma_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$

$$\mathbf{x}''(t) = R_t \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \frac{3}{2} \cos t & \frac{3}{2} \sin t \end{pmatrix} \mathbf{x}'(t) \right) \quad (\text{ODJ2})$$

- **3. slučaj:**  $\Gamma_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{C}\}$

$$\mathbf{x}''(t) = R_t \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \mathbf{x}'(t) \right) \quad (\text{ODJ3})$$

- **4. slučaj:**  $\Gamma_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$

$$\mathbf{x}''(t) = R_t \left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \sin t & -\frac{3}{2} \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \mathbf{x}'(t) \right) \quad (\text{ODJ4})$$

- **5. slučaj:**  $\Gamma_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$

$$\mathbf{x}''(t) = R_t \left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin t & -2 \cos t \\ 2 \cos t & 2 \sin t \end{pmatrix} \mathbf{x}'(t) \right) \quad (\text{ODJ5})$$

- **6. slučaj:**  $\Gamma_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$

$$\mathbf{x}''(t) = R_t \left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \sin t & -\frac{3}{2} \cos t \\ \frac{3}{2} \cos t & \frac{3}{2} \sin t \end{pmatrix} \mathbf{x}'(t) \right) \quad (\text{ODJ6})$$

Dodatno, u 1. slučaju imamo  $\mathbf{A}'(t) = \mathbf{0}$ , što znači da je kontaktna točka  $\mathbf{A}$  fiksna. Slično imamo i u petom slučaju gdje je fiksna točka  $\mathbf{C}$ .

*Dokaz.* Dokaz ćemo započeti s trećim slučajem gdje ćemo do (ODJ3) doći tako da pogledamo utjecaj lokalnih perturbacija

Fiksirajmo mali pozitivan broj  $\delta$  i označimo  $t' = t + \delta$ . Ideja je zamijeniti kretnje hodnika oblika slova  $L$  (istovremena rotacija i translacija), koje su uvjetovane rotacijskom putanjom  $\mathbf{x}$ , sa sljedećim nizom operacija:

1. Za vremensku varijablu  $s$  u  $[0, t]$ , povucimo unutarnji vrh kuta  $(0, 0)$  hodnika duž rotacijske putanje  $\mathbf{x}(s)$  istovremeno rotirajući hodnik oko kuta. Kut rotacije jednak je vremenskoj koordinati  $s$ .
2. Translatirajmo hodnik, bez rotiranja, za udaljenost  $\delta$  u smjeru vektora  $\boldsymbol{\mu}_t$ .
3. Za  $s \in [t, t']$  pozicija unutarnjeg vrh kuta je  $\mathbf{x}(t) + \delta\boldsymbol{\mu}_t$ . Nastavljamo rotaciju tako da je za svaki  $s$  kut rotacije jednak onom u originalnom načinu kretanja i istovremeno translatiramo unutarnji kut duž  $\mathbf{x}(s) + \delta\boldsymbol{\mu}_t$ .
4. Translatirajmo hodnik, bez rotiranja, za udaljenost  $\delta$  u smjeru vektora  $-\boldsymbol{\mu}_t$ .
5. Nastavimo rotaciju za  $s \in [t', \frac{\pi}{2}]$  prateći originalnu rotacijsku putanju  $\mathbf{x}$ , slično prvom koraku.

Sa  $S'_x$  označimo skup koji se nalazi u presjecima svih kopija hodnika koje nastaju kada ga translatiramo i rotiramo na gore opisan način.  $S'_x$  je oblika:

$$\begin{aligned}
 S'_x &= L_{\text{horiz}} \cap \left( \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_{\frac{\pi}{2}}(L_{\text{vert}}) \right) \\
 &\cap \bigcap_{0 \leq s \leq t} (\mathbf{x}(s) + R_s(L)) \\
 &\cap \bigcap_{0 \leq r \leq \delta} (\mathbf{x}(t) + r\boldsymbol{\mu}_t + R_r(L)) \\
 &\cap \bigcap_{t \leq s \leq t'} (\mathbf{x}(s) + \delta\boldsymbol{\mu}_t + R_s(L)) \\
 &\cap \bigcap_{0 \leq r \leq \delta} (\mathbf{x}(t') + r\boldsymbol{\mu}_t + R_r(L)) \\
 &\cap \bigcap_{t' \leq s \leq \frac{\pi}{2}} (\mathbf{x}(s) + R_s(L)).
 \end{aligned}$$

Kada usporedimo  $S_x$  i  $S'_x$  vidimo da u tranziciji iz jednog skupa u drugi gubimo dio površine u okolini točke  $\mathbf{x}(t)$ , međutim, istovremeno i dobivamo dio površine u okolini kontaktne točke  $\mathbf{A}(t)$ . Dio skupa oko kontaktne točke  $\mathbf{C}$  ostaje isti, budući da je za svaki  $s \in [t, t']$  vanjski zid hodnika paralelan s  $\boldsymbol{\mu}_s$  tangencijalan s kontaktnom putanjom  $\mathbf{C}(s)$  kao i u originalnom kretanju hodnika.

Zbog pretpostavke da je  $\mathbf{x}$  diferencijabilna u  $t$ , oblik skupa čiju smo površinu izgubili je približno paralelogram čije su stranice dane s vektorima  $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}'(t)$  i  $\mathbf{x} + \delta\boldsymbol{\mu}_t$ , tj. vektori  $\delta\mathbf{x}'(t)$  i  $\delta\boldsymbol{\mu}_t$  s početnom točkom u  $\mathbf{x}(t)$ . Površina paralelograma je dana s

$$\|\delta\mathbf{x}'(t) \times \delta\boldsymbol{\mu}_t\| = \delta^2 \|\langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t \rangle (\mathbf{v}_t \times \boldsymbol{\mu}_t)\| = \delta^2 \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t \rangle.$$

Dakle, površina izgubljene površine je za proizvoljno mali  $\delta$  dana s

$$\langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \delta^2 + o(\delta^2) \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (4.9)$$

Sličan račun imamo i za skup čiju smo površinu dodali, također je riječ o paralelogramu, sada sa stranicama na vektorima  $\delta \mathbf{A}'(t)$  i  $\delta \boldsymbol{\mu}_t$ . Analogno, zbog pretpostavke da se  $\mathbf{x}$  dobro ponaša u  $t$  imamo

$$\langle \mathbf{A}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \delta^2 + o(\delta^2) \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (4.10)$$

Budući da želimo da skup  $S_{\mathbf{x}}$  ima maksimalnu površinu, oduzimanjem prethodna dva izraza slijedi da mora vrijediti

$$\langle \mathbf{x}'(t) - \mathbf{A}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \geq 0.$$

Međutim, prisjetimo se kako smo definirali modificiranu kretnju hodnika. U drugom koraku smo translaterali hodnik u smjeru vektora  $\boldsymbol{\mu}_t$ , a u četvrtom za  $-\boldsymbol{\mu}_t$  i izgubili dio skupa oko  $\mathbf{x}(t)$ , a dobili dio skupa oko  $\mathbf{A}(t)$ . Zamijenimo li u definiciji te dvije kretnje, odnosno ako prvo translateramo hodnik u smjeru  $-\boldsymbol{\mu}_t$ , a zatim u smjeru  $\boldsymbol{\mu}_t$ , dobit ćemo obratnu situaciju: najprije ćemo dobiti dio skupa oko  $\mathbf{x}$ , a izgubiti dio oko  $\mathbf{A}(t)$ . Tada bi izrazi (4.9), (4.10) i dalje vrijedili, ali sa zamijenjenim značenjima. Dakle, moralo bi vrijediti i

$$\langle \mathbf{x}'(t) - \mathbf{A}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \leq 0.$$

Iz dane dvije nejednakosti možemo zaključiti da zbog pretpostavke o maksimalnosti rotacijska putanja mora zadovoljiti diferencijalnu jednadžbu

$$\langle \mathbf{x}'(t) - \mathbf{A}'(t), \mathbf{v}_t \rangle = 0. \quad (4.11)$$

Analogno možemo pokazati da  $\mathbf{x}$  zadovoljava još jednu sličnu diferencijalnu jednadžbu

$$\langle \mathbf{x}'(t) - \mathbf{C}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle = 0. \quad (4.12)$$

To je bilo i za očekivati budući da kontaktne putanje  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{C}$  predstavljaju slične kretnje, dok se to formalno može objasniti zamjenom smjera vektora kretanja u drugom i četvrtom koraku gdje umjesto vektora paralelnih  $\boldsymbol{\mu}_t$  biramo vektore paralelne  $\mathbf{v}_t$ . Prisjetimo se izraza za kontaktnih putanja dobivenih u teoremu 4.1.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \mathbf{x}(t) + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\mu}_t, \\ \mathbf{C}(t) &= \mathbf{x}(t) - \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{v}_t. \end{aligned}$$

Deriviranjem obje jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(t) &= \mathbf{x}'(t) + \langle \mathbf{x}''(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \mathbf{v}_t + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t' \rangle \mathbf{v}_t + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \mathbf{v}_t' + \boldsymbol{\mu}_t', \\ \mathbf{C}'(t) &= \mathbf{x}'(t) - \langle \mathbf{x}''(t), \mathbf{v}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t - \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t' \rangle \boldsymbol{\mu}_t - \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t' + \mathbf{v}_t'. \end{aligned}$$

Iz definicija vektora  $\boldsymbol{\mu}_t$  i  $\boldsymbol{\nu}_t$  lako se uočava da vrijedi  $\boldsymbol{\mu}'_t = \boldsymbol{\nu}_t$  i  $\boldsymbol{\nu}'_t = -\boldsymbol{\mu}_t$  pa imamo

$$\begin{aligned}\mathbf{A}'(t) &= \mathbf{x}'(t) + \langle \mathbf{x}''(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\nu}_t + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle \boldsymbol{\nu}_t - \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \\ \mathbf{C}'(t) &= \mathbf{x}'(t) - \langle \mathbf{x}''(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t - \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle \boldsymbol{\nu}_t - \boldsymbol{\mu}_t.\end{aligned}$$

Uvrstimo sada izraze za  $\mathbf{A}'(t)$  i  $\mathbf{C}'(t)$  u (4.11) i (4.12), pa sređivanjem slijedi

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}''(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle &= -\langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle - 1, \\ \langle \mathbf{x}''(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle &= \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle - 1.\end{aligned}$$

(ODJ3) je zapravo matrični zapis ovog para jednadžbi.

Za drugi slučaj ćemo primijeniti sličnu logiku s tim da ćemo sada uzeti u obzir dodatni efekt lokalnih perturbacija na skupu  $S_x$  u okolini kontaktne točke  $\mathbf{D}(t)$ . I u ovom slučaju vrijedi (4.11) jer je riječ o istim skupovima koje smo dobili i izgubili, ali ne vrijedi (4.12), odnosno nepotpuna je. Trebamo još uzeti u obzir ponašanje u okolini  $\mathbf{D}(t)$ . Kada pogledamo razliku između  $S_x$  i  $S'_x$ , vidimo da (4.12) u ovom slučaju izgleda ovako:

$$\langle \mathbf{x}'(t) - \mathbf{C}'(t) - \mathbf{D}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle = 0. \quad (4.13)$$

Sada kao i prije uvrstimo (4.10) i (4.13) u izraze za  $\mathbf{C}(t)$  i  $\mathbf{D}(t)$  i dobivamo (ODJ2). Četvrti slučaj potpuno je analogan drugome, s time da vrijedi (4.12), a (4.11) modificiramo na način kao i prije, odnosno dodamo utjecaj perturbacija oko kontaktne točke  $\mathbf{B}(t)$ .

$$\langle \mathbf{x}'(t) - \mathbf{A}'(t) - \mathbf{B}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle = 0. \quad (4.14)$$

Sada na standardnim načinom dolazimo do (ODJ4). Šesta obična diferencijalna jednadžba slijedi kombinacijom dviju modificiranih jednadžbi za drugi i četvrti slučaj, odnosno (4.13) i (4.14). Preostaje nam još pokazati prvi i peti slučaj. Oni su simetrični, pa je dovoljno pokazati jedan od njih. Pokazat ćemo prvi slučaj koji ujedno možemo shvaćati i kao degenerativni drugi slučaj. Budući da sada  $\mathbf{x}$  nije kontaktna točka, pa time i nema promjene oko  $\mathbf{x}(t)$ , translacije za  $\boldsymbol{\mu}_t$  i  $-\boldsymbol{\mu}_t$  daju drugačiju jednadžbu:

$$\langle \mathbf{A}'(t), \boldsymbol{\nu}_t \rangle = 0. \quad (4.15)$$

Također, druga jednadžba drugog slučaja je zamijenjena s

$$\langle \mathbf{C}'(t) + \mathbf{D}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle = 0. \quad (4.16)$$

Standardnim procesom dolazimo do (ODJ1).



Još je preostalo pokazati da u prvom slučaju imamo  $\mathbf{A}'(t) = \mathbf{0}$ . Pokažimo najprije da je  $\mathbf{A}'(t)$  paralelna s  $\mathbf{v}_t$ . Prvo derivirajmo  $\mathbf{A}'(t)$ , a zatim iskoristimo  $\boldsymbol{\mu}'_t = \mathbf{v}_t$  i  $\mathbf{v}'_t = -\boldsymbol{\mu}_t$ , te  $\mathbf{x}'(t) = \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \mathbf{v}_t + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t$ , čime dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(t) &= \mathbf{x}'(t) + \langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \mathbf{v}'_t + \boldsymbol{\mu}'_t \\ &= \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \mathbf{v}_t + \cancel{\langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t} - \cancel{\langle \mathbf{x}'(t), \boldsymbol{\mu}_t \rangle \boldsymbol{\mu}_t} + \mathbf{v}_t \\ &= \langle \mathbf{x}'(t), \mathbf{v}_t \rangle \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_t. \end{aligned}$$

Sada jednakost  $\mathbf{A}'(t) = \mathbf{0}$  izravno slijedi iz (4.15). Zaključujemo da je  $\mathbf{A}$  fiksna kontaktna točka u prvom slučaju. □

Uz supstituciju  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}'(t)$ , diferencijalne jednačbe (ODJ1)-(ODJ6) se svode na nehomogeni linearni sustav prvog reda, što nije teško egzaktno riješiti (v. [2]). Rješenje sustava bit će baza za ponovno izvođenje Gerverovih rezultata i za Romikovu konstrukciju rješenja za ambideksternu verziju problema pomicanja kauča.

**Teorem 4.3.2.** [11, teorem 3] *Opća rješenja običnih diferencijalnih jednačbi (ODJ1)-(ODJ6) dana su s*

$$\mathbf{x}_1(t) = R_t \begin{pmatrix} a_1 \cos t + a_2 \sin t - 1 \\ -a_2 \cos t + a_1 \sin t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \kappa_1 \quad (\text{RJ1})$$

$$\mathbf{x}_2(t) = R_t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}t^2 + b_1t + b_2 \\ \frac{1}{2}t - b_1 - 1 \end{pmatrix} + \kappa_2 \quad (\text{RJ2})$$

$$\mathbf{x}_3(t) = R_t \begin{pmatrix} c_1 - t \\ c_2 + t \end{pmatrix} + \kappa_3 \quad (\text{RJ3})$$

$$\mathbf{x}_4(t) = R_t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + d_1 - 1 \\ -\frac{1}{4}t^2 + d_1t + d_2 \end{pmatrix} + \kappa_4 \quad (\text{RJ4})$$

$$\mathbf{x}_5(t) = R_t \begin{pmatrix} e_1 \cos t + e_2 \sin t - \frac{1}{2} \\ -e_2 \cos t + e_1 \sin t - 1 \end{pmatrix} + \kappa_5 \quad (\text{RJ5})$$

$$\mathbf{x}_6(t) = R_t \begin{pmatrix} f_1 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + f_2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \\ -f_2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + f_1 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \end{pmatrix} + \kappa_6, \quad (\text{RJ6})$$

gdje je  $\kappa_j = (k_{j,1}, k_{j,2})^\top$  ( $j = 1, \dots, 6$ ), a  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$  ( $i = 1, 2$ ) proizvoljne realne konstante.

## 4.4 Izvod Gerverovog rješenja

Nakon što smo objasnili kretanje hodnika i kauča u terminima šest običnih diferencijalnih jednažbi (ODJ1)-(ODJ6), sada ćemo i najbolje dosadašnje rješenje problema, ono Gerverovo, prikazati na sličan način. Ovdje i dalje pratimo [11]. Cilj je pronaći rotacijsku putanju  $\mathbf{x}$  koja zadovoljava određene pretpostavke. Te pretpostavke su pomno odabrane tako da osiguraju da traženi  $\mathbf{x}$  stvara željeni skup  $S_{\mathbf{x}}$  koji predstavlja Gerverov kauč. One glase:

1. Putanja  $\mathbf{x}$  je klase  $C^1$ .
2. Putanja  $\mathbf{x}$ , a time i skup  $S_{\mathbf{x}}$ , je simetrična s lijeva na desno s obzirom na okomiti pravac koji prolazi kroz polovište putanje,  $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .
3. Pridružena kontaktna putanja  $\mathbf{A}(t)$  zadovoljava

$$\mathbf{A} = (1, 0)^{\top}.$$

4. Skup kontaktnih točaka prolazi kroz pet različitih faza

$$\Gamma_{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\} & \text{za } 0 < t < \varphi \\ \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\} & \text{za } \varphi \leq t < \theta, \\ \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{C}\} & \text{za } \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \theta, \\ \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} & \text{za } \frac{\pi}{2} - \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \varphi, \\ \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} & \text{za } \frac{\pi}{2} - \varphi \leq t < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (4.17)$$

gdje su  $0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{4}$  kutovi gdje se odvijaju tranzicije i koje trebamo izračunati.

5. Rotacijska putanja se dobro ponaša u svakoj od pet faza iz prethodne točke (u smislu koji smo definirali u dijelu 4.1.

Da bi skup  $S_{\mathbf{x}}$  imao maksimalnu površinu, rotacijska putanja mora u svakoj fazi rotacije zadovoljiti odgovarajuću običnu diferencijalnu jednažbu (ODJ1)-(ODJ5) iz familije dane u teoremu 4.3.1. Odnosno, rotacijska putanja mora biti oblika

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_1(t) & \text{za } 0 \leq t < \varphi \\ \mathbf{x}_2(t) & \text{za } \varphi \leq t < \theta, \\ \mathbf{x}_3(t) & \text{za } \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \theta, \\ \mathbf{x}_4(t) & \text{za } \frac{\pi}{2} - \theta \leq t < \frac{\pi}{2} - \varphi, \\ \mathbf{x}_5(t) & \text{za } \frac{\pi}{2} - \varphi \leq t < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (4.18)$$

gdje su funkcije  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ) dane teoremom 4.3.2. Sada je problem reduciran na računanje vrijednosti parametara  $\varphi, \theta, \kappa_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ), i  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  ( $j = 1, 2$ ). Međutim, ti parametri nisu nezavisni, nego zadovoljavaju sustav restrikcija koje nastaju iz pretpostavki o svojstvima rotacijske putanje  $\mathbf{x}$ . Također, svojstvo simetrije iz druge pretpostavke može se izraziti kao relacija

$$\mathbf{x}'\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}'(t). \quad (4.19)$$

Time dobivamo linearne jednadžbe koje povezuju parametre, konkretno:

$$e_1 = a_1, \quad (4.20)$$

$$e_2 = -a_2, \quad (4.21)$$

$$d_1 = \frac{\pi}{4} - b_1, \quad (4.22)$$

$$d_2 = b_2 + \frac{\pi}{4} \left(2b_1 - \frac{\pi}{4}\right), \quad (4.23)$$

$$c_2 = c_1 - \frac{\pi}{4}. \quad (4.24)$$

Pretpostavka o kontaktnoj putanji,  $\mathbf{A}(t) = (1, 0)^\top$ , zajedno s  $\mathbf{x}(0) = (0, 0)^\top$  daje tri linearne jednadžbe,

$$\kappa_{1,1} = 1 - a_1, \quad \kappa_{1,2} = \frac{1}{2} - a_2, \quad \kappa_{1,2} = -a_2.$$

Iz posljednje dvije jednadžbe dobivamo

$$a_2 = -\frac{1}{4}, \quad (4.25)$$

stoga su

$$\kappa_{1,1} = 1 - a_1, \quad (4.26)$$

$$\kappa_{1,2} = -\frac{1}{4}. \quad (4.27)$$

Zatim, pretpostavka da je  $\mathbf{x} \in C^1$  daje sljedeće uvjete „spajanja“:

$$\mathbf{x}_1(\varphi) = \mathbf{x}_2(\varphi), \quad (4.28)$$

$$\mathbf{x}'_1(\varphi) = \mathbf{x}'_2(\varphi), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{x}_2(\theta) = \mathbf{x}_3(\theta), \quad (4.30)$$

$$\mathbf{x}'_2(\theta) = \mathbf{x}'_3(\theta), \quad (4.31)$$

$$\mathbf{x}_3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \mathbf{x}_4\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad (4.32)$$

$$\mathbf{x}'_3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \mathbf{x}'_4\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad (4.33)$$

$$\mathbf{x}_4\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \mathbf{x}_5\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad (4.34)$$

$$\mathbf{x}'_4\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \mathbf{x}'_5\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right). \quad (4.35)$$

Primijetimo da su jednadžbe (4.33)-(4.35) viška jer slijede iz (4.28)-(4.30) i uvjeta simetrije. I za kraj, pretpostavka o strukturi skupa kontaktnih točaka (4.17) bit će zadovoljena ako vrijede sljedeće dvije vektorske jednadžbe

$$\mathbf{x}_1(\varphi) = \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad (4.36)$$

$$\mathbf{x}_5\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \mathbf{D}(\theta). \quad (4.37)$$

Ponovno vidimo da je zadnja jednadžba viška jer slijedi iz predzadnje i pretpostavke o simetriji. Jednadžbe (4.20)-(4.37) daju nam ukupno 28 jednadžbi (primijetimo da su jednadžbe (4.28)-(4.37) vektorske i imaju dvije koordinate) s 22 varijable. Međutim, zaključili smo kako je 6 jednadžbi viška što nas ostavlja s jednakim brojem jednadžbi i varijabli.

Ovaj sustav jednadžbi ima jedinstveno rješenje i možemo ga riješiti numerički pomoću Mathematice ili MATLAB-a. Kod iz Mathematice možemo vidjeti u Romikovom paketu *MovingSofa* [1]. Drugi način rješavanja je preko simboličkog programiranja. Prvo izaberemo 20 jednadžbi koje riješimo kao linearan sustav i kao rezultat dobimo simboličke izraze 20 parametra u terminima  $\varphi$  i  $\theta$ . Zatim uvrstimo te izraze u preostale dvije jednadžbe. Tako dobivamo dvije nelinearne jednadžbe koje rješavamo numerički.

$\varphi$	0.039 177 364 790 083 641...	$\theta$	0.681 301 509 382 724 894...
$\kappa_{1,1}$	-0.210 322 422 072 688 751...	$a_1$	1.210 322 422 072 688 751...
$\kappa_{1,2}$	1/4	$a_2$	-1/4
$\kappa_{2,1}$	-0.919 179 292 771 593 322...	$b_1$	-0.527 624 598 026 784 624...
$\kappa_{2,2}$	0.472 406 619 750 805 465...	$b_2$	0.920 258 385 160 637 622...
$\kappa_{3,1}$	-0.613 763 229 430 251 668...	$c_1$	0.626 045 522 848 465 867...
$\kappa_{3,2}$	0.889 626 479 003 221 860...	$c_2$	-0.944 750 803 946 430 751...
$\kappa_{4,1}$	-0.308 347 166 088 910 014...	$d_1$	1.313 022 761 424 232 933...
$\kappa_{4,2}$	0.472 406 619 750 805 465...	$d_2$	-0.525 382 670 414 554 437...
$\kappa_{5,1}$	-1.017 204 036 787 814 585...	$e_1$	1.210 322 422 072 688 751...
$\kappa_{5,2}$	1/4	$e_2$	1/4

Slika 4.3: Numerička vrijednost konstanti za Gerverovo rješenje (slika preuzeta iz [11]).

## 4.5 Poboljšanje gornje granice

Trenutno najbolje rješenje problema pomicanja kauča je konstrukcija koju je predložio Gerver davne 1992. Površinu njegova skupa još nazivamo i **Gerverovom konstantom**,  $\mu_G = 2.21953166\dots$ , i ona predstavlja donju granicu površine rješenja. U drugom poglavlju ovog rada pokazali smo da je gornja granica površine rješenja jednaka  $2\sqrt{2}$ .

Sada vidimo da, iako je Gerverov kauč najbolje rješenje koje trenutno imamo, ono zauzima samo oko 78% od pretpostavljane najveće moguće površine. Ova razlika između donje i gornje granice intrigirala je mnoge istraživače, uključujući Dana Romika, koji je u svom radu, *Improved upper bounds in the moving sofa problem* [12], zajedno sa suradnikom Y. Kallusom došao do značajnog poboljšanja gornje granice.

Neka je **konstanta pomicanja kauča**,  $\mu_{MS}$ , maksimalna površina koju rješenje problema pomicanja kauča može poprimiti. Zanima nas postoji li  $\mu_{MS}$  takva da

$$\mu_G \leq \mu_{MS} \leq 2\sqrt{2}.$$

Romik u svom radu predstavlja i dokazuje sljedeći teorem.

**Teorem 4.5.1.** [12, teorem 1] *Konstanta pomicanja kauča  $\mu_{MS}$  zadovoljava*

$$\mu_{MS} \leq 2.37.$$

Primijetimo da sada naše najbolje rješenje, Gerverov kauč, zauzima oko 93% moguće površine, što znači da, i da nije pravo rješenje, svakako nije daleko od njega.

Važno je napomenuti da se Romik koristio naprednim računalnim resursima kako bi proveo svoje simulacije i analize. Korištenje visokoučinkovitih algoritama i moćnih računalnih klastera omogućilo mu je da izvede niz eksperimenata koji bi bili previše složeni ili vremenski zahtjevni za ručno računanje.

Konkretno, razvio je napredan algoritam koji je implementirao u programskom jeziku C++. Do dokaza teorema došao je nakon što je algoritam radio neprekidno 480 sati na jednoj jezgri 2.3GHz Intel Xeon E5-2630 procesora.

Ovo je dodatno naglasilo važnost interdisciplinarnog pristupa u rješavanju kompleksnih matematičkih problema, gdje kombinacija analitičke matematike i računalne znanosti može dovesti do značajnih otkrića.

Uz pomoć ovih tehnoloških resursa, Romik je ne samo poboljšao gornju granicu, već je i razvio niz alata i metoda koje će biti korisne za buduća istraživanja. Njegovo korištenje napredne računalne tehnologije postavlja novi standard u pristupu ovom i sličnim geometrijskim problemima, čime se dodatno produbljuje naše razumijevanje matematičkih granica i mogućnosti.

## 4.6 Otvoreni problemi

U 57 godina koliko postoji ovaj problem matematičari su napravili značajan pomak u smjeru njegovog rješavanja. Međutim, neki njegovi dijelovi još su uvijek otvoreni:

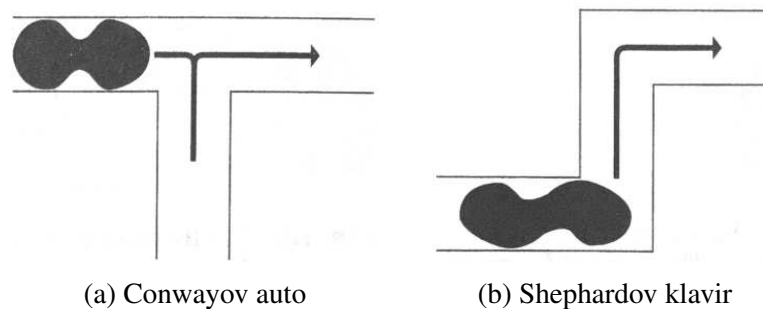
1. Preostaje dokazati da je Gerverov skup lokalni maksimum funkcionala površine u terminima problema premještanja kauča.
2. Postavlja se pitanje postoje li drugi skupovi maksimalnih površina? Na primjer,
  - Postoji li asimetrična verzija Gerverovog kauča koja ima istu rotacijsku putanju (4.18) i istih pet faza kretanja (4.17) kao i originalna, samo što se prijelazi između različitih faza odvijaju u kutevima  $\varphi, \theta, \eta, \tau$  za koje vrijedi
 
$$0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{4} < \eta < \tau < \frac{\pi}{2},$$
 i  $\eta \neq \frac{\pi}{2} - \theta, \tau \neq \frac{\pi}{2} - \varphi$ ?
  - Postoji li Gerverov skup za koji je, u trećoj fazi rotacije, skup kontaktnih točaka  $\Gamma_x(t) = \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  umjesto  $\Gamma_x(t) = \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ ?
3. Može li pretpostavka teorema 4.3.1 da se rotacijska putanja dobro ponaša biti oslabljena ili uklonjena?
4. Postoje li neke druge varijante problema premještanja kauča čija rješenja generiraju skupove koji mogu biti iskazani u zatvorenoj formi i/ili su po dijelovima algebarske?
5. Što ako gledamo probleme s nepravim kutom? Kako tada izgledaju rješenja i u kojoj mjeri oblik kauča ovisi o veličini kuta? Takvim i sličnim pitanjima bavi se N. Song u svom diplomskom radu pod imenom *A Variational Approach to the Moving Sofa problem* [14].

## Poglavlje 5

# Ambideksterni problem pomicanja kauča

U vrijeme kada je problem pomicanja kauča prvi put postao poznat javnosti, matematičari John H. Conway i Geoffrey C. Shephard zajedno su s kolegama analizirali taj problem i njegove različite verzije na jednoj geometrijskoj konferenciji. Svaki je istraživač dobio svoju varijantu problema. Jedna od tih varijanti tražila je rješenje za oblik s najvećom mogućom površinom koji može proći kroz hodnik širine jedan, skrećući i desno i lijevo pod pravim kutom. Ta varijanta nazvana je *Ambideksterni problem pomicanja kauča*.

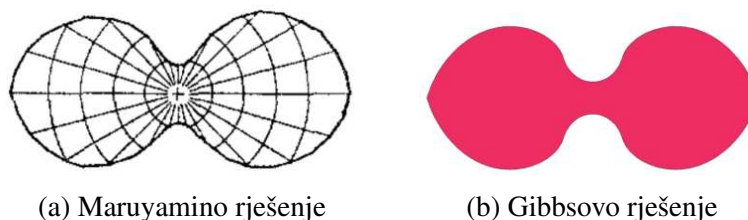
Prvi pokušaji rješavanja Conwaya i suradnika rezultirali su dvjema grubim pretpostavkama o obliku rješenja, koje su dobile nadimke *Conwayov auto* (eng. Conway car) i *Shephardov klavir* (eng. Shephard piano).



Slika 5.1: Prvi pokušaji rješenja (slike preuzete iz [15])

U 1973. godini, Maruyama [8] ponovno je otvorio istraživanje ovog problema, uvodeći numeričku metodu za njegovo rješavanje. Njegov rad postavio je temelje za kasnije istraživanje. Zatim, u 2014. godini, Gibbs [4] koristi inovativnu numeričku strategiju i

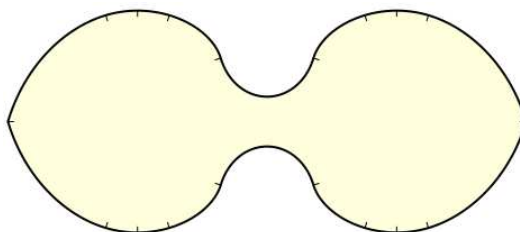
uspjeva identificirati oblik sličan Maruyaminom, ali s preciznije izračunatom površinom od 1.64495.



Slika 5.2: Numerička rješenja (slike preuzete iz [8], [4]).

Dan Romik je također napravio značajan iskorak u istraživanju ove varijante problema. Iako su njegove prvotne inicijative bile usmjerene na proširenje Gergerovih rješenja, ključna vrijednost njegovog rada nalazi se u njegovom pristupu prema ambideksternom problemu. Romik je uspio primijeniti tehnike koje su bile uspješne u Gergerovom slučaju na mnogo kompleksniji ambideksterni problem.

Usporedba njegovog skupa s onim što je Gibbs napravio pokazuje zanimljive sličnosti. Iako je Gibbs došao do rješenja kroz numeričke aproksimacije, Romikov pristup pruža dublje uvide u problematiku.



Slika 5.3: Prikaz Romikovog rješenja (slika preuzeta iz [11]).

Romikovo rješenje omeđeno je s 18 različitih krivulja od kojih je svaka dana odvojenom eksplicitnom jednačkom. Štoviše, skup koji predstavlja rješenje i svi pripadajući parametri dani su u zatvorenoj formi, a krivulje koje ga omeđuju dijelovi su algebarskih krivulja. Površina tako dobivenog skupa iznosi:

$$\Delta = \sqrt[3]{3 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} - 1 + \arctan \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \right) \right] \quad (5.1)$$

$$\approx 1.644955218425440,$$



što se poklapa s prijašnjim predikcijama do kojih je došao Gibbs. Udaljenost između krajnjih točaka skupa algebarski je broj šestog stupnja i iznosi

$$\lambda = \frac{2}{3} \sqrt{4 + \sqrt[3]{71 + 8\sqrt{2}} + \sqrt[3]{71 - 8\sqrt{2}}} \quad (5.2)$$

$$\approx 2.334099633100619.$$

## 5.1 Egzaktno rješenje ambideksternog problema pomicanja kauča

Nakon što je izveo Gerveroovo rješenje na novi način, Romik će uz male modifikacije doći i do skupa koji je mogući kandidat za rješenje ambideksterne verziju zadanog problema.

Ideja iza nove konstrukcije je pronaći rotacijsku putanju  $\mathbf{x}$  s pripadajućim skupom  $S_{\mathbf{x}}$  koja zadovoljava modificirane pretpostavke koje smo koristili za novi izvod Gerverovog kauča. Pretpostavimo:

1. Putanja  $\mathbf{x}$  je klase  $C^1$ .
2. Putanja  $\mathbf{x}$ , time i skup  $S_{\mathbf{x}}$ , je simetrična s lijeva na desno s obzirom na okomiti pravac koji prolazi kroz polovište putanje,  $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .
3. Pridružena kontaktna putanja  $\mathbf{A}(t)$  zadovoljava

$$\mathbf{A} = \left(1, \frac{1}{2}\right)^T.$$

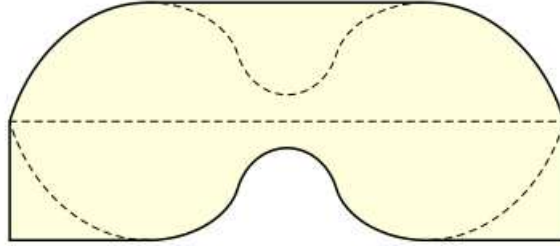
4. Skup kontaktnih točaka prolazi kroz tri različite faze (umjesto u pet)

$$\Gamma_{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}, & \text{za } 0 < t < \beta \\ \{\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}, & \text{za } \beta \leq t < \frac{\pi}{2} - \beta \\ \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}, & \text{za } \frac{\pi}{2} - \beta < t < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (5.3)$$

gdje je  $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$  kut koji trebamo izračunati.

5. Rotacijska putanja se dobro ponaša u svakoj od tri faze iz prethodne točke.

Primijetimo da, ako imamo bilo koju rotacijsku putanju  $\mathbf{x}$  i pripadajući skup  $S_{\mathbf{x}}$ , taj skup možemo jednostavno pretvoriti u skup koji se može kretati oko kutova i ulijevo i udesno tako da uzmemo presjek između njega samog i njegove osne simetrije preko pravca  $y = \frac{1}{2}$ .

Slika 5.4: Ambideksterni kauč iz skupa  $S_x$  (slika preuzeta iz [11])

Upravo je zbog toga pretpostavka o simetriji izrazito bitna. Nadalje, kako bi takav novonastali oblik imao maksimalnu površinu, svakako bi trebao biti lokalni maksimum površine, i posebno, njegova površina bi se trebala smanjivati samo ako ga izmijenimo na načine opisane u dokazu teorema 4.3.1. Iz tog razloga i dalje moraju vrijediti pretpostavke teorema 4.3.1, a navedene pretpostavke zajedno s pretpostavkom o maksimizaciji površine tada upućuju da rotacijska putanja  $\mathbf{x}$  mora biti oblika

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_1(t), & \text{za } 0 < t < \beta \\ \mathbf{x}_6(t), & \text{za } \beta \leq t < \frac{\pi}{2} - \beta \\ \mathbf{x}_5(t), & \text{za } \frac{\pi}{2} - \beta < t < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (5.4)$$

gdje su funkcije  $\mathbf{x}_1(t)$ ,  $\mathbf{x}_6(t)$  i  $\mathbf{x}_5(t)$  dane s (RJ1), (RJ6) i (RJ5).

Sada ćemo pretpostavke za  $\mathbf{x}$  pretvoriti u konkretan sustav jednadžbi na sličan način kao i u prethodnom dijelu. Najprije, uvjet simetričnosti (4.19) može se prikazati kroz sljedeće tri jednadžbe

$$e_1 = a_1, \quad (5.5)$$

$$e_2 = -a_2, \quad (5.6)$$

$$f_2 = (1 - \sqrt{2})f_1. \quad (5.7)$$

Sljedeće, jednadžbe  $\mathbf{x}(0, 0) = (0, 0)^\top$ ,  $\mathbf{A}(0) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$  ekvivalentne su s

$$\kappa_{1,1} = 1 - a_1, \quad (5.8)$$

$$a_2 = 0, \quad (5.9)$$

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2}. \quad (5.10)$$

Zatim, pretpostavka da je  $\mathbf{x} \in C^1$  daje sljedeće uvjete „spajanja“:

$$\mathbf{x}_1(\beta) = \mathbf{x}_6(\beta), \quad (5.11)$$

$$\mathbf{x}'_1(\beta) = \mathbf{x}'_6(\beta), \quad (5.12)$$

$$\mathbf{x}_6\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \mathbf{x}_5\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right), \quad (5.13)$$

$$\mathbf{x}'_6\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \mathbf{x}'_5\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right). \quad (5.14)$$

Primijetimo da jednađžba (5.14) slijedi iz (5.12) i uvjeta simetrije. I za kraj, pretpostavka o strukturi skupa kontaktnih točaka (5.3) bit će zadovoljena ako vrijede sljedeće dvije vektorske jednađžbe

$$\mathbf{x}_1(\beta) = \mathbf{B}(\beta) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{x}_5\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \mathbf{D}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad (5.16)$$

Također možemo primijetiti da druga jednađžba slijedi iz primjene simetričnosti na prvu jednađžbu. Prva jednađžba je ekvivalentna skalarnoj jednađžbu

$$\langle \mathbf{x}'_1(\beta), \boldsymbol{\mu}_1 \rangle = 0. \quad (5.17)$$

Procedura za rješavanje jednađžbi vrlo je slična onoj u prethodnom dijelu, ali s bitnom razlikom - u ovom slučaju jednađžbe su rješive i u zatvorenoj formi.

**Teorem 5.1.1.** [11, teorem 4] *Jednadžbe (5.5)-(5.17) imaju jedinstveno rješenje koje je dano preko 13 parametara  $\beta, \kappa_{1,i}, \kappa_{6,i}, \kappa_{5,i}, a_i, f_i, e_i$  ( $i = 1, 2$ ). Ti parametri su sljedećeg oblika:*

$$\beta = \arctan \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \right) \right], \quad (5.18)$$

$$a_1 = e_1 = \frac{1}{4} \csc \beta = \frac{1}{4} \sqrt{4 + \sqrt[3]{71 + 8\sqrt{2}} + \sqrt[3]{71 - 8\sqrt{2}}}, \quad (5.19)$$

$$a_2 = e_2 = 0, \quad (5.20)$$

$$\kappa_{1,2} = \kappa_{6,2} = \kappa_{5,2} = \frac{1}{2}, \quad (5.21)$$

$$\kappa_{1,1} = 1 - a_1, \quad (5.22)$$

$$\kappa_{6,1} = 1 - \frac{4}{3}a_1, \quad (5.23)$$

$$\kappa_{5,1} = 1 - \frac{5}{3}a_1, \quad (5.24)$$

$$f_1 = \frac{\left( 83 + \sqrt[3]{420619 + 15104\sqrt{2}} + \sqrt[3]{420619 - 15104\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{4}}}{3\sqrt{2(2 - \sqrt{2})}}, \quad (5.25)$$

$$f_2 = -(\sqrt{2} - 1)f_1. \quad (5.26)$$

*Dokaz.* Prethodno izveden sustav jednadžbi sastoji se od 13 nezavisnih skalarnih jednadžbi s 13 varijabli. Jednadžbe su linearne za 12 parametara  $\kappa_{1,i}, \kappa_{6,i}, \kappa_{5,i}, a_i, f_i, e_i$  ( $i = 1, 2$ ), odnosno za sve osim za  $\beta$ . Koristeći softver za računanje, npr. Mathematica, možemo riješiti linearan sustav sačinjen od prvih 12 jednadžbi i tako dobiti izraz za  $\beta$  preko preostalih parametara. Sve izraze naposljetku uvrstimo u preostalu jednadžbu i tako dobivamo nelinearnu jednadžbu za  $\beta$ . Nakon pojednostavljenja ta jednadžba glasi:

$$3 \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) + \sin \left( \frac{3\beta}{2} \right) + (\sqrt{2} - 1) \left( -3 \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{3\beta}{2} \right) \right) = 0.$$

Ova je jednadžba algebarska za  $Z = \tan(\beta)$  pa imamo

$$\tan(\beta) = \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \right).$$

Znamo da je  $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ , pa primjenom arkus tangensa na prethodnu jednadžbu dobivamo,

$$\beta = \arctan \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \right) \right].$$

Sada izraz za  $\beta$  uvrstimo u preostalih 12 jednažbi, koje su sve racionalne funkcije za algebarske izraze  $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+Z^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$  i  $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+Z^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Iz toga zaključujemo da su i parametri algebarski brojevi. Za provjeru točnosti svih formula možemo koristiti neki od softvera za računanje.  $\square$

Sljedeći teorem objedinjuje sve dosadašnje rezultate.

**Teorem 5.1.2.** [11, teorem 5] *Neka je  $\mathbf{x}$  (5.4) rotacijska putanja s pripadajućim numeričkim parametrima zadanih s (5.18)-(5.26). Označimo  $\Sigma = S_{\mathbf{x}} \cap \rho(S_{\mathbf{x}})$  gdje je  $\rho$  afina refleksija u ravnini preko pravca  $y = \frac{1}{2}$ . Tada je  $\Sigma$  skup koji se može kretati duž pravog kuta i ulijevo i udesno.  $\mathbf{x}$  je jedina rotacijska putanja koja zadovoljava pretpostavke 1-5 s početka ovog poglavlja. Također zadovoljava i nužne uvjete iz teorema 2 (4.3.1) za  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\beta, \frac{\pi}{2} - \beta\right\}$ . Površina skupa,  $\Delta$ , dana je sa (5.1), a udaljenost između krajnjih točaka skupa,  $\lambda$ , sa (5.2).*

*Dokaz.* Do sada smo već objasnili sve tvrdnje osim onih koje su vezane za površinu i udaljenost između krajnjih točki. Krenimo s udaljenošću. Krajnje točke skupa  $\Sigma$  su, s lijeva na desno,  $\mathbf{C}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(C_1\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{2}\right)$  i  $\mathbf{A}(0) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ . Sada imamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1 - C_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + a_1 - \kappa_{5,1} = 1 + a_1 - \left(1 - \frac{5}{3}a_1\right) = \frac{8}{3}a_1 \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{4 + \sqrt[3]{71 + 8\sqrt{2}} + \sqrt[3]{71 - 8\sqrt{2}}},\end{aligned}$$

kao što smo i tvrdili.

Što se tiče površine, gledajući simetriju s lijeva na desno i od gore prema dolje, vidimo da se površina  $\Delta$  može prikazati kao suma integrala

$$\Delta = 4 \left[ \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - A_1(t)\right) A_2'(t) dt + \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - B_1(t)\right) B_2'(t) dt + \int_{\beta}^{\frac{\pi}{4}} \left(x_1(t) - \frac{1}{2}\right) x_2'(t) dt \right],$$

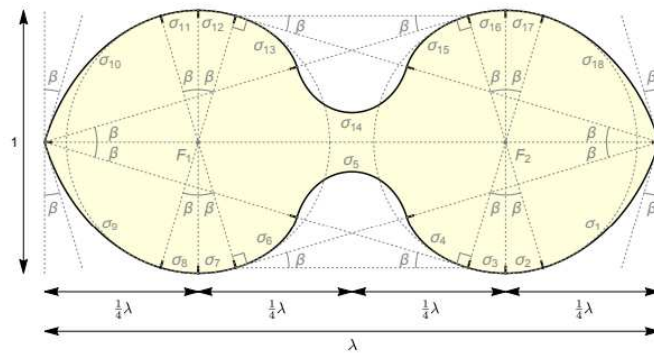
gdje je  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^{\top}$ ,  $\mathbf{A}(t) = (A_1(t), A_2(t))^{\top}$  i  $\mathbf{B}(t) = (B_1(t), B_2(t))^{\top}$ . Preostaje nam izračunati gornji integral, za što možemo koristiti neki od softvera za rješavanje. Konačno, površina skupa  $\Sigma$  jednaka je

$$\Delta = \sqrt[3]{3 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} - 1 + \beta,$$

gdje je  $\beta = \arctan \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \right) \right]$ .  $\square$

## 5.2 Geometrijska i algebarska svojstva rješenja

Osim matematičkih svojstava koja smo već razmatrali, skup  $\Sigma$  ima i dodatne geometrijske i algebarske karakteristike. Geometrijska svojstva prikazana su na slici 5.5. Vidimo da se više puta pojavljuje kut  $\beta$  i da dijelovi ruba skupa, krivulje  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_{16}, \sigma_{17}$  i  $\sigma_7, \sigma_8, \sigma_{11}, \sigma_{12}$ , imaju oblik kružnih lukova koji leže na krugovima radijusa  $\frac{1}{2}$  oko fokusnih točaka  $F_2$  i  $F_1$ . To znači da se parovi segmenata  $\sigma_j, \sigma_{j+1}$ , za svaki  $j = 2, 7, 11, 16$  mogu smatrati dijelovima istih analitičkih krivulja čime bismo smanjili broj krivulja uključenih u konstrukciju s 18 na 14. Međutim, za potrebe ovog rada ćemo ih i dalje gledati odvojeno. Još jedno zanimljivo geometrijsko svojstvo je da je udaljenost između fokusnih točaka jednaka polovini ukupne duljine skupa.



Slika 5.5: Geometrijska svojstva skupa  $\Sigma$  (slika preuzeta iz [11]).

Osim algebarskih krivulja na kojima leži svih 18 krivulja ruba skupa postoje još tri algebarske krivulje šestog stupnja koje su analitički nastavci rubnih krivulja. Za zapis tih novih krivulja koristit ćemo nove koordinate,  $X$  i  $Y$  zadane na sljedeći način

$$X = \frac{x - \kappa_{6,1}}{\frac{1}{4} \sqrt{2 - \sqrt{2}f_1}}, \quad Y = \frac{y - \kappa_{6,2}}{\frac{1}{4} \sqrt{2 - \sqrt{2}f_1}},$$

gdje su  $x, y$  koordinate iz originalnog zapisa skupa  $\Sigma$ , a  $f_1, \kappa_{6,1}, \kappa_{6,2}$  su konstante dane u teoremu 5.1.1. Može se pokazati da krivulje  $\sigma_{18}$  i  $\sigma_9$  leže na algebarskoj krivulji  $P(X, Y) = 0$ ,  $\sigma_4$  na  $Q(X, Y) = 0$  i  $\sigma_5$  na  $R(X, Y) = 0$ . Sve tri algebarske krivulje su polinomi definirani s

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= (X^2 + Y^2 - 8)^3 - 216(Y - X)^2, \\ Q(X, Y) &= (X^2 + Y^2)^3 - 12\gamma_1(X^2 + Y^2)^2 - 216\sqrt{\gamma_2}(X^2 + Y^2)(Y - X) \\ &\quad - 12\gamma_3(X^2 + Y^2) - 432\sqrt{\gamma_4}(Y - X) + 432XY - 32\gamma_5, \\ R(X, Y) &= (X^2 + Y^2)^3 - 24\alpha_1(X^2 + Y^2)^2 + 48\alpha_2(X^2 + Y^2) + 13824\sqrt{\alpha_3}Y + 4096\alpha_4, \end{aligned}$$

gdje su  $\gamma_i, \alpha_i, i = (1, 2, 3, 4)$  kubični algebarski brojevi koji izraženi u terminima konstante  $Z = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}}$  imaju sljedeći oblik

$$\gamma_1 = -3Z + 14,$$

$$\gamma_2 = -Z + 4,$$

$$\gamma_3 = -27Z^2 + 156Z - 190,$$

$$\gamma_4 = 8Z^2 - 26Z + 8,$$

$$\gamma_5 = 9Z - 20.$$

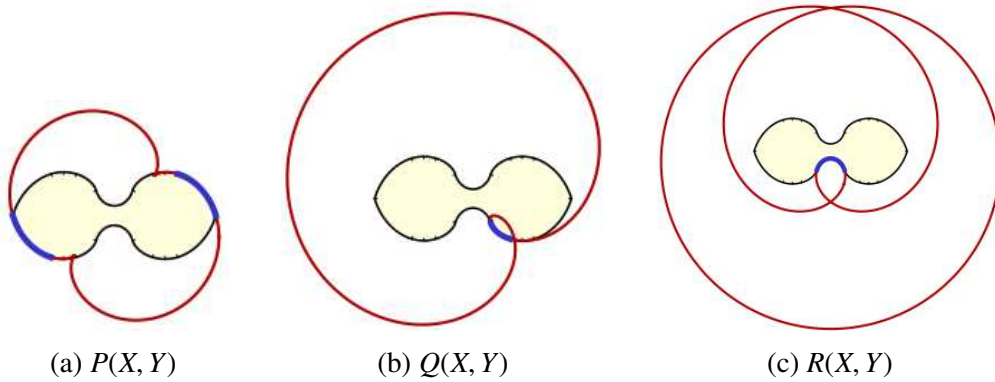
$$\alpha_1 = -3Z + 16,$$

$$\alpha_2 = 27Z^2 - 240Z + 592,$$

$$\alpha_3 = 12Z^2 - 54Z + 56,$$

$$\alpha_4 = -9Z + 28,$$

Na sljedećoj ilustraciji imamo vizualne reprezentacije gore navedenih algebarskih krivulja



Slika 5.6: Algebarske krivulje (slike preuzete iz [11]).

# Bibliografija

- [1] *"MovingSofas: A companion Mathematica package to the paper "Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem"*, <https://www.math.ucdavis.edu/~romik/publications/>, pristupljeno: 14.8.2022.
- [2] M. Alić, *Obične diferencijalne jednačbe*, Matematički odjel PMF, Zagreb, 1994.
- [3] J. L. Gerver, *On moving a sofa around a corner*, *Geometriae Dedicata* (1992), 42: 267–283.
- [4] P. Gibbs, *A computational study of sofas and cars*, <http://vixra.org/pdf/1411.0038v2.pdf> (2014), pristupljeno: 28.7.2023.
- [5] M. Goldberg, *Problem 66-11*, *SIAM Review* (1969), 11(1): 75–78.
- [6] G. Goldenberg, *A History of the Moving Sofa Problem*, <https://stemantics.net/2017/08/22/a-history-of-the-moving-sofa-problem/>, pristupljeno: 25.7.2023.
- [7] J. M. Hammersley, *On the enfeeblement of mathematical skills by 'Modern Mathematics' and by similar soft intellectual trash in schools and universities*, *Bull. Inst. Math. Appl.* 4 (1968), 66–85.
- [8] K. Maruyama, *An Approximation Method for Solving the Sofa Problem*, *International Journal of Computer and Information Sciences*, Vol. 2, No. 1 (1973), 29–48.
- [9] L. Moser, *Problem 66-11, Moving Furniture Through a Hallway*, *SIAM Review* (1966), 8(3): 381–381.
- [10] *Modelling the "Moving Sofa"*, <https://math.stackexchange.com/questions/1847453/whats-the-upper-bound-for-sofa-problem>, pristupljeno: 28.7.2023.
- [11] D. Romik, *Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem*, *Experimental mathematics* (2018), 27(3): 316–330.



- [12] D. Romik i Y. Kallus, *Improved upper bounds in the moving sofa problem*, *Advances in Mathematics* vol. 340 (2018), 960–982.
- [13] J. D. Sebastian, *Problem 66-11*, *SIAM Review* (1970), 12(4): 582–586.
- [14] N. Song, *A Variational Approach to the Moving Sofa Problem*, *Senior Projects Spring 2016*. (2016), br. 374.
- [15] I. Stewart, *Another Fine Math You've Got Me Into...*, Dover Publications, Inc, 1992.
- [16] *The Moving Sofa Problem*, [https://https://www.math.ucdavis.edu/~romik/movingsofa/](https://www.math.ucdavis.edu/~romik/movingsofa/), pristupljeno: 26.7.2023.

# Sažetak

U ovom radu dublje istražujemo problem pomicanja kauča, matematičku enigmnu koju je prvi put postavio austrijsko-kanadski matematičar Leo Moser 1966. godine. Počevši od ranih pokušaja rješavanja, kao što je Hammersleyev model, prelazimo na revolucionarni Gergerov pristup koji je znatno utjecao na daljnje istraživanje u ovom području. Suvremene perspektive, predstavljene kroz rad Dana Romika, uvode nove koncepte i metode, uključujući rotacijske putanje i kontaktne točke, koji dodatno kompliciraju problem, ali istovremeno nude nove pravce za rješenje. Osim toga, rad se bavi i ambideksternom varijantom problema, koja predstavlja dodatni sloj izazova i komplikacija. Kroz detaljnu analizu geometrijskih i algebarskih svojstava, rad pruža sveobuhvatan pregled ovog fascinantnog i još uvijek nerješenog problema, s fokusom na otvorena pitanja i mogućnosti za buduća istraživanja.

# Summary

In this thesis, we delve deeply into the Moving Sofa Problem, a mathematical enigma first posed by Austrian-Canadian mathematician Leo Moser in 1966. Starting with early attempts at solving the problem, such as Hammersley's model, we transition to the groundbreaking approach by Gerver, which has significantly influenced further research in this field. Contemporary perspectives, represented through the work of Dan Romik, introduce new concepts and methods, including rotational paths and contact points, that both complicate the issue and offer fresh avenues for resolution. Additionally, the paper explores the ambidextrous variant of the problem, adding an extra layer of challenges and complexities. Through a detailed analysis of geometric and algebraic properties, this paper provides a comprehensive overview of this fascinating yet unsolved problem, with a focus on open questions and avenues for future research.

# Životopis

Rođena sam 22. travnja 1995. godine u Zagrebu, gdje sam završila osnovnu školu i opću gimnaziju. U jesen 2013. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a po njegovom završetku i diplomski studij Primijenjene matematike.

Usporedno sa studijem stjecala sam i razna radna iskustva. Osim trogodišnjeg rada u RedBullu kao dio marketing tima, između ostalog, bila sam i na tri višemjesečne studentske prakse u: A1 Hrvatska (Data Analyst), Photomath (Quality Assurance) i Koios Consulting Ltd (Data Engineer). Trenutno sam zaposlena kao Data Engineer u True North-u.