Pickova formula

Hranj, Stefan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Stefan Hranj

PICKOVA FORMULA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, rujan 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Za neprestanu i bezuvjetnu podršku i brigu kroz godine studiranja posebno se zahvaljujem roditeljima, Mariji i Mladenu te sestri Ivani.

Veliko hvala Lei koja mi je bila oslonac i snaga kroz lijepe, ali i kroz one manje lijepe trenutke.

Zahvaljujem se i svim profesorima koji su me vodili kroz ovaj put te se posebno zahvaljujem izv. prof. dr. sc. Slavenu Kožiću koji mi je bio mentor i pomoć kroz proces pisanja ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Georg Pick bio je istaknuti matematičar koji je dao značajan doprinos područjima geometrije i teorije brojeva. Rođen je 10. srpnja 1859. godine u Beču, Austrija, a preminuo je 26. srpnja 1942. godine u koncentracijskom logoru u Terezínu, u današnjoj Češkoj Republici. Pick je studirao na Sveučilištu u Beču i doktorirao 1881. godine s disertacijom o diofantskim jednadžbama i algebarskom teorijom brojeva. Tijekom svoje akademske karijere predavao je na raznim institucijama, uključujući Sveučilište u Beču i Sveučilište u Pragu.

Pick je najpoznatiji po svom radu u geometriji, posebno po Pickovoj formuli koju je objavio 1899. godine. Pickova formula pruža jednostavan i elegantan način za izračun površine cjelobrojnih mnogokuta (tj. mnogokuta čiji su vrhovi točke s cjelobrojnim koordinatama u ravnini). Pickova formula kaže da se površina takvog mnogokuta može odrediti brojanjem broja cjelobrojnih točaka koje pripadaju mnogokutu i brojem cjelobrojnih točaka na njegovom rubu. Ova formula ima praktične primjene, posebno u računalnoj geometriji i računalnoj grafici, gdje se može koristiti za učinkovito izračunavanje površina mnogokuta u diskretnom okruženju.

Unatoč značajnim doprinosima matematici, ime Georga Picka nije tako široko prepoznato kao neka druga imena matematičara njegova vremena. Ipak, njegov rad ostaje relevantan i još uvijek se proučava i primjenjuje u različitim matematičkim i računalnim područjima.

Početni dio ovog rada, odnosno prvo poglavlje, sadrži sažetak bitnih definicija, svojstava, teorema i rezultata vezanih uz geometriju i diskretnu matematiku koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

Drugo poglavlje istražuje probleme koji će nam poslužiti kao motivacija te, također, pomoći pri naslućivanju Pickove formule. Prvi problem je problem određivanja površine voćnjaka, ali bez korištenja poznatih matematičkih formula nego aproksimacijama. Drugi problem predstavlja problem zamjene 1\$ pomoću kovanica od 5¢, 10¢ i 25¢, kojeg svodimo na problem određivanja površine voćnjaka.

Motivirani problemima iz prethodnog poglavlja dolazimo do trećeg poglavlja. U njemu iskazujemo Pickovu formulu te ju dokazujemo na dva različita načina. Oba dokaza oslanjaju se na elementarne geometrijske pojmove i rezultate. Važni koraci u prvome dokazu su pokazati svojstvo aditivnosti Pickove formule, mogućnost triangulacije mnogokuta na primitivne cjelobrojne trokute te činjenica da je svaki primitivan cjelobrojni trokut površine $\frac{1}{2}$. U drugome dokazu koristimo se prebrojavanjem točaka i trokuta dobivenih triangulacijom mnogokuta te svojstvom mjere unutarnjih kutova mnogokuta.

Četvrto poglavlje prikazuje proširenja Pickove formule na tri dimenzije te odnos između Pickove formule i homotetije. Pickova formula se ne može generalizirati na način da računa volumen. Kod proučavanja odnosa između Pickove formule i homotetije uvidimo da je ukupan broj cjelobrojnih točaka polinom n-tog stupnja u jednoj varijabli. Napokon, valja istaknuti kako je problem generalizacije Pickove formule motivirao uvođenje i proučavanje pojma diskretnog volumena, o čemu diskutiramo na kraju poglavlja.

Iduće, peto poglavlje opisuje opću teoriju koja dovodi do Pickove formule. U ovom poglavlju uvodimo pojmove rešetke i fundamentalnog paralelepipeda, koji predstavljaju općenito okruženje za proučavanje generalizacija Pickove formule. Nadalje izvodimo nekoliko važnih rezultata o rešetkama i njihovim determinantama te demonstriramo kako se iz njih može izvesti originalna Pickova formula.

Rad završava šestim poglavljem, odnosno metodičkim pristupom otkrivanju Pickove formule u osnovnoškolskom obrazovanju, točnije u sedmom razredu. U radu su predložene dvije aktivnosti, aktivnost otkrivanja i aktivnost uvježbavanja u kojoj će učenici otkriti Pickovu formulu za površinu mnogokuta u mreži kvadratića te nakon toga i uvježbati korištenje iste.

Poglavlje 1

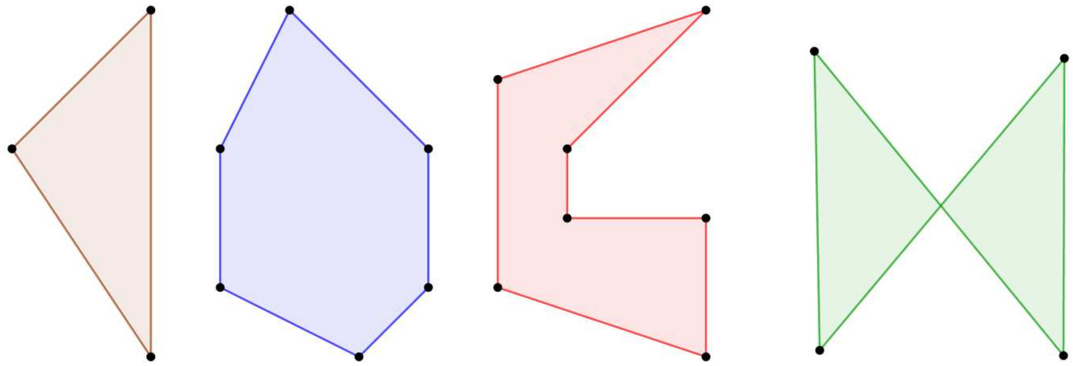
Osnovni pojmovi i rezultati

U ovom poglavlju koristit ćemo knjige [8] i [9] te skripte [6] i [7] da uvedemo neke osnovne pojmove i rezultate iz područja geometrije te diskretne matematike koji će nam biti potrebni u nastavku rada.

1.1 Geometrija

Planimetrija je ravninska geometrija. Osnovni objekti (euklidske) geometrije u ravnini su točke i pravci te njih smatramo intuitivno jasnim. Euklidska ravnina je skup M čije elemente zovemo točkama, a neke istaknute podskupove pravcima. Točke i pravci se ne definiraju, već su ti objekti neizravno definirani pomoću svojih svojstava, a ta svojstva su opisana aksiomima. U radu ćemo se baviti površinama mnogokuta pa ćemo ponoviti definiciju mnogokuta i drugih povezanih pojmova.
Izlomljena linija definira se kao unija konačno mnogo različitih dužina $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, u ravnini, zadanih u određenom poretku, tako da se jedan kraj svake dužine (osim zadnje) podudara s jednim krajem naredne dužine. Dužine koje čine izlomljenu liniju zovu se njene **stranice**, njihovi krajevi su njeni **vrhovi**. Za izlomljenu liniju kažemo da je **zatvorena** ako joj se početak i kraj podudaraju, tj. ako je $A_n = A_1$. Za izlomljenu liniju kažemo da je **jednostavna**, ako svaka njena točka pripada ili samo jednoj njenoj stranici ili samo dvjema stranicama kojima je ta točka krajnja odnosno rubna točka. Inače se izlomljena linija zove **samopresječna**. Zatvorena izlomljena linija se još zove i **jednodimenzionalni poligon**. Ako je ta linija i jednostavna, onda se i jednodimenzionalni poligon zove **jednostavan poligon** ili **poligonalna kružnica**. Svaka poligonalna kružnica J rastavlja ravninu M na točno dva područja koja zovemo **unutrašnjost** (ograničeno područje) i **vanjština** (neograničeno područje) poligona J. **Jednostavni dvodimenzionalni poligon** je unija jednostavnog jednodimenzionalnog poligona i njegove unutrašnjosti. Jednostavni jednodimenzionalni poligon se tada zove **rub** danog dvodimenzionalnog poligona i označavamo

ga s ∂J. U nastavku rada koristit ćemo termin **mnogokut** u smislu jednostavnog dvodimenzionalnog poligona. Na slici 1.1 prve tri slike likova su primjeri mnogokuta, a posljednja slika je primjer koji nije u skladu naše definicije mnogokuta.



Slika 1.1: Primjeri mnogokuta

Jedno od glavnih svojstava unutarnjih kutova mnogokuta jest sljedeći teorem.

Teorem 1.1.1. *Zbroj unutarnjih kutova mnogokuta jednak je* $(n-2)\cdot 180^\circ$.

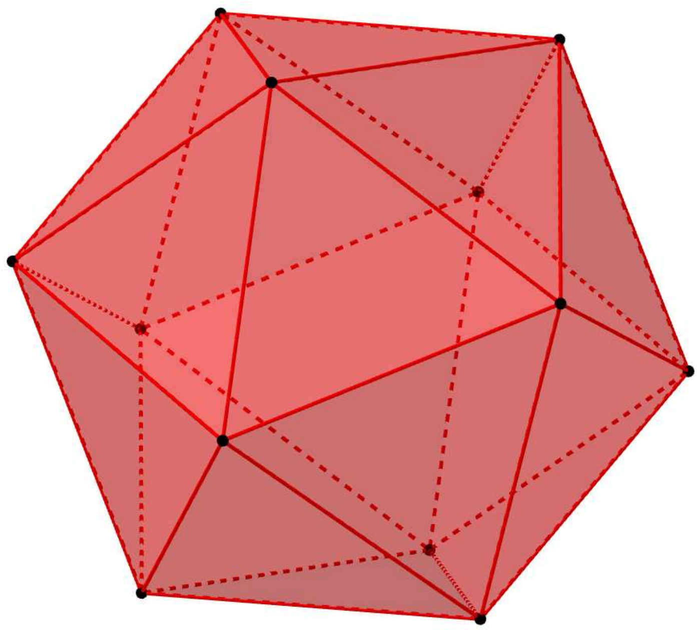
Također, površina je jedan od fundamentalnih pojmova iz područja geometrije kojim ćemo se baviti u ovom radu. Označimo s $\mathcal{P}$ skup svih mnogokuta u ravnini. Površina je funkcija $P \colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijede sljedeći aksiomi površine:

1. $P(\pi) \geq 0$ za svaki $\pi \in \mathcal{P}$,
2. Ako je $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, onda je $P(\pi_1 \cup \pi_2) = P(\pi_1) + P(\pi_2)$ za sve $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}$,
3. Ako je π_1 sukladan π_2, onda je $P(\pi_1) = P(\pi_2)$ za sve π_1, $\pi_2 \in \mathcal{P}$,
4. Postoji barem jedan kvadrat K sa stranicama duljine 1 takav da je $P(K) = 1$.

Drugi aksiom nazivamo još i aksiom aditivnosti.

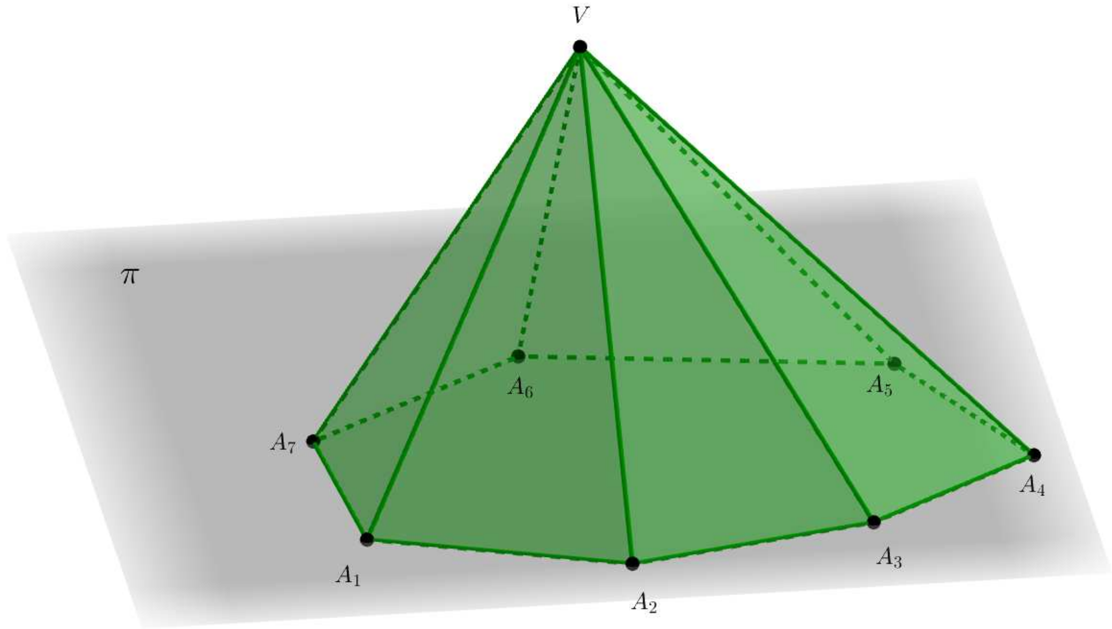
U radu ćemo promatrati Pickovu formulu za površinu mnogokuta te njene generalizacije na trodimenzionalni prostor. Stoga ćemo se sada prisjetiti nekih osnovnih pojmova iz stereometrije. **Stereometrijom** nazivamo geometriju prostora. Osnovni elementi prostora su i dalje **točke**, **pravci**, a osim njih imamo još i **ravnine**. Euklidskim prostorom zovemo skup M čije elemente zovemo točke, a neke istaknute podskupove **pravcima** i **ravninama**. Što su za planimetriju mnogokuti, to su za stereometriju poliedri.

Tijelo u prostoru M je kompaktan, povezan skup s nepraznom unutrašnjošću. **Poliedar** je tijelo čiji je interior povezan, a rub mu je povezan skup koji se sastoji od konačno mnogo mnogokuta, pri čemu se svaka dva od tih mnogokuta ili ne sijeku ili imaju samo jedan zajednički vrh ili samo jednu zajedničku stranicu, a svaka stranica nekog od tih mnogokuta je zajednička stranica točno dvaju od tih poligona. Unija svih tih mnogokuta zove se **rubna ploha** ili **rub poliedra**. Svaki se mnogokut rubne plohe poliedra zove **strana poliedra**, stranica svakog od tih mnogokuta zove se **brid poliedra**, a vrh svakog od tih mnogokuta zove se **vrh poliedra**. Najjednostavniji poliedar je **tetraedar**. Sastoji se od četiri vrha, šest bridova i četiri strane (trokuta). Primjer jednog poliedra nalazi se na slici 1.2.



Slika 1.2: Poliedar

Skupovi točaka u prostoru koji će nam trebati u radu su i piramide. **Piramida** je konveksna ljuska (ravninskog) mnogokuta i točke izvan te ravnine. Taj mnogokut naziva se **baza** ili **osnovica piramide**, a točka izvan ravnine **vrh piramide**. Primjer jedne piramide nalazi se na slici 1.3.



Slika 1.3: Piramida

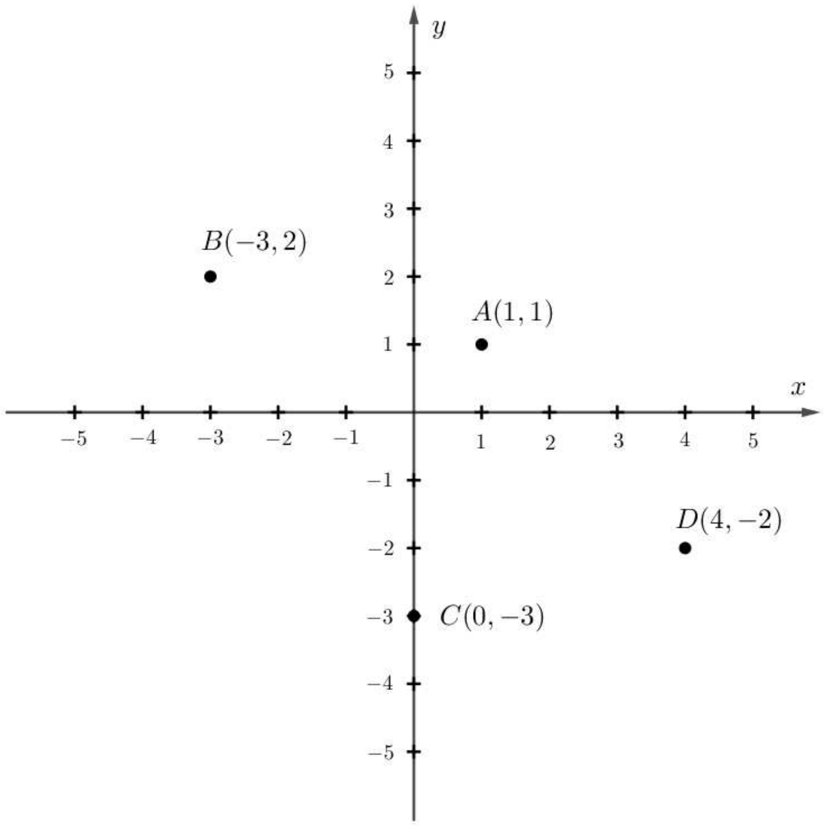
U ovom radu koristit ćemo pravokutni ili Kartezijev koordinatni sustav. U tu svrhu zadajmo najprije točku O u ravnini ili prostoru. Svakoj točki T ravnine ili prostora možemo pridružiti jedinstvenu usmjerenu dužinu $\overrightarrow{OT}$, koju nazivamo radijvektorom točke T. Vrijedi i obratno, svaka točka T je jednoznačno određena zadavanjem radijvektora s obzirom na neku točku O. Time je zadano bijektivno preslikavanje između točaka ravnine i prostora i pripadnoga skupa radijvektora kojeg označavamo s $V^2(O)$ ili $V^3(O)$.

Ako je $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ baza za $V^2(O)$, tada postoje jedinstveni $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}.$$

Uređen par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zovemo koordinatama točke T, pišemo $T(x, y)$. Ako je baza $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ ortonormirana, koordinate točke T nazivamo **ortogonalnim** ili **pravokutnima**. Skup $\{O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ nazivamo **pravokutnim** ili **Kartezijevim koordinatnim sustavom** u ravnini. Točku O nazivamo **ishodištem**, a pravce određene točkama OI, OJ **koordinatnim osima**. Slika 1.4 predstavlja primjer jednog Kartezijevog koordinatnog sustava s nekim točkama i njihovim koordinatama.

Ako je $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\}$ baza vektorskog prostora $V^3(O)$ i ako je T točka prostora, tada su njene koordinate dane kao uređena trojka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ i pišemo $T(x, y, z)$. U tom slučaju još definiramo koordinatnu os OK i koordinatne ravnine xy, xz, yz kao ravnine određene redom točkama O, I, J, točkama O, I, K i točkama O, J, K.



Slika 1.4: Kartezijev koordinatni sustav u ravnini

1.2 Diskretna matematika

Kako će se u radu koristiti i prebrojavanje, navodimo nekoliko osnovnih principa prebrojavanja kojima ćemo se služiti. Koristimo notaciju $|A|$ = broj elemenata skupa A.

Princip sume. Broj elemenata unije u parovima disjunktnih skupova jednak je sumi njihovih kardinaliteta. Preciznije zapisano: za skupove $A_1, A_2, ..., A_n$ takve da za sve $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, imamo $A_i \cap A_j = \emptyset$, vrijedi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Princip produkta. Broj elemenata unije m međusobno disjunktnih skupova, od kojih svaki ima n elemenata, je $n \cdot m$. Zapravo, ako s $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ označimo Kartezijev produkt skupova $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i \text{ za sve } i = 1, ..., n\},$$

onda za sve konačne skupove $A_1, A_2, ..., A_n$ vrijedi:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Princip bijekcije. Dva skupa A i B imaju jednak broj elemenata ako postoji bijekcija između njih.

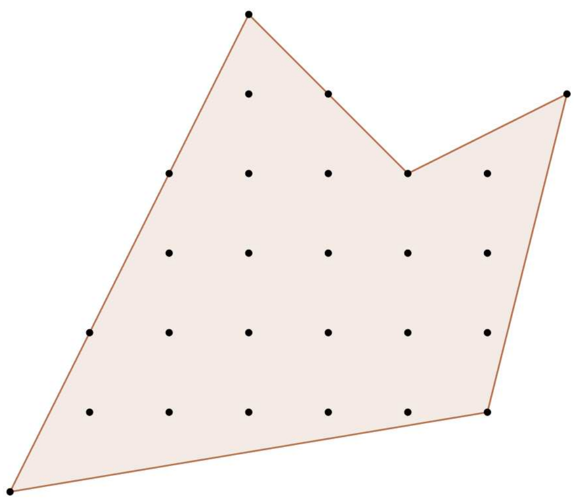
Poglavlje 2

Problemi koji dovode do Pickove formule

U ovom poglavlju predstavit ćemo probleme koji će nam poslužiti kao motivacija za Pickovu formulu te nam pomoći u njenom naslućivanju i otkrivanju. Naše izlaganje zasniva se na knjigama [1] i [5].

2.1 Površina voćnjaka

Primjer 2.1.1. *Odredite površinu voćnjaka na slici 2.1 ako su svaka dva susjedna stabla udaljena za 1.*



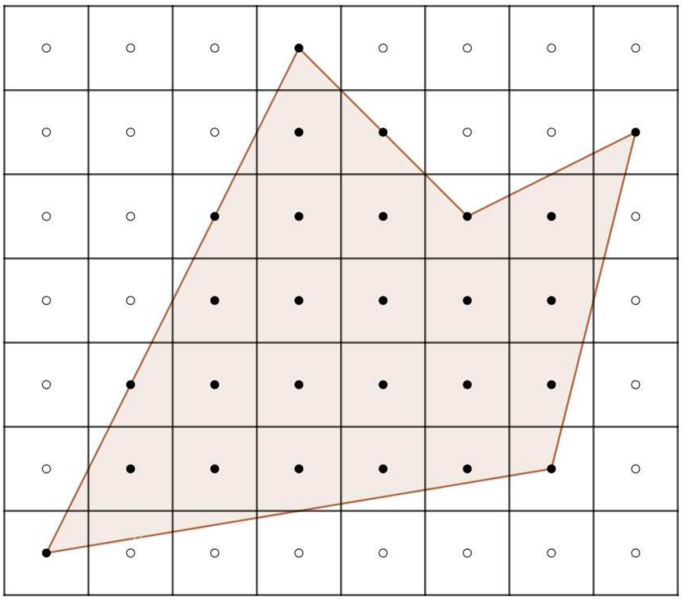
Slika 2.1: Voćnjak

Aproksimacija

Jedan od najjednostavnijih načina pronalaženja približne površine voćnjaka jest aproksimacija. Koristit ćemo različite aproksimacije kojima ćemo određivati približnu vrijednost površine.
Uočimo da u ovom voćnjaku postoji 27 stabala. Ako bismo aproksimirali površinu brojem stabala dobili bismo:

$$\text{površina voćnjaka} \approx \text{broj stabala} = 27.$$

Međutim, možemo aproksimirati malo preciznije. Ako je stablo na granici voćnjaka, onda otprilike polovica površine okolnog jediničnog kvadrata ne pripada površini voćnjaka, kao što je prikazano na slici 2.2.



Slika 2.2: Svako stablo je u sredini jediničnog kvadrata

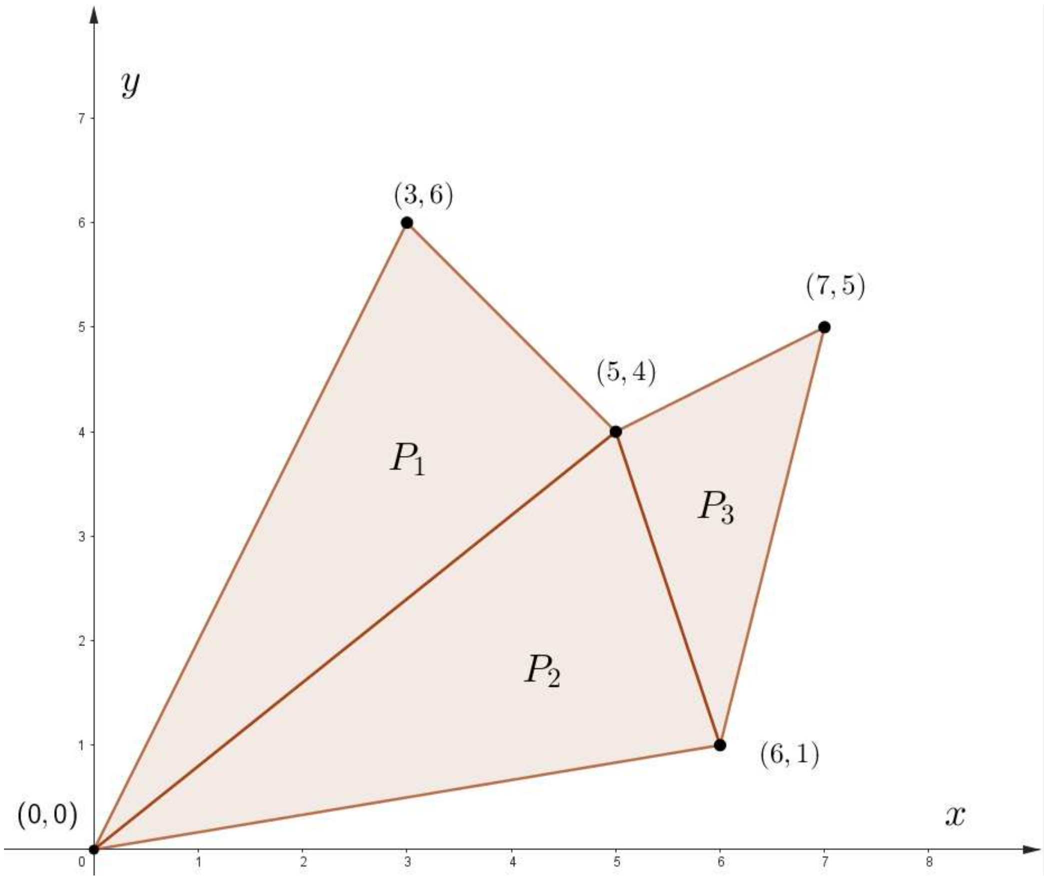
Takvih rubnih stabala u ovom voćnjaku jest osam, što nam daje novu aproksimaciju:

$$\text{površina voćnjaka} \approx \text{broj stabala} - \text{polovica broja stabala na rubu} = 27 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 23. \quad (2.1)$$

Uskoro će se pokazati da je točna površina voćnjaka 22. Stoga je ova naša aproksimacija vrlo dobra, pogreška iznosi samo 1.

Točan izračun površine

Za računanje točne površine voćnjaka navest ćemo dvije standardne geometrijske metode računanja. Zgodno je uvesti Kartezijeve koordinate i razdijeliti voćnjak u tri trokuta, kao što je prikazano na slici 2.3.



Slika 2.3: Peterokut podijeljen na tri trokuta

Problem površine peterokuta sveli smo na problem pronalaženja površine trokuta P_1, P_2 i P_3. Koristimo li poznatu formulu,

$$\text{površina trokuta} = \frac{\text{duljina stranice} \cdot \text{duljina visine na stranicu}}{2}, \tag{2.2}$$

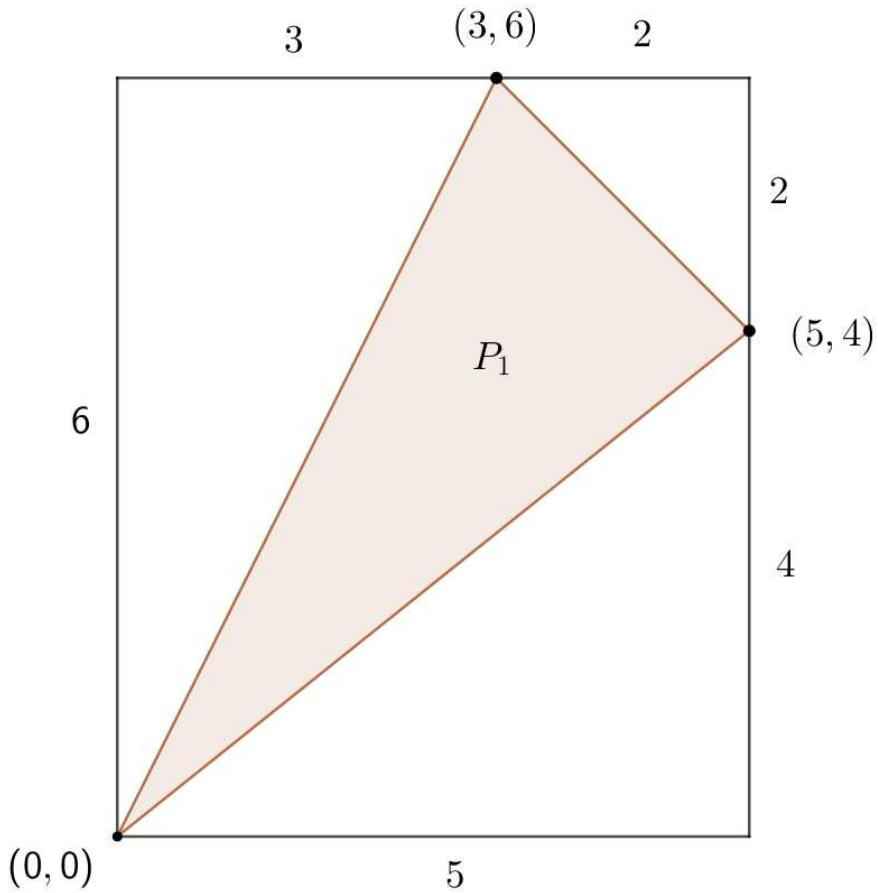
zaključujemo da stranica niti jednog trokuta nije paralelna x-osi ili y-osi te daljnjom geometrijskom analizom trebali bismo izračunati duljine stranica i duljine visina na stranice. Ovdje se prirodno nameće i druga metoda računanja pomoću Heronove formule koja glasi

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje a, b i c označavaju duljine stranica trokuta, a s označava poluzbroj duljina stranica,

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Pomoću obje gornje metode možemo odrediti vrijednost površine, no postupak računanja može se malo zakomplicirati. Zato ćemo koristiti malo drugačiji način računanja površine trokuta. Pogledajmo sliku 2.4.

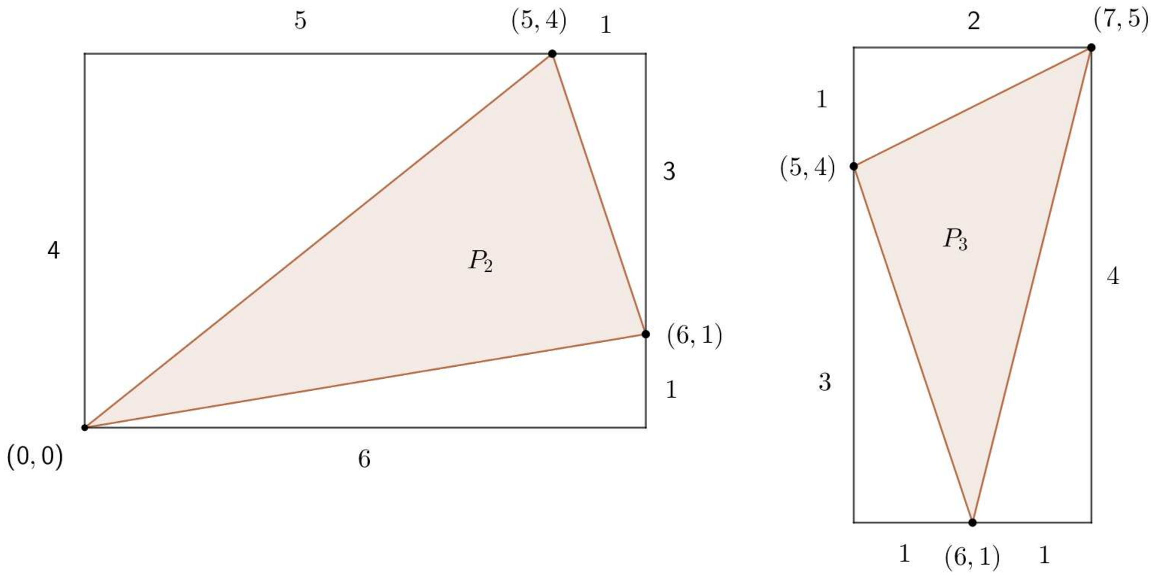


Slika 2.4: Trokut P_1 opisan pravokutnikom

Trokutu P_1 opisali smo pravokutnik tako da su stranice pravokutnika paralelne x-osi i y-osi. Dobili smo pravokutnik duljine stranica 5 i 6. Površina trokuta P_1 sada se lako može izračunati tako da od površine pravokutnika oduzmemo tri površine trokuta. Neosjenčani trokuti su pravokutni trokuti te koristeći formule (2.2) za površinu trokuta lako računamo nepoznate površine:

$$P_1 = 6 \cdot 5 - \left(\frac{3 \cdot 6}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} \right) = 9. \tag{2.3}$$

Analogno ponavljamo postupak za preostala dva trokuta. Njihovo smještanje u pravokutnik prikazano je na slici 2.5.



Slika 2.5: Trokut P_2 i trokut P_3 opisani pravokutnikom

Računamo preostale površine trokuta:

$$P_2 = 6 \cdot 4 - \left(\frac{5 \cdot 4}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 1}{2} \right) = \frac{19}{2}, \tag{2.4}$$

$$P_3 = 4 \cdot 2 - \left(\frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 1}{2} \right) = \frac{7}{2}. \tag{2.5}$$

Konačno, točna površina voćnjaka zbrajanjem rezultata u (2.3), (2.4) i (2.5) iznosi:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 9 + \frac{19}{2} + \frac{7}{2} = 22.$$

Kao što uočavamo, naša aproksimacija (2.1) razlikuje se od točne površine za 1, što je znak da je aproksimacija bila prilično dobra. Također, uočavamo da imamo opću strategiju za pronalaženje površine bilo kojeg mnogokuta u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini. Preciznije, do površine dolazimo podjelom mnogokuta na trokute, računanjem pojedinačnih površina trokuta te sumiranje svih površina trokuta.

2.2 Mijenjanje jednog dolara u kovanice

Kovanice američkog dolara su zanimljive zato što se dijele na kovanice od 1¢, 5¢, 10¢, 25¢, 50¢ i 1$. Pogledajmo stoga sljedeći primjer.

Primjer 2.2.1. *Na koliko načina možemo zamijeniti kovanicu od 1$ koristeći kovanice od 5¢, 10¢ i 25¢?*

Ispisivanje svih mogućnosti

Prvi način dobivanja odgovora je vrlo jednostavan. Ispisat ćemo sve mogućnosti, pritom pazeći da neke mogućnosti ne preskočimo. Uvodimo oznake za kovanice:

- q - broj kovanica od 25¢ (od engleske riječi *quarter*),
- d - broj kovanica od 10¢ (od engleske riječi *dime*),
- n - broj kovanica od 5¢ (od engleske riječi *nickel*).

Moramo izabrati q kovanica od 25¢, d kovanica od 10¢ i n kovanica od 5¢ tako da vrijedi

$$25q + 10d + 5n = 100. \tag{2.6}$$

Ispisat ćemo u tablicu sve moguće slučajeve tako da iskoristimo sve moguće vrijednosti broja kovanica od 25¢ i 10¢ te ostatak do 100¢ dopunimo kovanicama od 5¢. Ovaj sustavni pristup uzima u obzir svaku mogućnost. Tablica 2.1 navodi da postoji ukupno 29 trojki (q, d, n) nenegativnih cijelih brojeva koje zadovoljavaju našu početnu jednadžbu (2.6). Ovaj način traženja odgovora, uz malo truda, daje točan rezultat, ali daje slabi uvid u opći problem mijenjanja svote od n dolara.

Kovanice na stolu

Drugo rješenje zahtijeva malo mašte. Stvorit ćemo scenarij koji nam pomaže pratiti promjene koje radimo. Prvo primijetimo da nakon što odaberemo nekoliko kovanica od 25¢ i 10¢ tako da ukupna vrijednost ne prelazi 1$, tada nam preostaje samo jedan odabir broja kovanica od 5¢ do ukupne vrijednosti od 1$. Takav način razmišljanja nam omogućava da ignoriramo kovanice od 5¢ i fokusiramo se na prebrojavanje načina kako odabrati najviše

$d = 10$	$(0, 10, 0)$				
$d = 9$	$(0, 9, 2)$				
$d = 8$	$(0, 8, 4)$				
$d = 7$	$(0, 7, 6)$	$(1, 7, 1)$			
$d = 6$	$(0, 6, 8)$	$(1, 6, 3)$			
$d = 5$	$(0, 5, 10)$	$(1, 5, 5)$	$(2, 5, 0)$		
$d = 4$	$(0, 4, 12)$	$(1, 4, 7)$	$(2, 4, 2)$		
$d = 3$	$(0, 3, 14)$	$(1, 3, 9)$	$(2, 3, 4)$		
$d = 2$	$(0, 2, 16)$	$(1, 2, 11)$	$(2, 2, 6)$	$(3, 2, 1)$	
$d = 1$	$(0, 1, 18)$	$(1, 1, 13)$	$(2, 1, 8)$	$(3, 1, 3)$	
$d = 0$	$(0, 0, 20)$	$(1, 0, 15)$	$(2, 0, 10)$	$(3, 0, 5)$	$(4, 0, 0)$
	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$

Tablica 2.1: Sustavna tablica slučajeva

1\$ samo pomoću kovanica od 25¢ i 10¢. Sada postavimo na stol četiri kovanice od 25¢ i deset kovanica od 10¢. Ukupna vrijednost kovanica na stolu iznosi 2\$, a dane kovanice dovoljne su da nekim odabirom dobijemo 1\$ ili manje. Pretpostavimo da smo odabrali q kovanica od 25¢ i d kovanica od 10¢. Po principu sume postoji pet odabira za q ($q = 0, 1, ..., 4$) i jedanaest odabira za d ($d = 0, 1, ..., 10$). Po principu produkta, ukupan broj mogućih odabira kovanica iznosi $5 \cdot 11 = 55$. Vrijednost novca koju smo odabrali iznosi $(25q + 10d)$ ¢, a ostatak novca na stolu, točnije $(4 - d)$ kovanica od 25¢ i $(10 - d)$ kovanica od 10¢ ukupno daje komplementarnu vrijednost od $(200 - (25q + 10d))$ ¢. Promotrimo prvo odabire kovanica koji daju točno 1\$, a njih dobivamo za $(q, d) = (4, 0), (2, 5), (0, 10)$. To su 3 od ukupno 55 mogućih odabira. Preostalih 52 odabira dobivaju se kao 26 komplementarnih parova, u kojem jedan odabir daje ukupnu vrijednost kovanica strogo manju od 1\$ a drugi odabir vrijednost strogo veću od 1\$. Stoga zaključujemo da postoji ukupno $3 + 26 = 29$ načina odabira kovanica od 25¢ i 10¢ tako da ukupna vrijednost ne prelazi vrijednost od 1\$, pa zato postoji i 29 načina kako promijeniti 1\$ koristeći kovanice od 5¢, 10¢ i 25¢.

Cjelobrojni parovi

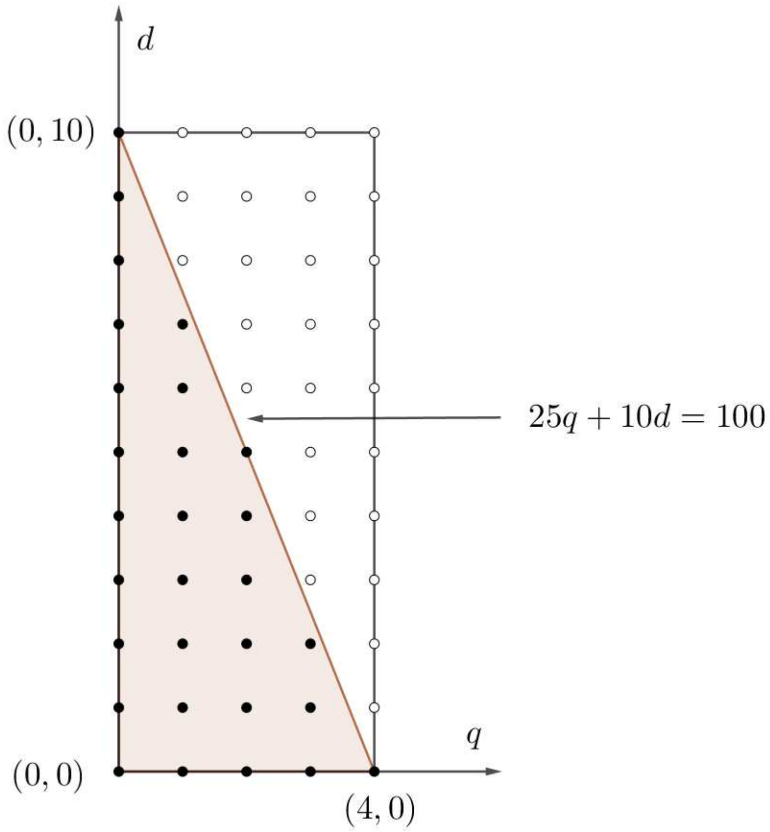
Treće rješenje uključuje brojanje posebnih točaka u trokutu i dovest će nas na korak do Pickove formule. Tražimo trojku (q, d, n) nenegativnih cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$25q + 10d + 5n = 100.$$

Isto kao i u prethodnom rješenju, zanemarit ćemo kovanice od 5¢ i fokusirati se na uređene parove (q, d) koji zadovoljava nejednakost

$$25q + 10d \leq 100, q \geq 0, d \geq 0. \tag{2.7}$$

U Kartezijevoj koordinatnoj ravnini, ova nejednakost omeđuje dio ravnine prikazan na slici 2.6 koji je oblika pravokutnog trokuta kojemu katete pripadaju x-osi i y-osi, a hipotenuza se nalazi na pravacu $25q + 10d = 100$.



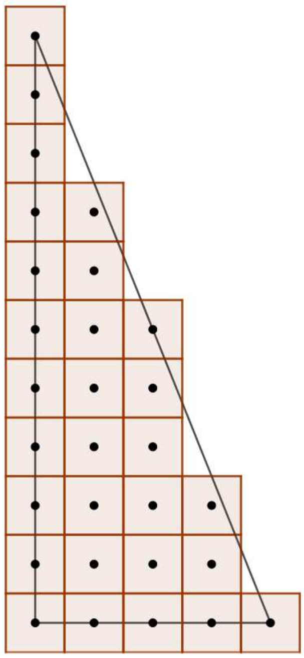
Slika 2.6: Dio ravnine određen uvjetima (2.7)

Sve istaknute cjelobrojne točke koje pripadaju djelu ravnine omeđenom s (2.7) su jedno od rješenja našeg problema. Tako npr. za $(q, d) = (2, 3)$ znamo da imamo 2 kovanice od 25¢, 3 kovanice od 10¢ i 4 kovanice od 5¢ (sjetimo se da nakon što odaberemo nekoliko kovanica od 25¢ i 10¢ tako da ukupna vrijednost ne prelazi vrijednost od 1\$, tada nam preostaje samo jedan odabir broja kovanica od 5¢ do ukupne vrijednosti od 1\$). Prebrojavanjem svih cjelobrojnih točaka koje pripadaju djelu ravnine omeđene s (2.7) dobivamo da postoji 29 načina kako promijeniti 1\$ koristeći kovanice od 5¢, 10¢ i 25¢.

Primijetimo da su ideje za prvi i drugi način rješavanja iskorištene u trećem načinu rješavanja. Vidimo da sve cjelobrojne točke sa slike 2.6 odgovaraju rješenjima i položaju rješenja iz tablice 2.1. Također, u pravokutnom nizu točaka sa slike 2.6 od $5 \cdot 11 = 55$ uređenih cjelobrojnih parova, svakom uređenom paru (q, d) ispod hipotenuze odgovara uređeni par $(4 - q, 10 - d)$ iznad hipotenuze. Tri cjelobrojna uređena para točaka (q, d) na hipotenuzi predstavljaju tri načina kako dobiti 1\$ odabirom samo kovanica od 25¢ i 10¢. Dakle ideja postupka dobivanja rješenja pomoću kovanica na stolu koristi simetriju dva pravokutna trokuta kao na slici 2.6.

Aproksimacija

Pogledajmo sliku 2.7 koja interpretira naši treći način rješavanja problema, ali koristi se tehnikom aproksimacije površine koju smo koristili kod aproksimacije površine voćnjaka.



Slika 2.7: Cjelobrojni uređeni parovi i jedinični kvadrati

Svaki cjelobrojni uređeni par u trokutu pripada jednom kvadratu jedinične površine. Broj načina na koje možemo razmijeniti 1\$ jednak je površini osjenčanog djela. Vođeni istom idejom kao i kod aproksimacije površine voćnjaka, možemo približno računati površinu ovako:

$$\begin{aligned}\text{površina trokuta} \approx\ & \text{broj cjelobrojnih uređenih parova} - \\ & \text{polovica broja cjelobrojnih uređenih parova na rubu.}\end{aligned}$$

Površina trokuta jednaka je $\frac{4 \cdot 10}{2} = 20$ i imamo 16 cjelobrojnih uređenih parova na rubu. Dakle,

$$20 \approx \text{broj cjelobrojnih uređenih parova} - \frac{1}{2} \cdot 16$$

pa dobivamo da postoji otprilike 28 načina kako promijeniti 1\$ koristeći kovanice od 5¢, 10¢ i 25¢. Znamo da je točan odgovor 29 načina. Razlika točnog odgovora i aproksimacije ponovno je 1.

Poglavlje 3

Pickova formula

U ovom poglavlju predstavit ćemo iskaz i dva dokaza Pickove formule . Koristimo knjige [1] i [5] te pratimo originalni tekst Picka [10].

3.1 Iskaz Pickove formule

Za početak definirat ćemo cjelobrojne mnogokute i cjelobrojne točke te uvesti različite oznake.

Definicija 3.1.1. *Za mnogokut kažemo da je cjelobrojan, ako su koordinate (a, b) svakog vrha mnogokuta u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini cijeli brojevi. Takve točke ravnine (a, b) s cjelobrojnim koordinatama nazivamo cjelobrojne točke.*

Za cjelobrojan mnogokut uvest ćemo sljedeće oznake:

- L = ukupan broj cjelobrojnih točaka koje pripadaju cjelobrojnom mnogokutu,
- B = ukupan broj cjelobrojnih točaka na rubu cjelobrojnog mnogokuta.

Ranije smo vidjeli da površinu cjelobrojnog mnogokuta možemo aproksimirati kao

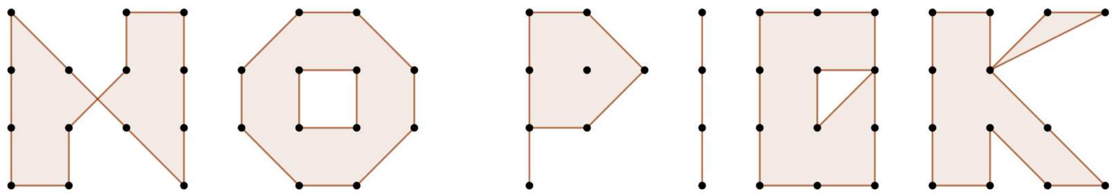
$$\text{površina mnogokuta} \approx L - \frac{1}{2} \cdot B.$$

U prošlom poglavlju, na primjerima naša aproksimacija je veća za 1 od stvarne površine, što nam motivira slutnju da je uvijek tako. Pickova formula tvrdi upravo to sljedećim teoremom.

Teorem 3.1.2. *(**Pickova formula**) Neka je dan cjelobrojan mnogokut s L cjelobrojnih točaka koje pripadaju cjelobrojnom mnogokutu i B cjelobrojnih točaka na rubu cjelobrojnog mnogokuta, tada vrijedi*

$$\textit{površina mnogokuta} = L - \frac{1}{2} \cdot B - 1.$$

Sada ćemo dokazati da Pickova formula vrijedi za svaki cjelobrojni mnogokut. Primjeri podskupova euklidske ravnine koji nisu mnogokuti te time neće zadovoljavati Pickovu formulu prikazani su na slici 3.1.



Slika 3.1: Primjer šest podskupa euklidske ravnine koji ne zadovoljavaju Pickovu formulu

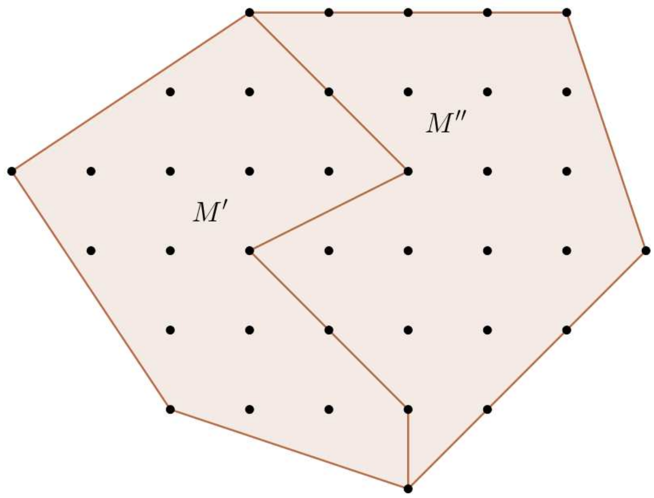
Ovi primjeri po definiciji nisu mnogokuti jer:

- slovo N - dužina koja omeđuje podskup ravnine se presijeca u svojim unutarnjim točkama,
- slovo O - podskup ravnine je omeđen dvjema izlomljenim linijama,
- slovo P, C, K - jedan vrh podskupa ravnine nije rubna točka točno dviju dužina,
- slovo I - podskup ravnine je omeđen otvorenom izlomljenom linijom.

3.2 Prvi dokaz Pickove formule

Prvi dokaz Pickove formule sastoji se od 2 dijela: provjere formule za cjelobrojne trokute i dekompozicije cjelobrojnog mnogokuta na cjelobrojne trokute. Prvo ćemo pokazati da je Pickova formula aditivna te, budući da svaki cjelobrojni mnogokut može rastaviti na cjelobrojne trokute, Pickova formula za mnogokut dobit će se kao zbroj Pickovih formula za sve cjelobrojne trokute koji pridonose njegovoj površini.

Propozicija 3.2.1. *Pretpostavimo da je M neki cjelobrojni mnogokut podijeljen na dva disjunktna cjelobrojna mnogokuta M' i M'', npr. kao na slici 3.2. Ako za M' i M'' vrijedi Pickova formula, onda vrijedi i za M i to svojstvo nazivamo* ***aditivnost Pickove formule****.*



Slika 3.2: Površina je aditivna

Dokaz. Neka je L broj cjelobrojnih točaka koje pripadaju cjelobrojnom mnogokutu i B broj cjelobrojnih točaka na rubu cjelobrojnog mnogokuta. Također, neka je P površina mnogokuta M, P' površina mnogokuta M' i P'' površina mnogokuta M''. Pretpostavimo da vrijedi:

$$\begin{aligned} P' &= L' - \frac{1}{2} \cdot B' - 1, \\ P'' &= L'' - \frac{1}{2} \cdot B'' - 1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kao što nam kaže Pickova formula. Pokazat ćemo da i mnogokut M sastavljen od dva manja mnogokuta M' i M'' također zadovoljava Pickovu formulu. Neka zajednička granica između dviju manjih mnogokuta M' i M'' sadrži B^* cjelobrojnih točaka, uključujući i dvije krajnje točke. Mnogokut M tada zadovoljava sljedeće

$$\begin{aligned} L &= L' + L'' - B^*, \\ B &= B' + B'' - 2B^* + 2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Korištenjem (3.1) i (3.2) dobivamo sljedeći niz ekvivalentnih jednakosti:

$$\begin{aligned}
P &= P' + P'' \\
P &= \left(L' - \frac{1}{2} \cdot B' - 1\right) + \left(L'' - \frac{1}{2} \cdot B'' - 1\right) \\
P &= (L' + L'' - B^*) - \frac{1}{2}(B' + B'' - 2B^* + 2) - 1 \\
P &= L - \frac{1}{2} \cdot B - 1.
\end{aligned}$$

Ovim računom pokazali smo da ako mnogokuti M' i M'' zadovoljavaju Pickovu formulu, tada ju i mnogokut M zadovoljava. To znači da je Pickova formula aditivna baš kao i površina. □

Specijalno, iz aditivnosti vidimo da Pickova formula vrijedi za svaki mnogokut koji se može podijeliti u pravokutnike kojima su stanice paralelne koordinatnim osima i pravokutne trokute.

Sada ćemo analizirati najmanje cjelobrojne mnogokute, tj. one najjednostavnije mnogokute od kojih se svi ostali veći mnogokuti mogu sastaviti.

Definicija 3.2.2. *Cjelobrojni trokut je* **primitivan** *ako su mu vrhovi jedine cjelobrojne točke koji mu pripadaju.*

Stoga primitivni trokut zadovoljava $L = B = 3$. Po Pickovoj formuli vrijedi:

$$\text{površina primitivnog cjelobrojnog trokuta} = 3 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Naravno, tu činjenicu tek trebamo dokazati. Primitivna cjelobrojna triangulacija je podjela cjelobrojnog mnogokuta u primitivne cjelobrojne trokute. Slika 3.3 predstavlja jednu od mogućih triangulacija voćnjaka iz primjera 2.1.1 u 44 primitivna cjelobrojna trokuta.

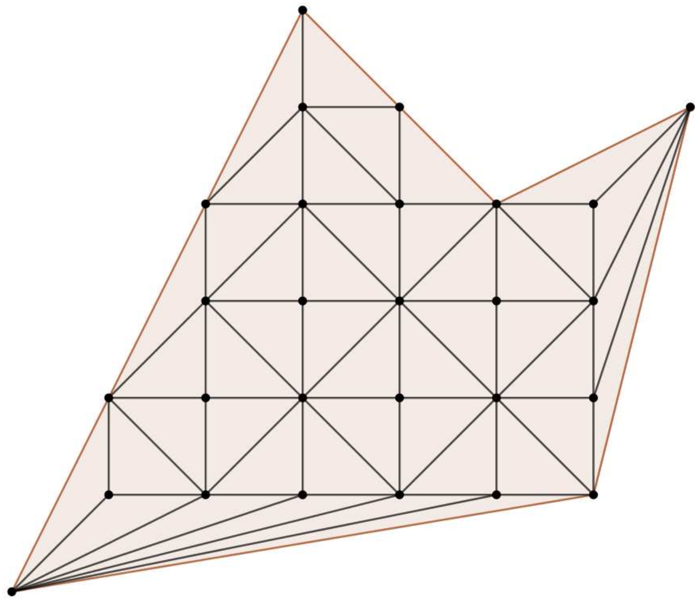
Sljedeći teoremi sadrže dvije najvažnije činjenice o primitivnim cjelobrojnim trokutima.

Teorem 3.2.3. *Neka je zadan neki cjelobrojni mnogokut. Vrijedi:*

a) Svaki cjelobrojni mnogokut ima primitivnu cjelobrojnu triangulaciju.

b) Površina svakog primitivnog cjelobrojnog trokuta je $\frac{1}{2}$.

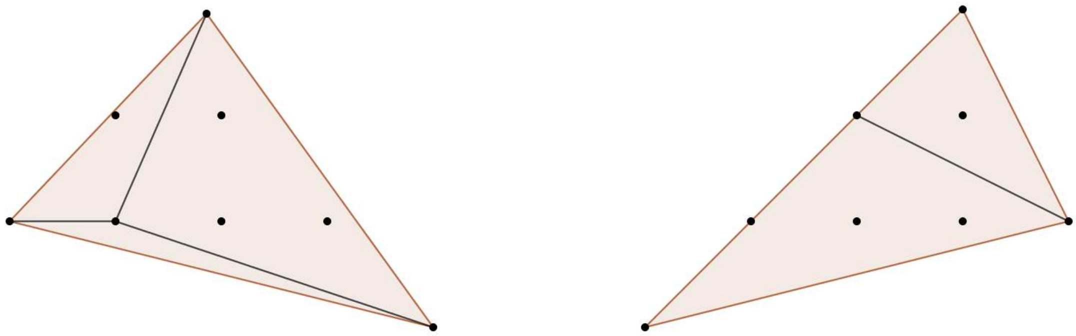
Dio a) implicira da svaki cjelobrojni mnogokut može biti konstruiran spajanjem primitivnih cjelobrojnih trokuta. Dio b) i aditivnost nam osiguravaju da Pickova formula vrijedi za svaki novi mnogokut kojeg dobijemo dodavanjem još jednog trokuta. Stoga ovaj teorem povlači Pickovu formulu. Sada ćemo dokazati teorem.



Slika 3.3: Primitivna cjelobrojna triangulacija voćnjaka sa slike 2.1

Dokaz. a) Ponajprije, svaki cjelobrojni mnogokut može biti podijeljen u cjelobrojne trokute umetanjem dijagonala. Svi ti neprimitivni cjelobrojni trokuti mogu biti podijeljeni u 2 ili 3 manja cjelobrojna trokuta kao na slici 3.4 pomoću dviju različitih operacija:

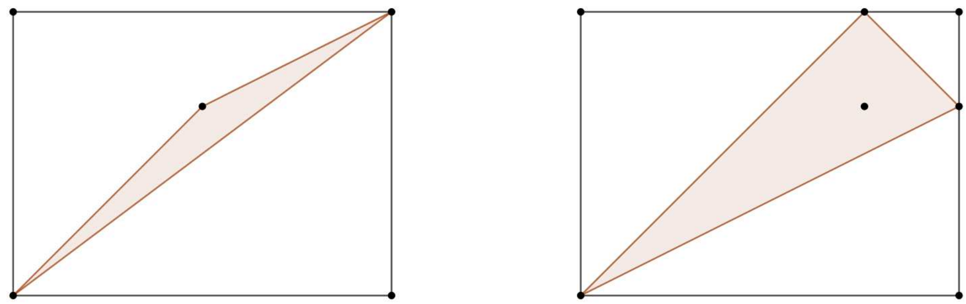
- ubacivanje stranica koji spajaju unutarnju cjelobrojnu točku trokuta s tri vrha,
- ubacivanje stranice koja spaja cjelobrojnu točku na rubu trokuta sa suprotnim vrhom.



Slika 3.4: Ubacivanje stranica kod neprimitivnih cjelobrojnih trokuta

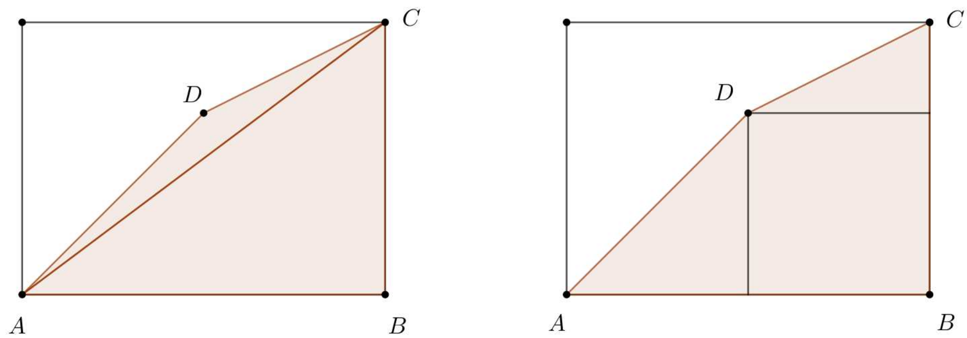
Ponavljanjem ovih operacija će nas dovesti do primitivne cjelobrojne triangulacije. Svaki cjelobrojni mnogokut općenito ima više različitih triangulacija i svaka može poslužiti za naše potrebe. □

Dokaz. b) Svakom se cjelobrojnom trokutu može opisati pravokutnik paralelan koordinatnim osima na dva različita načina. Dva takva primjera možemo vidjeti na slici 3.5.



Slika 3.5: Dva načina kako cjelobrojnim trokutima opisati pravokutnik.

Lijeva slika odnosi se na sve primitivne cjelobrojne trokute zbog toga što trokut na desnoj slici mora sadržavati neku unutrašnju cjelobrojnu točku pa stoga nije primitivan. Zbog toga je najdulja stranica primitivnog cjelobrojnog trokuta uvijek dijagonala opisanog pravokutnika i jedine cjelobrojne točke na toj dijagonali su dvije krajnje točke.



Slika 3.6: Primitivni cjelobrojni trokut određuje četverokut

Kada primitivnom cjelobrojnom trokutu ACD opišemo pravokutnik, dobit ćemo cjelobrojni četverokut ABCD kao na slici 3.6. Stranice tog četverokuta paralelne su koordinatnim osima. Taj četverokut može se rastaviti na cjelobrojni četverokut i dva cjelobrojna pravokutna trokuta. Prema propoziciji 3.2.1 Pickova formula mora vrijediti za četverokut ABCD. Također, znamo da Pickova formula vrijedi i za pravokutan trokut ABC. Po razlici površina četverokuta ABCD i pravokutnog trokuta ABC, Pickova formula mora vrijediti i za primitivni cjelobrojni trokut ACD. Trokut ACD zadovoljava $L = B = 3$, a Pickova formula nam govori da je površina tog trokuta jednaka $\frac{1}{2}$.

Ovime smo završili dokaz Pickove formule. Glavni argumenti dokaza su bili aditivnost Pickove formule i činjenica da je površina svakog primitivnog cjelobrojnog trokuta $\frac{1}{2}$.

□

3.3 Drugi dokaz Pickove formule

Drugi dokaz Pickove formule svodi se na prebrojavanje. Da bismo odredili površinu cjelobrojnog mnogokuta, prebrojat ćemo primitivne cjelobrojne trokute u nekoj njenoj primitivnoj cjelobrojnoj triangulaciji i podijelit ćemo taj broj s brojem 2. Na primjer, primitivna cjelobrojna triangulacija voćnjaka na slici 3.3 sadrži 44 primitivna cjelobrojna trokuta, svaki površine $\frac{1}{2}$. Dakle, površina cijelog voćnjaka iznosi $44 \cdot \frac{1}{2} = 22$. Označimo s L broj cjelobrojnih točaka koje pripadaju cjelobrojnom mnogokutu i s B broj cjelobrojnih točaka na rubu cjelobrojnog mnogokuta. Da bismo mogli dokazati da ova metoda uvijek daje točan iznos površine moramo pokazati da svaka primitivna cjelobrojna triangulacija zadovoljava sljedeći identitet:

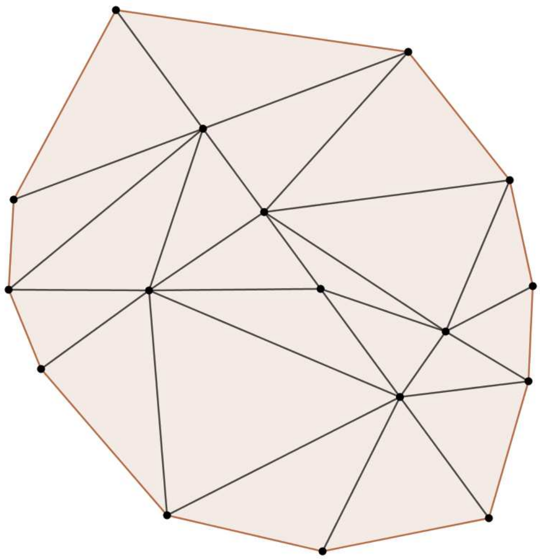
$$\text{broj primitivnih cjelobrojnih trokuta} = 2L - B - 2. \tag{3.3}$$

Dijeljenjem s brojem 2 dobivamo Pickovu formulu. Iznenađujuće je što formula za broj trokuta ne zahtijeva da vrhovi trokuta ujedno budu cjelobrojne točke. Na slici 3.7 prikazana je jedna triangulacija ne nužno cjelobrojnog mnogokuta.

Svaka dva trokuta u triangulaciji nekog mnogokuta su međusobno razdvojeni, tj. gotovo disjunktni. Preciznije, oni mogu dijeliti samo jedan vrh ili dijeliti jednu stranicu. Označimo sa:

- L - ukupan broj točaka u triangulaciji,
- B - ukupan broj vrhova mnogokuta,
- $I = L - B$ - ukupan broj unutarnjih točaka,
- T - ukupan broj trokuta.

Na primjeru triangulacije sa slike 3.7 imamo $L = 17$, $B = 11$, $I = 6$ i $T = 21$. Metoda prebrojavanja te formula (3.3) sugerira da postoji relacija između brojeva L, B, I i T koja zadovoljava triangulaciju svakog mnogokuta. Stoga slijedi idući teorem.



Slika 3.7: Triangulacija nekog mnogokuta

Teorem 3.3.1. *Pretpostavimo da smo triangulacijom mnogokuta dobili L točaka u triangulaciji, B rubnih vrhova, I unutarnjih točaka i T trokuta. Tada vrijedi formula*

$$T = 2I + B - 2.$$

Dokaz. Teorem implicira da broj primitivnih cjelobrojnih trokuta jednak

$$T = 2I + B - 2 = 2(I + B) - B - 2 = 2L - B - 2.$$

Promotrimo sumu S unutarnjih kutova svih T trokuta u triangulaciji mnogokuta. Pogledajmo sliku 3.8. Izrazit ćemo S na dva različita načina i izjednačiti rezultate koje dobijemo. Prvo, zbroj unutarnjih kutova u svakom od T trokuta iznosi 180°. Imamo

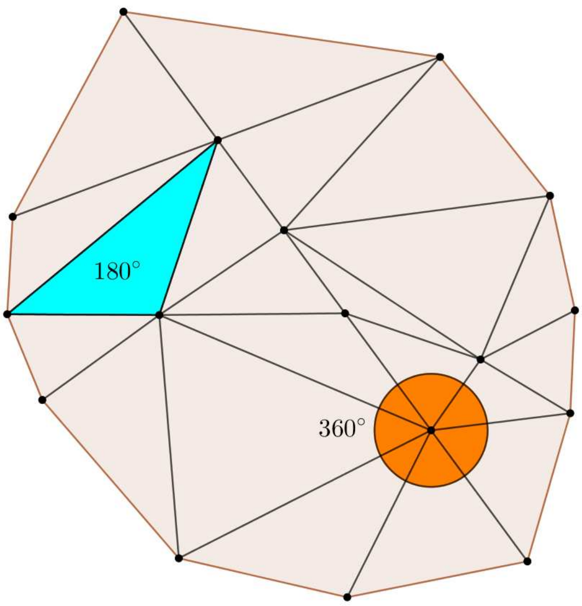
$$S = 180^\circ \cdot T. \tag{3.4}$$

Drugo, svaki od I unutarnjih vrhova sadrži ukupnu mjeru kutova od 360°, a suma mjera kutova svih unutarnjih kutova na B rubnih vrhova iznosi $180^\circ \cdot (B - 2)$. Imamo

$$S = 360^\circ \cdot I + 180^\circ \cdot (B - 2). \tag{3.5}$$

Izjednačavanjem jednakosti (3.4) i (3.5), dobivamo:

$$\begin{aligned} 180^\circ \cdot T &= 360^\circ \cdot I + 180^\circ \cdot (B - 2) \\ T &= 2 \cdot I + B - 2. \end{aligned}$$



Slika 3.8: Triangulacija i mjera unutrašnjih kutova

Kao što je već prethodno komentirano, dijeljenjem s brojem dva dobivamo Pickovu formulu, što je ujedno trebalo i dokazati. □

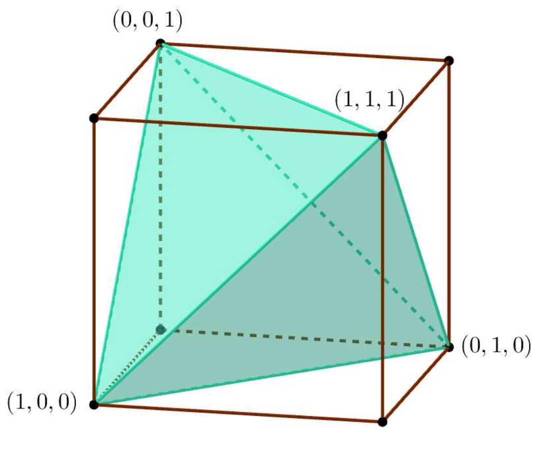
Poglavlje 4

Proširenja Pickove formule

U ovom poglavlju koristimo se knjigom [5] da istražimo proširenja Pickove formule. Nakon što smo pokazali da cjelobrojni mnogokuti imaju lijepo svojstvo računanja površine pomoću Pickove formule, postavlja se prirodno pitanje postoji li neki analogon Pickove formule za računanje volumena određenih poliedara u trodimenzionalnom prostoru.

Promatrat ćemo cjelobrojne poliedre, tj. poliedre čiji svi vrhovi imaju cjelobrojne koordinate. Trodimenzionalna verzija Pickove formule bi računala volumen cjelobrojnog poliedra pomoću broja cjelobrojnih točaka i broja rubnih cjelobrojnih točaka koje pripadaju takvom cjelobrojnom poliedru. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 4.0.1. *Slika 4.1 prikazuje kocku duljine stranice 1 podijeljenu na pet cjelobrojnih poliedara. Središnji tetraedar ima vrhove u točkama* $(0, 0, 1)$*,* $(1, 0, 0)$*,* $(0, 1, 0)$ *i* $(1, 1, 1)$*.*



Slika 4.1: Kocka podijeljena na pet tetraedara

Primijetimo da su sve četiri piramide koje okružuju središnji tetraedar sukladne. Svaki od pet poliedra sadrži četiri cjelobrojne točke koje su ujedno i rubne točke poliedra.

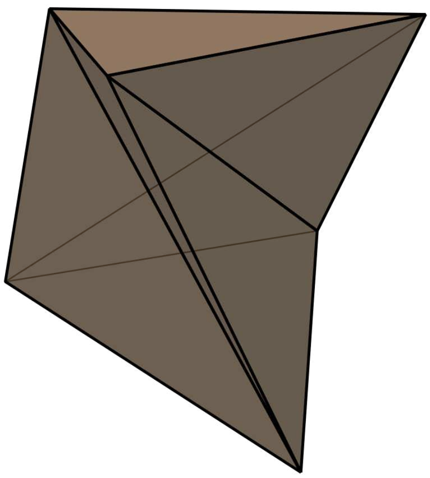
Prema tome, analogon Pickove formule bi implicirao da svih pet poliedara imaju isti volumen. Ali formula za volumen piramide,

$$\text{volumen piramide} = \frac{\text{površina baze} \cdot \text{duljina visine}}{3},$$

pokazuje da volumen jedne od četiri piramida iznosi $\frac{1}{6}$, a kako volumen kocke iznosi 1, tako je volumen središnjeg tetraedra jednak $1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$. Takav zaključak nam pokazuje da dva poliedra mogu imati različite volumene, a jednak broj cjelobrojnih točaka koje im pripadaju.

Tu je i teorijski razlog zašto se ne može Pickova formula jednostavno proširiti na treću dimenziju. Prethodni dokazi Pickove formule oslanjaju se na triangulaciju, odnosno podjelu mnogokuta na disjunktne trokute. Nije jasno što bi bio trodimenzionalni analogon triangulaciji. Neki poliedri ne mogu se "tetraedarizirati", odnosno rastaviti na konačnu disjunktnu uniju tetraedara kao trokuti u mnogokutu.

Primjer 4.0.2. *Najjednostavniji primjer takvog poliedra prikazan je na slici 4.2. Taj poliedar ima naziv Schönhardtov poliedar te je najjednostavniji nekonveksni poliedar koji se ne može "tetraedarizirati". Primjeri još nekih poliedra koji se ne mogu "tetraedarizirati" mogu se pronaći u [4].*



Slika 4.2: Schönhardtov poliedar [1]

[1]Slika 4.2 preuzeta s en.wikipedia.org/wiki/Schönhardt_polyhedron (1. kolovoza 2023.)

4.1 Pickova formula i homotetija u ravnini

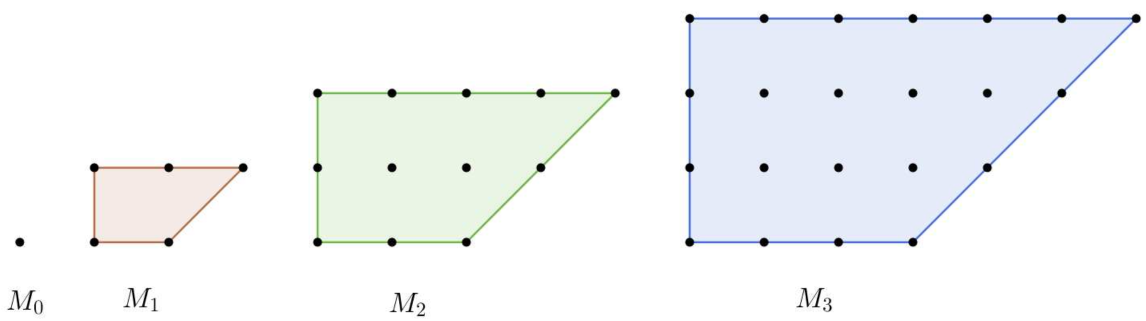
Prvo ćemo istražiti odnos između Pickove formule i homotetije. Prema skripti [6], **homotetija** sa središtem O i koeficijentom $k \in \mathbb{R}$ je preslikavanje koje točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (kx, ky)$. Koristimo ponovno oznake koje se pojavljuju u cjelobrojnom mnogokutu:

- L = ukupan broj cjelobrojnih točaka koje pripadaju cjelobrojnom mnogokutu,
- B = ukupan broj cjelobrojnih točaka na rubu cjelobrojnog mnogokuta,
- A = površina cjelobrojnog mnogokuta.

Ako Pickovu formulu zapišemo na malo drugačiji način dobivamo

$$L = A + \frac{1}{2} \cdot B + 1. \tag{4.1}$$

Ako djelujemo homotetijom na mnogokut, tada i dalje vrijedi relacija (4.1). Neka je M cjelobrojni mnogokut i neka je N nenegativan cijeli broj. Neka M_N označava sliku originalnog cjelobrojnog mnogokuta M s obzirom na homotetiju $(x, y) \mapsto (Nx, Ny)$ kao na slici 4.3.



Slika 4.3: Homotetična slika mnogokuta s koeficijentom $N = 0, 1, 2, 3$

Govorimo o homotetičnoj slici mnogokuta M za faktor N koju označavamo kao M_N. Ako je $N = 1$, tada je mnogokut M_N zapravo mnogokut M. Ako je $N = 0$, tada mnogokut M_N postaje jedna cjelobrojna točka $(0, 0)$.

Uvedimo nove oznake:

- L_N = ukupan broj cjelobrojnih točaka koje pripadaju homotetičnoj slici cjelobrojnog mnogokuta M_N,

- B_N = ukupan broj cjelobrojnih točaka na rubu homotetične slike cjelobrojnog mnogokuta M_N,
- A_N = površina cjelobrojnog mnogokuta M_N.

Sada je zadatak pronaći formulu za L_N koristeći vrijednosti A i B. Znamo da vrijedi formula

$$L_N = A_N + \frac{1}{2} \cdot B_N + 1. \tag{4.2}$$

Ako bismo cjelobrojni mnogokut M triangulirali te na tako dobiveni mnogokut primijenili homotetiju, dobiveni mnogokuti (a tako i trokuti) bili bi slični početnom mnogokutu (trokutima). Koeficijent homotetije ujedno je tada i koeficijent sličnosti. Znamo da se duljine stranica proporcionalno povećavaju s koeficijentom sličnosti, a površina s kvadratom koeficijenta sličnosti pa slijedi da

$$\begin{aligned} A_N &= AN^2, \\ B_N &= BN. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Koristeći sada (4.2) i (4.3) dobivamo formulu za broj cjelobrojnih točaka u cjelobrojnom mnogokutu M:

$$L_N = AN^2 + \frac{B}{2} \cdot N + 1. \tag{4.4}$$

Pickova formula je zapravo specijalni slučaj kojeg dobivamo za $N = 1$. Iako smo ograničili homotetiju na nenegativne vrijednosti N, ništa nas ne sprječava da uzmemo $N = -1$ i uvrstimo u prethodnu formulu (4.4). Dobivamo

$$L_{-1} = A - \frac{B}{2} + 1 = \left(A + \frac{B}{2} + 1\right) - B = L - B,$$

što predstavlja broj cjelobrojnih točaka unutar cjelobrojnog mnogokuta. Sličan račun pokazuje da je L_{-N} jednak broju cjelobrojnih točaka koje se nalaze unutar mnogokuta M_N (osim za degenerirani slučaj $N = 0$). Cijela prethodna rasprava dovela nas je do modificirane verzije Pickove formule koja može biti generalizirana i na više dimenzija.

Teorem 4.1.1. *Neka je M cjelobrojni mnogokut, neka je L_N ukupan broj cjelobrojnih točaka koje pripadaju homotetičnoj slici cjelobrojnog mnogokuta M_N i neka je $N = 0, 1, \ldots$. Formula za broj cjelobrojnih točaka u mnogokutu M jednaka je*

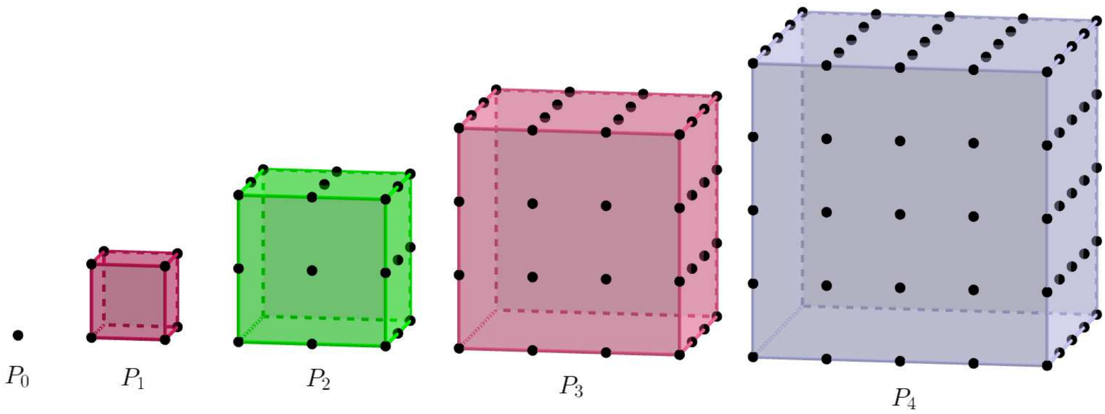
$$L_N = c_2 N^2 + c_1 N + c_0,$$

gdje je c_2 površina mnogokuta M, c_1 je polovičan broj cjelobrojnih točaka koje je pojavljuju na rubu mnogokuta i $c_0 = 1$. Također, vrijednost L_{-N} jednaka je broju cjelobrojnih točaka u unutrašnjosti mnogokuta M_N.

4.2 Pickova formula i homotetija u prostoru

Sada pogledajmo kako se ponašaju Pickova formula i homotetija u prostoru. Ponovno možemo promatrati ukupan broj cjelobrojnih točaka L_N poliedra P. Slika 4.4 prikazuje jediničnu kocku P i nekoliko njezinih slika s obzirom na različite homotetije. Zbog toga što homotetična slika poliedra P_N ima $N + 1$ cjelobrojnih točaka na nekom bridu, ukupan broj cjelobrojnih točaka jest

$$L_N = (N + 1)^3 = N^3 + 3N^2 + 3N + 1.$$



Slika 4.4: Homotetična slika poliedra s koeficijentom $N = 0, 1, 2, 3, 4$

Primijetimo da koeficijent uz N^3 iznosi 1, što je zapravo volumen poliedra P te da je konstanta također 1. Lako se vidi da postoje $(N-1)^3$ cjelobrojnih točaka u unutrašnjosti poliedra P_N. Dovoljno je samo maknuti rubne cjelobrojne točke s poliedra P_N i dobiva se kocka s bridom od $N - 1$ cjelobrojnih točaka. Stoga možemo zapisati i

$$L_{-1} = -N^3 + 3N^2 - 3N + 1 = -(N - 1)^3.$$

Sljedeći teorem trodimenzionalni je analogon teorema o ukupnom broju cjelobrojnih točaka mnogokuta, tj. teorema 4.1.1.

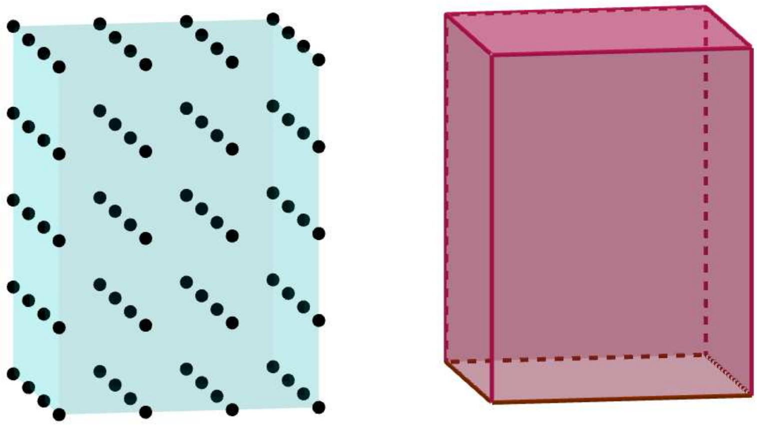
Teorem 4.2.1. *Neka je P cjelobrojni poliedar, neka je L_N ukupan broj cjelobrojnih točaka koje pripadaju homotetičnoj slici cjelobrojnog poliedra P_N i neka je $N = 0, 1, 2, ...$ Postoje jedinstveni cijeli brojevi c_1 i c_2 takvi da je formula za broj cjelobrojnih točaka u poliedru P jednaka*

$$L_N = c_3N^3 + c_2N^2 + c_1N + c_0,$$

gdje je c_3 volumen poliedra P, i $c_0 = 1$. Također, vrijednost $-L_{-N}$ jednaka je broju cjelobrojnih točaka u unutrašnjosti poliedra P_N .

Može se dokazati da za n-dimenzionalne cjelobrojne poliedre P ukupan broj cjelobrojnih točaka L_N je polinom n-tog stupnja u jednoj varijabli, koji se još naziva i Ehrhartov polinom. Vodeći koeficijent je n-dimenzionalni volumen poliedra P, konstantni član polinoma iznosi 1, a $(-1)^n L_{-N}$ je broj cjelobrojnih točaka u unutrašnjosti homotetične slike poliedra P_N za $N = 1, 2, ...$ Dokazi danih tvrdnji i više o Ehrhartovim polinomima mogu se pronaći u knjizi [3].

Problem generalizacije Pickove formule je motivirao uvođenje i proučavanje pojma diskretnog volumena. Diskretni volumen može se intuitivno opisati kao broj cjelobrojnih točaka koje pripadaju nekom poliedru P. Za razliku od diskretnog, imamo i neprekidan volumen koji ima uobičajeno intuitivno značenje volumena koji koristimo u svakodnevnom životu. Primjer intuitivne razlike diskretnog i neprekidnog volumena prikazan je na slici 4.5.



Slika 4.5: Intuitivna razlika između diskretnog i neprekidnog volumena

Sve cjelobrojne točke u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru možemo označiti kao $\mathbb{Z}^n$. Tada diskretni volumen možemo definirati kao broj cjelobrojnih točaka unutar poliedra P, točnije kao kardinalitet skupa $\mathbb{Z}^n \cap P$. Volumen poliedra možemo aproksimirati n-dimenzionalnim kockama koje postaju sve manje i manje. Ako je kocka duljine brida $\frac{1}{t}$, tada volumen kocke iznosi $\frac{1}{t^n}$. Tako kocke popunjavaju prostor između cjelobrojnih točaka oblika $\left(\frac{1}{t}\mathbb{Z}\right)^n$. To znači da neprekidan volumen možemo računati pomoću diskretnog volumena prebrojavanjem kocki, odnosno prebrojavanjem cjelobrojnih točaka oblika $\left(\frac{1}{t}\mathbb{Z}\right)^n$, kao

$$\text{volumen } P = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^n} \cdot \left(P \cap \left(\frac{1}{t}\mathbb{Z}\right)^n \right).$$

Iako je teško vizualizirati n-dimenzionalne poliedre, polinom L_N može biti koristan u problemima promjene zamjene novaca koje koriste više od 4 apoena, kao i u ostalim problemima vezanim uz prebrojavanje.

Poglavlje 5

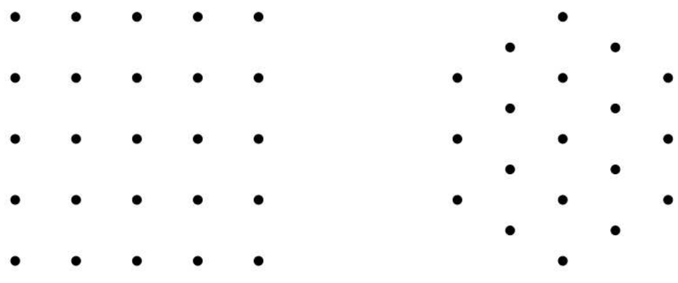
Rešetke u euklidskom prostoru i Pickova formula

U ovom poglavlju istražit ćemo teoriju koja dovodi do Pickove formule. Ovo poglavlje prati deseto poglavlje knjige [2].

Do sada smo govorili o cjelobrojnim točkama, tj. elementima skupa $\mathbb{Z}^n = \{(x_1, ..., x_n) :$ za sve $x_n \in \mathbb{Z}\}$ za $n = 2, 3$. Stoga ćemo sada definirati općeniti pojam rešetke.

Definicija 5.0.1. *Neka je V euklidski prostor. Skup $\Lambda \subset V$ naziva se* ***rešetka*** *ako:*

- je Λ aditivna podgrupa od V, tj. za sve $x, y \in \Lambda$ vrijedi $x \pm y \in \Lambda$,
- je Λ diskretna, tj. za svaki omeđen skup $B \subset V$, presjek $B \cap \Lambda$ je konačan,
- Λ razapinje V, tj. linearna ljuska skupa Λ jest cijeli V.



Slika 5.1: Primjeri rešetki u ravnini

Sve rešetke izgledaju isto ako nas ne zanima euklidska struktura. Rešetke počinju izgledati drugačije jednom kada se uvede euklidska struktura. Primjere nekih rešetki možemo vidjeti na slici 5.1. Rešetke su beskonačne, što znači da se točke sa slike nastavljaju u takvom uzorku u beskonačnost u svim smjerovima.

Primjer rešetke koju smo dosad koristili je rešetka $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ koja se sastoji od točaka s cjelobrojnim koordinatama, tzv. cjelobrojnim točkama. Preostali primjeri rešetki mogu se generirati na sljedeći način. Neka je $L \subset \mathbb{R}^n$ potprostor razapet nekim točkama iz skupa $\mathbb{Z}^n$. Tada je $\Lambda = L \cap \mathbb{Z}^n$ rešetka u L.

Neka je V euklidski prostor. Imamo definiranu euklidsku normu $\|\cdot\|$ i udaljenost d na V s

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x\rangle}, \\ d(x,y) &= \|x-y\|. \end{aligned}$$

za sve x i $y \in V$. Također, za skup $L \subset V$ definirana je udaljenost točke x od skupa L kao

$$d(x, L) = \inf_{y \in L} d(x, y).$$

Spomenut ćemo još jednu oznaku koju ćemo koristiti u radu. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ neki broj. Definiramo $\lfloor\alpha\rfloor$ kao cjelobrojni dio broja α te $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor\alpha\rfloor$ kao dio broja α takav da je $0 \leq \{\alpha\} < 1$. Dakle, imamo

$$\alpha = \lfloor\alpha\rfloor + \{\alpha\}, \quad \text{gdje je } \lfloor\alpha\rfloor \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 \leq \{\alpha\} < 1.$$

Za početak, spomenut ćemo teorem koji će povezati bazu euklidskog prostora i rešetku.

Teorem 5.0.2. *Neka je V euklidski prostor. Pretpostavimo da je $\dim V = n > 0$.*

1. *Neka je $\Lambda \subset V$ rešetka. Tada postoje vektori $v_1, ..., v_n$ u Λ takvi da za svaku točku $x \in \Lambda$ postoji jedinstven prikaz kao linearna kombinacija vektora $v_1, ..., v_n$,*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \quad \text{gdje je } \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ za } i = 1, ..., n.$$

Skup $\{v_1, ..., v_n\}$ nazivamo baza od Λ.

2. *Neka je $v_1, ..., v_n$ baza od Λ i neka je*

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tada je $\Lambda \subset V$ rešetka.

Dokaz iskazanoga teorema nalazi se u knjizi [2]. Na primjeru sa slike 5.1, lijeva rešetka ima bazu $\{(1,0),(0,1)\}$, a desna rešetka ima bazu $\left\{(0,1),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$.

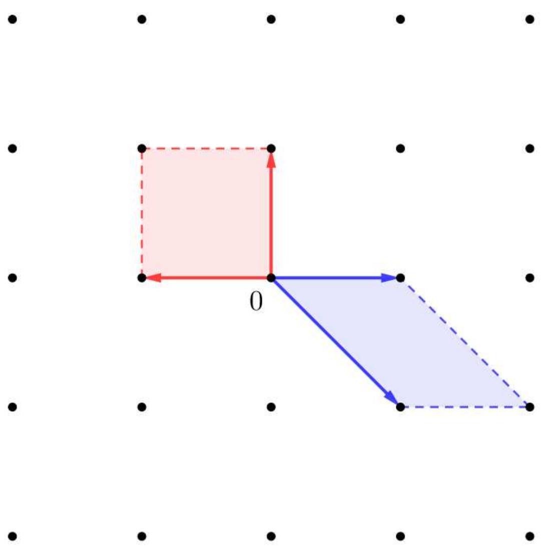
Nadalje, definirat ćemo tzv. fundamentalni paralelepiped.

Definicija 5.0.3. *Neka je $\Lambda \subset V$ rešetka i neka je $v_1, ..., v_n$ baza od Λ. Poluotvoren paralelepiped*

$$\Pi = \Pi(v_1, ..., v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : 0 \leq \alpha_i < 1 \text{ za } i = 1, ..., n \right\}$$

naziva se ***fundamentalni paralelepiped*** *od Λ.*

Primjer dva fundamentalna paralelepipeda u rešetki $\mathbb{Z}^2$ nalaze se na slici 5.2.



Slika 5.2: Rešetka $\mathbb{Z}^2$ i dva njena fundamentalna paralelepipeda

Lema 5.0.4. *Neka je $\Lambda \subset V$ rešetka i neka je Π fundamentalni paralelepiped u Λ. Tada svaka točka $x \in V$ može biti jedinstveno zapisana kao*

$$x = y + v,$$

gdje je $y \in \Pi$ i $v \in \Lambda$.

Dokaz. Dokaz egzistencije.

Neka je $v_1, ..., v_n$ baza od Λ koja razapinje paralelepiped Π. Neka je $x \in V$ proizvoljna točka. Tada vrijedi

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{za neke } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Ako zapišemo

$$y = \sum_{i=1}^{n} \{\alpha_i\} v_i \quad \text{i} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \alpha_i \rfloor v_i,$$

time smo očito dobili traženi rastav iz iskaza leme.

Dokaz jedinstvenosti.
Pretpostavimo da je

$$x = y_1 + v_1 = y_2 + v_2, \quad \text{za } y_1, y_2 \in \Pi \text{ i } v_1, v_2 \in \Lambda.$$

Tada je $y_1 - y_2 = v_2 - v_1$, dakle $y_1 - y_2 \in \Lambda$. S druge strane, u zapisu

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \quad y_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \text{ i } y_1 - y_2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i,$$

uviđamo da moramo imati

$$0 \le \alpha_i, \beta_i < 1 \text{ i } \alpha_i - \beta_i \in \mathbb{Z} \quad \text{za } i = 1, .., n,$$

što povlači da je $\alpha_i = \beta_i$ za sve $i = 1, ..., n$ pa je $y_1 = y_2$ i $v_1 = v_2$. □

Sada možemo predstaviti važnu numeričku invarijantu rešetke.

Teorem 5.0.5. *Neka je $\Lambda \subset V$ rešetka. Tada svi fundamentalni paralelepipedi Π od Λ imaju jednak volumen kojeg zovemo determinanta od Λ i označavamo s $\det \Lambda$. Nadalje, ako je K_r kugla radijusa r postavljena u ishodištu tada je*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{|K_r \cap \Lambda|}{\text{volumen } K_r} = \frac{1}{\det \Lambda}.$$

Općenito, ako je $a \in V$ proizvoljna točka, tada je

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{|K_r \cap (a + \Lambda)|}{\text{volumen } K_r} = \frac{1}{\det \Lambda}.$$

Dokaz. Odaberimo proizvoljan fundamentalni paralelepiped Π iz Λ. Lema 5.0.4 povlači da svi skupovi $\Pi + v, v \in \Lambda$ pokrivaju prostor V te da su međusobno disjunktni. Pretpostavimo da je $\Pi \subset K_\alpha$ za neki $\alpha > 0$. Odaberimo $r > \alpha$ i promotrimo uniju X_r svih $\Pi + v$, gdje je $v \in K_r$,

$$X_r = \bigcup_{v \in K_r} \big(\Pi + v\big).$$

Tada vrijedi

$$K_{r-\alpha} \subset X_r \subset K_{r+\alpha}.$$

Prva inkluzija vrijedi jer se svaka točka $x \in K_{r-\alpha}$ nalazi u $\Pi + v$ za neki $v \in K_r$ zbog čega slijedi da je $v \in K_r$, a druga relacija očito vrijedi. Stoga vrijedi

$$\text{volumen } K_{r-\alpha} \leq \text{volumen } X_r = |K_r \cap \Lambda| \text{ volumen } \Pi \leq \text{volumen } K_{r+\alpha}.$$

Kako vrijedi da

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\text{volumen } K_{r\pm\alpha}}{\text{volumen } K_r} = 1,$$

dobivamo

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{|K_r \cap \Lambda|}{\text{volumen } K_r} = \frac{1}{\text{volumen } \Pi}.$$

Općenito, za svaki $a \in V$ i $\alpha = \|a\|$ imamo

$$a + (K_{r-\alpha} \cap \Lambda) \subset K_r \cap (a + \Lambda) \subset a + (K_{r+\alpha} \cap \Lambda),$$

iz čega slijedi

$$|K_{r-\alpha} \cap \Lambda| \leq |K_r \cap (a + \Lambda)| \leq |K_{r+\alpha} \cap \Lambda|,$$

i konačno

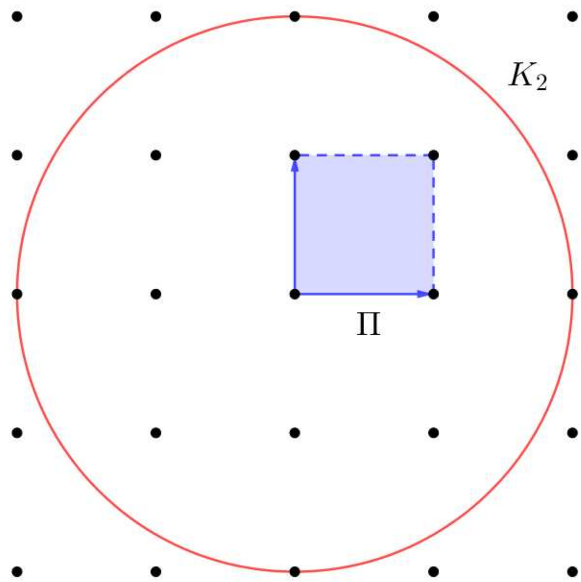
$$\lim_{r\to+\infty} \frac{|K_r \cap (a + \Lambda)\,|}{\text{volumen } K_r} = \frac{1}{\det \Lambda}.$$

□

Drugim riječima, kao što smo vidjeli u prethodnom dokazu, $\det \Lambda$ je "volumen po točki rešetke". Broj točaka rešetke u kugli K radijusa r približno je jednak omjer volumena kugle i volumena fundamentalnog paralelepipeda. Na primjeru slike 5.3 imamo rešetku $\mathbb{Z}^2$, kuglu radijusa 2 te fundamentalni paralelepiped Π razapet vektorima iz skupa $\{(1,0),(0,1)\}$. Tada možemo aproksimirati

$$\frac{|K_2 \cap \mathbb{Z}^2|}{\text{volumen } K_2} \approx \frac{1}{\text{volumen } \Pi} \Rightarrow \frac{13}{4\pi} \approx \frac{1}{\text{volumen } \Pi} \Rightarrow \text{volumen } \Pi \approx 0.96664,$$

što je prilično dobra aproksimacija volumena fundamentalnog paralelepipeda sa slike 5.3. Naravno, za $r \to \infty$ dobivamo da volumen iznosi 1.



Slika 5.3: $\det\Lambda$ je "volumen po točki rešetke"

Označimo sada s $\Lambda_0, \Lambda \subset V$ rešetke takve da je $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Tada je Λ_0 (normalna) podgrupa od Λ i možemo razmatrati kvocijent Λ/Λ_0 i pripadne klase. Sljedeći teorem nam daje broj klasa u kvocijentu Λ/Λ_0.

Teorem 5.0.6. *Neka su $\Lambda_0 \subset \Lambda$ rešetke i neka je Π fundamentalni paralelepiped od Λ_0. Tada skup $\Pi \cap \Lambda$ sadrži točno jednu kopiju svakog reprezentanta svake klase iz Λ/Λ_0. Nadalje, vrijedi*

$$|\Pi \cap \Lambda| = |\Lambda/\Lambda_0| = \frac{\det\Lambda_0}{\det\Lambda}.$$

Dokaz. Prema lemi 5.0.4 svaki $x \in \Lambda$ ima jedinstveni rastav $x = y + v$ gdje je $v \in \Lambda_0$ i $y \in \Pi$. Tada je $y \in \Lambda$ i $y \equiv x \mod \Lambda_0$. Dakle, y je jedinstveni reprezentant elementa x u Π, čime smo dokazali da vrijedi jednakost $|\Pi \cap \Lambda| = |\Lambda/\Lambda_0|$.

Preostaje pokazati $|\Lambda/\Lambda_0| = \frac{\det\Lambda_0}{\det\Lambda}$. Odaberimo neki skup $S \subset \Lambda$ koji sadrži sve reprezentante svih klasa od Λ/Λ_0 tako da vrijedi $|S| = |\Lambda/\Lambda_0|$. Kako je

$$\Lambda = \bigcup_{a\in S}\Big(a + \Lambda_0\Big),$$

imamo

$$|K_r \cap \Lambda| = \bigcup_{a \in S} \Big(K_r \cap (a + \Lambda_0) \Big). \tag{5.1}$$

Istinitost gornje tvrdnje slijedi direktno iz teorema 5.0.5, tj. iz

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{|K_r \cap \Lambda|}{\text{volumen } K_r} = \frac{1}{\det \Lambda},$$
$$\lim_{r \to +\infty} \frac{|K_r \cap (a + \Lambda_0)\,|}{\text{volumen } K_r} = \frac{1}{\det \Lambda_0}.$$

Tvrdnja sada slijedi iz (5.1). □

Pretpostavimo da je $V = \mathbb{R}^n$, $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ i da je Λ_0 rešetka generirana nekim linearno nezavisnim cjelobrojnim vektorima $v_1, ..., v_n$. Tada, prema teoremu 5.0.6, broj cjelobrojnih točaka u paralelepipedu

$$\Pi = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : 0 \leq \alpha_i < 1 \text{ za } i = 1, ..., n \right\},$$

jednak je volumenu od Π. U dvodimenzionalnom prostoru to nas dovodi do Pickove formule, odnosno, broja cjelobrojnih točaka u mnogokutu čiji su vrhovi cjelobrojne točke.

Teorem 5.0.7. ***(Pickova formula)*** *Neka je $M \subset \mathbb{R}^2$ mnogokut s cjelobrojnim vrhovima. Tada je*

$$\left| M \cap \mathbb{Z}^2 \right| = P(M) + \frac{1}{2} \left| \partial M \cap \mathbb{Z}^2 \right| + 1.$$

Dokaz. Ideja dokaza je ista kao i u prvom dokazu Pickove formule ranije u radu. Prvo ćemo dokazati Pickovu formulu za trokut. Promotrimo trokut T s cjelobrojnim vrhovima u O, A, B kao dio zatvorenog paralelograma $\overline{\Pi}$ s vrhovima O, A, B i $A + B$ kao na slici 5.4. Vrijedi

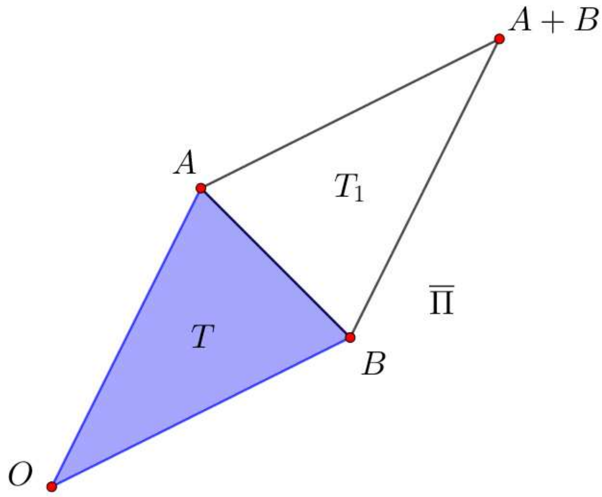
$$\left| T \cap \mathbb{Z}^2 \right| + \left| T_1 \cap \mathbb{Z}^2 \right| - \left| \, [A, B] \cap \mathbb{Z}^2 \right| = \frac{1}{2} \left| \overline{\Pi} \cap \mathbb{Z}^2 \right|. \tag{5.2}$$

Postoji bijekcija između cjelobrojnih točaka u trokutu T i cjelobrojnih točaka u trokutu T_1 s vrhovima $(A + B), A$ i B i ona je zadana s

$$v \mapsto (A + B) - v,$$

pa prema (5.2) vrijedi

$$\left| T \cap \mathbb{Z}^2 \right| = \frac{1}{2} \left| \overline{\Pi} \cap \mathbb{Z}^2 \right| + \frac{1}{2} \left| \, [A, B] \cap \mathbb{Z}^2 \right|.$$



Slika 5.4: Trokut T s cjelobrojnim vrhovima i paralelogram $\overline{\Pi}$

Sada imamo

$$\left|\overline{\Pi} \cap \mathbb{Z}^2\right| = \left|\Pi \cap \mathbb{Z}^2\right| + \left|\,[A, A+B] \cap \mathbb{Z}^2\right| + \left|\,[B, A+B] \cap \mathbb{Z}^2\right| - 1,$$

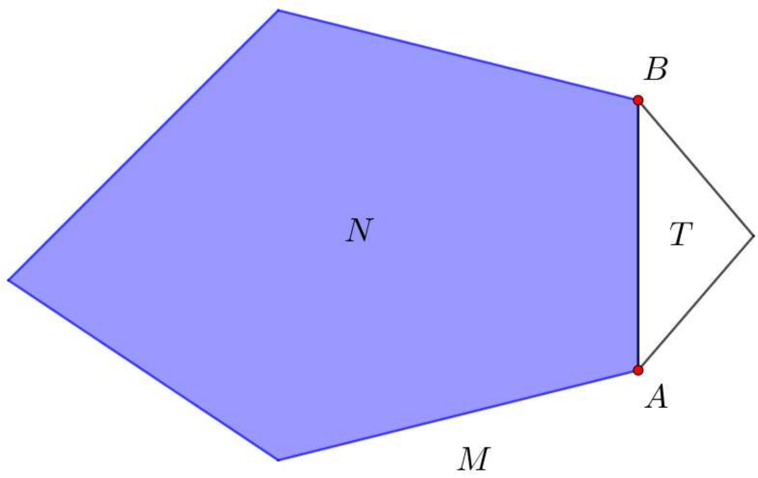
gdje je Π poluotvoren paralelogram razapet s A i B. Po teoremu 5.0.6 imamo

$$|\Pi \cap \mathbb{Z}^2| = P(\Pi).$$

Uzimajući u obzir da je $P(T) = \frac{1}{2}P(\Pi)$ i da su cjelobrojne točke na intervalu $[A, A+B]$ u bijekciji s cjelobrojnim točkama na intervalu $[O, A]$ dobivamo

$$\left|T \cap \mathbb{Z}^2\right| = P(T) + \frac{1}{2}\left|\,[A, B] \cap \mathbb{Z}^2\right| + \frac{1}{2}\left|\,[O, A] \cap \mathbb{Z}^2\right| + \frac{1}{2}\left|\,[O, B] \cap \mathbb{Z}^2\right| - \frac{1}{2}$$
$$\left|T \cap \mathbb{Z}^2\right| = P(T) + \frac{1}{2}\left|\partial T \cap \mathbb{Z}^2\right| + 1.$$

Sada ćemo dokazati da Pickova formula vrijedi za proizvoljan mnogokut M s cjelobrojnim vrhovima dodavanjem broja vrhova. Na slici 5.5 prikazan je mnogokut M s n vrhova kao unija mnogokuta N s $n-1$ vrhova i trokuta T na intervalu $[A, B]$.



Slika 5.5: Mnogokut M je unija mnogokuta N i trokuta T

Na kraju imamo

$$\begin{aligned}
\left|M \cap \mathbb{Z}^2\right| &= \left|N \cap \mathbb{Z}^2\right| + \left|T \cap \mathbb{Z}^2\right| - \left|\,[A, B] \cap \mathbb{Z}^2\right|, \\
\left|M \cap \mathbb{Z}^2\right| &= P(N) + P(T) + \frac{1}{2}\left|\partial N \cap \mathbb{Z}^2\right| + \frac{1}{2}\left|\partial T \cap \mathbb{Z}^2\right| + 2 - \left|\,[A, B] \cap \mathbb{Z}^2\right|, \\
\left|M \cap \mathbb{Z}^2\right| &= P(T) + \frac{1}{2}\left|\partial M \cap \mathbb{Z}^2\right| + 1,
\end{aligned}$$

što završava dokaz za proizvoljan mnogokut s cjelobrojnim vrhovima. □

Poglavlje 6

Metodički pristup otkrivanja Pickove formule

Ovo poglavlje motivirano je metodičkim materijalima [12] te se pozivamo na aktualni Nacionalni matematički kurikulum [11]. Iako u službenom dokumentu ne postoji nastavni sadržaj Pickova formula, istu formulu učenici mogu otkriti u sklopu proširenog sadržaja kao dodatno usvajanje odgojno-obrazovnih ishoda u 7. razredu osnovnoškolskog obrazovanja. Ishodi iz Nacionalnog matematičkog kurikuluma kojima će to doprinijeti su sljedeći:

- MAT OŠ C.7.1. - učenik/ca crta i konstruira mnogokute i koristi se njima pri stvaranju složenijih geometrijskih likova,
- MAT OŠ D.7.3. - učenik/ca odabire strategije za računanje opsega i površine mnogokuta.

Cilj ovih ishoda jest osposobiti učenika da motiv koji se temelji na mnogokutu zna opisati, analizirati i rekonstruirati crtežom ili konstrukcijom te pronaći i opisati particije (trokut, kvadrat, pravokutnik, paralelogram, trapez) nepravilnog mnogokuta. Ovim se ishodima ne provjerava tehnika računanja, nego učenikovo logičko razmišljanje i sposobnost analize problema.

Aktivnost otkrivanja pripremit ćemo u obliku "Gostionice" (diferencirana nastava). Razredni odjel fizički je podijeljen u nekoliko skupina učenika koji aktivnost izvode zajednički. Skupine su heterogene, tj. učenici se ne grupiraju prema matematičkim sposobnostima. Zadaci i materijali za različite skupine trebaju biti analogni jedni drugima, ali se razlikovati (npr. u numeričkim podacima u zadacima ili objektima koje istražuju). Potrebno je osigurati aktivan rad svih učenika u svakoj skupini. Na razini razrednog odjela i svake skupine treba obuhvatiti sve relevantne slučajeve za situaciju koja se istražuje - metoda razlikovanja slučajeva. Tijekom rada učenika u skupinama, nastavnik obilazi skupine i nadzire njihov rad. Važno je da tijekom rada učenika u skupinama nastavnik ne komunicira na razini cijelog razrednog odjela frontalno, osim ako je pri obilasku skupina utvrdio da je svim skupinama potrebno dati neku dodatnu informaciju ili uputu za njihov rad. Razredna diskusija u kojoj se analiziraju i sintetiziraju rad, ideje, strategije i zaključci svih skupina slijedi tek nakon završenog rada skupina. Ova aktivnost osobito je pogodna pri otkrivanju novih matematičkih koncepata i njihovih svojstava jer omogućuje dovoljno velik i reprezentativan uzorak podataka, primjera ili analognih slučajeva na temelju kojih učenici generalizacijom pomoću nepotpune indukcije donose opći zaključak. Uz to ovaj način izvođenja aktivnosti potiče razmjenu učeničkih spoznaja i ideja te njihovu neposrednu međusobnu komunikaciju matematičkim jezikom.

Aktivnost uvježbavanja pripremit ćemo u obliku rada u paru (diferencirana nastava). Razredni odjel podijeljen je u parove učenika, najbolje prema rasporedu sjedenja u klupama. Svaki par učenika dobiva zadatke za zajednički samostalni rad. Potrebno je osigurati rad svakog učenika, najbolje odgovarajućom podjelom zadataka. Zadaci su odabrani tako da samostalnim rješavanjem postoji međusobna kontrola rezultata. Nakon riješenih zadataka slijedi analiza rješenja.

6.1 Aktivnost otkrivanja

Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u četveročlanim timovima, otkriti Pickovu formulu za površinu mnogokuta u mreži kvadratića

Oblik rada: suradničko timski rad učenika u heterogenim četveročlanim skupinama metodom *"Gostionice"*

Potreban materijal:

- četiri grupe nastavnog listića 1, u oznakama: nastavni listić 1-A, nastavni listić 1-B, nastavni listić 1-C, nastavni listić 1-D,
- nastavni listić 2,
- nastavni listić 3.

Tijek aktivnosti:

<u>Prva faza - "kod kuće"</u>

Učenike podijelimo u četveročlane skupine. Svaka skupina dobije oznaku A, B, C, D, ..., ovisno o tome koliko je skupina, a svaki član svake skupine dobije jedan od brojeva 1, 2, 3 ili 4. Učenici u skupinama ispunjavaju nastavni listić 1 za tu skupinu. Svaka iduća skupina nakon skupine D dobiva nastavni listić 1 ispočetka, odnosno, skupina E dobiva nastavni listić 1-A, skupina F dobiva nastavni listić 1-B itd. Skupine dobivaju različite, ali analogne zadatke na kojima rade. Nakon ispunjenih listića nastavnik najavljuje odlazak "u goste".

Druga faza - ”u gostima”

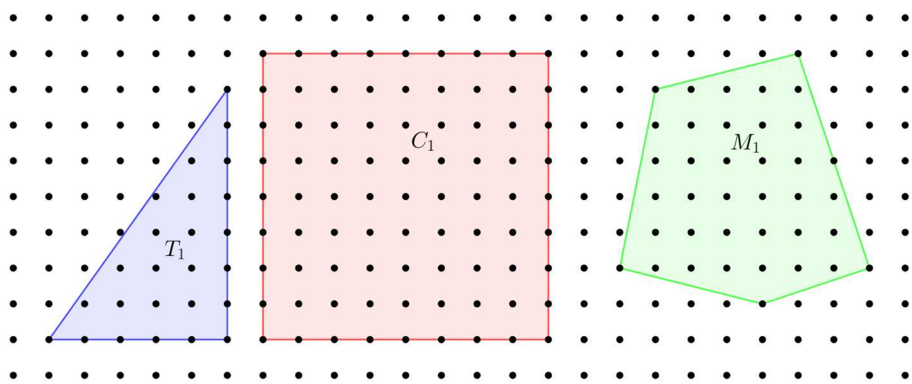
Učenici s svojim brojem kojega su dobili u početnoj skupini sastavljaju nove skupine. U svakoj novoj skupini 1, 2, 3 i 4 sada je po jedan učenik svake ”originalne” skupine. Učenici međusobno uspoređuju i usklađuju popunjene nastavne listiće 1. Svaki učenik dobije nastavni listić 2 te ga svi članovi skupine zajedno ispunjavaju koristeći rezultate nastavnog listića 1 pojedine grupe. Nakon ispunjenih listića nastavnik najavljuje ”povratak kući” u ”originalne” skupine.

Treća faza - ”povratak kući”

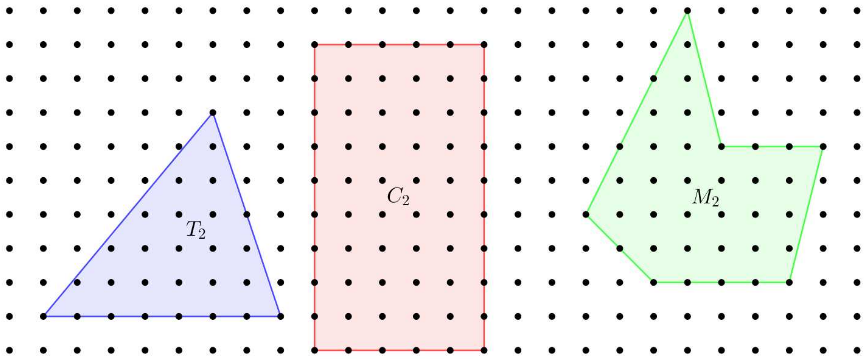
Učenici u ”originalnim” skupinama međusobno uspoređuju i usklađuju popunjene nastavne listiće 2. Zatim svaki učenik dobiva nastavni listić 3. Učenici diskutiraju, rješavaju nastavni listić 3 te donose zaključke. Nakon donesenih zaključaka slijedi razredna diskusija te učenici u bilježnicu zapisuju zaključak, odnosno Pickovu formulu.

Mnogokute koje zadajemo učenicima sastoje se od jednog trokuta, četverokuta i n-terokuta za $n > 4$. Od učenika se očekuje da izračunaju površine zadanim mnogokutima na poznat način (formulama za izračun površina trokuta i poznatih četverokuta te podjelom mnogokuta na likove kojima znaju izračunati površinu). Mnogokut kojeg zadajemo može biti konveksan i nekonveksan.

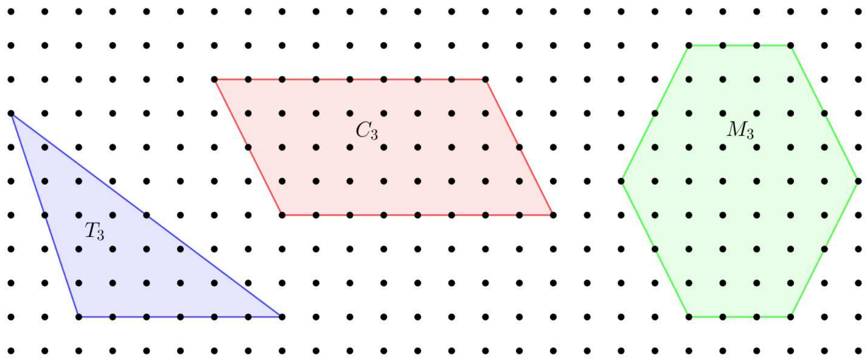
Primjeri nastavnih listića 1. Primjeri prvog zadatka na nastavnim listićima prikazani su na slikama 6.1,6.2,6.3 i 6.4 te **primjer tablice** 6.1 koju će učenici ispunjavati.



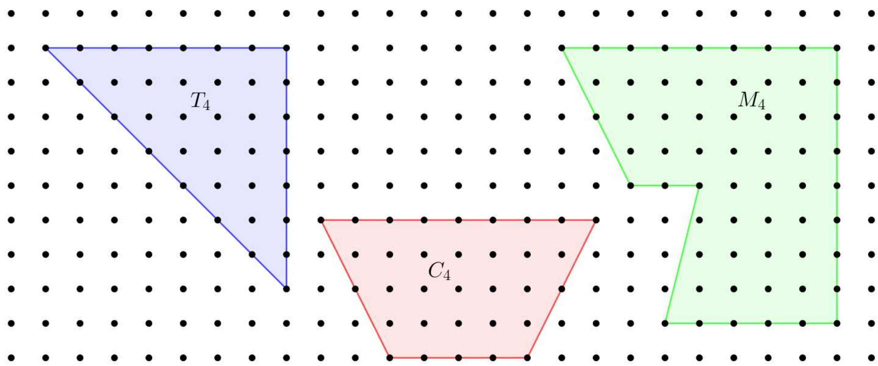
Slika 6.1: Primjer prvog zadatka - Nastavni listić 1-A



Slika 6.2: Primjer prvog zadatka - Nastavni listić 1-B



Slika 6.3: Primjer prvog zadatka - Nastavni listić 1-C



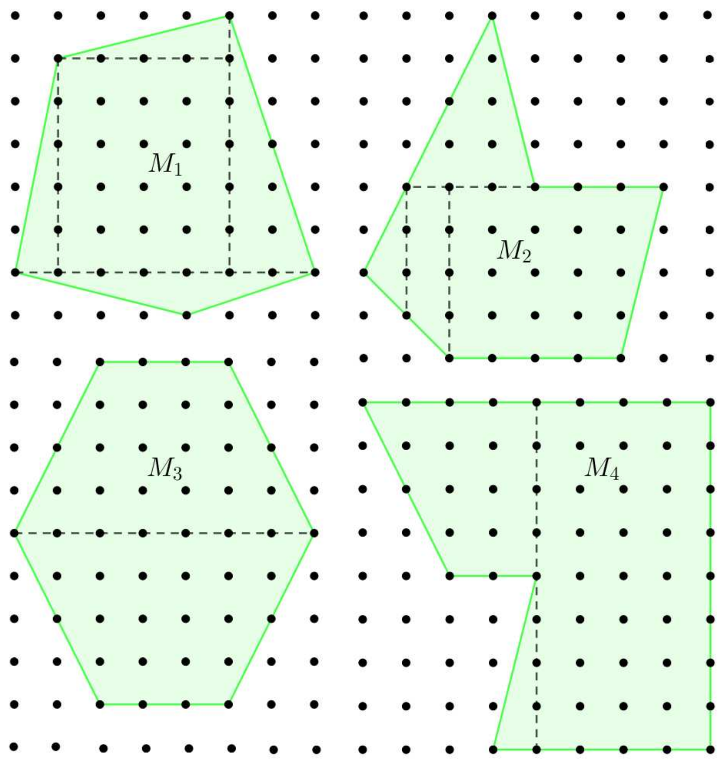
Slika 6.4: Primjer prvog zadatka - Nastavni listić 1-D

lik	površina	broj točaka koji pripadaju liku	broj točaka na rubu lika	broj iz 3. stupca - polovina broja iz 4. stupca -1
trokut T_n				
četverokut C_n				
mnogokut M_n				

Tablica 6.1: Primjer tablice u prvom zadatku nastavnog listića 1

Nastavak nastavnog listića 1. Pitanja na koje učenici odgovaraju (ista pitanja za svaku grupu):
Zadatak 1. Ispuni tablicu pomoću dane slike.
Zadatak 2. Kako ste računali površine danih geometrijskih likova?
Zadatak 3. Na koji način su nacrtani likovi na slici?
Zadatak 4. Promotri ispunjene stupce tablice. Uočavaš li neku pravilnost?

Primjeri **podjele mnogokuta** iz svake od grupa pokazani su na slici 6.5.



Slika 6.5: Primjer podjele mnogokuta iz nastavnog listića 1

Ispunjene tablice nastavnog listića 1 za svaku grupu prikazane su u tablicama 6.2, 6.3, 6.4 i 6.5.

lik	površina	broj točaka koji pripadaju liku	broj točaka na rubu lika	broj iz 3. stupca - polovina broja iz 4. stupca -1
trokut T_1	$\frac{5\cdot 7}{2} = 17.5$	25	13	$25 - \frac{1}{2}\cdot 13 - 1 = 17.5$
četverokut C_1	$8 \cdot 8 = 64$	81	32	$81 - \frac{1}{2}\cdot 32 - 1 = 64$
mnogokut M_1	$4\cdot 5 + \frac{4\cdot 1}{2} + \frac{6\cdot 2}{2} + \frac{7\cdot 1}{2} + \frac{5\cdot 1}{2} = 34$	38	6	$38 - \frac{1}{2}\cdot 6 - 1 = 34$

Tablica 6.2: Ispunjena tablica za nastavni listić 1-A

lik	površina	broj točaka koji pripadaju liku	broj točaka na rubu lika	broj iz 3. stupca - polovina broja iz 4. stupca -1
trokut T_2	$\frac{7\cdot 6}{2} = 21$	27	10	$27 - \frac{1}{2}\cdot 10 - 1 = 21$
četverokut C_2	$5 \cdot 9 = 45$	60	28	$60 - \frac{1}{2}\cdot 28 - 1 = 45$
mnogokut M_2	$\frac{3\cdot 4}{2} + \frac{4+5}{2}\cdot 4 + \frac{4+3}{2}\cdot 1 + \frac{3\cdot 1}{2} = 29$	37	14	$37 - \frac{1}{2}\cdot 14 - 1 = 29$

Tablica 6.3: Ispunjena tablica za nastavni listić 1-B

lik	površina	broj točaka koji pripadaju liku	broj točaka na rubu lika	broj iz 3. stupca - polovina broja iz 4. stupca -1
trokut T_3	$\frac{6\cdot 6}{2} = 18$	24	10	$24 - \frac{1}{2}\cdot 10 - 1 = 18$
četverokut C_3	$8 \cdot 4 = 32$	43	20	$43 - \frac{1}{2}\cdot 20 - 1 = 32$
mnogokut M_3	$2\cdot\left(\frac{7+3}{2}\cdot 4\right) = 40$	48	14	$48 - \frac{1}{2}\cdot 14 - 1 = 40$

Tablica 6.4: Ispunjena tablica za nastavni listić 1-C

lik	površina	broj točaka koji pripadaju liku	broj točaka na rubu lika	broj iz 3. stupca - polovina broja iz 4. stupca -1
trokut T_4	$\frac{7\cdot 7}{2} = 24.5$	36	21	$36 - \frac{1}{2}\cdot 21 - 1 = 24.5$
četverokut C_4	$\frac{4+8}{2}\cdot 4 = 24$	33	16	$33 - \frac{1}{2}\cdot 16 - 1 = 24$
mnogokut M_4	$4\cdot 8 + \frac{4\cdot 1}{2} + \frac{4+2}{2}\cdot 4 = 46$	60	26	$60 - \frac{1}{2}\cdot 26 - 1 = 46$

Tablica 6.5: Ispunjena tablica za nastavni listić 1-D

Očekivani odgovori učenika:
Zadatak 2. Kako ste računali površine danih geometrijskih likova?
Koristili smo već poznate formule za površinu ili smo prebrojali jedinične kvadratiće, odnosno „složenije" geometrijske likove smo rastavili na manje likove kojima znamo odrediti površinu.
Zadatak 3. Na koji način su nacrtani likovi na slici?
Vrh svakog mnogokuta ujedno je i točka mreže.
Zadatak 4. Promotri ispunjene stupce tablice. Uočavaš li neku pravilnost?
Da. Rezultati u 2. i 5. stupcu tablice su jednaki.

Primjer nastavnog listića 2. Primjer tablice prvog zadatka na nastavnim listićima 2 prikazan je na tablici 6.6.

lik	površina	broj točaka koji pripadaju liku	broj točaka na rubu lika	broj iz 3. stupca - polovina broja iz 4. stupca -1
trokut T_1				
četverokut C_1				
mnogokut M_1				
trokut T_2				
četverokut C_2				
mnogokut M_2				
trokut T_3				
četverokut C_3				
mnogokut M_3				
trokut T_4				
četverokut C_4				
mnogokut M_4				

Tablica 6.6: Primjer prazne tablice u prvom zadatku nastavnog listića 2

Nastavak nastavnog listića 2. Pitanja na koje učenici odgovaraju:
Zadatak 1. Ispuni tablicu pomoću rezultate preostalih učenika u skupini.
Zadatak 2. Promotri ispunjene stupce tablice. Uočavaš li ponovno neku pravilnost?
Zadatak 3. Vrijedi li ova pravilnost za svaki dani geometrijski lik?

Očekivani odgovori učenika:
Zadatak 2. Promotri ispunjene stupce tablice. Uočavaš li ponovno neku pravilnost?
Da. Rezultati u 2. i 5. stupcu tablice su i dalje jednaki.
Zadatak 3. Vrijedi li ova pravilnost za svaki dani geometrijski lik?
Vrijedi.

Ispunjena tablica nastavnog listića 2 prikazana je u tablici 6.7.

lik	površina	broj točaka koji pripadaju liku	broj točaka na rubu lika	broj iz 3. stupca - polovina broja iz 4. stupca -1
trokut T_1	17.5	25	13	17.5
četverokut C_1	64	81	32	64
mnogokut M_1	34	38	6	34
trokut T_2	21	27	10	21
četverokut C_2	45	60	28	45
mnogokut M_2	29	37	14	29
trokut T_3	18	24	10	18
četverokut C_3	32	43	20	32
mnogokut M_3	40	48	14	40
trokut T_4	24.5	36	21	24.5
četverokut C_4	24	33	16	24
mnogokut M_4	46	60	26	46

Tablica 6.7: Primjer popunjene tablice u prvom zadatku nastavnog listića 2

Primjer nastavnog listića 3. Pitanja na koje učenici odgovaraju:
Zadatak 1. Uočio si pravilnost u dva popunjena stupca svih skupina. Što predstavljaju ta dva stupca?
Zadatak 2. Što zaključuješ? Kako još možemo izračunati površinu ovako zadanih mnogokuta?
Zadatak 3. Očekuješ li da ova pravilnost vrijedi za svaki dani geometrijski lik?
Zadatak 4. Uvedi oznake i pokušaj sam napisati formulu za otkrivenu pravilnost.

Očekivani odgovori učenika :
Zadatak 1. Uočio si pravilnost u dva popunjena stupca svih skupina. Što predstavljaju ta dva stupca?
U 2. stupcu je zapisana površina lika, a u 5. stupcu je zapisan zbroj brojeva točaka unutar lika i polovine broja točaka na rubu lika te je tom zbroju oduzeta jedinica.
Zadatak 2. Što zaključuješ? Kako još možemo izračunati površinu ovako zadanih mnogokuta?
Površinu mnogokuta možemo dobiti prebrojavanjem točaka koje pripadaju liku. Točnije, površina nacrtanih likova ovisi o broju točaka koji pripadaju liku i o broju točaka na rubu lika.
Zadatak 3. Očekuješ li da ova pravilnost vrijedi za svaki dani geometrijski lik?
Vrijedi.
Zadatak 4. Uvedi oznake i pokušaj sam napisati formulu za otkrivenu pravilnost.
Neka je P površina lika, L broj točaka koji pripadaju liku, a B broj točaka na rubu lika. Tada vrijedi sljedeća formula:

$$P = L - \frac{1}{2} \cdot B - 1.$$

Razredna diskusija:

Kako ste računali površine danih geometrijskih likova?

Koristili smo već poznate formule za površinu ili smo prebrojali jedinične kvadratiće, odnosno mnogokute smo rastavili na manje likove kojima znamo odrediti površinu.

Što ste uočili? Što je zapisano u 5. stupcu tablice?

Površina geometrijskog lika.

O čemu onda ovisi površina geometrijskog lika?

O broju točaka koji pripadaju liku i o broju točaka na rubu danog geometrijskog lika.

Vrijedi li ovakav zaključak za sve mnogokute koje smo promatrali?

Vrijedi.

Zaključak:

Učenici zaključuju generalizacijom pomoću nepotpune indukcije da vrijedi formula za određivanje površine mnogokuta prebrojavanjem točaka kvadratne mreže koje im pripadaju. Nastavnik učenicima govori da se „otkrivena" formula za određivanje površine mnogokuta naziva Pickova formula te da ona vrijedi za svaki mnogokut čiji su vrhovi cjelobrojne koordinate. Zapisuje se zaključak na ploču:

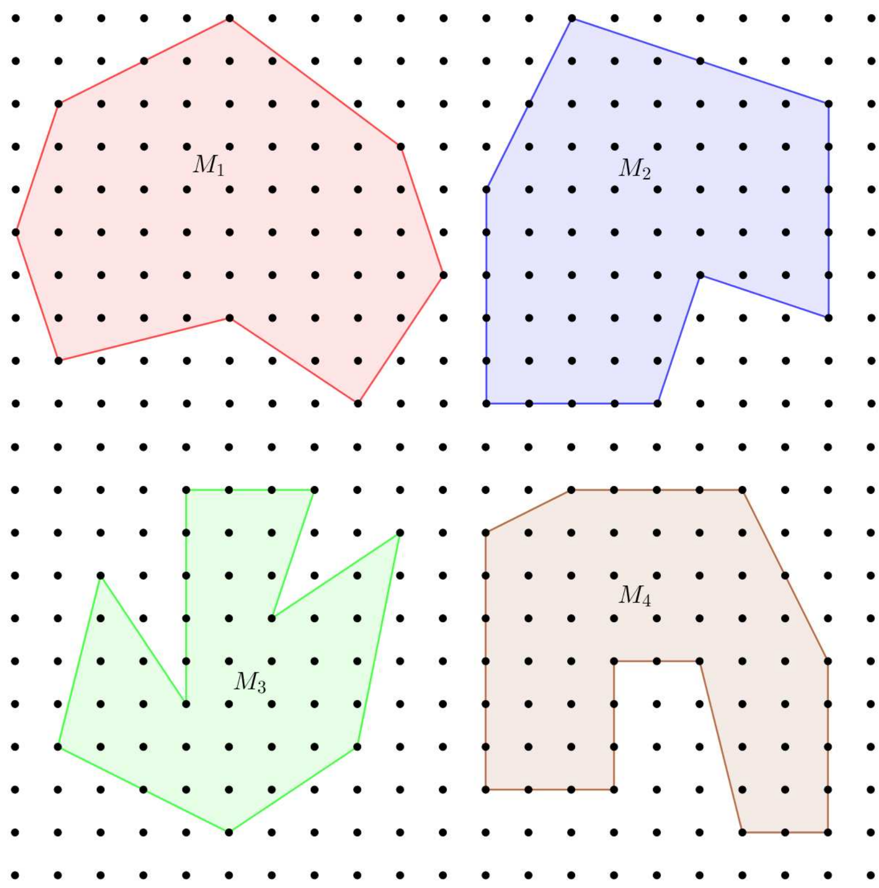
$$P = L - \frac{1}{2} \cdot B - 1$$

pri čemu je

- P = površina lika,
- L = broj točaka koji pripadaju liku,
- B = broj točaka na rubu lika.

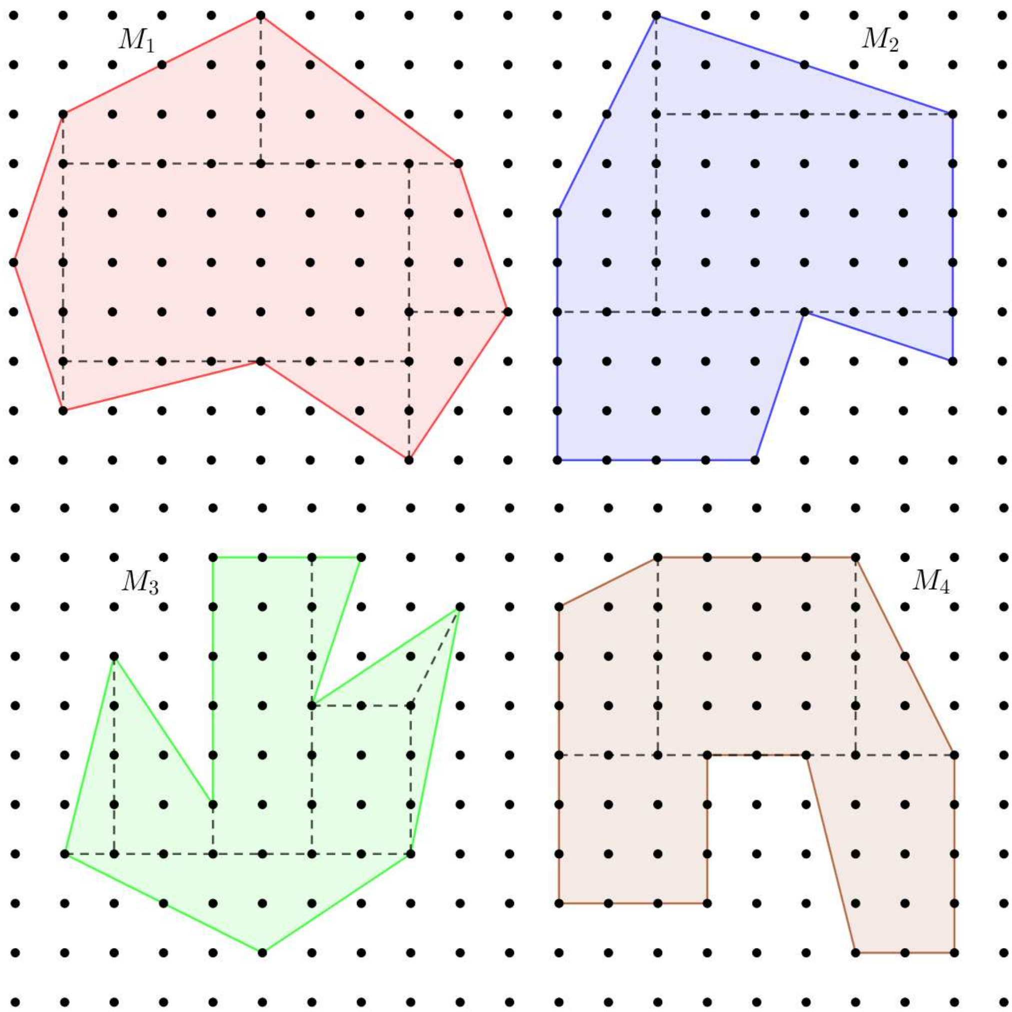
6.2 Aktivnost uvježbavanja

Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u paru, uvježbati korištenje Pickove formule na pripremljenim zadacima.
Oblik rada: rad u paru.
Potreban materijal: nastavni listić za jedan par učenika.
Tijek aktivnosti: Nastavnik učenicima podijeli nastavni listić kojeg učenici rješavaju u parovima. Učenici računaju površinu mnogokuta tako da jedan učenik koristi Pickovu formulu, a drugi učenik računa površinu mnogokuta pomoću formula dijeleći mnogokut na likove kojima zna izračunati površinu. Za svaki idući mnogokut učenici mijenjaju uloge. Nakon izračunatih površina međusobno provjeravaju rješenja. Potom slijedi analiza rješenja.
Primjer mnogokuta na nastavnom listiću nalazi se na slici 6.6.



Slika 6.6: Primjer mnogokuta s nastavnog listića

Primjer moguće podjele mnogokuta nalaze se na slici 6.7.



Slika 6.7: Primjer mnogokuta s nastavnog listića

Rješenja nastavnog listića:
Neka P_n označava površinu mnogokuta M_n.

Mnogokut M_1

$$P_1 = \frac{3+1}{2} \cdot 4 + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{1+2}{2} \cdot 3 + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 1}{2} + \frac{6 \cdot 1}{2} + 7 \cdot 4$$
$$P_1 = 8 + 6 + 4.5 + 3 + 3 + 2 + 3 + 28 = 57.5$$
$$L = 63, B = 9 \Rightarrow P_1 = 63 - 4.5 - 1 = 57.5$$

Mnogokut M_2

$$P_2 = \frac{2 \cdot 6}{2} + 6 \cdot 4 + \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{4+5}{2} \cdot 3 + \frac{6+2}{2} \cdot 2$$
$$P_2 = 6 + 24 + 1.5 + 13.5 + 8 = 53$$
$$L = 64, B = 20 \Rightarrow P_2 = 64 - 10 - 1 = 53$$

Mnogokut M_3

$$P_3 = \frac{4 \cdot 1}{2} + \frac{4+1}{2} \cdot 2 + 6 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 1}{2} + 2 \cdot 3 + \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{7 \cdot 2}{2}$$
$$P_3 = 2 + 5 + 12 + 1.5 + 6 + 2 + 1.5 + 7 = 37$$
$$L = 46, B = 16 \Rightarrow P_3 = 46 - 8 - 1 = 37$$

Mnogokut M_4

$$P_4 = 3 \cdot 3 + \frac{3+4}{2} \cdot 2 + 4 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{3+2}{2} \cdot 4$$
$$P_4 = 9 + 7 + 16 + 4 + 10 = 46$$
$$L = 61, B = 28 \Rightarrow P_4 = 61 - 14 - 1 = 46$$

Nakon analize zadataka, ponovno napominjemo učenicima da je Pickova formula vrlo korisna formula koju mogu koristiti za izračunavanje površine mnogokuta (bilo konveksan, bilo nekonveksan) ako su **svi vrhovi mnogokuta cjelobrojne koordinate točaka u Kartezijevom koordinatnom sustavu**, tj. ako svi vrhovi pripadaju toj mreži.

Bibliografija

[1] K. Ball, *Strange Curves, Counting Rabbits, and Other Mathematical Explorations*, Princeton University Press, 2003.

[2] A. Barvinok, *Integer Points in Polyhedra*, European Mathematical Society, 2008.

[3] M. Beck i S. Robins, *Computing the Continuous Discretely, Integer-Point Enumeration in Polyhedra*, Springer, 2007.

[4] Eppstein D., *Three Untetrahedralizable Objects*, (pristupljeno 1. kolovoza 2023.), `https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/untetra/`.

[5] T. S. Michael, *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures*, Johns Hopkins University Press, 2009.

[6] Ž. Milin Šipuš i M. Bombardelli, *Analitička geometrija, skripta PMF-MO*, (2016.), (pristupljeno 1. kolovoza 2023.), `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf`.

[7] I. Nakić, *Diskretna matematika, skripta PMF-MO*, (2011.), (pristupljeno 1. kolovoza 2023.), `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf`.

[8] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, 1992.

[9] ______, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, 1995.

[10] G. Pick, *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Sitzungsberichte Lotos (Prag) Naturwissenschaftlich-Medizinschen Vereines fúr Böhmen (1899.), br. 19, 311–319.

[11] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulum nastavnog predmeta matematika za osnovne škole i gimnaziju*, Narodne novine, broj: 87/08, 86/09, 92/10, 105/10 – ispravak, 90/11, 16/12, 86/12, 94/13, 152/14, 7/17 i 68/18, 2019.

[12] A. Čižmešija, M. Čičak, D. Bojmić, M. Đukić, T. Kralj, K. Vrančić, I. Balković, A. Boban, N. Ivančić, S. Kolar, A. Pugar, L. Sorić, K. Gudelj, S. Kocijan, P. Kovačević, T. Solar, J. Stjepanek, I. Tomičić, M. Trbušić, M. Curman, K. Halambek, J. Hunjadi, A. Igrec, V. Joha, M. Murat, V. Vučić, F. Žulec, Z. Franković, M. Kujundžić, K. Radovan, I. Kovačić i A. Trstenjak, *Četverokuti, mnogokuti, kružnica i krug*, 2023.

Sažetak

U ovom radu proučavamo Pickovu formulu, formulu koja povezuje probleme iz dva potpuno različita svijeta matematike — problem prebrojavanja iz diskretne matematike i problem određivanja površine iz geometrije. U prvom poglavlju navodimo definicije, teoreme i rezultate iz geometrije i diskretne matematike koji su nužni za shvaćanje glavnog dijela rada. U drugom poglavlju promatramo probleme koji nas dovode do Pickove formule. U trećem poglavlju prikazana su dva dokaza Pickove formule koja se oslanjaju na elementarne geometrijske pojmove i rezultate. Nakon toga, u četvrtom poglavlju istražujemo proširenja Pickove formule i istražujemo odnos između Pickove formule i homotetije. Peto poglavlje proučava opću teoriju rešetki kojom također, kao posljedicu određenih općenitijih rezultata, dolazimo do Pickove formule. Rad završava šestim poglavljem, odnosno metodičkim pristupom otkrivanja Pickove formule u osnovnoškolskom obrazovanju.

Summary

In this thesis, we study Pick's formula, a formula that connects problems from two entirely different realms of mathematics - counting problems from discrete mathematics and problem of calculating area from geometry. In the first chapter, we provide definitions, theorems, and results from geometry and discrete mathematics that are necessary for understanding the main part of the thesis. In the second chapter, we examine the problems that lead us to Pick's formula. In the third chapter, two proofs of Pick's formula are presented, relying on elementary geometric concepts and results. Next, in the fourth chapter, we explore extensions of Pick's formula and investigate the relationship between Pick's formula and homothety. The fifth chapter presents the general lattice theory which, as a consequence of certain more general results, leads us to Pick's formula as well. The thesis concludes with the sixth chapter, which discusses a methodical approach to introducing Pick's formula in elementary education.

Životopis

Rođen sam 2. kolovoza 1996. godine u Varaždinu. Svoje obrazovanje započeo sam o osnovnoj školi Franje Serta u Bednji, a nakon nje upisao sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Ivanec. 2017. godine upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu kojeg završavam 2021. godine. Iste godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu kojega uspješno završavam u rujnu 2023. godine.