SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antun Kučić

LATINSKI KVADRATI I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Sonja Žunar

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj iii

Uvod 1

1 Osnovni pojmovi 2
- 1.1 Skupovi . . . 2
- 1.2 Relacije . . . 3
- 1.3 Algebarske strukture . . . 5
- 1.4 Osnove teorije grafova . . . 6

2 Latinski kvadrati i ortogonalni latinski kvadrati 9
- 2.1 Latinski kvadrati . . . 9
- 2.2 Ortogonalni latinski kvadrati . . . 10

3 Grafovi i latinski kvadrati 17
- 3.1 Latinski kvadrati i bipartitni grafovi . . . 17
- 3.2 Latinski kvadrati i faktorizacija potpunih grafova . . . 21
- 3.3 Latinski kvadrati potpunog retka i putevi u grafu . . . 26

4 Magični kvadrati i Roomovi kvadrati 32
- 4.1 Magični kvadrati . . . 32
- 4.2 Roomovi kvadrati . . . 35

Bibliografija 38

Uvod

Latinski kvadrati su kvadratne matrice reda $n \in \mathbb{N}$ popunjene s n simbola, pri čemu se u svakom retku i stupcu svaki simbol pojavljuje točno jednom. Iako su proučavani i stoljećima prije, latinski kvadrati su ime i matematičku definiciju dobili od Eulera u 18. stoljeću. Osim bogate povijesti i mnogih primjena u znanosti, inženjerstvu i statistici, latinski kvadrati imaju veliki spektar primjenjivosti i u samoj matematici, osobito kombinatorici. U ovom radu kroz četiri poglavlja proučit ćemo osnovna svojstva i neke od primjena latinskih kvadrata.

U prvom su poglavlju rada dane definicije nekih pojmova koje ćemo koristiti u ostalim poglavljima rada. Definiramo pojmove vezane za skupove i operacije nad njima, relacije, algebarske strukture poput grupe, prstena i polja te izlažemo osnove teorije grafova.

U drugom poglavlju uvodimo pojmove *latinskog kvadrata*, *reduciranog latinskog kvadrata*, *ortogonalnih latinskih kvadrata*, *skupa međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata (MOLS)*, *potpunog skupa MOLS-a* i *transverzalnog dizajna*, ističemo i dokazujemo njihova svojstva i međusobnu povezanost te primjerima ilustriramo dobivene rezultate.

U trećem poglavlju uvodimo pojam *latinskog pravokutnika* te ističemo i dokazujemo veze latinskih pravokutnika i kvadrata s potpunim bipartitnim grafovima, preciznije njihovim 1-faktorima. Zatim proučavamo povezanost latinskih kvadrata i 1-faktora potpunih usmjerenih grafova, uvodimo pojam *unipotentnog latinskog kvadrata* i pokazujemo vezu takvih latinskih kvadrata s 1-faktorizacijama potpunih usmjerenih i neusmjerenih grafova. Na kraju ovog poglavlja uvodimo pojmove *latinskog kvadrata potpunog retka*, *latinskog kvadrata potpunog stupca* i *potpunog latinskih kvadrata* te iskazujemo i dokazujemo veze istih s Hamiltonovim putevima i ciklusima, tj. Eulerovim turama.

U četvrtom poglavlju rada uvodimo pojam *magičnog kvadrata* i čitatelju približavamo konstrukciju magičnih kvadrata pomoću tzv. *dijagonalnih latinskih kvadrata*. Također definiramo još neke magične objekte kao što su *pandijagonalan*, *simetričan*, *bimagičan*, *m-multimagičan* i *obrubljen magični kvadrat*. Na kraju rada definiramo *Roomov kvadrat*, iskazujemo i dokazujemo jedan način njegove konstrukcije i ilustriramo dobivene rezultate na primjeru.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Skupovi

Definicija 1.1.1. *Za skup $\mathcal{F}$ kažemo da je **familija skupova**, ako su svi elementi skupa $\mathcal{F}$ i sami skupovi. Na primjer,*

$$\mathcal{F} = \{\{1,4\},\{2,3,5\},\{3,4\}\} \text{ je jedna familija skupova.}$$

Definicija 1.1.2. *Neka je A skup. **Partitivni skup** $\mathcal{P}(A)$ skupa A je familija svih podskupova skupa A.*

Primjer 1.1.3. *Neka je dan skup $A = \{0,1,2\}$. Tada je*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}.$$

Definicija 1.1.4. *Neka je $\mathcal{U}$ skup i $\mathcal{F}$ neka familija podskupova od $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Tada za skup*

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A := \{x \in \mathcal{U} : ((\exists A \in \mathcal{F})x \in A)\}$$

*kažemo da je **unija familije** $\mathcal{F}$. Slično, za skup*

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A := \{x \in \mathcal{U} : ((\forall A \in \mathcal{F})x \in A)\}$$

*kažemo da je **presjek familije** $\mathcal{F}$.*

Definicija 1.1.5. *Neka je A skup i neka je $\mathcal{P}(A)$ njegov partitivni skup. **Particija skupa** A je bilo koja familija skupova $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ za koju vrijedi:*

(i) Za svaki $X \in \mathcal{F}$ vrijedi $X \neq \emptyset$;

(ii) *Za sve* $X, Y \in \mathcal{F}$ *vrijedi* $X = Y$ *ili* $X \cap Y = \emptyset$*;*

(iii) $\bigcup\limits_{X \in \mathcal{F}} X = A$.

1.2 Relacije

Definicija 1.2.1. *Neka su* A *i* B *skupovi. Podskup* φ *skupa* $A \times B$ *zovemo* ***relacija****.*

Primjer 1.2.2. *Neka je* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *i neka je* $B = \{a, b, c, d, e\}$*. Definirajmo relaciju* φ *na sljedeći način:*

$$\varphi = \{(1, b), (2, d), (3, c)\}.$$

Tada možemo reći za elemente $1 \in A$ *i* $b \in B$ *da je "*1 *u relaciji* φ *s* b*" (jer je* $(1, b) \in \varphi$*), dok za elemente* $2 \in A$ *i* $a \in B$ *možemo reći da "*2 *nije u relaciji* φ *s* a*" (jer* $(2, a) \notin \varphi$*).*

Definicija 1.2.3. *Ako su* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *skupovi, tada ćemo za* $\varphi \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ *reći da je jedna* n***-arna relacija****. Posebno, ako je* $n = 2$*, za* φ *kažemo da je* ***binarna relacija****. Ako je* $\varphi \subseteq A \times A$*, onda za* φ *kažemo da je* ***relacija na skupu*** A*.*

Definicija 1.2.4. *Neka je* A *skup i* φ *binarna relacija na skupu* A*. Za binarnu relaciju* φ *kažemo da je:*

(i) ***refleksivna*** *ako vrijedi:*

$$\text{za sve } a \in A \text{ vrijedi } (a, a) \in \varphi;$$

(ii) ***simetrična*** *ako za sve* $a, b \in A$ *vrijedi:*

$$\text{ako je } (a, b) \in \varphi, \text{ onda je } (b, a) \in \varphi;$$

(iii) ***antisimetrična*** *ako za sve* $a, b \in A$ *vrijedi:*

$$\text{ako je } (a, b) \in \varphi \text{ i } (b, a) \in \varphi, \text{ onda je } a = b;$$

(iv) ***tranzitivna*** *ako za sve* $a, b, c \in A$ *vrijedi:*

$$\text{ako je } (a, b) \in \varphi \text{ i } (b, c) \in \varphi, \text{ onda je } (a, c) \in \varphi.$$

Definicija 1.2.5. ***Relacija ekvivalencije*** *je refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija.*

Definicija 1.2.6. *Neka je φ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na skupu A. Tada za φ kažemo da je **relacija parcijalnog uređaja** ili **parcijalni uređaj**. Ako još vrijedi:*

$$(\forall a, b \in A)((a, b) \in \varphi \vee (b, a) \in \varphi),$$

*onda za φ kažemo da je **relacija totalnog uređaja** ili **totalni uređaj**. Za skup A s totalnim uređajem φ kažemo da je **(totalno) uređeni skup**.*

Napomena 1.2.7. *Za totalni uređaj još koristimo izraz **linearni uređaj**. Slično za (totalno) uređen skup koristimo izraz **linearno uređen skup**.*

Primjer 1.2.8. *Jedan od primjera totalno uređenog skupa je skup $\mathbb{R}$ s relacijom "$\leq$". Naime, "$\leq$" je relacija parcijalnog uređaja (refleksivna, antisimetrična i tranzitivna) i dodatno za bilo koje $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$.*

Definicija 1.2.9. *Neka su A i B neprazni skupovi. Za relaciju $\varphi \subseteq A \times B$ kažemo da je **funkcijska relacija** ako vrijedi*

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a, b) \in \varphi$$

*Funkcijsku relaciju zovemo i **funkcija (preslikavanje)**.*

Definicija 1.2.10. *Neka su A i B neprazni skupovi. Neka je $f \subseteq A \times B$ funkcijska relacija. Skup A zovemo **domena**, a skup B **kodomena** funkcije f i pišemo $f : A \to B$. Ako je $x \in A$, a $y \in B$ tako da je $(x, y) \in f$, to označavamo kao $y = f(x)$.*

Definicija 1.2.11. ***Polinom** n**-tog stupnja** je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

*gdje je $n \in \mathbb{N}_0$. Brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, pri čemu je $a_n \neq 0$, zovemo **koeficijenti polinoma**, a_n **vodeći koeficijent** i a_0 **slobodni koeficijent**.*

Definicija 1.2.12. ***Linearni polinom** ili polinom prvog stupnja je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = a_1 x + a_0,$$

gdje je $a_1 \neq 0$.

1.3 Algebarske strukture

Definicija 1.3.1. *Neka je S neprazan skup. Za preslikavanje $\theta : S \times S \to S$ kažemo da je **binarna operacija** na skupu S. Svakom uređenom paru $(x, y) \in S \times S$ binarna operacija θ pridružuje element $z = \theta(x, y) \in S$, tj. $z = x\theta y \in S$.*

Definicija 1.3.2. *Neka je S neprazan skup. Za binarnu operaciju $*$ na skupu S kažemo da:*

*(i) je **asocijativna** ako za sve $x, y, z \in S$ vrijedi $x * (y * z) = (x * y) * z$;*

*(ii) ima **neutralni element** $e \in S$ ako je $e \in S$ takav da za sve $x \in S$ vrijedi $e*x = x*e = x$;*

*(iii) svaki element iz S ima **inverzni element** s obzirom na operaciju $*$ ako za svaki $x \in S$ postoji $y \in S$ tako da je $x * y = y * x = e$;*

*(iv) je **komutativna** ako za sve $x, y \in S$ vrijedi $x * y = y * x$.*

*Ako za binarnu operaciju $*$ na skupu S vrijede svojstva (i)-(iii), tada za uređeni par $(S, *)$ kažemo da je **grupa**. Ako vrijedi i svojstvo (iv), kažemo da je uređeni par $(S, *)$ **komutativna** ili **Abelova grupa**.*

Definicija 1.3.3. *Neka su na nepraznom skupu S definirane dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$. Za uređenu trojku $(S, +, \cdot)$ kažemo da je **prsten** ako vrijedi:*

(i) $(S, +)$ je Abelova grupa,

(ii) operacija $\cdot$ je asocijativna na skupu S,

(iii) distributivnost operacije $\cdot$ s obzirom na operaciju $+$:

$$\text{Za sve } x, y, z \in S \text{ vrijedi } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ i } (a + b) \cdot c = a \cdot b + a \cdot c.$$

*Dodatno, ako je operacija $\cdot$ komutativna, onda uređenu trojku $(S, +, \cdot)$ nazivamo **komutativnim prstenom**, a ako operacija $\cdot$ ima neutralni element, tada uređenu trojku $(S, +, \cdot)$ zovemo **prstenom s jedinicom**.*

Definicija 1.3.4. *Neka je $(S, +, \cdot)$ prsten. Neutralni element Abelove grupe $(S, +)$ označavamo s 0 i zovemo **nula**, a neutralni element od $(S, \cdot)$, ako postoji, označavamo s 1 i zovemo **jedinicom**.*

Definicija 1.3.5. *Neka je $(S, +, \cdot)$ prsten s jedinicom. Za element $a \in S$ kažemo da je **invertibilan** ako postoji $b \in S$ tako da vrijedi $a \cdot b = b \cdot a = 1$. Tada element b možemo još označiti s a^{-1}.*

Definicija 1.3.6. ***Polje*** *je komutativni prsten s jedinicom* $(S, +, \cdot)$ *u kojem je svaki element* $x \in S \setminus \{0\}$ *invertibilan.*

Definicija 1.3.7. *Polje koje ima konačan broj elemenata zovemo* ***konačno polje****. Ako konačno polje sadrži q elemenata, kažemo da je to* ***konačno polje reda*** *q.*

1.4 Osnove teorije grafova

Definicija 1.4.1. *Uređeni par* (V, E) *zovemo* ***graf*** *ako je V skup (koji zovemo* ***skupom vrhova****), a E je skup* 1*-podskupova i* 2*-podskupova od V, koje zovemo* ***bridovima****. Brid koji je* 1*-podskup zovemo* ***petljom****.*

Gornja definicija definira grafove u kojima svaka dva vrha mogu biti povezana najviše jednim neusmjerenim bridom. Ponekad se grafovi definiraju i na drugačije načine, kao u sljedećim dvjema definicijama. Prva definira grafove u kojima dva vrha mogu biti međusobno povezana višestrukim bridovima, a druga grafove u kojima su bridovi usmjereni.

Definicija 1.4.2. ***Multigraf*** *je uređeni par* (V, E)*, gdje je V skup (koji zovemo* ***skupom vrhova****), a E je multiskup čiji elementi su* 1*-podskupovi i* 2*-podskupovi od V.*

Definicija 1.4.3. ***Usmjereni graf*** *ili* ***digraf*** *je uređeni par* (V, E)*, gdje je V skup (koji zovemo* ***skupom vrhova****), a E je podskup od* $V \times V$*.*

Napomena 1.4.4. *Pojam* ***jednostavni graf*** *ponekad koristimo u slučaju kada želimo naglasiti da ne govorimo o digrafu ili multigrafu nego o grafu iz definicije 1.4.1.*

Definicija 1.4.5. *Dva su vrha u jednostavnom grafu* (V, E) ***susjedna*** *ako postoji brid koji ih spaja, tj. vrhovi* $u, v \in V$ *su* ***susjedni*** *ukoliko postoji brid* $e = \{u, v\} \in E$*.*

Definicija 1.4.6. *Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova brid zovemo* ***potpuni graf*** *(ako graf ima n vrhova označavat ćemo ga s* K_n*), a graf u kojem uopće nema bridova zovemo* ***nulgraf*** *(ako graf ima n vrhova označavat ćemo ga s* N_n*).*

Definicija 1.4.7. *Neka je* (V, E) *jednostavan graf. Neka je* $v \in V$ *vrh, a* $e \in E$ *brid. Ako je* $e = \{v, v'\}$ *za neki* $v' \in V$*, tada za vrh v kažemo da je* ***incidentan*** *s bridom e.*

Definicija 1.4.8. *Neka su* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$ *dva jednostavna grafa. Za grafove* G_1 *i* G_2 *kažemo da su* ***izomorfni*** *ako postoje bijekcije* $\theta : V_1 \to V_2$ *i* $\phi : E_1 \to E_2$ *takve da za sve* $v \in V_1$ *i* $e \in E_1$ *vrijedi da je v incidentan s bridom e u* G_1 *ako i samo ako je* $\theta(v)$ *incidentan s bridom* $\phi(e)$ *u* G_2*.*

Definicija 1.4.9. *Neka su $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ grafovi tako da je $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Tada za graf G' kažemo da je* ***podgraf*** *grafa $G = (V, E)$. Za graf $G' = (V', E')$ kažemo da je* ***inducirani podgraf*** *grafa G induciran skupom $V' \subseteq V$ ako se E' sastoji od svih bridova iz G čija oba vrha leže u V'. Podgraf oblika $G' = (V, E')$ zovemo* ***razapinjući podgraf****.*

Definicija 1.4.10. *Neka je $G = (V, E)$ graf. Pretpostavimo da se skup vrhova V može particionirati u dva skupa B i C tako da vrijedi:*

$$\text{Za svaki } e \in E, \text{ ako je } e = \{u, v\}, \text{ onda je } u \in B \text{ i } v \in C \text{ ili je } v \in B \text{ i } u \in C,$$

tj. svaki brid iz E spaja vrh iz B s vrhom iz C. Tada particiju skupa vrhova V na skupove B i C zovemo ***biparticijom*** *od G, a graf G zovemo* ***bipartitnim grafom****.*

Definicija 1.4.11. *Neka je $G = (V, E)$ bipartitni graf s biparticijom $V = B \cup C$. Za graf G ćemo reći da je* ***potpuni bipartitni graf*** *ako je svaki vrh iz B spojen sa svakim vrhom iz C. Za $|B| = m$ i $|C| = n$, taj graf označavamo s $K_{m,n}$ ili $K_{n,m}$.*

Definicija 1.4.12. ***Stupanj*** *(ili* ***valencija****) vrha x grafa $G = (V, E)$ je broj bridova grafa G s kojima je vrh x incidentan. Graf je* ***regularan*** *ako svaki vrh grafa ima isti stupanj. Ako svaki vrh grafa ima stupanj d, kažemo da je graf* ***d-regularan****.*

Definicija 1.4.13. *Svaki razapinjući podgraf grafa G, tj. graf H sa skupom vrhova jednakim skupu vrhova od G i skupom bridova koji je podskup skupa bridova od G, nazivamo* ***faktorom*** *grafa G. Faktor H grafa G koji je k-regularan nazivamo* ***k-faktorom*** *grafa G. Dekompozicija grafa $G = (V, E)$ na k-faktore, tj. skup k-faktora disjunktna unija čijih skupova bridova je E, naziva se* ***k-faktorizacijom****.*

Definicija 1.4.14. *Neka je $G = (V, E)$ graf, pri čemu je $|V| = m$ i $|E| = n$.* ***Matrica incidencije*** *grafa G je matrica $M(G)$ dimenzija $m \times n$ za koju vrijedi $M(G) = (m_{ij})$, gdje je m_{ij} broj koliko puta su vrh v_i i brid e_j incidentni.*

Napomena 1.4.15. *Uočimo da za gornju definiciju vrijedi $m_{ij} \in 0, 1, 2$, za svaki i i j.*

Definicija 1.4.16. *Neka je $G = (V, E)$ graf, pri čemu je $|V| = n$.* ***Matrica susjedstva*** *grafa G je kvadratna matrica $A(G)$ reda n za koju vrijedi $A(G) = (a_{ij})$, gdje je a_{ij} broj bridova koji spaja vrh v_i s vrhom v_j.*

Napomena 1.4.17. *Uočimo da je matrica susjedstva $A(G)$ simetrična i da su joj elementi a_{ij} nenegativni cijeli brojevi za svaki i i j.*

Definicija 1.4.18. *Neka je $G = (V, E)$ graf te neka su $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ i $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$ tako da je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. Za niz $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$ kažemo da je* ***šetnja*** *od v_0 do v_n. Za šetnju ćemo reći da je* ***zatvorena*** *ako je $v_0 = v_n$. Šetnju u kojoj su svi bridovi međusobno različiti zovemo* ***staza****, a šetnju u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti osim eventualno prvog i posljednjeg zovemo* ***put****. Zatvoreni put još zovemo i* ***ciklus****.*

Napomena 1.4.19. *Neka je dana šetnja* $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$*. Tada za šetnju* $(v_n, e_n, \ldots, v_1, e_1, v_0)$ *kažemo da je* ***suprotna šetnji*** $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$*.*

Definicija 1.4.20. ***Eulerova staza*** *je staza koja prolazi svim bridovima grafa.* ***Eulerova tura*** *je zatvorena Eulerova staza, a* ***Eulerov graf*** *je graf koji dopušta Eulerovu turu.* ***Hamiltonov put*** *je put koji prolazi svim vrhovima grafa.* ***Hamiltonov ciklus*** *je zatvoren Hamiltonov put, a* ***Hamiltonov graf*** *je graf koji dopušta Hamiltonov ciklus.*

Poglavlje 2

Latinski kvadrati i ortogonalni latinski kvadrati

2.1 Latinski kvadrati

Definicija 2.1.1. *Za kvadratnu matricu L reda $n \in \mathbb{N}$ kažemo da je **latinski kvadrat** ako vrijede sljedeća svojstva:*

(i) elementi matrice L su elementi nekog n-članog skupa S;

(ii) u svakom retku matrice L svaki element skupa S pojavljuje se na točno jednom mjestu;

(iii) u svakom stupcu matrice L svaki element skupa S pojavljuje se na točno jednom mjestu.

Definicija 2.1.2. *Za latinski kvadrat s elementima iz linearno uređenog skupa S kažemo da je **reduciran** ili **standardan** ako su mu elementi prvog retka i prvog stupca u prirodnom poretku, tj. u poretku određenom uređajem na skupu S.*

Primjer 2.1.3. *Sljedeće matrice su primjeri latinskih kvadrata reda 3, pri čemu je prva matrica reducirani latinski kvadrat (s obzirom na uređaj $\leq$ na skupu $\{0, 1, 2\}$):*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Napomena 2.1.4. *Uočimo da su retci i stupci latinskih kvadrata reda n permutacije n-članog skupa.*

Teorem 2.1.5. *Za svaki prirodni broj n postoji latinski kvadrat reda n.*

Dokaz. Uzmimo da su elementi $0, 1, 2, \dots, n-1$ u tom redoslijedu prvi redak kvadratne matrice reda n. Svaki sljedeći redak matrice dobivamo tako da elemente prethodnog retka pomičemo za jedno mjesto ulijevo, pri čemu prvi element u prethodnom retku postaje zadnji element u sljedećem retku. Tako dobivena matrica je očito latinski kvadrat reda n. □

Definicija 2.1.6. *Za latinske kvadrate reda n kažemo da su* ***različiti*** *ako se razlikuju u barem jednoj poziciji.* ***Broj različitih latinskih kvadrata reda*** *n označavamo s $L(n)$, dok* ***broj različitih reduciranih latinskih kvadrata reda*** *n označavamo s $l(n)$.*

Teorem 2.1.7. *Za svaki $n \geq 2$ broj različitih latinskih kvadrata $L(n)$ reda n dan je s*

$$L(n) = n!(n-1)!l(n).$$

Dokaz. Uzmimo matrični prikaz nekog reduciranog latinskog kvadrata reda n. Ukoliko permutiramo stupce tog latinskog kvadrata, možemo dobiti $n!$ različitih latinskih kvadrata reda n. Fiksiramo li sada prvi redak jednog od tako dobivenih latinskih kvadrata, permutirajući preostale retke dobivamo $(n-1)!$ novih latinskih kvadrata. S obzirom da je broj reduciranih latinskih kvadrata $l(n)$, slijedi tvrdnja. □

2.2 Ortogonalni latinski kvadrati

Definicija 2.2.1. *Latinski kvadrati $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ s n simbola su* ***ortogonalni*** *ako se svaki uređeni par simbola pojavljuje točno jednom među n^2 parova (a_{ij}, b_{ij}), $i, j = 1, 2, \dots, n$.*

Primjer 2.2.2. *Prikažimo dva međusobno ortogonalna latinska kvadrata reda* 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 2.2.3. *Ortogonalnost latinskih kvadrata susrećemo u poznatom Eulerovom problemu gdje treba rasporediti* 36 *časnika (sa* 6 *različitih činova i iz* 6 *različitih pukovnija, pri čemu je u svakoj pukovniji po jedan časnik svakog čina) u kvadratnu matricu reda* 6 *tako da u svakom retku i stupcu budu zastupljeni svih* 6 *činova i* 6 *pukovnija.*

Rješenje ovog problema bila bi dva latinska kvadrata reda 6 *koji bi bili međusobno ortogonalni. Tarry je 1900. godine dokazao da takvo rješenje, s obzirom da je red latinskih kvadrata* 6, *ne postoji.*

Definicija 2.2.4. *Skup od najmanje dva latinska kvadrata (istog reda) sa svojstvom da je svaki par iz skupa ortogonalni par zovemo* ***skupom međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata*** *(skraćeno* ***MOLS****).*

Primjer 2.2.5. *Prikažimo skup od 3 MOLS-a reda 4.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Napomena 2.2.6. *Najveći mogući broj MOLS-a reda n označavamo s $N(n)$.*

Teorem 2.2.7. *Za svaki prirodni broj $n \geq 2$, vrijedi $N(n) \leq n - 1$.*

Dokaz. U svakom latinskom kvadratu L_1 možemo permutirati imena njegovih n simbola tako da ne utječemo na ortogonalnost s latinskim kvadratom L_2. Analogno, možemo preimenovati simbole bilo kojeg latinskog kvadrata iz skupa MOLS-a bez da utječemo na ortogonalnost cijelog skupa. Stoga možemo preimenovati simbole u svim kvadratima skupa MOLS-a tako da im prvi redak svima bude $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Tada bi jedan od prikladnih prikaza dvaju latinskih kvadrata iz tog skupa bio:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ x & - & \cdots & - \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ - & - & \cdots & - \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ y & - & \cdots & - \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ - & - & \cdots & - \end{pmatrix}.$$

S obzirom da ni x ni y ne smiju biti 0, jer je 0 u prvom retku i prvom stupcu i također $x \neq y$ jer su svi istočlani uređeni parovi dobiveni superponiranjem prvih redaka, slijedi da se na prvom mjestu drugog retka može pojaviti najviše $n - 1$ mogućih simbola, pri čemu se u različitim kvadratima na tom mjestu pojavljuju međusobno različiti simboli. Stoga je $N(n) \leq n - 1$.

□

Definicija 2.2.8. *Skup od $n - 1$ MOLS-a nazivamo* ***potpunim skupom MOLS-a****.*

Promotrimo sada problem konstruiranja skupova MOLS-a čiji je red potencija prostog broja, točnije reda $q = p^m$, gdje je p prost broj, a m prirodan broj. Za rješavanje tog problema koristit ćemo linearne polinome $ax + y$, gdje je $a \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ ($\mathbb{F}_q$ je konačno polje reda q).

Označimo retke i stupce kvadratne matrice reda q s q elemenata iz konačnog polja $\mathbb{F}_q$. Pretpostavimo da su oznake redaka i stupaca u istom poretku.

Definicija 2.2.9. *Za polinom $f(x,y)$ s koeficijentima iz $\mathbb{F}_q$ i za sve $a,b \in \mathbb{F}_q$, postavimo element $f(a,b)$ u matricu A reda q na poziciju presjeka retka označenog s a i stupca označenog s b. Kažemo da polinom $f(x,y)$ **reprezentira** matricu A.*

Teorem 2.2.10. *Neka je q potencija prostog broja. Tada polinomi $f_a(x,y) = ax + y$, gdje je $a \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$, reprezentiraju potpuni skup od $q-1$ MOLS-a reda q.*

Dokaz. Prvo pokažimo da, ako je $a \neq 0$, polinom $f_a(x,y) = ax + y$ reprezentira latinski kvadrat reda q. Pretpostavimo da se u pripadnom latinskom kvadratu neki od simbola iz polja $\mathbb{F}_q$ pojavljuje dva puta u stupcu y_1(npr. na pozicijama (x_1,y_1) i (x_2,y_1)). Tada je $ax_1 + y_1 = ax_2 + y_1$. Slijedi da je $ax_1 = ax_2$, a s obzirom da je $a \neq 0$, slijedi i $x_1 = x_2$. Dakle, (x_1,y_1) i (x_2,y_1) su iste pozicije u matrici, pa su svi simboli u stupcu y_1 različiti. Slično, ako je $ax_1 + y_1 = ax_1 + y_2$, onda je $y_1 = y_2$. Dakle i simboli u retku x_1 su različiti. Stoga polinom $f_a(x,y) = ax + y$ reprezentira latinski kvadrat reda q.

Pokažimo da polinomi $f_a(x,y)$ i $f_b(x,y)$ reprezentiraju ortogonalne latinske kvadrate ako je $a \neq b$. Pretpostavimo da su (x_1,y_1) i (x_2,y_2) dvije pozicije za koje vrijedi

$$ax_1 + y_1 = ax_2 + y_2$$

$$bx_1 + y_1 = bx_2 + y_2.$$

Oduzmemo li jednadžbe, slijedi $ax_1 - bx_1 = ax_2 - bx_2$, tj. $(a-b)x_1 = (a-b)x_2$. S obzirom da je $a \neq b$, slijedi $x_1 = x_2$, a stoga i (uvrštavajući u gornje jednadžbe) $y_1 = y_2$. Dakle, bilo koje dvije pozicije koje sadrže isti uređeni par nisu različite, tj. latinski kvadrati su ortogonalni. □

S obzirom da smo pokazali kako konstruirati potpuni skup MOLS-a čiji je red potencija prostog broja, prirodno je postaviti pitanje o skupovima MOLS-a za latinske kvadrate čiji red nije potencija prostog broja. Kako bismo lakše mogli proučavati i konstruirati skupove MOLS-a tih redova, definirajmo Kroneckerov produkt.

Definicija 2.2.11. *Neka je A matrica reda $m \times n$ te neka je B matrica reda $p \times q$. **Kroneckerov produkt** $A \otimes B$ je $pm \times qn$ blok-matrica:*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix},$$

točnije:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{pmatrix},$$

gdje je $a_{ij}b_{kl} := (a_{ij}, b_{kl})$.

Teorem 2.2.12. *Ako postoji par MOLS-a reda n i par MOLS-a reda m, onda postoji par MOLS-a reda mn.*

Dokaz. Neka su A_1 i A_2 MOLS reda m te neka su B_1 i B_2 MOLS reda n. Tada je matrica $A_1 \otimes B_1$ trivijalno latinski kvadrat reda mn. Slično, matrica $A_2 \otimes B_2$ je također latinski kvadrat reda mn. Iz ortogonalnosti latinskih kvadrata A_1 i A_2 te ortogonalnosti latinskih kvadrata B_1 i B_2 slijedi ortogonalnost $A_1 \otimes B_1$ i $A_2 \otimes B_2$. □

Uvedimo sada definiciju kongruencije kako bismo mogli iskazati i dokazati još jedan rezultat za najveći mogući broj MOLS-a reda n.

Definicija 2.2.13. *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je broj a* ***kongruentan*** *broju b* ***modulo*** *n ako vrijedi $n \mid a - b$. Pišemo: $a \equiv b \pmod n$.*

Teorem 2.2.14. *Neka je $n > 1$ prirodan broj. Ako je $n \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$, onda je $N(n) \geq 2$.*

Dokaz. Ako je $n \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$, tada je n ili neparan ili djeljiv s 4. U svakom slučaju, ako je $n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r$ faktorizacija od n u produkt potencija različitih prostih brojeva, onda je $q_i \geq 3$, dakle $q_i - 1 \geq 2$ za svaki $i = 1, \ldots, r$. Ako primijenimo teorem 2.2.10 i teorem 2.2.12, slijedi tvrdnja. □

Općenitije, za MOLS-e reda n vrijedi:

Teorem 2.2.15. *Neka je $q_1 \cdots q_r$ faktorizacija od $n \in \mathbb{N}$ u potencije različitih prostih brojeva tako da je $q_1 < \cdots < q_r$. Tada je $N(n) \geq q_1 - 1$.*

Dokaz. Za svaku potenciju prostog broja q_i možemo, po teoremu 2.2.10, sagraditi skup od $q_i - 1$ MOLS-a reda q_i. Tada za svaki $i > 1$ imamo da je $q_i - 1 > q_1 - 1$, pa ponavljajući primjenu Kroneckerovog produkta dobivamo skup od barem $q_1 - 1$ MOLS-a reda n. □

Napomena 2.2.16. *Proučimo svojstva za skupove MOLS-a reda n pri čemu za n vrijedi $n \equiv 2$ mod(4). Naime, za $n = 2$ i $n = 6$ znamo da je $N(n) = 1$ (za $n = 2$ je trivijalno, dok smo slučaj $n = 6$ susreli u primjeru 2.2.3). Za brojeve $n = 10, 14, \ldots$ vrijedi sljedeći teorem.*

Teorem 2.2.17. *Za sve prirodne brojeve $n > 1$ osim 2 i 6 postoji par MOLS-a reda n. Posebno je za sve prirodne brojeve $n > 1$, osim $n = 2$ i $n = 6$, $N(n) \geq 2$.*

Spomenimo sada još strukturu transverzalnog dizajna kojom se mnoga svojstva i rezultati za latinske kvadrate mogu pokazati.

Definicija 2.2.18. ***Transverzalni dizajn*** *s k n-teročlanih grupa i indeksom λ (u oznaci $T[k, \lambda; n]$) je trojka (X, G, A) sa sljedećim svojstvima:*

(i) X je skup od $k \cdot n$ elemenata;

(ii) $G = \{G_1, \ldots, G_k\}$ je familija od k n-teročlanih skupova, zvanih grupama, koji čine particiju od X;

(iii) A je familija k-članih skupova, zvanih blokovima, tako da svaki blok B u presjeku sa svakim od skupova $G_i \in G$ ima točno jedan element i da se svaki par elemenata iz različitih grupa u G pojavljuje točno u λ blokova od A.

Prikažimo tablično primjer transverzalnog dizajna.

Primjer 2.2.19. *U tablici 2.1 prikazujemo grupe i blokove transverzalnog dizajna $T[4, 1; 3]$.*

Tablica 2.1: Transverzalni dizajn $T[4, 1; 3]$

	$B_1 : x_{11}x_{21}x_{31}x_{41}$
	$B_2 : x_{11}x_{22}x_{32}x_{42}$
$G_1 : x_{11}x_{12}x_{13}$	$B_3 : x_{11}x_{23}x_{33}x_{43}$
$G_2 : x_{21}x_{22}x_{23}$	$B_4 : x_{12}x_{21}x_{32}x_{43}$
$G_3 : x_{31}x_{32}x_{33}$	$B_5 : x_{12}x_{22}x_{33}x_{41}$
$G_4 : x_{41}x_{42}x_{43}$	$B_6 : x_{12}x_{23}x_{31}x_{42}$
	$B_7 : x_{13}x_{21}x_{33}x_{42}$
	$B_8 : x_{13}x_{22}x_{31}x_{43}$
	$B_9 : x_{13}x_{23}x_{32}x_{41}$

Iskažimo i dokažimo teorem koji povezuje latinske kvadrate (točnije skupove MOLS-a) i transverzalni dizajn.

Teorem 2.2.20. *Transverzalni dizajn $T[k, 1; n]$ postoji ako i samo ako postoji skup od $k-2$ MOLS-a reda n.*

Dokaz. Pretpostavimo da imamo transverzalni dizajn $T[k, 1; n]$ s grupama $G_1, \dots, G_k$ čiji su elementi označeni sa

$$G_h = \{x_{h1}, \dots, x_{hn}\}, h = 1, \dots, k.$$

Za svaki prirodan broj h tako da je $1 \leq h \leq k-2$ definirajmo kvadratnu matricu (reda n) $A^{(h)} = (a_{ij}^{(h)})$ na sljedeći način. Kako je $\lambda = 1$, za svaki izbor $1 \leq i, j \leq n$, postoji jedinstveni blok B koji sadrži elemente $x_{k-1,i}$ i $x_{k,j}$. Blok B sadrži točno jedan element iz G_h koji ćemo označiti s x_{hm}. Sada definirajmo $a_{ij}^{(h)} = m$. Da bismo pokazali da je matrica $A^{(h)}$ zaista latinski kvadrat reda n, pretpostavimo da su dva elementa u retku i ista. Tada bismo imali da je $a_{ij}^{(h)} = a_{il}^{(h)} =: m$, za neke $j \neq l$. Dakle, postoje dva bloka (bez smanjenja općenitosti neka su to B_1 i B_2) tako da je

$$\{x_{hm}, x_{k-1,i}, x_{k,j}\} \subseteq B_1 \text{ i } \{x_{hm}, x_{k-1,i}, x_{k,l}\} \subseteq B_2.$$

S obzirom da je $x_{k,j} \neq x_{k,l}$, B_1 i B_2 su međusobno različiti blokovi koji oba sadrže x_{hm} i $x_{k-1,i}$, odakle slijedi da je $\lambda \geq 2$, što je kontradikcija. Dakle, matrica $A^{(h)}$ je latinski kvadrat po retcima, a slično bi se pokazalo da je i latinski kvadrat po stupcima. Dakle, za svaki $h = 1, \dots, k-2$, $A^{(h)}$ je latinski kvadrat.

Pretpostavimo da za neke $h \neq l$ latinski kvadrati $A^{(h)}$ i $A^{(l)}$ nisu ortogonalni. Tada postoje $(i, j) \neq (u, v)$ tako da vrijedi:

$$a_{ij}^{(h)} = a_{uv}^{(h)} =: d \text{ i } a_{ij}^{(l)} = a_{uv}^{(l)} =: e.$$

Dakle, postoje blokovi B_1, B_2, B_3, B_4 tako da je:

$$\{x_{hd}, x_{k-1,i}, x_{kj}\} \subseteq B_1,$$

$$\{x_{hd}, x_{k-1,u}, x_{kv}\} \subseteq B_2,$$

$$\{x_{le}, x_{k-1,i}, x_{kj}\} \subseteq B_3,$$

$$\{x_{le}, x_{k-1,u}, x_{kv}\} \subseteq B_4.$$

Kako je $\lambda = 1$, znamo da je $B_1 = B_3$ i $B_2 = B_4$. Iz toga slijedi da je

$$\{x_{hd}, x_{le}, x_{k-1,i}, x_{kj}\} \subseteq B_1, \{x_{hd}, x_{le}, x_{k-1,u}, x_{kv}\} \subseteq B_2.$$

Uočimo da se elementi x_{hd} i x_{le} pojavljuju u oba bloka, a to je kontradikcija. Slijedi da su $A^{(h)}$ i $A^{(l)}$ međusobno ortogonalni latinski kvadrati reda n.

Obratno, počevši od $k-2$ MOLS-a reda n možemo inverznim postupkom konstruirati transverzalni dizajn $T[k, 1; n]$ čime je teorem dokazan. □

Primijenimo prethodni teorem na transverzalni dizajn iz primjera 2.2.19.

Primjer 2.2.21. *Ako na transverzalni dizajn $T[4,1;3]$ iz primjera 2.2.19 primijenimo prethodni teorem, dobit ćemo matrice $A^{(1)}$ i $A^{(2)}$ koje čine skup MOLS-a reda* 3. *Odredimo simbole na poziciji* $(1,1)$ *ovih matrica. S obzirom da su (po prethodnom teoremu) $i, j = 1$, pogledajmo elemente x_{31} i x_{41}. Oba elementa nalaze se u bloku B_1 zajedno s elementima x_{11} i x_{21}. Dakle, u matrici $A^{(1)}$ na poziciji* $(1,1)$ *bit će simbol* 1, *a u matrici $A^{(2)}$ na poziciji* $(1,1)$ *bit će simbol* 1. *U sljedećoj tablici prikazana je potpuna konstrukcija matrica $A^{(1)}$ i $A^{(2)}$.*

Tablica 2.2

Pozicija	Koordinatni elementi	Elementi presjeka	Matrice
$(1,1)$	$x_{31}, x_{41} \in B_1$	x_{11}, x_{21}	
$(1,2)$	$x_{31}, x_{42} \in B_6$	x_{12}, x_{23}	
$(1,3)$	$x_{31}, x_{43} \in B_8$	x_{13}, x_{22}	
$(2,1)$	$x_{32}, x_{41} \in B_9$	x_{13}, x_{23}	
$(2,2)$	$x_{32}, x_{42} \in B_2$	x_{11}, x_{22}	$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$(2,3)$	$x_{32}, x_{43} \in B_4$	x_{12}, x_{21}	
$(3,1)$	$x_{33}, x_{41} \in B_5$	x_{12}, x_{22}	
$(3,2)$	$x_{33}, x_{42} \in B_7$	x_{13}, x_{21}	
$(3,3)$	$x_{33}, x_{43} \in B_3$	x_{11}, x_{23}	

Poglavlje 3

Grafovi i latinski kvadrati

3.1 Latinski kvadrati i bipartitni grafovi

Pretpostavimo da imamo potpuni bipartitni graf G čiji je skup vrhova V particioniran u dva podskupa $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ tako da nijedan brid ne povezuje dva vrha iz U ili dva vrha iz W. Pretpostavku da vrijedi $|U| = |W| = n$ uzimamo kako bismo retke latinskog kvadrata L reda n mogli reprezentirati elementima iz U, a stupce ćemo reprezentirati elementima iz W. Naime, ako je na poziciji (i, j) matrice L simbol k, tada brid boje k spaja vrhove u_i i w_j. Dakle, bridovi su obojeni jednom od n boja, ali na način da svaki vrh ima točno jedan incidentan brid svake boje.

Iskažimo (i dokažimo) teoremom povezanost latinskih kvadrata reda n i potpunih bipartitnih grafova $K_{n,n}$.

Teorem 3.1.1. *Latinski kvadrat reda n ekvivalentan je* 1*-faktorizaciji od* $K_{n,n}$.

Dokaz. S obzirom da se svaki simbol pojavljuje točno jednom u svakom retku i stupcu latinskog kvadrata, svaki vrh u izvedenom bipartitnom grafu ima po točno jedan incidentni brid svake od n boja. Stoga svaki simbol stvara jednobojni 1-faktor.

Obratno, neka je G potpuni bipartitni graf $K_{n,n}$ i neka je zadana njegova 1-faktorizacija. Primijetimo da se ona sastoji od n 1-faktora. Obojimo bridove grafa G s n boja tako da bridovi koji pripadaju međusobno različitim 1-faktorima budu obojeni međusobno različitim bojama. Neka je skup vrhova V particioniran u skupove $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ kao gore. Postavimo li za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ simbol k na poziciju (i, j) kvadratne matrice reda n, ako postoji brid boje k koji spaja vrhove u_i i w_j, tada očito svaki redak i stupac nastale matrice sadrži svaki od n simbola za boje točno jednom, dakle konstruirana kvadratna matrica je latinski kvadrat reda n.

S obzirom da su opisana pridruživanja 1-faktorizacije grafa $K_{n,n}$ latinskom kvadratu reda n i obratno očito međusobno inverzna, tvrdnja slijedi. $\square$

Ukoliko bipartitni graf G ima skup vrhova V koji je particioniran u dva podskupa koji nisu jednakobrojni, potrebna je struktura tzv. latinskog pravokutnika kako bismo mogli dobiti ekvivalenciju iz prethodnog teorema.

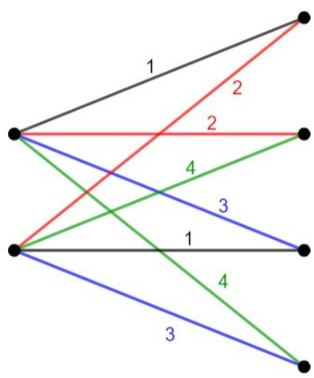
Definicija 3.1.2. ***Latinski pravokutnik*** *s r redaka i $n \geq r$ stupaca je $r \times n$ matrica R koja sadrži n simbola tako da svaki redak sadrži sve simbole, a niti jedan stupac ne sadrži niti jedan simbol više od jedanput.*

Pokažimo na primjeru ekvivalenciju između latinskog pravokutnika s 2 retka i 4 stupca i potpunog bipartitnog grafa $K_{2,4}$.

Primjer 3.1.3. *Neka je zadan latinski pravokutnik*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Odgovarajuća 1*-faktorizacija potpunog bipartitnog grafa $K_{2,4}$ prikazana je na slici 3.1.*



Slika 3.1: 1-faktorizacija potpunog bipartitnog grafa $K_{2,4}$

Pokažimo da je moguće svaki latinski pravokutnik dimenzija $r \times n$, gdje je $r < n$, dopuniti do latinskog kvadrata reda n tako da latinskom pravokutniku dodamo odgovarajućih $n - r$ redaka.

Lema 3.1.4. *Neka je R latinski pravokutnik s r redaka i n stupaca ($r < n$). Tada se u bilo kojem skupu od $k \leq n$ stupaca barem u jednom od tih k stupaca ne pojavljuje barem k simbola iz latinskog pravokutnika R.*

Dokaz. U svakom stupcu i latinskog pravokutnika R ne pojavljuje se $n-r$ simbola. Označimo sa S_i skup tih simbola za svaki stupac $i = 1, 2, \ldots, n$. S obzirom da se u svakom retku svaki simbol pojavljuje točno jedanput, tj. pojavljuje se r puta u latinskom pravokutniku R, slijedi da svaki simbol nedostaje u $n-r$ stupaca. Dakle, svaki simbol se pojavljuje $n-r$ puta kroz sve skupove S_i. Ako izaberemo k $(1 \leq k \leq n)$ stupaca, pripadajući skupovi S_i će zajedno sadržavati ukupno $k(n-r)$ simbola. S obzirom da se svaki simbol pojavljuje $n-r$ puta kroz sve skupove S_i, nijedan simbol neće se pojaviti više od $n-r$ puta u izabranih k skupova S_i. Stoga možemo zaključiti da će od svih $k(n-r)$ simbola u izabranih k skupova S_i njih barem k različitih biti zastupljeno. □

Lema 3.1.5. *Neka je $G = (V, E)$ bipartitni graf s konačnim skupom vrhova $V = U \cup W$, pri čemu svaki brid $e \in E$ povezuje neki vrh iz U s nekim vrhom iz W, i vrijedi $|U| = |W|$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeći uvjet:*

(∗) *Za svaki prirodan broj $k \leq |U|$, bilo kojih k vrhova iz U kolektivno je povezano barem s k vrhova iz W. Preciznije, za svaki $S \subseteq U$ vrijedi*

$$|\{w \in W : \{u, w\} \in E \text{ za neki } u \in S\}| \geq |S|.$$

Tada postoji 1-faktor grafa G.

Dokaz. Indukcijom po $n := |U|$. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi.

Neka je $n \in \mathbb{N}$, i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve bipartitne grafove kao u lemi tako da je $|U| \leq n$. Neka je G graf kao u lemi takav da je $|U| = n+1$. Razlikujemo dva slučaja:

(i) Za svaki prirodan broj $k \leq n$, bilo kojih k vrhova iz U kolektivno je povezano barem s $k+1$ vrhova iz W. U ovom slučaju, izbacimo li iz grafa G jedan brid $\{u_p, w_q\}$ i njemu incidentne vrhove u_p i w_q, dobivamo bipartitan graf G' u kojem vrijedi:

Za svaki prirodan broj $k \leq n$, bilo kojih k vrhova iz $U' = U \setminus \{u_p\}$ kolektivno je povezano s barem k vrhova iz $W' = W \setminus \{w_q\}$.

S obzirom da je $|U'| = |W'| = n$, po pretpostavci indukcije postoji 1-faktor grafa G'. Dodamo li mu brid $\{u_p, w_q\}$, dobivamo 1-faktor grafa G.

(ii) Postoji prirodni broj $k \leq n$ i k vrhova u_j iz U koji su kolektivno povezani točno s k vrhova w_j iz W. Neka su:

· G' bipartitni graf koji se iz grafa G dobije izbacivanjem gore spomenutih k vrhova u_j i pripadnih k vrhova w_j

· G'' bipartitni graf koji se iz grafa G dobije izbacivanjem svih vrhova osim gore spomenutih k-vrhova u_j i pripadnih k vrhova w_j.

Da bismo pronašli 1-faktor grafa G, dovoljno je pronaći 1-faktore grafova G' i G'' (oni će zajedno činiti 1-faktor grafa G). 1-faktori G' i G'' postoje po pretpostavci indukcije. Primijetimo da je indukcija primjenjiva na graf G'' jer on od grafa G očito nasljeđuje uvjet $(*)$. Preostaje pokazati da uvjet $(*)$ zadovoljava i graf G', tj. da je za svaki prirodan broj $h \leq n+1-k$ bilo kojih h vrhova $u_j \in U$ u G' kolektivno povezano barem s h vrhova $w_j \in W$ u G'. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji prirodan broj $h \leq n+1-k$ i h vrhova $u_j \in U$ u G' koji su kolektivno povezani sa strogo manje od h vrhova $w_j \in W$ u G'. Pridodamo li ovih h vrhova u_j iz G' k vrhova u_j koje smo izbacili prilikom konstrukcije grafa G', dobivamo $h+k$ vrhova u_j iz U koji su u grafu G kolektivno povezani sa strogo manje od $h+k$ vrhova $w_j \in W$, a to je kontradikcija.

□

Teorem 3.1.6. *Neka je R latinski pravokutnik dimenzija $r \times n$, pri čemu su r i n prirodni brojevi za koje vrijedi $r < n$. Latinskom pravokutniku R uvijek možemo dodati novi redak tako da dobijemo novi latinski pravokutnik R' dimenzija $(r+1) \times n$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je R popunjen simbolima $1, \ldots, n$. Neka je $G(R)$ bipartitan graf sa skupom vrhova $V = U \cup W$, gdje je $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, a brid $\{u_i, w_j\}$ je prisutan ako i samo ako se u i-tom stupcu latinskog pravokutnika R ne pojavljuje simbol j. Po lemi 3.1.4 graf $G(R)$ zadovoljava uvjet $(*)$ leme 3.1.5 pa po toj lemi postoji 1-faktor F grafa $G(R)$. Pomoću 1-faktora F sad možemo konstruirati redak čijim dodavanjem latinski pravokutnik R prelazi u latinski pravokutnik R', po sljedećem principu: za svaki brid $\{u_i, w_j\}$ 1-faktora F u i-ti stupac novog retka stavimo simbol j. □

Ako postupak iz prethodnog teorema ponovimo $n - r$ puta počevši od latinskog pravokutnika dimenzija $r \times n$ $(r < n)$, dobit ćemo latinski kvadrat. Iskažimo to u sljedećem korolaru.

Korolar 3.1.7. *Neka za prirodne brojeve r i n vrijedi $r < n$. Latinski pravokutnik dimenzija $r \times n$ može se dopuniti do latinskog kvadrata reda n dodavanjem $n - r$ redaka.*

Iskažimo sada još jedan rezultat povezanosti latinskih kvadrata reda n i potpunih bipartitnih grafova $K_{n,n}$.

Teorem 3.1.8. *Neka je zadan latinski kvadrat reda n. Postoji latinski kvadrat s kojim je on ortogonalan ako i samo ako za pripadajući potpuni bipartitni graf $K_{n,n}$ postoji 1-faktorizacija tako da svaki 1-faktor sadrži bridove svih boja.*

3.2 Latinski kvadrati i faktorizacija potpunih grafova

U ovom poglavlju proučit ćemo vezu između broja različitih latinskih kvadrata i faktorizacije (potpunih) grafova. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 3.2.1. *Neka su zadane sljedeće matrice:*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidimo da smo matricu (tj. latinski kvadrat reda 4*)* L *dobili superponiranjem matrica* L_1*,* L_2*,* L_3 *i* L_4*. Prikažimo matrice* L_i*,* $i = 1, 2, 3, 4$ *pomoću usmjerenih grafova, pri čemu su vrhovi usmjerenog grafa pridruženog matrici* L_i *brojevi* $1, 2, 3, 4$*, a brid* (j, k) *u tom grafu postoji ako i samo ako je* $(L_i)_{j,k} \neq 0$*.*

Pogledamo li svaku od matrica L_1*,* L_2*,* L_3 *i* L_4 *u pripadnim grafičkim reprezentacijama (slika 3.2), uočavamo da je svaka od njih* 1*-faktor potpunog usmjerenog grafa s* 4 *vrha. Obojimo bridove svakog od tih* 1*-faktora jednom bojom, pri čemu bridove međusobno različitih* 1*-faktora obojimo međusobno različitim bojama.*

Kvadratnu matricu (latinski kvadrat) L *reda* n *dobili smo superponiranjem matrica* L_1, L_2, L_3 *i* L_4*, slijedi da bismo pripadni graf za matricu* L *dobili superponiranjem grafova prikazanih na slici 3.2 i za takav graf vrijede sljedeća svojstva:*

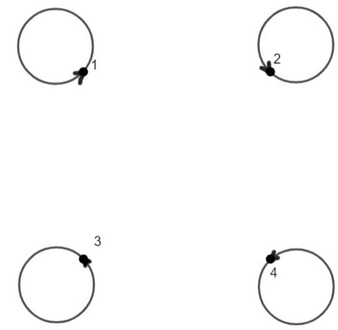
(i) Postoji usmjeren brid iz svakog vrha i u svaki vrh j*, za* $i, j = 1, 2, 3, 4$*.*

(ii) Svaki usmjereni brid je u jednoj od 4 *boje.*

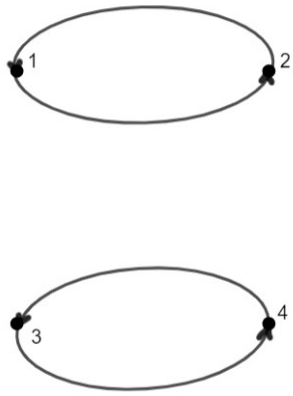
(iii) Točno jedan brid svake boje ulazi u svaki od vrhova i točno jedan brid svake boje izlazi iz svakog od vrhova.

Napomena 3.2.2. *U prethodnom primjeru uočavamo da naš usmjereni graf sadrži petlje koje smo definirali u definiciji 1.4.1. Potpuni usmjereni graf (koji sadrži petlje) s* n *vrhova označavat ćemo s* $\overrightarrow{K}_n$*.*

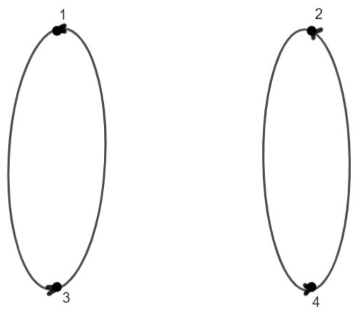
Dakle, slika 3.2 prikazuje 1-faktorizaciju od $\overrightarrow{K}_4$ dobivenu iz latinskog kvadrata L. Za svaki od dobivenih 1-faktora možemo reći da su mu bridovi jednobojni jer su određeni istim



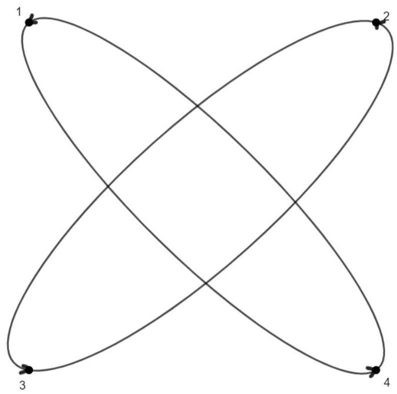
(a) L_1



(b) L_2



(c) L_3



(d) L_4

Slika 3.2: Grafički prikaz matrica L_1, L_2, L_3 i L_4

simbolom iz matrice L. Na isti način, za svaki latinski kvadrat reda n možemo odrediti pripadnu 1-faktorizaciju potpunog usmjerenog grafa $\overrightarrow{K}_n$ s označenim vrhovima.

U sljedećem primjeru ćemo pokazati da dva različita latinska kvadrata istog reda mogu imati istu pripadnu 1-faktorizaciju potpunog usmjerenog grafa.

Primjer 3.2.3. *Neka su zadani latinski kvadrati (reda* 4*):*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ukoliko u latinskom kvadratu A_1 zamijenimo simbole 1 i 2, dobit ćemo upravo latinski kvadrat A_2. Stoga su 1-faktorizacije dobivene iz ovih latinskih kvadrata ekvivalentne. Naime, jednu 1-faktorizaciju možemo dobiti iz druge permutacijom boja bridova.

Kako bismo izbjegli slučajeve kao u gornjem primjeru, ponovno ćemo koristiti reducirane (standardne) latinske kvadrate.

Teorem 3.2.4. *Neka je $\overrightarrow{K}_n$ potpuni usmjereni graf s n vrhova. Broj 1-faktorizacija od $\overrightarrow{K}_n$ dan je s $\vec{F}_n = L(n)/n! = (n-1)!l(n)$, gdje je $L(n)$ broj latinskih kvadrata reda n, a $l(n)$ broj reduciranih latinskih kvadrata reda n.*

Dokaz. Po teoremu 2.1.7 znamo da je $L(n) = n!(n-1)!l(n)$. Za svaku 1-faktorizaciju 1-faktore možemo obojiti u n boja na $n!$ načina. S obzirom da različito obojeni 1-faktori u 1-faktorizaciji određuju različite latinske kvadrate, slijedi $\vec{F}_n = L(n)/n! = (n-1)!l(n)$. □

Korolar 3.2.5. *Broj 1-faktorizacija od $\overrightarrow{K}_n$ jednak je broju latinskih kvadrata reda n s fiksiranim prvim retkom.*

Dokaz. Prvi redak latinskog kvadrata reda n možemo odabrati na $n!$ načina, stoga slijedi da je broj latinskih kvadrata reda n s fiksiranim prvim retkom upravo $L(n)/n!$. □

Označimo sada s $\overrightarrow{K}'_n$ potpuni usmjereni graf bez petlji. Obojimo njegove 1-faktore na način da brid iz vrha 1 do vrha i bude obojen bojom $i-1$ (pri čemu je $i = 1, 2, ..., n$). Matrični zapis dobiven postavljenjem simbola k na poziciju (i, j), ako brid boje k ide iz vrha i u vrh j, je latinski kvadrat reda n. Takav latinski kvadrat ima prvi redak u prirodnom poretku i nule na glavnoj dijagonali (nule predstavljaju odsutnost petlji).

Definicija 3.2.6. *Za latinski kvadrat s istim simbolom na glavnoj dijagonali kažemo da je* ***unipotentan****.*

Ako spomenutom matričnom zapisu (latinskom kvadratu) 1-faktorizacije od $\overrightarrow{K}'_n$ permutiramo retke tako da prvi stupac ima simbole u prirodnom poretku, dobit ćemo reducirani latinski kvadrat. Dakle, iz svakog unipotentnog latinskog kvadrata kojemu je prvi redak u prirodnom poretku permutiranjem redaka možemo dobiti točno jedan reducirani latinski kvadrat istog reda i obratno. Naime, od svakog reduciranog latinskog kvadrata točno jednom permutacijom redaka možemo dobiti unipotentan latinski kvadrat istog reda.

Primjer 3.2.7. *Neka je zadan reducirani latinski kvadrat*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ako na retke tog latinskog kvadrata primijenimo permutaciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$*, dobit ćemo unipotentni latinski kvadrat*

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Iz prethodnog primjera i korolara 3.2.5 prirodno slijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.2.8. *Neka je* $\overrightarrow{K}'_n$ *potpuni usmjereni graf. Sljedeći brojevi su jednaki:*

(i) broj 1*-faktorizacija od* $\overrightarrow{K}'_n$*,*

(ii) broj unipotentnih latinskih kvadrata reda n sa simbolima prvog retka u prirodnom poretku,

(iii) broj reduciranih latinskih kvadrata reda n.

Promotrimo sada potpune grafove s n vrhova (K_n). Počnimo s egzistencijom 1-faktorizacije potpunog grafa.

Teorem 3.2.9. 1*-faktorizacija potpunog grafa* K_n *s n vrhova postoji ako i samo ako je n paran broj.*

Dokaz. S obzirom da u 1-faktoru potpunog grafa svaki vrh ima stupanj 1, slijedi da ne postoji par bridova u 1-faktoru koji su incidentni s istim vrhom. Dakle, svaki brid 1-faktora je incidentan s dva vrha, koji su onda susjedni, tj. svaki vrh ima točno jedan susjedni vrh. Ako uzmemo da je broj bridova u 1-faktoru jednak m, tada imamo $2m$ vrhova.

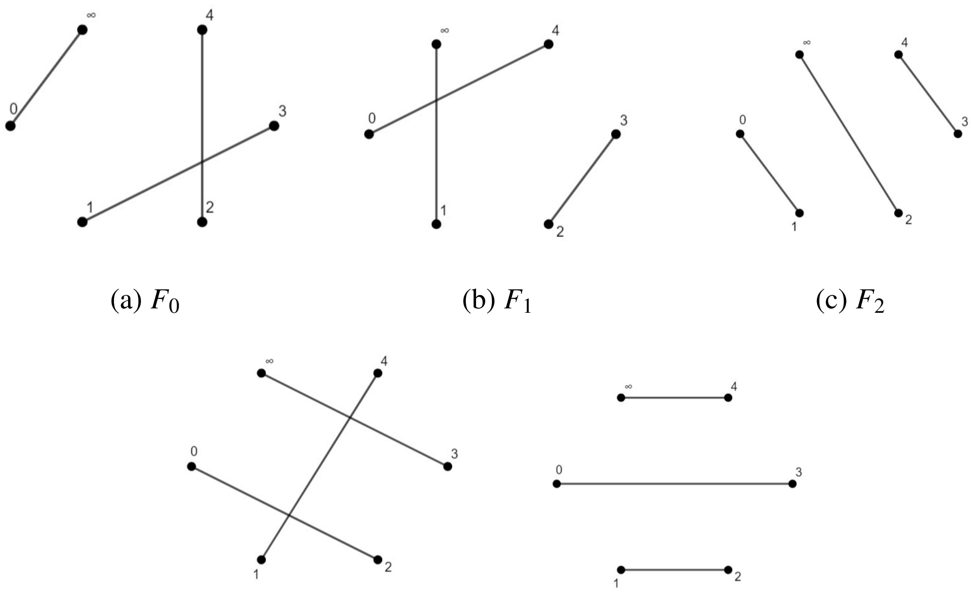
Pretpostavimo sada da za broj vrhova n vrijedi $n = 2m$, gdje je m prirodni broj. Označimo vrhove s $\{\infty, 0, 1, 2, \ldots, 2m-2\}$. Tada bridove 1-faktora F_i, za $i = 0, 1, \ldots, 2m-2$, možemo odrediti na sljedeći način:

$$F_i = \{\{\infty, i\}, \{i+1, 2m-2+i\}, \{i+2, 2m-3+i\}, \ldots, \{m-1+i, m+i\}\},$$

gdje se zbrajanje izvodi modulo $2m-1$. Uočimo da takvih 1-faktora ima $2m-1$. □

Pokažimo prethodni teorem na primjeru.

Primjer 3.2.10. *Neka je zadan potpuni graf sa* 6 *vrhova, tj.* K_6. *Neka su njegovi* 1*-faktori prikazani na slici 3.3.*



(a) F_0 (b) F_1 (c) F_2

(d) F_3 (e) F_4

Slika 3.3: 1-faktori od K_6, koji čine jednu 1-faktorizaciju grafa K_6

Tada bi pripadni latinski kvadrat reda 6 *pridružen ovoj 1-faktorizaciji na način analogan ranijem bio:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je ovaj latinski kvadrat reduciran, unipotentan i simetričan.

Napomena 3.2.11. *Ako vrhove označimo i poredamo, a bridove obojimo na isti način kao u prethodnom teoremu i primjeru za bilo koji potpuni graf* K_{2m}*, uvijek ćemo dobiti reducirani, simetrični i unipotentni latinski kvadrat reda* $2m$.

Dakle, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.2.12. *Broj 1-faktorizacija potpunog grafa s $2m$ vrhova (K_{2m}) jednak je broju reduciranih, simetričnih i unipotentnih latinskih kvadrata reda $2m$.*

3.3 Latinski kvadrati potpunog retka i putevi u grafu

U ovom poglavlju proučavat ćemo latinske kvadrate potpunog retka (stupca) i njihovu povezanost s putevima usmjerenih grafova.

Definicija 3.3.1. *Neka je dan latinski kvadrat L reda n i neka uređeni par (i, j) predstavlja poziciju u i-tom retku i j-tom stupcu tog latinskog kvadrata. Za latinski kvadrat kažemo da je* ***potpunog retka*** *ako za svaki uređeni par (a, b) različitih simbola postoji redak i i stupac j tako da se simbol a nalazi na poziciji (i, j), a simbol b na susjednoj poziciji u istom retku $(i, j + 1)$.*

Primjer 3.3.2. *Primjer latinskog kvadrata potpunog retka je:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definicija 3.3.3. *Za latinski kvadrat kažemo da je* ***potpunog stupca*** *ako za svaki uređeni par (a, b) različitih simbola postoji redak i i stupac j tako da se simbol a nalazi na poziciji (i, j), a simbol b na susjednoj poziciji u istom stupcu $(i + 1, j)$.*

Definicija 3.3.4. *Latinski kvadrat koji je potpunog retka i stupca zovemo* ***potpuni latinski kvadrat****.*

Neka je zadan potpuni usmjereni graf bez petlji s n vrhova ($\overrightarrow{K}'_n$). Proizvoljan (nezatvoren) Hamiltonov put u tom grafu je niz od n vrhova, što je zapravo permutacija od n simbola koji predstavljaju vrhove. S obzirom da potpuni usmjereni graf bez petlji $\overrightarrow{K}'_n$ ima $n(n-1)$ bridova, a svaki Hamiltonov put u tom grafu ima $n-1$ različitih bridova, tada bridove od $\overrightarrow{K}'_n$ možda možemo particionirati u n skupova tako da svaki od njih sadrži bridove koji zajedno s pripadajućim incidentnim vrhovima čine Hamiltonov put.

Iskažimo teoremom povezanost egzistencije latinskih kvadrata potpunog retka i dekompozicije $\overrightarrow{K}'_n$ u n disjunktnih Hamiltonovih puteva.

Teorem 3.3.5. *Ako postoji latinski kvadrat potpunog retka reda n, onda postoji dekompozicija od $\overrightarrow{K}'_n$ na n disjunktnih Hamiltonovih puteva.*

Dokaz. Neka postoji latinski kvadrat potpunog retka reda n. Tada svaki redak takvog latinskog kvadrata možemo promatrati kao permutaciju vrhova koji određuju jedan Hamiltonov put. S obzirom da se svaki uređeni par simbola pojavljuje točno jednom u latinskom kvadratu (u nekom od redaka), svaki od bridova grafa $\overrightarrow{K}'_n$ pojavljuje su u točno jednom od Hamiltonovih puteva. □

Egzistenciju latinskih kvadrata potpunog retka parnog reda dokazat ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 3.3.6. *Neka je latinski kvadrat L reda $2m$ za prirodan broj m. Neka je prvi red latinskog kvadrata L dan s*

$$0, 1, 2m - 1, 2, 2m - 2, 3, 2m - 3, \dots, m - 1, m + 1, m$$

i neka za svaki sljedeći redak k, $k = 2, \dots, 2m$, elemente dobivamo tako da svakom elementu prethodnog retka dodajemo 1 modulo $2m$. Tako dobiven latinski kvadrat L je potpunog retka.

Dokaz. Očito je L latinski kvadrat s obzirom da se svaki redak (stupac) mora sastojati od elementa $0, 1, \dots, 2m - 1$. Pogledajmo razlike (modulo $2m$) između uzastopnih članova prvog retka:

$$1, 2m - 2, 3, 2m - 4, 5, 2m - 6, \dots, 2, 2m - 1.$$

Uočavamo da su razlike dobivene na ovaj način međusobno različite. Označimo li s $l_{i,j}$ element latinskog kvadrata L na poziciji (i, j), možemo primijetiti da modulo $2m$ vrijedi

$(*)$ $l_{i,j+1} - l_{i,j} = l_{1,j+1} - l_{1,j}$ za svaki $i = 2, \dots, 2m$ i $j = 1, \dots, 2m - 1$.

Neka je a simbol latinskog kvadrata L. S obzirom da se u svakom stupcu simbol a mora pojaviti točno jednom, simbol desno od a jednoznačno je određen s $(*)$ ovisno u kojem se stupcu simbol a nalazi. □

Za latinske kvadrate neparnog reda egzistencija latinskog kvadrata potpunog retka proučava se za svaki red posebno. Za latinske kvadrate reda 3, 5 i 7 ne postoje latinski kvadrati potpunog retka, ali zato postoji latinski kvadrat reda 9 koji je potpunog retka.

Sada možemo pokazati kako iz latinskih kvadrata potpunog retka možemo dodatno dobiti latinski kvadrat potpunog stupca, tj. potpuni latinski kvadrat.

Teorem 3.3.7. *Neka je L latinski kvadrat potpunog retka reda n iz teorema 3.3.6. Ako se retci od L permutiraju tako da prvi stupac novodobivenog latinskog kvadrata L' bude jednak prvom retku od L, tada je L' potpuni latinski kvadrat.*

Dokaz. Ako retke latinskog kvadrata L iz teorema 3.3.6 permutiramo, nećemo narušiti potpunost po retcima. U L' razlike između susjednih članova unutar prvog stupca su različite i vrijedi

$$l'_{i+1,1} - l'_{i,1} = l'_{i+1,j} - l'_{i,j},$$

gdje je $l'_{i,j}$ simbol na poziciji (i, j) od L'. Analogno dokazu iz teorema 3.3.6 slijedi da je L' latinski kvadrat potpunog stupca, tj. da je potpuni latinski kvadrat. □

Pokažimo na primjeru prethodno dobivene rezultate.

Primjer 3.3.8. *Latinski kvadrat L potpunog retka reda* 6 *dobiven pomoću teorema 3.3.6 je:*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

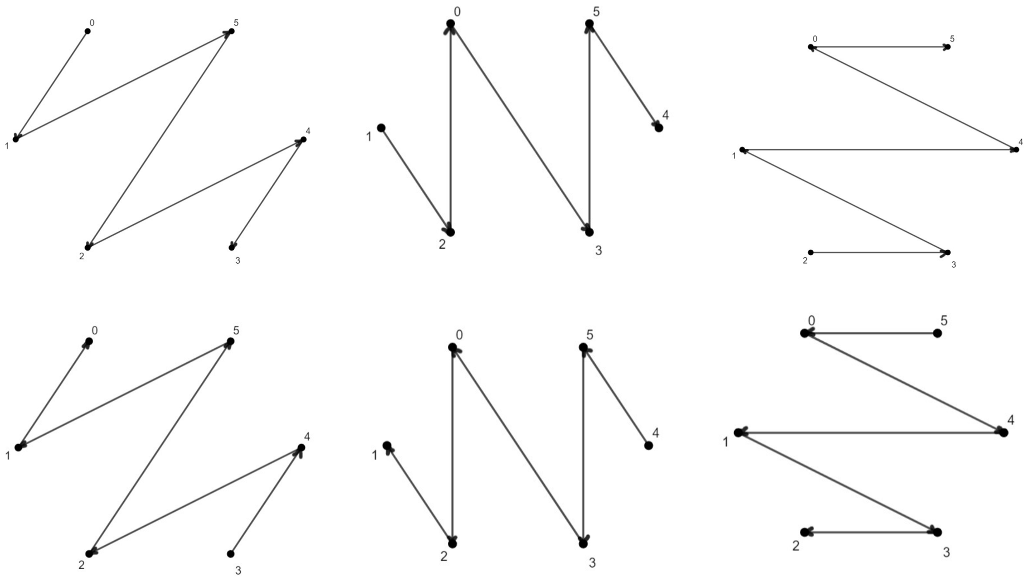
,

a odgovarajući Hamiltonovi putevi dobiveni iz redaka ovog latinskog kvadrata su prikazani na slici 3.4.

Ako na taj latinski kvadrat primijenimo teorem 3.3.7, dobit ćemo potpuni latinski kvadrat reda 6*:*

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do sada smo proučavali Hamiltonov put kao redak latinskog kvadrata potpunog retka, proširimo sada to na Hamiltonove cikluse. Neka je $\overrightarrow{K}'_{2m}$ potpuni usmjereni graf bez petlji s $2m$ vrhova. S obzirom da smo do sada vrhove ovakvog grafa označavali s $0, 1, \dots, 2m-1$, ako mu dodamo novi vrh (u oznaci $2m$) i pripadajuće bridove od (do) svih dosadašnjih vrhova, dobit ćemo potpuni usmjereni graf bez petlji s $2m+1$ vrhova, tj. $\overrightarrow{K}'_{2m+1}$. Ako je put $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{2m-1}}$ Hamiltonov u $\overrightarrow{K}'_{2m}$, tada je očito put $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{2m-1}}, v_{i_{2m}}, v_{i_0}$ Hamiltonov ciklus u $\overrightarrow{K}'_{2m+1}$.



Slika 3.4: Hamiltonovi putevi iz redaka latinskog kvadrata L danog formulom 3.1

Kada bismo isto htjeli primijeniti na latinske kvadrate potpunog retka, Hamiltonove puteve bismo zatvorili, tj. pretvorili u Hamiltonove cikluse tako da latinskom kvadratu potpunog retka reda $2m$ dodamo $(2m+1)$-vi stupac sa svim istim elementima, tj. popunjen elementom $2m$. Tada dobivamo pravokutnu matricu R dimenzija $2m \times (2m + 1)$. Svaki od redaka tako dobivene pravokutne matrice interpretiramo kao permutaciju koja je ciklus, tj. interpetiramo kao Hamiltonov ciklus kao i gore. Pokažimo na primjeru.

Primjer 3.3.9. *Neka ja dan latinski kvadrat potpunog retka reda* 4*:*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pripadna pravokutna matrica dimenzija 4×5 *je:*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ova pravokutna matrica daje dekompoziciju od $\overrightarrow{K}'_5$ *na Hamiltonove cikluse.*

Gornja diskusija dokazuje sljedeći teorem.

Teorem 3.3.10. *Neka je $m \in \mathbb{N}$. Postoji dekompozicija:*

(i) od $\overrightarrow{K}'_{2m}$ u $2m$ disjunktnih Hamiltonovih puteva;

(ii) od $\overrightarrow{K}'_{2m+1}$ u $2m$ disjunktnih Hamiltonovih ciklusa.

Lema 3.3.11. *Neka je L latinski kvadrat potpunog retka reda $2m$ iz teorema 3.3.6. Prvih m redaka od L u obrnutom poretku su isti kao posljednjih m redaka od L.*

Dokaz. Po teoremu 3.3.6 znamo konstruirati drugi, treći, ..., $(2m)$-ti redak pribrajajući 1 (modulo $2m$) elementima prethodnog retka, pri čemu je prvi redak:

$$0, 1, 2m - 1, 2, 2m - 2, 3, 2m - 3, \ldots, m - 1, m + 1, m.$$

Prema tome, ako svakom od elemenata prvog retka dodamo m (modulo $2m$), dobijemo elemente $(m + 1)$-og retka:

$$m, m + 1, m - 1, \ldots, 2m - 3, 3, 2m - 2, 2, 2m - 1, 1, 0.$$

Uočimo da su to elementi prvog retka u obrnutom poretku. Dakle, elementi prvog i elementi $(m + 1)$-vog retka su u međusobno suprotnom poretku. Primijetimo sad da, za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, pribrajanjem prvom odnosno $(m + 1)$-om retku broja $k - 1$ (modulo m) dobivamo k-ti odnosno $(m + k)$-ti redak. Slijedi da su i k-ti i $(m + k)$-ti redak u međusobno suprotnom poretku. Dakle, $(m + k)$-ti redak je obrnutog redoslijeda s obzirom na k-ti redak iz čega slijedi tvrdnja leme. □

Napomena 3.3.12. *Po prethodnoj lemi možemo zaključiti da za svaki Hamiltonov put u gornjoj dekompoziciji usmjerenog grafa $\overrightarrow{K}'_{2m}$ postoji put u istoj toj dekompoziciji koji je njemu suprotan.*

Ako u prethodnim rezultatima svaka dva međusobno suprotna Hamiltonova puta identificiramo jedan s drugim, tj. smatramo ih istim putem, dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 3.3.13. *Neka je K_{2m} odnosno K_{2m+1} jednostavni potpuni graf s $2m$ odnosno $2m + 1$ vrhova. Tada postoji dekompozicija:*

(i) od K_{2m} na m disjunktnih Hamiltonovih puteva;

(ii) od K_{2m+1} na m disjunktnih Hamiltonovih ciklusa.

Dokaz. Traženi putevi dobiveni su iz prvih m redaka latinskog kvadrata L iz teorema 3.3.6, a traženi ciklusi su dobiveni iz istih m redaka s dodanim elementom $2m$ kao zadnjim (u svakom retku to će biti $(2m + 1)$-vi element). □

Pokažimo još kako konstruirati Eulerovu turu u jednostavnom potpunom grafu s n vrhova (K_n), gdje je n neparan prirodan broj. Naime, s obzirom da je Euler pokazao da Eulerova tura postoji ako i samo ako su svi vrhovi grafa parnog stupnja, jednostavni potpuni grafovi s $2m$ vrhova ne dopuštaju Eulerovu turu (svaki vrh je stupnja $2m - 1$). Dakle, proučavat ćemo jednostavne potpune grafove s $2m + 1$ vrhova (K_{2m+1}), gdje je $m \in \mathbb{N}$.

Eulerovu turu konstruirat ćemo pomoću pravokutne matrice R definirane ranije u ovom potpoglavlju i nizanjem odgovarajućih Hamiltonovih ciklusa dobivenih iz R.

Teorem 3.3.14. *Neka je $m \in \mathbb{N}$. Neka je K_{2m+1} jednostavan potpun graf s $2m + 1$ vrhom. Označimo njegove vrhove sa $0, 1, 2, \ldots, 2m$. Eulerova tura od K_{2m+1} dana je s prvih m redaka $(2m) \times (2m + 1)$-matrice R dobivene tako da latinskom kvadratu potpunog retka reda $2m$ popunjenom simbolima $0, 1, 2, \ldots, 2m - 1$ dodamo $(2m + 1)$-vi stupac u kojem je na svakoj poziciji element $2m$.*

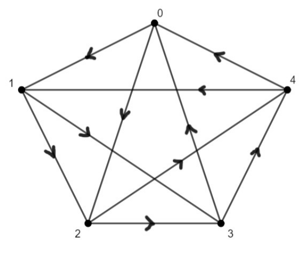
Dokaz. Neka su pozicije u prvih m redaka od R linearno uređene tako da za svaku poziciju (i, j), pri čemu je $i < m$, vrijedi da je neposredni prethodnik od $(i, j + 1)$ i da je također $(i, 2m + 1)$ neposredni prethodnik od $(i + 1, 1)$. Pretpostavimo da poziciji $(m, 2m + 1)$ slijedi pozicija $(1, 1)$. Tada gornja diskusija pokazuje da je šetnja dobivena nizanjem elemenata iz prvih m redaka od R u skladu s ovim uređajem Eulerova tura. □

Pokažimo prethodni teorem na primjeru.

Primjer 3.3.15. *Neka je $2m = 4$ i neka su prva dva retka matrice R dana s $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Tada linearnim uređajem iz prethodnog teorema dobivamo sljedeći niz vrhova:*

$$0, 1, 2, 3, 4, 1, 3, 0, 2, 4.$$

Ako pretpostavimo da nakon posljednjeg pojavljivanja vrha 4 slijedi vrh 0, dobit ćemo Eulerovu turu prikazanu na sljedećoj slici (strelice pokazuju redoslijed Eulerove ture, a ne usmjerenje bridova).



Slika 3.5: Eulerova tura

Poglavlje 4

Magični kvadrati i Roomovi kvadrati

4.1 Magični kvadrati

Definicija 4.1.1. ***Magični kvadrat*** *reda n je kvadratna matrica dimenzije $n \times n$ koja sadrži n^2 cijelih brojeva $0, 1, \dots, n^2 - 1$ tako da zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale bude isti.*

Primjer 4.1.2. *Primjer magičnog kvadrata reda 4 je:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 15 & 5 \\ 7 & 13 & 8 & 2 \\ 9 & 3 & 6 & 12 \\ 14 & 4 & 1 & 11 \end{pmatrix},$$

gdje je zbroj u svakom retku, stupcu i na dijagonalama jednak 30.

Jedna metoda konstruiranja magičnih kvadrata reda n je korištenjem parova ortogonalnih dijagonalnih latinskih kvadrata reda n.

Definicija 4.1.3. ***Dijagonalni latinski kvadrat*** *reda n je latinski kvadrat kojemu obje dijagonale imaju međusobno različite elemente.*

Teorem 4.1.4. *Neka je n neparan broj, ali takav da nije djeljiv s 3. Tada postoji dijagonalni latinski kvadrat reda n.*

Dokaz. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da vrijedi:

(i) $a > b$,

(ii) $a, b, a + b, a - b$ su relativno prosti s n.

Pokažimo da je tada kvadratna matrica:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a & 2a & \cdots & (n-1)a \\ b & b+a & b+2a & \cdots & b+(n-1)a \\ 2b & 2b+a & 2b+2a & \cdots & 2b+(n-1)a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)b & (n-1)b+a & (n-1)b+2a & \cdots & (n-1)b+(n-1)a \end{pmatrix},$$

gdje zbrajanje izvodimo modulo n, dijagonalni latinski kvadrat reda n. Uočimo da je simbol u i-tom retku ($0 \le i \le n-1$) i u j-tom stupcu ($0 \le j \le n-1$) dan s $ib+ja$. Pretpostavimo da za dva simbola u istom retku vrijedi $ib+ja \equiv ib+la (\text{mod } n)$. Tada vrijedi $(j-l)a \equiv 0 (\text{mod } n)$. S obzirom da je $M(a,n) = 1$ i $j,l < n$, slijedi da je $j = l$, dakle ne postoje dva ista simbola unutar istog retka ovog latinskog kvadrata (ovdje koristimo oznaku $M(x,y)$ za najveći zajednički djelitelj brojeva x i y). Analogno, zbog $M(b,n) = 1$, ne postoje dva ista simbola unutar istog stupca ovog latinskog kvadrata. Na glavnoj dijagonali pretpostavimo da vrijedi $ib + ia \equiv jb + ja (\text{mod } n)$, iz čega slijedi $i(b+a) \equiv j(b+a) (\text{mod } n)$. S obzirom da je $M(b+a,n) = 1$, slijedi $i = j$. Dakle, svi simboli na glavnoj dijagonali su međusobno različiti. Analogno, zbog $M(a-b,n) = 1$, simboli na sporednoj dijagonali su također međusobno različiti. Prema tome, L je dijagonalni latinski kvadrat reda n.

Da bismo završili dokaz teorema, trebamo još pokazati da postoje prirodni brojevi a i b sa svojstvima s početka dokaza. Primijetimo da brojevi $a = 2$ i $b = 1$ imaju tražena svojstva. Naime, s obzirom da je n neparan i nije djeljiv s 3, brojevi $a = 2$, $b = 1$, $a+b = 3$ i $a-b = 1$ su relativno prosti s n. □

Teorem 4.1.5. *Neka je n neparan broj, ali takav da nije djeljiv s 3. Tada postoji par međusobno ortogonalnih dijagonalnih latinskih kvadrata reda n.*

Dokaz. Kao i u prethodnom teoremu, tj. u njegovom dokazu, neka su a i b prirodni brojevi tako da je $a > b$ i da su $a, b, a-b, a+b$ relativno prosti s n. Znamo da je tada latinski kvadrat L iz prethodnog teorema dijagonalan. Označimo s L^T transponiranu matricu od L. Uočimo da je L^T također dijagonalni latinski kvadrat reda n. Pretpostavimo da L i L^T nisu ortogonalni. Tada postoje pozicije (i_1, j_1) i (i_2, j_2) tako da je

$$(i_1 b + j_1 a, i_1 a + j_1 b) = (i_2 b + j_2 a, i_2 a + j_2 b).$$

Odavde slijedi da je $i_1 = i_2$ i da je $j_1 = j_2$ tako da su L i L^T ortogonalni. □

Teorem 4.1.6. *Neka je n prirodan broj za koji postoji par međusobno ortogonalnih dijagonalnih latinskih kvadrata reda n. Tada se može konstruirati magični kvadrat reda n.*

Dokaz. Neka su L_1 i L_2 dijagonalni, međusobno ortogonalni, latinski kvadrati reda n. Magični kvadrat M reda n tada možemo dobiti kao

$$M = nL_1 + L_2.$$

Naime, neka je element r na poziciji (i, j) matrice L_1 i neka je element s na poziciji (i, j) matrice L_2. S obzirom da je $0 \leq r, s \leq n-1$, za element na poziciji (i, j) matrice M vrijedi $0 \leq rn + s \leq n^2 - 1$. Također, s obzirom da su L_1 i L_2 ortogonalni, elementi $rn + s$ na međusobno različitim pozicijama (r, s) međusobno su različiti. S obzirom da je zbroj elemenata u svakom retku, stupcu i dijagonalama jednak $(\sum_{r=0}^{n-1} r)n + \sum_{s=0}^{n-1} s$, slijedi da je M magičan kvadrat reda n. □

Pokažimo prethodni teorem na primjeru.

Primjer 4.1.7. *Neka su L_1 i L_2 sljedeći međusobno ortogonalni dijagonalni latinski kvadrati reda 4:*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Po konstrukciji iz prethodnog teorema, odgovarajući magični kvadrat je:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 5 & 14 \\ 6 & 13 & 3 & 8 \\ 15 & 4 & 10 & 1 \\ 9 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}.$$

Spomenimo još neke magične objekte, ali prije toga definirajmo pojam izlomljene dijagonale.

Definicija 4.1.8. *Neka je dana kvadratna matrica reda n.* ***Izlomljena dijagonala*** *je skup od n pozicija kvadratne matrice koje čine dvije paralelne dijagonalne linije u matrici.*

Definicija 4.1.9. *Magični kvadrat je* ***pandijagonalan*** *ako je zbroj u svakoj njegovoj izlomljenoj dijagonali jednak zbroju u svakom retku, stupcu i u svakoj od dijagonala.*

Definicija 4.1.10. *Magični kvadrat reda n je* ***simetričan*** *ako svaki par centralno simetričnih elemenata u zbroju daje $n^2 + 1$.*

Definicija 4.1.11. *Za magični kvadrat kažemo da je* ***bimagičan*** *ako kvadriranjem svakog od njegovih elemenata dobijemo novi magični kvadrat. Slično, za magični kvadrat kažemo da je m-****multimagičan*** *ako potenciranjem svih elemenata do m-te potencije dobivamo magične kvadrate.*

Definicija 4.1.12. *Za magični kvadrat kažemo da je* ***obrubljen*** *ako uklanjanjem prvog i posljednjeg retka i prvog i posljednjeg stupca ponovno dobivamo magični kvadrat.*

4.2 Roomovi kvadrati

Motivacija za Roomove kvadrate dolazi iz organiziranja turnira. Naime, neka se na nekom turniru natječe $2n$ ekipa na način da svaka ekipa igra sa svakom točno jednom. Tada je očito da imamo $2n - 1$ natjecateljskih krugova. Dodatno, u svakom krugu, svaka ekipa mora biti na jednoj od $2n - 1$ lokacija tako da kroz natjecanje svaku lokaciju posjeti točno jednom. Ovakvi problemi rješavaju se upravo Roomovim kvadratima.

Definicija 4.2.1. ***Roomov kvadrat*** *reda $2n$ je kvadratna matrica reda $2n - 1$ u kojoj je na svakoj poziciji ili prazan skup ili neuređeni par (tj. dvočlani skup) simbola odabranih iz zadanog skupa S od $2n$ elemenata, pri čemu vrijedi:*

(i) svaki redak (stupac) sadrži n neuređenih parova (s elementima iz S) i $n - 1$ praznih ćelija (tj. pozicija na kojima je prazan skup),

(ii) svaki redak (stupac) sadrži svaki od $2n$ elemenata iz S točno jednom i svaki od $n(2n - 1)$ neuređenih parova se pojavljuje točno jednom u cijelom kvadratu.

Napomena 4.2.2. *Bez smanjenja općenitosti, skup od $2n$ elemenata iz definicije ćemo definirati kao skup $S = \{1, 2, \ldots, 2n - 1, \infty\}$.*

Primjer 4.2.3. *Primjer jednog Roomovog kvadrata reda 8 je:*

$$
\begin{array}{ccccccc}
\{\infty,1\} & & & \{6,2\} & & \{5,7\} & \{3,4\} \\
\{4,5\} & \{\infty,2\} & & & \{7,3\} & & \{6,1\} \\
\{7,2\} & \{5,6\} & \{\infty,3\} & & & \{1,4\} & \\
 & \{1,3\} & \{6,7\} & \{\infty,4\} & & & \{2,5\} \\
\{3,6\} & & \{2,4\} & \{7,1\} & \{\infty,5\} & & \\
 & \{4,7\} & & \{3,5\} & \{1,2\} & \{\infty,6\} & \\
 & & \{5,1\} & & \{4,6\} & \{2,3\} & \{\infty,7\}
\end{array}.
$$

Pokažimo teoremom jedan način konstruiranja Roomovih kvadrata.

Teorem 4.2.4. *Neka je L latinski kvadrat reda $2n-1$ s elementima iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Neka za L također vrijedi da je ortogonalan s obzirom na svoj transponirani latinski kvadrat L^T te neka su na glavnoj dijagonali od L elementi $1, 2, \ldots, 2n-1$ u prirodnom poretku. U latinskom kvadratu L^T zamijenimo elemente na glavnoj dijagonali s ∞. S M označimo kvadratnu matricu reda $2n-1$ čiji su elementi uređeni parovi dobiveni uparivanjem elemenata na istim pozicijama u L i modificiranoj matrici L^T. Roomov kvadrat reda $2n$ možemo dobiti iz M brisanjem $n-1$ izlomljenih dijagonala (paralelnih glavnoj dijagonali) uz uvjet da:*

(i) *se svaki element iz L pojavljuje točno jednom u preostalim parovima prvog retka od M nakon brisanja*

(ii) *ako se obriše izlomljena dijagonala koja sadrži* $(1, j)$*, neće se obrisati izlomljena dijagonala koja sadrži* $(j, 1)$.

Dokaz. Ako s (i, j) označimo poziciju u M koja se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu, tada ćelija na poziciji (i, j) sadrži uređeni par (a, b) ako i samo ako ćelija na poziciji (j, i) sadrži uređeni par (b, a) što je očito iz ortogonalnosti L i L^T. Iz definicije ortogonalnosti latinskih kvadrata reda k znamo da se svaki od k^2 uređenih parova simbola u paru takvih latinskih kvadrata pojavljuje točno jednom. Dakle, nakon brisanja $n-1$ izlomljene dijagonale, zbog uvjeta (ii), svaki od preostalih uređenih parova pojavljuje se točno jednom. Ako je zadovoljen i uvjet (i), tako dobivena kvadratna matrica, u kojoj na kraju sve preostale uređene parove pretvorimo u neuređene, očito će biti Roomov kvadrat. □

Pokažimo na primjeru prethodni teorem.

Primjer 4.2.5. *Neka je dan latinski kvadrat reda* 7 *tako da zadovoljava pretpostavke prethodnog teorema:*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

tada je po prethodnom teoremu:

$$M = \begin{matrix} (1,\infty) & (7,3) & (6,5) & (5,7) & (4,2) & (3,4) & (2,6) \\ (3,7) & (2,\infty) & (1,4) & (7,6) & (6,1) & (5,3) & (4,5) \\ (5,6) & (4,1) & (3,\infty) & (2,5) & (1,7) & (7,2) & (6,4) \\ (7,5) & (6,7) & (5,2) & (4,\infty) & (3,6) & (2,1) & (1,3) \\ (2,4) & (1,6) & (7,1) & (6,3) & (5,\infty) & (4,7) & (3,2) \\ (4,3) & (3,5) & (2,7) & (1,2) & (7,4) & (6,\infty) & (5,1) \\ (6,2) & (5,4) & (4,6) & (3,1) & (2,3) & (1,5) & (7,\infty) \end{matrix}.$$

Sada trebamo obrisati 3 *izlomljene dijagonale. Izlomljene dijagonale ćemo označavati s* Δ_j*,* $j = 0, 1, \ldots, 6$*, a koordinate, tj. pozicije koje izlomljena dijagonala* Δ_j *sadrži, možemo dobiti na sljedeći način:*

$$\Delta_j = \{(i, i + j)\}, \textit{ za } i = 0, 1, \ldots, 6, \textit{ modulo } 7.$$

Ukoliko obrišemo Δ_3, Δ_5 i Δ_6, dobit ćemo Roomov kvadrat:

$$\begin{array}{ccccccc}
\{1,\infty\} & \{7,3\} & \{6,5\} & & \{4,2\} & & \\
 & \{2,\infty\} & \{1,4\} & \{7,6\} & & \{5,3\} & \\
 & & \{3,\infty\} & \{2,5\} & \{1,7\} & & \{6,4\} \\
\{7,5\} & & & \{4,\infty\} & \{3,6\} & \{2,1\} & \\
 & \{1,6\} & & & \{5,\infty\} & \{4,7\} & \{3,2\} \\
\{4,3\} & & \{2,7\} & & & \{6,\infty\} & \{5,1\} \\
\{6,2\} & \{5,4\} & & \{3,1\} & & & \{7,\infty\}
\end{array}.$$

Postoje i drugi načini konstruiranja Roomovih kvadrata, ali mi ćemo još samo spomenuti za koje redove postoje, tj. za koje redove je moguće konstruirati Roomove kvadrate. Naime, Wallis [5] je pokazao da za svaki prirodni broj, osim 2 i 3, postoji Roomov kvadrat reda $2n$.

Bibliografija

[1] Z. Bujanović i B. Muha, *Elementarna matematika 1, skripta, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/em/em1/materijali/EM1-skripta.pdf`, (kolovoz 2023.).

[2] T. Debelac i S. Gračan, *Magični kvadrati - čarolija u brojevima*, Matematika i Škola (2004), br. 26, 33–39.

[3] J. Dénes i A. D. Keedwell, *Latin Squares and Their Applications*, Academic Press, New York, 1974.

[4] Z. Franušić i J. Šiftar, *Linearna algebra 1, skripta, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf`, (kolovoz 2023.).

[5] C.F. Laywine i G. L. Mullen, *Discrete Mathematics Using Latin Squares*, A Wiley Interscience Publication, 1998.

[6] I. Nakić, *Diskretna matematika, skripta, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf`, (kolovoz 2023.).

[7] D. Sejdinović i A. Kopić, *O Oberwolfach problemu*, Hrvatski matematički elektronski časopis, br. 7, `http://e.math.hr/old/oberwolfach/index.html`.

Sažetak

U ovom radu proučavamo osnovna svojstva i neke od primjena latinskih kvadrata. Uvodimo pojmove usko vezane uz latinske kvadrate i razmatramo njihova svojstva i međusobnu povezanost. Povezujemo latinske kvadrate s teorijom grafova, tj. s potpunim grafovima, Hamiltonovim putevima i Eulerovim turama. Na kraju rada uvodimo pojmove magičnog kvadrata i Roomovog kvadrata te opisujemo i provodimo neke od načina njihove konstrukcije.

Summary

In this thesis, we study the basic properties and some applications of Latin squares. We introduce terms closely related to Latin squares and consider their properties and interrelationships. We connect Latin squares with graph theory, i.e. with complete graphs, Hamiltonian paths and Euler tours. At the end of the thesis, we introduce the concepts of a magic square and a Room square, and describe and implement some ways of their construction.

Životopis

Rođen sam 6. studenog 1998. godine u Karlovcu. U rodnom gradu završio sam Osnovnu školu Grabrik i Gimnaziju Karlovac prirodoslovno - matematičkog smjera. Na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu 2020. godine stekao sam zvanje sveučilišnog prvostupnika matematike i upisao diplomski studij Financijska i poslovna matematika.