Karakterizacije trapeza

Novaković, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Novaković

KARAKTERIZACIJE TRAPEZA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Marija Galić

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala Bogu i mojoj obitelji, roditeljima Slavici i Pavi,
sestri Nikolini i bratu Miroslavu, na bezuvjetnoj ljubavi i podršci.
Hvala svim prijateljima i kolegama koji su bili uz mene, a posebno dragoj Ivi.
Veliko hvala mentorici Mariji Galić na pomoći i savjetima pri izradi ovog rada.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Temeljni pojmovi **2**
1.1 Četverokuti 2
1.2 Trapez 2

2 Osnovna svojstva trapeza **6**
2.1 Osnovne karakterizacije 6
2.2 Teorem o srednjici trapeza 9
2.3 Eulerov teorem za trapez 11

3 Površina trapeza **14**
3.1 Metode računanja površine trapeza 14
3.2 Karakterizacije vezane uz površine 23

4 Trigonometrijska karakterizacija **26**
4.1 Trokut dijagonalnih točaka 26
4.2 Trigonometrijska verzija karakterizacije trapeza preko susjednih kutova . 28
4.3 Karakterizacije vezane uz stranice i udaljenosti 30

5 Ostali teoremi i zanimljivosti o trapezima **33**
5.1 Garfieldov trapez 33
5.2 Napoleonov teorem za trapeze 34
5.3 Jednakokračni trapez 36
5.4 Četverokuti i trapezi 40
5.5 Steinerov teorem za trapeze 42

Bibliografija **45**

Uvod

U geometriji, jedan od najjednostavnijih četverokuta je trapez (*eng. trapezoid* ili *trapezium*). Ime mu dolazi od grčke riječi *trapezia* što znači stol. U svakodnevnom životu prema ovom geometrijskom liku nazive su dobile različite pojave, od kostiju u ručnom zglobu, preko ideja u modnom dizajnu, pa sve do figura u sazviježđu. Stari Rimljani su također proučavali trapez i koristili njegova svojstva. Na primjer, presjeci kamenih blokova koji su služili za izgradnju klasičnog rimskog luka za mostove i zgrade morali su biti upravo jednakokračni trapezi. Kako u starom Rimu, tako i u modernom građevinarstvu, trapez, a posebno jednakokračni trapez, često je primjenjivan. Povezuje se i sa stilom gradnje i arhitekturom koja karakterizira građevine sa širim donjim, a užim gornjim dijelom. Iako je u geometriji smatran jednostavnim likom, krije neka zanimljiva svojstva i karakterizacije koje ćemo obraditi u ovom radu.

Najprije ćemo u prvom i drugom poglavlju ponoviti osnovne pojmove i dobro poznate karakterizacije trapeza, te ih dokazati. U trećem poglavlju analizirat ćemo različite metode računanja površine trapeza. Proučavajući jednu od najstarijih metoda za izračun površine bilo kojeg oblika – podjelu na jednostavnije oblike, otkrit ćemo nekoliko tih metoda, a zatim primjenom transformacijske geometrije i drugih tehnika dodatno proširiti razumijevanje i metode računanja površina trapeza. U četvrtom poglavlju osvrnut ćemo se na trigonometrijske karakterizacije trapeza. Spomenut ćemo trokut dijagonalnih točaka i druge različite karakterizacije trapeza koje zahtijevaju trigonometriju. Na početku petog poglavlja koje sjedinjuje različite ”nesvrstane” karakterizacije, zanimljivosti i teoreme vezane uz trapeze spomenut ćemo Garfieldov trapez i reći nešto o Napeoleonovom teoremu za trapez.

Poglavlje 1

Temeljni pojmovi

1.1 Četverokuti

Četverokut je mnogokut koji ima četiri vrha. Dužine koje povezuju nasuprotne vrhove nazivaju se dijagonale četverokuta. Razlikujemo konveksne i nekonveksne četverokute. Osim podjele na konveksne i nekonveksne, sljedeće važne podjele su prema veličinama unutarnjih kutova, duljinama i međusobnim odnosima stranica, te međusobnim odnosima dijagonala.

- *Paralelogram* je četverokut koji ima dva para paralelnih stranica.
- *Romb* je paralelogram kojemu su dvije susjedne stranice jednakih duljina.
- *Pravokutnik* je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut.
- *Kvadrat* je pravokutnik kojemu su dvije susjedne stranice jednakih duljina.

1.2 Trapez

Definicija i osnovni pojmovi

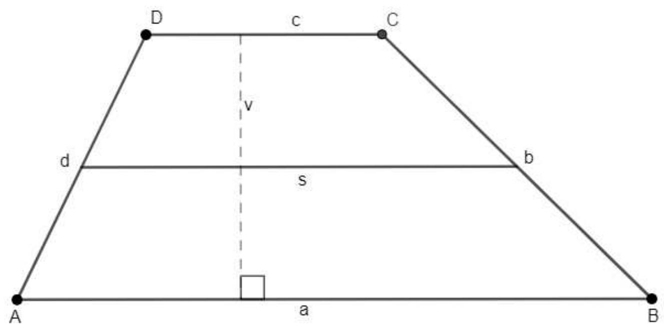
Sljedeća definicija je preuzeta iz [10].

Definicija 1.2.1. *Trapez je četverokut koji ima barem jedan par paralelnih stranica. Paralelne stranice trapeza nazivaju se* osnovice *ili* baze*, a ostale dvije stranice nazivaju se* kraci.

Temelj definicije je paralelnost baza, dok neparalelni par stranica definira izgled trapeza i time ga izdvaja od ostalih četverokuta. Povežemo li definiciju trapeza s definicijom drugih četverokuta, uočavamo da definicija trapeza s naglaskom na ”barem jedan par paralelnih stranica” obuhvaća i paralelograme, rombove, pravokutnike i kvadrate. Prednost takve definicije je mogućnost klasifikacije ostalih četverokuta preko definicije trapeza, te izgradnja hijerarhije četverokuta.

Visina trapeza je dužina kojoj krajevi pripadaju osnovicama trapeza i okomita je na njih. *Srednjica trapeza* je dužina koja spaja polovišta krakova trapeza.

Još neki od elemenata trapeza su kutovi uz osnovicu, nasuprotni kutovi te dijagonale trapeza. Na Slici 1.1 vidimo trapez $ABCD$. Neka je stranica $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ i $d = \overline{DA}$. Karakteristični izgled trapeza je takav da je $a > c$ i $a \parallel c$, ali primjenom simetrije, jednostavno dolazimo i do trapeza kod kojih je $b \parallel d$. Visina trapeza je označena s v, a srednjica sa s.

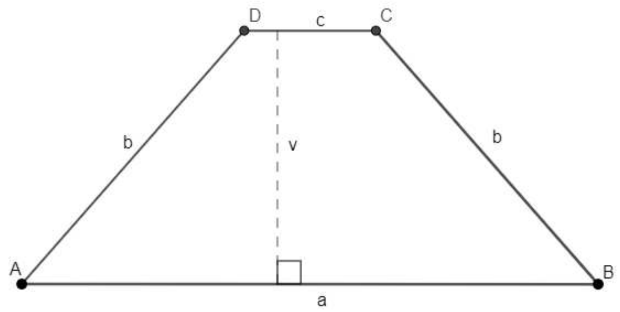


Slika 1.1: Trapez

Vrste trapeza

Jednakokračan trapez

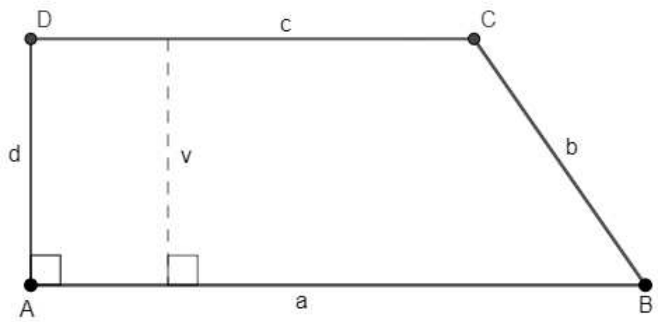
Jednakokračni trapez je trapez čiji su kutovi uz osnovicu jednakih veličina.



Slika 1.2: Jednakokračni trapez

Pravokutni trapez

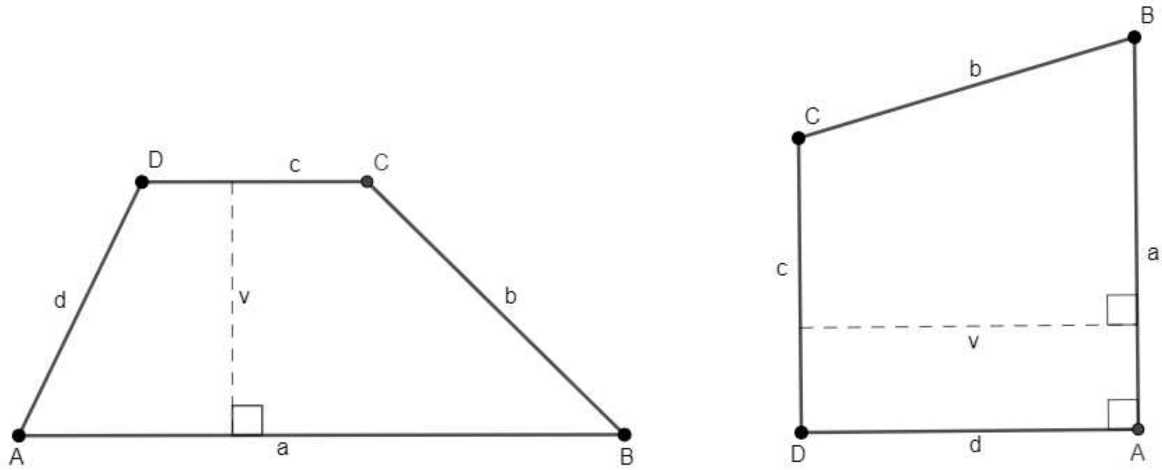
Pravokutni trapez je trapez koji ima jedan pravi kut.



Slika 1.3: Pravokutni trapez

Raznostranični trapez

Raznostranični trapez je trapez kojemu su sve stranice različitih duljina.



Slika 1.4: Raznostranični trapezi

Poglavlje 2

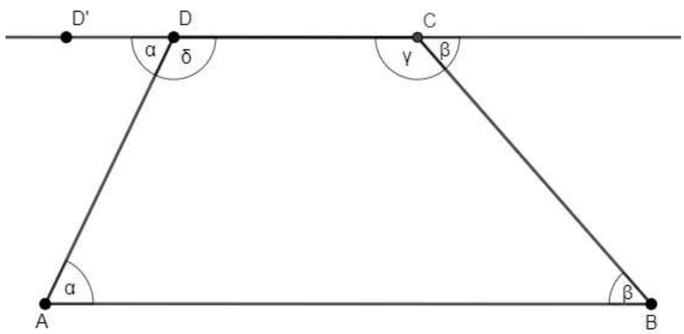
Osnovna svojstva trapeza

2.1 Osnovne karakterizacije

Dokazat ćemo osnovna svojstva trapeza, te istaknuti nužne i dovoljne uvjete da četverokut bude trapez.

Teorem 2.1.1. *Unutarnji kutovi uz krakove trapeza su suplementarni.*

Dokaz. Produljimo osnovicu $\overline{CD}$ preko vrhova C i D. Označimo D' kao na slici.



Slika 2.1: Dokaz Teorema 2.1.1

Kako je pravac AD transverzala paralelnih pravaca AB i CD, prema oznakama sa slike vrijedi

$$\sphericalangle ADD' + \sphericalangle ADC = 180^\circ, \quad \text{tj.} \tag{2.1}$$

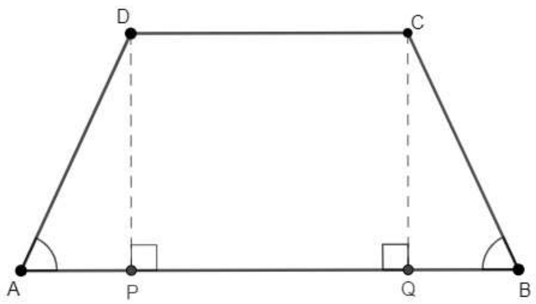
$$\beta + \gamma = 180^\circ.$$

$\square$

Napomena 2.1.2. *Ako se produžeci na suprotnim stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ u konveksnom četverokutu sijeku pod kutom ξ, tada je četverokut trapez ako i samo ako je $\xi = 0$.*

Teorem 2.1.3. *Ako je četverokut jednakokračni trapez, onda su mu kraci jednakih duljina.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez. Iz definicije jednakokračnog trapeza znamo da su kutovi uz osnovicu jednakih veličina, tj. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBA$. Povucimo okomice $\overline{DP}$ i $\overline{CQ}$ na osnovicu $\overline{AB}$ iz vrhova C i D. Iz jedne točke se može povući samo jedna okomica na dani pravac, pa su dobivene okomice jedinstvene.



Slika 2.2: Dokaz Teorema 2.1.3

Dobiveni kutovi $\sphericalangle DPA$, $\sphericalangle DPA$ su pravi kutovi. Slijedi:

$$\sphericalangle DPA = \sphericalangle CQB,$$

$$|DP| = |CQ|\,.$$

Prema poučku o sukladnosti trokuta K-K-S, slijedi:

$$\triangle DPA \cong \triangle CQB \Rightarrow |AD| = |BC|\,.$$

$\square$

Teorem 2.1.4. *Ako je četverokut jednakokračni trapez, onda su mu dijagonale jednakih duljina.*

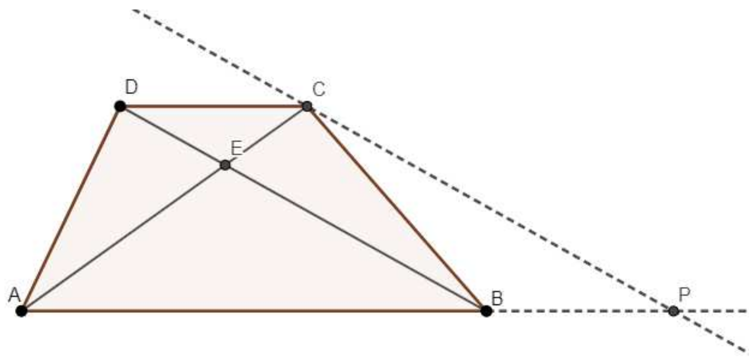
Dokaz. Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez. Tada su kutovi uz osnovicu jednakih veličina i osnovice trapeza su paralelne. Također, prema Teoremu 2.1.3, krakovi su mu jednakih duljina. Prema poučku S-K-S o sukladnosti trokuta, slijedi

$$\triangle ACB \cong \triangle BDA \Rightarrow |AC| = |BD|.$$

□

Teorem 2.1.5. *Ako su trapezu dijagonale jednakih duljina, onda je trapez jednakokračan.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ trapez i $|AC| = |BD|$. Produljimo osnovicu $\overline{AB}$ i nacrtajmo pravac CP takav da prolazi kroz C, siječe AB u P i vrijedi $CP \parallel DB$ kao na Slici 2.3.



Slika 2.3: Dokaz Teorema 2.1.5

Kako vrijedi $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, slijedi da je $BPCD$ paralelogram. Zbog tranzitivnosti vrijedi $|AC| = |PC|$ pa je trokut $\triangle ACP$ jednakokračan.

Osnovica trokuta $\triangle ACP$ je stranica $\overline{AP}$ pa slijedi $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CPB$. Znamo da vrijedi $\overline{CP} \parallel \overline{DB}$, a kako je $\overline{AP}$ transverzala paralelnim pravcima slijedi:

$$\sphericalangle CPB = \sphericalangle DBA \Rightarrow \sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA.$$

Primjenom S-K-S poučka o sukladnosti trokuta, slijedi:

$$\triangle ACB \cong \triangle BDA \Rightarrow \sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA.$$

Dakle, trapez $ABCD$ je jednakokračan. □

Teorem 2.1.6. *Ako je četverokut jednakokračni trapez, onda su mu nasuprotni kutovi suplementarni.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez. Tada su kutovi uz osnovicu jednakih veličina odnosno vrijedi: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CDA = \sphericalangle DCB$. Također vrijedi: $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, a kako su $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ transverzale paralelnih pravaca, kutovi s iste strane transverzale su suplementarni, vrijedi:

$$\sphericalangle CDA \text{ je suplementaran } \sphericalangle DAB, \ \sphericalangle ABC \text{ je suplementaran } \sphericalangle BCD.$$

Nadalje, vrijedi:

$$\sphericalangle DAB \text{ je suplementaran } \sphericalangle BCD, \ \sphericalangle ABC \text{ je suplementaran } \sphericalangle CDA.$$

□

Teorem 2.1.7. *Ako su u trapezu nasuprotni kutovi suplementarni, onda je trapez jednakokračan.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ trapez i neka vrijedi:

$$\sphericalangle DAB \text{ je suplementaran } \sphericalangle BCD, \ \sphericalangle ABC \text{ je suplementaran } \sphericalangle CDA.$$

Vrijedi i $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$. Kako su $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ transverzale paralelnih pravaca DC i AB, slijedi da je:

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle CDA = 180°, \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°,$$

odakle slijedi

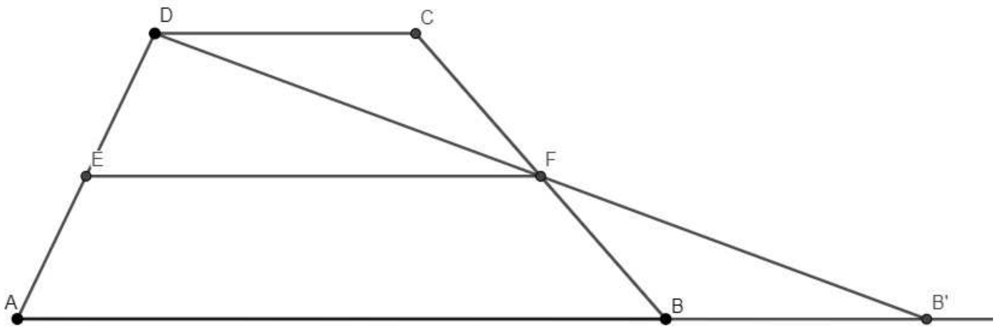
$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle BCD, \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC.$$

Dakle, trapez $ABCD$ je jednakokračan. □

2.2 Teorem o srednjici trapeza

Teorem 2.2.1. *Srednjica trapeza je paralelna osnovicama trapeza i njena duljina je jednaka polovini zbroja duljina osnovica.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati primjenom teorema o srednjici trokuta. Neka je $ABCD$ trapez, a $\overline{EF}$ srednjica trapeza. Produljimo osnovicu $\overline{AB}$ tako da pravac AF siječe produžetak osnovice u točki B' kao na Slici 2.4



Slika 2.4: Teorem o srednjici trapeza

Uočimo da prema poučku o sukladnosti trokuta K-S-K vrijedi:

$$\triangle DCF \cong \triangle B'BF.$$

Sada slijedi da je $\overline{EF}$ srednjica trokuta $\triangle DAB'$. Primjenom teorema o srednjici trokuta slijedi da je $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$ i vrijedi:

$$|EF| = \frac{|AB'|}{2}. \tag{2.2}$$

Također vrijedi:

$$|AB'| = |AB| + |BB'|. \tag{2.3}$$

Iz

$$\triangle DCF \cong \triangle B'BF$$

slijedi:

$$|BB'| = |DC|.$$

Uvrstimo prethodnu jednakost u (2.3) odakle dobivamo:

$$|AB'| = |AB| + |DC|$$

Korištenjem jednakosti 2.2, zaključujemo da je duljina srednjice jednaka polovini zbroja duljina osnovica, odnosno:

$$|EF| = \frac{|AB| + |DC|}{2}.$$

□

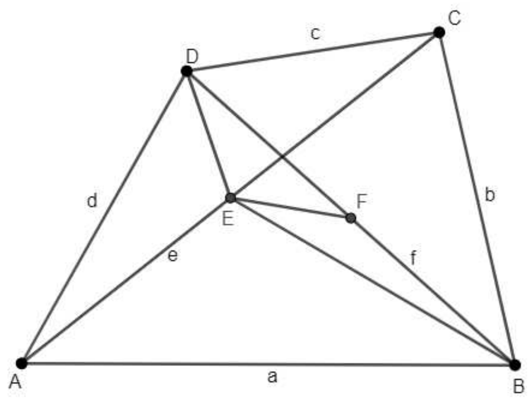
2.3 Eulerov teorem za trapez

Prije iskaza i dokaza Eulerovog teorema za trapez, navest ćemo i dokazati Eulerov teorem koji vrijedi za općeniti četverokut.

Teorem 2.3.1 (Eulerov teorem)**.** *Neka je $ABCD$ četverokut, te neka je $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$ i $f = |BD|$. Tada vrijedi jednakost:*

$$4\,|EF|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2.$$

Dokaz. Trokutima $\triangle ADC$, $\triangle ABC$ i $\triangle DEB$ konstruirajmo težišnice $\overline{DE}$, $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$ kao na slici.



Slika 2.5: Eulerov teorem

Vrijede sljedeće jednakosti:

$$|DE|^2 = \frac{|DA|^2 + |DC|^2}{2} - \frac{|AC|^2}{4}, \tag{2.4}$$

$$|BE|^2 = \frac{|BA|^2 + |BC|^2}{2} - \frac{|AC|^2}{4}, \tag{2.5}$$

$$|EF|^2 = \frac{|EB|^2 + |ED|^2}{2} - \frac{|BD|^2}{4}. \tag{2.6}$$

Ako uvrstimo (2.4) i (2.5) u (2.6), dobivamo:

$$4|EF|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |DB|^2,$$

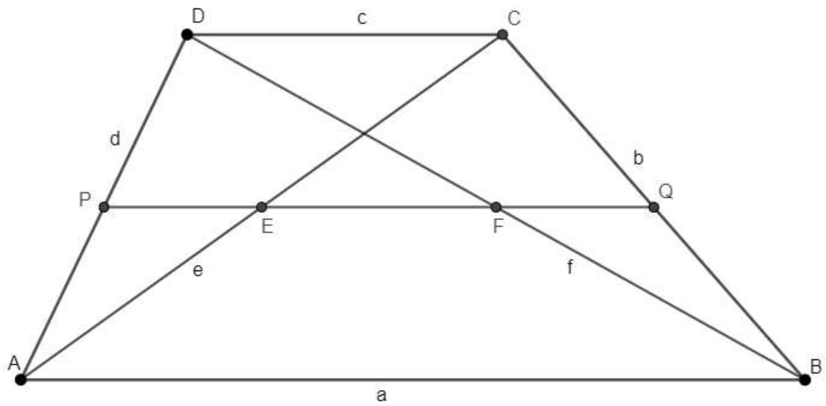
odnosno, uvažimo li oznake iz teorema slijedi:

$$4\,|EF|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2.$$

□

Teorem 2.3.2. *Ako je četverokut $ABCD$ trapez, onda vrijedi jednakost:*

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$



Slika 2.6: Eulerov teorem za trapez

Dokaz. Primjenom Eulerovog teorema za četverokut znamo da vrijedi:

$$4\,|EF|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2.$$

Dokažimo sljedeću tvrdnju: Dužina $\overline{EF}$ se nalazi na srednjici trapeza $\overline{PQ}$. Uočimo da je dužina $\overline{PE}$ srednjica trokuta $\triangle ACD$, a dužina $\overline{FQ}$ srednjica trokuta $\triangle BCD$. Slijedi:

$$|PE| = |FQ| = \frac{c}{2}.$$

Iz Teorema 2.2.1 znamo da je duljina srednjice trapeza jednaka $s = \frac{a+c}{2}$. Sada možemo izračunati duljinu dužine $|EF|$:

$$|EF| = \frac{a+c}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{a-c}{2}.$$

Uvrštavanjem dobivenog u početnu jednakost slijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4\left(\frac{a-c}{2}\right)^2,$$

odakle pojednostavljivanjem dobivamo traženu tvrdnju:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + (a-c)^2,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + a^2 - 2ac + c^2,$$
$$b^2 + d^2 + 2ac = e^2 + f^2.$$

□

Poglavlje 3

Površina trapeza

3.1 Metode računanja površine trapeza

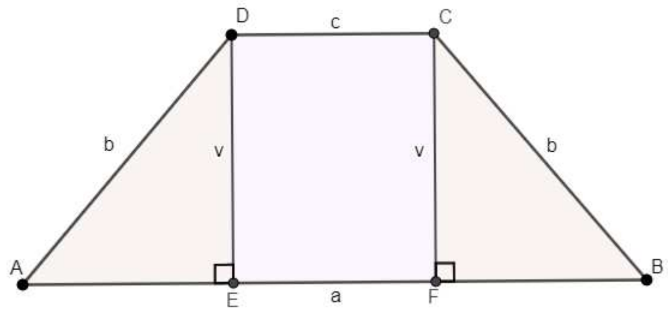
Podjela na jednostavnije likove

Određivanje površina likova je od davnina jedan od često rješavanih praktičnih problema. Jedna od najčešće primjenjivanih i najjednostavnijih metoda je metoda koju je koristio i Euklid, metoda particioniranja. Složene geometrijske likove dijelimo na jednostavnije likove kojima znamo odrediti površinu.

Jednakokračni trapez

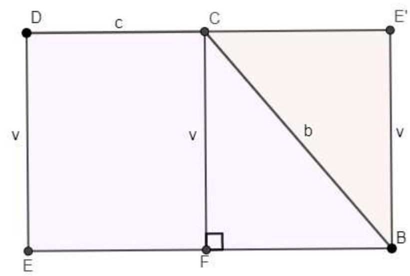
Jednakokračni trapez podijelimo na dva pravokutna trokuta s duljinama kateta $\frac{a-c}{2}$ i v i pravokutnik s duljinama stranica c i v. Površinu dobijemo kao zbroj površina triju jednostavnih likova:

$$P = 2 \cdot \frac{(a-c) \cdot v}{2} + a \cdot v.$$



Slika 3.1: (i) Podjela jednakokračnog trapeza

Napomena 3.1.1. *Trokut $\triangle AED$ možemo "prebaciti" na drugi krak trapeza s druge strane, pa površinu trapeza možemo dobiti kao površinu pravokutnika s duljinama stranica $a + \frac{a+c}{2}$ i v.*

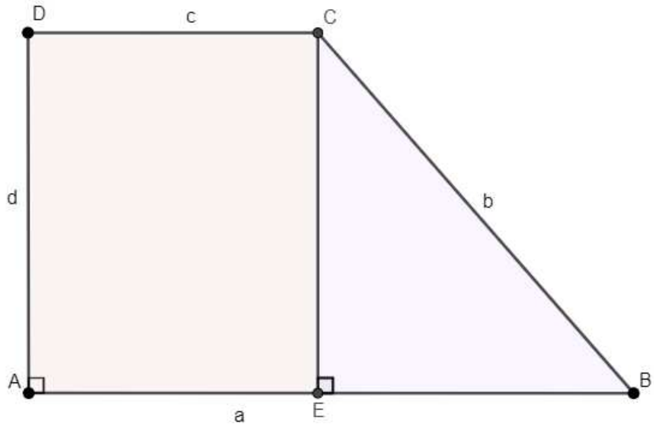


Slika 3.2: (ii) Podjela jednakokračnog trapeza

Pravokutni trapez

Pravokutni trapez možemo podijeliti na pravokutnik s duljinama stranica c i d, te pravokutni trokut s duljinama kateta $a - c$ i d. Slijedi da je površina trapeza u tom slučaju zbroj površina pravokutnika i pravokutnog trokuta.

$$P = (a - c) \cdot d + \frac{(a - c) \cdot d}{2}.$$

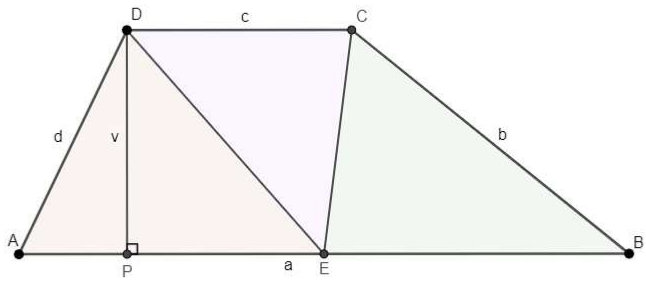


Slika 3.3: Podjela pravokutnog trapeza

Općeniti slučaj

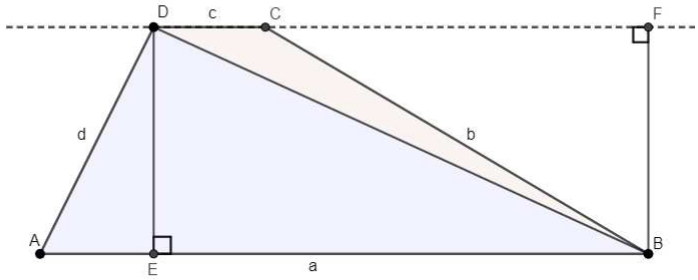
Dekompozicijom raznostraničnog trapeza $ABCD$, sa stranicama duljina a, b, c, d, možemo na različite načine doći do površine trapeza. Podjelom trapeza na tri trokuta, tako da je E polovište osnovice $\overline{AB}$, od kojih svi imaju jednaku visinu duljine v, možemo uočiti da trokuti $\triangle AED$ i $\triangle EBC$ imaju jednaku površinu $\frac{1}{2}(\frac{a \cdot v}{2})$, odnosno površina trapeza je zbroj površina trokuta:

$$P = \triangle AED + \triangle EBC + \triangle DEC,$$
$$P = \frac{a \cdot v}{2} + \frac{c \cdot v}{2},$$
$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v.$$

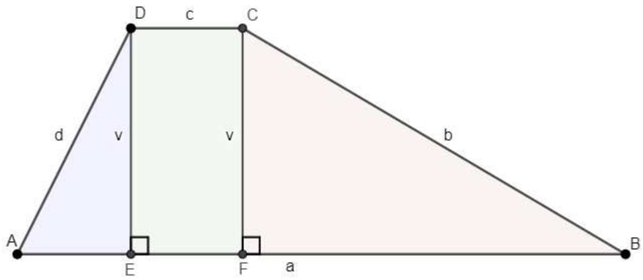


Slika 3.4: Podjela trapeza na tri trokuta

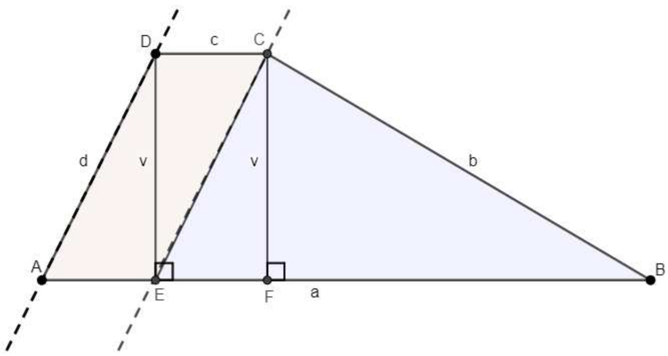
Pogledajmo još neke načine podjele trapeza.



Slika 3.5: Podjela trapeza na dva trokuta



Slika 3.6: Podjela trapeza na pravokutne trokute i pravokutnik

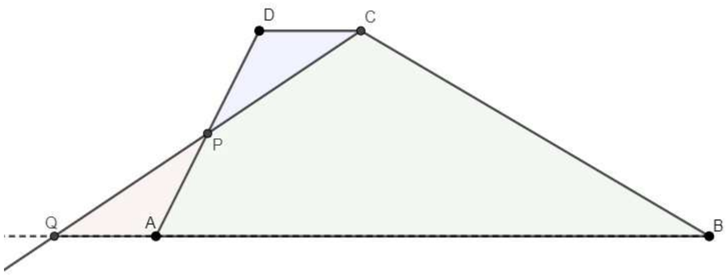


Slika 3.7: Podjela trapeza na paralelogram i trokut

Primjena transformacijske geometrije

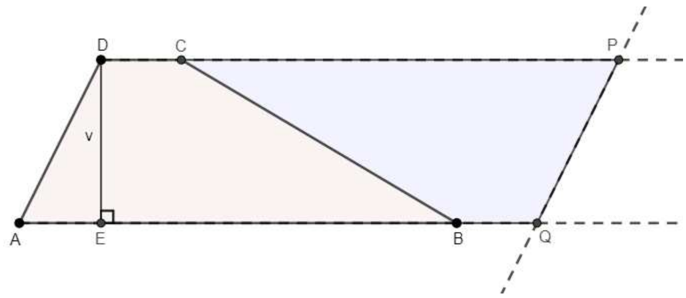
Neka je P polovište kraka $\overline{AD}$ trapeza $ABCD$. Produljimo osnovicu $\overline{AB}$ preko vrha A. Neka je Q presjek pravca kroz točke C i P i produžetka osnovice $\overline{AB}$. Kako su trokuti $\triangle DPC$ i $\triangle QAP$ sukladni prema poučku o sukladnosti trokuta K-S-K, slijedi $|QA| = |DC|$, a za duljinu stranice $|QB|$ trokuta $\triangle QBC$ vrijedi $|QB| = |QA| + |AB|$, tj. $|QB| = |DC| + |AB|$. Vidimo da je površina trapeza $ABCD$ zapravo jednaka površini trokuta $\triangle QBC$.

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v.$$



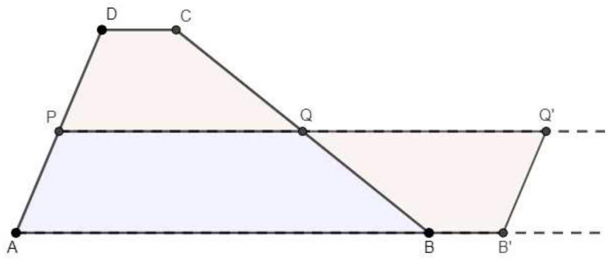
Slika 3.8: Transformacija trapeza u trokut jednake površine

Rotacijom zadanog trapeza za 180° oko polovišta kraka $\overline{BC}$, dobivamo paralelogram podijeljen na dva trapeza jednake površine. Paralelogram ima duljinu stranice $a+c$ i visinu duljine v. Površina zadanog trapeza jednaka je polovini površine dobivenog paralelograma.



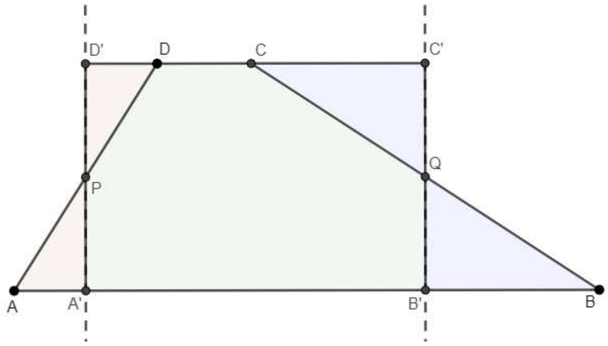
Slika 3.9: (i) Transformacija trapeza u paralelogram

Na slične načine kao u prethodnim primjerima, na sljedećim slikama vidimo kako transformacijom trapeza možemo dobiti još neke likove čije površine znamo izračunati. Na Slici 3.10 vidimo da trapez možemo transformirati u paralelogram koristeći srednjicu.



Slika 3.10: (ii) Transformacija trapeza u paralelogram

Slika 3.11 prikazuje kako rotacijom dijelova trapeza, oko polovišta krakova možemo dobiti pravokutnik jednake površine kao i početni trapez.



Slika 3.11: Transformacija trapeza u pravokutnik

Nadopunjavanje trapeza

Nadopunjavanje trapeza do pravokutnika

Produljimo kraću osnovicu $\overline{CD}$ trapeza $ABCD$ i povučemo okomice na produžetak osnovice iz točaka A i B. Sjecišta okomica i produžetka osnovice označimo redom s P i Q. Dobili smo pravokutnik čija je površina očigledno veća od površine početnog trapeza. No, uočimo da su dva trokuta, $\triangle PAD$ i $\triangle CBQ$, kojima smo nadopunili trapez, pravokutni trokuti i da imaju jednu katetu jednake visine, koja je jednaka visini trapeza v, a zbroj duljina drugih dviju kateta tih trokuta je jednak razlici dulje i kraće osnovice trapeza $ABCD$.

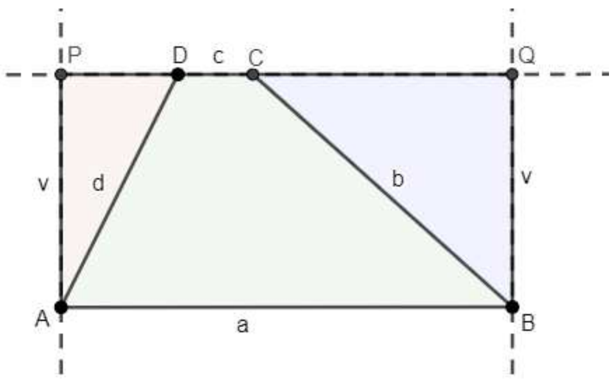
Dakle, površina dvaju nadodanih trokuta je

$$\frac{1}{2} \cdot (a - c) \cdot v.$$

Sada oduzimanjem zbroja površina trokuta $\triangle PAD$ i $\triangle CBQ$ od površine pravokutnika $ABQP$ možemo dobiti površinu trapeza $ABCD$:

$$P = a \cdot v - \frac{1}{2} \cdot (a - c) \cdot v,$$

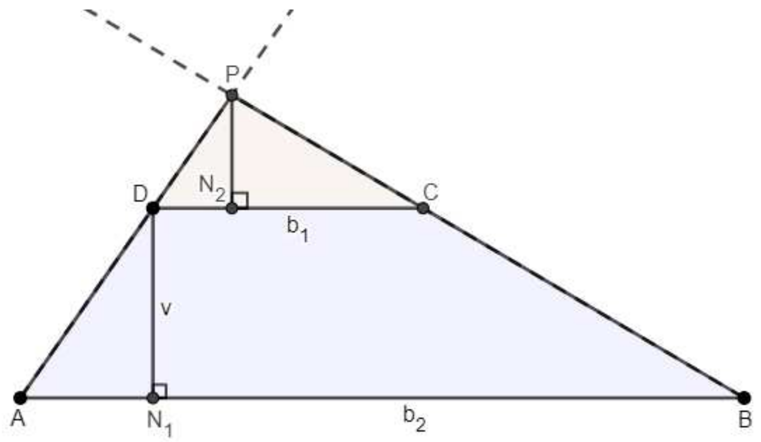
$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot v.$$



Slika 3.12: Nadopuna do pravokutnika

Nadopunjavanje trapeza do trokuta

Produljimo li stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ preko vrhova D i C tako da se produžetci sijeku u točki P, dobivamo trokut $\triangle PAB$, kao na Slici 3.13.



Slika 3.13: Nadopuna do trokuta

Uočimo također još jedan novonastali trokut $\triangle PDC$ kojemu je visina $|PN_2| = v_2$. Sada imamo površinu manjeg trokuta

$$P_{\triangle PDC} = \frac{b_2 v_2}{2}.$$

Površina većeg trokuta $\triangle PAB$ jednaka je

$$P_{\triangle PAB} = \frac{b_2(v + v_2)}{2}.$$

Kako bismo dobili površinu trapeza, oduzet ćemo površinu manjeg trokuta od površine većeg trokuta:

$$P_{\triangle PAB} - P_{\triangle PDC} = \frac{b_2(v + v_2)}{2} - \frac{b_1 v_2}{2} = \frac{b_2 v}{2} + \frac{b_2 v_2}{2} - \frac{b_1 v_2}{2} = \frac{b_2 v}{2} + \frac{(b_2 - b_1)v_2}{2}. \tag{3.1}$$

Kako bismo mogli nastaviti račun i pojednostavniti dobiveni izraz, uočimo slične trokute na Slici 3.13 Primjenom K-K-K poučka o sličnosti trokuta uočavamo da su trokuti $\triangle PAB$ i $\triangle PDC$ slični, pa vrijedi:

$$\frac{v_2}{b_1} = \frac{v_2 + v}{b_2}.$$

Iz jednakosti izrazimo v_2:

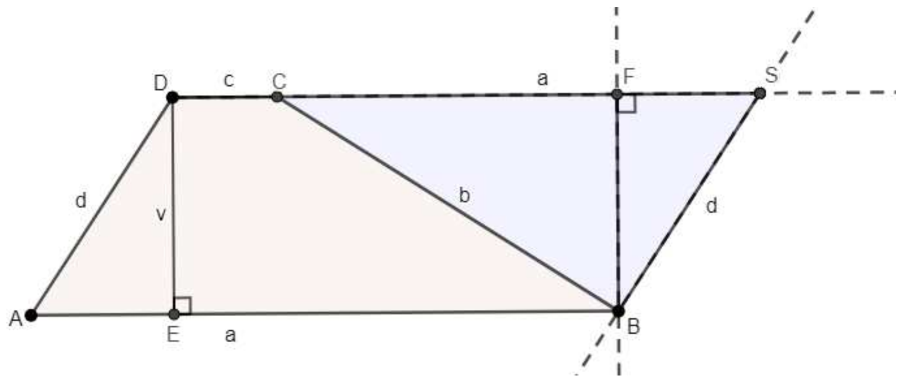
$$v_2 = \frac{b_1 v}{b_2 - b_1}$$

te uvrstimo u (3.1):

$$\begin{aligned}
P_{ABCD} &= P_{\triangle PAB} - P_{\triangle PDC} \\
&= \frac{b_2 v}{2} + \frac{(b_2 - b_1)}{2}\frac{b_1 v}{b_2 - b_1} \\
&= \frac{b_2 v}{2} + \frac{b_1 v}{2} \\
&= \frac{(b_1 + b_2)v}{2}.
\end{aligned}$$

Nadopunjavanje trapeza do paralelograma

U trećem načinu metode nadopunjavanja do oblika kojima znamo izračunati površinu, trapez nadopunjavamo do paralelograma. Želimo dobiti paralelogram koji ima istu duljinu visine kao početni trapez. Nadopunjavamo na način da kroz točku C konstruiramo pravac paralelan sa stranicom $\overline{AD}$. Također produljimo li gornju bazu b_1, konstruirani pravci se sijeku u točki S i sada imamo paralelogram $ABSD$, kojemu je površina $b_1 v$.



Slika 3.14: Nadopuna do paralelograma

Uočimo trokut $\triangle BSC$ koji je nastao nadopunjavanjem do paralelograma i izračunajmo njegovu površinu

$$P_{\triangle BSC} = \frac{(b_2 - b_1)v}{2}.$$

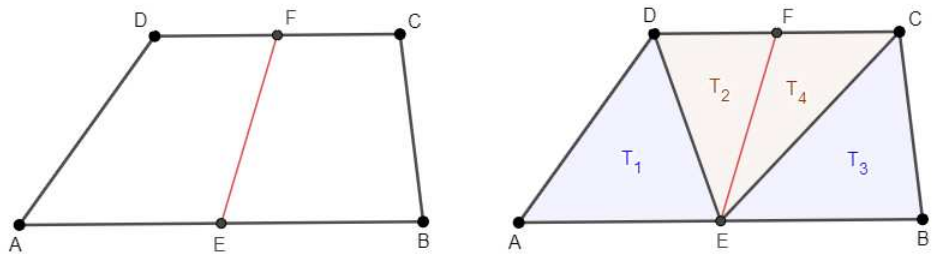
Površinu početnog trapeza dobivamo oduzimanjem površine trokuta $\triangle BSC$ od površine paralelograma $ABSD$:

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ABSD} - P_{\triangle BSC} \\ &= \frac{b_2 v}{2} - \frac{(b_2 - b_1)v}{2} \\ &= b_2 v - \frac{b_2 v}{2} + \frac{b_1 v}{2} \\ &= \frac{(b_1 + b_2)v}{2}. \end{aligned}$$

3.2 Karakterizacije vezane uz površine

Propozicija 3.2.1. *Konveksni četverokut je trapez ako i samo ako ga jedna srednjica dijeli na dva četverokuta jednakih površina.*

Dokaz. Kod trapeza pojam srednjica najčešće povezujemo s dužinom koja spaja polovišta krakova. Druga srednjica je dužina koja spaja polovišta baza, kao na Slici 3.2 (lijevo). Srednjica dijeli trapez $ABCD$ na dva trokuta jednakih površina, prema formuli za površinu trapeza. ”Lijevi” trapez $AEFD$ kao i ”desni” trapez $EBCF$ imaju jednake visine i duljine osnovica prema definiciji srednjice.



Slika 3.15: Srednjica trapeza koja povezuje polovišta baza

Obratno, neka su T_1, T_2, T_3 i T_4 površine dijelova trapeza dobivenih spajanjem vrhova C i D s polovištem E kao na Slici 3.2 (desno). Ako vrijedi $T_1 + T_2 = T_3 + T_4$, onda slijedi $T_1 = T_4$ i $T_2 = T_3$ jer pripadni trokuti imaju jednaku stranicu i visinu na tu stranicu. T_1 i T_4 također imaju jednake baze, pa im i visine moraju biti jednake. Slijedi da je četverokut $ABCD$ trapez. □

Sljedeći teorem preuzet je iz [13].

Teorem 3.2.2. *Dijagonale konveksnog četverokuta dijele četverokut na četiri trokuta koji se ne preklapaju. Ako dva nasuprotna trokuta imaju površine S i T, onda četverokut ima površinu*

$$K = \left(\sqrt{S} + \sqrt{T}\right)^2$$

ako i samo ako je četverokut trapez kojemu su paralelne dvije stranice, stranice trokuta koje ne pripadaju dijagonalama trapeza.

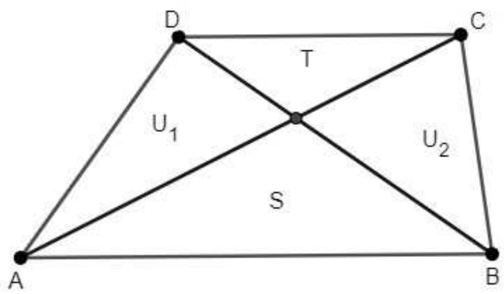
Prije samog dokaza, iskazat ćemo propoziciju i lemu koje će nam biti potrebne u dokazu teorema.

Propozicija 3.2.3. *Ako se dijagonale konveksnog četverokuta $ABCD$ sijeku u točki P, onda je taj četverokut trapez s paralelnim stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ ako i samo ako su površine trokuta $\triangle APD$ i $\triangle BPC$ jednake.*

Lema 3.2.4. *Dijagonale konveksnog četverokuta dijele četverokut na četiri trokuta koji se ne preklapaju. Umnožak površina dvaju nasuprotnih trokuta je jednak umnošku površina drugih dvaju trokuta.*

Dokaz Teorema 3.2.2. Prvi način

Neka je konveksni četverokut podijeljen na četiri trokuta s površinama U_1, S, U_2 i T kao na slici:



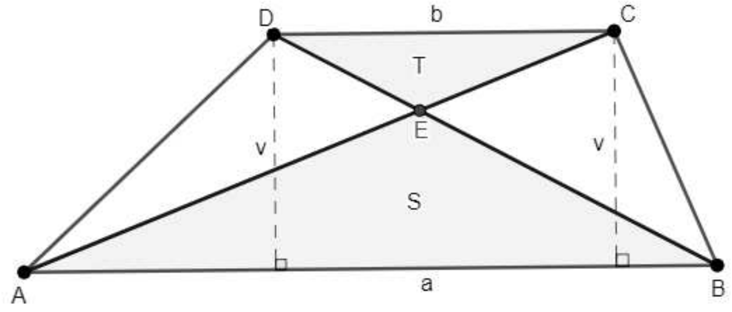
Slika 3.16: (i) Dokaz Teorema 3.2.2

Tada je površina četverokuta:

$$\begin{aligned} K &= S + T + U_1 + U_2 \\ &= S + T + 2\sqrt{ST} - 2\sqrt{U_1U_2} + U_1 + U_2 \\ &= \left(\sqrt{S} + \sqrt{T}\right)^2 + \left(\sqrt{U_1} - \sqrt{U_2}\right)^2. \end{aligned}$$

U drugoj jednakosti koristili smo da vrijedi $ST = U_1U_2$ (prema Lemi 3.2.4). Prema Propoziciji 3.2.3 slijedi da je četverokut trapez ako i samo ako vrijedi $U_1 = U_2$ pa primjenom tih tvrdnji u trećoj jednakosti slijedi da je četverokut trapez ako mu je površina $K = \left(\sqrt{S} + \sqrt{T}\right)^2$.

Drugi način
Neka vrijede oznake kao na slici:



Slika 3.17: (ii) Dokaz Teorema 3.2.2

Uočimo da su trokuti $\triangle ECD$ i $\triangle ABE$ slični prema poučku o sličnosti trokuta K-K-K. Stoga je $S : T = (\frac{a}{b})^2$ ili $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{T}}$ pa primjenom Talesovog poučka dalje imamo:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sqrt{S} + \sqrt{T}}{\sqrt{S} - \sqrt{T}}.$$

Računanjem površine trokuta $\triangle ACE$, odnosno trokuta $\triangle DBE$ preko a i b slijedi:

$$\frac{av}{2} - T = \frac{bv}{2} - S,$$

$$\frac{(a-b)v}{2} = S - T,$$

$$K = \frac{a+b}{2}v = \frac{a-b}{2}v \cdot \frac{a+b}{a-b} = (S - T)\frac{\sqrt{S} + \sqrt{T}}{\sqrt{S} - \sqrt{T}} = \left(\sqrt{S} + \sqrt{T}\right)^2.$$

□

Drugi dokaz je preuzet iz [1].

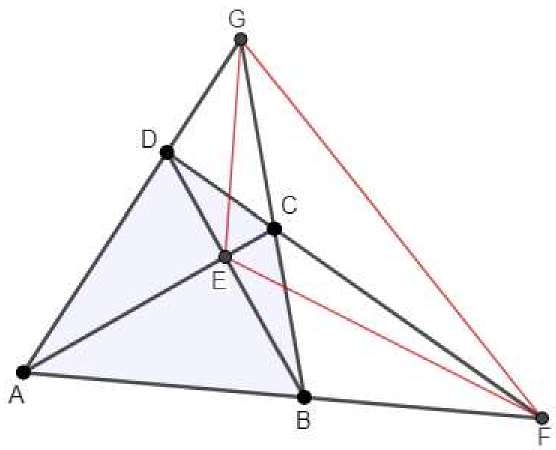
Poglavlje 4

Trigonometrijska karakterizacija

4.1 Trokut dijagonalnih točaka

Definicija 4.1.1. *Neka se dijagonale konveksnog četverokuta sijeku u točki E, a produžeci nasuprotnih stranica u točkama F i G. Tada se dobiveni trokut* $\triangle EFG$ *se naziva* trokut dijagonalnih točaka.

Definicija je preuzeta iz [5]. Definicija je dana s pretpostavkom da niti jedan par stranica četverokuta nije paralelan.



Slika 4.1: Trokut dijagonalnih točaka

Prema [11], iako trokutu dijagonalnih točaka nije posvećena veća pozornost tijekom godina, postoji važan rezultat vezan uz površinu tako nastalog trokuta. Slijede dva zapisa istog rezultata iz [2] i [3]. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut i $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ pripadne dijagonale. Neka su T_1, T_2, T_3, T_4 redom površine trokuta $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$. Tada vrijedi:

$$T = \frac{2T_1T_2T_3T_4}{(T_1+T_2)(T_1-T_4)(T_2-T_4)}$$

i

$$T = \frac{2T_1T_2T_3T_4}{K(T_1T_2-T_3T_4)}, \tag{4.1}$$

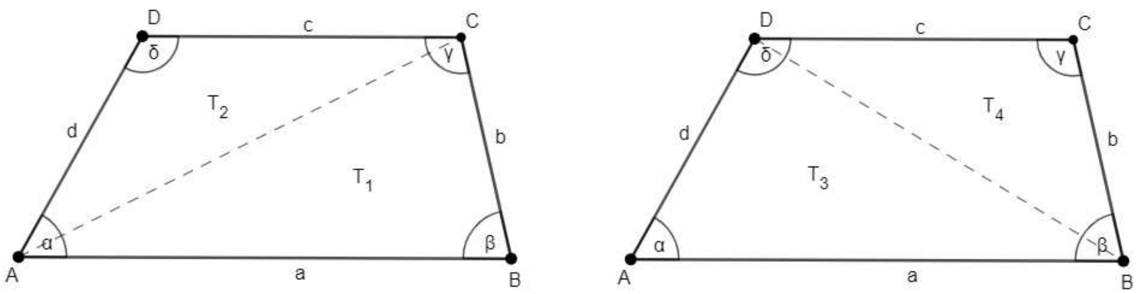
pri čemu je $K = T_1 + T_2$ površina danog četverokuta $ABCD$.

Napomena 4.1.2. *Iz* (4.1) *vidimo da ako je $T_1T_2 = T_3T_4$, onda je površina trokuta dijagonalnih točaka beskonačna, odnosno dvije nasuprotne stranice četverokuta su u tom slučaju paralelne. Iz zaključenog slijedi da je četverokut u tom slučaju trapez.*

Sljedeći teorem i dokaz su preuzeti iz [11].

Teorem 4.1.3. *Konveksni četverokut je trapez ako i samo ako je umnožak površina trokuta koji nastaju povlačenjem jedne dijagonale jednak umnošku površina trokuta koji nastaju povlačenjem druge dijagonale.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ trapez s duljinama stranica a, b, c, d redom i $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ pripadne dijagonale. Neka su kutovi kod vrhova A, B, C, D jednaki redom α, β, γ i δ. Neka su T_1, T_2, T_3, T_4 redom površine trokuta $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$.



Slika 4.2: Dokaz Teorema 4.1.3

Krenimo od pretpostavke da je

$$T_1T_2 = T_3T_4.$$

Jednostavno možemo izračunati površine T_1, T_2, T_3, T_4 pa slijedi:

$$\frac{1}{2}ad\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}bc\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\sin\beta\cdot\frac{1}{2}cd\sin\delta,$$

$$\sin\alpha\sin\gamma=\sin\beta\sin\delta.$$

Primjenom transformacijske formule za umnožak sinusa dalje slijedi:

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma))=\frac{1}{2}(\cos(\beta-\delta)-\cos(\beta+\delta)),$$

$$\cos(\alpha-\gamma)=\cos(\beta-\delta).$$

Zadnja jednakost nam daje dvije mogućnosti:

$$\alpha-\gamma=\beta-\delta \quad \text{ili} \quad \alpha-\gamma=-(\beta-\delta),$$

odnosno

$$\alpha+\delta=\beta+\gamma=180^\circ \quad \text{ili} \quad \alpha+\beta=\gamma+\delta=180^\circ,$$

što znači da je

$$AB \parallel DC \quad \text{ili} \quad AD \parallel BC.$$

U dokazu smo koristili $\cos(\alpha+\gamma)=\cos(\beta+\delta)$ što slijedi iz zbroja veličina kutova u četverokutu. Kako su sve tvrdnje ekvivalentne, teorem je dokazan. □

4.2 Trigonometrijska verzija karakterizacije trapeza preko susjednih kutova

Sljedeći teoremi su preuzeti iz [13].

Teorem 4.2.1. *Konveksni četverokut $ABCD$ je trapez s paralelnim stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ ako i samo ako vrijedi*

$$\cos\alpha+\cos\delta=\cos\beta+\cos\gamma=0.$$

Dokaz. Četverokut je trapez ako vrijedi $\alpha+\delta=180^\circ$, odnosno $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$. Zato imamo:

$$\cos\alpha+\cos\delta=\cos\alpha+\cos(180^\circ-\alpha)=\cos\alpha-\cos\alpha=0.$$

Obratno, pretpostavimo suprotno: četverokut $ABCD$ nije trapez i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $\alpha>180^\circ-\delta$. Vrijedi $0<\alpha<180^\circ$, a funkcija kosinus je padajuća na segementu $[0,\pi]$ pa slijedi:

$$\cos\alpha<\cos(180^\circ-\delta),$$

$$\cos\alpha + \cos\delta < \cos(180^\circ - \delta) + \cos\delta = 0.$$

Poznat je zbroj veličina kutova u četverokutu, pa imamo:

$$\alpha > 180^\circ - \delta \Rightarrow \beta < 180^\circ - \gamma \Rightarrow \cos\beta + \cos\gamma > 0.$$

Dakle, ako četverokut nije trapez, tada vrijedi:

$$\cos\alpha + \cos\delta \neq \cos\beta + \cos\gamma \neq 0.$$

Dokazali smo tvrdnju teorema. □

Propozicija 4.2.2. *Konveksni četverokut $ABCD$ je trapez s paralelnim stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ ako i samo ako vrijedi:*

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta = \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = 0.$$

Dokaz. Funkcija kotangens je padajuća na intervalu $0 < x < \pi$ i vrijedi:

$$\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$$

pa je dokaz identičan dokazu Teorema 4.2.1. □

Teorem 4.2.3. *Konveksni četverokut $ABCD$ je trapez s paralelnim stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ ako i samo ako vrijedi:*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1.$$

Dokaz. Primjenom svojstva trapeza $\alpha + \delta = \pi = \beta + \gamma$ jednakost iz teorema slijedi direktno jer vrijedi:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Obratno, pretpostavimo da četverokut nije trapez i bez smanjenja općenitosti prepostavimo da vrijedi $\alpha + \delta > \pi$ i $\beta + \gamma < \pi$. Primjenom adicijske formule za tangens slijedi:

$$0 > \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}.$$

Kutovi $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\delta}{2}$ su šiljasti, pa je brojnik pozitivan, stoga nazivnik mora biti negativan. Dakle, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} > 1$. Analogno vrijedi i za $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} < 1$, pa zato slijedi:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \neq \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \neq 1.$$

□

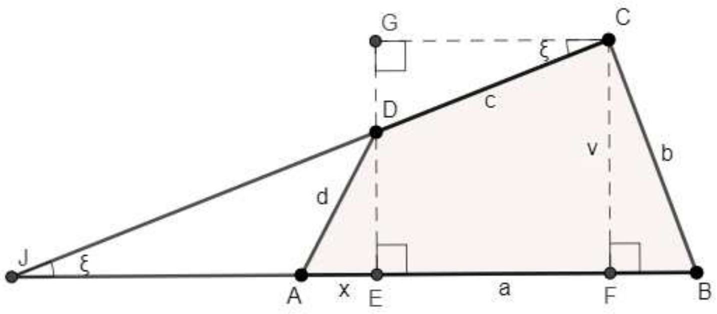
4.3 Karakterizacije vezane uz stranice i udaljenosti

Teorem 4.3.1. *Ako je $ABCD$ konveksni četverokut sa stranicama a, b, c, d redom i dijagonalama p i q, onda vrijedi*

$$p^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2ac\cos\xi,$$

pri čemu je ξ kut između produžetaka stranica a i c.

Dokaz. Neka se produžeci stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku u točki J i neka vrijede oznake: $\overline{AC} = p$, $\overline{BD} = q$, $\overline{AB} = a$ i $\overline{AE} = x$. Konstruirajmo dužinu $\overline{GC}$ kao na slici, tako da je $AB \parallel GC$.



Slika 4.3: Dokaz Teorema 4.3.1

Tada vrijedi $\sphericalangle DCG = \sphericalangle BJC$. Dalje imamo:

$$|EF| = |GC| = c\cos\xi, \quad |DG| = c\sin\xi, \quad |ED| = v - c\sin\xi, \quad |FB| = a - c\cos\xi - x. \tag{4.2}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute $\triangle ACF$, $\triangle BDE$, $\triangle BCF$, $\triangle AED$ dobivamo:

$$p^2 = v^2 + (x + c\cos\xi)^2, \tag{4.3}$$

$$q^2 = (a - x)^2 + (v - c\sin\xi)^2, \tag{4.4}$$

$$b^2 = v^2 + (a - c\cos\xi - x)^2, \tag{4.5}$$

$$d^2 = x^2 + (v - c\sin\xi)^2. \tag{4.6}$$

Sređivanjem izraza (4.3) i (4.4), dobivamo

$$p^2 + q^2 = 2(h^2 + x^2) + 2x(c\cos\xi - a) + a^2 + c^2 - 2vc\sin\xi. \tag{4.7}$$

Iz (4.5) i (4.6) slijedi

$$b^2 + d^2 = 2(v^2 + x^2) + a^2 + c^2 - 2vc\sin\xi - 2ac\cos\xi + 2x(c\cos\xi - a). \tag{4.8}$$

Oduzmemo li (4.7) i (4.8) imamo

$$b^2 + d^2 = p^2 + q^2 - 2ac\cos\xi.$$

□

Korolar 4.3.2. *Konveksni četverokut sa stranicama a, b, c, d redom i dijagonalama p i q je trapez ako i samo ako vrijedi:*

$$p^2 + q^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

Napomena 4.3.3. *Ovaj korolar je izravna posljedica Teorema 4.3.1 i Napomene 2.1.2.*

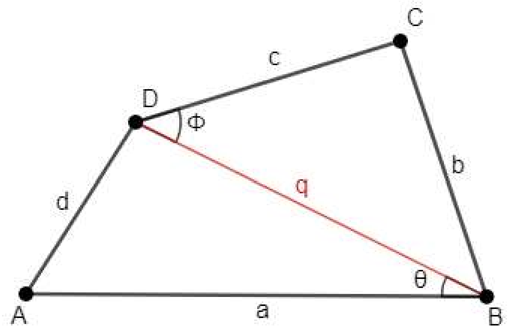
Sljedeći teorem iz [13] donosi zanimljivu karakterizaciju trapeza preko duljine dijagonala koju ćemo koristiti i kasnije.

Teorem 4.3.4. *Konveksni četverokut $ABCD$ sa stranicama a, b, c, d redom je trapez za koji vrijedi $a \parallel c$ i $a \neq c$ ako i samo ako su duljine dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ redom*

$$p = \sqrt{\frac{ac(a-c) + ad^2 - cb^2}{a-c}},$$

$$q = \sqrt{\frac{ac(a-c) + ab^2 - cd^2}{a-c}}.$$

Dokaz. Dokažimo drugu formulu, prva se dokazuje analogno. Konstruirajmo dijagonalu $\overline{BD} = q$.



Primjenom teorema o kosinusu u trokutima $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ nastalim konstruiranjem dijagonale slijede sljedeće jednakosti

$$\cos\theta = \frac{a^2 + q^2 - d^2}{2aq}, \tag{4.9}$$

$$\cos\phi = \frac{c^2 + q^2 - b^2}{2cq}. \tag{4.10}$$

Četverokut je trapez s paralelnim stranicama $a \parallel c$ ako i samo ako vrijedi $\theta = \phi$, odnosno $\cos\theta = \cos\phi$. Dakle, lijeve strane jednakosti (4.9) i (4.10) su jednake, pa možemo izjednačiti i desne strane

$$\frac{a^2 + q^2 - d^2}{2aq} = \frac{c^2 + q^2 - b^2}{2cq}$$

što možemo zapisati kao

$$ac(a - c) + ab^2 - cd^2 = (a - c)q^2.$$

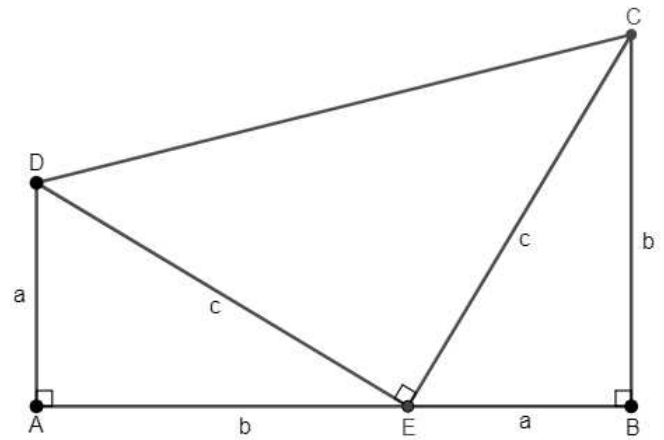
Vrijedi $a \neq c$ pa slijedi jednakost koju smo htjeli dokazati. $\square$

Poglavlje 5

Ostali teoremi i zanimljivosti o trapezima

5.1 Garfieldov trapez

Autor zanimljivog dokaza Pitagorinog poučka preko trapeza je James Abram Garfield (1831.–1881.), pa se trapez nastao od pravokutnih trokuta naziva *Garfieldov trapez*[1].



Slika 5.1: Garfieldov trapez

Dokaz Pitagorinog poučka pomoću trapeza

Izračunajmo površinu trapeza sa Slike 5.1 pomoću formule za računanje površine trapeza, a zatim kao zbroj površina triju trokuta od kojih je sastavljen trapez sa Slike 5.1. S jedne strane je formula za površinu trapeza:

$$P = \frac{(a+b)^2}{2},$$

dok s druge strane zbrojem površina trokuta slijedi:

$$P = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{2ab + c^2}{2}.$$

Izjednačimo dobivene površine:

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

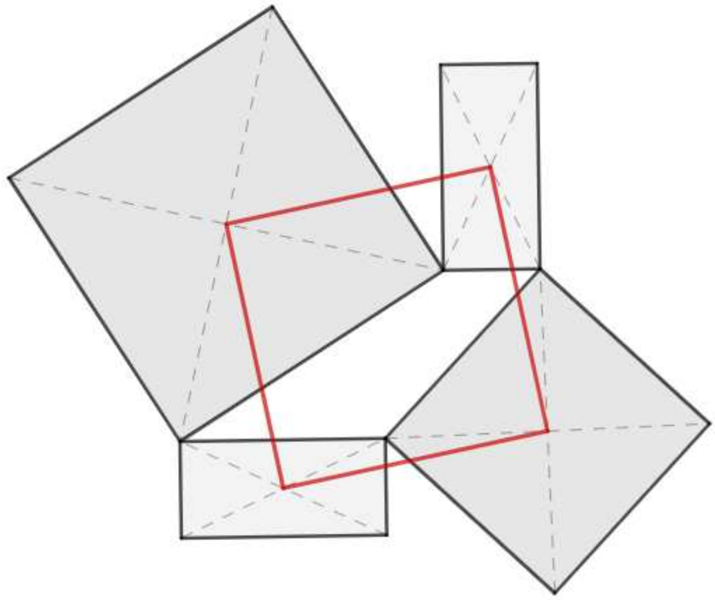
5.2 Napoleonov teorem za trapeze

Poznato je da je Napoleon Bonaparte održavao kontakt s mnogim poznatim matematičarima svog vremena. Iako nije bio matematičar po struci, pokazivao je izuzetno zanimanje za matematiku. Jedan od najpoznatijih rezultata je Napoleonov teorem. Iako je dobio ime po Napoleonu, nije sasvim sigurno da je teorem izravno povezan s njim [8], no još su važniji rezultati proizišli iz Napoleonovog teorema. Napoleonov teorem za trapeze ćemo iskazati i dokazati u nastavku prema [4].

Teorem 5.2.1. *Ako nad stranicama proizvoljnog trokuta konstruiramo jednakostranične trokute, onda su središta tako dobivenih trokuta vrhovi jednakostraničnog trokuta.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [6]. □

Teorem 5.2.2 (Napoleonov teorem)**.** *Ako se nad kracima trapeza konstruiraju kvadrati, a nad bazama trapeza pravokutnici, tako da je "visina" odnosno duljina druge stranice pravokutnika jednaka duljini suprotne stranice trapeza, onda će središta četiri postavljena četverokuta tvoriti vrhove kvadrata.*

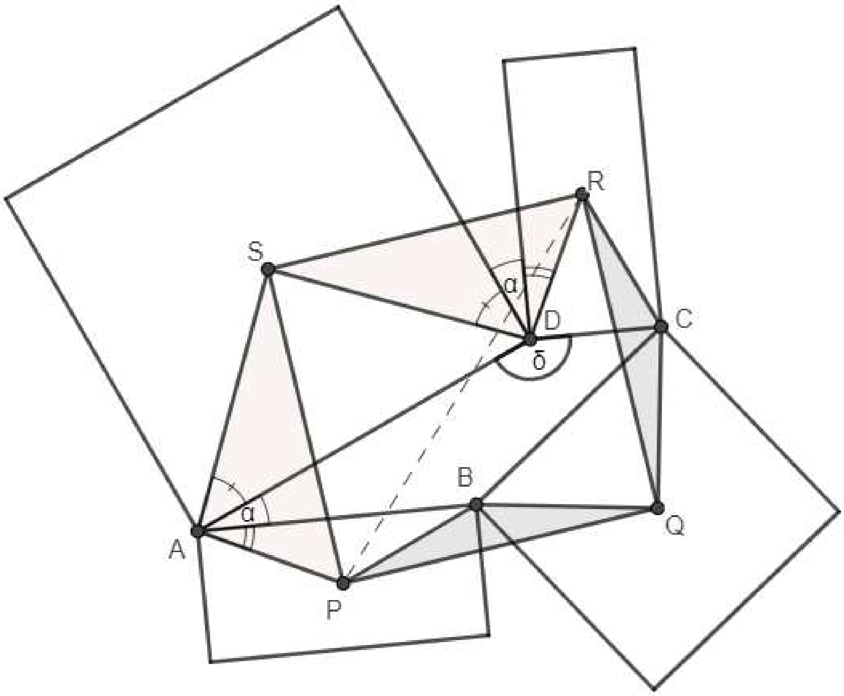


Slika 5.2: Napoleonov teorem za trapeze

Dokaz. Neka je $ABCD$ trapez i $AB \parallel CD$. Neka su trapezu nacrtani kvadrati i pravokutnici kako je opisano u iskazu teorema. Neka je P središte pravokutnika nad stranicom $\overline{AB}$, Q središte kvadrata nad stranicom $\overline{BC}$, R središte pravokutnika nad stranicom $\overline{CD}$ i S središte kvadrata nad stranicom $\overline{AD}$. Pravokutnici su konstruirani tako da su sukladni, pa slijedi $|AP| = |DR|$. Zbog sukladnosti pravokutnika i suplementarnosti susjednih kutova u trapezu $\alpha + \delta = 180°$, slijedi $\sphericalangle RDS \equiv \sphericalangle PAS$. Na sličan način možemo zaključiti i da vrijedi $|AS| = |DS|$, pa primjenom teorema o sukladnosti trokuta S-K-S slijedi $\triangle APS \cong \triangle DRS$.

Znamo da je kut $\sphericalangle ASD$ pravi. Rotacijom za 90° suprotno od kazaljke na satu oko točke S trokut $\triangle APS$ će se preslikati u $\triangle DRS$, konkretno dužina $\overline{SP}$ će se preslikati u $\overline{SR}$, zato je trokut $\triangle PRS$ jednakokračan i pravokutan. Znamo da je takav trokut "pola kvadrata", odnosno trokut koji nastaje kada kvadrat prepolovimo jednom dijagonalom.

Na analogan način dolazimo do zaključka da je $\triangle RPQ$ također pravokutan i jednakokračan trokut, odnosno druga "polovica" kvadrata. Dakle, četverokut $PQRS$ je kvadrat.



Slika 5.3: Skica dokaza Napoleonovog teorema

□

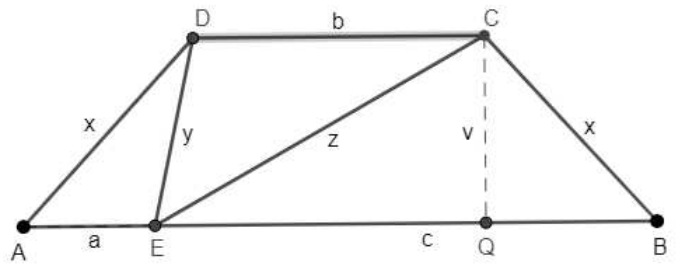
Teorem i dokaz su preuzeti iz [4].

5.3 Jednakokračni trapez

Kao "najpravilniji" od svih trapeza jednakokračni trapez ima neka zanimljiva svojstva. Sljedeće karakterizacije su preuzete, uz manje preinake iz [9].

Teorem 5.3.1. *Ako je dulja osnovica jednakokračnog trapeza veća od zbroja duljina stranica krakova, onda postoji točka na duljoj osnovici trapeza, koja kad se spoji s krajevima kraće osnovice dijeli trapez na tri slična trokuta.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez s bazama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, pri čemu je $\overline{AB}$ dulja osnovica. Uvedimo sljedeće oznake kao na slici: $x = \overline{AD} = \overline{BC}$, $b = \overline{CD}$, $e = \overline{AB}$, $y = \overline{DE}$ i $z = \overline{CE}$.



Slika 5.4: Jednakokračni trapez podijeljen na tri slična trokuta

Neka je točka E na stranici AD takva da vrijedi:

$$|AE| = a = \frac{e}{2} - \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 - x^2},$$

$$|EB| = c = \frac{e}{2} + \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 - x^2}.$$

Tada vrijedi:

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{a}{c} = \frac{ac}{c^2} = \frac{x^2}{c^2}.$$

Dalje vrijedi, $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$. Znamo da su kutovi $\sphericalangle CAE$ i $\sphericalangle DBE$ kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta pa su jednakih veličina. Primjenom poučka o sličnosti trokuta slijedi:

$$\triangle CAE \sim \triangle EBD. \tag{5.1}$$

Neka je Q nožište visine v trapeza na stranicu $\overline{AB}$. Tada imamo:

$$|DQ| = \frac{e-b}{2} = \frac{a+c-b}{2},$$

$$|EQ| = |EB| - |QB| = \frac{c-a+b}{2}.$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute $\triangle DQE$ i $\triangle DQB$ slijedi:

$$z^2 = v^2 + \left(\frac{c-a+b}{2}\right)^2,$$

$$x^2 = v^2 + \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2.$$

Oduzimanjem ovih dviju jednakosti dobivamo:

$$z^2 - x^2 = \left(\frac{c-a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 = bc - ac. \tag{5.2}$$

Iz omjera stranica dobivenih zbog uočene sličnosti u (5.1) slijedi: $x^2 = ac$. Zbrojimo dobiveni izraz s jednakosti (5.2) te dobivamo $z^2 = bc$, što možemo zapisati kao $\frac{z}{b} = \frac{c}{z}$, odnosno kao $\frac{|ED|}{|CD|} = \frac{|EB|}{|ED|}$. Uočimo sada da su kutovi $\sphericalangle EDC$ i $\sphericalangle BED$ jednaki, jer su to kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca. Iz dvije prethodno navedene tvrdnje prema poučku o sličnosti trokuta slijedi: $\triangle EDC \sim \triangle EBD$. Sličnost je tranzitivno svojstvo, pa slijedi da su sva tri trokuta ($\triangle EDC, \triangle EBD, \triangle CAE$) slična i tvrdnja teorema je dokaza. □

Teorem 5.3.2. *Koristeći oznake kao u prethodnom teoremu imamo niz jednakosti:*

(i) $y^2 = ab$, $x^2 = ac$, $z^2 = bc$,

(ii) $a = \frac{xy}{z}$, $b = \frac{yz}{x}$ $c = \frac{xz}{y}$,

(iii) $xyz = abc$,

(iv) $P_{ABCD} = \frac{1}{2}v(a+b+c)$.

Dokaz. Prve tri tvrdnje slijede iz sličnosti dobivenih trokuta, a četvrta iz formule za površinu trapeza. □

Teorem 5.3.3. *Neka je d duljina dijagonale jednakokračnog trapeza ABCD. Uz oznake kao u prethodnim iskazima, duljinu dijagonale d možemo iskazati sljedećim izrazom:*

$$d = \sqrt{ac + ab + bc} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dokaz. Označimo $\alpha = \sphericalangle ABC$. Primijenimo teorem o kosinusu na trokute $\triangle ACD$ i $\triangle DBA$:

$$\begin{aligned} d^2 = |AD| &= x^2 + b^2 - 2xb\cos\alpha \\ &= x^2 + (a+c)^2 - 2x(a+c)\cos(180^\circ - \alpha) \\ &= x^2 + (a+c)^2 + 2x(a+c)\cos\alpha. \end{aligned}$$

Izrazimo $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + b^2 - d^2}{2xb} = \frac{x^2 + (a+c)^2 - d^2}{-2x(a+c)}.$$

Pojednostavljivanjem i primjenom (i) iz Teorema 5.3.2 slijedi

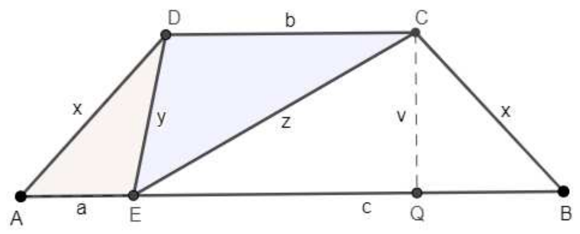
$$d^2 = x^2 + ab + bc = ac + ab + bc = x^2 + y^2 + z^2.$$

□

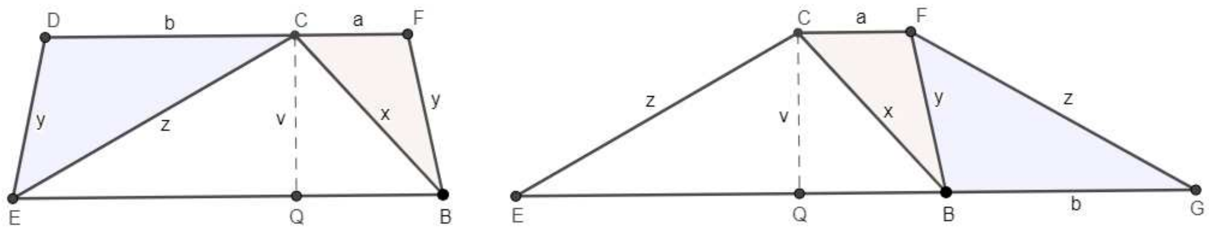
Sljedeći trapez vezan je uz "preraspodjelu" dobivenih trokuta u jednakokračnom trapezu, kako bismo dobili druge trapeze jednakih površina.

Teorem 5.3.4. *Ako jednakokračni trapez razdvojimo premještanjem sličnih trokuta, mogu se dobiti još dva jednakokračna trapeza. Dobiveni trapezi zadovoljavaju jednake uvjete za razdvajanje, imaju jednake površine i duljine dijagonala kao početni trapez.*

Dokaz. Uočimo da su površine svih trapeza dobivenih razmještanjem sličnih trokuta jednake $\frac{1}{2}v(a + b + c)$

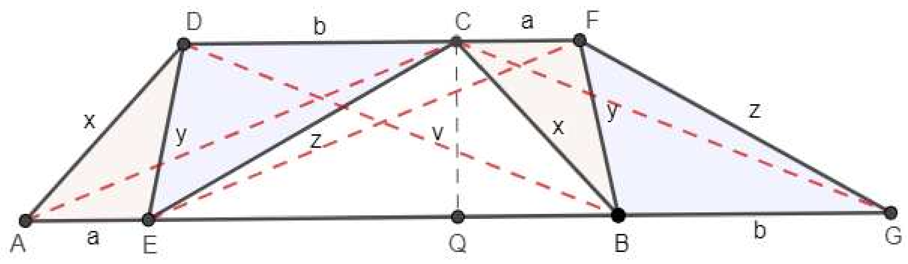


Slika 5.5: Originalni trapez s označenim sličnim trokutima



Slika 5.6: Trapez s razmještenim sličnim trokutima

Prema Teoremu 5.3.3 znamo izraz za duljinu dijagonale $d = \sqrt{ab + bc + ca} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a u jednakokračnim trapezima su dijagonale jednakih duljina, pa slijedi dokaz bez riječi.



Slika 5.7: Dokaz bez riječi

□

Teorem 5.3.5. *Trapez ima dijagonale jednakih duljina ako i samo ako je jednakokračan.*

Dokaz. Neka su stranice trapeza $ABCD$ označene s a, b, c i d redom i $a \parallel c$, $a \neq b$. Prema dokazu Teorema 4.3.4 imamo:

$$p = \sqrt{\frac{ac(a-c) + ad^2 - cb^2}{a-c}} \quad \text{i} \quad q = \sqrt{\frac{ac(a-c) + ab^2 - cd^2}{a-c}}. \tag{5.3}$$

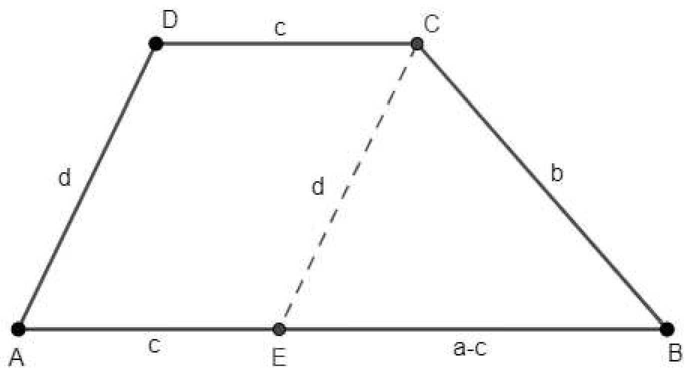
Dalje slijedi:

$$p^2 = q^2 \Leftrightarrow ad^2 - cb^2 = ab^2 - cd^2 \Leftrightarrow (a-c)(d^2 - b^2) = 0.$$

Kako vrijedi $a \neq c$, slijedi $b = d$, odnosno trapez je jednakokračan. □

5.4 Četverokuti i trapezi

U ovom poglavlju bavit ćemo se pitanjem može li se od bilo kojeg konveksnog četverokuta dobiti trapez. Neka je $ABCD$ četverokut s paralelnim stranicama $a \parallel c$ i $a \neq c$. Konstruirajmo trokut $\triangle BCE$ kao na slici tako da vrijedi $CE \parallel DA$.



Slika 5.8: Presavijanje konveksnog četverokuta

Konstrukcija takvog trokuta je moguća kad god su zadovoljene nejednakosti trokuta, odnosno s oznakama sa slike $a - c < b + d$, $d < a - c + b$ i $b < a - c + d$, pri čemu prva od nejednakosti vrijedi kad god postoji četverokut. Spojimo li drugu i treću nejednakost u jednu dobivamo:

$$|a - c| > |b - d|.$$

Ova nejednakost je nužan uvjet za $a \parallel c$ kad vrijedi $a \neq c$, ali je također i dovoljan uvjet, obzirom na to da kad je ostvaren, moguće je konstruirati trokut $\triangle BCE$, a zatim i trapez. Analogno imamo:

$$|a - c| > |b - d|,$$

što je nužan i dovoljan uvjet da bi vrijedilo $b \parallel d$ kad vrijedi $b \neq d$. Dakle, jedini slučaj kad konveksni četverokut ne možemo "presaviti" u trapez je kad vrijedi:

$$|a - c| = |b - d|.$$

Prema [13] i [12] ova karakterizacija vrijedi samo kad četverokut ima pripisanu kružnicu (to je kružnica koja dira jednu stranicu trokuta s njegove vanjske strane i produžetke ostalih dviju stranica). Primijenimo li "polu-faktoriziranu" Heronovu formulu za površinu T trokuta

$$T = \frac{\sqrt{((y + z)^2 - x^2)(x^2 - (y - z)^2)}}{4},$$

možemo dobiti formulu za visinu trapeza. U trokutu sa stranicama x, y, z, visina v na stranicu x ima sljedeću duljinu

$$v = \frac{2T}{x} = \frac{\sqrt{((y + z)^2 - x^2)(x^2 - (y - z)^2)}}{2x}.$$

Trokut $\triangle BCE$ ima jednaku visinu kao i trapez $ABCD$. Zamijenimo li x s $a-c$, y s b i z s d, izraz za visinu trapeza postaje

$$v = \frac{\sqrt{((b+d)^2-(a-c)^2)((a-c)^2-(b-d)^2)}}{2|a-c|}.$$

što vrijedi kad je $a \neq c$. Sad je jasno da kad vrijedi

$$|a-c| = |b-d|$$

visina trapeza je jednaka nula, odnosno trapez postaje dužina. Dakle, konveksni četverokut kojemu se može pripisati kružnica ne može biti presavijen u trapez.

Teorem 5.4.1. *Ako četiri dužine, duljina a, b, c i d imaju svojstvo da je bilo koja od njih kraća od zbroja duljina ostalih triju, onda one uvijek čine uzastopne stranice nedegeneriranog trapeza, osim u slučaju kad vrijedi*

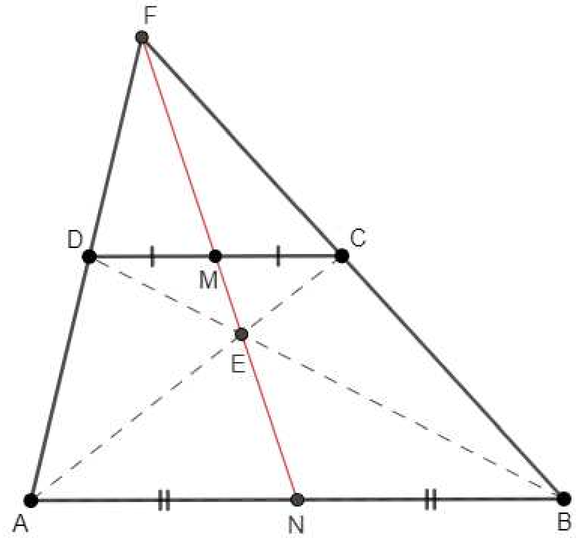
$$|a-c| = |b-d| \neq 0.$$

U tom slučaju dužine će činiti stranice četverokuta kojemu se može pripisati kružnica.

5.5 Steinerov teorem za trapeze

Sljedeći rezultat ([14]) vezan uz trapeze ime je dobio po švicarskom metematičaru Jakobu Steineru (1796.-1863.)

Teorem 5.5.1. *Za svaki trapez $ABCD$ vrijedi da sve četiri točke: polovišta osnovica, točka sjecišta dijagonala te točka u kojoj se sijeku produžeci krakova leže na istom pravcu.*



Slika 5.9: Steinerov teorem

Dokaz. Neka vrijedi $|AN| = |NB|$ i $|DM| = |MC|$, odnosno N i M su polovišta osnovica trapeza $ABCD$. Neka je točka E sjecište dijagonala, a točka F sjecište produžetaka krakova trapeza kao na Slici 5.9. Sada primjenom Talesovog poučka o proporcionalnim dužinama slijedi:

$$\triangle FDC \sim \triangle FAB.$$

Odnosno, vrijede proporcionalnosti:

$$\frac{|FA|}{|AB|} = \frac{|FD|}{|DC|},$$

$$\frac{|AN|}{|AB|} = \frac{|DM|}{|DC|} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{|FA|}{|AN|} = \frac{|FD|}{|DM|}.$$

Obzirom da vrijedi

$$\sphericalangle FDC \cong \sphericalangle FAB,$$

slijedi sličnost trokuta $\triangle FAN \sim \triangle FDM$ prema poučku o sličnosti S-K-S. Vrijedi da su točke F, D i A kolinearne, a obzirom da su točke M i N s iste strane pravca AD i vrijedi $\triangle FAN \sim \triangle FDM$, slijedi $FN \parallel FM$ i F, M, N su kolinearne. Promotrimo sada trokute

$\triangle EBA$ i $\triangle EDC$, dužine AC i BD su transverzale, pa vrijedi: $\triangle EAB \sim \triangle ECD$ prema S-K-S poučku o sličnosti trokuta. Iz sličnosti slijedi:

$$\sphericalangle BEF \cong \sphericalangle DEN$$

Točke N, E, M su kolinearne. Primjenom svojstva tranzitivnosti kolinearnosti slijedi tvrdnja teorema. $\square$

Bibliografija

[1] C. Alsina i R.B. Nelsen, *Icons of Mathematics. An exploration of twenty key images*, Math. Ass. Amer., 2011.

[2] H. ApSimon, *Mathematical Byways in Ayling, Beeling & Ceiling*, Oxford University Press, New York, 1991.

[3] R. C. Archibald, *The Area of a Quadrilateral*, Amer. Math. Monthly (1922.), br. 29, 29–36.

[4] S. Berendonk, *A Napoleonic Theorem for Trapezoids*, The American Mathematical Monthly **126** (2019.), br. 4, 367–369.

[5] C.J. Bradley, *The Algebra of Geometry. Cartesian, Areal and Projective co-ordinates*, Highperception, Bath, United Kingdom, 2007.

[6] H.S.M. Coxeter i S.L.Greitzer, *Geometry Revised*, New York: Random House, 1967.

[7] L. Debnath, *The Legacy of Leonhard Euler, A Tricentennial Tribute*, Imperial College Press, 2010.

[8] B. Grünbaum, *Is Napoleon's Theorem Really Napoleon's Theorem?*, The American Mathematical Monthly **119** (2012.), br. 6, 495–501.

[9] L. Hoehn, *The Isosceles Trapezoid and its Dissecting Similar Triangles*, Forum Geometricorum **12** (2012.), 29–38.

[10] D. Ilišević i M. Bombardelli, *Elementarna geometrija - skripta*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf`, (rujan, 2023.).

[11] M. Josefsson, *The Area of the Diagonal Point Triangle*, Forum Geometricorum **11** (2011), 213–216.

[12] ______, *Similar Metric Characterizations of Tangential and Extangential Quadrilaterals*, Forum Geometricorum **12** (2012), 63–77.

[13] ______, *Characterizations of Trapezoids*, Forum Geometricorum **13** (2013), 23–35.

[14] M. Stupel i D. Ben-Chaim, *A fascinating application of Steiner's Theorem for Trapezium: Geometric constructions using straightedge alone*, Australian Senior Mathematics Journal **27**, br. 2.

[15] Editura Didactică şi Pedagogică, `www.edituradp.ro/site_img/downloads/2013/01/pt_download.pdf`, (rujan, 2023.).

[16] M. Žužul, *Opća svojstva konveksnog četverokuta*, 2019., Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb.

Sažetak

U ovom radu bavili smo se karakterizacijama trapeza. Najprije smo definirali trapez, a zatim iskazali i dokazali njegova dobro poznata svojstva. Također smo dokazali Eulerov teorem za četverokute kao i poseban slučaj kad je četverokut trapez. Kroz analizu trapeza kao geometrijskog lika sustavno smo pokazali tri metode za određivanje površine. Podjelom na jednostavnije likove, nadopunjavanjem i transformacijskom geometrijom naveli smo različite načine za dobivanje poznate formule za izračunavanje površine trapeza ako su nam poznate duljine osnovica i duljina visine trapeza. Zatim smo uveli pojam trokuta dijagonalnih točaka i objasnili vezu takvog trokuta s nekim karakterizacijama trapeza. Osim karakterizacija vezanih uz duljine i odnose stranica trapeza, također smo uveli pojam Garfieldovog trapeza i objasnili po čemu je on zanimljiv. Dokazali smo i iskazali poopćenje teorema koji se pripisuje Napoleonu. Bavili smo se i najpravilnijim trapezom - jednakokračnim. Pokazali smo kakve su dijagonale jednakokračnog trapeza te kako možemo izračunati duljinu dijagonale. Na kraju, iskazali smo i dokazali Steinerov teorem za trapez koji kaže da u svakom trapezu polovišta osnovica, točka sjecišta dijagonala i točka u kojoj se sijeku produženci krakova, leže na istom pravcu.

Summary

In this thesis, we have explored the characterizations of trapezoid. First, we defined what a trapezoid is and then stated and proved its well-known properties. We also proved Euler's theorem for quadrilaterals and its special case when a quadrilateral is a trapezoid. Through the analysis of the trapezoid as a geometric figure, we systematically presented three methods for determining its area. By dividing it into simpler shapes, complementing, and using transformational geometry, we outlined various approaches to derive the well-known formula for calculating the area of a trapezoid, when the lengths of the bases and the height are known. Then, we introduced the concept of the diagonal point triangle and explained its connection to some characterizations of trapezoids. In addition to characterizations related to lengths and side ratios of trapezoid, we also introduced the concept of Garfield's trapezoid and explained its significance. We also have proven and stated a generalization of the theorem attributed to Napoleon. Furthermore, we explored the most regular trapezoid, the isosceles trapezoid, demonstrating properties of its diagonals and providing methods for calculating their lengths. Finally, we presented and proved Steiner's theorem for trapezoid, which asserts that the midpoints of the bases, the intersection point of the diagonals, and the point where the extensions of the legs intersect, lie on the same line.

Životopis

Ana Novaković rođena je 27. srpnja 1998. u Livnu, Bosna i Hercegovina. Osnovnu i srednju školu završila je u Uskoplju, Bosna i Hercegovina. Nakon završetka Opće gimnazije, upisuje se na Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Zagrebu, gdje 2021. godine završava preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički. Školovanje nastavlja na diplomskom sveučilišnom studiju Matematika i informatika, smjer: nastavnički.