Itov račun za jednostavne procese sa skokovima

Milat, Dino

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dino Milat

ITÔV RAČUN ZA JEDNOSTAVNE PROCESE SA SKOKOVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, rujan, 2023

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na podršci i hrabrenju te mentorici Vanji Wagner na strpljenju i razumijevanju.

Sadržaj

Uvod

Stohastički račun jedna je od najvažnijih grana matematike koja ima široku primjenu u raznim područjima znanosti. Slučajni procesi imaju ključnu ulogu u modeliranju raznoraznih pojava u financijama, fizici i biologiji, a Itôv račun ističe se kao jedan od najkorisnijih alata unutar ovog područja matematike.
Procesi sa skokovima su slučajni procesi čije trajektorije imaju prekide u slučajnim trenucima. Za razliku od tradicionalnih slučajnih procesa poput Brownovog gibanja, procesi sa skokovima daju precizniji uvid u događaje iz stvarnog svijeta, bilo to nepredvidljivo ponašanje financijskih imovina, gibanje čestica u kvantnoj mehanici ili modeliranje bioloških procesa.
Itôv račun razvio je japanski matematičar Kiyoshi Itô tijekom 1940-ih, čime je uveo teoriju stohastičke integracije i stohastičkih diferencijalnih jednadžbi. Proširivanjem na procese sa skokovima, Itôv račun pruža moćan matematički okvir za modeliranje složenih procesa u stvarnom svijetu.
U diplomskom radu uvest će se teorija Itôvog računa pomoću jednostavnih procesa sa skokovima. Za početak definirat ćemo i navesti primjere nekih osnovnih procesa sa skokovima poput Poissonovog procesa i složenog Poissonovog procesa. Zatim ćemo definirati stohastički integral pomoću procesa sa skokovima, a onda uvesti i Itôvu formulu sa skokovima. Naposljetku ćemo proučiti stohastičke diferencijalne jednadžbe i Girsanovljev teorem za procese sa skokovima.

Poglavlje 1

Poissonov proces

Proces sa skokovima je slučajni proces čije trajektorije imaju prekide koje zovemo skokovi, a koji se mogu dogoditi u slučajnim vremenima. U ovom poglavlju uvest ćemo Poissonov proces, koji predstavlja primjer procesa sa skokovima s nezavisnim inkrementima.

1.1 Definicija Poissonovog procesa

Definicija 1.1.1. *Brojeći proces je stohastički proces $N = (N_t : t \geq 0)$ s vrijednostima koje su nenegativne, cjelobrojne i neopadajuće, tj.*

- $N_t \geq 0$,
- $N_t \in \mathbb{Z}$,
- *ako vrijedi $s \leq t$, onda $N_s \leq N_t$.*

Napomena 1.1.2. *Neka je $(T_n : n \in \mathbb{N})$ slučajni proces te neka je N_t pripadajući brojeći proces, tj. N_t broji koliko se događaja T_n dogodilo u intervalu $[0, t]$. Vrijednost N_t u vremenu t dana je s:*

$$N_t = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{[T_k, \infty)}(t), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

gdje

$$\mathbb{1}_{[T_k,\infty)}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq T_k \\ 0, & 0 \leq t < T_k, \end{cases}$$

za $k \geq 1$, a vremena skokova $(T_k : k \geq 1)$ zadovoljavaju

$$0 \leq T_k \leq T_{k+1}, \quad \text{za sve } k \in \mathbb{N}.$$

Definicija 1.1.3. *Neka je* $(T_n : n \in \mathbb{N})$ *slučajni proces te neka je* N_t *pripadajući brojeći proces. Tada je* $(N_t : t \geq 0)$ *Poissonov proces ako vrijede sljedeće tri tvrdnje:*

(1) $0 < T_1 < T_2 < \ldots T_n < \ldots$ *i vrijedi* $\mathbb{P}(\lim_{n \nearrow \infty} T_n = \infty) = 1$.

(2) $(N_t : t \geq 0)$ *je proces s nezavisnim inkrementima, odnosno za bilo koji* $k \geq 2$ *i* $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k$*, slučajne varijable* $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ *su nezavisne.*

(3) $(N_t : t \geq 0)$ *je proces sa stacionarnim inkrementima, tj. za bilo koji* $h > 0$ *i* $0 \leq s < t$*, slučajne varijable* $N_{t+h} - N_{s+h}$ *i* $N_t - N_s$ *su jednako distribuirane.*

Napomena 1.1.4. *Proces* $(N_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *iz gornje definicije zovemo Poissonov proces jer varijable* N_t *imaju Poissonovu distribuciju, što ćemo pokazati u sljedećem potpoglavlju, točnije u Teoremu 1.2.1.*

1.2 Svojstva Poissonovog procesa

U ovom potpoglavlju istražit ćemo neka osnovna svojstva Poissonovog procesa koja će nam koristiti u daljnjoj teoriji.
Sljedeći teorem daje nam odgovor na pitanje o distribuciji inkremenata $N_t - N_s$, što možemo koristiti i kao karakterizaciju Poissonovog procesa.

Teorem 1.2.1. *Pretpostavimo da je* $N = (N_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *Poissonov proces. Tada za sve* $0 \leq s \leq t$ *inkrement* $N_t - N_s$ *ima Poissonovu distribuciju s parametrom* $(t - s)\lambda$*, tj. vrijedi*

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = e^{-(t-s)\lambda} \frac{((t-s)\lambda)^k}{k!}, \quad k \geq 0, \tag{1.2}$$

gdje je $\lambda > 0$ *konstanta definirana kao*

$$\lambda = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(N_h = 1). \tag{1.3}$$

Dokaz. Neka je g_{t-s} funkcija izvodnica vjerojatnosti od $N_t - N_s$ dana kao

$$g_{t-s}(u) = \mathbb{E}\left[u^{N_t - N_s}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t - N_s = k) u^k, \quad 0 \leq u \leq 1. \tag{1.4}$$

Koristeći dekompoziciju $N_t = (N_t - N_s) + (N_s - N_0)$ te nezavisnost i stacionarnost inkremenata slijedi

$$g_t(u) = g_s(u) g_{t-s}(u), \quad 0 \leq s < t, \ 0 \leq u \leq 1, \tag{1.5}$$

iz čega dobivamo da za svaki par (p, q) cijelih brojeva vrijedi

$$g_{p/q}(u) = g_{1/q}(u)^p = \left((g_1(u))^{1/q}\right)^p = g_1(u)^{p/q}. \tag{1.6}$$

Pokažimo da je $t \mapsto g_t(u)$ padajuća funkcija. Neka je $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Uzmimo niz racionalnih brojeva $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da $q_n \downarrow t$. Dokažimo da vrijedi $N_{q_n} \searrow N_t$ g.s. kad $n \to \infty$. Naime, iz (1.1) i činjenice da je $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strogo rastući niz g.s. zaključujemo da su trajektorije Poissonovog procesa $t \mapsto N_t$ step-funkcije, a samim time i neprekidne zdesna g.s. Tada je i proces $t \mapsto N_t$ neprekidan zdesna g.s., pa odatle slijedi $N_{q_n} \searrow N_t$ g.s. kad $n \to \infty$. Odatle zaključujemo da vrijedi $u^{N_{q_n}} \nearrow u^{N_t}$ g.s. kad $n \to \infty$. Konačno, po Teoremu o monotonoj konvergenciji, vrijedi

$$g_{q_n}(u) \xrightarrow{n\to\infty} g_t(u)$$

Sada zaključujemo da jednadžba (1.6) vrijedi i za iracionalne brojeve:

$$g_t(u) = g_1(u)^t, \quad t > 0. \tag{1.7}$$

U sljedećem koraku pokazujemo da $g_t(u)$ ne iščezava. Ukoliko je $g_{t_0}(u) = 0$, onda iz (1.7) slijedi da je $g_1(u) = 0$ i $g_t(u) = 0$ za sve $t > 0$, što je kontradiktorno s činjenicom

$$g_t(u) \geq \mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) \xrightarrow{t\to 0} 1,$$

jer $\mathbb{P}(T_1 > t) \to \mathbb{P}(T_1 > 0)$ kad $t \to 0$, što pak slijedi iz neprekidnosti vjerojatnosti s obzirom na rastući niz događaja.
S obzirom da $g_t(u)$ ne iščezava, možemo pisati

$$g_t(u) = e^{-t\lambda(u)}. \tag{1.8}$$

Iz ove jednadžbe slijedi

$$\lambda(u) = \ln \frac{1}{g_1(u)},$$

a s obzirom da je $0 < g_t(u) < 1$, vrijedi da je $\lambda(u) > 0$.
Preostaje nam odrediti $\lambda(u)$. Prvo ćemo dokazati da vrijedi

$$\mathbb{P}(N_h \geq 2) = o(h)^1 \quad \text{kad } h \to 0. \tag{1.9}$$

Primijetimo da za $h > 0$ vrijedi

$$\bigcup_{n\geq 1} \{N_{(n-1)h} = 0,\ N_{nh} - N_{(n-1)h} \geq 2\} \subset \{T_2 < T_1 + h\}. \tag{1.10}$$

[1] $f(n) = o(g(n))$ ako vrijedi $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Događaje $A_n = \{N_{(n-1)h} = 0, N_{nh} - N_{(n-1)h} \geq 2\}$ možemo zapisati kao

$$A_n = \{N_{(n-1)h} = 0, N_{nh} \geq 2\}.$$

Odatle zaključujemo da vrijedi $A_n \cap A_{n+k} = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq 1$, odnosno događaji A_n su međusobno disjunktni. S obzirom da su događaji $B_{n-1} = \{N_{(n-1)h} = 0\}$ i $C_n = \{N_{nh} - N_{(n-1)h} \geq 2\}$ nezavisni (što slijedi iz činjenice da su slučajne varijable $N_{(n-1)h}$ i $N_{nh} - N_{(n-1)h}$ nezavisne, a što je pak posljedica nezavisnosti inkremenata Poissonovog procesa), vrijedi

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_{n-1} \cap C_n) = \mathbb{P}(B_{n-1})\mathbb{P}(C_n).$$

Primijetimo još da iz stacionarnosti inkremenata Poissonovog procesa slijedi i $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(N_h \geq 2)$. Sada uzimanjem vjerojatnosti s obje strane u jednadžbi (1.10), korištenjem monotonosti i σ-aditivnosti vjerojatnosti te izraza (1.4) i (1.8), dobijemo

$$\sum_{n\geq 1} \exp\{-(n-1)h\lambda(0)\}\, \mathbb{P}(N_h \geq 2) \leq \mathbb{P}(T_2 < T_1 + h). \tag{1.11}$$

Sada znamo da vrijedi $\lambda(0) \neq 0$. U suprotnome (1.8) implicira da vrijedi $g_t(0) = 1$ za svaki t pa posljedično imamo $1 = \mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t)$ za svaki $t > 0$. Tada bismo imali da je $T_1 = \infty$ g.s. što je kontradikcija s $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n < \ldots$ i $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty) = 1$. Nadalje, možemo napisati jednadžbu (1.11) u sljedećem obliku:

$$\frac{\mathbb{P}(N_h \geq 2)}{1 - e^{-h\lambda(0)}} \leq \mathbb{P}(T_2 < T_1 + h).$$

Kada h pada u 0, vrijedi da $\mathbb{P}(T_2 < T_1 + h)$ pada u $\mathbb{P}(T_2 \leq T_1) = 0$, a $1 - e^{-h\lambda(0)} \sim h\lambda(0)$ pa slijedi tvrdnja (1.9).
S druge strane, vrijedi

$$\lambda(u) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\Big(1 - e^{-h\lambda(u)}\Big)$$

pa iz (1.4) i (1.8) slijedi

$$\lambda(u) = \lim_{h\downarrow 0} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{h}\mathbb{P}(N_h = k)(1 - u^k).$$

Koristeći činjenicu (1.9) dobivamo

$$0 \leq \lim_{h\downarrow 0} \sum_{k\geq 2} \frac{1}{h}\mathbb{P}(N_h = k)(1 - u^k) \leq \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(N_h \geq 2)}{h} = 0.$$

Iz ovoga pak slijedi

$$\lambda(u) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\mathbb{P}(N_h = 1)(1 - u) = \lambda(1 - u),$$

gdje je $\lambda = \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}(N_h = 1)/h$.
Konačno dobijemo da vrijedi

$$g_t(u) = e^{-\lambda t(1-u)}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

pa slijedi da je g_t funkcija izvodnica vjerojatnosti Poissonove distribucije $P(\lambda t)$. Time je dokaz priveden kraju. □

Napomena 1.2.2. *Vrijedi i obrat gornjeg teorema, tj. ukoliko proces* $(N_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *ima nezavisne inkremente te ukoliko za sve* $t \geq 0$ *vrijedi da* N_t *ima Poissonovu distribuciju s parametrom* $t\lambda$*, onda je* $(N_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *Poissonov proces. Zaista, uz dane pretpostavke, svojstvo (1) iz Definicije 1.1.3. slijedi iz činjenice da je niz vremena međuskokova* $(\tau_k : k \in \mathbb{N})$*,* $\tau_k = T_k - T_{k-1}$*, nezavisan i jednako distribuiran te vrijedi* $\tau_k \sim Exp(\lambda)$*, a svojstvo (2) iz Definicije 1.1.3. slijedi direktno iz gornjih pretpostavki. Naime, za* $t > s$ *iz pretpostavke o nezavisnosti inkremenata slijedi da je*

$$\mathbb{E}[u^{N_t}] = \mathbb{E}[e^{N_t - N_s}]\mathbb{E}[u^{N_s}].$$

Po pretpostavci također znamo da vrijedi $N_t \sim P(\lambda t)$ *i* $N_s \sim P(\lambda s)$ *pa iz gornje jednakosti slijedi*

$$e^{-\lambda t(1-u)} = \mathbb{E}[u^{N_t - N_s}]e^{-\lambda s(1-u)},$$

tj.

$$\mathbb{E}[u^{N_t - N_s}] = e^{-\lambda(t-s)(1-u)}.$$

Iz zadnje jednakosti vidimo da vrijedi $N_t - N_s \stackrel{d}{=} N_{t-s}$*, čime je i svojstvo (3) pokazano.*

Parametar $\lambda > 0$ iz gornjeg teorema zovemo *intenzitet* Poissonovog procesa. U sljedećoj napomeni dajemo alternativnu definiciju Poissonovog procesa.

Napomena 1.2.3. *Uz gornja svojstva, Poissonov proces možemo analogno definirati kao slučajni proces definiran s* (1.1)*, uz pretpostavku da su inkrementi nezavisni i imaju danu Poissonovu distribuciju, tj. za* $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$*, vrijedi da je*

$$(N_{t_1} - N_{t_0}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_n - 1})$$

vektor nezavisnih Poissonovih varijabli s parametrima

$$((t_1 - t_0)\lambda, \ldots, (t_n - t_{n-1})\lambda).$$

Posebno, varijabla N_t *ima Poissonovu distribuciju s parametrom* $t\lambda$*, tj.*

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Slijedi da su očekivanje $\mathbb{E}[N_t]$ *i varijanca* $\mathrm{Var}(N_t)$ *procesa* N_t *jednaki*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathrm{Var}(N_t) = \lambda t. \tag{1.12}$$

Indeks disperzije Poissonovog procesa je

$$\frac{\mathrm{Var}[N_t]}{\mathbb{E}[N_t]} = 1, \quad t \geq 0. \tag{1.13}$$

Na kraju ovog potpoglavlja diskutiramo asimptotsko ponašanje Poissonovog procesa. Znamo da za x blizu 0 vrijedi $e^x \approx 1 + x$. Odatle i iz (1.2) slijedi:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(N_h = 0) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), & h \to 0, \\ \mathbb{P}(N_h = 1) = \lambda h e^{-\lambda h} \simeq \lambda h, & h \to 0. \end{cases}$$

Iz stacionarnosti također slijedi

$$\begin{cases} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h), & h \to 0, \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h e^{-\lambda h} \simeq \lambda h, & h \to 0, \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 2) \simeq h^2 \frac{\lambda^2}{2} = o(h), & h \to 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

za sve $t > 0$. Dakle, u "kratkom" intervalu $[t, t+h]$ duljine h, inkrement $N_{t+h} - N_t$ ponaša se kao Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom λh, što je korisno kod simulacije puteva Poissonovog procesa.
Općenito, za $k \geq 1$ vrijedi

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = k) \simeq h^k \frac{\lambda^k}{k!}, \quad h \to 0, \quad t > 0.$$

Poissonov proces koji smo do sada razmatrali je *homogeni* Poissonov proces, odnosno u alternativnoj definiciji u Napomeni 1.2.3. uzeli smo da je intenzitet λ konstantan.
Ovu klasu procesa možemo proširiti tako da u toj definiciji promatramo intenzitet kao funkciju vremena $\lambda : [0, \infty) \to (0, \infty)$. Tada možemo zadati distribuciju inkremenata kao

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = \exp\left(-\int_s^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u\right) \frac{\left(\int_s^t \lambda(u)\,\mathrm{d}u\right)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ukoliko pretpostavimo da je $\lambda(t)$ i neprekidna funkcija vremena t te $h \to 0$, vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = k) \\ &= \begin{cases} \exp\left(-\int_t^{t+h} \lambda(u)\mathrm{d}u\right) = 1 - \lambda(t)h + o(h), & k = 0, \\ \exp\left(-\int_t^{t+h} \lambda(u)\mathrm{d}u\right) \int_t^{t+h} \lambda(u)\mathrm{d}u = \lambda(t)h + o(h), & k = 1, \\ o(h), & k \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 Vremena skokova Poissonovog procesa

U ovom potpoglavlju promotrit ćemo distribuciju vremena skoka T_n.
Prvo promotrimo distribuciju vremena prvog skoka T_1. Primijetimo da vrijedi:

$$\{T_1 > t\} = \{N_t = 0\},$$

iz čega slijedi

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

tj. T_1 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$.
Općenitije, vrijedi ekvivalencija:

$$\{T_n > t\} = \{N_t \leq n-1\},$$

za sve $n \geq 1$. Stoga slučajno vrijeme skoka T_n ima gama distribuciju s cjelobrojnim parametrom $n \geq 1$, što će nam biti korisno u dokazu sljedeće propozicije.

Propozicija 1.3.1. *Za sve $n \geq 1$ vjerojatnosna distribucija slučajnog vremena skoka T_n ima gama vjerojatnosnu funkciju gustoće*

$$t \mapsto \lambda^n e^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

na $\mathbb{R}_+$, tj. za sve $t > 0$ vjerojatnost $\mathbb{P}(T_n \geq t)$ dana je s

$$\mathbb{P}(T_n \geq t) = \lambda^n \int_t^\infty e^{-\lambda s} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}s.$$

Dokaz. Vrijedi

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

iz čega indukcijom, uz pretpostavku

$$\mathbb{P}(T_{n-1} > t) = \lambda \int_t^\infty e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-2}}{(n-2)!} \mathrm{d}s, \quad n \geq 2,$$

slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n > t) &= \mathbb{P}(T_n > t \geq T_{n-1}) + \mathbb{P}(T_{n-1} > t) \\
&= \mathbb{P}(N_t = n-1) + \mathbb{P}(T_{n-1} > t) \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda \int_t^\infty e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-2}}{(n-2)!} \mathrm{d}s \\
&= \lambda \int_t^\infty e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{d}s, \quad t \geq 0,
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili parcijalnu integraciju. □

Posebno, za sve $n \in \mathbb{Z}$ i $t \in \mathbb{R}_+$ vrijedi

$$\mathbb{P}(N_t = n) = p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

tj. $p_{n-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, n \geq 1$, je vjerojatnosna funkcija gustoće slučajnog vremena skoka T_n. Uz Propoziciju 20.2, može se pokazati i sljedeća propozicija koja se oslanja na *jako Markovljevo svojstvo*.

Propozicija 1.3.2. *Slučajna vremena međuskokova*

$$\tau_k := T_{k+1} - T_k$$

provedena u stanju $k \geq 0$, uz $T_0 = 0$, tvore niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$, tj.

$$\mathbb{P}(\tau_0 > t_0, \ldots, \tau_n > t_n) = e^{-(t_0+t_1+\ldots+t_n)\lambda}, \quad t_0, t_1, \ldots, t_n \geq 0.$$

Očekivanje slučajne varijable τ_k s parametrom $\lambda > 0$ dano je s

$$\mathbb{E}[\tau_k] = \lambda \int_0^\infty xe^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.$$

Iz aditivnosti matematičkog očekivanja dobijemo da n-to slučajno vrijeme skoka ima očekivanje

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{n}{\lambda}, \quad n \geq 1.$$

Možemo zaključiti da što je λ veći, odnosno što je veća vjerojatnost skoka unutar malog intervala, tada je manje prosječno vrijeme koje proces provede u svakom stanju $k \geq 0$.

1.4 Kompenzirani Poissonov martingal

U ovom potpoglavlju promatramo kompenzirani Poissonov proces $(N_t - \lambda t : t \geq 0)$. Kompenzirani Poissonov proces je koristan u primjenama jer aproksimira Brownovo gibanje u slučaju kada λ raste.
Iz (1.12) zaključujemo da vrijedi

$$\mathbb{E}[N_t - \lambda t] = 0$$

odnosno kompenzirani Poissonov proces $(N_t - \lambda t : t \geq 0)$ ima *centrirane inkremente*. Kompenzirani Poissonov proces ima i nezavisne inkremente pa odatle slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1.4.1. *Kompenzirani Poissonov proces* $(N_t - \lambda t : t \geq 0)$ *je martingal s obzirom na filtraciju* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *koja je generirana Poissonovim procesom* $(N_t : t \geq 0)$, *odnosno*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(N_s : s \in [0,t]), \quad t \geq 0.$$

Napomena 1.4.2. *Još neki primjeri proširenja Poissonovog procesa uključuju Poissonov proces s intenzitetom koji je funkcija vremena te Poissonov proces sa slučajnim intenzitetom koji je funkcija vremena (tzv. Coxov proces).*
Također valja napomenuti da Poissonov proces spada među procese obnavljanja. To su brojeći procesi oblika

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[T_n,\infty)}(t), \quad t \geq 0$$

za koje je $\tau_k = T_{k+1} - T_k$ *niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli.*

Poglavlje 2

Složeni Poissonov proces

U ovom poglavlju uvodimo složeni Poissonov proces. Standardni Poissonov proces je limitiran u stvarnim primjenama jer su njegovi skokovi konstantne veličine. Zato nam je u interesu promatrati procese sa slučajnim veličinama skokova.

2.1 Definicija složenog Poissonovog procesa

Neka je $(Z_k)_{k\geq 1}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih, kvadratno integrabilnih slučajnih varijabli, distribuiranih kao slučajna varijabla Z, s vjerojatnosnom distribucijom $\nu(\mathrm{d}y)$ u $\mathbb{R}$, nezavisnih od Poissonovog procesa $(N_t : t \in \mathbb{R}_+)$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(Z_k \in [a,b]) = \nu([a,b]) = \int_a^b \nu(\mathrm{d}y), \quad -\infty < a \leq b < \infty, \quad k \geq 1.$$

U slučaju kada postoji funkcija gustoće $\phi(y)$ s obzirom na vjerojatnosnu distribuciju $\nu(\mathrm{d}y)$, možemo pisati $\nu(\mathrm{d}y) = \phi(y)\mathrm{d}y$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(Z_k \in [a,b]) = \nu([a,b]) = \int_a^b \nu(\mathrm{d}y) = \int_a^b \phi(y)\mathrm{d}y, \quad -\infty < a \leq b < \infty, \quad k \geq 1.$$

Definicija 2.1.1. *Proces $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ definiran kao slučajna suma*

$$Y_t := Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{N_t} = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

zovemo složeni Poissonov proces.

Napomena 2.1.2. *Prema konvenciji vrijedi $\sum_{k=1}^{n} Z_k = 0$ kada je $n = 0$, pa vrijedi $Y_0 = 0$.*

U sljedećoj napomeni napravit ćemo analogon jednadžbe (1.1) za složeni Poissonov proces.

Napomena 2.1.3. *Složeni Poissonov proces dopušta sljedeću reprezentaciju, analognu* (1.1) *:*

$$Y_t = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \mathbb{1}_{[T_k,\infty]}(t), \quad t \geq 0$$

2.2 Svojstva složenog Poissonovog procesa

U ovom potpoglavlju razmotrit ćemo neka osnovna svojstva složenog Poissonovog procesa. Izračunat ćemo očekivanje, varijancu i indeks disperzije složenog Poissonovog procesa. Primijetit ćemo da su neki rezultati analogni onima za jednostavni Poissonov proces iz prvog poglavlja.
Neka je Y_{t^-} limes slijeva složenog Poissonovog procesa u trenutku t

$$Y_{t^-} := \lim_{s \nearrow t} Y_s, \quad t > 0.$$

Tada je veličina skoka $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t^-}$, $t \geq 0$, slučajnog procesa $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ dana s

$$\Delta Y_t = Z_{N_t} \Delta N_t, \quad t \geq 0,$$

gdje je

$$\Delta N_t := N_t - N_{t^-} \in \{0, 1\}, \quad t \geq 0,$$

veličina skoka standardnog Poissonovog procesa $(N_t : t \geq 0)$, a N_{t^-} je limes slijeva

$$N_{t^-} = \lim_{s \nearrow t} N_s, \quad t > 0.$$

Uz $\{N_T = n\}$, skokovi procesa $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ na $[0, T]$ su nezavisne slučajne varijable s distribucijom $\nu(\mathrm{d}x)$. Koristeći tu činjenicu, sljedeća propozicija dopušta nam izračun funkcije izvodnice momenata inkrementa $Y_T - Y_t$.

Propozicija 2.2.1. *Za sve* $t \in [0, T]$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha(Y_T - Y_t)}\right] = \exp\Big((T - t)\lambda(\mathbb{E}[e^{\alpha Z}] - 1)\Big). \tag{2.2}$$

Dokaz. Kako N_t ima Poissonovu distribuciju s parametrom $t > 0$ i kako su $(Z_k : k \geq 1)$ nezavisne, za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\alpha(Y_T - Y_t)}\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha \sum_{k=N_t+1}^{N_T} Z_k\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha \sum_{k=1}^{N_T-N_t} Z_{k+N_t}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha \sum_{k=1}^{N_T-N_t} Z_k\right)\right] \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha \sum_{k=1}^{N_T-N_t} Z_k\right) \middle| N_T - N_t = n\right] \mathbb{P}(N_T - N_t = n) \\
&= e^{-(T-t)\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!}(T-t)^n\, \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha \sum_{k=1}^{n} Z_k\right)\right] \\
&= e^{-(T-t)\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!}(T-t)^n \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{\alpha Z_k}] \\
&= e^{-(T-t)\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!}(T-t)^n (\mathbb{E}[e^{\alpha Z}])^n \\
&= \exp\Big((T-t)\lambda(\mathbb{E}[e^{\alpha Z}] - 1)\Big).
\end{aligned}$$

□

Napomena 2.2.2. *Također vrijedi*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{\alpha(Y_T - Y_t)}] &= \exp\left((T-t)\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\alpha y} - 1)\nu(\mathrm{d}y)\right) \\
&= \exp\left((T-t)\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha y}\nu(\mathrm{d}y) - (T-t)\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\mathrm{d}y)\right) \\
&= \exp\left\{(T-t)\lambda\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha y}\nu(\mathrm{d}y) - 1\right)\right\},
\end{aligned}$$

jer vjerojatnosna distribucija $\nu(\mathrm{d}y)$ *od* Z *zadovoljava*

$$\mathbb{E}[e^{\alpha Z}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha y}\nu(\mathrm{d}y)$$

i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu(\mathrm{d}y) = 1.$$

Iz funkcije izvodnice momenata (2.2) može se izračunati očekivanje od Y_t za svaki t kao produkt očekivanja broja skokova do trenutka t što je jednako $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ te očekivanja veličine skoka $\mathbb{E}[Z]$ tj.

$$\mathbb{E}[Y_t] = \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbb{E}[e^{\alpha Y_t}]_{|\alpha=0} = \lambda t \int_{-\infty}^{\infty} y\nu(\mathrm{d}y) = \lambda t\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[Z]. \tag{2.3}$$

Napomena 2.2.3. *Gornje jednakosti zahtijevaju promjenu poretka operanada diferencijacije i očekivanja, što je moguće jedino ukoliko funkcija izvedenica momenata* (2.2) *poprima konačne vrijednosti za sve* α *u proizvoljnoj okolini* $(-\epsilon, \epsilon)$ *oko* 0.

Relacija (2.3) tvrdi da je srednja vrijednost Y_t jednaka srednjoj vrijednosti veličine skoka $\mathbb{E}[Z]$ pomnoženoj sa srednjom vrijednošću broja skokova $\mathbb{E}[N_t]$. To također slijedi direktno koristeći sumaciju redova:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_t} Z_k\right] &= \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} Z_k | N_t = n\right]\mathbb{P}(N_t = n)\\
&= e^{-\lambda t}\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda^n t^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} Z_k \middle| N_t = n\right]\\
&= e^{-\lambda t}\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda^n t^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} Z_k\right]\\
&= \lambda t e^{-\lambda t}\mathbb{E}[Z]\sum_{n\geq 1}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \lambda t\mathbb{E}[Z]\\
&= \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[Z].
\end{aligned}$$

U nastavku računamo varijancu.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t^2] &= \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\mathbb{E}[e^{\alpha Y_t}]_{|\alpha=0}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\exp\Big(\lambda t(\mathbb{E}[e^{\alpha Z}] - 1)\Big)_{|\alpha=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\lambda t\mathbb{E}[Ze^{\alpha Z}]\exp\Big(\lambda t(\mathbb{E}[e^{\alpha Z}] - 1)\Big)\Big)_{|\alpha=0}\\
&= \lambda t\mathbb{E}[Z^2] + (\lambda t\mathbb{E}[Z])^2\\
&= \lambda t\int_{-\infty}^{\infty} y^2\nu(\mathrm{d}y) + (\lambda t)^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} y\nu(\mathrm{d}y)\right)^2,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\mathrm{Var}[Y_t] = \lambda t \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \nu(\mathrm{d}y) = \lambda t \mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[N_t]\mathbb{E}[Z^2]. \tag{2.4}$$

Napomena 2.2.4. *Posljedično, indeks disperzije složenog Poissonovog procesa*

$$\frac{\mathrm{Var}[Y_t]}{\mathbb{E}[Y_t]} = \frac{\mathbb{E}[Z^2]}{\mathbb{E}[Z]}, \quad t \geq 0,$$

jednak je indeksu disperzije veličine skoka Z.

Propozicija 2.2.5. *Složeni Poissonov proces*

$$Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t \geq 0,$$

ima nezavisne inkremente, tj. za svaki konačni niz vremena $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, inkrementi

$$Y_{t_1} - Y_{t_0}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}$$

su međusobno nezavisne varijable. Dodatno, inkrement $Y_t - Y_s$ je stacionaran za $0 \leq s \leq t$, tj. distribucija od $Y_{t+h} - Y_{s+h}$ ne ovisi o $h \geq 0$.

Dokaz da je slučajna varijabla Y_t beskonačno djeljiva može se pronaći u [7, Propozicija 14.4], iz čega slijedi[1] da proces $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ ima nezavisne i stacionarne inkremente.

Kako složeni Poissonov proces također ima nezavisne i centrirane inkremente, u nastavku navodimo analogon Propozicije 1.4.1.

Propozicija 2.2.6. *Kompenzirani složeni Poissonov proces*

$$M_t := Y_t - \lambda t \mathbb{E}[Z], \quad t \geq 0,$$

je martingal.

[1] Karakteristična funkcija procesa $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ zadovoljava Lévy-Hinčinovu reprezentaciju, tj. taj proces pripada klasi tzv. Lévyjevih procesa, koji imaju nezavisne i stacionarne inkremente.

Poglavlje 3

Stohastički integral i Itôva formula

Kao centralni dio Itôvog računa, uvest ćemo pojam stohastičkog (Itôvog) integrala. Glavna motivacija za uvođenje Itôvog integrala je bila integriranje s obzirom na Brownovo gibanje. Pokazalo se da to nije moguće koristeći Riemann-Stieltjesov integral jer Brownovo gibanje ima neograničenu varijaciju. Zbog tog razloga, Itô je konstruirao teoriju stohastičke integracije koja će imati daljnje primjene u proučavanju stohastičkih procesa.
U ovom poglavlju ćemo dodatno razmotriti neka svojstva stohastičke integracije, poput martingalnog svojstva i Itôve izometrije, ali ne s obzirom na Brownovo gibanje, već s obzirom na složeni Poissonov proces.

3.1 Definicija i svojstva stohastičkog integrala

Definicija 3.1.1. *Pomoću relacije*

$$\Delta Y_t = Z_{N_t}\Delta N_t,$$

definiramo stohastički integral stohastičkog procesa $(\phi_t : t \in [0,T])$ *po* $(Y_t : t \in [0,T])$ *s*

$$\int_0^T \phi_t \mathrm{d}Y_t = \int_0^T \phi_t Z_{N_t} \mathrm{d}N_t := \sum_{k=1}^{N_T} \phi_{T_k} Z_k. \tag{3.1}$$

Napomena 3.1.2. *Primijetimo da je integral* (3.1) *analogno definiran s*

$$\sum_{k=1}^{N_T} \phi_{T_k} Z_k = \sum_{t \le T} \phi_t \Delta Y_t.$$

Naime, suma s desne strane gornje jednakosti je uistinu konačna jer proces Y ima konačno mnogo skokova na bilo kojem omeđenom intervalu.

Napomena 3.1.3. *Primijetimo da u izrazu* (3.1) *iz definicije imamo* $\int_0^T \phi_t \mathrm{d}Y_t$*, koji ima financijsku interpretaciju kao vrijednost portfelja u vremenu* T *koji se sastoji od* ϕ_t *količine rizične imovine u vremenu* t*, cijena mu je određena slučajnim povratima* Z_k*, a generira profit odnosno gubitak* $\phi_{T_k} Z_k$ *u slučajnom vremenu* T_k*.*

Napomena 3.1.4. *Posebno, složeni Poissonov proces* $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *dopušta reprezentaciju pomoću stohastičkog integrala:*

$$Y_t = Y_0 + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k = Y_0 + \int_0^T Z_{N_s} \mathrm{d}N_s.$$

Napomena 3.1.5. *Kao i kod Itôvog intervala obzirom na Brownovog gibanje, može se pokazati da je Itôv integral obzirom na složeni Poissonov proces (iz Definicije 3.1.1) također martingal. Ključni korak u dokazu je aproksimacija integranda* $(\phi_t : t \leq 0)$ *nizom jednostavnih integranada pri čemu se dokaz martingalnog svojstva dokazuje kao u [9, Teorem 2.4]. Ovu tvrdnju navodimo bez dokaza, za detalje pogledati [4, Teorem 5.3], a za dokaz općenitijeg rezultata pogledati [6, Teorem II.5.20, Teorem I.6.51].*

Naredni rezultat zove se još i *lema zaglađivanja*.

Propozicija 3.1.6. *Neka je* $(\phi_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *stohastički proces koji je adaptiran s obzirom na filtraciju generiranu s* $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$*, dopušta limes slijeva i vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\phi_t| \mathrm{d}t\right] < \infty, \quad T > 0.$$

Tada očekivanje složenog Poissonovog stohastičkog integrala možemo izraziti kao

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-} \mathrm{d}Y_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-} Z_{N_t} \mathrm{d}N_t\right] = \lambda \mathbb{E}[Z] \mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-} \mathrm{d}t\right], \tag{3.2}$$

gdje ϕ_{t^-} *predstavlja limes slijeva*

$$\phi_t := \lim_{s \nearrow t} \phi_s, \quad t > 0.$$

Dokaz. Po Propoziciji 2.2.6 složeni Poissonov proces $(Y_t - \lambda t \mathbb{E}[Z] : t \in \mathbb{R}_+)$ je martingal, a onda je posljedično i stohastički integralni proces

$$t \mapsto \int_0^t \phi_{s^-} \mathrm{d}(Y_s - \lambda \mathbb{E}[Z] \mathrm{d}s) = \int_0^t \phi_{s^-} (Z_{N_s} \mathrm{d}N_s - \lambda \mathbb{E}[Z] \mathrm{d}s)$$

također martingal prema Napomeni 3.1.5 uz činjenicu da adaptiranost od $(\phi_t : t \in \mathbb{R}_+)$ s obzirom na filtraciju generiranu s $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ povlači i adaptiranost od $(\phi_{t^-} : t \in \mathbb{R}_+)$ s obzirom na filtraciju

$$\mathcal{F}_{t^-} := \sigma(Y_s : s \in [0, t)).$$

Koristeći činjenicu da je očekivanje martingala konstantno tokom vremena, dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-}(\mathrm{d}Y_t - \lambda\mathbb{E}[Z]\mathrm{d}t)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-}\mathrm{d}Y_t\right] - \lambda\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-}\mathrm{d}t\right]. \end{aligned}$$

□

Primjer 3.1.7. *Uzmemo li $\phi_t = Y_t := N_t$, dobivamo*

$$\int_0^T N_{t^-}\mathrm{d}N_t = \sum_{k=1}^{N_T}(k-1) = \frac{1}{2}N_T(N_T - 1).$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^T N_{t^-}\mathrm{d}N_t\right] &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[N_T^2] - \mathbb{E}[N_T]) \\ &= \frac{(\lambda T)^2}{2} \\ &= \lambda\int_0^T \lambda\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_0^T \mathbb{E}[N_t]\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

kao i u (3.2).

Napomena 3.1.8. *Primijetimo da identitet* (3.2) *vrijedi samo za limes slijeva ϕ_{t^-}, ali ne i za ϕ_t. Zaista, ukoliko stavimo $\phi_t = Y_t := N_t$, imamo*

$$\int_0^T N_t\mathrm{d}N_t = \sum_{k=1}^{N_T} k = \frac{1}{2}N_T(N_T + 1),$$

iz čega slijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T N_T \mathrm{d}N_t\right] &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[N_T^2] + \mathbb{E}[N_T]) \\
&= \frac{1}{2}((\lambda T)^2 + 2\lambda T) \\
&= \frac{(\lambda T)^2}{2} + \lambda T \\
&\neq \lambda \mathbb{E}\left[\int_0^T N_t \mathrm{d}t\right].
\end{aligned}
$$

U sljedećoj propoziciji ćemo pokazati kako složeni Poissonov kompenzirani stohastički integral zadovoljava Itôvu izometriju uz slične pretpostavke kao i gore.

Propozicija 3.1.9. *Neka je $(\phi_t : t \in \mathbb{R}_+)$ slučajni proces adaptiran s obzirom na filtraciju generiranu s $(Y_t : T \in \mathbb{R}_+)$, dopušta limes slijeva i vrijedi*

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^T |\phi_t|^2 \mathrm{d}t\right] < \infty, \quad T > 0.
$$

Očekivanje kvadriranog složenog Poissonovog kompenziranog stohastičkog integrala može se izračunati kao

$$
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \phi_{t^-}(\mathrm{d}Y_t - \lambda \mathbb{E}[Z]\mathrm{d}t)\right)^2\right] = \lambda \mathbb{E}[Z^2]\mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-}^2 \mathrm{d}t\right]. \tag{3.3}
$$

Dokaz. Iz Fubinijevog teorema slijedi

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \phi_{t^-}(\mathrm{d}Y_t - \lambda \mathbb{E}[Z]\mathrm{d}t)\right)^2 \\
&= 2\int_0^T \phi_{t^-} \int_0^{t^-} \phi_{s^-}(\mathrm{d}Y_s - \lambda \mathbb{E}[Z]\mathrm{d}s)(\mathrm{d}Y_t - \lambda \mathbb{E}[Z]\mathrm{d}t) \\
&+ \int_0^T \phi_{t^-}^2 Z_{N_t}^2 \mathrm{d}N_t.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

U gornjoj jednakosti ne integriramo po dijagonali $s = t$ jer unutarnji integral ima gornju granicu t^- umjesto t. Nadalje, uzimajući očekivanje s obje strane u (3.4), imamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \phi_{t^-}(\mathrm{d}Y_t - \lambda \mathbb{E}[Z]\mathrm{d}t)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-}^2 Z_{N_t}^2 \mathrm{d}N_t\right] \\
&= \lambda \mathbb{E}[Z^2]\mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-}^2 \mathrm{d}t\right],
\end{aligned}
$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili činjenicu da je Itôv integral s obzirom na martingal i sam martingal:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \phi_{t^-} \int_0^{t^-} \phi_{s^-}(\mathrm{d}Y_s - \lambda\mathbb{E}[Z]\mathrm{d}s)(\mathrm{d}Y_t - \lambda\mathbb{E}[Z]\mathrm{d}t)\right] = 0,$$

a u drugoj martingalno svojstvo kompenziranog složenog Poissonovog procesa

$$t \mapsto \left(\sum_{k=1}^{N_t} Z_k^2\right) - \lambda t\mathbb{E}[Z^2], \quad t \geq 0,$$

kao i u dokazu Propozicije 3.1.7. □

Kako bismo iskoristili Itôv integral s obzirom na Brownovo gibanje u primjeru, prisjetimo se definicije Brownovog gibanja.

Definicija 3.1.10. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $(B_t : t \geq 0)$ *je Brownovo gibanje ako vrijedi:*

1. *Putevi* $t \mapsto B_t(\omega)$ *su neprekidne funkcije s* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *za g.s.* $\omega \in \Omega$
2. $B_0 = 0$
3. *Za sve* $m \in \mathbb{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ *su prirasti*

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

   nezavisni.

4. *Vrijedi da su inkrementi normalno distribuirani, tj.* $B_{t+h} - B_t \sim N(0, h)$*, za sve* $h > 0$.

Ako je $(u_t : t \in \mathbb{R}_+)$ jednostavni slučajni proces, onda možemo definirati i Itôv integral procesa $(u_t : t \in \mathbb{R}_+)$ s obzirom na Brownovo gibanje. Podsjetimo se, adaptirani slučajni proces $(H_t : t \in [0, T])$ je jednostavan ako postoji particija $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots t_n = T\}$ intervala $[0, T]$ i omeđene slučajne varijable ϕ_j, $j = 0, 1, \ldots n-1$ takve da je ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva, gdje je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ Brownovska filtracija.

Definicija 3.1.11. *Itôv integral jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B je slučajni proces* $I = (I_t : t \in [0, T])$ *dan s*

$$I_t = \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s := \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1}\wedge t} - B_{t_j \wedge t}).$$

Potom se gornja definicija Itôvog integrala proširuje na sve adaptirane procese $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$, gdje je $\mathcal{L}^2_{ad}$ familija procesa $(H_t : t \in \mathbb{R}_+)$ za koje vrijedi

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_t^2 \mathrm{d}t\right) < \infty$$

Glavna ideja je aproksimirati proces H nizom jednostavnih procesa za koje znamo izračunati Itôv integral s obzirom na Brownovo gibanje iz gornje definicije. Itôv integral onda možemo definirati kao limes integrala tih jednostavnih integranada. Za više detalja pogledati [9, Poglavlje 2.].

Primjer 3.1.12. *Neka je $(B_t : t \in \mathbb{R}_+)$ standardno Brownovo gibanje neovisno od $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ te neka je $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ proces definiran kao*

$$X_t := \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t v_s \mathrm{d}s + Y_t, \quad t \geq 0,$$

gdje je $(u_t : t \in \mathbb{R}_+)$ slučajni proces adaptiran s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+)$ generiranu s $(B_t : t \in \mathbb{R}_+)$ i $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ te za koji vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\phi_t|^2 |u_t|^2 \mathrm{d}t\right] < \infty$$

i

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\phi_t v_t| \mathrm{d}t\right] < \infty, T > 0.$$

Definiramo stohastički integral od $(\phi_t : t \in \mathbb{R}_+)$ po $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ kao

$$\begin{aligned}\int_0^T \phi_t \mathrm{d}X_t :&= \int_0^T \phi_t u_t \mathrm{d}B_t + \int_0^T \phi_t v_t \mathrm{d}t + \int_0^T \phi_t \mathrm{d}Y_t \\ &= \int_0^T \phi_t u_t \mathrm{d}B_t + \int_0^T \phi_t v_t \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{N_T} \phi_{T_k} Z_k, \quad T > 0.\end{aligned}$$

Tada za martingal

$$X_t := \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s + Y_t - \lambda t \mathbb{E}[Z], \quad t \geq 0,$$

vrijedi izometrija:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \phi_{t^-} \mathrm{d}X_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T |\phi_{t^-}|^2 |u_t|^2 \mathrm{d}t\right] + \lambda \mathbb{E}[|Z|^2] \mathbb{E}\left[\int_0^T |\phi_{t^-}|^2 \mathrm{d}t\right], \tag{3.5}$$

uz adaptiranost procesa $(\phi_t : t \in \mathbb{R}_+)$ s obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+)$.

Napomena 3.1.13. *Uz* $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t v_s \mathrm{d}s + \int_0^t \eta_s \mathrm{d}Y_s, \quad t \geq 0,$$

stohastički integral od $(\phi_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *dan je kao*

$$\begin{aligned}\int_0^T \phi_s \mathrm{d}X_s :&= \int_0^T \phi_s \mathrm{d}B_s + \int_0^T \phi_s v_s \mathrm{d}s + \int_0^T \eta_s \phi_s \mathrm{d}Y_s \\ &= \int_0^T \phi_s u_s \mathrm{d}B_s + \int_0^T \phi_s v_s \mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{N_T} \phi_{T_k} \eta_{T_k} Z_k, \quad T > 0.\end{aligned}$$

3.2 Itôva formula sa skokovima

Sljedeća propozicija daje najjednostavniji oblik Itôve formule sa skokovima u slučaju standardnog Poissonovog procesa $(N_t : t \in \mathbb{R}_+)$ s intenzitetom λ.

Propozicija 3.2.1. *Itôva formula za standardni Poissonov proces. Vrijedi*

$$f(N_t) = f(0) + \int_0^t (f(N_s) + f(N_{s^-}))\mathrm{d}N_s, \quad t \geq 0,$$

gdje N_{s^-} *predstavlja limes slijeva* $N_{s^-} = \lim_{h \searrow 0} N_{s-h}$.

Dokaz. Primijetimo da vrijedi

$$N_s = N_{s^-} + 1 \text{ ako } \mathrm{d}N_s = 1 \text{ i } k = N_{T_k} = 1 + N_{T_k^-}, \quad k \geq 1.$$

Stoga imamo *teleskopirajuću sumu*:

$$\begin{aligned}f(N_t) &= f(0) + \sum_{k=1}^{N_t} (f(k) - f(k-1)) \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{N_t} (f(N_{T_k}) - f(N_{T_k^-})) \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{N_t} (f(1 + N_{T_k^-}) - f(N_{T_k^-})) \\ &= f(0) + \int_0^t (f(1 + N_{s^-}) - f(N_{s^-}))\mathrm{d}N_s \\ &= f(0) + \int_0^t (f(N_s) - f(N_{s^-}))\mathrm{d}N_s,\end{aligned}$$

gdje N_{s^-} predstavlja limes slijeva $N_{s^-} = \lim_{h\searrow 0} N_{s-h}$.

□

Sljedeći rezultat odnosi se na složeni Poissonov proces.

Propozicija 3.2.2. *Itôva formula za složeni Poissonov proces* $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$. *Vrijedi*

$$f(Y_t) = f(0) + \int_0^t (f(Y_s) - f(Y_{s^-}))\mathrm{d}N_s, \quad t \geq 0, \tag{3.6}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} f(Y_t) &= f(0) + \sum_{k=1}^{N_t} (f(Y_{T_k}) - f(Y_{T_k^-})) \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{N_t} (f(Y_{T_k} + Z_k) - f(Y_{T_k^-})) \\ &= f(0) + \int_0^t (f(Y_{s^-} + Z_{N_s}) - f(Y_{s^-}))\mathrm{d}N_s \\ &= f(0) + \int_0^t (f(Y_s) - f(Y_{s^-}))\mathrm{d}N_s, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

□

Općenito vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 3.2.3. *Za Itôv proces oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t v_s \mathrm{d}s + \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t \eta_s \mathrm{d}Y_s, \quad t \geq 0,$$

vrijedi Itôva formula

$$\begin{aligned} f(X_t) =& f(X_0) + \int_0^t v_s f'(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t u_s f'(X_s)\mathrm{d}B_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)|u_s|^2\mathrm{d}s + \int_0^t (f(X_s) - f(X_{s^-}))\mathrm{d}N_s, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dokaz. Kombinirajući Itôvu formulu za Brownovo gibanje (za detalje pogledati [9, Teorem 2.21]) i Itôvu formulu za složeni Poissonov proces iz Propozicije 3.2.2 dobivamo

$$\begin{aligned}
f(X_t) =& f(X_0) + \int_0^t u_s f'(X_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)|u_s|^2\mathrm{d}s + \int_0^t v_s f'(X_s)\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{k=1}^{N_T} (f(X_{T_k^-} + \eta_{T_k} Z_k) - f(X_{T_k^-})) \\
=& f(X_0) + \int_0^t u_s f'(X_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)|u_s|^2\mathrm{d}s + \int_0^t v_s f'(X_s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t (f(X_{s^-} + \eta_s Z_{N_s}) - f(X_{s^-}))\mathrm{d}N_s, \quad t \geq 0,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi (3.7). □

Napomena 3.2.4. *Integralna Itôva formula* (3.7) *može se prikazati i u diferencijalnom obliku kao*

$$\mathrm{d}f(X_t) = v_t f'(X_t)\mathrm{d}t + u_t f'(X_t)\mathrm{d}B_t + \frac{|u_t|^2}{2} f''(X_t)\mathrm{d}t + (f(X_t) - f(X_{t^-}))\mathrm{d}N_t, \quad t \geq 0. \tag{3.8}$$

3.3 Itôva tablica sa skokovima

Za slučajni proces $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ zadan kao

$$X_t = \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t v_s \mathrm{d}s + \int_0^t \eta_s \mathrm{d}N_s, \quad t \geq 0,$$

Itôva formula sa skokovima glasi

$$\begin{aligned}
f(X_t) =& f(0) + \int_0^t u_s f'(X_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t |u_s|^2 f''(X_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t v_s f'(X_s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t (f(X_{s^-} + \eta_s) - f(X_{s^-}))\mathrm{d}N_s \\
=& f(0) + \int_0^t u_s f'(X_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t |u_s|^2 f''(X_s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t v_s f'(X_s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t (f(X_s) - f(X_{s^-}))\mathrm{d}N_s.
\end{aligned}$$

Ukoliko imamo dva Itôva procesa $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ i $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ zapisana u diferencijalnom obliku kao

$$\mathrm{d}X_t = u_t \mathrm{d}B_t + v_t \mathrm{d}t + \eta_t \mathrm{d}N_t, \quad t \geq 0$$

i

$$dY_t = a_t dB_t + b_t dt + c_t dN_t, \quad t \geq 0,$$

Itôvu formulu za procese za skokovima možemo zapisati kao

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t \cdot dY_t,$$

gdje produkt $dX_t dY_t$ računamo pomoću Itôve tablice za procese za skokovima dane dolje. Izraz $dB_t dN_t$ jednak je 0 zbog činjenice da $(N_t : t \in \mathbb{R}_+)$ ima konačnu varijaciju na bilo kojem konačnom intervalu (jer se radi o rastućem procesu). Također vrijedi

$$dN_t \cdot dN_t = (dN_t)^2 = dN_t$$

jer je $\Delta N_t \in \{0, 1\}$.
Itôva tablica dana je s

$\cdot$	dt	dB_t	dN_t
dt	0	0	0
dB_t	0	dt	0
dN_t	0	0	dN_t

.

Vrijedi

$$\begin{aligned} dX_t \cdot dY_t =& (v_t dt + u_t dB_t + \eta_t dN_t)(b_t dt + a_t dB_t + c_t dN_t) \\ =& v_t b_t dt \cdot dt + u_t b_t dB_t \cdot dt + \eta_t b_t dN_t \cdot dt \\ &+ v_t a_t dt \cdot dB_t + u_t a_t dB_t \cdot dB_t + \eta_t a_t dN_t \cdot dB_t \\ &+ v_t c_t dt \cdot dN_t + u_t c_t dB_t \cdot dN_t + \eta_t c_t dN_t \cdot dN_t \\ =& u_t a_t dB_t \cdot dB_T + \eta_t c_t dN_t \cdot dN_t \\ =& u_t a_t dt + \eta_t c_t dN_t. \end{aligned}$$

Posebno, vrijedi

$$(dX_t)^2 = (v_t dt + u_t dB_t + \eta_t dN_t)^2 = u_t^2 dt + \eta_t^2 dN_t.$$

3.4 Procesi sa skokovima s beskonačnom aktivnošću

Složeni Poissonovi procesi po konstrukciji imaju konačan broj skokova na svakom omeđenom intervalu. Pripadaju familiji tzv. *Lévyjevih procesa* koji mogu imati i beskonačan broj skokova na bilo kojem konačnom vremenskom intervalu. Takve procese zovemo i *Lévyjevi* *procesi beskonačne aktivnosti* te ih koristimo u financijskom modeliranju, primjerice za određivanje cijena opcija čije ponašanje uključuje skokove s beskonačnom aktivnošću te čija volatilnost varira u vremenu. Uključuju gama procese, varijantne gama procese, inverzne gaussovske procese itd. U ovom potpoglavlju dat ćemo heuristički prikaz proširenja Itôve formule (3.7) na Lévyjeve procese s beskonačnom aktivnošću.

Uz dani $\eta(s)$, $s \in \mathbb{R}_+$, determinističku funkciju vremena i $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ Itôv proces oblika

$$X_t := X_0 + \int_0^t v_s \mathrm{d}s + \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s + \int_0^t \eta(s)\mathrm{d}Y_t, \quad t \geq 0,$$

Itôva formula sa skokovima (3.7) može se prikazati kao

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t v_s f'(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t u_s f'(X_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)u_s^2 \mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t (f(X_{s^-} + \eta(s)\Delta Y_s) - f(X_{s^-}))\mathrm{d}N_s - \lambda \int_0^t \mathbb{E}[f(x+\eta(s)Z) - f(x)]_{|x=X_{s^-}} \mathrm{d}s \\ &+ \lambda \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (f(X_{s^-} + \eta(s)y) - f(X_{s^-}))\nu(y)\mathrm{d}s, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Uočimo da se u gornjem izrazu pojavljuje kompenzirani martingal

$$\begin{aligned} &\int_0^t (f(X_s) - f(X_{s^-}))\mathrm{d}N_s - \lambda \int_0^t \mathbb{E}[f(x+\eta(s)Z) - f(x)]_{|x=X_{s^-}} \mathrm{d}s \\ &\quad = \int_0^t (f(X_{s^-} + \eta(s)\Delta Y_s) - f(X_{s^-}))\mathrm{d}N_s \\ &\quad - \lambda \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (f(X_{s^-} + \eta(s)y) - f(X_s))\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

uz relaciju $\mathrm{d}X_s = \eta_s \Delta Y_s$. Također, primijetimo da pomoću relacije

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} y\nu(\mathrm{d}y),$$

zadnji sumand u gornjem izrazu možemo pisati kao

$$\begin{aligned} &\lambda \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (f(X_{s^-} + \eta(s)y) - f(X_{s^-}))\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s \\ &= \lambda \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (f(X_{s^-} + \eta(s)y) - f(X_{s^-}) - \eta(s)yf'(X_{s^-}))\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s \\ &+ \lambda\mathbb{E}[Z] \int_0^t \eta(s)f'(X_{s^-})\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Izraz (3.9) predstavlja proširenje Itôve formule na Lévyjeve procese s beskonačnim brojem skokova na bilo kojem intervalu uz uvjete

$$\int_{|y|\leq 1} y^2 \nu(\mathrm{d}y) < \infty \quad \text{te} \quad \nu([-1,1]^c) < \infty,$$

uz ograničenje

$$|f(x+y) - f(x) - yf'(x)| \leq Cy^2, \quad y \in [-1,1],$$

koje slijedi iz Taylorovog teorema za $f \in C^2(\mathbb{R})$. Konačno, dobivamo

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t v_s f'(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t u_s f'(X_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)u_s^2 \mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t (f(X_{s^-} + \eta(s)\Delta Y_s) - f(X_{s^-}))\mathrm{d}N_s - \lambda \int_0^t \mathbb{E}[f(x+\eta(s)Z) - f(x)]_{|x=X_{s^-}} \mathrm{d}s \\
&+ \lambda \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (f(X_{s^-} + \eta(s)y) - f(X_{s^-}) - \eta(s)yf'(X_{s^-}))\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s \\
&+ \lambda \mathbb{E}[Z] \int_0^t \eta(s) f'(X_{s^-})\mathrm{d}s, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Napomena 3.4.1. *Koristeći stohastički integral determinističke funkcije $f(t)$ obzirom na $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ definiran kao*

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}Y_t = \sum_{k=1}^{N_T} Z_k f(T_k),$$

i Propoziciju 2.2.1, može se pokazati da je funkcija momenata od $\int_0^T f(t)\mathrm{d}Y_t$ dana kao

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}Y_t\right)\right] &= \exp\left(\lambda \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (e^{yf(t)} - 1)\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t\right) \\
&= \exp\left(\lambda \int_0^T (\mathbb{E}[e^{f(t)Z}] - 1)\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

Glavna ideja dokaza je aproksimacija funkcije f jednostavnim funkcijama. Također vrijedi

$$\begin{aligned}
\log \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}Y_t\right)\right] &= \lambda \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (e^{yf(t)} - 1)\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} y^n f^n(t)\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t \\
&= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbb{E}[Z^n] \int_0^T f^n(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Kumulant *reda* $n \geq 1$ *od* $\int_0^T f(t)\mathrm{d}Y_t$ *dan kao*

$$\kappa_n = \lambda \mathbb{E}[Z^n] \int_0^T f^n(t)\mathrm{d}t,$$

iz čega slijede (2.3) *i* (2.4) *uz* $f(t) := \mathbb{1}_{[0,T]}(t)$ *za* $n = 1, 2.$

Poglavlje 4

Stohastičke diferencijalne jednadžbe sa skokovima

U Black-Scholes-Mertonovom neprekidnom modelu cijena imovine, povrati procesa cijena nerizične imovine $(A_t : t \in \mathbb{R}_+)$ i procesa cijena rizične imovine $(S_t : t \in \mathbb{R}_+)$ dani su stohastičkim diferencijalnim jednadžbama

$$\frac{\mathrm{d}A_t}{A_t} = r\mathrm{d}t \quad \text{te} \quad \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B_t, \qquad r > 0,\ \sigma > 0,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Gornje jednadžbe predstavljaju model tržišta koji se sastoji od dvije financijske imovine, novca i dionica. Novac se ukamaćuje po kamatnoj stopi r, koja je jednaka za ulaganje i posuđivanje, što vidimo u prvoj gornjoj jednadžbi. Druga financijska imovina čije povrate promatramo su dionice, čiju cijenu određujemo pomoću geometrijskog Brownovog gibanja, što vidimo iz druge jednadžbe gore. U toj jednadžbi μ predstavlja srednju stopu povrata, a σ volatilnost dionice.
U ovom poglavlju želimo modelirati proces cijena imovine $(S_t : t \in \mathbb{R}_+)$ pomoću procesa sa skokovima. Prvo ćemo pretpostaviti konstantne tržišne povrate te navesti rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe obzirom na standardni Poissonov proces. Zatim ćemo pretpostaviti povrate ovisne o vremenu te navesti rješenje opće stohastičke diferencijalne jednadžbe sa skokovima. Uvest ćemo i primjere s povratima modeliranima pomoću kompenziranog Poissonovog procesa te geometrijskog Brownovog gibanja sa složenim Poissonovim skokovima.
Prvo pretpostavljamo da imamo tržište s konstantnim povratima $\eta > -1$.

Napomena 4.0.1. *Započnimo prvo s jednostavnim primjerom konstantnog povrata η oblika*

$$\eta := \frac{S_t - S_{t^-}}{S_{t^-}}, \tag{4.1}$$

uz pretpostavku skoka u vremenu $t > 0$, tj. $\mathrm{d}N_t = 1$. *Koristeći* $\mathrm{d}S_t := S_t - S_{t^-}$, (4.1) *možemo zapisati kao*

$$\eta \mathrm{d}N_t = \frac{S_t - S_{t^-}}{S_{t^-}} = \frac{\mathrm{d}S_t}{S_{t^-}},$$

ili

$$\mathrm{d}S_t = \eta S_{t^-} \mathrm{d}N_t,$$

što predstavlja stohastičku diferencijalnu jednadžbu obzirom na standardni Poissonov proces s konstantnom volatilnošću $\eta \in \mathbb{R}$. Limes slijeva S_{t^-} u (4.0.1) *slijedi direktno iz definicije* (4.0.1) *povrata ukoliko podijelimo s prethodnom indeksnom vrijednošću S_{t^-}. Ukoliko se skok dogodio u vremenu t, iz jednadžbe* (4.1) *također vidimo*

$$S_t = (1 + \eta) S_{t^-}, \quad \mathrm{d}N_t = 1.$$

Indukcijom po vremenima skokova $T_1, T_2, \ldots, T_{N_t}$ do vremena t dobivamo rješenje od (4.0.1) *kao*

$$S_t = S_0 (1 + \eta)^{N_t}, \quad t \geq 0.$$

Sada promotrimo slučaj povrata ovisnih vremenu $\eta_t, t \geq 0$.

Napomena 4.0.2. *Pretpostavimo da η_t ovisi o vremenu, tj. možemo pisati*

$$\mathrm{d}S_t = \eta_t S_{t^-} \mathrm{d}N_t.$$

Za vrijeme skoka T_k, relaciju (4.0.2) *možemo zapisati kao*

$$\mathrm{d}S_{T_k} = S_{T_k} - S_{T_k^-} = \eta_{T_k} S_{T_k^-},$$

tj.

$$S_{T_k} = (1 + \eta_{T_k}) S_{T_k^-}.$$

Ponavljajući gornji argument za $k = 1, 2, \ldots, N_t$ dobivamo

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \prod_{k=1}^{N_t} (1 + \eta_{T_k}) \\ &= S_0 \prod_{\substack{\Delta N_s = 1 \\ 0 \leq s \leq t}} (1 + \eta_s) \\ &= S_0 \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \eta_s \Delta N_s), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Koristeći sličan argument kao i gore, može se pokazati sljedeća propozicija.

Propozicija 4.0.3. *Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe sa skokovima*

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_t \mathrm{d}t + \eta_t S_{t^-}(\mathrm{d}N_t - \lambda \mathrm{d}t),$$

dano je s

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s \mathrm{d}s - \lambda \int_0^t \eta_s \mathrm{d}s\right) \prod_{k=1}^{N_t} (1 + \eta_{T_k}), \quad t \geq 0.$$

Napomena 4.0.4. *Primijetimo da su jednadžbe*

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_{t^-} \mathrm{d}t + \eta_t S_{t^-}(\mathrm{d}N_t - \lambda \mathrm{d}t)$$

i

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_t \mathrm{d}t + \eta_t S_{t^-}(\mathrm{d}N_t - \lambda \mathrm{d}t)$$

ekvivalentne jer vrijedi $S_{t^-}\mathrm{d}t = S_t \mathrm{d}t$*, što je posljedica činjenice da je skup* $\{T_k : k \geq 1\}$ *vremena skokova mjere nula.*

Napomena 4.0.5. *Promotrimo jednadžbu obzirom na kompenzirani Poissonov proces* $(Y_t - \lambda \mathbb{E}[Z]t) : t \in \mathbb{R}_+)$

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_t \mathrm{d}t + \eta_t S_{t^-}(\mathrm{d}Y_t - \lambda \mathbb{E}[Z] \mathrm{d}t),$$

koju možemo zapisati u obliku

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_t \mathrm{d}t + \eta_t S_{t^-}(Z_{N_t} \mathrm{d}N_t - \lambda \mathbb{E}[Z] \mathrm{d}t).$$

Rješenje gornje jednadžbe dano je s

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s \mathrm{d}s - \lambda \mathbb{E}[Z] \int_0^t \eta_s \mathrm{d}s\right) \prod_{k=1}^{N_t} (1 + \eta_{T_k} Z_k), \quad t \geq 0. \tag{4.2}$$

U sljedećoj propoziciji dajemo rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe obzirom na geometrijsko Brownovo gibanje sa složenim Poissonovim skokovima.

Napomena 4.0.6. *Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe oblika*

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_t \mathrm{d}t + \eta_t S_{t^-}(\mathrm{d}Y_t - \lambda \mathbb{E}[Z] \mathrm{d}t) + \sigma_t S_t \mathrm{d}B_t,$$

dano je s

$$\begin{aligned} S_t = & S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s \mathrm{d}s - \lambda \mathbb{E}[Z] \int_0^t \eta_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 \mathrm{d}s\right) \\ & \times \prod_{k=1}^{N_t} (1 + \eta_{T_k} Z_k), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Kao zadnju napomenu navodimo rezultat koji daje generalizaciju modela iz Napomene 4.0.6 na procese s beskonačnom aktivnošću. Za detalje usporediti [8, Poglavlje 4., Poglavlje 8.].

Napomena 4.0.7. *Ukoliko zapišemo S_t kao*

$$\begin{aligned} S_t =& S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s \mathrm{d}s + \int_0^t \eta_s (\mathrm{d}Y_s - \lambda \mathbb{E}[Z] \mathrm{d}s) + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 \mathrm{d}s \right) \\ & \times \prod_{k=1}^{N_t} \left((1 + \eta_{T_k} Z_k) e^{-\eta_{T_k} Z_k} \right), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

možemo proširiti ovaj model na procese s beskonačnim brojem skokova na bilo kojem konačnom vremenskom intervalu.

Poglavlje 5

Girsanovljev teorem za procese sa skokovima

Girsanovljev teorem predstavlja jedan od najvažnijih teorema stohastičkog računa. Rezultat tog teorema daje nam način zamjene vjerojatnosne mjere, što olakšava račun i analizu slučajnih procesa. Ipak, najvažnija primjena Girsanovljevog teorema je pronalazak *ekvivalentne martingalne mjere*, odnosno *mjere neutralne na rizik*, što olakšava mnoge financijske račune povezane s modeliranjem cijena opcija i upravljanjem rizicima. Spomenut ćemo i pojam *Radon - Nikodymove derivacije* koja kvantificirana promjenu u vjerojatnosnoj gustoći između originalne i nove mjere. Prvo ćemo navesti Girsanovljev teorem za Brownovo gibanje, koji ćemo proširiti na standardni Poissonov proces i na složeni Poissonov proces.

Napomena 5.0.1. *Girsanovljev teorem za Brownovo gibanje. Pretpostavimo da je $\mu \in \mathbb{R}$, $T > 0$ i $B = (B_t : t \in \mathbb{R}_+)$ Brownovo gibanje. Uz vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_{-\mu}$ definiranu pomoću Radon-Nikodymove gustoće*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_{-\mu}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} := e^{-\mu B_T - \mu^2 T/2},$$

slučajna varijabla $B_T + \mu T$ ima normalnu distribuciju $\mathrm{N}(0, T)$.
Ova činjenica slijedi iz

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_{-\mu}[f(B_T + \mu T)] &= \mathbb{E}[f(B_T + \mu T)e^{-\mu B_T - \mu^2 T/2}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \mu T) e^{-\mu x - \mu^2 T/2} e^{-x^2/(2T)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \mu T) e^{-(x+\mu T)^2/(2T)} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2/(2T)} \mathrm{d}y \\
&= \mathbb{E}[f(B_T)], \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

za bilo koju izmjerivu funkciju f na $\mathbb{R}$, što pokazuje da slučajna varijabla $B_T + \mu T$ ima normalnu distribuciju po $\tilde{\mathbb{P}}_{-\mu}$. Nadalje, Girsanovljev teorem tvrdi da je $(B_t + \mu t)_{t\in[0,T]}$ standardno Brownovo gibanje obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{-\mu}$. Za detalje pogledati [9, Teorem 4.4].

5.1 Girsanovljev teorem za standardni Poissonov proces

Kada Brownovo gibanje zamijenimo sa standardnim Poissonovim procesom $(N_t : t \in [0, T])$, prostorni pomak oblika

$$B_t \mapsto B_t + \mu t$$

ne možemo koristiti jer $N_t + \mu t$ nije Poissonov proces zbog toga što trajektorije Poissonovog procesa imaju skokove veličine jedan i konstantan je između skokova.
Pravilan način za proširenje Girsanovljevog teorema na Poissonov proces je pomoću pomaka koji koristi intenzitet Poissonovog procesa, što je dokazano u Propoziciji 5.1.2.
Prvo pokazujemo svojstvo koja će nam biti korisno u dokazu Propozicije 5.1.2. i Propozicije 5.1.4

Lema 5.1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ integrabilni slučajni proces čiji su inkrementi međusobno nezavisni i za koji vrijedi da je očekivanje $\mathbb{E}[X_t]$ konstantno. Tada je proces $(X_t : t \in \mathbb{R})$ martingal obzirom na filtraciju $(\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}_+)$ generiranu s $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$.*

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[X_t - X_s + X_s|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[X_t - X_s] + X_s \\
&= X_s, \quad 0 \le s \le t. \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

□

Propozicija 5.1.2. *Neka slučajna varijabla N_T ima Poissonovu distribuciju $P(\lambda T)$ obzirom na $\mathbb{P}_\lambda$. Uz vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$ definiranu pomoću Radon-Nikodymove derivacije*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_\lambda} := e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_T},$$

slučajna varijabla N_T ima Poissonovu distribuciju s intenzitetom $\tilde{\lambda}T$. Također, ukoliko je $(N_t : t \in [0,T])$ Poissonov proces obzirom na $\mathbb{P}_\lambda$, onda je kompenzirani proces $(N_t - \tilde{\lambda}t : t \in [0,T])$ martingal obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$.

Dokaz. Prvo pokazujemo prvu tvrdnju, tj. da slučajna varijabla N_T ima Poissonovu distribuciju s parametrom λT.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}(N_T = k) &= e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^k \mathbb{P}_\lambda(N_T = k)\\ &= e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^k e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\\ &= e^{-\tilde{\lambda}T}\frac{(\tilde{\lambda}T)^k}{k!}, \quad k \geq 0.\end{aligned}$$

Potom pokazujemo drugu tvrdnju, tj. da je kompenzirani proces martingal. Iz definicije Poissonovog procesa znamo da $(N_t : t \in \mathbb{R}_+)$ ima nezavisne inkremente obzirom na $\mathbb{P}_\lambda$ te iz (1.12) znamo da vrijedi $\mathbb{E}_\lambda[N_t] = \lambda t$.
Računamo

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}(N_t - N_s = k, N_s = l)\\ &= \tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\lambda}}[\mathbb{1}_{\{N_t - N_s = k\}}\mathbb{1}_{\{N_s = l\}}]\\ &= \mathbb{E}_\lambda\left[e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_T - N_t + N_t - N_s + N_s}\mathbb{1}_{\{N_t - N_s = k\}}\mathbb{1}_{\{N_s = l\}}\right]\end{aligned}$$

Radi lakšeg snalaženja uvedimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned}A &= \{N_t - N_s = k\}\\ B &= \{N_s = l\}.\end{aligned}$$

Iz činjenice da su $N_T - N_t$, $N_t - N_s$ i N_s nezavisne obzirom na $\mathbb{P}_\lambda$, slijedi:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\lambda\left[e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_T - N_t + N_t - N_s + N_s}\mathbb{1}_{\{N_t - N_s = k\}}\mathbb{1}_{\{N_s = l\}}\right]\\ &= \mathbb{E}_\lambda\left[e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_T - N_t + k + l}\right]\mathbb{P}_\lambda(A)\mathbb{P}_\lambda(B)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{i+k+l}\frac{[\lambda(T-t)]^i}{i!}e^{-\lambda(T-t)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda s)^l}{l!}e^{-\lambda s}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\tilde{\lambda}T}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[\tilde{\lambda}(T-t)]^i}{i!}\right)\frac{[\tilde{\lambda}(t-s)]^k}{k!}\frac{[\tilde{\lambda}s]^l}{l!}\\
&= e^{-\tilde{\lambda}T}e^{\tilde{\lambda}(T-t)}\frac{[\tilde{\lambda}(t-s)]^k}{k!}\frac{[\tilde{\lambda}s]^l}{l!}\\
&= e^{-\tilde{\lambda}(t-s)}\frac{[\tilde{\lambda}(t-s)]^k}{k!}e^{-\tilde{\lambda}s}\frac{[\tilde{\lambda}s]^l}{l!}\\
&= \tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}(N_t - N_s)\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}(N_s = l).
\end{aligned}
$$

Dokazali smo da su $N_t - N_s$ i N_s nezavisne obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$. Sad se po indukciji pokaže ekvivalentan rezultat za konačan skup inkremenata. Dakle $N_t - N_s - \tilde{\lambda}(t-s)$ i $N_s - \tilde{\lambda}s$ su nezavisni obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}$ jer za svaku izmjerivu funkciju g i h su $g(N_t - N_s)$ i $h(N_s)$ nezavisne. Obzirom da vrijedi $\mathbb{E}_{\lambda}[N_t - N_s - \tilde{\lambda}(t-s)] = 0$, po Lemi 5.1.1. slijedi da je $((N_t - \tilde{\lambda}t : t \in [0,T])$ martingal obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$.

□

Napomena 5.1.3. *Pretpostavimo sada da je* $(N_t : t \in [0,T])$ *standardni Poissonov proces s intenzitetom* λ *obzirom na vjerojatnosnu mjeru* $\mathbb{P}_{\lambda}$. *Kako bi proširili* (5.1) *na Poissonov proces, moramo zamijeniti prostorni pomak s kontrakcijom (ili dilatacijom) vremena*

$$N_t \mapsto N_{(1+c)t}$$

s faktorom $1 + c$, *gdje je*

$$c := -1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} > -1,$$

tj. $\tilde{\lambda} = (1+c)\lambda$. *Primijetimo*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\lambda}(N_{(1+c)T} = k) &= \frac{(\lambda(1+c)T)^k}{k!}e^{-\lambda(1+c)T}\\
&= (1+c)^k e^{-\lambda cT}\mathbb{P}_{\lambda}(N_T = k)\\
&= \tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}(N_T = k), \quad k \geq 0,
\end{aligned}
$$

gdje je

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\lambda}} = (1+c)^{N_T}e^{-\lambda cT}.$$

Analogno kao u (5.1) *imamo*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\lambda[f(N_{(1+c)T})] &= \sum_{k\geq 0} f(k)\mathbb{P}_\lambda(N_{(1+c)T} = k) \\ &= e^{-\lambda c T}\sum_{k\geq 0} f(k)(1+c)^k\mathbb{P}_\lambda(N_T = k) \\ &= e^{-\lambda c T}\mathbb{E}_\lambda[f(N_T)(1+c)^{N_T}] \\ &= \mathbb{E}_\lambda\left[f(N_T)\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_\lambda}\right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\lambda}}[f(N_T)],\end{aligned} \tag{5.3}$$

za bilo koju ograničenu funkciju f na $\mathbb{N}$. Drugim riječima, uz $f(x) := \mathbb{1}_{\{x\leq n\}}$, imamo

$$\mathbb{P}_\lambda(N_{(1+c)T} \leq n) = \tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}(N_T \leq n), \quad n \geq 0$$

ili

$$\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}(N_{T/(1+c)} \leq n) = \mathbb{P}_\lambda(N_T \leq n), \quad n \geq 0.$$

Propozicija 5.1.4. *Neka su $\lambda, \tilde{\lambda} > 0$ te neka je*

$$c := -1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} > -1.$$

Proces $(N_{t/(1+c)} : t \in [0,T])$ je standardni Poissonov proces s intenzitetom λ obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$ definiranu pomoću Radon-Nikodymove gustoće

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_\lambda} := e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N_T} = e^{-c\lambda T}(1+c)^{N_T}.$$

Posebno, kompenzirani Poissonovi procesi

$$N_{t/(1+c)} - \lambda t \quad i \quad N_t - \tilde{\lambda} t, \quad 0 \leq t \leq T$$

su martingali obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$.

Dokaz. Slično kao i u (5.1), vrijedi

$$\mathbb{E}_\lambda[f(N_T)] = \tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\lambda}}[f(N_{T/(1+c)})],$$

tj. $N_{T/(1+c)}$ obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom λT. Kako $(N_{T/(1+c)} : t \in [0,T])$ ima nezavisne inkremente, koristeći Napomenu 1.2.2 možemo zaključiti da se radi o standardnom Poissonovom procesu s parametrom λ obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$. Iz prethodno dokazane leme slijedi da je proces $(N_{T/(1+c)} - \lambda t : t \in [0,T])$ martingal obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$. Slično, kompenzirani proces

$$(N_t - (1+c)\lambda t : t \in [0,T]) = (N_t - \tilde{\lambda} t : t \in [0,T])$$

ima nezavisne inkremente i martingal je obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$. □

Napomena 5.1.5. *Također vrijedi*

$$N_{t(1+c)} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[T_n,\infty)}\Big(\frac{t}{1+c}\Big) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[(1+c)T_n,\infty)}(t), \quad t \geq 0,$$

iz čega vidimo da su vremena skokova $((1+c)T_n : n \geq 1)$ *od* $(N_{t/(1+c)} : t \in [0,T])$ *distribuirana obzirom na* $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$ *kao i vremena skokova Poissonovog procesa s intenzitetom* λ*.*

U sljedećem primjeru pokazat ćemo da je diskontirani proces cijena $(\tilde{S}_t : t \in \mathbb{R}_+)$ definiran kao $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ martingal obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$.

Primjer 5.1.6. *Neka je* $\mu \neq r$*. Proces povrata diskontiranog procesa cijena dan kao*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t^-}} = (\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma(\mathrm{d}N_t - \lambda \mathrm{d}t) \tag{5.4}$$

nije martingal obzirom na $\mathbb{P}_\lambda$*. Međutim, ukoliko gornju relaciju* (5.4) *zapišemo kao*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t^-}} = \sigma\Big(\mathrm{d}N_t - \Big(\lambda - \frac{\mu - r}{\sigma}\Big)\mathrm{d}t\Big)$$

te ukoliko uzmemo

$$\tilde{\lambda} := \lambda - \frac{\mu - r}{\sigma} = (1+c)\lambda,$$

gdje je

$$c := -\frac{\mu - r}{\sigma\lambda},$$

imamo

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t^-}} = \sigma(\mathrm{d}N_t - \tilde{\lambda}\mathrm{d}t).$$

Sada je jasno da je gornji proces martingal obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$ *definiranu pomoću Radon-Nikodymove derivacije kao*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_\lambda} := e^{-\lambda c T}(1+c)^{N_T} = e^{(\mu - r)/\sigma}\Big(1 - \frac{\mu - r}{\sigma\lambda}\Big)^{N_T}.$$

Ukoliko je $\mu - r \leq \sigma\lambda$, onda vjerojatnosna mjera neutralna na rizik $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda}}$ postoji i jedinstvena je, pa po Fundamentalnom teoremu određivanja cijene financijske imovine i Teoremu o potpunosti tržišta (za detalje vidjeti [9, Teorem 4.10, Teorem 4.13]) vrijedi da je tržište potpuno i bez arbitraže. Ukoliko je $\mu - r > \sigma\lambda$ onda proces cijena $(\tilde{S}_t : t \in \mathbb{R}_+)$ raste te je arbitraža omogućena na način da se ulaže u rizičnu imovinu koristeći štednju.

5.2 Girsanovljev teorem za složeni Poissonov proces

U ovom potpoglavlju proširit ćemo rezultat prethodnog potpoglavlja na složeni Poissonov proces, tj. bavit ćemo se generaliziranim Girsanovljevim teoreom koji će obuhvatiti varijacije vremena i veličine skokova. Prvo navodimo i dokazujemo taj rezultat.

Teorem 5.2.1. *Neka je $(Y_t : t \geq 0)$ složeni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ i distribucijom skokova $\nu(\mathrm{d}x)$. Neka je $\tilde{\lambda} > 0$ neki drugi intenzitet i neka je $\tilde{\nu}(\mathrm{d}x)$ druga vjerojatnosna distribucija skokova, apsolutno neprekidna obzirom na ν te neka je*

$$\psi(x) := \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\frac{\tilde{\nu}(\mathrm{d}x)}{\nu(\mathrm{d}x)} - 1, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Tada je proces

$$Y_t := \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t \geq 0$$

obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}$ definiranu pomoću Radon-Nikodymove gustoće

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\lambda,\nu}} := e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\prod_{k=1}^{N_T}(1 + \psi(Z_k))$$

složeni Poissonov proces s intenzitetom $\tilde{\lambda}$ i distribucijom skokova $\tilde{\nu}(\mathrm{d}x)$.

Dokaz. Za bilo koju ograničenu izmjerivu funkciju f na $\mathbb{R}$, proširujemo izraz (5.3) na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}\left[f\left(Y_T\right)\right] &= \mathrm{e}^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\mathbb{E}_{\lambda,\nu}\left[f\left(Y_T\right)\prod_{i=1}^{N_T}\left(1+\psi\left(Z_i\right)\right)\right] \\
&= \mathrm{e}^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}_{\lambda,\nu}\left[f\left(\sum_{i=1}^{k}Z_i\right)\prod_{i=1}^{k}\left(1+\psi\left(Z_i\right)\right)\mid N_T=k\right]\mathbb{P}_{\lambda}\left(N_T=k\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}T}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\mathbb{E}_{\lambda,\nu}\left[f\left(\sum_{i=1}^{k}Z_i\right)\prod_{i=1}^{k}\left(1+\psi\left(Z_i\right)\right)\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}T}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}f\left(z_1+\ldots+z_k\right)\prod_{i=1}^{k}\left(1+\psi\left(z_i\right)\right)\nu\left(dz_1\right)\ldots\nu\left(dz_k\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}T}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(\tilde{\lambda}T)^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}f\left(z_1+\ldots+z_k\right)\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\tilde{\nu}\left(dz_i\right)}{\nu\left(dz_i\right)}\right)\nu\left(dz_1\right)\ldots\nu\left(dz_k\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\tilde{\lambda}T}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(\tilde{\lambda}T)^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}f\left(z_1+\ldots+z_k\right)\tilde{\nu}\left(dz_1\right)\ldots\tilde{\nu}\left(dz_k\right).
\end{aligned}
$$

Gornji račun pokazuje da obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}$, Y_T ima istu distribuciju kao i složeni Poissonov proces intenziteta $\tilde{\lambda}$ i distribucije skokova $\tilde{\nu}$. Za dokaz nezavisnosti inkremenata od $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ obzirom na $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}$ referiramo se na [8, Propozicija 9.6]. □

Napomena 5.2.2. *U slučaju* $\nu \simeq \mathcal{N}\left(\alpha,\sigma^2\right)$ *i* $\tilde{\nu} \simeq \mathcal{N}\left(\beta,\eta^2\right)$*, vrijedi*

$$
\nu(dx) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\alpha)^2\right), \quad \tilde{\nu}(dx) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi\eta^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\eta^2}(x-\beta)^2\right),
$$

$x \in \mathbb{R}$*, stoga*

$$
\frac{\tilde{\nu}(dx)}{\nu(dx)} = \frac{\eta}{\sigma}\exp\left(\frac{1}{2\eta^2}(x-\beta)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\alpha)^2\right)
$$

te je $\psi(x)$ *dana s*

$$
1+\psi(x) = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\frac{\tilde{\nu}(dx)}{\nu(dx)} = \frac{\tilde{\lambda}\eta}{\lambda\sigma}\exp\left(\frac{1}{2\eta^2}(x-\beta)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(x-\alpha)^2\right), \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Kao posljedicu Teorema 5.2.1. navodimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 5.2.3. *Kompenzirani proces*

$$
Y_t - \lambda\tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\nu}}[Z]
$$

je martingal obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}$ *definiranu pomoću Radon-Nikodymove gustoće*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\lambda,\nu}} := e^{-(\tilde{\lambda}-\lambda)T}\prod_{k=1}^{N_T}(1+\psi(Z_k)).$$

Ovdje oznaka $\tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\nu}}$ *predstavlja očekivanje obzirom na mjeru* $\tilde{\nu}$*, tj.*

$$\tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\nu}} = \int_{-\infty}^{\infty} z\tilde{\nu}(dz).$$

Na kraju proširujemo Girsanovljev teorem na linearnu kombinaciju standardnog Brownovog gibanja $(B_t : t \in \mathbb{R}_+)$ i složenog Poissonovog procesa $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ nezavisnog od $(B_t : t \in \mathbb{R}_+)$.

Teorem 5.2.4. *Neka je* $(Y_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *složeni Poissonov proces s intenzitetom* $\lambda > 0$ *i distribucijom skokova* $\nu(\mathrm{d}x)$*. Neka je* $\tilde{\lambda} > 0$ *neki drugi parametar i neka je* $\tilde{\nu}(\mathrm{d}x)$ *druga vjerojatnosna distribucija, apsolutno neprekidna obzirom na* ν *te neka vrijedi*

$$\psi(x) := \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\frac{\mathrm{d}\tilde{\nu}}{\mathrm{d}\nu} - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje je $(u_t : t \in \mathbb{R}_+)$ *ograničeni adaptirani proces. Tada je proces*

$$\left(B_t + \int_0^t u_s \mathrm{d}s + Y_t - \tilde{\lambda}\tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\nu}}[Z]t : t \in [0,T]\right)$$

martingal obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_{u,\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}$ *definiranu pomoću Radon-Nikodymove derivacije*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_{u,\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\lambda,\nu}} = \exp\left(-(\tilde{\lambda}-\lambda)T - \int_0^T u_s \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^T u_s^2 \mathrm{d}s\right)\prod_{k=1}^{N_T}(1+\psi(Z_k)). \tag{5.6}$$

Sljedeća napomena posljedica je gornjeg teorema.

Napomena 5.2.5. *Ukoliko*

$$B_t + \int_0^t v_s \mathrm{d}s + Y_t \tag{5.7}$$

nije martingal obzirom na $\mathbb{P}_{\lambda,\nu}$*, bit će martingal obzirom na* $\tilde{\mathbb{P}}_{u,\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}$*, ukoliko izaberemo* v*,* $\tilde{\lambda}$ *i* $\tilde{\nu}$ *tako da vrijedi*

$$v_s = u_s - \tilde{\lambda}\tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\nu}}[Z], \quad s \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Tada (5.7) *dopušta martingalnu dekompoziciju*

$$\mathrm{d}B_t + u_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}Y_t - \tilde{\lambda}\tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\nu}}[Z]\mathrm{d}t,$$

gdje su procesi $\left(B_t + \int_0^t u_s\mathrm{d}s : t \in [0,T]\right)$ *i* $(Y_t + \tilde{\lambda}t\tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\nu}}[Z] : t \in [0,T])$ *martingali obzirom na* $\tilde{\mathbb{P}}_{u,\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}$*.*

Napomena 5.2.6. *1. Kada je $\tilde{\lambda} = \lambda = 0$, Teorem 5.2.4. podudara se s Girsanovljevim teoremom za Brownovo gibanje. U tom slučaju* (5.8) *dopušta samo jedno rješenje $u = v$ te je $\tilde{\mathbb{P}}_{u,0,0}$ jedinstvena.*

2. *Kada je $u = 0$ i kad nema Brownovog gibanja, te su Poissonovi skokovi fiksne veličine a, tj. $\tilde{\nu(\mathrm{d}x)} = \nu(\mathrm{d}x) = \delta_a(\mathrm{d}x)$,* (5.8) *također dopušta samo jedno rješenje $\tilde{\lambda} = \nu$ te je $\tilde{\mathbb{P}}_{0,\tilde{\lambda},\delta_a}$ jedinstvena.*

Primjer 5.2.7. *Neka je $\mu \neq r$. Tada diskontirani proces cijena $(\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t : t \in \mathbb{R}_+)$ definiran s*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_t}{\mathrm{d}\tilde{S}_{t^-}} = (\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t + \eta(\mathrm{d}Y_t - \lambda t \mathbb{E}_\nu[Z])$$

nije martingal s obzirom na mjeru $\mathbb{P}_{\lambda,\nu}$. Ipak, raspišemo li gornju jednadžbu u sljedećem obliku:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_t}{\mathrm{d}\tilde{S}_{t^-}} = \sigma(u\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t) + \eta\left(\mathrm{d}Y_t - \left(\frac{u\sigma}{\eta} + \lambda\mathbb{E}_\nu[Z] - \frac{\mu - r}{\eta}\right)\mathrm{d}t\right),$$

te izaberemo u, $\tilde{\nu}$ i $\tilde{\lambda}$ takve da vrijedi

$$\tilde{\lambda}\tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\nu}}[Z] = \frac{u\sigma}{\eta} + \lambda\mathbb{E}_\nu[Z] - \frac{\mu - r}{\eta} \tag{5.9}$$

dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_t}{\mathrm{d}\tilde{S}_{t^-}} = \sigma(u\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t) + \eta(\mathrm{d}Y_t - \tilde{\lambda}\tilde{\mathbb{E}}_{\tilde{\nu}}[Z]\mathrm{d}t).$$

Zaključujemo da je diskontirani proces cijena $(\tilde{S}_t : t \in \mathbb{R}_+)$ martingal s obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}_{u,\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}$ te je tržište bez arbitraže prema Prvom fundamentalnom teoremu o određivanju cijena imovine (pogledati [9, Teorem 4.10]) i činjenici da je $\tilde{\mathbb{P}}_{u,\tilde{\lambda},\tilde{\nu}}$ rizik-neutralna.
Ipak, tržište nije potpuno jer rješenja jednadžbe (5.9) *nisu jedinstvena pa ne možemo primijeniti Drugi fundamentalni teorem o određivanju cijena imovine (pogledati [9, Teorem 4.13]).*

Bibliografija

[1] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, 2004.

[2] R. F. Bass, *Stochastic differential equations with jumps*, `https://arxiv.org/pdf/math/0309246.pdf`, datum zadnjeg pristupanja: rujan 2023.

[3] H. T. Bosq, D. Nguyen, *A Course in Stochastic Processes*, Springer-Science+Business Media, B. V., 1996.

[4] R. J. García, M. A. Griego, *An elementary theory of stochastic differential equations driven by a poisson process*, Communications in Statistics. Stochastic Models (1994), br. 2, 335–363.

[5] N. Privault, *Introduction to Stochastic Finance with Market Examples*, CRC Press, 2023.

[6] P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, 2004.

[7] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga - Zagreb, 2002.

[8] R. Tankov, P. Cont, *Financial Modelling with Jump Processes*, CRC, 2003.

[9] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 2*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm2_p.pdf`, (datum zadnjeg pristupanja: rujan 2023.).

Sažetak

U ovom radu proučavamo Itôv račun, proširujući teoriju s klasičnog integratora, Brownovog gibanja, na jednostavne procese sa skokovima. U uvodnim poglavljima bavimo se jednom od osnovnih klasa slučajnih procesa sa skokovima - Poissonovim procesom i složenim Poissonovim procesom, a uz to navodimo i dokazujemo neka od njihovih svojstava koja će nam biti korisna u daljnjim razmatranjima. Nakon toga uvodimo tipične pojmove teorije Itôvog računa, ali obzirom na složeni Poissonov proces. Bavimo se Itôvim integralom i njegovim svojstvima te Itôvom formulom, a na kraju tog poglavlja dajemo kratak osvrt na procese beskonačne aktivnosti, koji predstavljaju generalizaciju dosad uvedenih procesa sa skokovima. U četvrtom poglavlju izdvajamo neke od stohastičkih diferencijalnih jednadžbi sa skokovima te njihova rješenja koja mogu poslužiti u modeliranju tržišnih povrata. Konačno, u zadnjem poglavlju bavimo se Girsanovljevim teorem za procese sa skokovima, jednim od najvažnijih teorema stohastičkog računa, koji opisuje ponašanje slučajnih procesa prilikom zamjene mjere. Podsjećamo se tog teorema za Brownovo gibanje, a zatim ga navodimo za standardni i složeni Poissonov proces, uz neke korisne primjere vezane uz modeliranje diskontiranog procesa cijena u financijama.

Summary

In this thesis, we take a look at Itô's calculus, expanding the theory from the classic integrator, the Brownian motion, to jump processes. The introductory chapters are dedicated to the fundamental class of stochastic processes with jumps - the Poisson process and the compound Poisson process. We present and prove some of their basic properties, which are useful in our further analysis. Furthermore, we introduce some basic concepts of Itô's calculus, with respect to the compound Poisson process. Itô's integral and its properties are examined, along with Itô's formula and, in the end, we give a short overview of infinity activity processes. These processes are a generalization of the processes we have studied up to that point. In the fourth section, we take a look at stochastic differential equations with jumps and their solutions, which serve as a great tool to model market returns. We conclude the thesis by introducing the Girsanov theorem for jump processes, which is one of the most important results of stochastic calculus. It describes the behaviour of stochastic processes under changes of measure. We remind ourselves of the Girsanov theorem for Brownian motion, and then we state the theorem for standard and compound Poisson processes. Finally, we give some useful examples regarding the modeling of discount prices of financial instruments.

Životopis

Rođen sam 22.11.1996. u Zadru gdje, nakon osnovnoškolskog obrazovanja u Osnovnoj školi Petra Preradovića, upisujem opći smjer Gimnazije Franje Petrića u Zadru, koju završavam 2015. godine.
Iste godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika u sklopu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. 2020. godine stječem titulu sveučilišnog prvostupnika matematike te nastavljam akademsko obrazovanje na istom fakultetu izborom Financijske i poslovne matematike kao diplomskog sveučilišnog studija.