SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nikolina Lončar

TOPOLOŠKA DIMENZIJA

Diplomski rad

Voditelji rada:
prof.dr.sc. Zvonko Iljazović
doc.dr.sc. Vera Tonić

Zagreb, rujan 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Mojoj majci, baki, teti i Damiru

Sadržaj

Uvod

Teorija dimenzije grana je topologije koja proučava definicije i svojstva dimenzija za razne klase topoloških prostora. Početak razvoja datira u rane dvadesete godine prošlog stoljeća kada se teorija razvijala isključivo u okviru separabilnih metričkih prostora. Početkom pedesetih godina otkriva se mogućnost poopćenja mnogih rezultata dobivenih za separabilne metričke prostore na veće klase topoloških prostora, čime se nastavlja razvoj teorije dimenzije sve do danas.

U ovom radu upoznat ćemo se s tri moguća načina definiranja dimenzije prostora te ispitati njihova osnovna svojstva.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Prije no što krenemo razvijati teoriju dimenzije, u ovom poglavlju prisjetit ćemo se važnih definicija i rezultata koji će nam biti nužni za daljnje razumijevanje. Napomenimo da je dokaze svih rezultata koji nisu navedeni u ovom poglavlju moguće naći u ([1]) i ([5]).

Definicija 1.0.1. *Metrika na skupu X je svako preslikavanje $d : X \times X \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi:*

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

za sve $x, y, z \in X$.
Uređeni par (X, d) zovemo metrički prostor.

Napomena 1.0.2. *Za (X, d) metrički prostor te $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, lako se vidi da je*

$$d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$$

metrika na Y.
Za uređeni par $(Y, d|_{Y\times Y})$ kažemo da je potprostor metričkog prostora (X, d).

Primjer 1.0.3. *Euklidska metrika $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana je s*

$$d(x, y) = |x - y| .$$

Definicija 1.0.4. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je neprekidna u točki $x \in X$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $y \in X$ vrijedi*

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Kažemo da je funkcija f neprekidna na X ako je neprekidna u svakoj točki $x \in X$.

Definicija 1.0.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $A \subseteq X, A \neq \emptyset$ i $x \in X$. Udaljenost točke x i skupa A definiramo na sljedeći način:*

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

Napomena 1.0.6. *Po svojstvu infimuma skupa, jasno je da za $S \subseteq T$ vrijedi $d(x, T) \leq d(x, S)$.*

Lema 1.0.7. *Za (X, d) metrički prostor te $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, vrijedi da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ dana s $f(x) := d(x, A)$ neprekidna, pri čemu na $\mathbb{R}$ podrazumijevamo Euklidsku metriku.*

Dokaz. Želimo pokazati da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| < \epsilon.$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Pokažemo li da za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \tag{1.1}$$

uzimanjem $\delta = \epsilon$ direktno će slijediti tražena tvrdnja. Neka su $x, y \in X$ proizvoljno odabrani i fiksni te neka je $a \in A$ proizvoljan. Pozivajući se na osnovna svojstva metrike, zaključujemo da vrijedi

$$\begin{aligned} d(x, A) &= \inf \{d(x, b) : b \in A\} \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \\ &\Rightarrow d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a), \end{aligned}$$

što zbog proizvoljnosti vrijedi za sve $a \in A$. Zaključujemo da je

$$d(x, A) - d(x, y)$$

donja međa skupa $\{d(y, a) : a \in A\}$, stoga vrijedi da je

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf \{d(y, a) : a \in A\} = d(y, A),$$

tj. imamo da je

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y). \tag{1.2}$$

Zamjenom uloge x i y u (1.2) dobivamo

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y). \tag{1.3}$$

Iz (1.2) i (1.3) zaključujemo da vrijedi (1.1), čime je tvrdnja dokazana. □

Definicija 1.0.8. *U metričkom prostoru (X, d) definiramo otvorenu kuglu radijusa $r > 0$ oko točke $x \in X$ kao skup*

$$K(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}.$$

Definicija 1.0.9. *U metričkom prostoru (X, d) definiramo zatvorenu kuglu radijusa $r > 0$ oko točke $x \in X$ kao skup*

$$K(x, r) = \{y \in X : d(y, x) \leq r\}.$$

Definicija 1.0.10. *U metričkom prostoru (X, d) skup $U \subseteq X$ je otvoren ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je*

$$K(x, r) \subseteq U.$$

Može se pokazati da je skup otvoren ako i samo ako se može prikazati kao unija neke familije otvorenih kugala datog metričkog prostora. Posebno, svaka otvorena kugla je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d).
Skup je zatvoren ako je njegov komplement otvoren. Posebno, svaka zatvorena kugla je zatvoren skup u metričkom prostoru (X, d).

Lema 1.0.11. *Neka je (X, d) metrički prostor te $M \subseteq X$ zatvoren. Tada vrijedi*

$$x \in M \Leftrightarrow d(x, M) = 0.$$

Definicija 1.0.12. *Neka je X skup. Za familiju $\mathcal{T}$ podskupova od X koja zadovoljava svojstva:*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{T}$*
2. *Unija proizvoljno mnogo elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$*
3. *Presjek konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$,*

kažemo da je topologija na X. Par $(X, \mathcal{T})$ zovemo topološki prostor. Elemente topologije $\mathcal{T}$ zovemo otvoreni skupovi, dok njihove komplemente zovemo zatvoreni skupovi.

Napomena 1.0.13. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $\mathcal{F}$ familija svih zatvorenih skupova u X. Uočimo da iz prethodne definicije, primjenom de Morganovih zakona, slijedi da je*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{F}$*
2. *Presjek proizvoljno mnogo elemenata iz $\mathcal{F}$ je element iz $\mathcal{F}$*

3. Unija konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{F}$ je element iz $\mathcal{F}$.

Napomena 1.0.14. *U metričkom prostoru (X, d) familija svih otvorenih skupova (opisanih u definiciji* 1.0.10*) čini topologiju na X. Drugim riječima, svaki metrički prostor ujedno je i topološki, pri čemu pripadnu topologiju nazivamo topologijom induciranom metrikom d na X. Napomenimo da ćemo u nastavku podrazumijevati opisanu identifikaciju metričkog prostora kao topološkog tj. podrazumijevat ćemo da sve tvrdnje iznijete za metričke prostore ujedno vrijede i za njima identificirane topološke prostore.*

Propozicija 1.0.15. *Neka je (Y, d') potprostor metričkog prostora (X, d). Tada je $(Y, \mathcal{T}_{d'})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$, pri čemu su $\mathcal{T}_d$ i $\mathcal{T}_{d'}$ topologije inducirane metrikama d i d'.*

Definicija 1.0.16. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za skup $V \subseteq X$ kažemo da je okolina točke $x \in X$ ako postoji otvoren skup U takav da je $x \in U \subseteq V$.*
Ako je V otvoren skup takav da $x \in V$, tada kažemo da je V otvorena okolina točke x.

Definicija 1.0.17. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $x \in X$ i $\mathcal{M}$ familija okolina od x u X. Kažemo da je $\mathcal{M}$ baza okolina točke x ako za svaku $N \subseteq X$ okolinu od x u X postoji $V \in \mathcal{M}$ tako da vrijedi $V \subseteq N$.*

Lema 1.0.18 (Karakterizacija otvorenog skupa)**.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $V \subseteq X$. Tada vrijedi:*

$$V \text{ je otvoren } \Leftrightarrow \forall x \in V,\ \exists U \subseteq X \text{ otvoren, t.d. } x \in U \subseteq V.$$

Dokaz. Pretpostavimo li da je V otvoren skup te $x \in V$, uzimanjem $U = V$ direktno slijedi tvrdnja.
Obratno, pretpostavimo da za svaki $x \in V$ postoji $U_x \subseteq X$ otvoren, takav da je $x \in U_x \subseteq V$. Tada vrijedi

$$V = \bigcup_{x \in V} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in V} U_x \subseteq V \Rightarrow \bigcup_{x \in V} U_x = V,$$

stoga je V otvoren skup po definiciji 1.0.12. □

Definicija 1.0.19. *Za familiju $\mathcal{P}$ podskupova skupa X kažemo da je pokrivač od X ako vrijedi $X = \bigcup_{S \in \mathcal{P}} S$.*
Pokrivač koji se sastoji od otvorenih skupova naziva se otvoreni pokrivač.

Definicija 1.0.20. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Familija $\boldsymbol{B} \subseteq \mathcal{T}$ je baza topologije $\mathcal{T}$ ako se svaki otvoreni skup može prikazati kao unija elemenata iz $\boldsymbol{B}$.*
Drugim riječima, familija $\boldsymbol{B} \subseteq \mathcal{T}$ je baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki $V \in \mathcal{T}$ te svaki $x \in V$ postoji $B \in \boldsymbol{B}$ takav da je

$$x \in B \subseteq V.$$

Napomena 1.0.21. *Baza topologije $\mathcal{T}$ na X ujedno je i pokrivač od X.*

Napomena 1.0.22. *Baza topologije $\mathcal{T}$ na X nije jedinstvena, o čemu govori sljedeći primjer.*

Primjer 1.0.23. *Topologija inducirana Euklidskom metrikom na $\mathbb{R}$ naziva se Euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Primjer baze za tu topologiju je familija*

$$B_1 = \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Familija

$$B_2 = \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

također je baza za Euklidsku topologiju na $\mathbb{R}$.
Iz definicije otvorenog skupa u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d Euklidska metrika, direktno slijedi da za proizvoljan otvoren skup U te proizvoljnu točku $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je

$$\langle x - r, x + r\rangle \subseteq U,$$

stoga uzimanjem $a = x - r$ i $b = x + r$ zaključujemo da je B_1 baza Euklidske topologije na $\mathbb{R}$. Nadalje, korištenjem gustoće skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$, zaključujemo da postoje $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ takvi da je

$$x \in \langle q_1, q_2\rangle \subseteq \langle a, b\rangle \subseteq U,$$

čime je dokazano da je B_2 također baza Euklidske topologije na $\mathbb{R}$.

Napomena 1.0.24. *Familija svih otvorenih kugli čini bazu svakog metričkog prostora.*

Lema 1.0.25 (Karakterizacija otvorenog skupa pomoću baze)**.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $\boldsymbol{B} \subseteq \mathcal{T}$ baza od $\mathcal{T}$ te $V \subseteq X$. Tada vrijedi:*

$$V \textit{ je otvoren } \Leftrightarrow \forall x \in V,\ \exists U \in \boldsymbol{B} \textit{ t.d. } x \in U \subseteq V.$$

Definicija 1.0.26. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Definiramo interior skupa A u X kao skup*

$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{U \subseteq A,\, U \textit{ otvoren}} U.$$

Uočimo da je $\operatorname{Int} A$ *najveći otvoreni skup kojeg skup A sadrži.*

Lema 1.0.27. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Vrijedi:*

$$A \subseteq X \textit{ je otvoren } \Leftrightarrow \operatorname{Int} A = A.$$

Definicija 1.0.28. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Definiramo zatvarač skupa A u X kao skup*

$$\mathrm{Cl}\, A = \bigcap_{F \supseteq A, F \text{ zatvoren}} F.$$

Uočimo da je $\mathrm{Cl}\, A$ najmanji zatvoreni skup koji sadrži skup A.

Lema 1.0.29. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Vrijedi:*

$$A \subseteq X \text{ je zatvoren } \Leftrightarrow \mathrm{Cl}\, A = A.$$

Lema 1.0.30. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Vrijedi:*

1. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Cl}\, A \subseteq \mathrm{Cl}\, B$,
2. $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}\, A \cup \mathrm{Cl}\, B$.

Lema 1.0.31. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Tada je:*

$$x \in \mathrm{Cl}\, A \Leftrightarrow \text{za svaku otvorenu okolinu } U \text{ od } x \text{ vrijedi } U \cap A \neq \emptyset.$$

Napomena 1.0.32. *Ako je $\mathbf{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ na X, tada vrijedi:*

$$x \in \mathrm{Cl}\, A \Leftrightarrow \text{za svaki } B \in \mathbf{B} \text{ t.d. } x \in B \text{ vrijedi } B \cap A \neq \emptyset.$$

Lema 1.0.33. *Neka je (X, d) metrički prostor te $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Tada vrijedi*

$$x \in \mathrm{Cl}\, A \Leftrightarrow d(x, A) = 0.$$

Dokaz. Prema napomeni 1.0.32 znamo da je

$$x \in \mathrm{Cl}\, A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, K(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Drugim riječima,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Cl}\, A &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists a \in A \text{ t.d. } d(x, a) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\} = 0. \end{aligned}$$

□

Definicija 1.0.34. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Definiramo rub skupa A u X kao skup*

$$\mathrm{Fr}\, A = \mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A).$$

Napomena 1.0.35. *Prema prethodnoj definiciji te lemi* 1.0.31 *jasno je da vrijedi sljedeće:*

$$x \in \operatorname{Fr} A \Leftrightarrow \textit{za svaku otvorenu okolinu } U \textit{ od } x \textit{ je}$$
$$U \cap A \neq \emptyset \textit{ te } U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Lema 1.0.36. *Neka je X topološki prostor te $A \subseteq X$. Tada vrijedi:*

$$A \textit{ je otvoren i zatvoren skup u } X \textit{ ako i samo ako je } \operatorname{Fr} A = \emptyset.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \subseteq X$ otvoren i zatvoren skup. Posljedično, isto svojstvo vrijedi i za skup $X \setminus A$, stoga je

$$\begin{aligned}\operatorname{Fr} A &= \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl}(X \setminus A)\\ &= A \cap (X \setminus A) = \emptyset.\end{aligned}$$

Obratno, pretpostavimo da je $\operatorname{Fr} A = \emptyset$ te da skup A nije otvoren ili nije zatvoren. Ako A nije otvoren, tada $X \setminus A := V$ nije zatvoren, stoga postoji

$$x \in \operatorname{Cl} V, x \notin V \Rightarrow x \in \operatorname{Cl} V \cap (X \setminus V) = \operatorname{Cl} V \cap A \subseteq \operatorname{Cl} V \cap \operatorname{Cl} A = \operatorname{Fr} A,$$

što vodi na kontradikciju sa pretpostavkom da je skup $\operatorname{Fr} A$ prazan. Analogni račun u slučaju kada A nije zatvoren također vodi na kontradikciju, stoga zaključujemo da je skup A otvoren i zatvoren u X. □

Definicija 1.0.37. *Neka su $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topološki prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je neprekidno obzirom na topologije $\mathcal{T}_X$ i $\mathcal{T}_Y$ ako za svaki $U \in \mathcal{T}_Y$ vrijedi $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.*
Drugim riječima, f je neprekidno preslikavanje ako je praslika svakog otvorenog skupa u kodomeni otvoren skup u domeni.

Napomena 1.0.38. *Lako se pokaže da se prethodna definicija neprekidnog preslikavanja između topoloških prostora podudara s definicijom* 1.0.4 *u slučaju neprekidnog preslikavanja između metričkih prostora. Također vrijedi da je zbroj i razlika neprekidnih preslikavanja $f, g : X \to \mathbb{R}$ ponovo neprekidno preslikavanje sa X u $\mathbb{R}$.*

Definicija 1.0.39. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Kažemo da je familija definirana s*

$$\mathcal{S} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

relativna topologija na Y obzirom na topologiju $\mathcal{T}$. Kažemo da je topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

Napomena 1.0.40. *Korištenjem definicije* 1.0.12 *lako se vidi da je za sve* $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, *familija* $\mathcal{S}$ *zaista topologija na* Y. *Također vrijedi da je*

1. $U \subseteq Y$ *otvoren u* Y *ako i samo ako postoji* $V \subseteq X$ *otvoren takav da je* $U = V \cap Y$

2. $F \subseteq Y$ *zatvoren u* Y *ako i samo ako postoji* $G \subseteq X$ *zatvoren takav da je* $F = G \cap Y$

Napomena 1.0.41. *Odnos zatvarača skupa u potprostoru i samom prostoru bit će nam bitan u daljnim proučavanjima; za* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor,* $Y \neq \emptyset$ *potprostor od* X, *iz same definicije zatvarača lako se vidi da za* $U \subseteq Y$ *vrijedi*

$$\mathrm{Cl}_Y U = \mathrm{Cl}_X U \cap Y.$$

Definicija 1.0.42. *Neka su* $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *topološki prostori. Za preslikavanje* $f : X \to Y$ *kažemo da je homeomorfizam prostora* X *i* Y *ako je* f *neprekidna bijekcija kojoj je inverzna funkcija također neprekidna.*
U tom slučaju pišemo $X \simeq Y$.

Napomena 1.0.43. *Svojstva topoloških prostora koja ostaju očuvana djelovanjem homeomorfizma nazivaju se topološke invarijante.*

Definicija 1.0.44. *Neka su* $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *topološki prostori. Za preslikavanje* $f : X \to Y$ *kažemo da je otvoreno (zatvoreno) ako je slika svakog otvorenog (zatvorenog) skupa u* X *otvoren (zatvoren) skup u* Y.

Napomena 1.0.45. *Vrijede sljedeće ekvivalencije:*

1. *Neprekidna bijekcija* $f : X \to Y$ *je homeomorfizam ako i samo ako je* f *otvoreno preslikavanje.*

2. *Neprekidna bijekcija* $f : X \to Y$ *je homeomorfizam ako i samo ako je* f *zatvoreno preslikavanje.*

Definicija 1.0.46. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Kažemo da je* $(X, \mathcal{T})$ T_0 *prostor ako*

$$\forall x, y \in X, x \neq y,\ \exists U \in \mathcal{T} \text{ t.d. } x \in U, y \notin U \text{ ili } y \in U, x \notin U$$

Definicija 1.0.47. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Kažemo da je* $(X, \mathcal{T})$ T_1 *prostor ako*

$$\forall x, y \in X, x \neq y,\ \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ t.d. } x \in U, y \notin U \text{ i } y \in V, x \notin V$$

Propozicija 1.0.48. *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *je* T_1 *ako i samo ako je za svaki* $x \in X$, *skup* $\{x\}$ *zatvoren.*
Posljedično, svaki konačan podskup T_1 *prostora je zatvoren.*

Definicija 1.0.49. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Kažemo da je $(X, \mathcal{T})$ T_2 prostor ako*

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \ \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ t.d. } x \in U, y \in V \text{ i } U \cap V = \emptyset.$$

Definicija 1.0.50. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Kažemo da je $(X, \mathcal{T})$ T_3 prostor ako*

$$\forall F \subseteq X \text{ zatvoren }, \forall x \in X, x \notin F, \ \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ t.d. } x \in U, F \subseteq V \text{ i } U \cap V = \emptyset.$$

Lema 1.0.51 (Karakterizacija T_3 prostora)**.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Vrijedi: $(X, \mathcal{T})$ je T_3 prostor ako i samo ako za svaki $x \in X$ i svaku otvorenu okolinu $U \subseteq X$ od x, postoji $V \subseteq X$ otvoren, takav da je*

$$x \in V \subseteq \operatorname{Cl} V \subseteq U.$$

Definicija 1.0.52. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Kažemo da je $(X, \mathcal{T})$ T_4 prostor ako*

$$\forall F, G \subseteq X \text{ zatvoreni i disjunktni, } \exists U, V \in \mathcal{T} \text{ t.d. } F \subseteq U, G \subseteq V, U \cap V = \emptyset.$$

Lema 1.0.53 (Karakterizacija T_4 prostora)**.** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Vrijedi: $(X, \mathcal{T})$ je T_4 prostor ako i samo ako za svaki $F \subseteq X$ zatvoren i svaki $U \subseteq X$ otvoren, takav da je $F \subseteq U$, postoji $V \subseteq X$ otvoren takav da je*

$$F \subseteq V \subseteq \operatorname{Cl} V \subseteq U.$$

Napomena 1.0.54. *Pomoću karakterizacije T_4 prostora pokažimo da za takve prostore vrijedi i jače svojstvo separiranja zatvorenih disjunktnih skupova, kojeg navodimo i dokazujemo u nastavku.*

Lema 1.0.55. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ T_4 prostor te $F, G \subseteq X$ zatvoreni i disjunktni. Tada postoje $U, W \subseteq X$ otvoreni, takvi da je*

$$F \subseteq U, G \subseteq W, \operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl} W = \emptyset.$$

Dokaz. Po definiciji T_4 prostora znamo da postoje $V, W \subseteq X$ otvoreni, takvi da je

$$F \subseteq V, G \subseteq W, \ V \cap W = \emptyset.$$

Pozivajući se na karakterizaciju 1.0.53 znamo da postoji $U \subseteq X$ otvoren, takav da je

$$F \subseteq U \subseteq \operatorname{Cl} U \subseteq V.$$

Nadalje, kako je $W \subseteq X \setminus V$ te $X \setminus V$ zatvoren, zaključujemo da je

$$G \subseteq W \subseteq \operatorname{Cl} W \subseteq X \setminus V.$$

Naposlijetku, imamo da je

$$\operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl} W \subseteq \operatorname{Cl} U \cap X \setminus \operatorname{Cl} U = \emptyset,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Definicija 1.0.56. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Kažemo da je $(X, \mathcal{T})$ regularan prostor ako je T_1 i T_3 prostor.*

Definicija 1.0.57. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Kažemo da je $(X, \mathcal{T})$ normalan prostor ako je T_1 i T_4 prostor.*

Napomena 1.0.58. *Svojstva T_0, T_1, T_2, T_3 i T_4 nazivaju se aksiomi separacije.*

Lema 1.0.59. *Svojstva T_0, T_1, T_2 i T_3 su nasljedna; ako je $(X, \mathcal{T})$ T_i prostor, za $i = 0, \ldots 3$, tada je svaki njegov potprostor također T_i prostor.*

Dokaz. Prepostavimo li da je $(X, \mathcal{T})$ T_0 prostor te $Y \subseteq X$, tada za $x, y \in Y$, $x \neq y$ vrijedi

$$\begin{aligned} x, y \in X,\ x \neq y &\Rightarrow \exists U \in \mathcal{T} \text{ t.d. } x \in U, y \notin U \text{ ili } y \in U, x \notin U \\ &\Rightarrow x \in U \cap Y, y \notin U \cap Y \text{ ili } y \in U \cap Y, x \notin U \cap Y \\ &\Rightarrow x \in V, y \notin V \text{ ili } y \in V, x \notin V \end{aligned}$$

gdje je $V = U \cap Y$ otvoren u Y po definiciji potprostorne topologije. Time smo pokazali da je T_0 nasljedno svojstvo; na sličan način se pokaže da su svojstva T_1, T_2 i T_3 također nasljedna. □

Lema 1.0.60. *Svaki zatvoreni potprostor T_4 prostora je T_4 prostor.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ T_4 prostor te $Y \subseteq X$ zatvoren u X. Neka su $F_1, G_1 \subseteq Y$ zatvoreni i disjunktni skupovi u Y. Tada postoje $F_0, G_0 \subseteq X$ zatvoreni, takvi da je

$$\begin{aligned} F_1 &= F_0 \cap Y \\ G_1 &= G_0 \cap Y \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da su F_1 i G_1 zatvoreni (i disjunktni) u X, stoga postoje $U_0, V_0 \subseteq X$ otvoreni i disjunktni, takvi da je

$$\begin{aligned} &F_1 \subseteq U_0,\ G_1 \subseteq V_0 \\ &\Rightarrow F_1 \subseteq U_0 \cap Y,\ G_1 \subseteq V_0 \cap Y. \end{aligned}$$

Kako su skupovi $U_0 \cap Y := U_1$ i $V_0 \cap Y := V_1$ otvoreni i disjunktni u Y, zaključujemo da je Y T_4 prostor. □

Napomena 1.0.61. *Općenito, proizvoljan potprostor T_4 prostora ne mora biti T_4 prostor. U oznakama prethodnog dokaza, kada Y ne bi bio zatvoren, tada skupovi F_1 i G_1 ne bi nužno bili zatvoreni i disjunktni u X pa ih kao takve ne bi bilo moguće razdvojiti otvorenim skupovima koristeći svojstvo T_4 prostora X.*

Napomena 1.0.62. *Svaki metrički prostor je T_i prostor, za sve $i = 0, \dots, 4$.*

Definicija 1.0.63. *Kažemo da topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti ako svaka točka $x \in X$ ima prebrojivu bazu okolina u X.*
Kažemo da topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti ako postoji prebrojiva baza $\boldsymbol{B}$ za topologiju $\mathcal{T}$.

Definicija 1.0.64. *Kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ separabilan ako postoji $A \subseteq X$ prebrojiv, takav da je $\mathrm{Cl}\, A = X$.*

Napomena 1.0.65. *Općenito vrijedi da drugi aksiom prebrojivosti povlači svojstvo separabilnosti tj. ako topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, tada je on i separabilan. Za svaki metrički prostor vrijedi i više; ako je (X, d) metrički prostor, tada su drugi aksiom prebrojivosti i separabilnost ekvivalentna svojstva.*
Nadalje, svaki potprostor topološkog prostora koji zadovoljava prvi (drugi) aksiom prebrojivosti i sam zadovoljava prvi (drugi) aksiom prebrojivosti, dok isto ne vrijedi za potprostor separabilnog prostora. Naime, potprostor separabilnog prostora općenito ne mora biti separabilan. Kao posljedicu ekvivalencije svojstava separabilnosti i drugog aksioma prebrojivosti, za metričke prostore vrijedi da je svaki potprostor separabilnog prostora i sam separabilan.

Poglavlje 2

Mala induktivna dimenzija

U ovom poglavlju, za regularni topološki prostor X uvodimo pojam male induktivne dimenzije od X (u oznaci $\operatorname{ind} X$). U drugom dijelu poglavlja posebnu ćemo pažnju posvetiti slučaju kada je X separabilan metrički prostor i rezultatima koji u tom slučaju vrijede. Sva teorija koju iznosimo u ovom poglavlju nastala je dvadesetih i tridesetih godina prošlog stoljeća, dok su samu definiciju male induktivne dimenzije formulirali Urysohn i Menger, 1922. tj. 1923. godine, objavljujući dva neovisna rada, kojima su privukli interes matematičke zajednice te potakli razvoj teorije dimenzije.

2.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 2.1.1. *Induktivno definiramo niz klasa regularnih topoloških prostora* $(I_n)_n$, $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, *na sljedeći način:*

1. $I_{-1} = \{\emptyset\}$
2. *Pretpostavimo da smo za neki* $n \in \mathbb{N}_0$ *definirali* I_{n-1}
3. *Definiramo* I_n *na sljedeći način:*

$$X \in I_n \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall V \subseteq X \textit{ otvorenu okolinu od } x)\ (\exists U \subseteq X \textit{ otvoren})$$
$$\textit{t.d. } x \in U \subseteq V,\ \operatorname{Fr} U \in I_{n-1}.$$

Napomena 2.1.2. *Uočimo da je* $I_n \subseteq I_{n+1}$, *za sve* $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$.
Tvrdnju pokazujemo indukcijom po $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$.

1. *Baza: Za* $n = -1$, *trivijalno vrijedi da je* $I_{-1} = \{\emptyset\} \subseteq I_0$.

2. *Pretpostavka: Pretpostavimo da za* $n \in \mathbb{N}_0$ *vrijedi inkluzija* $I_n \subseteq I_{n+1}$.

3. *Korak: Pokažimo da je* $I_{n+1} \subseteq I_{n+2}$.

   Neka je $X \in I_{n+1}$. *Tada je X regularan topološki prostor takav da za svaki* $x \in X$ *te za svaku otvorenu okolinu* $V \subseteq X$ *od* x, *postoji* $U \subseteq X$ *otvoren takav da je* $x \in U \subseteq V$ *te* $\mathrm{Fr}\, U \in I_n$
   Prema pretpostavci znamo da je $I_n \subseteq I_{n+1}$ *stoga je* $\mathrm{Fr}\, U \in I_n \subseteq I_{n+1}$, *iz čega zaključujemo da je* $X \in I_{n+2}$.

Definicija 2.1.3. *Za X regularan topološki prostor definiramo malu induktivnu dimenziju*

$$\mathrm{ind}\, X = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\} : X \in I_n\}.$$

Ako za X ne postoji $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ *takav da je* $X \in I_n$, *tada definiramo* $\mathrm{ind}\, X = \infty$.

Propozicija 2.1.4. *Neka je X regularan topološki prostor te* $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. *Tada vrijedi:*

1. $\mathrm{ind}\, X \leq n \Leftrightarrow X \in I_n$
2. $\mathrm{ind}\, X = n \Leftrightarrow \mathrm{ind}\, X \leq n$ *i* $\mathrm{ind}\, X \nleq n-1$
3. $\mathrm{ind}\, X = \infty \Leftrightarrow \mathrm{ind}\, X > n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$

Dokaz. Pokazat ćemo prvu tvrdnju propozicije, ostale tvrdnje trivijalno vrijede. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ te $\mathrm{ind}\, X \leq n$. Tada imamo da je

$$\min\{m \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\} : X \in I_m\} \leq n,$$

iz čega zaključujemo da je $X \in I_n$ ili $X \in I_k$ za $k \in \{-1, 0, 1, \dots, n-1\}$. No, kako je $I_k \subseteq I_n$, slijedi da je $X \in I_n$.
Obratno, za $X \in I_n$, direktno iz definicije 2.1.3 slijedi da je $\mathrm{ind}\, X \leq n$. □

Propozicija 2.1.5. *Neka su* X, Y *regularni topološki prostori takvi da je* $X \simeq Y$. *Tada vrijedi* $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{ind}\, Y$.
Drugim riječima, mala induktivna dimenzija je topološka invarijanta.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Najprije ćemo pokazati sljedeću tvrdnju:

$$\text{Ako je } X \simeq Y \text{ te } \mathrm{ind}\, X \leq n, \text{onda je } \mathrm{ind}\, Y \leq n. \tag{2.1}$$

Dokaz provodimo indukcijom po $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$.
Kako je $X \simeq Y$, to postoji $f : X \to Y$ homeomorfizam tih dvaju prostora.

1. Baza: Za $n = -1$ imamo da je $\operatorname{ind} X \leq -1$. No, općenito znamo da je $\operatorname{ind} X \geq -1$ stoga zaključujemo da je $\operatorname{ind} X = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$.
   Kako homeomorfizam f čuva kardinalitet, zaključujemo da je $Y = \emptyset$, iz čega slijedi tvrdnja.

2. Pretpostavka: Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi tvrdnja (2.1).

3. Korak: Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n+1$; pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X \leq n+1$. Cilj je pokazati da je $\operatorname{ind} Y \leq n+1$, tj. $Y \in I_{n+1}$.
   Neka je $y \in Y$ te U_y otvorena okolina od y u Y. Kako je $f : X \to Y$ homeomorfizam pa posebno i neprekidna bijekcija, znamo da postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$ te postoji $U_x \subseteq X$ otvoren takav da je $x \in U_x$ te $f(U_x) = U_y$. Naime, uzmimo da je $U_x = f^{-1}(U_y)$.
   Prema pretpostavci znamo da je $\operatorname{ind} X \leq n+1$, stoga za $x \in U_x$ postoji
   $$V_x \subseteq X \text{ otvoren, takav da je } x \in V_x \subseteq U_x \text{ te } \operatorname{ind}(\operatorname{Fr} V_x) \leq n. \tag{2.2}$$
   Kako je $V_x \subseteq U_x$, slijedi da je $f(V_x) \subseteq f(U_x) = U_y$. Također vrijedi da je $f(\operatorname{Fr} V_x) = \operatorname{Fr}(f(V_x))$, iz čega zaključujemo da su $\operatorname{Fr} V_x$ i $\operatorname{Fr}(f(V_x))$ homeomorfni preko restrikcije homeomorfizma f na $\operatorname{Fr} V_x$. Koristeći pretpostavku te (2.2) zaključujemo da je $\operatorname{ind} \operatorname{Fr}(f(V_x)) \leq n$, što zajedno sa činjenicom da je $f(V_x) \subseteq U_y$ otvorena okolina od y u Y daje traženi zaključak, tj. vrijedi $\operatorname{ind} Y \leq n+1$.

Pokažimo sada tvrdnju propozicije. Neka je $X \simeq Y$; cilj je pokazati jednakost njihovih malih induktivnih dimenzija. Dokaz provodimo indukcijom po $\operatorname{ind} X \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$.

1. Baza: Znamo da vrijedi $\operatorname{ind} X = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$. Kako su X i Y homeomorfni prostori, nužno slijedi $Y = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{ind} Y = -1$.

2. Pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Drugim riječima, ako su X i Y homeomorfni topološki prostori te ako je $\operatorname{ind} X = n$, tada je $\operatorname{ind} Y = n$.

3. Korak: Neka je $\operatorname{ind} X = n+1$. Tada je $\operatorname{ind} X \leq n+1$ i $\operatorname{ind} X \nleq n$. Po prethodnoj diskusiji, zaključujemo da je $\operatorname{ind} Y \leq n+1$, stoga još treba vidjeti da je $\operatorname{ind} Y \nleq n$.
   Kada bi vrijedilo da je $\operatorname{ind} Y \leq n$, tada bi zaključili da je $\operatorname{ind} X \leq n$, čime dolazimo do kontradikcije. Dakle, $\operatorname{ind} Y = n+1 = \operatorname{ind} X$, što je trebalo pokazati.

Naposlijetku ostaje vidjeti da propozicija vrijedi i u slučaju beskonačne dimenzije; pretpostavimo da je $X \simeq Y$ te $\operatorname{ind} X = \infty$. Drugim riječima, vrijedi da je
$$\operatorname{ind} X > n, \forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}.$$

Obratom po kontrapoziciji implikacije (2.1) zaključujemo da za homeomorfne prostore X i Y te $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ vrijedi:

$$\operatorname{ind} X > n \Rightarrow \operatorname{ind} Y > n,$$

iz čega direktno slijedi da je $\operatorname{ind} Y = \infty$. □

Znamo da je svaki potprostor regularnog topološkog prostora i sam regularan, stoga ima smisla proučavati odnos male induktivne dimenzije potprostora obzirom na malu induktivnu dimenziju cijelog prostora; štoviše, odnos spomenutih dimenzija je u skladu s intuitivnim očekivanjem, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 2.1.6. *Neka je X regularan topološki prostor. Za svaki M potprostor od X vrijedi:*

$$\operatorname{ind} M \leq \operatorname{ind} X.$$

Dokaz. Tvrdnja je očita za $\operatorname{ind} X = \infty$, stoga pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X < \infty$. Dokaz provodimo indukcijom po $\operatorname{ind} X \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$.

1. Baza: Znamo da je $\operatorname{ind} X = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset$. U ovom slučaju, jedini potprostor je $M = \emptyset$, stoga vrijedi
$$-1 = \operatorname{ind} M \leq \operatorname{ind} X = -1.$$

2. Pretpostavka: Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ te pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $\operatorname{ind} X \leq n - 1$.

3. Korak: Neka je $\operatorname{ind} X = n$ te $M \neq \emptyset$ potprostor od X. Uzmimo $x \in M$ i V otvorenu okolinu od x u M. Tada postoji

$$V_1 \subseteq X \text{ otvoren, takav da je } V = V_1 \cap M.$$

Kako je $\operatorname{ind} X \leq n$ te $x \in M \subseteq X$, za otvorenu okolinu V_1 od x u X znamo da postoji

$$U_1 \subseteq X \text{ otvoren, takav da } x \in U_1 \subseteq V_1 \text{ te } \operatorname{ind} \operatorname{Fr}_X U_1 \leq n - 1.$$

Sada imamo da je $M \cap U_1 := U$ otvoren u M te je $x \in U \subseteq V$. Nadalje, računamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fr}_M U &= \operatorname{Cl}_M U \cap \operatorname{Cl}_M(M \setminus U) \\
&= (\operatorname{Cl}_X U \cap M) \cap (\operatorname{Cl}_X(M \setminus U) \cap M) \\
&= \operatorname{Cl}_X U \cap \operatorname{Cl}_X(M \setminus U) \cap M.
\end{aligned}$$

Jasno je da vrijedi

$$M \setminus U = M \setminus (M \cap U_1) = M \cap (M \cap U_1)^C = M \setminus U_1,$$

stoga je
$$\mathrm{Fr}_M U = \mathrm{Cl}_X(M \cap U_1) \cap \mathrm{Cl}_X(M \setminus U_1) \cap M.$$
Znamo da je
$$\mathrm{Fr}_X U_1 = \mathrm{Cl}_X U_1 \cap \mathrm{Cl}_X(X \setminus U_1) \supseteq \mathrm{Cl}_X(M \cap U_1) \cap \mathrm{Cl}_X(M \setminus U_1),$$
iz čega zaključujemo
$$\mathrm{Fr}_M U \subseteq \mathrm{Fr}_X U_1 \cap M \subseteq \mathrm{Fr}_X U_1.$$
Koristeći pretpostavku, slijedi da je
$$\operatorname{ind} \mathrm{Fr}_M U \leq \operatorname{ind} \mathrm{Fr}_X U_1 \leq n-1 \Rightarrow \operatorname{ind} M \leq n = \operatorname{ind} X.$$

□

Definicija 2.1.7. *Neka je X topološki prostor te A i B disjunktni podskupovi od X. Kažemo da je L particija između A i B ako postoje otvoreni skupovi $U, W \subseteq X$ za koje vrijede uvjeti:*
$$A \subseteq U, B \subseteq W, U \cap W = \emptyset, X \setminus L = U \cup W.$$

Napomena 2.1.8. *Očito je L zatvoren skup u X. Također, za $x \in X$, identificiranjem točke x i jednočlanog skupa $\{x\}$, možemo smatrati da je s definicijom* 2.1.7 *dobro definirana i particija između dvije točke te particija između točke i skupa.*

Propozicija 2.1.9. *Neka je $X \neq \emptyset$ regularan topološki prostor te $n \in \mathbb{N}_0$. Tada je* $\operatorname{ind} X \leq n$ *ako i samo ako za svaki $x \in X$ te svaki $B \subseteq X$ zatvoren takav da $x \notin B$, postoji particija L između x i B za koju je* $\operatorname{ind} L \leq n-1$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X \leq n$. Uzmimo proizvoljni $x \in X$ te $B \subseteq X$ zatvoren takav da $x \notin B$. Tada vrijedi da je $x \in X \setminus B$, pri čemu je skup $X \setminus B$ otvoren. Kako je X regularan topološki prostor (pa posebno i T_3 prostor), po karakterizaciji 1.0.51 imamo da za otvorenu okolinu $X \setminus B$ od x postoji $V \subseteq X$ otvoren, takav da je
$$x \in V \subseteq \mathrm{Cl}\, V \subseteq X \setminus B. \tag{2.3}$$
Nadalje, prema pretpostavci znamo da je $\operatorname{ind} X \leq n$, stoga za $V \subseteq X$ otvorenu okolinu od x postoji $U \subseteq X$ otvoren takav da
$$x \in U \subseteq V \text{ te } \operatorname{ind} \mathrm{Fr}\, U \leq n-1.$$
Definiramo $L := \mathrm{Fr}\, U$. Cilj je pokazati da je L tražena particija između x i B. Jasno je da je $x \in U$, tj. $\{x\} \subseteq U$. Nadalje, iz (2.3) imamo da je
$$\mathrm{Cl}\, V \subseteq X \setminus B \Rightarrow B \subseteq X \setminus \mathrm{Cl}\, V \subseteq X \setminus \mathrm{Cl}\, U,$$

pri čemu smo posljednju inkluziju dobili iz sljedećeg:

$$U \subseteq V \Rightarrow \operatorname{Cl} U \subseteq \operatorname{Cl} V \Rightarrow X \setminus \operatorname{Cl} U \supseteq X \setminus \operatorname{Cl} V.$$

Dakle, imamo da je $x \in U$, $B \subseteq X \setminus \operatorname{Cl} U$ te $U \cap (X \setminus \operatorname{Cl} U) = \emptyset$.
Ostaje pokazati da je $X \setminus L = U \cup (X \setminus \operatorname{Cl} U)$. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} X \setminus L &= X \setminus \operatorname{Fr} U \\ &= X \setminus (\operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl}(X \setminus U)) = X \cap (\operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl}(X \setminus U))^C \\ &= X \cap ((\operatorname{Cl} U)^C \cup (\operatorname{Cl}(X \setminus U))^C) = X \setminus \operatorname{Cl} U \cup (\operatorname{Cl}(X \setminus U))^C. \end{aligned}$$

Kako je U otvoren skup, posljedično je $X \setminus U$ zatvoren, stoga vrijedi

$$\operatorname{Cl}(X \setminus U) = X \setminus U,$$

iz čega dobivamo da je

$$X \setminus L = X \setminus \operatorname{Cl} U \cup (X \setminus U)^C = X \setminus \operatorname{Cl} U \cup U,$$

čime je pokazana tražena tvrdnja.
Obratno, pretpostavimo da za $X \neq \emptyset$ vrijedi: za svaki $x \in X$ te za svaki $B \subseteq X$ zatvoren takav da $x \notin B$, postoji particija L između x i B za koju vrijedi $\operatorname{ind} L \leq n - 1$.
Želimo pokazati da je $\operatorname{ind} X \leq n$. U tu svrhu, uzmimo proizvoljni $x \in X$ te $V \subseteq X$ otvorenu okolinu od x. Tada je $X \setminus V$ zatvoren te $x \notin X \setminus V$. Prema pretpostavci, postoji particija L između x i $X \setminus V$ takva da je $\operatorname{ind} L \leq n - 1$, tj. postoje otvoreni skupovi

$$U, W \subseteq X \text{ takvi da je } x \in U, X \setminus V \subseteq W, U \cap W = \emptyset, X \setminus L = U \cup W. \tag{2.4}$$

Iz (2.4) dobivamo da je

$$x \in U \subseteq X \setminus W \subseteq V.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \operatorname{Fr} U &= \operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl}(X \setminus U) \\ &= \operatorname{Cl} U \cap (X \setminus U) \\ &\subseteq (X \setminus W) \cap (X \setminus U) = X \setminus (U \cup W) = L. \end{aligned}$$

Koristeći teorem 2.1.6 zaključujemo sljedeće:

$$\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq \operatorname{ind} L \leq n - 1 \Rightarrow \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n - 1 \Rightarrow \operatorname{ind} X \leq n.$$

□

Korolar 2.1.10. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Za $X \neq \emptyset$ regularan topološki prostor vrijedi da je $\operatorname{ind} X \leq n$ ako i samo ako X ima bazu $\boldsymbol{B}$ takvu da je*

$$\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1, \ \textit{za sve } U \in \boldsymbol{B}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X \leq n$. Definiramo

$$\mathbf{B} = \{U \subseteq X \text{ otvoren } : \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1\}.$$

Da bismo pokazali da je $\mathbf{B}$ zaista baza, koristit ćemo definiciju 1.0.20. Neka je $x \in X$ te $V \subseteq X$ otvorena okolina od x; prema pretpostavci, znamo da postoji $U \subseteq X$ otvoren takav da je

$$x \in U \subseteq V \text{ te } \operatorname{Fr} U \leq n-1. \tag{2.5}$$

Iz (2.5) direktno slijedi da je $U \in \mathbf{B}$, što je trebalo pokazati.
Obratan smjer slijedi direktno iz svojstva baze $\mathbf{B}$. □

Prethodni korolar posebno je zanimljiv u slučaju kada je X separabilan metrički prostor; prije iskaza tvrdnje u tom slučaju, navodimo općeniti rezultat za topološke prostore koji zadovoljavaju drugi aksiom prebrojivosti (stoga posebno vrijedi i u slučaju separabilnog metričkog prostora).

Lema 2.1.11. *Ako topološki prostor X ima prebrojivu bazu, tada svaka baza $\boldsymbol{B}$ od X sadrži prebrojivu familiju $\boldsymbol{B_0}$ koja je baza od X.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{D} = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva baza od X te neka je $\mathbf{B}$ neka druga, proizvoljno odabrana, baza od X.
Za svaki par $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo skup

$$B_{i,j} = \left\{U \in \mathbf{B} : V_i \subseteq U \subseteq V_j\right\}.$$

Za svaki takav $B_{i,j}$ (koji nije prazan) odaberemo po jedan element i na taj način definiramo skup $\mathbf{B_0}$; skup $\mathbf{B_0}$ je očito prebrojiv te vrijedi $\mathbf{B_0} \subseteq \mathbf{B}$. Ostaje pokazati da je $\mathbf{B_0}$ baza od X.
Neka je $x \in W$, $W \subseteq X$ otvoren. Kako je $\mathbf{D}$ baza od X, postoji

$$j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x \in V_j \subseteq W.$$

Nadalje, kako je $\mathbf{B}$ također baza od X, postoji $B \in \mathbf{B}$ takav da je

$$x \in B \subseteq V_j.$$

Naposlijetku, za nađeni skup B, imamo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in V_i \subseteq B \subseteq V_j. \tag{2.6}$$

Iz (2.6) direktno slijedi da je za dobivene $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, skup $B_{i,j}$ neprazan, stoga postoji

$$U \in B_{i,j} \text{ takav da je } U \in \mathbf{B_0}.$$

Dakle, imamo da je $x \in V_i \subseteq U \subseteq V_j \subseteq W$, iz čega, pozivanjem na definiciju 1.0.20, zaključujemo da je $\mathbf{B_0}$ baza od X. □

Teorem 2.1.12. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Za separabilan metrički prostor $X \neq \emptyset$ vrijedi da je $\operatorname{ind} X \leq n$ ako i samo ako X ima prebrojivu bazu $\boldsymbol{B}$ takvu da je*

$$\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n - 1, \text{ za sve } U \in \boldsymbol{B}.$$

Dokaz. Tvrdnja teorema direktno slijedi iz korolara 2.1.10 te prethodne leme. □

2.2 Prostori dimenzije 0

Pozivajući se na dosad dobivene rezultate, u nastavku pobliže izučavamo svojstva prostora za koje je mala induktivna dimenzija jednaka nuli.

Propozicija 2.2.1. *Neka $X \neq \emptyset$ regularan topološki prostor. Tada je $\operatorname{ind} X = 0$ ako i samo ako za svaki $x \in X$ te svaku $V \subseteq X$ otvorenu okolinu od x, postoji $U \subseteq X$ otvoren i zatvoren takav da je $x \in U \subseteq V$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X = 0$ te neka $x \in X$ te $V \subseteq X$ otvorena okolina od x. Tada postoji

$$U \subseteq X \text{ otvoren, takav da je } x \in U \subseteq V \text{ te } \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq 0 - 1.$$

Zaključujemo da je $\operatorname{Fr} U = \emptyset$, iz čega, korištenjem leme 1.0.36, slijedi da je skup U otvoren i zatvoren u X. Obratno, uzmimo $x \in X$ te $V \subseteq X$ otvorenu okolinu od x. Tada postoji $U \subseteq X$ otvoren i zatvoren takav da je

$$x \in U \subseteq V.$$

Prema lemi 1.0.36 slijedi da je

$$\operatorname{Fr} U = \emptyset \Rightarrow \operatorname{ind} \operatorname{Fr} U = -1 \Rightarrow \operatorname{ind} X = 0,$$

što je trebalo pokazati. □

Propozicija 2.2.2. *Ako je X regularan topološki prostor takav da je* $\operatorname{ind} X = 0$*, tada je* $\operatorname{ind} M = 0$*, za svaki $M \neq \emptyset$ potprostor od X.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz teorema 2.1.6. □

Propozicija 2.2.3. *Za $X \neq \emptyset$ separabilan metrički prostor vrijedi da je* $\operatorname{ind} X = 0$ *ako i samo ako X ima prebrojivu bazu sačinjenu od otvorenih i zatvorenih skupova.*

Dokaz. Tvrdnja direktno slijedi iz teorema 2.1.12 i leme 1.0.36. □

U nastavku navodimo primjere prostora čija je mala induktivna dimenzija jednaka nuli.

Primjer 2.2.1. *Neka je skup X prebrojiv skup te (X, d) metrički prostor. Tada je* $\operatorname{ind} X = 0$*. Da bismo se u to uvjerili, uzmimo proizvoljni $x \in X$ te $V \subseteq X$ otvorenu okolinu od x. Tada znamo da postoji*

$$r > 0 \text{ takav da je } K(x, r) \subseteq V.$$

Također, postoji $t \in \langle 0, r\rangle$ takav da je $d(x, y) \neq t$, $\forall y \in X$. Naime, neka je za odabrani $x \in X$ definirana funkcija f na sljedeći način:

$$f : X \to \mathbb{R}, f(y) = d(x, y).$$

Kada ne bi postojao $t \in \langle 0, r\rangle$ takav da je $d(x, y) \neq t$, za svaki $y \in X$, vrijedilo bi da je

$$\langle 0, r\rangle \subseteq Imf,$$

što nije moguće jer je X prebrojiv skup, stoga je i Imf prebrojiv.
Nadalje, definiramo $U := K(x, t)$. Sada je

$$x \in U \subseteq K(x, r) \subseteq V,$$

te je

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fr} U &= \operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl}(X \setminus U) \\
&\subseteq \operatorname{Cl}(K(x, t)) \cap (X \setminus U) \\
&\subseteq \{y \in X : d(x, y) \leq t\} \cap \{y \in X : d(x, y) \geq t\} \\
&= \{y \in X : d(x, y) = t\} = \emptyset \\
&\Rightarrow \operatorname{Fr} U = \emptyset
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je skup U otvoren i zatvoren u X, stoga tražena tvrdnja slijedi direktnom primjenom propozicije 2.2.1.

Primjer 2.2.2. *Koristeći prethodni primjer, vidimo da za skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi* $\operatorname{ind} \mathbb{Q} = 0$*, pri čemu na $\mathbb{Q}$ podrazumijevamo Euklidsku metriku.*

Primjer 2.2.3. *Promotrimo sada skup iracionalnih brojeva* $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$*; znamo da je*

$$\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}} = \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

baza Euklidske topologije na $\mathbb{R}$*, stoga je*

$$\boldsymbol{B}_{\mathbb{I}} = \{\langle a, b\rangle \cap \mathbb{I} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

baza Euklidske topologije na $\mathbb{I}$*. Posebno, svi skupovi oblika* $\langle a, b\rangle \cap \mathbb{I}$*, za* $a, b \in \mathbb{Q}$*, otvoreni su u* $\mathbb{I}$*. Nadalje, kako su* $a, b \in \mathbb{Q}$*, vrijedi da je*

$$\langle a, b\rangle \cap \mathbb{I} = [a, b] \cap \mathbb{I}.$$

Znamo da su, za $a, b \in \mathbb{Q}$*, skupovi* $[a, b]$ *zatvoreni u* $\mathbb{R}$*, stoga su skupovi*

$$[a, b] \cap \mathbb{I}$$

zatvoreni u $\mathbb{I}$*. Zaključujemo da je* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{I}}$ *sačinjena od otvorenih i zatvorenih skupova, stoga prema propoziciji* 2.2.1 *slijedi da je* $\operatorname{ind} \mathbb{I} = 0$*.*

2.3 Teoremi separacije za prostore dimenzije 0

Teorem 2.3.1 (Prvi teorem separacije)**.** *Ako je* X *separabilan metrički prostor takav da je* $\operatorname{ind} X = 0$*, tada za svaka dva disjunktna zatvorena podskupa* A *i* B *od* X *vrijedi da je* $L = \emptyset$ *particija između* A *i* B*. Drugim riječima, postoji* $U \subseteq X$ *otvoren i zatvoren takav da je* $A \subseteq U$ *te* $B \subseteq X \setminus U$*.*

Prije dokaza gornjeg teorema navodimo rezultat koji ćemo koristiti u daljnjim razmatranjima.

Lema 2.3.2. *Neka je* X *separabilan metrički prostor. Tada za svaki otvoreni pokrivač postoji prebrojiv potpokrivač.*

Dokaz. Označimo sa $\mathbf{V} = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$ prebrojivu bazu od X te pretpostavimo da su svi elementi baze neprazni skupovi. Nadalje, neka je

$$\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in A\}$$

proizvoljan otvoreni pokrivač od X. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\mathcal{W}_n = \{W_\alpha : V_n \subseteq W_\alpha\}.$$

Neka je $C := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{W}_n \neq \{\emptyset\}\}$. Sada definiramo familiju

$$\mathcal{U} = \{U_n : n \in C\}$$

na način da za svaki $n \in C$ uzmemo po jedan element iz $\mathcal{W}_n$ te ga označimo s U_n. Dakle, za svaki $n \in C$ vrijedi da je $U_n = W_\alpha$, za neki $\alpha \in A$. Jasno je da je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ te da je familija $\mathcal{U}$ prebrojiva. Također vrijedi da je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} W_\alpha = X,$$

odnosno

$$\bigcup U_n \subseteq X.$$

Ostaje pokazati da vrijedi i obratna inkluzija tj. da je $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Za $x \in X$ znamo da postoji $W_\alpha \in \mathcal{W}$ takav da je $x \in W_\alpha$ te postoji $n \in C$ takav da je $x \in V_n \subseteq W_\alpha$. Prema gornjoj konstrukciji slijedi da je $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Zaključujemo da je $X = \bigcup U_n$, čime je tvrdnja dokazana. □

Dokažimo sada teorem 2.3.1.

Dokaz. Neka su A i B dva disjunktna zatvorena podskupa od X. Najprije uočimo da vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}&\text{za svaki } x \in X, \text{ postoji } W_x \subseteq X \text{ otvoren i zatvoren}\\ &\text{takav da je } A \cap W_x = \emptyset \text{ ili } B \cap W_x = \emptyset.\end{aligned}$$

Naime, za $x \in X$ vrijedi da $x \notin A$ ili $x \notin B$.
Ako $x \notin A$, tada je $x \in X \setminus A$, pri čemu je $X \setminus A$ otvoren skup, stoga prema propoziciji 2.2.1 slijedi da postoji $W_x \subseteq X$ otvoren i zatvoren takav da je

$$x \in W_x \subseteq X \setminus A \Rightarrow A \cap W_x = \emptyset.$$

Analogno, u slučaju kada $x \notin B$ zaključujemo da postoji $W_x \subseteq X$ otvoren i zatvoren takav da je

$$x \in W_x \subseteq X \setminus B \Rightarrow B \cap W_x = \emptyset.$$

Familija $\{W_x : x \in X\}$ čini otvoreni pokrivač od X, stoga po prethodnoj lemi postoji prebrojivi potpokrivač

$$\{W_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}.$$

Nadalje, za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$U_i = W_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} W_{x_j}.$$

Vrijedi da je

$$\begin{aligned} U_i &= W_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} W_{x_j} \\ &= W_{x_i} \bigcap \left(\bigcap_{j<i} X \setminus W_{x_j} \right). \end{aligned}$$

Znamo da su skupovi W_{x_i} i $X \setminus W_{x_i}$ otvoreni za sve $i \in \mathbb{N}$, stoga su prema prethodnom računu i skupovi U_i, $i \in \mathbb{N}$ otvoreni kao konačni presjeci otvorenih skupova. Također je jasno da za sve $i \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $U_i \subseteq W_{x_i}$ te da familija

$$\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$$

čini pokrivač od X. Posljedično, za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi da je

$$A \cap U_i = \emptyset \text{ ili } B \cap U_i = \emptyset.$$

Definiramo

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \bigcup \{U_i : A \cap U_i \neq \emptyset\}, \\ \mathcal{W} &= \bigcup \{U_i : A \cap U_i = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Jasno je da su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{W}$ otvoreni skupovi. Nadalje, za $x \in A$ znamo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in U_i$, stoga je

$$x \in A \cap U_i \Rightarrow A \cap U_i \neq \emptyset \Rightarrow U_i \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow x \in \mathcal{U}.$$

Drugim riječima, vrijedi da je $A \subseteq \mathcal{U}$.
Slično se pokaže da je $B \subseteq \mathcal{W}$. Naime, za $x \in B$ znamo da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in U_j$ stoga je

$$B \cap U_j \neq \emptyset \Rightarrow A \cap U_j = \emptyset \Rightarrow x \in \mathcal{W}.$$

Također vrijedi da su skupovi U_i u parovima disjunktni, tj. za $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, vrijedi da je $U_i \cap U_j = \emptyset$. Pokažimo tu tvrdnju tako da pretpostavimo suprotno; kada bi za neke $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$, postojao $x \in U_i \cap U_j$, tada bi vrijedilo

$$\begin{aligned} x \in U_i &= W_{x_i} \setminus \bigcup_{k<i} W_{x_k}, \\ x \in U_j &= W_{x_j} \setminus \bigcup_{l<j} W_{x_l}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $j < i$, pa iz (2.7) zaključujemo da je $x \in W_{x_j}$ i $x \notin W_{x_j}$, što vodi na kontradikciju. Nadalje, vrijedi da je $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \emptyset$; kada bi postojao $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ tada bi postojali $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\begin{aligned} &x \in U_i, U_i \cap A = \emptyset \\ &x \in U_j, U_j \cap A \neq \emptyset. \end{aligned} \tag{2.8}$$

No tada bi vrijedilo da je $x \in U_i \cap U_j$, tj. $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, što je prema gornjoj diskusiji moguće ako i samo ako je $i = j$, čime dolazimo do kontradikcije s (2.8). Naposlijetku ostaje vidjeti da je $\mathcal{U} \cup \mathcal{W} = X$. Jasno je da vrijedi $\mathcal{U} \cup \mathcal{W} \subseteq X$, stoga ostaje pokazati obratnu inkluziju. Kako je $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ pokrivač od X, to za proizvoljni $x \in X$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in U_i$. Prema definiciji skupova $\mathcal{U}$ i $\mathcal{W}$ slijedi da je $U_i \subseteq \mathcal{U}$ ili $U_i \subseteq \mathcal{W}$, iz čega zaključujemo da je

$$x \in \mathcal{U} \text{ ili } x \in \mathcal{W} \Rightarrow x \in \mathcal{U} \cup \mathcal{W}.$$

Kako je $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \emptyset$ te $\mathcal{U} \cup \mathcal{W} = X$, zaključujemo da je $\mathcal{W} = X \setminus \mathcal{U}$, stoga je $\mathcal{U}$ traženi otvoreni i zatvoreni skup za kojeg vrijedi da je

$$A \subseteq \mathcal{U} \text{ te } B \subseteq \mathcal{W} = X \setminus \mathcal{U},$$

čime je teorem dokazan. □

Idući cilj je dokazati drugi teorem separacije za prostore dimenzije 0; u tu svrhu uvodimo pojam separiranih skupova te dokazujemo dvije leme iz kojih će onda lako slijediti dokaz drugog teorema separacije.

Definicija 2.3.3. *Neka je X topološki prostor. Za skupove $A, B \subseteq X$ kažemo da su separirani ako vrijedi*

$$A \cap \operatorname{Cl} B = \operatorname{Cl} A \cap B = \emptyset.$$

Propozicija 2.3.1. *Skupovi $A, B \subseteq X$ su separirani ako i samo ako su disjunktni te otvoreni i zatvoreni u $A \cup B$.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da su A i B separirani. Tada iz $A \cap \operatorname{Cl} B = \operatorname{Cl} A \cap B = \emptyset$ direktno slijedi da je $A \cap B = \emptyset$, tj. A i B su disjunktni skupovi. Nadalje, vrijedi da je

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Cl} A \cap (A \cup B), \\ B &= \operatorname{Cl} B \cap (A \cup B), \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da su A i B zatvoreni u $A \cup B$. Također je

$$\begin{aligned} A &= (A \cup B) \setminus B, \\ B &= (A \cup B) \setminus A, \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da su A i B otvoreni u $A \cup B$.
Obratno, pretpostavimo da su A i B otvoreni i zatvoreni u $A \cup B$ te disjunktni. Kako je B zatvoren u $A \cup B$, postoji $B' \subseteq X$ zatvoren, takav da je

$$B = B' \cap (A \cup B).$$

Sada je $B' \cap A = \emptyset$, jer u suprotnom bi vrijedilo $B \cap A \neq \emptyset$, što vodi na kontradikciju s pretpostavkom. Nadalje, kako je $B \subseteq B'$ te B' zatvoren u X, slijedi da je

$$\operatorname{Cl} B \subseteq B',$$

iz čega zaključujemo da je $\operatorname{Cl} B \cap A = \emptyset$. Analogno se pokaže da je $\operatorname{Cl} A \cap B = \emptyset$, stoga vrijedi da su A i B separirani. □

Lema 2.3.4. *Za svaki par A, B separiranih podskupova metričkog prostora (X, d) postoje $U, W \subseteq X$ otvoreni, takvi da je*

$$A \subseteq U, B \subseteq W \text{ te } U \cap W = \emptyset.$$

Dokaz. Odaberimo A, B separirane skupove u X. Tada znamo da je

$$A \cap \operatorname{Cl} B = \operatorname{Cl} A \cap B = \emptyset. \tag{2.9}$$

Dodatno pretpostavimo da su skupovi A i B neprazni; kada bi vrijedilo da je $A = \emptyset$, uzimanjem $U = \emptyset$ te $W = X$, tvrdnja bi trivijalno vrijedila (analogan zaključak vrijedi i u slučaju $B = \emptyset$). Definiramo funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$ sa

$$f(x) = d(x, A) \text{ i } g(x) = d(x, B).$$

Prema lemi 1.0.7 znamo da su funkcije f i g neprekidne na X. Posljedično, skupovi

$$\begin{aligned} U &:= \{x \in X : (f - g)(x) < 0\} = (f - g)^{-1}(\langle -\infty, 0\rangle), \\ W &:= \{x \in X : (f - g)(x) > 0\} = (f - g)^{-1}(\langle 0, \infty\rangle) \end{aligned}$$

su otvoreni u X. Također vrijedi da je $U \cap W = \emptyset$. Nadalje, uzmimo proizvoljan $x \in A$. Tada iz (2.9) slijedi da $x \notin \operatorname{Cl} B$, stoga vrijedi da je

$$g(x) > 0, f(x) = 0 \Rightarrow (f - g)(x) < 0 \Rightarrow x \in U.$$

Zaključujemo da je $A \subseteq U$. Analogno se pokaže da je $B \subseteq W$, čime je lema dokazana. □

Lema 2.3.5. *Neka je M potprostor metričkog prostora X te neka su A i B disjunktni i zatvoreni podskupovi od X. Nadalje, neka su V_1, V_2 otvoreni podskupovi od X takvi da vrijedi*

$$A \subseteq V_1, B \subseteq V_2 \text{ te } \mathrm{Cl}\, V_1 \cap \mathrm{Cl}\, V_2 = \emptyset.$$

Tada za svaku particiju L' u M između $M \cap \mathrm{Cl}\, V_1$ i $M \cap \mathrm{Cl}\, V_2$ postoji particija L u X između A i B takva da je

$$M \cap L \subseteq L'.$$

Posebno, ako je M zatvoren potprostor od X te A i B disjunktni i zatvoreni u X, tada za svaku particiju L' u M između $M \cap A$ i $M \cap B$ postoji particija L u X između A i B takva da je

$$M \cap L \subseteq L'.$$

Dokaz. Neka je L' particija u M između $M \cap \mathrm{Cl}\, V_1$ i $M \cap \mathrm{Cl}\, V_2$. Tada, po definiciji particije, znamo da postoje $U', W' \subseteq M$ otvoreni i disjunktni, takvi da vrijedi

$$M \cap \mathrm{Cl}\, V_1 \subseteq U', M \cap \mathrm{Cl}\, V_2 \subseteq W', M \setminus L' = U' \cup W'.$$

Uočimo da je

$$A \cap \mathrm{Cl}\, W' = \emptyset = B \cap \mathrm{Cl}\, U'.$$

Naime, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
&V_1 \cap W' = V_1 \cap M \cap W' \subseteq U' \cap W' = \emptyset \\
&\Rightarrow V_1 \cap W' = \emptyset \\
&\Rightarrow W' \subseteq M \cap V_1^C
\end{aligned}$$

Kako je V_1^C zatvoren u X te $W' \subseteq V_1^C$ zaključujemo da vrijedi

$$\mathrm{Cl}\, W' \subseteq V_1^C \Rightarrow V_1 \cap \mathrm{Cl}\, W' = \emptyset.$$

Kako je $A \subseteq V_1$, zaključujemo da je $A \cap \mathrm{Cl}\, W' = \emptyset$. Potpuno analogno pokaže se da vrijedi i druga tvrdnja tj. $B \cap \mathrm{Cl}\, U' = \emptyset$.
Daljnji cilj je pokazati da su skupovi U' i W' otvoreni (i zatvoreni) u $U' \cup W'$. Imamo da je

$$\begin{aligned}
U' &= U' \cap (U' \cup W') \\
W' &= W' \cap (U' \cup W'),
\end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da su U' i W' zatvoreni u $U' \cup W'$, čime su njihovi komplementi otvoreni. Dakle, vrijedi da su skupovi U' i W' otvoreni (i zatvoreni) u $U' \cup W'$.
Pozivajući se na propoziciju 2.3.1, zaključujemo da su U' i W' separirani skupovi u X, tj. vrijedi

$$U' \cap \mathrm{Cl}\, W' = W' \cap \mathrm{Cl}\, U' = \emptyset.$$

Koristeći separiranost skupova U' i W' te prethodna razmatranja, idući cilj je pokazati da su skupovi $A \cup U'$ i $B \cup W'$ separirani u X. Računamo:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cl}(A \cup U') \cap (B \cup W') \\
&= (\mathrm{Cl}\, A \cup \mathrm{Cl}\, U') \cap (B \cup W') \\
&= (\mathrm{Cl}\, A \cap B) \cup (\mathrm{Cl}\, U' \cap B) \cup (\mathrm{Cl}\, A \cap W') \cup (\mathrm{Cl}\, U' \cap W') \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Analogno se pokaže da je $(A \cup U') \cap \mathrm{Cl}(B \cup W') = \emptyset$. Prema lemi 2.3.4 zaključujemo da postoje $U, W \subseteq X$ otvoreni i disjunktni, takvi da je

$$A \cup U' \subseteq U, B \cup W' \subseteq W. \tag{2.10}$$

Definiramo $L = X \setminus (U \cup W)$. Cilj je pokazati da je L tražena particija između A i B.
Iz (2.10) direktno slijedi da je

$$A \subseteq U, B \subseteq W,$$

stoga ostaje pokazati da je $M \cap L \subseteq L'$. Računamo:

$$\begin{aligned}
M \cap L &= M \cap (X \setminus (U \cup W)) \\
&= M \setminus (U \cup W) \\
&= M \cap (U^C \cap W^C).
\end{aligned}$$

Kako je $U' \subseteq U$ te $W' \subseteq W$, tj. $U'^C \supseteq U^C$ te $W'^C \supseteq W^C$, vrijedi da je

$$\begin{aligned}
M \cap L &\subseteq M \cap (U'^C \cap W'^C) \\
&= M \setminus (U' \cup W') = L',
\end{aligned}$$

čime je prvi dio leme dokazan.
Dalje, pretpostavimo da je M zatvoren u X te da su $A, B \subseteq X$ zatvoreni i disjunktni. Neka je L' particija u M između $M \cap A$ i $M \cap B$. Tada postoje $U_1, V_1 \subseteq M$ otvoreni i disjunktni, takvi da je

$$\begin{aligned}
&A \cap M \subseteq U_1, B \cap M \subseteq W_1, \\
&M \setminus L' = U_1 \cup W_1.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Iz (2.11) zaključujemo da je

$$A \cap M \cap U_1^C = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X \setminus (M \setminus U_1)$$

te

$$B \cap M \cap W_1^C = \emptyset \Rightarrow B \subseteq X \setminus (M \setminus W_1).$$

Kako je skup $X \setminus (M \setminus U_1)$ otvoren te A zatvoren u X, prema lemi 1.0.53 znamo da postoji $V_1' \subseteq X$ otvoren, takav da je

$$A \subseteq V_1' \subseteq \mathrm{Cl}\, V_1' \subseteq X \setminus (M \setminus U_1).$$

Analogno zaključujemo da postoji $V_2' \subseteq X$ otvoren, takav da je

$$B \subseteq V_2' \subseteq \mathrm{Cl}\, V_2' \subseteq X \setminus (M \setminus W_1).$$

Nadalje, za $A, B \subseteq X$ disjunktne i zatvorene, prema lemi 1.0.55, znamo da postoje $V_1'', V_2'' \subseteq X$ otvoreni, takvi da vrijedi

$$A \subseteq V_1'', B \subseteq V_2'', \mathrm{Cl}\, V_1'' \cap \mathrm{Cl}\, V_2'' = \emptyset.$$

Sada definiramo

$$V_1 = V_1' \cap V_1''$$
$$V_2 = V_2' \cap V_2''.$$

Vrijedi da je

$$\mathrm{Cl}\, V_1 \cap \mathrm{Cl}\, V_2 \subseteq \mathrm{Cl}\, V_1'' \cap \mathrm{Cl}\, V_2'' = \emptyset.$$

Također, po konstukciji vidimo da je

$$M \cap \mathrm{Cl}\, V_1 \subseteq U_1, M \cap \mathrm{Cl}\, V_2 \subseteq W_1,$$

stoga je L' ujedno i particija između $M \cap \mathrm{Cl}\, V_1$ i $M \cap \mathrm{Cl}\, V_2$ u M. Po prvom dijelu dokaza zaključujemo da particija L u X s traženim svojstvom postoji, čime je lema dokazana. □

Teorem 2.3.6 (Drugi teorem separacije)**.** *Ako je X proizvoljan metrički prostor te Z separabilan potprostor od X takav da je* $\mathrm{ind}\, Z = 0$*, tada za svaka dva disjunktna zatvorena skupa $A, B \subseteq X$ postoji particija L između njih za koju vrijedi*

$$L \cap Z = \emptyset.$$

Dokaz. Neka su $A, B \subseteq X$ zatvoreni i disjunktni. Kao u prethodnom dokazu, znamo da postoje $V_1, V_2 \subseteq X$ otvoreni, takvi da vrijedi

$$A \subseteq V_1, B \subseteq V_2 \text{ te } \mathrm{Cl}\, V_1 \cap \mathrm{Cl}\, V_2 = \emptyset.$$

Nadalje, skupovi $Z \cap \mathrm{Cl}\, V_1$ i $Z \cap \mathrm{Cl}\, V_2$ su zatvoreni i disjunktni u Z stoga prema prvom teoremu separacije zaključujemo da je $L' = \emptyset$ particija između njih. Pozivajući se na lemu 2.3.5 zaključujemo da postoji particija L u X između A i B za koju vrijedi da je

$$Z \cap L \subseteq L' = \emptyset \Rightarrow Z \cap L = \emptyset.$$

□

Prethodni rezultati omogućuju nam da u proizvoljnom metričkom prostoru karakteriziramo potprostore dimenzije nula koristeći otvorene okoline u cijelom prostoru, o čemu govore sljedeće propozicije.

Propozicija 2.3.2. *Neka je X proizvoljan metrički prostor te M separabilan potprostor od X. Tada je* $\operatorname{ind} M = 0$ *ako i samo ako je $M \neq \emptyset$ te za svaki $x \in M$ (ekvivalentno, za svaki $x \in X$) te svaku $V \subseteq X$ otvorenu okolinu od x postoji $U \subseteq X$ otvoren, takav da je*

$$x \in U \subseteq V, M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset.$$

Prije dokaza propozicije 2.3.2 navodimo općeniti rezultat koji će nam koristiti u istom.

Lema 2.3.7. *Neka je X topološki prostor te M potprostor od X. Za proizvoljni $U \subseteq X$ otvoren vrijedi*

$$\operatorname{Fr}_M(M \cap U) \subseteq M \cap \operatorname{Fr} U.$$

Dokaz. Neka je $U \subseteq X$ otvoren te $x \in \operatorname{Fr}_M(M \cap U)$ proizvoljno odabran. Kako je

$$\operatorname{Fr}_M(M \cap U) \subseteq M,$$

zaključujemo da je $x \in M$. Nadalje, da bismo pokazali da je $x \in \operatorname{Fr} U$ koristit ćemo karakterizaciju ruba; znamo da je $x \in \operatorname{Fr} U$ ako i samo ako svaka otvorena okolina od x u X siječe U i $X \setminus U$.
Neka je W otvorena okolina od x u X. Tada je $W \cap M$ otvorena okolina od x u M. Nadalje, kako je $x \in \operatorname{Fr}_M(M \cap U)$, zaključujemo da je

$$(M \cap U) \cap (W \cap M) \neq \emptyset \tag{2.12}$$

te

$$(M \setminus (M \cap U)) \cap (W \cap M) = (M \setminus U) \cap (W \cap M) \neq \emptyset. \tag{2.13}$$

Iz (2.12) direktno slijedi da je $U \cap W \neq \emptyset$, dok iz (2.13) zaključujemo da postoji $z \in W \cap M$ takav da $z \notin U$ tj. $z \in X \setminus U$, iz čega slijedi da je

$$(X \setminus U) \cap W \neq \emptyset.$$

Zaključujemo da je $x \in \operatorname{Fr} U$, čime je tvrdnja dokazana. □

Dokažimo sada propoziciju 2.3.2.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\operatorname{ind} M = 0$. Neka je $x \in M$ te $V \subseteq X$ otvorena okolina od x. Tada su skupovi $\{x\}$ i $X \setminus V$ disjunktni i zatvoreni, stoga prema drugom teoremu separacije znamo da postoji particija L između njih takva da je $L \cap M = \emptyset$. Po definiciji particije znamo da postoje $U, W \subseteq X$ otvoreni i disjunktni, takvi da je $X \setminus L = U \cup W$ te

$$x \in U, X \setminus V \subseteq W.$$

Iz navedenih podskupovnosti direktno slijedi da je $x \in U \subseteq V$. Dalje, imamo da je

$$\begin{aligned} \emptyset &= L \cap M = (X \setminus (U \cup W)) \cap M \\ &= M \setminus (U \cup W) \Rightarrow M \subseteq U \cup W. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da $M \cap \operatorname{Fr} U \neq \emptyset$ tj. da postoji $y \in M \cap \operatorname{Fr} U$. Kako je $y \in M$, zbog disjunktnosti skupova U i W, slijedi da je

$$y \in U \text{ ili } y \in W.$$

Također, kako je otvoren skup disjunktan sa svojim rubom te $y \in \operatorname{Fr} U$, slijedi da $y \notin U$, stoga je nužno $y \in W$. Po karakterizaciji ruba (napomena 1.0.35) sada zaključujemo da je $U \cap W \neq \emptyset$, čime dolazimo do kontradikcije. Dakle, vrijedi da je $M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset$. Time je nužnost dokazana.

Da bismo dokazali dovoljnost, koristit ćemo propoziciju 2.2.1. Neka je $x \in M$ te V' otvorena okolina od x u M. Tada znamo da postoji $V \subseteq X$ otvoren, takav da je $V' = V \cap M$. Kako je V otvorena okolina od x u X, prema pretpostavci postoji $U \subseteq X$ otvoren, takav da je

$$x \in U \subseteq V, M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset.$$

Definiramo $U' = U \cap M$. Vrijedi sljedeće:

$$U' = U \cap M \subseteq V \cap M = V' \Rightarrow x \in U' \subseteq V'.$$

Također, po prethodnoj lemi znamo da je

$$\operatorname{Fr}_M(M \cap U) = \operatorname{Fr}_M U' \subseteq M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset,$$

iz čega slijedi da je U' otvoren i zatvoren u M. Pozivanjem na propoziciju 2.2.1 zaključujemo da je $\operatorname{ind} M = 0$. □

Propozicija 2.3.3. *Neka je X separabilan metrički prostor te M potprostor od X. Tada je* $\operatorname{ind} M = 0$ *ako i samo ako je $M \neq \emptyset$ te X ima prebrojivu bazu $\boldsymbol{B}$ takvu da je*

$$M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset, \forall U \in \boldsymbol{B}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\operatorname{ind} M = 0$. Kako je potprostor separabilnog metričkog prostora i sam separabilan, za M vrijedi ekvivalencija iz propozicije 2.3.2. Definiramo skup

$$\mathbf{B}_1 = \{U \subseteq X \text{ otvoren } : M \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset\}.$$

Direktno iz propozicije 2.3.2 te definicije 1.0.20 zaključujemo da je $\mathbf{B}_1$ baza od X. Sada, pozivajući se na lemu 2.1.11, zaključujemo da postoji prebrojiva familija $\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{B}_1$ koja je baza za X, čime je nužnost dokazana. Obratna implikacija slijedi direktno iz propozicije 2.3.2 te definicije 1.0.20, čime je tvrdnja dokazana. □

2.4 Teorem sume za prostore dimenzije 0

Teorem 2.4.1. *Ako se separabilan metrički prostor X može prikazati kao unija niza zatvorenih potprostora $F_1, F_2, \ldots$ takvih da je*

$$\operatorname{ind} F_i = 0, \forall i \in \mathbb{N},$$

tada je $\operatorname{ind} X = 0$.

Dokaz. Neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni i zatvoreni. Cilj je pokazati da je particija između A i B prazna, tj. da postoje $U, W \subseteq X$ otvoreni i disjunktni, takvi da je

$$A \subseteq U,\ B \subseteq W \text{ te } X = U \cup W. \tag{2.14}$$

Kao i u prethodnim razmatranjima, znamo da postoje $U_0, W_0 \subseteq X$ otvoreni takvi da je

$$A \subseteq U_0, B \subseteq W_0, \operatorname{Cl} U_0 \cap \operatorname{Cl} W_0 = \emptyset.$$

Indukcijom ćemo definirati nizove $U_0, U_1, \ldots, W_0, W_1, \ldots$ otvorenih skupova u X takvih da za $i = 0, 1, \ldots$ vrijede sljedeći uvjeti:

1. $\operatorname{Cl} U_i \cap \operatorname{Cl} W_i = \emptyset$ te za $i \geq 1$ vrijedi $U_{i-1} \subseteq U_i, W_{i-1} \subseteq W_i$

2. $F_i \subseteq U_i \cup W_i$, gdje je $F_0 = \emptyset$

Očito je da traženi uvjeti vrijede za definirane skupove U_0 i W_0. Dalje, pretpostavimo je $k \in \mathbb{N}$ te da smo definirali skupove U_i, W_i s traženim svojstvima za sve $i < k$.
Kako je $\operatorname{ind} F_k = 0$ te su skupovi $\operatorname{Cl} U_{k-1} \cap F_k$ i $\operatorname{Cl} W_{k-1} \cap F_k$ zatvoreni i disjunktni u F_k, po prvom teoremu separacije zaključujemo da postoji $V \subseteq F_k$ otvoren i zatvoren, takav da je

$$\begin{aligned} &\operatorname{Cl} U_{k-1} \cap F_k \subseteq V, \\ &\operatorname{Cl} W_{k-1} \cap F_k \subseteq F_k \setminus V. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Koristeći pretpostavku indukcije te (2.15) zaključujemo da vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}(\operatorname{Cl} U_{k-1} \cup V) \cap (\operatorname{Cl} W_{k-1} \cup F_k \setminus V) & \\ &= (\operatorname{Cl} U_{k-1} \cap \operatorname{Cl} W_{k-1}) \cup (\operatorname{Cl} U_{k-1} \cap F_k \setminus V) \\ &\quad \cup (V \cap \operatorname{Cl} W_{k-1}) \cup (V \cap F_k \setminus V) \\ &= (\operatorname{Cl} U_{k-1} \cap F_k \setminus V) \cup (V \cap \operatorname{Cl} W_{k-1}) \\ &= \emptyset.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Kako je F_k zatvoren u X te V zatvoren u F_k, slijedi da je V zatvoren u X. Također je $F_k \setminus V$ zatvoren u F_k, stoga je zatvoren i u X. Iz (2.16) zaključujemo da su skupovi $\operatorname{Cl} U_{k-1} \cup V$ i $\operatorname{Cl} W_{k-1} \cup F_k \setminus V$ zatvoreni i disjunktni u X, stoga postoje $U_k, W_k \subseteq X$ otvoreni, takvi da je

$$\operatorname{Cl} U_{k-1} \cup V \subseteq U_k,\ \operatorname{Cl} W_{k-1} \cup F_k \setminus V \subseteq W_k \text{ te } \operatorname{Cl} U_k \cap \operatorname{Cl} W_k = \emptyset.$$

Lako se vidi da skupovi U_k i W_k zadovoljavaju tražene uvjete za $i = k$, čime je kontrukcija nizova $U_0, U_1, \ldots, W_0, W_1, \ldots$ u X dovršena. Sada definiramo

$$U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i,$$
$$W = \bigcup_{i=0}^{\infty} W_i.$$

Jasno je da su skupovi U i W otvoreni u X te da vrijedi

$$A \subseteq U,\ B \subseteq W.$$

Dalje, pokažimo da je $U \cap W = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno; neka je $x \in U \cap W$ proizvoljan. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \in U_j \cap W_k$, za $j \leq k$. Kako je $U_j \subseteq U_k$, zaključujemo da je

$$x \in U_k \cap W_k \subseteq \operatorname{Cl} U_k \cap \operatorname{Cl} W_k = \emptyset,$$

čime dolazimo do kontradikcije. Time smo pokazali da su definirani skupovi disjunktni.
Konačno, imamo da je

$$X = \bigcup F_k \subseteq \bigcup (U_k \cup W_k) = U \cup W,$$

čime je pokazano da vrijedi (2.14).
Kako ovaj račun vrijedi za bilo koja dva disjunktna i zatvorena skupa u X, posebno vrijedi i za proizvoljni $x \in X$ te proizvoljnu otvorenu okolinu V od x u X. Tada su skupovi $\{x\}$ i $X \setminus V$ disjunktni i zatvoreni, stoga prema prethodnom računu i propoziciji 2.2.1 zaključujemo da je $\operatorname{ind} X = 0$. □

2.5 Teorem sume i teoremi separacije za prostore dimenzije veće od 0

U prethodnim poglavljima uglavnom smo se bavili prostorima dimenzije nula; sada ćemo pomoću dobivenih rezultat pokazati da slična svojstva vrijede i za prostore većih dimenzija.
Prvi cilj je iskazati i dokazati teorem sume, a za to će nam trebati rezultat kojeg navodimo u nastavku.

Lema 2.5.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Ako se separabilan metrički prostor X može prikazati kao unija dva potprostora Y i Z takvih da je* $\operatorname{ind} Y \leq n-1$ *te* $\operatorname{ind} Z \leq 0$*, tada je* $\operatorname{ind} X \leq n$.

Dokaz. Ako je $Z = \emptyset$ tvrdnja trivijalno vrijedi; naime, u tom slučaju je $Y = X$, stoga vrijedi $\operatorname{ind} Y \leq n-1 \leq n$.
Pretpostavimo da je $Z \neq \emptyset$ tj. da je $\operatorname{ind} Z = 0$. Neka je $x \in X$ te $V \subseteq X$ otvorena okolina od x. Po drugom teoremu separacije za dimenziju nula, znamo da postoji particija L između skupova $\{x\}$ i $X \setminus V$ takva da je

$$L \cap Z = \emptyset. \tag{2.17}$$

Drugim riječima, postoje otvoreni i disjunktni skupovi $U, W \subseteq X$ takvi da je

$$x \in U,\ X \setminus V \subseteq W$$

te

$$X \setminus L = U \cup W. \tag{2.18}$$

Iz (2.17) zaključujemo da je $Z \subseteq X \setminus L$. Također, lako se vidi da je $x \in U \subseteq V$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fr} U &= \operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl}(X \setminus U)\\
&= \operatorname{Cl} U \cap (X \setminus U)\\
&\subseteq (X \setminus W) \cap (X \setminus U)\\
&= X \setminus (U \cup W) = L \subseteq X \setminus Z \subseteq Y
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\operatorname{Fr} U \subseteq Y$, stoga vrijedi

$$\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq \operatorname{ind} Y \leq n-1 \Rightarrow \operatorname{ind} X \leq n.$$

□

Teorem 2.5.2 (Teorem sume)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Ako se separabilan metrički prostor X može prikazati kao unija niza zatvorenih potprostora $F_1, F_2, \ldots$ takvih da je*

$$\operatorname{ind} F_i \leq n,\ \forall i \in \mathbb{N},$$

tada je $\operatorname{ind} X \leq n$.

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom. Prema teoremu 2.4.1 znamo da tvrdnja vrijedi za $n = 0$, čime je zadovoljena baza indukcije. Dalje, pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Da bismo proveli korak indukcije, pretpostavimo da je $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$, gdje su F_i zatvoreni i disjunktni te $\operatorname{ind} F_i \leq n, \forall i \in \mathbb{N}$. Dodatno pretpostavimo da su prostori $F_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$. Naime, eventualne prazne potprostore iz početnog niza $F_1, F_2, \ldots$ možemo izbaciti te potom preostale neprazne potprostore reindeksirati. Kako je svaki potprostor separabilnog metričkog prostora i sam separabilan, na svaki prostor F_i možemo primijeniti teorem 2.1.12. Drugim riječima, za svaki $i = 1, 2, \ldots$ odaberemo prebrojivu bazu $\mathbf{B}_i$ prostora F_i tako da vrijedi

$$\operatorname{ind} \operatorname{Fr}_{F_i} U \leq n-1, \ \forall U \in \mathbf{B}_i. \tag{2.19}$$

Definiramo $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{U \in B_i} \operatorname{Fr}_{F_i} U \right)$. Iz (2.19), korištenjem indukcijske pretpostavke, zaključujemo da je $\operatorname{ind} Y \leq n-1$.
Daljnji cilj je definirati potprostor Z takav da je $\operatorname{ind} Z \leq 0$; u tu svrhu, najprije definiramo

$$Z_i = F_i \setminus Y, i \in \mathbb{N}.$$

Jasno je da za sve $U \in \mathbf{B}_i$ vrijedi

$$Z_i \cap \operatorname{Fr}_{F_i} U = \emptyset,$$

stoga pozivanjem na propoziciju 2.3.3 zaključujemo da je $\operatorname{ind} Z_i \leq 0$, za sve $i \in \mathbb{N}$.
Definiramo $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$. Jasno je da vrijedi

$$Z = X \setminus Y$$

te da je za svaki $i \in \mathbb{N}$ potprostor Z_i zatvoren u Z; naime, vrijedi da je

$$Z_i = F_i \setminus Y = F_i \cap Y^C = F_i \cap Z.$$

Po teoremu sume za dimenziju 0 zaključujemo da je $\operatorname{ind} Z \leq 0$. Time smo definirali dva potprostora od X koja zadovoljavaju pretpostavke prethodne leme, stoga zaključujemo da je $\operatorname{ind} X \leq n$. □

Posljednji cilj u ovom poglavlju je iskazati i dokazati teoreme separacije za prostore dimenzije veće od nula, za što će nam biti potrebni rezultati koje navodimo u nastavku.

Teorem 2.5.3 (Prvi teorem dekompozicije). *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Separabilan metrički prostor X može se prikazati kao unija dva potprostora Y i Z takvih da je* $\operatorname{ind} Y \leq n-1$ *te* $\operatorname{ind} Z \leq 0$ *ako i samo ako je* $\operatorname{ind} X \leq n$.

Dokaz. Uočimo da je jedan smjer ekvivalencije već dokazan u lemi 2.5.1, stoga ostaje pokazati obrat.
Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ te pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X \leq n$. Pozivajući se na teorem 2.1.12 zaključujemo da X ima prebrojivu bazu $\mathbf{B}$ takvu da je

$$\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1, \ \forall U \in \mathbf{B}.$$

Definiramo $Y = \bigcup \{\operatorname{Fr} U : U \in \mathbf{B}\}$. Korištenjem prethodno dokazanog teorema sume, direktno slijedi da je $\operatorname{ind} Y \leq n-1$. Nadalje, definiramo $Z = X \setminus Y = X \cap Y^C$. Po samoj konstrukciji jasno je da vrijedi

$$Z \cap \operatorname{Fr} U = \emptyset, \ \forall U \in \mathbf{B},$$

stoga pozivanjem na propoziciju 2.3.3 zaključujemo da je $\operatorname{ind} Z \leq 0$, čime je teorem dokazan. □

Teorem 2.5.4 (Drugi teorem dekompozicije)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Separabilan metrički prostor X može se prikazati kao unija $n+1$ potprostora $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$ takvih da je* $\operatorname{ind} Z_i \leq 0$ *ako i samo ako je* $\operatorname{ind} X \leq n$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz prvog teorema dekompozicije primjenjujući indukciju u konačno mnogo koraka. □

Teorem 2.5.5 (Prvi teorem separacije)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Ako je X separabilan metrički prostor takav da je* $\operatorname{ind} X \leq n$*, tada za svaka dva disjunktna i zatvorena podskupa A i B od X postoji particija L između njih za koju vrijedi*

$$\operatorname{ind} L \leq n-1.$$

Dokaz. Neka je X separabilan metrički prostor takav da je $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \in \mathbb{N}_0$ te neka su A i B disjunktni i zatvoreni u X.
Po prvom teoremu dekompozicije znamo da postoje potprostori Y i Z od X takvi da je

$$\operatorname{ind} Y \leq n-1, \ \operatorname{ind} Z \leq 0 \text{ te } X = Y \cup Z.$$

Pozivajući se na drugi teorem separacije za dimenziju nula, zaključujemo da postoji particija L između A i B takva da je $L \cap Z = \emptyset$. Time je

$$L \subseteq X \setminus Z \subseteq Y,$$

iz čega direktno slijedi tvrdnja teorema tj. vrijedi

$$\operatorname{ind} L \leq \operatorname{ind} Y \leq n-1.$$

□

Teorem 2.5.6 (Drugi teorem separacije)**.** *Neka je X proizvoljan metrički prostor te M separabilan potprostor od X takav da je* $\operatorname{ind} M \leq n$*, za neki* $n \in \mathbb{N}_0$*. Tada za svaka dva disjunktna i zatvorena podskupa A i B od X postoji particija L između njih za koju vrijedi*

$$\operatorname{ind}(M \cap L) \leq n - 1.$$

Dokaz. Neka su $A, B \subseteq X$ disjunktni i zatvoreni. Tada znamo da postoje $V_1, V_2 \subseteq X$ otvoreni, takvi da je

$$A \subseteq V_1,\ B \subseteq V_2 \text{ te } \operatorname{Cl} V_1 \cap \operatorname{Cl} V_2 = \emptyset.$$

Skupovi $M \cap \operatorname{Cl} V_1$ i $M \cap \operatorname{Cl} V_2$ su zatvoreni i disjunktni u M, stoga prema prvom teoremu separacije zaključujemo da postoji particija L' u M između $M \cap \operatorname{Cl} V_1$ i $M \cap \operatorname{Cl} V_2$ za koju vrijedi

$$\operatorname{ind} L' \leq n - 1.$$

Pozivajući se na prvi dio leme 2.3.5 zaključujemo da postoji particija L u X između A i B za koju je

$$M \cap L \subseteq L',$$

stoga vrijedi

$$\operatorname{ind}(M \cap L) \leq \operatorname{ind} L' \leq n - 1 \Rightarrow \operatorname{ind}(M \cap L) \leq n - 1.$$

□

Poglavlje 3

Velika induktivna dimenzija

U prethodnom poglavlju promatrali smo prvi teorem separacije koji je dao vezu između male induktivne dimenzije prostora i dva, proizvoljno odabrana, zatvorena i disjunktna njegova podskupa. Upravo nas taj teorem navodi na modifikaciju tj. poopćenje male induktivne dimenzije na način da proizvoljnu točku x iz definicije male induktivne dimenzije zamijenimo proizvoljnim zatvorenim skupom A. Na taj način, za normalan topološki prostor X, definirat ćemo veliku induktivnu dimenziju (u oznaci $\operatorname{Ind} X$).
Spomenimo da je ideju velike induktivne dimenzije uveo matematičar Brouwer, dok je formalnu definiciju (kakvu u nastavku navodimo) dao Čech 1931.godine.

3.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 3.1.1. *Induktivno definiramo niz klasa normalnih topoloških prostora* $(J_n)_n$, $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$*, na sljedeći način:*

1. $J_{-1} = \{\emptyset\}$
2. *Pretpostavimo da smo za neki* $n \in \mathbb{N}_0$ *definirali* J_{n-1}
3. *Definiramo* J_n *na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} X \in J_n \Leftrightarrow & (\forall A \subseteq X \textit{ zatvoren })(\forall V \subseteq X \textit{ otvorenu okolinu od } A) \\ & (\exists U \subseteq X \textit{ otvoren}) \textit{ t.d. } A \subseteq U \subseteq V,\ \operatorname{Fr} U \in J_{n-1}. \end{aligned}$$

Kao i za malu induktivnu dimenziju, indukcijom se lako pokaže da je

$$J_n \subseteq J_{n+1} \text{ za sve } n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}.$$

Definicija 3.1.2. *Za X normalan topološki prostor definiramo veliku induktivnu dimenziju*

$$\operatorname{Ind} X = \min \{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\} : X \in J_n\}.$$

Ako za X ne postoji $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ *takav da je* $X \in J_n$, *tada definiramo* $\operatorname{Ind} X = \infty$.

U nastavku navodimo osnovna svojstva velike induktivne dimenzije; dokazi tih svojstava analogni su onima za malu induktivnu dimenziju stoga ih u ovom poglavlju nećemo provoditi.

Propozicija 3.1.1. *Neka je X normalan topološki prostor te* $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. *Tada vrijedi:*

1. $\operatorname{Ind} X \leq n \Leftrightarrow X \in J_n$

2. $\operatorname{Ind} X = n \Leftrightarrow \operatorname{Ind} X \leq n$ *i* $\operatorname{Ind} X \nleq n - 1$

3. $\operatorname{Ind} X = \infty \Leftrightarrow \operatorname{Ind} X > n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$

Propozicija 3.1.2. *Neku su* X, Y *normalni topološki prostor takvi da je* $X \simeq Y$. *Tada je* $\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} Y$. *Drugim riječima, velika induktivna dimenzija je topološka invarijanta.*

Napomena 3.1.3. *Analogon teorema* 2.1.6 *vrijedi i u slučaju velike induktivne dimenzije, no ne za sve potprostore; naime, proizvoljan potprostor normalnog potprostora nije nužno i sam normalan (za razliku od regularnog prostora kod kojeg se regularnost prenosi na sve potprostore). Prema lemi* 1.0.60 *znamo da je svaki zatvoreni potprostor normalnog prostora i sam normalan, stoga će za takve potprostore vrijediti tvrdnja sljedećeg teorema, što ćemo koristiti u budućim proučavanjima.*

Teorem 3.1.4. *Neka je X normalan topološki prostor te M zatvoren potprostor od X. Tada vrijedi:*

$$\operatorname{Ind} M \leq \operatorname{Ind} X.$$

Koristeći navedena svojstva, u nastavku dokazujemo analogon propozicije 2.1.9 za veliku induktivnu dimenziju.

Propozicija 3.1.3. *Neka je X normalan topološki prostor. Za* $n \in \mathbb{N}_0$ *vrijedi* $\operatorname{Ind} X \leq n$ *ako i samo ako za svaka dva zatvorena i disjunktna skupa A i B u X postoji particija L između njih takva da je*

$$\operatorname{Ind} L \leq n - 1.$$

Dokaz. Za $n \in \mathbb{N}_0$ pretpostavimo da je $\operatorname{Ind} X \leq n$ te neka su $A, B \subseteq X$ zatvoreni i disjunktni skupovi. Tada je $A \subseteq X \setminus B$, stoga prema karakterizaciji T_4 prostora zaključujemo da postoji $V \subseteq X$ otvoren, takav da je

$$A \subseteq V \subseteq \operatorname{Cl} V \subseteq X \setminus B.$$

Nadalje, prema pretpostavci znamo da postoji $U \subseteq X$ otvoren takav da je

$$A \subseteq U \subseteq V \text{ te } \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leq n - 1.$$

Definiramo $L = \operatorname{Fr} U$. Cilj je pokazati da je L tražena particija između A i B. Od prije imamo da je $A \subseteq U$. Dalje, kako je

$$\operatorname{Cl} V \subseteq X \setminus B \text{ te } \operatorname{Cl} U \subseteq \operatorname{Cl} V,$$

slijedi da je $B \subseteq X \setminus \operatorname{Cl} U$, stoga definiramo $W = X \setminus \operatorname{Cl} U$. Očito su skupovi U i W disjunktni, stoga ostaje pokazati da je $X \setminus L = U \cup W$.
Računamo:

$$\begin{aligned} X \setminus L &= X \setminus \operatorname{Fr} U \\ &= X \setminus (\operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl}(X \setminus U)) \\ &= X \setminus \operatorname{Cl} U \cup (X \setminus U)^C = U \cup W. \end{aligned}$$

Obratno, pretpostavimo da za svaka dva zatvorena i disjunktna skupa A i B u X postoji particija L između njih takva da je

$$\operatorname{Ind} L \leq n - 1.$$

Neka je $A \subseteq X$ zatvoren te $V \subseteq X$ otvoren, takav da je $A \subseteq V$. Cilj je pokazati da postoji $U \subseteq X$ otvoren, takav da je $A \subseteq U \subseteq V$ te $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leq n - 1$.
Jasno je da su skupovi A i $X \setminus V$ zatvoreni i disjunktni u X stoga prema pretpostavci znamo da postoji particija L između njih takva da je $\operatorname{Ind} L \leq n - 1$. Drugim riječima, postoje $U, W \subseteq X$ otvoreni i disjunktni, takvi da je

$$A \subseteq U,\ X \setminus V \subseteq W \text{ te } X \setminus L = U \cup W.$$

Iz datih podskupovnosti lako se vidi da je $A \subseteq U \subseteq V$. Također se lako pokaže da je $\operatorname{Fr} U \subseteq L$. Kako je L zatvoren u X, slijedi da je L normalan prostor te isto vrijedi i za $\operatorname{Fr} U$. Iz tih razloga smijemo primijeniti prethodni teorem, stoga zaključujemo da je

$$\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leq \operatorname{Ind} L \leq n - 1 \Rightarrow \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leq n - 1 \Rightarrow \operatorname{Ind} X \leq n.$$

□

Idući cilj je opravdati intuitivno očekivan odnos male i velike induktivne dimenzije, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 3.1.5. *Za svaki normalan prostor X vrijedi*

$$\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X.$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po $\operatorname{Ind} X$. Napomenimo da je u slučaju $\operatorname{Ind} X = \infty$ tvdnja teorema trivijalno zadovoljena stoga pretpostavimo da je $\operatorname{Ind} X < \infty$.

1. Baza: $\operatorname{Ind} X = -1$ ako i samo ako je $X = \emptyset$, stoga vrijedi

$$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = -1.$$

2. Pretpostavka: Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ te pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve normalne prostore X za koje je $\operatorname{Ind} X \leq n - 1$.

3. Korak: Neka je X normalan prostor takav da je $\operatorname{Ind} X = n$. Cilj je pokazati da vrijedi $\operatorname{ind} X \leq n$.
   Uzmimo proizvoljan $x \in X$ te $V \subseteq X$ otvorenu okolinu od x. Kako je skup $\{x\}$ zatvoren u X te sadržan u V, to po definiciji velike induktivne dimenzije slijedi da postoji $U \subseteq X$ otvoren takav da je

$$\{x\} \subseteq U \subseteq V \text{ te } \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leq n - 1.$$

   Zaključujemo da je $x \in U \subseteq V$. Dalje, koristeći pretpostavku indukcije, slijedi da je

$$\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leq n - 1,$$

   čime je tvrdnja dokazana.

□

Teorem 3.1.6. *Za svaki separabilan metrički prostor X vrijedi*

$$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X.$$

Dokaz. Zbog prethodnog teorema dovoljno je pokazati da je $\operatorname{ind} X \geq \operatorname{Ind} X$. Dokaz provodimo indukcijom po $\operatorname{ind} X$. Kao i prije, uočimo da za $\operatorname{ind} X = \infty$ tvrdnja trivijalno vrijedi stoga pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X < \infty$.

1. Baza: $\operatorname{ind} X = -1$ ako i samo ako je $X = \emptyset$, stoga vrijedi

$$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = -1.$$

2. Pretpostavka: Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ te pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve separabilne metričke prostore X za koje je $\operatorname{ind} X \leq n - 1$.

3. Korak: Neka je X separabilan metrički prostor takav da je $\operatorname{ind} X = n$. Cilj je pokazati da vrijedi $\operatorname{Ind} X \leq n$.
   Neka su $A, B \subseteq X$ zatvoreni i disjunktni. Pozivajući se na teorem 2.5.5 znamo da postoji particija L između A i B takva da je $\operatorname{ind} L \leq n - 1$. Koristeći pretpostavku indukcije zaključujemo da vrijedi

$$\operatorname{Ind} L \leq \operatorname{ind} L \leq n - 1.$$

   Prema propoziciji 3.1.3 slijedi da je $\operatorname{Ind} X \leq n$, čime je tvrdnja dokazana.

□

Poglavlje 4

Dimenzija pokrivanja

Pored male i velike induktive dimenzije, čija smo svojstva proučavali u prethodnim poglavljima, u teoriji dimenzije pojavljuje se još jedna vrsta dimenzije, tzv. dimenzija pokrivanja, koju ćemo definirati za normalne prostore.
Dimenziju pokrivanja službeno je uveo matematičar Čech u svom radu iz 1933. godine.

4.1 Definicija i osnovna svojstva

Kako bismo definirali dimenziju pokrivanja, najprije uvodimo pojmove koji će nam za to biti potrebni.

Definicija 4.1.1. *Neka je X skup te $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ neprazna familija podskupova od X. Definiramo red familije $\mathcal{A}$ kao najveći broj $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ takav da $\mathcal{A}$ sadrži $n+1$ različitih elemenata s nepraznim presjekom. U slučaju da takav broj n ne postoji, kažemo da je red familije $\mathcal{A}$ beskonačan.*
Red familije $\mathcal{A}$ označavamo s $\operatorname{ord}\mathcal{A}$.

Napomena 4.1.2. *Ako je $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s\in S}$ te $\operatorname{ord}\mathcal{A} = n$, $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, tada za bilo koji izbor $n+2$ različita indeksa $s_1, s_2, \dots, s_{n+2}$ vrijedi*

$$A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \ldots \cap A_{s_{n+2}} = \emptyset.$$

Posebno, ako je $\operatorname{ord}\mathcal{A} = -1$, tada je $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$. Također, familija $\mathcal{A}$ za koju vrijedi $\operatorname{ord}\mathcal{A} = 0$ sastoji se od skupova koji su u parovima disjunktni.

Definicija 4.1.3. *Kažemo da je familija $\mathcal{B}$ profinjenje familije $\mathcal{A}$ ako za svaki $B \in \mathcal{B}$ postoji $A \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq A$.*

Napomena 4.1.4. *Neka je X topološki prostor te $\mathcal{A}$ pokrivač od X. Tada je svaki potpokrivač $\mathcal{A}_0$ od $\mathcal{A}$ ujedno i profinjenje od $\mathcal{A}$.*

Definicija 4.1.5. *Za $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ definiramo K_n kao klasu svih normalnih topoloških prostora X sa svojstvom da za svaki konačni otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji konačan otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ od X takav da $\mathcal{V}$ profinjuje $\mathcal{U}$ te vrijedi*

$$\operatorname{ord} \mathcal{V} \leq n.$$

Jasno je da je niz klasa $(K_n)_n, n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ rastući tj. da vrijedi $K_n \subseteq K_{n+1}$, stoga ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 4.1.6. *Za X normalan topološki prostor definiramo dimenziju pokrivanja*

$$\dim X = \min \{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\} : X \in K_n\}.$$

Ako za X ne postoji $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ takav da je $X \in K_n$, tada definiramo $\dim X = \infty$.

Propozicija 4.1.1. *Neka je X normalan topološki prostor te $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Tada vrijedi:*

1. $\dim X \leq n \Leftrightarrow X \in K_n$
2. $\dim X = n \Leftrightarrow \dim X \leq n$ *i* $\dim X \nleq n - 1$
3. $\dim X = \infty \Leftrightarrow \dim X > n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$

Dokaz. Direktno iz definicije 4.1.6. □

Napomena 4.1.7. *Vrijedi:*

$$\dim X = -1 \Leftrightarrow X = \emptyset.$$

Naime, $\dim X = -1$ *ako i samo ako je $X \in K_{-1} = \{\emptyset\}$, iz čega zaključujemo da je $X = \emptyset$.*

Propozicija 4.1.2. *Neka su X, Y normalni topološki prostori takvi da je $X \simeq Y$. Tada vrijedi:*

$$\dim X = \dim Y.$$

Drugim riječima, dimenzija pokrivanja je topološka invarijanta.

Dokaz. Kako je $X \simeq Y$, znamo da postoji $f : X \to Y$ homeomorfizam. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ te $\dim X = n$. Tada znamo da za proizvoljan konačan otvoreni pokrivač $\mathcal{U}'$ od X postoji konačni otvoreni pokrivač $\mathcal{U} = \left\{U_j : j \in J\right\}$ od X reda n koji ga profinjuje. Kako je f homeomorfizam, posebno i otvoreno preslikavanje, vrijedi da su sve slike $f(U_j) := V_j$ otvoreni skupovi u Y. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} Y = f(X) &= f(\bigcup_{j \in J} U_j) \\ &= \bigcup_{j \in J} f(U_j) = \bigcup_{j \in J} V_j \end{aligned}$$

Označimo $\mathcal{V} = \left\{V_j : j \in J\right\}$. Pokažimo da je ord $\mathcal{V} = n$. Pretpostavimo suprotno tj. pretpostavimo da postoje barem $n + 2$ različita elementa familije $\mathcal{V}$ s nepraznim presjekom. Drugim riječima, postoje $V_{j_1}, \ldots, V_{j_{n+1}}$ takvi da je

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} V_{j_i} \neq \emptyset \tag{4.1}$$

Djelovanjem s f^{-1} na lijevu i desnu stranu jednakosti (4.1) slijedi da je

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} f^{-1}(V_{j_i}) = \bigcap_{i=1}^{n+1} U_{j_i} \neq \emptyset,$$

čime dolazimo do kontradikcije.
Naposlijetku, neka je $\mathcal{V}'$ proizvoljan konačan otvoreni pokrivač od Y. Tada je

$$\mathcal{U}' := \left\{f^{-1}(V') : V' \in \mathcal{V}'\right\}$$

konačan otvoreni pokrivač od X stoga postoji konačni otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X reda n koji ga profinjuje. Koristeći se gore pokazanom konstrukcijom zaključujemo da postoji profinjenje $\mathcal{V}$ od $\mathcal{V}'$ reda n koje je konačan otvoreni pokrivač od Y, čime je tvrdnja propozicije dokazana. □

Idući cilj je karakterizirati dimenziju pokrivanja pomoću profinjenja te suženja pokrivača datog prostora; definiciju suženja navodimo u nastavku.
Napomenimo da ćemo u idućim razmatranjima koristiti indeksirane familije skupova tj. indeksirane pokrivače.

Napomena 4.1.8. *Indeksirana familija $\mathcal{A}$ je slika preslikavanja s indeksnog skupa S u $\mathcal{A}$ i pri tome pišemo $\mathcal{A} = (A_s)_{s \in S}$.*

Definicija 4.1.9. *Neka je X topološki prostor te $\mathcal{A} = (A_s)_{s\in S}$ pokrivač od X. Za pokrivač $\mathcal{B} = (B_s)_{s\in S}$ od X za koji vrijedi*

$$B_s \subseteq A_s, \ \forall s \in S$$

kažemo da je suženje pokrivača $(A_s)_{s\in S}$.

Napomena 4.1.10. *Očito je svako suženje $\mathcal{B}$ pokrivača $\mathcal{A}$ ujedno i njegovo profinjenje.*

Napomena 4.1.11. *Za suženje ili profinjenje pokrivača $\mathcal{A}$ kažemo da je otvoreno (zatvoreno) ako se sastoji od otvorenih (zatvorenih) skupova u datom prostoru X.*

Propozicija 4.1.3. *Za svaki normalan prostor X sljedeći uvjeti su ekvivalentni:*

a) $\dim X \leq n$,

b) Svaki konačan otvoreni pokrivač od X ima otvoreno profinjenje reda manjeg ili jednakog n,

c) Svaki konačan otvoreni pokrivač od X ima otvoreno suženje reda manjeg ili jednakog n.

Dokaz. Prema definiciji 4.1.6 te napomeni 4.1.10 jasno je da vrijedi

$$a) \Rightarrow b) \text{ te } c) \Rightarrow a).$$

Pokažimo da $b) \Rightarrow c)$:
Neka je X normalan prostor te neka je $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, \dots, k\}$ konačan otvoreni pokrivač od X. Prema pretpostavci znamo da postoji $\mathcal{V}$ profinjenje od $\mathcal{U}$ takvo da je

$$\operatorname{ord} \mathcal{V} \leq n, \tag{4.2}$$

stoga za svaki $V \in \mathcal{V}$ postoji $U_j \in \mathcal{U}$ takav da je $V \subseteq U_j$.
Za $V \in \mathcal{V}$ označimo $j = i(V)$. Definiramo

$$\begin{aligned} V_i &= \bigcup \{V \in \mathcal{V} : \ i(V) = i\} \\ &= \{x \in X : \exists V \in \mathcal{V} \text{ t.d. } i(V) = i, \ x \in V\}. \end{aligned}$$

Cilj je pokazati da je $\mathcal{V}' = \{V_i : \ i = 1, \dots, k\}$ suženje od $\mathcal{U}$ za koje vrijedi $\operatorname{ord} \mathcal{V}' \leq n$.
Kako je $V \subseteq V_{i(V)}$, vrijedi

$$V \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} V_j, \ \forall V \in \mathcal{V},$$

stoga je

$$X = \bigcup \{V : \ V \in \mathcal{V}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_i \subseteq X.$$

Time smo pokazali da je $\mathcal{V}'$ pokrivač od X. Dalje, za proizvoljan i fiksan $i \in \{1, \dots, k\}$ te $x \in V_i$ vrijedi

$$x \in V \subseteq U_{i(V)=i} \Rightarrow V_i \subseteq U_i, \ \forall i = 1, \dots, k.$$

Dakle, $\mathcal{V}'$ je suženje od $\mathcal{U}$. Naposlijetku, pretpostavimo da je $\operatorname{ord} \mathcal{V}' > n$. Tada postoji barem $n+2$ različita elementa $V_{j_1}, \dots, V_{j_{n+2}} \in \mathcal{V}'$ za koje vrijedi

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} V_{j_i} \neq \emptyset. \tag{4.3}$$

Odaberimo
$$x \in \bigcap_{i=1}^{n+2} V_{j_i}.$$
Tada je
$$x \in V_{j_i},\ \forall i = 1, \ldots, n+2$$
stoga po konstrukciji znamo da za svaki $i = 1, \ldots, n+2$ postoji $V^i \in \mathcal{V}$ takav da je
$$x \in V^i \text{ te } i(V^i) = j_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n+2} V^i \neq \emptyset.$$
Nadalje, vrijedi
$$i \neq i' \Rightarrow i(V^i) = j_i \neq j_i' = i(V^{i'}),$$
iz čega zaključujemo da su skupovi $V^1, \ldots, V^{n+2}$ međusobno različiti elementi iz $\mathcal{V}$ te smo pokazali da je njihov presjek neprazan. Time dolazimo u kontradikciju s pretpostavkom da je $\operatorname{ord} \mathcal{V} \leq n$, stoga vrijedi $\operatorname{ord} \mathcal{V}' \leq n$, čime je tvrdnja dokazana. □

U nastavku promatramo odnos male i velike induktivne dimenzije te dimenzije pokrivanja u slučaju separabilnog metričkog prostora X.

Lema 4.1.12. *Neka je X metrički prostor te M potprostor od X. Za svaku familiju $\{G_i\}_{i=1}^k$ u paru disjunktnih, otvorenih podskupova od M postoji familija $\{H_i\}_{i=1}^k$ u paru disjunktnih, otvorenih podskupova od X takvih da je $G_i \subseteq H_i$, za sve $i = 1, \ldots, k$.*

Dokaz. Neka je $\{G_i\}_{i=1}^k$ proizvoljno odabrana familija u paru disjunktnih, otvorenih podskupova od M. Za $i = 1, \ldots, k$ definiramo
$$H_i = \{x \in X : d(x, G_i) < d(x, M \setminus G_i)\}.$$
Cilj je pokazati da familija $\{H_i\}_{i=1}^k$ ima tražena svojstva. Neka je $x \in G_i$ proizvoljno odabran.
Tada je $d(x, G_i) = 0$ te $x \notin M \setminus G_i$. Kako te skup $M \setminus G_i$ zatvoren u M slijedi da je $d(x, M \setminus G_i) > 0$. Zaključujemo da je $G_i \subseteq H_i$, za sve $i = 1, \ldots, k$. Nadalje, skup H_i je otvoren kao praslika otvorenog skupa $\langle -\infty, 0\rangle$ po neprekidnoj funkciji $f_i : X \to \mathbb{R}$ danoj s $f_i(x) := d(x, G_i) - d(x, M \setminus G_i)$. Ostaje pokazati da su skupovi H_i, za $i = 1, \ldots, k$, u paru disjunktni. Pretpostavimo suprotno; neka je $x \in H_i \cap H_j$, za $i \neq j$. Kako je $G_j \subseteq M \setminus G_i$ te $G_i \subseteq M \setminus G_j$, koristeći pretpostavku te napomenu 1.0.6 dobivamo
$$d(x, G_i) < d(x, M \setminus G_i) \leq d(x, G_j) < d(x, M \setminus G_j) \leq d(x, G_i).$$
Zaključujemo da je $d(x, G_i) < d(x, G_i)$, čime dolazimo do kontradikcije. □

Teorem 4.1.13. *Za svaki separabilan metrički prostor X vrijedi*

$$\dim X \leq \operatorname{ind} X.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X < \infty$ (u slučaju $\operatorname{ind} X = \infty$ tvrdnja trivijalno vrijedi). Ako je $\operatorname{ind} X = -1$, tada je nužno $X = \emptyset$, iz čega zaključujemo da je $\dim X = -1 \leq \operatorname{ind} X = -1$. Pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X = 0$ te neka je $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{k}$ proizvoljno odabran konačan otvoreni pokrivač od X. Prema propoziciji 2.2.3 znamo da X ima prebrojivu bazu $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ sačinjenu od otvorenih i zatvorenih skupova, stoga po definiciji baze zaključujemo da familija $\mathcal{V}$ profinjuje $\mathcal{U}$.
Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\begin{aligned} W_1 &= V_1, \\ W_2 &= V_2 \setminus W_2, \ldots, \\ W_i &= V_i \setminus W_1 \cup \ldots \cup W_{i-1}. \end{aligned}$$

Prema konstrukciji jasno je da su skupovi W_i otvoreni i zatvoreni u X te u parovima disjunktni. Nadalje, familija $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ profinjuje $\mathcal{V}$, stoga profinjuje i $\mathcal{U}$ te vrijedi

$$\bigcup W_i = \bigcup V_i = X.$$

Koristeći propoziciju 4.1.3 zaključujemo da je $\dim X \leq 0$, stoga tvrdnja leme vrijedi u slučaju $\operatorname{ind} X = 0$. Dalje, uzmimo $n \in \mathbb{N}$ te pretpostavimo da je $\operatorname{ind} X = n$. Neka je $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{k}$ proizvoljno odabran konačan otvoreni pokrivač od X. Prema teoremu 2.5.4 znamo da se X može prikazati kao unija $n+1$ potprostora $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$ takvih da je $\operatorname{ind} Z_i \leq 0$, stoga prema prethodnoj diskusiji zaključujemo da je $\dim Z_i \leq 0$, za $j = 1, \ldots, n+1$.
Za svaki odabrani $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, familija $\left\{U_i \cap Z_j : i = 1, \ldots, k\right\}$ čini konačan otvoreni pokrivač od Z_j koji prema propoziciji 4.1.3 ima otvoreno suženje $\left\{G_{j,i}\right\}_{i=1}^{k}$ reda najviše 0. Drugim riječima, skupovi $G_{j,i}$ u paru su disjunktni te otvoreni u Z_j stoga prema lemi 4.1.12 postoji familija $\left\{H_{j,i}\right\}_{i=1}^{k}$ u paru disjunktnih, otvorenih podskupova od X takva da vrijedi $G_{j,i} \subseteq H_{j,i}$, za $i = 1, \ldots, k$.
Definiramo

$$V_{j,i} = H_{j,i} \cap U_i$$

za $i = 1, \ldots, k$ te $j = 1, \ldots, n+1$. Cilj je pokazati da je familija

$$\mathcal{V} = \left\{V_{j,i} : i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, n+1\right\}$$

otvoreni pokrivač od X reda najviše n koji profinjuje $\mathcal{U}$. Najprije uočimo da su prema konstrukciji skupovi $V_{j,i}$ otvoreni u X te vrijedi $V_{j,i} \subseteq U_i$, stoga familija $\mathcal{V}$ profinjuje $\mathcal{U}$.

Nadalje, za $x \in X$ znamo da postoji $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ takav da je $x \in Z_j$, tj. postoji $G_{j,i}$ takav da je

$$x \in G_{j,i} \subseteq U_i \cap Z_j.$$

Zaključujemo da je $x \in H_{j,i} \cap U_i = V_{j,i}$ čime je pokazano da je $\bigcup_{i,j} V_{j,i} = X$ tj. familija $\mathcal{V}$ je pokrivač od X. Naposlijetku, odaberemo li $n+2$ različita elementa familije $\mathcal{V}$, nužno će barem dva elementa imati isti indeks j; kako su skupovi $H_{j,i}$ za $i = 1, \ldots, k$, u paru disjunktni, slijedi da je presjek odabrana $n+2$ različita elementa familije $\mathcal{V}$ nužno prazan, stoga je red od $\mathcal{V}$ najviše n. Pozivajući se na propoziciju 4.1.3, zaključujemo da je $\dim X \leq n$, što je trebalo pokazati. □

Korolar 4.1.14. *Za svaki separabilan metrički prostor X vrijedi*

$$\dim X \leq \operatorname{Ind} X.$$

Dokaz. Tvrdnja direktno slijedi iz prethodne leme i teorema 3.1.6. □

Bibliografija

[1] W.L.Voxman C.O.Christenson, *Aspects of Topology*, M. Dekker, New York, 1977.

[2] Ryszard Engelking, *Theory of dimensions, Finite and Infinite*, Heldermann Verlag, Lemgo, Germany, 1995.

[3] Neven Grbac i Vera Tonić, *Uvod u topologiju*, Odjel za matematiku, Rijeka, 2018., skripta.

[4] J. R. Munkres, *Topology (2nd edition)*, Pearson College Div; 2nd edition, New Jersey, 2000.

[5] S.Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[6] Sonja Štimac, *Metrički prostori*, PMF-MO, Zagreb, 2022., skripta.

Sažetak

U ovom radu bavimo se topološkom dimenzijom kao svojstvom topoloških prostora. Nakon preliminarnih rezultata predstavljenih u prvom poglavlju, u drugom poglavlju uvodimo definiciju male induktivne dimenzije ind te dokazujemo ključne teoreme kao što su prvi i drugi teorem separacije i teorem sume. Veliku induktivnu dimenziju *Ind* uvodimo u trećem poglavlju te proučavamo odnos male i velike induktivne dimenzije. Naposljetku, u četvrtom poglavlju uvodimo dimenziju pokrivanja te proučavamo odnos spomenutih dimenzija u slučaju separabilnog metričkog prostora.

Summary

In this paper, we study topological dimension as the property of topological spaces. After the preliminary notations assembled in Chapter 1, in Chapter 2 we introduce the definition of the small inductive dimension ind together with proofs of main theorems such as the first and the second separation theorem and the sum theorem. Chapter 3 deals with the large inductive dimension and the relation between the small and the large inductive dimension. Finally, in Chapter 4 we introduce the definition of the covering dimension and investigate the correlation between all of the mentioned dimensions in case of separable metric space.

Životopis

Rođena sam 10. rujna 1996. godine u Rijeci. Nakon osnovnoškolskog obrazovanja, upisujem i završavam prirodoslovno-matematički smjer Gimnazije Andije Mohorovičića Rijeka. Godine 2015. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci (danas Fakultet za matematiku). Tokom preddiplomskog studija aktivno se bavim popularizacijom znanosti te djelovanjem u sklopu Studentskog zbora.

Godine 2018. svoje obrazovanje odlučujem nastaviti u Zagrebu gdje upisujem diplomski studij Teorijske matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.
U slobodno vrijeme aktivno se bavim treninzima snage te volim provoditi vijeme u prirodi.