Steinerov problem

Novosel, Katarina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Katarina Novosel

STEINEROV PROBLEM

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, rujan 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem prije svega sebi, kao nagradu za kraj osamnaestogodišnjeg obrazovanja.
Posvećujem ga i svojoj obitelji koja mi je uvijek pružala najveću podršku i bila uvijek tu za mene. Bez vaše podrške, ljubavi i vjere ovaj rad ne bi bio moguć.
Hvala svim prijateljima i dečku na ohrabrivanjima u teškim trenucima i veselju u onim radosnim. Vaši savjeti, poticaji i trenuci opuštanja značili su mi više nego što to mogu riječima izraziti.
Zahvaljujem se izv. prof. dr. sc. Slavenu Kožiću na vodstvu, strpljenju i konzultacijama pri nastajanju ovog rada.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Problem rezanja pizze **3**

2 Neki pristupi rješavanju Steinerovog problema **8**
2.1 Rješavanje Steinerovog problema rekurzijom 8
2.2 Rješavanje Steinerovog problema uz pomoć tablice brojeva 10
2.3 Steinerov problem i binomni koeficijenti 12

3 Od Steinera do Eulera **17**

4 Steinerov problem s kružnicama **25**

5 Steinerov problem u nastavi matematike **27**
5.1 Aktivnost „Steinerov niz” 27
5.2 Aktivnost „Eulerova formula” 29
5.3 Aktivnost „Eulerova formula za grafove“ 31
5.4 Aktivnost „Matematička indukcija“ 36
5.5 Neki primjeri zadataka povezani sa Steinerovim problemom 38

Bibliografija **41**

Uvod

Švicarski geometar Jakob Steiner (1796. – 1863.) promatrao je problem dijeljenja ravnine pravcima. Ravinu, koja je beskonačna, dijelimo pravcima i želimo dobiti što veći broj dijelova. Njegovo pitanje glasi: „Na koliko najviše dijelova n pravaca može podijeliti ravninu?“ Teško je zamisliti dijeljenje ravnine pravcima te zatim prebrojavanje dijelova koje smo dobili. Zato je Steiner dao ekvivalentnu formulaciju ovog problema u terminima pizze. Naime, ukoliko se dovoljno udaljimo od ravnine koja je podijeljena s n pravaca, vidjet ćemo sve pravce i sve dijelove. Kako bismo to mogli lakše prikazati i prebrojiti, odabrat ćemo dovoljno velik radijus pizze tako da se sva sjecišta pravaca nalaze unutar kružnice tog radijusa. Pizza će predstavljati ravninu, a njezina korica beskonačnost. Upravo zbog toga, Steinerov problem se u literaturi naziva i Problem rezanja pizze.
U prvom poglavlju ovog rada prikazat ćemo Steinerov problem na modelu pizze te ćemo smještati rezove na razne načine kako bismo otkrili pravila koja moraju vrijediti za smještanje rezova na pizzu. Metodom pokušaja i promašaja uočit ćemo pravilnost među rezovima koji daju najveći broj dijelova. Pravila koja otkrijemo u ovom poglavlju vrijedit će i u sljedećem u kojem ćemo se baviti rješavanjem Steinerovog problema na nekoliko načina. Prvi način rješavanja je pomoću rekurzije. Ispisivanjem prvih nekoliko članova niza čiji članovi predstavljaju maksimalan broj dijelova pizze koji dobivamo s $n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$ rezova, otkrivamo vezu dva susjedna člana niza. Uz pomoć metode teleskopiranja i veze dva susjedna člana niza dobivamo izraz za opći član niza, odnosno dobivamo formulu koja opisuje vezu između broja rezova pizze i maksimalnog broja dijelova pizze. Osim pomoću rekurzije, u ovom je poglavlju opisano još jedno rješenje Steinerovog problema. Radi se o tablici brojeva u čiji prvi redak upisujemo redom maksimalan broj dijelova pizze koji dobijemo rezanjem s $n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$ rezova. U sljedeći redak upisuje se razlika svaka dva susjedna člana niza iz prvog retka te tako dobivamo novi niz. Nastavljamo s ispisivanjem nizova razlika susjednih članova niza tako dugo dok ne dobijemo konstantan niz čiji su svi članovi 0. Ovdje izvodimo i koristimo lemu iz koje saznajemo kojeg je stupnja polinom koji opisuje niz članova iz prvog retka. Znajući stupanj polinoma, koeficijente lako otkrivamo uz pomoć prvih nekoliko članova niza. Rješavanjem sustava dolazimo do polinoma koji opisuje vezu maksimalnog broja dijelova pizze i broj rezova, odnosno dobivamo polinom koji je rješenje Steinerovog problema. U trećem rješavanju Steinerovog problema

koristit ćemo binomne koeficijente. Crtajući i prebrojavajući maksimalan broj dijelova pizze na koji je razrezana, broj rezova te broj unutarnjih vrhova, uočavamo novu pravilnost koja vrijedi. Istu pravilnost zapisujemo pomoću binomnih koeficijenata te raspisivanjem iste potvrđujemo rješenje koje smo dobili i prethodnim rješavanjem.
Osim rješavanja Steinerovog problema, spomenut ćemo i poznatu formulu za konveksne poliedre. Naime, upravo se rješenje Steinerovog problema smatra prethodnikom poznate Eulerove formule $v+s-b=2$. Na raznim primjerima uočit ćemo i poseban slučaj Eulerove formule za Steinerove grafove. Osim što se bavio problemom dijeljenja ravnine pravcima, Steiner je promatrao i dijeljenje ravnine kružnicama. U 4. poglavlju opisujemo njegov problem dijeljenjenja ravine kružnicama na maksimalan broj dijelova. U rješavanju ovog problema koristi nam prethodno spomenuta Eulerova formula.
Na kraju rada, u 5. poglavlju pokušat ćemo povezati Steinerov problem s nastavom matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Iako se ovaj problem ne nalazi u kurikulumu nastave matematike, možemo ga uspješno uklopiti u razne sadržaje koji se obrađuju. Tako u 5. poglavlju prikazujemo nekoliko aktivnosti sa sata matematike u osnovnoj i srednjoj školi koje pomažu učenicima u otkrivanju novih sadržaja. Prikazani su primjeri koji povezuju Steinerov problem i nizove, Steinerov problem i matematičku indukciju, Eulerovu formulu za konveksne poliedre te Eulerovu formulu za Steinerove grafove. Dalje su prikazani primjeri zadataka koji se također mogu uklopiti u nastavu matematike u sadržajima: nizovi, geometrijska tijela u ravnini, funkcije, krug i kružnica. Prije ili nakon što učenici obrade neki sadržaj u koji je uklopljen Steinerov problem, zgodno je učenicima objasniti problem te prikazati razne primjere rezanja pizze na (maksimalan) broj dijelova.

Poglavlje 1

Problem rezanja pizze

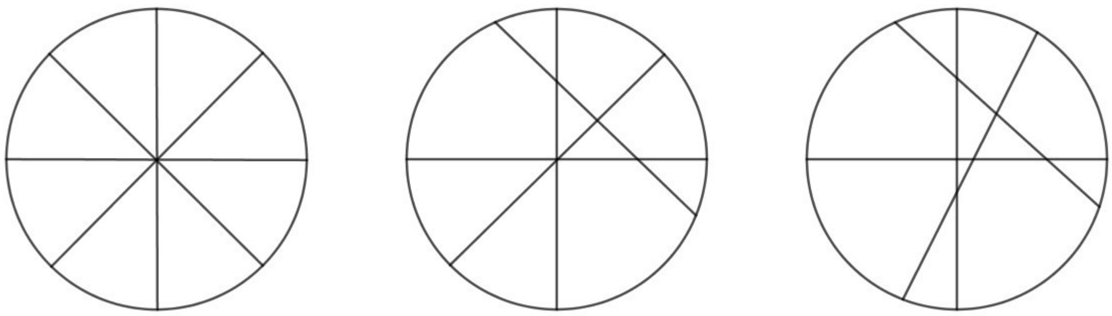
U ovom poglavlju pobliže ćemo se upoznati s problemom rezanja pizze i doći do pravila koja određuju položaj rezova na pizzi, kao što je opisano u [5]. Metodom pokušaja i promašaja smještat ćemo rezove na pizzu, prebrojavati dijelove i odrediti u kojem slučaju dobivamo najviše dijelova pizze. Proučimo sljedeću situaciju iz stvarnog života. Pizzu okruglog oblika izrezat ćemo na 8 jednakih dijelova. Kako bismo to učinili, potrebno je napraviti 4 reza koji prolaze središtem kruga, odnoso pizze. Za početak ćemo promatrati rezove koji su ravne linije. Postavimo si sada pitanje: koliki je maksimalan broj dijelova pizze koji možemo dobiti s 4 reza? U ovom slučaju, naravno, veličina dijelova ne mora biti ista, kao što je prikazano primjerom na slici 1.1 . Pokušajmo prvo zamijeniti samo jedan od 4 reza nekim drugim, pri čemu on ne treba prolaziti središtem kruga. Na taj način dobivamo najviše 10 dijelova pize različitih veličina. Postoji li veći broj dijelova pizze koji možemo dobiti? Zamijenimo sada 2 od sveukupno 4 reza nekim drugim dvama, koji također ne trebaju prolaziti središtem kruga, tj. pizze. Broj dijelova koje smo tako dobili je 11.

Metodom pokušaja i promašaja naslutili smo da bi maksimalni broj dijelova pizze koji dobijemo s 4 reza bio jednak 11. No, postavljamo si pitanje koji je maksimalan broj dijelova pizze koji dobijemo nakon n rezova. Tako dolazimo do problema rezanja pizze kojim ćemo se baviti u ovom radu.

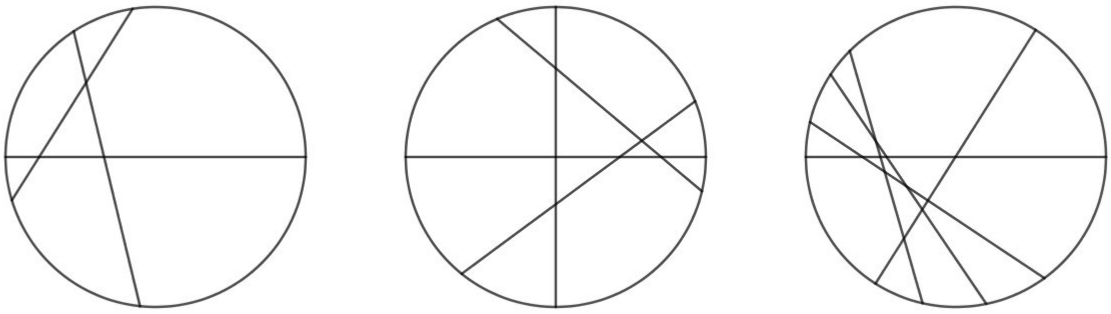
Neka je $P(n)$ maksimalan broj dijelova koji se mogu dobiti s n ravnih rezova kroz okruglu pizzu. Pogledajmo prvih nekoliko vrijednosti $P(n)$ za male $n \in \mathbb{N}$. Očito vrijedi

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 2, \quad P(2) = 4.$$

Najlakše ćemo odrediti $P(3), P(4), P(5)$ primjenjujući metodu pokušaja i promašaja. Primjeri najvećeg broja dijelova pizze za $n = 3, n = 4, n = 5$ prikazani su slikom 1.2 . Lako uočavamo da vrijedi: $P(3) = 7, P(4) = 11, P(5) = 16$.

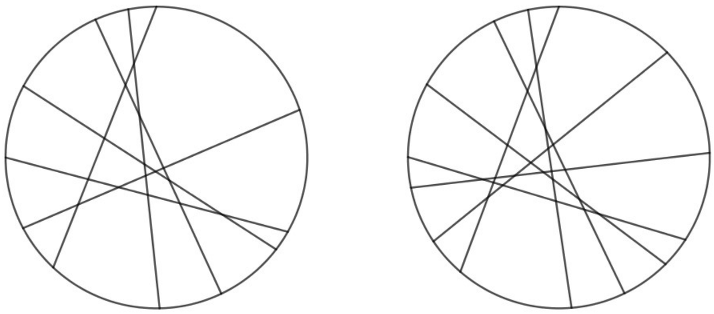


Slika 1.1: Podjela pizze pomoću 4 reza



Slika 1.2: Podjela pizze pomoću 3, 4, 5 rezova

Pokušajmo prikazati i maksimalan broj dijelova pizze za $n = 6, 7$ rezova. Očito, za sve veće n, teže je odrediti maksimalan broj dijelova pizze.

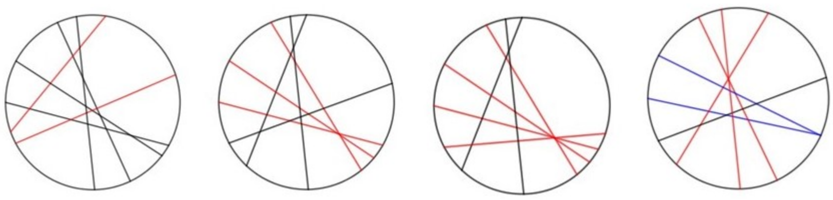


Slika 1.3: Podjela pizze pomoću 6 i 7 rezova

Prikažimo ovisnost maksimalnog broja dijelova $P(n)$ o broju rezova n u tablici. U tablici 1.1 prikazan je maksimalan broj dijelova pizze $P(n)$ za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Uočimo da povećanjem broja rezova sve teže prebrojavamo broj dijelova pizze pa ovaj način nije prikladan za veći broj rezova. Zato je potrebno odrediti efikasniji način određivanja vrijednosti $P(n)$. Pogledajmo prvo način na koji smo rezali pizzu s $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ rezova. Iz slike 1.2 uočavamo kako smo najveći broj dijelova pizze za $n = 3, 4, 5$ rezova dobili kada se nikoja tri reza nisu sjekla u jednoj točki. Naslućujemo kako će najveći broj dijelova pizze općenito biti kada se maksimalno dva pravca sijeku u jednoj točki. Probajmo to pokazati na nekoliko primjera. Uzmimo za početak $n = 6$.

n	$P(n)$
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22
7	29

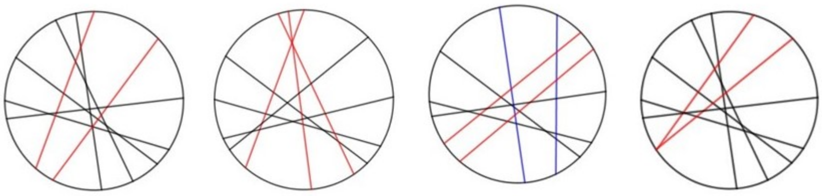
Tablica 1.1: Maksimalan broj dijelova u ovisnosti o broju rezova



Slika 1.4: Rezanje pizze sa 6 rezova

Na slici 1.4 prikazani su primjeri u kojima se pojedini rezovi pizze ne sijeku ili se više rezova siječe u jednoj točki. Na slici prvoj slijeva, prikazano je 6 rezova pizze pri čemu se dva reza, koji su na slici označeni crvenim, ne sijeku. Prebrojavanjem dobivamo broj 20. Na drugoj slici slijeva, prikazano je 6 rezova pizze od kojih se tri sijeku u jednoj točki. Prebrojavanjem dobivamo 21 dio pizze. Na trećoj slici slijeva u jednoj se točki sijeku 4 reza i prebrojavanjem dobivamo 19 dijelova pizze. Na četvrtoj slici slijeva prikazano je 6 rezova pizze od kojih se tri sijeku u jednoj točki te dva u jednoj točki koja se nalazi na kružnici, tj. rubu pizze. Tako dobivamo 18 dijelova pizze. U svakom od ovih primjera dobiven je broj dijelova pizze koji je manji od 22 koji smo dobili ranije.
Pogledajmo slično i za $n = 7$. Na slikama 1.5 prikazani su razni načini rezanja pizze za $n = 7$. Na prvoj slici slijeva prikazano je 7 rezova od kojih se dva, koji su na slici označeni crvenim, ne sijeku. U ovom slučaju prebrojavamo 27 dijelova pizze. Na drugoj slici slijeva, tri se reza sijeku u jednoj točki. Ovim načinom rezanja pizze dobivamo 28 dijelova. Na trećoj slici slijeva, gdje je pizza podijeljena sa 7 rezova, dva para rezova nemaju sjecišta. Prebrojavamo 26 dijelova pizze. U zadnjem prikazanom primjeru, na četvrtoj slici slijeva, dva reza sijeku se na kružnici. U ovom slučaju prebrojavamo 28 dijelova pizze. Uočavamo kako ni u jednom primjeru nismo izrezali pizzu na više od 29 dijelova, kako smo dobili

ranije.



Slika 1.5: Rezanje pizze sa 7 rezova

U primjerima koje smo sada analizirali, rezali smo pizzu rezovima koji se ili ne sijeku ili se više rezova sijeće u jednoj točki ili oboje. Ni u jednom od primjera nismo dobili veći broj dijelova pizze za određeni broj rezova od onog kada smo rezali pizzu na način da su se svaka dva reza sjekla u točno jednoj točki te da se u niti jednoj točki ne sijeku više od dva reza. Iz ta dva uočena svojstva, dolazimo do sljedeće slutnje o maksimalnom broju dijelova:
„Broj dijelova pizze je maksimimalan ako svaki rez siječe svaki drugi rez, ali nikoja tri reza se ne sijeku u jednoj točki.“
Pogledajmo zašto je to tako. Pretpostavimo da je pizza podijeljena na maksimalan broj dijelova $P(n)$ s n pravaca. n-ti pravac koji je prošao pizzom, odnosno ravninom, siječe $n-1$ pravaca u $n-1$ različitih točaka, uz uvjet da se nikoja tri pravca ne sastaju u istoj točki. Na taj način, n-ti pravac podijeljen je sjecištima na točno n segmenata, odnosno dijelova. Svaki takav dio n-tog pravca dijeli svaki od dijelova ravnine koje smo dobili u prethodnom koraku dijeljenjem ravnine s $n-1$ pravaca, na 2 dijela. Kada novi pravac, tj. n-ti pravac ne bi sjekao svaki od prethodnih $n-1$ pravaca, tada on ne bi dijelio svaki od dijelova ravnine na dva dijela, već neke ne bi uopće sjekao. Dakle, ako svaki od n pravaca siječe svaki od ostalih n - 1 pravaca u jednoj točki te ako se nikoja tri pravca ne sastaju u istoj točki, onda smo tim n-tim pravcem stvorili n novih dijelova ravnine. Zato, svaki novi pravac mora sijeći ostale u točno jednoj točki kako bismo dobili maksimalan broj dijelova ravnine. Prema tome, pravila koja moraju zadovoljavati rezovi su sljedeća:

- Svaka dva reza se sijeku u točnoj jednoj točki,
- Nikoja tri reza se ne sijeku u jednoj točki, (1)
- Sva sjecišta nalaze se unutar kružnice.

U cijelom radu pozivat ćemo se na ova svojstva rezova.

Poglavlje 2

Neki pristupi rješavanju Steinerovog problema

U ovom poglavlju predstavit ćemo nekoliko pristupa rješavanju Steinerovog problema. Najprije ćemo otkriti vezu broja rezova pizze i maksimalnog broja dijelova koje dobijemo rezanjem uz pomoć nizova i rekurzije. Nakon toga, riješit ćemo Steinerov problem koristeći se tablicom razlika članova niza koji predstavljaju maksimalan broj dijelova pizze za $n \in \mathbb{N}$. Na kraju, uočavanjem pravilnosti u nizu i korištenjem binomnih koeficijenata doći ćemo do istog rješenja. U ovom poglavlju slijedimo izlaganje iz knjige [5].

2.1 Rješavanje Steinerovog problema rekurzijom

Zapišimo vrijednosti $P(n)$ koje pronalazimo u tablici 2.1 u obliku niza. Dobivamo niz brojeva

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, \ldots.$$

Promotrimo drugi niz brojeva koji ćemo dobiti zapisivanjem razlike između svakog člana niza i njegovog prethodnika u nizu. Zapišimo ovaj novi niz:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots.$$

Lako je uočljivo kako je razlika svaka dva susjedna člana niza, u odnosu na prethodnu razliku, veća za 1. Također, dva susjedna člana niza $P(n)$ su povezana na način da se svaki n-ti član niza dobiva tako da $(n$ - $1)$-vi član niza uvećamo za $n - 1$. Ovaj primjer služi kao motivacija za rekurziju za maksimalan broj dijelova pizze razrezane s n rezova. Upravo je ta rekurzija posljedica slutnje o maksimalnom broju dijelova koju smo na kraju prošle cjeline i dokazali. Vrijedi sljedeća jednakost:

$$P(n) = P(n-1) + n \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Poznavajući vezu dva susjedna člana niza, možemo dopuniti tablicu 1.1 te na taj način dobivamo tablicu 2.1.

n	$P(n)$
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22
7	29
8	37
9	46
10	56
11	67

Tablica 2.1: Maksimalan broj dijelova u ovisnosti o broju rezova

Iako smo otkrili vezu dva susjedna člana niza $P(n)$, ova rekurzija nam ne znači mnogo ako želimo odrediti broj dijelova na koji je pizza razrezana jako velikim brojem rezova. U tom slučaju ne pomaže ni crtanje koje nije ni efikasno ni praktično, ali ni rekurzija (2.1). Potrebno je odrediti izraz za opći član niza iz rekurzije koju znamo. Pri tome koristimo metodu teleskopiranja. Teleskopiranje je metoda kojom računamo zbroj prvih n članova niza zapisivanjem opće formule na drugačiji način. Zapisivat ćemo rekurzije za članove niza unazad, započevši od $P(n)$, zatim $P(n-1)$, pa $P(n-2), ..., P(2), P(1), P(0)$. Nakon toga, sve rekurzije zbrajamo i dolazimo do općeg člana niza:

$$\begin{aligned}
P(n) &= P(n-1) + n, \\
P(n-1) &= P(n-2) + (n-1), \\
P(n-2) &= P(n-3) + (n-2), \\
P(n-3) &= P(n-4) + (n-3), \\
P(n-4) &= P(n-5) + (n-4), \\
&\;\;... \\
P(2) &= P(1) + 2 \\
P(1) &= P(0) + 1.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem svih rekurzija dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} P(i) = \sum_{i=1}^{n} (P(i-1) + i).$$

Oduzimanjem jednakih izraza $P(i), i = 1, \ldots, n-1$ koji se nalaze i s lijeve i desne strane od cijele jednakosti, dobivamo:

$$P(n) = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + ... + 2 + P(0) + 1. \tag{2.2}$$

Uočimo kako se s desne strane gornje jednakosti nalazi zbroj prvih n prirodnih brojeva. Po Gaussovoj formuli za zbroj prvih n prirodnih brojeva vrijedi

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Uvrštavajući izraz za zbroj prvih n prirodnih brojeva u (2.2), dobivamo

$$P(n) = \frac{n(n+1)}{2} + P(0) = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Tako smo dobili izraz za opći član niza koji određuje vrijednost $P(n)$. Odnosno, došli smo do formule koja je odgovor na Steinerov problem rezanja pizze koristeći pretpostavku da je niz razlika susjednih članova niza $P(n)$ niz prirodnih brojeva. Kako ta pretpostavka očito vrijedi jer je možemo jednostavno izvesti iz rekurzije (2.1), time smo dokazali da vrijedi

$$P(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}, n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

2.2 Rješavanje Steinerovog problema uz pomoć tablice brojeva

Osim uz pomoć rekurzije i metode teleskopiranja, pokazat ćemo kako riješiti Steinerov problem uz pomoć tablice brojeva. U tablici ćemo prikazati nizove brojeva na način da u prvi redak smjestimo članove niza koji određuju broj dijelova pizze $P(n)$ za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. U sljedeći redak upisivat ćemo novi niz koji se sastoji od brojeva određenih s $P(n) - P(n-1)$ za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. U svaki sljedeći redak ćemo upisivati nizove koji su određeni razlikom članova niza iz prethodnog retka.

Niz $P(n)$	1 2 4 7 11 16 22 29 37
Prvi niz razlika	1 2 3 4 5 6 7 8
Drugi niz razlika	1 1 1 1 1 1 1
Treći niz razlika	0 0 0 0 0 0

Tablica 2.2: Tablica razlika za $P(n)$

Uočimo kako se niz u 3. retku sastoji od jedinica, a niz u 4. retku sastoji od nula. Svaki sljedeći redak će biti konstantan s članovima 0. Zato nije potrebno dalje određivati nizove razlike. Kako je 4. redak tablice niz koji se sastoji samo od nula, dokazat ćemo sljedeću lemu koja će nam pomoći pri određivanju polinoma $P(n)$.

Lema 1. Ako je $P(n)$ polinom u n, onda je njegov stupanj jednak 2.
Dokažimo lemu 1. Pretpostavimo da je $P(n)$ stupnja k. Neka je

$$P(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0, \text{za neke } a_k, a_{k-2}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{N}.$$

Prikažimo razliku $P(n+1)$ i $P(n)$:

$$P(n+1) - P(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i(n+1)^i - \sum_{i=0}^{k} a_i n^i.$$

Upotrijebit ćemo binomni teorem:

$$P(n+1) = a_k\left(n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \binom{k}{2}n^{k-2} + \ldots + 1\right) + \ldots + a_2(n+1)^2 + a_1(n+1) + a_0 \quad (2.4)$$

$$P(n) = a_k n^k + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 \quad (2.5)$$

Oduzmimo sada (2.5) od (2.4) i proučimo vodeće koeficijente. Lako je uočiti kako će se pokratiti članovi $a_k n^k$, dok će član s najvećom potencijom biti $\binom{k}{1}a_k n^{k-1}$. Tako je razlika stupnja $k-1$. U tablici 2.2 lako je uočljivo kako u prvom nizu razlika imamo brojeve $1, 2, 4, 7, 11, \ldots$, odnosno linearni rast. Upravo zato vrijednost $k-1$ mora biti jednaka 1, odnosno $k-1 = 1$. Slijedi $k = 2$. Time je lema dokazana.

Neka su $A, B, C \in \mathbb{R}$. Zapišimo $P(n) = An^2 + Bn + C$. Kako bismo dobili konstante A i B, rješavamo sustav

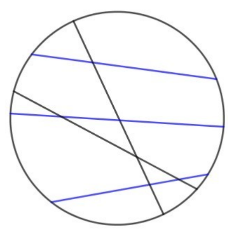
$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = 2 \\ P(2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ A + B + C = 2 \\ 4A + 2B + C = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ A + B = 1 \\ 4A + 2B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \\ C = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Time smo riješili sustav i dobili rješenje $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = 1$, odnosno $P(n) = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$.

Tražili smo polinom $P(n)$ drugog stupnja koji zapravo određuje broj dijelova pizze kada je razrežemo s n rezova. Sada smo na drugi način došli do rješenja Steinerovog problema uz pomoć tablice razlike nizova i dobili istu formulu za određivanje najvećeg broja dijelova pizze.

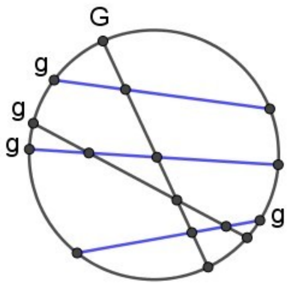
2.3 Steinerov problem i binomni koeficijenti

U ovoj cjelini povezat ćemo broj rezova pizze i maksimalan broj dijelova pizze koji tako dobivamo s brojem unutarnjih vrhova, uz pomoć binomnih koeficijenata.
Promotrimo sada slučaj rezanja pizze koji ne zadovoljava sva gore napisana pravila. Na slici 2.1 prikazan je jedan takav primjer. Očito je kako je pizza razrezana s 5 rezova od kojih se tri ne sijeku međusobno. Ta tri reza označena su plavom bojom. Dakle, postoje neka dva reza pizze koja se ne sijeku.



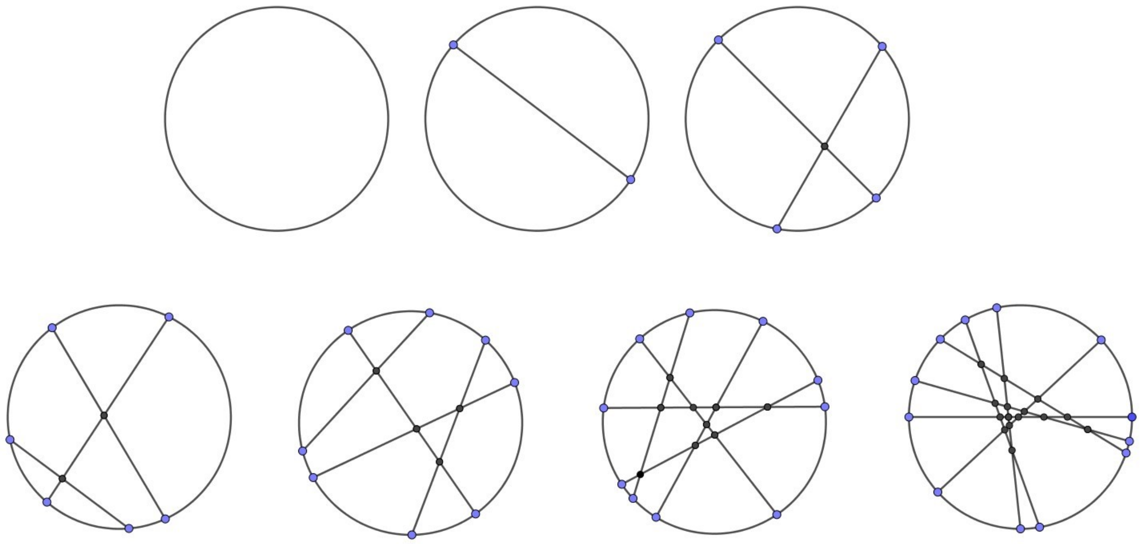
Slika 2.1: Rezovi pizze koji ne zadovoljavaju pravila (1)

Uvedimo pojam *unutarnji vrh* kao sjecište dvaju rezova koje se nalazi unutar zadane kružnice. Pizzu odsada uvijek rotiramo tako da ni jedan rez nije horizontalan kako bismo osigurali postojanje jedinstvenog *gornjeg unutarnjeg vrha*, tj. unutarnjeg vrha takvog da se svi drugi unutarnji vrhovi nalaze ispod horizontalnog pravca koji njime prolazi. Na slici 2.2 je gornji granični vrh označen s G. Osim jedinstvenog gornjeg unutarnjeg vrha, za svaki od rezova možemo definirati *gornji granični vrh* kao onu točku presjeka reza i ruba, tj. granice pizze koja se nalazi iznad druge točke presjeka. Takvi su vrhovi označeni sa slovom g na slici 2.2. Pojmovi i oznake uvedeni su prema [5].



Slika 2.2: Gornji unutarnji vrh svakog dijela pizze je ili unutarnji vrh ili gornji granični vrh

Ako pizzu gledamo u cijelosti, unutarnji vrhovi nalaze se između dva ili više dijelova pizze. Prema tome, više dijelova pizze sadrži jedan unutarnji vrh. Očito vrijedi da se gornji granični vrh nalazi na točno dva dijela pizze. Promotrimo sada vezu broja unutarnjih vrhova s brojem rezova i brojem dijelova pizze na konkretnim primjerima. Crtanjem i prebrojavanjem broja unutarnjih vrhova za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ pri rezanju pizze, kako vidimo na slici 2.3, nastaje tablica 2.3. U ovom slučaju pizza nije bila razrezana prema pravilima (1) te tako ne nastaje maksimalan broj dijelova pizze.



Slika 2.3: Unutarnji vrhovi za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

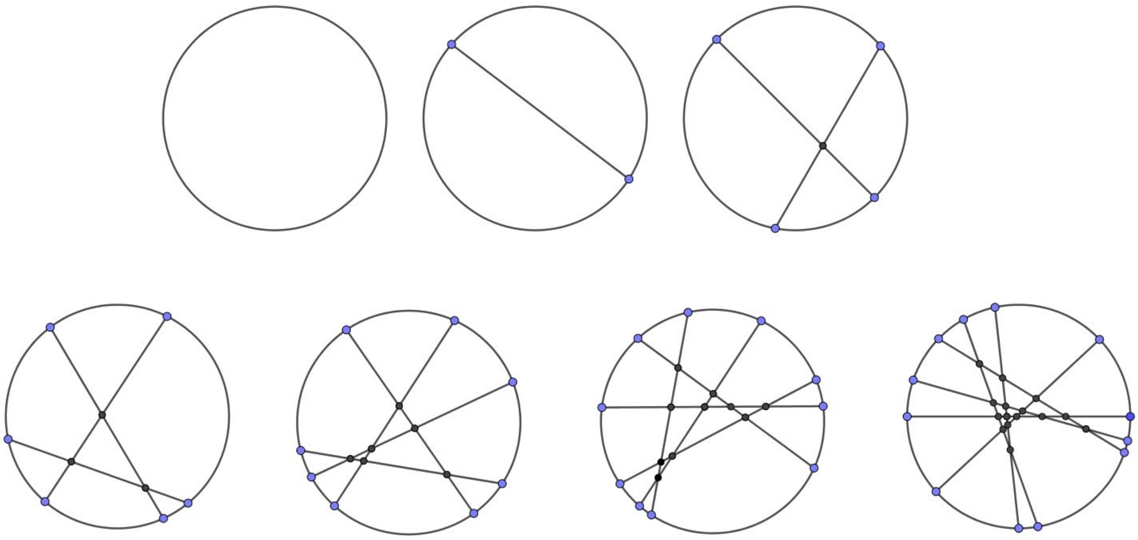
Broj rezova pizze n	Broj dijelova pizze $P(n)$	Broj unutarnjih vrhova
0	1	0
1	2	0
2	4	1
3	7	2
4	11	4
5	16	9
6	22	15

Tablica 2.3: Broj unutarnjih vrhova u ovisnosti o broju rezova i broju dijelova pizze

Proučavanjem brojeva u tablici, uočavamo kako je u svakom retku tablice najveći broj $P(n)$. Također, proučavajući vezu tri broja u svakom retku, lako je uočljivo kako je zbroj brojeva u 1. i 3. stupcu, tj. zbroj broja rezova pizze i broja unutarnjih vrhova, za 1 manji od broja dijelova pizze. To nas dovodi do formule koja povezuje ove tri komponente:

$$\textit{Broj dijelova pizze} = \textit{Broj rezova pizze} + \textit{Broj unutarnjih vrhova} + 1\ .$$

Kako se u prethodnoj formuli spominje broj dijelova pizze, a ne maksimalan broj dijelova pizze, morat ćemo još malo prilagoditi formulu. Prikažimo sada broj unutarnjih vrhova za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ pri rezanju pizze na maksimalan broj dijelova. Takav prikaz rezanja koje zadovoljava uvjete (1) nalazi se na slici 2.4 te u tablici 2.4.



Slika 2.4: Unutarnji vrhovi za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ za koje rezanje zadovoljava (1)

Broj rezova pizze n	Maksimalan broj dijelova pizze $P(n)$	Broj unutarnjih vrhova
0	1	0
1	2	0
2	4	1
3	7	3
4	11	6
5	16	10
6	22	15

Tablica 2.4: Broj unutarnjih vrhova u ovisnosti o broju rezova i maksimalnom broju dijelova pizze

Naime, kako bismo maksimizirali broj dijelova pizze na koji je razrezana, svaki se rez mora sjeći sa svakim drugim u točno jednoj točki, odnosno dva reza moraju se sjeći u jednom unutarnjem vrhu. Zato ćemo broj unutarnjih vrhova zamijeniti brojem parova rezova, odnosno brojem dvočlanih skupova rezova. Formula tada glasi

Maksimalan broj dijelova pizze = Broj rezova pizze + Broj parova rezova pizze + 1.

Prisjetimo se kombinatorne interpretacije binomnih koeficijenata,

$$\binom{n}{k} = \text{broj k-članih podskupova n-članog skupa.}$$

Zato vrijedi

$$P(n) = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0}.$$

gdje $\binom{n}{2}$ označava broj rezova pizze, $\binom{n}{1}$ označava broj parova rezova pizze, dok smo 1 prikazali kao $\binom{n}{0}$. Provjerimo raspisivanjem binomnih koeficijenata da li je ovo rješenje jednak izrazu za $P(n)$ iz (2.3) . Uvrštavanjem vrijednosti binomnih koeficijenata dobivamo

$$P(n) = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2 + 2n + 2^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Time smo riješili problem na treći način, pomoću binomnih koeficijenata.

Poglavlje 3

Od Steinera do Eulera

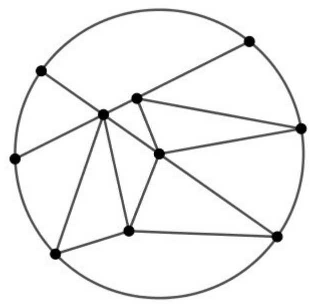
Treće poglavlje ovog rada povezat će dva matematičara: Steinera i Eulera. Iako Steinerov problem ne govori o geometrijskim tijelima, njegov prikaz rezova na pizzi može se proučavati kao graf. Za takav graf, vrijedit će formula koja povezuje broj vrhova, rezova i dijelova slična Eulerovoj.

Prethodno rješenje Steinereovog problema dovelo nas je do važne formule koju je otkrio veliki švicarski matematičar Leonhard Euler. Rješenje Steinerovog problema smatra se uvodom u poznatu Eulerovu formulu koja vrijedi za konveksne poliedre. Kako bismo došli do te važne formule, malo ćemo izmijeniti pravila rezanja pizze koja su vrijedila do sada, odnosno pravila (1). Odmaknimo se od zadanih pravila. Sada rezovi više ne moraju biti od jednog do drugog kraja pizze. Svaki rez sastaje se s ostalim rezovima u vrhu, pri čemu se u jednom vrhu sastaju dva ili više rezova. Kako se vrhovi nalaze mogu nalaziti i na kružnici, odnosno korici pizze, oni dijele kružnicu na kružne lukove. Sada ćemo u broj rezova pizze ubrajati i broj pripadnih kružnih lukova. Na slici 3.1 prikazan je primjer rezanja pizze za $n = 20$ po novim pravilima.

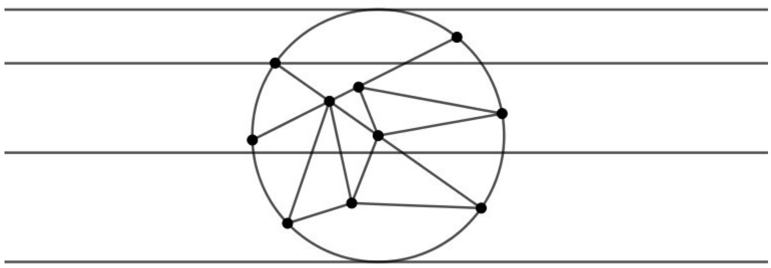
Da bismo lakše izbrojili koliko ima vrhova, rezova pizze i dijelova pizze, koristimo se horizontalnim pravcem. On prolazi pizzom od dolje prema gore, a kako prolazi nekim vrhom, oko njega zbrajamo dijelove pizze i rezove koji se sijeku u tom vrhu. Na slici 3.2 prikazan je primjer prebrojavanja vrhova, rezova pizze i dijelova pizze koje dobijemo nakon rezanja za $n = 20$.

Uvedimo oznake: v = broj vrhova, b = broj rezova pizze, s = broj dijelova pizze koje dobijemo nakon rezanja s n rezova. Nakon što horizontalni pravac pređe preko cijele pizze, dobit ćemo konačne vrijednosti v, b i s. Na kraju prebrojavanja dobijemo vrijednosti:$v = 10$, $b = 20$, $s = 11$. Uočavamo kako vrijedi $v - b + s = 10 - 20 + 11 = 1$. Za svaku poziciju horizontalnog pravca na pizzi vrijedit će formula koja povezuje broj vrhova, rezova i dijelova pizze

$$v - b + s = 1. \tag{3.1}$$

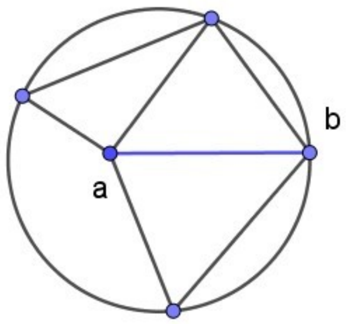


Slika 3.1: Vrhovi, rezovi i dijelovi pizze za n=20

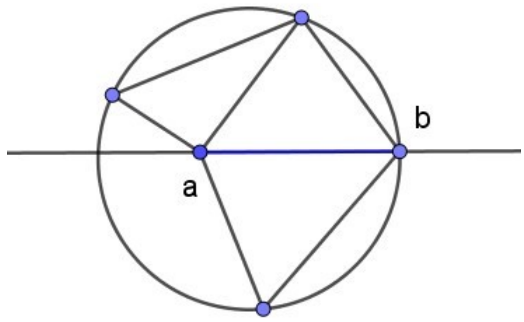


Slika 3.2: Prebrojavanje translacijom horizontalnog pravca

U ovom načinu prebrojavanja postoji skrivena greška koju lako možemo riješiti zakretanjem pizze, tj. namještanjem. Radi se o prelasku horizontalne linije preko dva ili više vrhova istovremeno. Stoga, prije prebrojavanja, pizzu ćemo zarotirati tako da nikoja dva vrha ne budu kolinearna s početnim horizontalnim pravcem. Pogledajmo jedan takav primjer. Na slici 3.3 prikazana je pizza razrezana s 11 rezova na 7 dijelova te se sastoji od 5 vrhova. Uočimo kako je rez pizze koji se nalazi između vrhova a i b, odnosno rez označen plavom bojom horizontalan. Smjestimo sada horizontalni pravac tako da plavi rez bude na horizontalnom pravcu, kao na slici 3.4, te prebrojimo koliko ima vrhova, rezova i dijelova pizze.



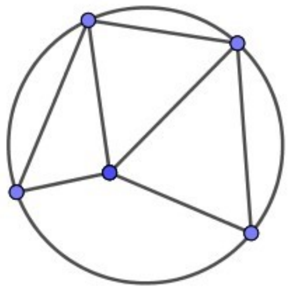
Slika 3.3: Vrhovi, rezovi i dijelovi pizze za n=20



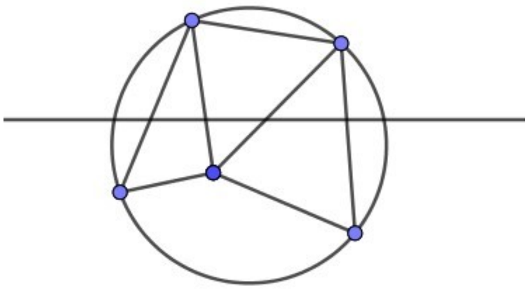
Slika 3.4: Horizontalan pravac na kojem se nalazi jedan rez pizze

Prebrojimo li ove komponente u slučaju kada se jedan rez nalazi na horizontalnom pravcu, dobit ćemo ove podatke: $b = 4$, $v = 1$, $s = 3$. Provjerimo vrijedi li sada formula (3.1). Kako je $1 - 4 + 3 = 0 \neq 1$, formula ne vrijedi.

Zakrenimo sada pizzu sa slike 3.3 tako da ni jedan rez nije horizontalan te prebrojimo vrhove, rezove i dijelove slike 3.6. Dobivamo $b = 11$, $v = 5$ i $s = 7$. Provjerimo vrijedi li sada formula (3.1). Kako je 5 - 11 + 7 = 1, formula vrijedi.



Slika 3.5: Rotirana slika 3.3



Slika 3.6: Rotirana slika 3.4

Vratimo se na rješavanje Steinerovog problema. Na konkretnom primjeru uočili smo pravilo (3.1). Kako u Steinerovom problemu tražimo maksimalan broj dijelova pizze koji se dobiva rezanjem s b rezova, prikladnije je dobivenu formulu napisati u obliku

$$s = b - v + 1. \tag{3.2}$$

Pogledajmo broj unutarnjih vrhova i vrhova na kružnici. Neka je n broj rezova. Broj vrhova na kružnici je $2n$, a broj unutarnjih vrhova $\frac{n(n-1)}{2}$. Uz to, postoji $2n$ rezova koji su dijelovi kružnice, odnosno $2n$ zakrivljenih rubova. Zato je sveukupni broj vrhova

$$v{=}2n{+}\frac{(n-1)}{2},$$

a broj rezova

$$b = n^2 + 2n.$$

Vratimo se na (3.2) i uvrstimo novodobivene vrijednosti v i b. Dobivamo

$$s = b - v + 1 = n^2 + 2n.$$

Vratimo se na (3.2) i uvrstimo novodobivene vrijednosti v i n. Dobivamo

$$s = b - v + 1 = n^2 + 2n - 2 + n - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

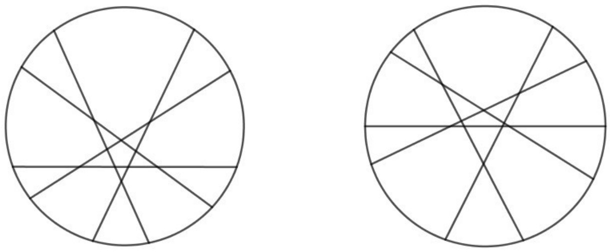
Tako smo dobili već poznatu nam formulu koja daje odgovor na Steinerov problem. Maksimalan broj dijelova pizze koji dobivamo rezanjem s n rezova je (2.3) .

Već smo spomenuli kako je Steiner dao uvod u poznatu Eulerovu formulu za konveksne poliedre. Euler je koristio Steinerovo rješenje koje smo maloprije izveli na drugačiji način. Prema [1], Euler je promatrao povezane grafove u ravnini kao konačne skupove vrhova i bridova. Vrh je predstavljao točku u ravnini, a brid krivulju koja povezuje ta dva vrha. Tako ovaj problem možemo promatrati i pomoću teorije grafova.

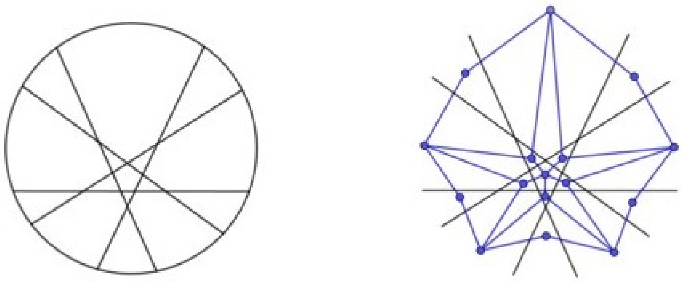
Krećući od pizze koja je cijela, jedan rez možemo izabrati na beskonačno mnogo načina. Sljedeći rez također odabiremo na beskonačno mnogo načina, osim onog koji smo već uradili, pritom pretpostavljamo da odabrani rezovi zadovoljavaju uvjete (1). U povijesti, problem smještanja pravaca u ravninu kako bismo je podijelili na maksimalan broj dijelova proučavao se pomoću teorije grafova. Želimo li ravninu podijeliti s n pravaca na maksimalan broj dijelova, to možemo učiniti na više načina. Zato ćemo svakom rješenju dijeljenja ravnine pridružiti graf $G = (v, E)$, pri čemu je v skup svih vrhova grafa, a E skup bridova. U slučaju kada dva rješenja tvore izomorfne grafove, kažemo da su i rješenja izomorfna. Prvo ćemo ponoviti neke osnovne pojmove iz teorije grafova koje možemo pronaći u [4] i [6].

Definicija 1. Za graf kažemo da je povezan ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putem.

Definicija 2. Neka je $v(G)$ skup svih vrhova grafa G te $v(H)$ skup svih vrhova grafa H. Dva su grafa G i H izomorfna ako postoje bijekcije $f : v(G) \to v(H)$ i $g : E(G) \to E(H)$ takve da je vrh v incidentan s bridom e u G ako i samo ako je $f(v)$ incidentan s $g(e)$ u H. Takav uređeni par (f, g) zove se izomorfizam s G u H. Izomorfizam čuva incidenciju i susjednost.

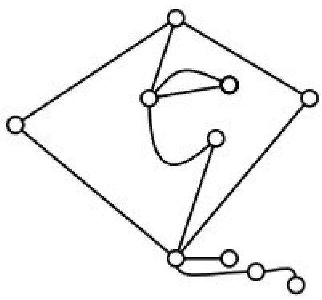


Slika 3.7: Dva neizomorfna grafa za n=5



Slika 3.8: Rješenju Steinerovog problema za n=5 pridružujemo graf (plavo)

Promotrimo primjer jednog povezanog grafa prikazanog na slici 3.9.



Slika 3.9: Povezan graf

Ovaj graf sastoji se od 10 vrhova i 12 bridova te dijeli ravninu na 4 dijela. Očito je jedan dio od ta 4 dijela ravnine beskonačan. Zabilježimo komponente grafa:

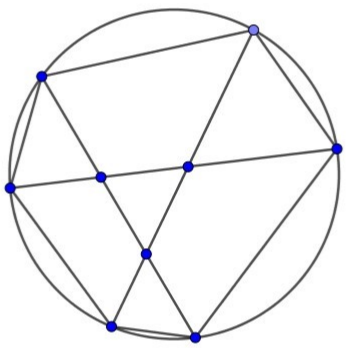
$$v = 10, b = 12, s = 4.$$

Uočimo kako sada ne vrijedi više (3.2), već $v - b + s = 2$. To je upravo rješenje posebnog slučaja Steinerova problema kojeg smo maloprije opisali i daje nam Eulerovu formulu

$$v - b + s = 2. \tag{3.3}$$

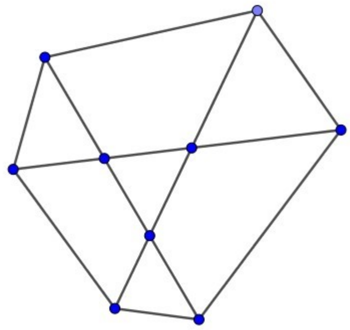
Naše rješenje Steinerovog problema (3.2), Euler promatra na sličan način. Naime, kod Eulerove formule (3.3), on promatra povezane grafove. Prebrojavanjem dijelova pizze koje dobijemo dijeljenjem pizze rezovima, uvijek dobivamo jedan dodatni dio koji je beskonačan. Kod formule (3.2) promatramo dijeljenje pizze rezovima gdje dobivamo više dijelova koji su beskonačni. Tih dijelova je upravo onoliko koliko dobijemo novih ograničenih područja pa se uvećane vrijednosti b i s skrate. Upravo zato, kako Eulerova formula kod povezanih grafova uvijek broji jedan beskonačan dio, vrijedi kako je broj dijelova pizze u njegovom općenitom slučaju za jedan veći od broja dijelova u posebnom slučaju.

Proučimo ovu razliku na konkretnom primjeru. Na slici 3.10 pizza je podijeljena s 4 reza na dijelove u skladu s uvjetima (1). Prebrojimo komponente od kojih se sastoji: $b = 21$, $v = 9$, $s = 13$. (3.2) sada vrijedi jer je 9 - 21 + 13 = 1.



Slika 3.10: Podijela pizze pomoću 3 reza

Pogledajmo sada Eulerovu interpretaciju ovakvog dijeljenja ravnine. Na slici 3.10 prikazan je graf kako bismo ga prikazali prema Euleru, koji odgovara toj kružnici. Prebrojimo sada komponente grafa: $b = 15$, $v = 9$, $s = 8$. Uočavamo kako vrijedi Eulerova formula (3.3), odnosno 9 - 15 + 8 = 2.



Slika 3.11: Eulerov graf koji pripada kružnici sa slike 3.10

Usporedimo vrijednosti v, b i s za ova dva slučaja. Broj vrhova se nije promijenio kada smo maknuli kružnicu da bismo dobili Eulerov graf, pa je v jednak za podijelu pizze na dijelove prema (1) i Eulerov graf. Broj rezova b veći je u prvom slučaju koji smo prikazali zato što smo u broj rezova pizze ubrojali i broj lukova koji pripadaju kružnici, odnosno korici pizze. Kako je kružnica podijeljena na 6 kružnih lukova sa vrhovima koji se nalaze na njoj, tako je i broj rezova veći za 6 kod rezanja pizze od broja rezova Eulerovog grafa. Pri rezanju pizze dobili smo sveukupno 13 dijelova, dok je taj broj kod Eulerovog grafa 8. Razlog manjeg broja dijelova je taj što se micanjem kružnice miču i rubni dijelovi pizze te ostaje jedan beskonačan dio koji je specifičan za Eulerov graf.

Poglavlje 4

Steinerov problem s kružnicama

U četvrtom poglavlju bavit ćemo se Steinerovim problemom dijeljenja ravnine kružnicama. Na analogan način kao u drugom poglavlju, ispisivanjem maksimalnog broja dijelova ravnine i broja kružnica, doći ćemo do veze tih dviju veličina. Slijedimo izlaganje iz knjige [5].

Do sada smo promatrali Steinerov problem u kojem smo se pitali na koliko najviše dijelova n pravaca može podijeliti ravninu. Dakle, postavljali smo pravce u ravninu, prebrojavali, bilježili, generalizirali i izveli rješenje Steinerovog problema na nekoliko načina. Osim podijele ravnine pravcima, Steiner je proučavao i problem dijeljenja ravnine kružnicama. Postavio je pitanje: "Na koliko najviše dijelova n kružnica koje se sijeku mogu podijeliti ravninu, pri čemu nije važan radijus kružnica?". U rješenju ovog problema, koristit će nam poznata Eulerova formula za poliedre (3.3). Pravila (1) Steiner je primijenio i na kružnice u ravnini ovako:

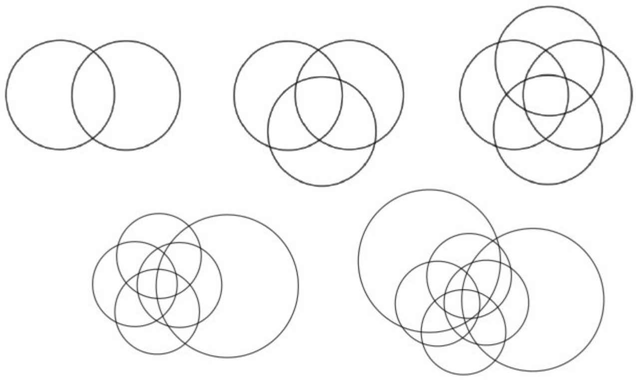
- Svake dvije kružnice sijeku se u točno dvije točke,
- Nikoje tri kružnice se ne sijeku u jednoj točki. (2)

Pogledajmo na slici 3.9 na koliko maksimalno dijelova n kružnica dijeli ravninu za $n \geq 2$. Kružnice na slici su postavljene tako da se dobije najveći mogući broj dijelova ravnine.

Označimo, kao u Eulerovoj formuli, broj rubova s b, broj dijelova ravnine sa s te broj vrhova, odnosno sjecišta kružnica s v. Vrijednosti b, s i v za $n = 2, 3, 4, 5, 6$ kružnica postavljenih kao na slici 4.1 prikazane su u tablici 4.1.

Uočavamo kako svaki redak u tablici zadovoljava (3.3). Također, lako vidimo da vrijedi $b = 2(n-1)$ te $v = n(n-1)$. Uvrstimo to sada u Eulerovu formulu kako bismo dobili maksimalan broj dijelova ravnine koji dobivamo dijeljenjem ravnine s n kružnica,

$$s = b - v + 1 = 2(n-1) - n(n-1) + 2 = 2n^2 - 2n - n^2 + n + 2 = n^2 - n + 2.$$



Slika 4.1: n kružnica dijeli ravninu za $n = 2, 3, 4, 5, 6$

n	b	s	v
2	4	4	2
3	12	8	6
4	24	14	12
5	40	22	20
6	60	32	30

Tablica 4.1: Maksimalan broj dijelova ravnine u ovisnosti o broju kružnica

Odnosno, dobili smo

$$P(n) = n^2 - n + 2.$$

Uočavamo kako je maksimalan broj dijelova ravnine koji dobivamo dijeljenjem ravnine s n kružnica jednak dvostrukom maksimalnom broju dijelova ravnine koji dobivamo dijeljenjem ravnine s n pravaca.

Poglavlje 5

Steinerov problem u nastavi matematike

U ovom poglavlju predstavit ćemo nekoliko aktivnosti koje se mogu koristiti na nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Iako Steinerov problem nije dio kurikuluma nastave matematike, njime se možemo služiti kako bi učenici otkrili ili uvježbali ostale sadržaje koji jesu dio kurikuluma. Predstavljene aktivnosti su „Steinerov niz", „Eulerova formula", „Eulerova formula za grafove" te „Matematička indukcija". U svakoj je aktivnosti opisan cilj, veza s kurikulumom, nastavni oblik, nastavna metoda, potreban materijal, tijek aktivnosti, razredna diskusija i zaključak. Aktivnosti su, kao i način na koji su obrađene, motivirane aktivnostima iz [2] i [3]. Odgovori učenika zapisani su kurzivom, a njihova rješenja na nastavnom listiću označena su crvenom bojom.

5.1 Aktivnost „Steinerov niz"

U ovoj aktivnosti učenici će rezanjem modela pizza škarama otkriti metodom pokušaja i promašaja maksimalan broj dijelova pizze koji dobivamo s $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ rezova. Najveći broj dijelova za svaki od zadanih broja rezova upisivat će u tablicu na za to predviđeno mjesto. Generalizacijom nepotpunom indukcijom doći će do općeg izraza koji povezuje maksimalan broj dijelova pizze i broj rezova pizze. U nastavku slijedi detaljan opis ove aktivnosti.
Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u skupinama, otkriti rješenje Steinerovog problema u kontekstu nizova
Veza s kurikulumom: MAT SŠ B.4.1.- Učenik određuje član niza zadanog rekurzivno ili općim članom
Nastavni oblik: Rad u skupini od četvero učenika po modelu gostionice, frontalna nastava
Nastavna metoda: Metoda dijaloga
Potreban materijal: Papirnati modeli pizze, škare, nastavni listići
Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u šest četveročlanih skupina. Svaka skupina dobije

Broj rezova n	Maksimalan broj dijelova pizze $P(n)$
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
n	$\frac{n^2+n+2}{2}$

oznaku A, B, C, D, E ili F te svaki učenik u skupini dobije jedan od brojeva 1, 2, 3 ili 4. Svakoj skupini podijelimo 7 modela pizze i nastavni listić na kojem se nalazi zadatak koji rješavaju zajedno u grupi („kod kuće”).

Zadatak 1. Podijeli pizzu na što veći broj dijelova s odgovarajućim brojem rezova. Ispuni tablicu s vrijednostima koji opisuju rezanje pizze s n=1,2,3,4,5 rezova.

Učenicima dajemo uputu da za svaki novi broj rezova uzimaju novi model pizze te da prvo nacrtaju rezove, a zatim razrežu pizzu škarama te upišu podatke u tablicu.

Nakon što su učenici ispunili tablicu za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ metodom pokušaja i promašaja nalaze općeniti izraz za $P(n)$. Zapisuju ga u tablicu na odgovarajuće mjesto.

Slijedi faza „u gostima“ u kojoj svi učenici koji imaju broj 1 sada sjedaju zajedno, svi s brojem 2 formiraju drugu grupu, učenici s brojem 3 formiraju treću grupu te oni s brojem 4 slažu četvrtu grupu. U nove grupe učenici donose zaključke do kojih su došli u svojoj originalnoj grupi. Iznose podatke koje su dobili pri rezanju pizze i izlažu generalizirani izraz $P(n)$. Učenici u ovoj fazi potvrđuju ili popravljaju svoje zaključke.
Završna faza je ona u kojoj se učenici vraćaju „kući“, odnosno u svoju originalnu grupu. Sada učenici uviđaju je li njihova grupa došla do istih zaključaka kao i sve ostale. Slijedi razredna diskusija.

Razredna diskusija:

- Koji je bio vaš zadatak?

Izrezati pizzu na što veći broj dijelova s određenim brojem rezova.

- Kako ste otkrili koji je najveći broj dijelova pizze za $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$?

Prvo smo na modelu pizze crtali rezove i prebrojavali koliko smo dijelova pizze dobili. Metodom pokušaja i promašaja došli smo do broja koji je bio veći od svih ostalih koje smo probali.

- Možemo li reći da smo svakom broju rezova n pridružili maksimalan broj dijelova $P(n)$ na koji je možemo razrezati?
Da.

- Kako još u matematici nazivamo pridruživanje elementa nekog skupa nekom drugom skupu?
Takvo pridruživanje nazivamo funkcija.

- Koju ste funkciju dobili na kraju?
Dobili smo funkciju $P(n) = \dfrac{n^2+n+2}{2}$ *koja broju rezova pridružuje maksimalan broj dijelova pizze.*

Steinerov niz temelji se na Steinerovom problemu koji postavlja pitanje na koliko najviše dijelova n pravaca može podijeliti ravninu. Kako je dijeljenje ravnine teško zamisliti, Steiner je svoj problem formulirao u terminima rezanja pizze. Sada pizza predstavlja ravninu, a rezovi predstavljaju pravce. Mi smo u našoj aktivnosti promatrali niz koji broju rezova pridružuje maksimalan broj dijelova pizze. Generalizacijom nepotpunom indukcijom došli smo do izraza za opći član niza koji određuje vrijednost $P(n)$.

Zaključak: Niz u skupu s je svaka funkcija $P : \mathbb{N} \to s$. Ona svakom prirodnom broju n pridružuje element $P(n)$ iz skupa s. Izraz za opći član niza koji određuje vrijednost $P(n)$ je

$$P(n) = \frac{n^2+n+2}{2} \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

5.2 Aktivnost „Eulerova formula”

Kao što i sam naziv govori, u ovoj aktivnosti učenici će otkriti poznatu Eulerovu formulu proučavajući modele uspravnih prizmi. Smješteni u skupine, proučavaju modele raznih prizmi, ispisuju broj vrhova, stranica i bridova te traže pravilnosti među tim veličinama. Na kraju, učenici uočavaju pravilnost (3.3). Ova aktivnost napravljena je po uzoru na aktivnost iz [3]. U srednjoj školi otkriva se Eulerova formula u kontekstu geometrijskih tijela koju će predstaviti ova aktivnost. U nastavku detaljno opisujemo aktivnost „Eulerova formula”.
Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u skupinama te promatrajući različite modele prizmi otkriti Eulerovu formulu za prizme

Veza s kurikulumom: MAT SŠ C.2.6, MAT SŠ D.2.4. – Učenik prepoznaje i opisuje uspravnu prizmu (četverostrana, pravilna šesterostrana), piramidu (četverostrana, pravilna šesterostrana), valjak, stožac i kuglu. Računa elemente (duljine bridova, volumen, oplošje, polumjer baze. . .) prizme, valjka, piramide, stošca, kugle te rotacijskih tijela.
Nastavni oblik: Rad u skupini od četvero učenika, frontalna nastava
Nastavna metoda: Metoda dijaloga
Potreban materijal: Model trostrane prizme, model četverostrane prizme, model peterostrane prizme, model šesterostrane prizme, model osmerostrane prizme
Tijek aktivnosti: Učenike podijelimo u skupine od po 5 učenika. Učenici u svakoj skupini proučavaju model pravilne prizme koji su dobili te ispisuju broj vrhova, broj bridova i broj stranica za pojedinu prizmu. Kada su svi učenici u svim skupinama gotovi s proučavanjem prizme u svojoj skupini, zadanim redoslijedom skupine razmjenjuju modele prizmi. Na taj način sve će skupine proučiti sve dane modele, a aktivnost razmjenjivanja je gotova kada su sve skupine opisle svaku zadanu prizmu. Nastavnik nadzire rad i oglašava vrijeme promjene modela. U skupini diskutiraju o vezi veličina te zapisuju što su zaključili. Slijedi razredna diskusija.

Razredna diskusija:

- Što je prizma?
Prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim mnogokutima koji pripadaju paralelnim ravninama i paralelogramima kojima jedna stranica pripada jednom od tih mnogokuta a njoj nasuprotna drugom.

- Kakve prizme ste proučavali u radnim centrima?
Pravilne trostrane, četverostrane, peterostrane, šesterostrane i osmerostrane prizme.

- Koje elemente prizme ste proučavali?
Vrhove, bridove i stranice.

- Koliko vrhova ima n-terostrana prizma?
n-terostrana prizma ima 2n vrhova.

- Koliko bridova ima n-terostrana prizma?
n -terostrana prizma ima 3n bridova.

- Koliko stranica ima n-terostrana prizma?
n-terostrana prizma ima n+2 strane

- Uočavate li kakve pravilnosti među brojem vrhova, bridova i stranica svake od prizmi?
Uočavamo da ako od zbroja broja vrhova i broja stranica prizme oduzmemo broj bridova te prizme dobit ćemo broj 2.

- Provjeri vrijedi li uočena pravilnost i za sedmerostranu prizmu.
Sedmerostrana prizma ima 14 vrhova, 21 brid te 9 strana. Uvrstimo to u $v + s - b$ *dobit ćemo 14+9-21=2, odnosno uočena pravilnost vrijedi i za sedmerostranu prizmu.*

- Provjeri vrijede li uočeno pravilo općenito za n-terostranu prizmu.
$v + s - b = 2n + (n + 2) - 3n = 2n + n + 2 - 3n = 2$. *Da, vrijedi.*

Uočena pravilnost vrijedi za sve prizme i nazivamo je Eulerova formula.

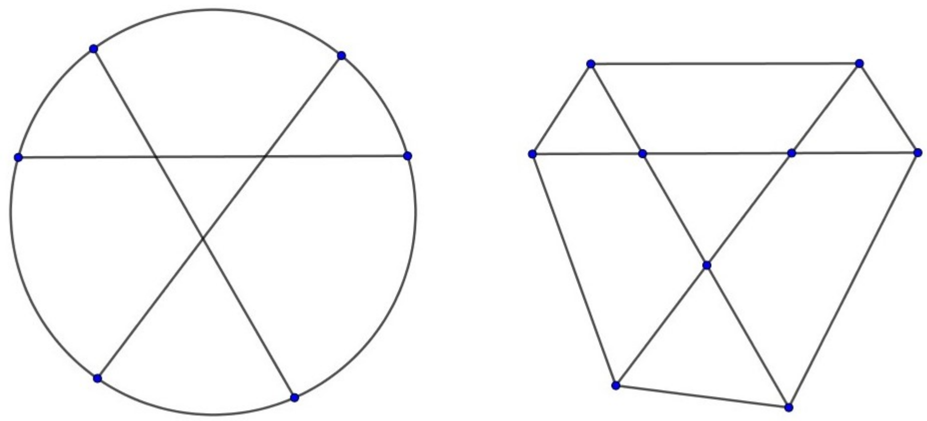
Zaključak: Ako s v označimo broj vrhova neke prizme, sa s broj njenih strane te s b broj bridova te prizme, onda vrijedi: $v + s - b = 2$

5.3 Aktivnost „Eulerova formula za grafove“

Nakon što su učenici obradili Eulerovu formulu za geometrijska tijela u prostoru, otkrit će da Eulerova formula vrijedi i za grafove nastale prikazom geometrijskih tijela u tri dimenzije kojima crtamo i stranice koje se inače ne vide ili koje bismo crtali isprekidanim crtama. Učenici dobivaju razna geometrijska tijela koja crtaju, prebrojavaju vrhove, bridove i dijelove te provjeravaju vrijedi li za njih Eulerova formula. U skupinama provjeravaju formulu za razna nacrtanma geometrijska tijela. U nastavku navodimo detalje o aktivnosti.
Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti specijalan slučaj Eulerove formule za grafove
Veza s kurikulumom: MAT OŠ C.8.1. – Učenik prostoručno skicira uspravna geometrijska tijela u ravnini. Učenik primjenjuje Eulerovu formulu za uspravna geometrijska tijela u ravnini.
Nastavni oblik: Rad u skupinama
Nastavna metoda: Metoda dijaloga
Potreban materijal: Nastavni listići
Tijek aktivnosti: Učenike dijelimo u skupine od po 4 učenika. Svakom učeniku dijelimo nastavni listić tako da svaki učenik u skupini dobije različito geometrijsko tijelo u zadatku, dok sve grupe imaju iste primjere nastavnih listića. Prije nego što učenici krenu s rješavanjem nastavnog listića, nastavnik upoznaje učenike sa Steinerovim problemom - na koliko najviše dijelova n pravaca može podijeliti ravninu. Objašnjava kako je Steiner problem sveo na rezanje pizze. Tako smješteni rezovi na pizzi daju graf koji se sastoji od vrhova, stranica i bridova. Vrh predstavlja sjecišta rezova međusobno te sjecišta rezova s

koricom pizze, odnosno kružnicom. Brid predstavlja svaku dužinu, bez kružnih lukova, te stranica predstavlja dio pizze koji je omeđen bridovima i vrhovima. Nastavnik učenicima pokazuje jedan primjer grafa (slika 5.1 desno) koji je nastao rezanjem pizze koji je prikazan na slici 5.1 lijevo. Objašnjava kako ovaj graf koji smo dobili, iako se radi o istim terminima, nije isto što i graf funkcije.

Zajedno s nastavnikom, učenici prebrojavaju broj vrhova v, broj bridova b i broj dijelova s. Na ovom grafu prebrojali su: $v = 9$, $b = 15$, $s = 8$ te je očito kako ovi podatci zadovoljavaju Eulerovu formulu. Nastavnik sada pušta učenike da samostalno rješavaju listiće. Svi učenici u skupini imaju jednak zadatak, ali za različita geometrijska tijela. Jednom je učeniku dodijeljena kocka, drugom četverostrana piramida, trećem trostrana prizma, a četvrtom trostrana piramida. Svaki učenik zatim crta na nastavni listić sliku svog geometrijskog tijela u tri dimenzije tako da prikaže i stranice koje se inače ne vide ili koje bi crtali isprekidanim crtama. Kada su nacrtali svoje modele, dobili su grafove za koje će izbrojati koliko imaju stranica, vrhova i dijelova po pravilima koje je nastavnik objasnio na početku aktivnosti. Nakon brojanja, učenici zapisuju dobivene brojeve u tablicu i dijele ih s ostalima iz svoje skupine. Zapisuju broj vrhova, stranica i dijelova od svih ostalih geometrijskih tijela u skupini u za to predviđenu tablicu. Zatim zajedno provjeravaju vrijedi li Eulerova formula za svaki od njih. Slijedi razredna diskusija.



Slika 5.1: Eulerov graf (desno) koji pripada Steinerovom rješenju za n=3

Razredna diskusija:

- Koja geometrijska tijela ste prikazivali na papiru?

Kocku, trostranu piramidu, četverostranu piramidu i trostranu prizmu.

- Kada ste ih prikazali na papiru, što vam je prikazivala trodimenzionalna slika geometrijskih tijela?

Prikazivala je graf.

- Što možemo brojati u grafu?

Brojimo vrhove, bridove i dijelove.

- Postoji li kakva posebnost s nekom od tih veličina?

Da, kada brojimo dijelove grafa, ubrojimo i ravninu koja se nalazi okolo slike.

- Je li vrijedila Eulerova formula za geometrijska tijela i za Eulerov graf?

Da.

Zaključak: Eulerova formula za geometrijska tijela vrijedi i za graf kod kojeg je specifičnost to da se u broj dijelova grafa ubraja i dio koji okružuje graf.

Primjer nastavnog listića na strani 34, a rješenja nastavnog listića na strani 35.

Nastavni listić

Zadatak 1. Prikaži kocku te označi njene vrhove, bridove i dijelove.

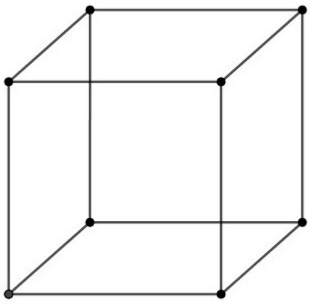
Zadatak 2. Popuni tablicu.

GEOMETRIJSKO TIJELO	v	s	b	$v + s - b = 2$ DA/NE

Zaključak:

Rješenje nastavnog listića

Zadatak 1. Prikaži kocku te označi njene vrhove, bridove i dijelove.



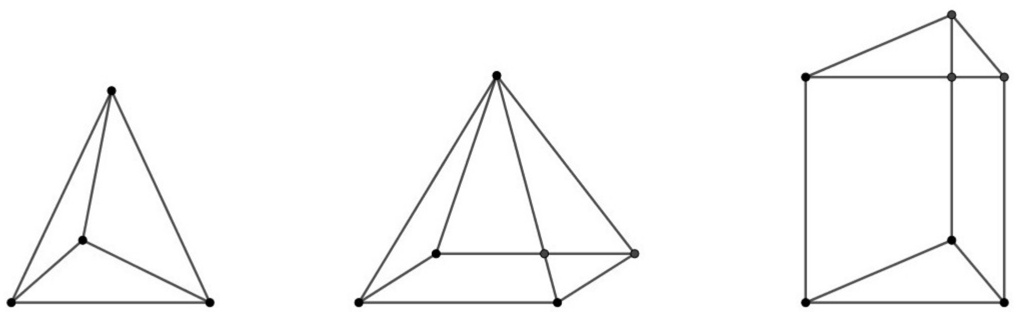
Zadatak 2. Popuni tablicu.

GEOMETRIJSKO TIJELO	v	s	b	$v + s - b = 2$ DA/NE
Kocka	10	8	16	DA
Trostrana piramida	4	4	6	DA
Četverostrana piramida	6	6	10	DA
Trostrana prizma	7	6	11	DA

Zaključak:

Za sve prikaze geometrijskih tijela vrijedila je Eulerova formula.

Na slici 5.2 su prikazani primjeri ostalih geometrijskih tijela kao Eulerovih grafova koji zadovoljavaju Eulerovo pravilo.



Slika 5.2: Geometrijska tijela kao Eulerovi grafovi

5.4 Aktivnost „Matematička indukcija“

Ova aktivnost osmišljena je kao aktivnost uvježbavanja provođenja matematičke indukcije. Učenici samostalno dokazuju izraz (2.3) pomoću matematičke indukcije. Opis aktivnosti nalazi se u nastavku.

Cilj aktivnosti: Učenici će uvježbati matematičku indukciju na primjeru Steinerovog niza

Veza s kurikulumom: MAT SŠ A.4.2. – Učenik opisuje postupak i nabraja korake matematičke indukcije te dokazuje jednostavne jednakosti. Učenik primjenjuje binomnu formulu.

Nastavni oblik: Individualan rad

Nastavna metoda: Metoda dijaloga

Potreban materijal: Bilježnica

Tijek aktivnosti: Nakon što su učenici obradili matematičku indukciju na nastavnom satu, slijedi uvježbavanje zadataka, odnosno uvježbavanje provođenja dokaza matematičkom indukcijom. Zadatak prikazujemo na ploči te svaki učenik samostalno rješava zadatak. Nakon 5 minuta, prozivamo jednog učenika koji dolazi na ploču riješiti zadatak uz objašnjavanje svakog koraka.

Zadatak: Ako je $p_1 = 2, p_{n+1} = p_n + n + 1, n \in \mathbb{N}$, onda je $p_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}, n \in \mathbb{N}$. Dokaži!

Rješenje:

Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.

1. Baza indukcije

Za $n = 1$ slijedi da je $p_1 = \dfrac{1^2 + 1 + 2}{2} = 2$. Zaključujemo da za $n = 1$ tvrdnja vrijedi.

2. Pretpostavka indukcije
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neko $n \in \mathbb{N}$, tj. da za neko $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$p_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}. \tag{5.1}$$

3. Korak indukcije
Dokažimo sada da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$, tj. da za $n + 1$ vrijedi

$$p_{n+1} = \frac{(n + 1) + (n + 1) + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 4}{2}.$$

$$p_{n+1} = p_n + (n + 1) = (\text{pretpostavka indukcije}) = \frac{n^2 + n + 2}{2} \cdot \frac{2(n + 1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 4}{2}$$

$$= \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 2}{2}.$$

Uočavamo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Razredna diskusija:

- Na koji način ćemo dokazati ovu pretpostavku?

Dokazat ćemo je pomoću matematičke indukcije.

- Što je matematička indukcija?

Matematička indukcija je metoda matematičkog dokazivanja koja se provodi kroz tri koraka: baza indukcije, pretpostavka indukcije i korak indukcije.
Niz koji je bio zadan pripada rješenju Steinerovog problema. To je problem maksimiziranja broja dijelova ravnine koji nastaje dijeljenjem ravnine s n pravaca. Upravo je maksimalan broj dijelova ravnine dan s $P(n) = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$.

Zaključak: Budući da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ te da iz pretpostavke, da vrijedi za neko $n \in \mathbb{N}$, slijedi da vrijedi i za $n + 1 \in \mathbb{N}$, po aksiomu matematičke indukcije slijedi da vrijedi za svako $n \in \mathbb{N}$.

5.5 Neki primjeri zadataka povezanih sa Steinerovim problemom

Iako se Steinerov problem ne obrađuje na nastavi matematike u osnovnoj ni u srednjoj školi, možemo ga lako uklopiti u kurikulum nastave matematike u razne sadržaje. Tako su u ovoj cjelini predstavljena četiri zadatka povezana sa Steinerovim problemom koja se mogu obraditi u sklopu nastavnih sadržaja u osnovnoj i srednjoj školi.

1. Odredite broj vrhova pravilne prizme, ako je broj bridova jednak 9 te broj stranica jednak 5. Također, odredite o kakvoj prizmi se radi.

Rješenje: Kako bismo odredili koliko vrhova ima prizma, koristit ćemo Eulerovu formulu:

$$v + s - b = 2.$$

Zadano je:
Broj bridova: b=9
Broj stranica: s=5.
Uvrštavamo zadane podatke u Eulerovu formulu te računamo v:

$$v + s - b = 2 \Leftrightarrow v + 5 - 9 = 2 \Leftrightarrow v = 2 + 9 - 5 \Leftrightarrow v = 6.$$

Broj vrhova prizme je 6. Kako je prizma geometrijsko tijelo čije se baze (mnogokuti) nalaze u paralelnim ravninama, očito je kako su svi vrhovi prizme sadržani u te dvije ravnine. Dakle, dva mnogokuta zajedno imaju 6 vrhova, pa jedan ima 3 vrha. Očito se radi o pravilnoj trostranoj prizmi.

Veza s kurikulumom: MAT OŠ C.8.1. – Učenik prostoručno skicira uspravna geometrijska tijela u ravnini. Učenik primjenjuje Eulerovu formulu za uspravna geometrijska tijela u ravnini.

2. Odredite površinu prosječnog dijela pizze radijusa 1 nakon rezanja pizze s n pravaca na maksimalan broj dijelova. Uputa: Površinu prosječnog dijela pizze računamo kao omjer površine cijele pizze i maksimalnog broja dijelova na koje je podijeljena.

Rješenje: Da bismo izračunali prosječnu površinu dijela pizze potrebno je odrediti omjer površine pizze i maksimalnog broj dijelova na koji je podijeljena.
Označimo površinu pizze (kruga) s A, a maksimalan broj na koji je podijeljena s n pravaca $P(n)$. Upravo je taj maksimalan broj dijelova pizze razrezane s n pravaca određen

rješenjem Steinerovog problema. U Steinerovom problemu pitamo se koji je najveći broj dijelova pizze koji možemo dobiti rezanjem pizze s n pravaca. Odgovor je
$P(n) = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}, n \in \mathbb{N}$.
Površina kruga radijusa 1 iznosi: $A = 1^2\pi = \pi$.
Njihov je omjer sada

$$A = \frac{A}{P(n)} = \frac{\pi}{\frac{n^2 + n + 2}{2}} = \frac{2\pi}{n^2 + n + 2} < \frac{2\pi}{n^2}.$$

<u>Veza s kurikulumom:</u> MAT SŠ C.2.3., MAT SŠ D.2.1. – Učenik primjenjuje znanja o kružnici i krugu.

3. Steinerov problem s kružnicama je problem u kojem se pitamo na koliko maksimalno dijelova možemo podijeliti ravninu s n kružnica. Maksimalan broj dijelova ravnine koji tako dobivamo dan je s $P(n) = n^2 - n + 2, n \in \mathbb{N}$. Ispišite prvih nekoliko članova tog niza te provjerite radi li se o aritmetičkom ili geometrijskom nizu.

<u>Rješenje:</u> Ispišimo prvih nekoliko članova niza:

$P(1) = 2$
$P(2) = 4$
$P(3) = 8$
$P(4) = 14$
$P(5) = 22$
$P(6) = 32$.

Aritmetički niz je niz u kojem je razlika svakog člana i njegovog prethodnog člana fiksan broj. Prikažimo razliku dva susjedna člana ovog niza.

$$P(n) - P(n-1) = n^2 - n + 2 - ((n-1)^2 - (n-1) + 2) = n^2 - n + 2 - n^2 + 2n - 1 + n - 1 - 2 = 2(n-1).$$

Uočimo kako razlika susjednih članova ovisi o n, odnosno nije jednaka konstanti. Dakle, ovaj niz nije aritmetički.
Geometrijski niz je niz brojeva kod kojeg je količnik svakog člana i njemu prethodnog člana uvijek fiksan broj. Provjerimo količnik dva susjedna člana niza:

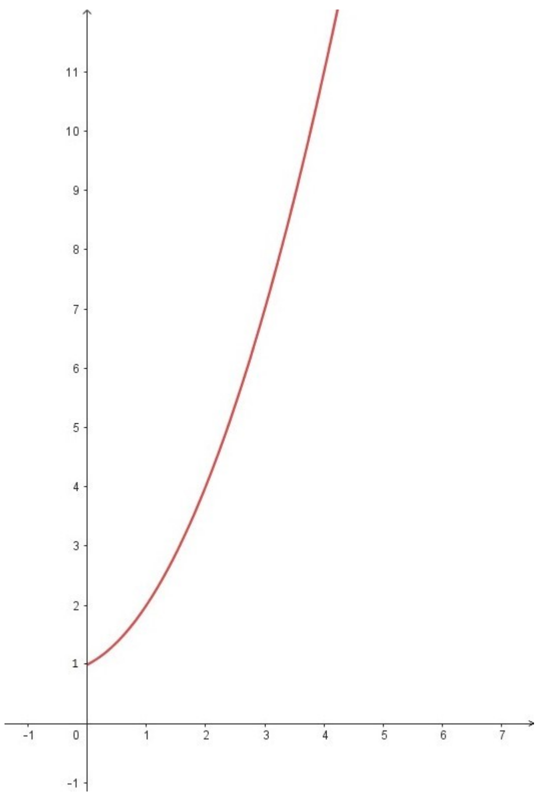
$$\frac{P(n)}{P(n-1)} = \frac{n^2 - n + 2}{(n-1)^2 - (n-1) + 2} = \frac{n^2 - n + 2}{n^2 - 3n + 4} = 1 + \frac{2(n-1)}{n^2 - 3n + 4}.$$

Lako je uočljivo kako količnik nije konstanta, odnosno ovaj niz nije ni geometrijski.

<u>Veza s kurikulumom:</u> MAT SŠ B.4.1. – Učenik primjenjuje aritmetički i geometrijski niz.

4. Steiner je prikazao ovisnost maksimalnog broja dijelova ravnine podijeljene s n pravaca formulom $P(n) = \dfrac{n^2+n+2}{2}$. Grafički prikaži funkciju u koordinatnom sustavu za $n \in \mathbb{N}$.

<u>Rješenje:</u>



Slika 5.3: Graf funkcije $P(n)$

<u>Veza s kurikulumom:</u> MAT SŠ B.2.4., MAT SŠ C.2.2. – Učenik grafički prikazuje kvadratnu funkciju.

Bibliografija

[1] J L. Baril i C. Santos, *Pizza-cutter's problem and Hamiltonian path*, Mathematics Magazine **92** (2019), 359–360.

[2] A. Čižmešija, *Geometrijska tijela u srednjoj školi, nastavni materijali PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu*, 2023.

[3] ______, *Pojam i svojstva nizova, nastavni materijali PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu*, 2023.

[4] A. Golemac, *Teorija grafova*, Udžbenici Sveučilišta u Splitu, 2022.

[5] T. S. Michael, *How to Guard an Art Gallery: And Other Discrete Mathematical Adventures*, JHU Press, 2009.

[6] D. Veljan, *Konačna matematika s teorijom grafova*, Algoritam, 2003.

Sažetak

Steiner je postavio pitanje: “Na koliko najviše dijelova n pravaca može podijeliti ravninu?”. Iako pravce možemo smjestiti u ravninu na razne načine, kako bismo dobili najveći broj dijelova ravnine potrebno je slijediti sljedeća pravila: svaka dva pravca sijeku se u točno jednoj točki i nikoja tri pravca ne sijeku se u zajedničkoj točki. U ovom radu proučavamo Steinerov problem i njegove moguće primjene u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju.U prvom poglavlju, slijedeći ranije spomenuta pravila te korištenjem raznih metoda, došli smo do rješenja Steinerovog problema. U drugom poglavlju prezentirali smo tri različita pristupa rješavanja Steinerovog problema. U sljedećem je poglavlju obrađena Eulerova formula s posebnim naglaskom na njezinu vezu sa Steinerovim problemom. Osim spomenutog problema, Steiner je uveo i problem određivanja maksikalnog broja dijelova ravnine koji dobijemo smještanjem kružnica u ravninu, kojeg smo proučili u poglavlju 4. Na kraju rada prikazani su razni primjeri kako Steinerov problem uvrstiti u osnovnoškolsko i srednješkolsko gradivo. Uz pomoć raznih aktivnosti i zadataka učenici se mogu upoznati s ovim problemom dijeljenja ravnine na maksimalan broj dijelova te ujedno uvježbati ili otkriti nastavne sadržaje koji su propisani kurikulumom.

Summary

Steiner posed the question: ”Into how many parts can n lines at most divide a plane?” Although lines can be arranged in a plane in various ways, to obtain the maximum number of plane sections, it is necessary to follow the following rules: every two lines intersect at exactly one point, and no three lines intersect at a common point. In this thesis, we explore Steiner's problem and its potential applications in primary and secondary education. In the first chapter, by adhering to the previously mentioned rules and using various methods, we found a solution to Steiner's problem. In the second chapter, we present three different approaches to solving Steiner's problem. The following chapter covers Euler's formula with a special emphasis on its connection to the Steiner problem. In addition to the mentioned problem, Steiner introduced the problem of determining the maximum number of plane sections obtained by placing circles in a plane, which we have studied in Chapter 4. Finally, the thesis provides various examples of how to incorporate Steiner's problem into primary and secondary school curricula. With the help of various activities and tasks, students can become familiar with the problem of dividing a plane into a maximum number of sections and, at the same time, practice or discover the topics prescribed by the curriculum.

Životopis

Rođena sam 3. veljače 1999. godine u Varaždinu. Godine 2005. krenula sam u prvi razred VI. osnovne škole u Varaždinu, a 2007. godine upisala sam Glazbenu školu u Varaždinu, smjer violina. Obje osnovne škole završila sam 2013. godine nakon čega sam upisala Prvu gimnaziju Varaždin, prirodoslovno – matematički smjer. Po završetku iste, 2017. godine upisala sam preddiplomski stručni studij matematike; smjer nastavnički na Prirodoslovno – matematički fakultet u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2021. godine i stječem zvanje univ. bacc. educ. math., a također odmah upisujem i diplomski studij istog smjera. Za vrijeme diplomskog studija odradila sam metodičku praksu nastave matematike u osnovnoj školi Voltino te u XV. gimnaziji u Zagrebu. Od kraja osnovnoškolskog obrazovanja sve do sada bavim se narodnim plesom i pjevanjem u Varaždinskom folklornom ansamblu te u Zagrebačkom folklornom ansamblu doktora Ivana Ivančana. Tijekom cijelog studija radila sam razne studentske poslove i aktivno držala individualne poduke iz matematike učenicima osnovnih i srednjih škola te studentima fakulteta. Time sam unaprijedila svoje komunikacijske i organizacijske vještine, radne navike te stekla sposobnost rada u timu.