Dokaz u srednjoškolskoj nastavi matematike pomoću programa dinamičke geometrije

Prah, Dora

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dora Prah

DOKAZ U SREDNJOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE POMOĆU PROGRAMA DINAMIČKE GEOMETRIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:

Eva Špalj

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____________________________________ , predsjednik

2. _____________________________________ , član

3. _____________________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____________________________________
2. _____________________________________
3. _____________________________________

Hvala mojim prijateljima koji su uvijek bili uz mene. Dijelili savjete i tješili kada je bilo potrebno. Uljepšali ste mi moje vrijeme studiranja.

Hvala mojoj obitelji, koja je uvijek uz mene. Bodrila me u svim mojim odlukama i smirivala kada je bilo najpotrebnije.

Najljepše hvala mojoj mami i sestri, bez vas ne bi bila gdje jesam. Ovo je za vas.

Zahvaljujem profesorici Evi Špalj na uloženom vremenu i trudu za ovaj diplomski rad.

Sadržaj

Uvod

Svima je poznato da su dokazi u matematici vrlo bitni. Kako bismo odredili istinitost neke tvrdnje, tu je tvrdnju potrebno dokazati. Osim što dokaz služi za potvrdu ispravnosti tvrdnje, dokaz ima i druge uloge, primjerice, kao sistematizacija znanja, objašnjenje ili otkriće. U ovom ćemo radu koristiti dokaz kao sistematizaciju znanja. Dokaz kao sistematizacija znanja pomaže u otkrivanju skrivenih pretpostavki i otkrivanja svojstva. U nastavi matematike dokaz kao sistematizacija pokazao se kao koristan alat za učenike. Učenici se često susreću s problemima u nastavi matematike, najčešće kada su u pitanju definicije i razna svojstva nekih matematičkih pojmova. Razne definicije i svojstva često uče napamet bez razumijevanja. Zato je potrebno provesti i dokaze određenih svojstava kako bi učenici razumjeli određene pojmove i kasnije otkrivene pravilnosti mogli koristiti pri rješavanju zadataka ili kod nekih složenijih pojmova. Dokazi se u nastavi matematike najčešće koriste kod pojmova iz geometrije koji su učenicima često neshvatljivi i apstraktni. Geometrija je grana matematike koja se bavi oblicima, odnosima u prostoru i među raznim objektima. Geometrija je vrlo opširna grana geometrije. U ovome radu usredotočit ću se na planimetriju, točnije na pojam paralelograma odnosno specijalne vrste paralelograma, romb.

Poglavlje 1

Dokaz

Već u doba starih Grka počela se preispitivati istinitost matematičkih tvrdnji. Naglasak se stavljao na pitanje istine i logike te su se sve tvrdnje počele dokazivati. Takav način razmišljanja u geometriji (Euklidovi elementi) postao je uzor znanstvenog razmišljanja kakvog sada znamo. Dokaz se sada koristi i u algebri i analizi, ali to je počelo tek u 20. stoljeću. Danas je dokaz jedan od najbitnijih elemenata u matematici te rijetko koju tvrdnju danas ne dokazujemo. Dokaz je strukturirani element koji slijedi iz niza logičkih činjenica. Dokaz služi kako bismo utvrdili istinitost neke tvrdnje. Dokazivanjem tvrdnje ona postaje teorem. Dakle, svaki je teorem potrebno dokazati. Tradicionalno je uloga dokaza da nas uvjeri u istinitost tvrdnje. Mnogi nastavnici matematike uvjereni su da je dokaz preduvjet za istinitost tvrdnje. Za razliku od nastavnika matematičari su uvjereni u istinitost tvrdnje na temelju rezultata, koji kasnije i formalno dokazuju. Prema riječima M. de Villierisa (1990.) „Uvjerenje nije bijektivna funkcije dokaza“. Uvjerenje je samo motivacija za dokaz. Dakle, dokaz ima i druge funkcije osim uvjeravanja u istinitost tvrdnje. Dokaz je važan alat i u sistematizaciji rezultata poznatih definicija, aksioma i teorema. Deduktivna sistematizacija pomaže u otkrivanju nekonzistentnosti, kružnih argumenata i najvažnije, otkrivanju skrivenih pretpostavki. Na primjer, definicija paralelograma je da je to četverokut koji ima dva para paralelnih stranica. Iz te definicije slijedi da su nasuprotni kutovi paralelograma sukladni, a kutovi uz istu stranicu su suplementarni što možemo i dokazati. Još neke uloge dokaza su i objašnjenje, otkriće (dokaz često vodi novom otkriću) i komunikacija (omogućava i olakšava komunikaciju među nastavnicima odnosno među nastavnicima i učenicima).

Osim što dokaz ima različite uloge, postoje i različite vrste dokaza s obzirom na način na koji dokazujemo. Najčešća vrsta dokaza je direktni dokaz. Teoreme oblika $A \Longrightarrow B$ tj., gdje iz tvrdnje A slijedi tvrdnja B dokazujemo na taj način primjenom već dokazanih teorema, aksioma i definicija. Drugi način je dokaz iscrpljivanjem. Sličan je direktnom dokazu, točnije tvrdnju koju dokazujemo dijelimo na konačno mnogo slučajeva koje zasebno dokazujemo. Kao što postoji direktni dokaz, tako postoji i indirektni dokaz. Jedan od načina indirektnog dokaza je dokaz kontradikcijom. Dokazivanjem da ne vrijedi tvrdnja koja se dokazuje, zaključak je da vrijedi ta tvrdnja. Pored kontradikcije, postoji i kontrapozicija. Kontrapozicija se zasniva na ekvivalenciji tvrdnji $A \Longrightarrow B$ i $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$. Dokazivanjem tvrdnje $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$ slijedi istinitost tvrdnje $A \Longrightarrow B$. Posljednja vrsta dokaza je dokaz matematičkom indukcijom. Ključni elementi dokaza su: navesti sve podatke koji se koriste, osigurati logički slijed svakog koraka i obuhvatiti sve slučajeve.

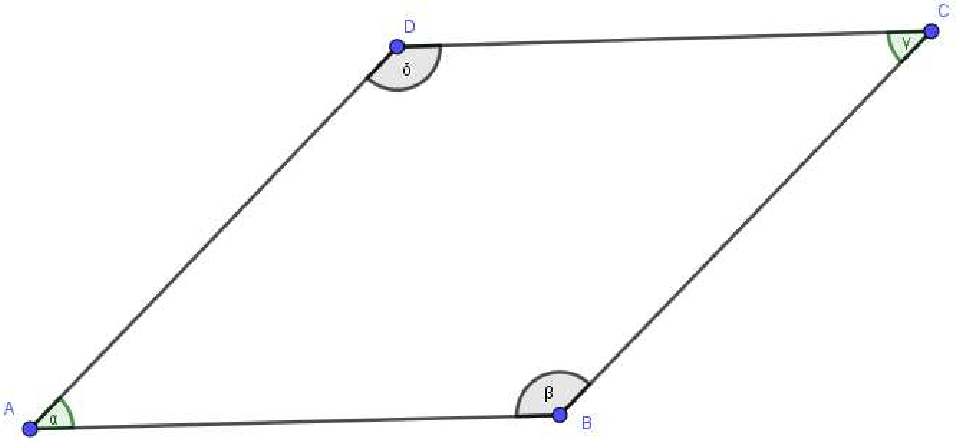
Postoje dva stajališta o ulozi dokaza u poučavanju. Prvo stajalište je to da bez dokaza nema matematike. Drugo stajalište je da je dokaz „potpuno objašnjenje“. Dokaz se daje kako bi se u potpunosti uvjerili u istinitost neke tvrdnje (dokaz je potpuno objašnjenje). To je koncept koji je teško shvatljiv učenicima, ali i studentima. Neke od poteškoća su konstrukcija dokaza i neučinkovite strategije. Učenici lako prihvate istinitost neke tvrdnje i bez dokaza zbog čega često ne vide svrhu dokaza. Potrebno je da uvide zašto je neka tvrdnja istinita. Jedna od zadaća nastavnika je da potiču potrebu za dokazom kroz razne aktivnosti. U Poglavlju 3 navedeni su neki primjeri aktivnosti pomoću kojih se kroz nastavu kod učenika razvija potreba za dokazom. Kroz te aktivnosti učenici razvijaju matematičke vještine i razumijevanje dokaza kroz zabavan, ali poučan način.

Poglavlje 2

Romb

Već od rane dobi djeca se susreću s mnogokutima; jedan od prvih je četverokut. U osnovnoj školi formalno se upoznaju sa specijalnim četverokutom, paralelogramom. Paralelogram definiramo kao četverokut koji ima dva para paralelnih stranica. Iz definicije paralelograma slijede razna svojstva koja se mogu dokazati. Postoje razne vrste paralelograma. Romb definiramo kao paralelogram kojemu su bilo koje dvije susjedne stranice sukladne. Svojstva koja vrijede za paralelogram, vrijede i za romb, ali postoje i svojstva koja vrijede za romb, ali ne nužno i za paralelogram. U ovome poglavlju dokaz će imati ulogu sistematizacije svojstava roba koja proizlaze iz definicije romba.

Teorem 1: Ako je četverokut romb, onda su nasuprotni kutovi sukladni, a kutovi uz istu stranicu suplementarni.



Slika 2. 1

Dokaz 1:

Romb $ABCD$ je trapez s kracima $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, pa vrijedi

$$\alpha + \delta = 180°$$

$$\beta + \gamma = 180°$$

S druge strane, romb $ABCD$ je trapez s kracima $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, pa vrijedi

$$\alpha + \beta = 180°$$

$$\gamma + \delta = 180°$$

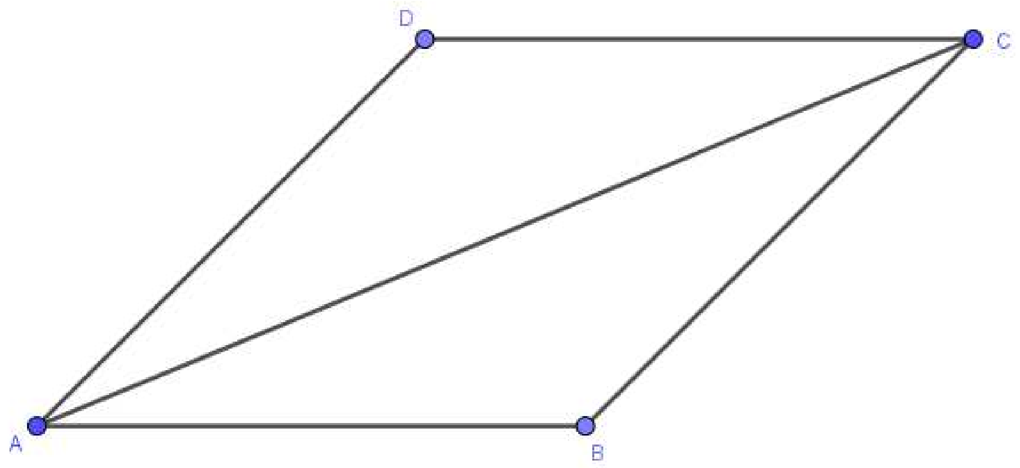
Iz čega slijedi

$$\alpha + \delta = \gamma + \delta \Longrightarrow \alpha = \gamma$$

$$\beta + \gamma = \gamma + \delta \ \Longrightarrow \beta = \delta$$

Dokaz 2:

Dužina $\overline{AC}$ je dijagonala romba $ABCD$.



Slika 2. 2

Iz definicije romba znamo da su susjedne stranice sukladne.

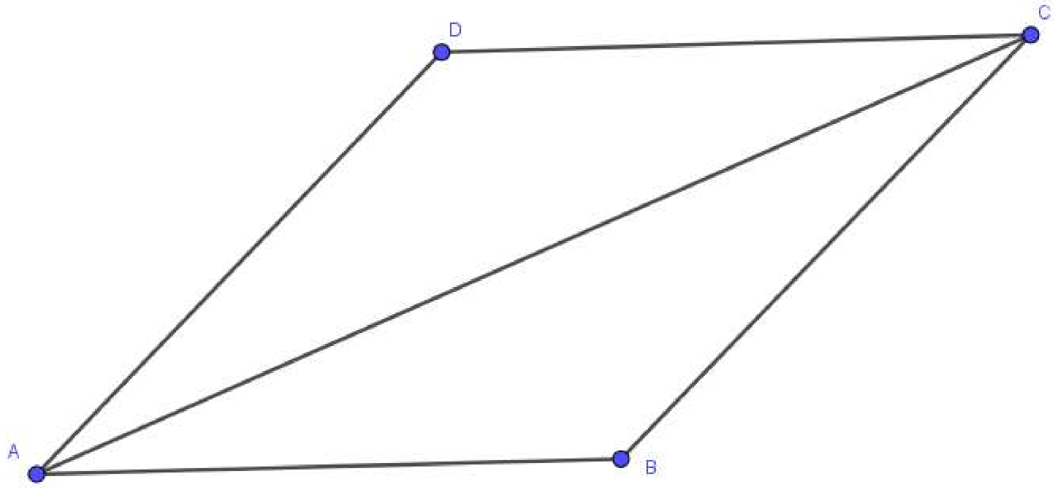
Trokuti DAB i BCD su sukladni po S-S-S teoremu o sukladnosti trokuta (stranica $\overline{BD}$ je zajednička, stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ te stranice $\overline{DA}$ i $\overline{CD}$ su sukladne po definiciji 1) iz čega slijedi da su kutovi DAB (α) i BCD (γ) sukladni. Analogno za sukladnost kutova ABC (β) i CDA (δ).
Nadalje, znamo da je zbroj unutarnjih kutova u četverokutu jednak 360:

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \alpha + \beta = 360°$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 180°$$

Teorem 2.: Ako je četverokut romb, onda su sve stranice tog četverokuta jednakih duljina, tj. sukladne.



Slika 2. 3

Dokaz:

Iz definicije romba znamo da su susjedne stranice jednakih duljina tj. sukladne. Dakle,

$$|AB| = |BC|$$

$$|BC| = |CD|$$

$$|CD| = |AD|$$

$$|AD| = |AB|$$

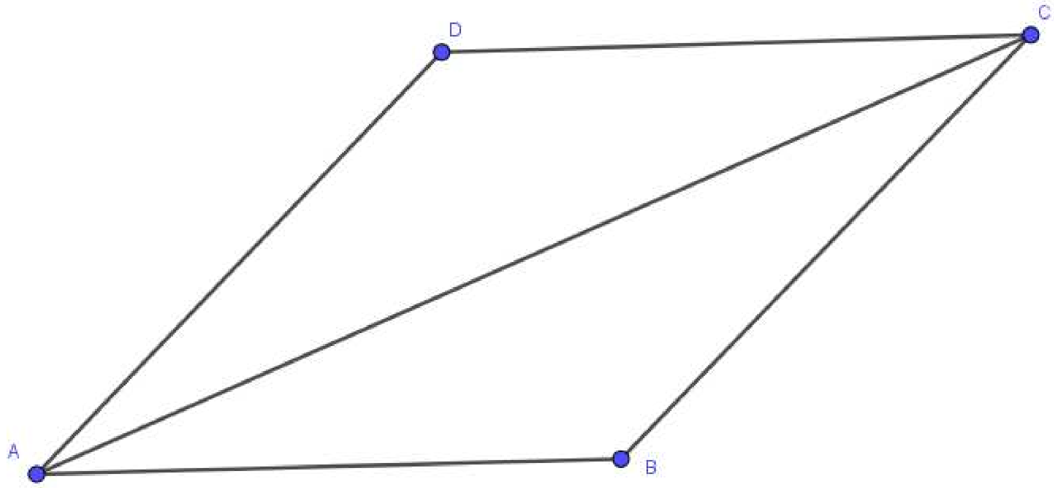
Iz čega slijedi

$$|AB| = |CD|$$

$$|BC| = |AD|$$

To jest, da su sve stranice jednake duljine tj. sukladne.

Teorem 3: Ako je četverokut romb, onda dijagonale romba raspolavljaju unutarnje kutove tog četverokuta.



Slika 2. 4

Dokaz:

Znamo da su susjedne stranice romba jednakih duljina:

$$|AB| = |BC|$$

$$|BC| = |CD|$$

$$|CD| = |AD|$$

$$|AD| = |AB|$$

Promotrimo trokute ABC i ADC, znamo da vrijedi

$$|BC| = |CD|$$

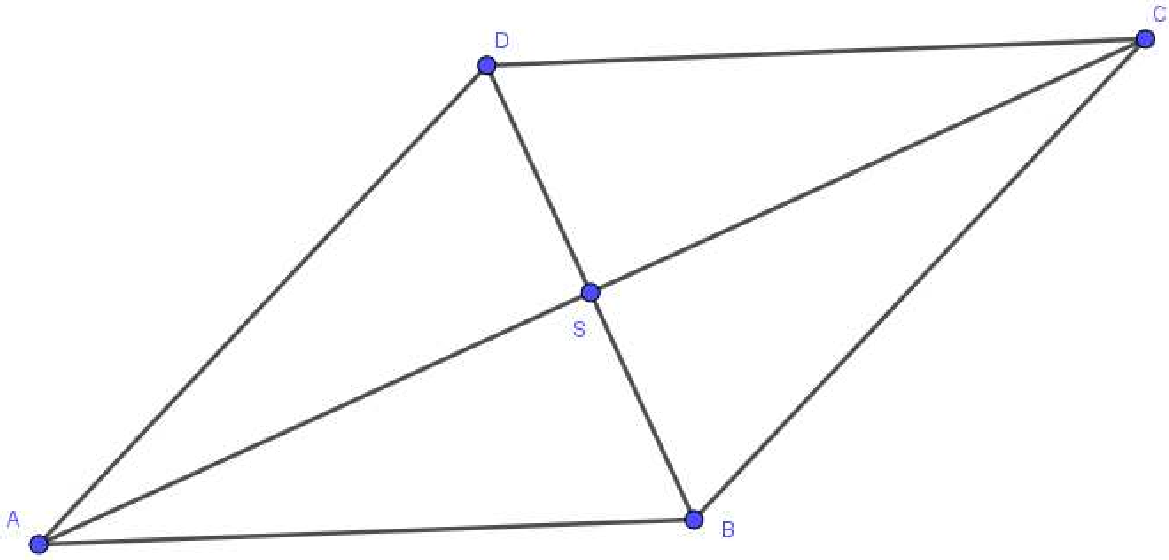
$$|AD| = |AB|$$

$\overline{AC}$ je zajednička stranica tih trokuta. Iz čega, po S-S-S poučku o sukladnosti trokuta slijedi da su trokuti ABC i ADC sukladni.

Slijedi, da su kutovi DAC i CAB sukladni te su kutovi ACD i BCA sukladni.

Analogno možemo zaključiti i da dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja odgovarajuće kutove.

Teorem 4: Ako je četverokut romb, onda se dijagonale tog četverokuta međusobno raspolavljaju i okomite su.



Slika 2. 5

Dokaz:

Neka je S sjecište dijagonala zadanog romba (Slika 2. 5).

Znamo da su sve stranice romba sukladne (Definicija i Teorem 2). Iz teorema 2 i 3 slijedi da dijagonale romba raspolavljaju unutarnje kutove romba te da su nasuprotni kutovi jednaki.

Tada, po K-S-K teoremu od sukladnosti slijedi da su trokuti ABS i DSB sukladni.

Iz čega slijedi:

$$|AS| = |SC|$$

$$|BS| = |SD|$$

Znamo da je $|AS| + |SC| = |AC|$ te $|BS| + |SD| = |BD|$ te slijedi da S raspolavlja dijagonale romba $ABCD$.

Nadalje, trokuti ASB i CSB su sukladni po S-S-S teoremu o sukladnosti. Slijedi da su kutovi BSA i CSB jednaki. Nadalje, znamo da su točke A, S i C kolinearne, tj. pripadaju istom pravcu (pravac AC) iz čega slijedi da su kutovi ASB i CSB sukuti. Možemo zaključiti da su onda ti kutovi pravi. Analogno možemo dokazati i za kutove ASD i DSC.

Dakle, dijagonale romba se međusobno raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom.

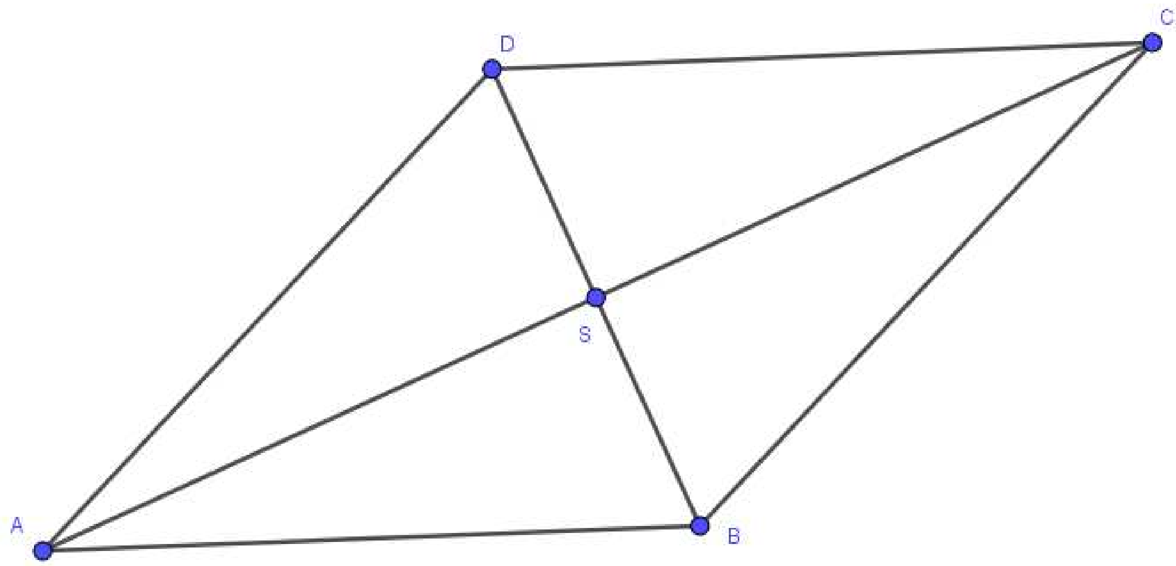
Za neke navedene teoreme vrijedi i obrat.

Teorem 5: Ako su sve stranice nekog četverokuta sukladne, onda je taj četverokut romb.

Dokaz:

Zadano je da su sve stranice nekog četverokuta sukladne. Znamo po definiciji romba da su svake dvije susjedne stranice sukladne. Iz tvrdnje da su sve četiri stranice sukladne slijedi da su i susjedne stranice sukladne, tj. dani četverokut je romb.

Teorem 6: Ako dijagonale nekog četverokuta raspolavljaju unutarnje kutove, onda je taj četverokut romb.

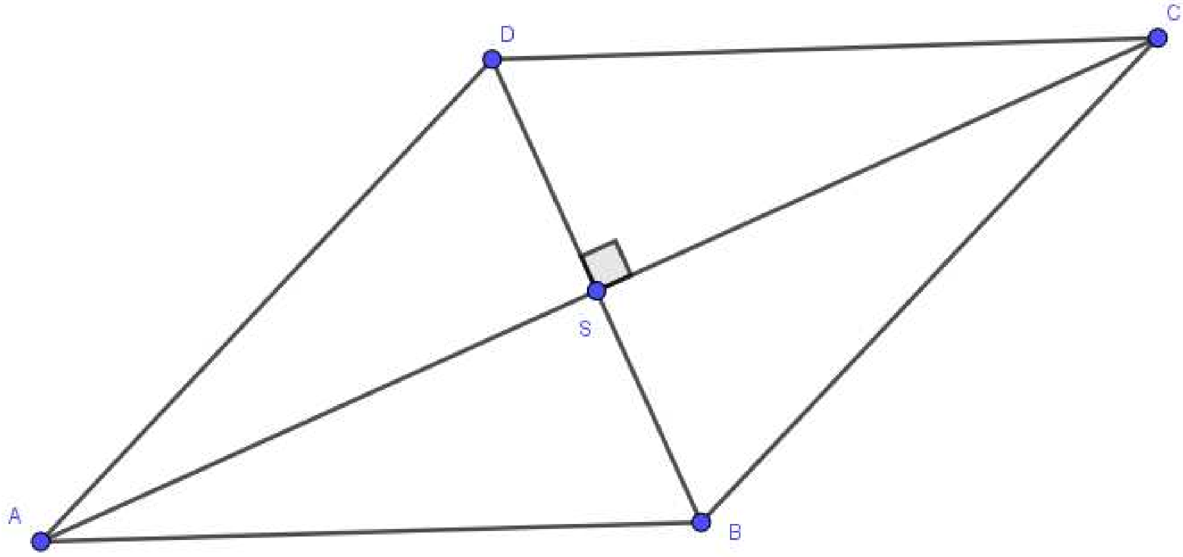


Slika 2. 6

Dokaz:

Zadan je četverokut $ABCD$ s dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ (Slika 2. 6). Znamo da dijagonala $\overline{AC}$ raspolavlja kutove DAB i BCD, a dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja kutove ABC i CDA. Promotrimo trokute ABC i ACD. Znamo da su kutovi DAC i CAB te kutovi ACD i BCA sukladni. Promatrani trokuti imaju i jednu zajedničku stranicu. Slijedi da su ti trokuti sukladni po K-S-K teoremu o sukladnosti iz čega slijedi da su stranice $\overline{DA}$ i $\overline{AB}$ te $\overline{CD}$ i $\overline{BC}$ sukladne. Dakle, došli smo do zaključka da su susjedne stranice sukladne tj. četverokut $ABCD$ je romb.

Teorem 7: Ako se dijagonale nekog četverokuta sijeku pod pravim kutom i raspolavljaju, onda je taj četverokut romb.



Slika 2. 7

Dokaz:

Zadan je četverokut $ABCD$ s dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ (Slika 2. 7). Znamo da se dijagonale međusobno raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom. Označimo sa S sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

Promotrimo trokute ABS i CBS. Iz zadane tvrdnje slijedi:

$$|AS| = |SC|$$

$$\measuredangle ASB = \measuredangle CSB = 90°$$

Znamo da je $\overline{BS}$ zajednička stranica tih trokuta. Zaključujemo da su promatrani trokuti sukladni, iz čega slijedi su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ danog četverokuta sukladne.

Analogno, promatrajući trokute CDS i BCS zaključujemo da su stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ sukladne.

Naime, dolazimo do zaključka da su trokuti ABS, BCS, CDS i DAS sukladni. Tada su sve stranice danog četverokuta međusobno sukladne što znači i da su susjedne stranice međusobno sukladne. Zaključujemo da je dani četverokut romb.

Poglavlje 3

Učeničke aktivnosti

U današnje vrijeme tehnologija je svuda oko nas pa tako i u nastavi. Sve češće se koriste PowerPoint prezentacije i slični alati. Koriste se i programi dinamičke geometrije koji omogućuju brže konstrukcije te služe kao dobro pomagalo za vizualizaciju. Već u nižim razredima osnovne škole učenici su upoznati s geometrijskim priborom koji koriste prilikom crtanja raznih geometrijskih likova. Alati dinamičke geometrije omogućuju da jednom konstrukcijom prikažemo više slučajeva. Na primjer, konstruiramo šiljastokutni trokut ABC, a pomicanjem jedne od točaka možemo dobiti pravokutan ili tupokutan trokut. Nisu potrebne mnoge konstrukcije na ploči, a učenici vide razne trokute. Nastavnici u alatu dinamičke geometrije mogu napraviti popratni materijal za izlaganje na satu ili osmisliti aktivnosti za učenike. Prednost alata dinamičke geometrije je ta da je prikladan i za učenike i nastavnike. Osim što se u njima mogu konstruirati razni geometrijski likovi i pojmovi vezani za geometriju, moguće je nacrtati i razne krivulje koje možda i nisu najspretnije za crtanje rukom. Alat dinamičke geometrije namijenjen je učenicima i nastavnicima. Učenicima pomaže kod vizualizacije geometrijskih pojmova i za provjeru, a nastavnicima služi za izradu materijala koji pomažu kod izlaganja na nastavi. Potrebno je napomenuti da nije dovoljno u alatu dinamičke geometrije pokazati neka svojstva i smatrati da je sve dokazano, potrebno je formalno dokazati ta svojstva, ali i dalje se možemo služiti alatom dinamičke geometrije kako bismo učenicima olakšali sam dokaz. U alatu dinamičke geometrije mogu se osmisliti i aktivnosti za nastavu.

Aktivnosti iz ovog poglavlja namijenjene su otkrivanju i dokazivanju teorema iz prethodnog poglavlja. Pripremljene su za rad u Geogebri, ali ih je moguće prilagoditi za neki drugi alat dinamičke geometrije. U ovome radu je korišten GeoGebra Classic 5 program.

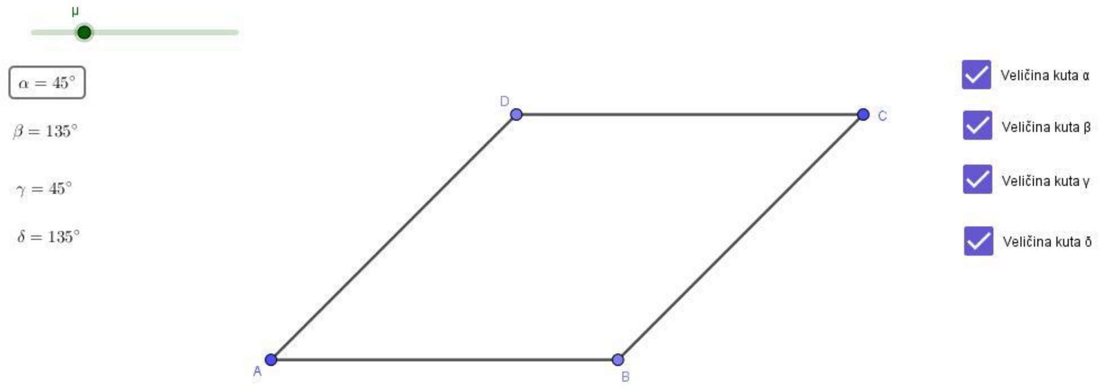
Aktivnost 1

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da su nasuprotni kutovi romba sukladni, a kutovi uz stranicu suplementarni.

Potreban materijal: tablica za svaki par učenika, materijal u Geogebri, PC računalo za svaki par učenika

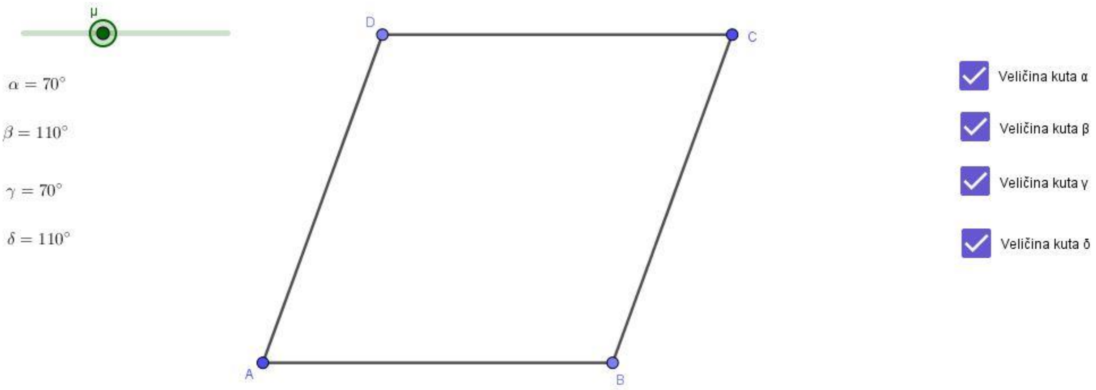
Način rada: rad u paru

Tijek aktivnosti: Učenici su podijeljeni u parove, svaki par sjedi za računalom. Učenici dobivaju Nastavni listić s uputama. Otvaraju datoteku Romb 1 u Geogebri (Slika 3. 1).

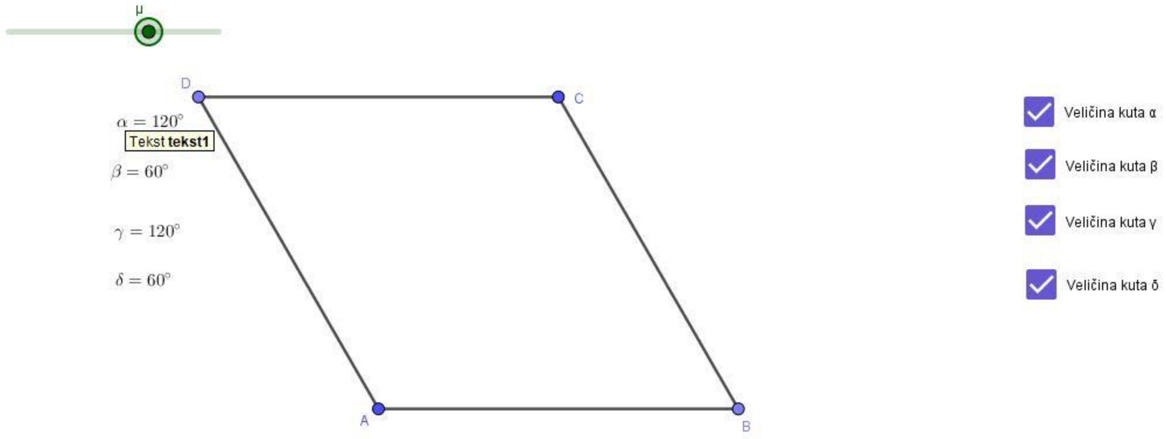


Slika 3. 1

Mijenjaju veličinu μ. (Slika 3. 2, Slika 3. 3)



Slika 3. 2



Slika 3. 3

U tablicu (Tablica 3. 1) zapisuju veličine kutova romba, uočavaju da su veličine nasuprotnih kutova uvijek jednake, tj. da su kutovi sukladni. Nadalje, uočavaju da su kutovi uz istu stranicu romba suplementarni, tj. da u zbroju daju 180°.

$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{\alpha+\gamma}$	$\boldsymbol{\beta+\delta}$
45°	45°	135°	45°	135°	180°	180°
70°	70°	110°	70°	110°	180°	180°
120°	120°	60°	120°	60°	180°	180°
140°	140°	40°	140°	40°	180°	180°

Tablica 3. 1

Pitanja za refleksivno mišljenje/ diskusiju:

Što ste uočili?

Uočili smo da su nasuprotni kutovi jednaki.

Kako nazivamo veličine koje su jednake?

Sukladne.

Što još možete uočiti?

Uočavamo da je zbroj kutova uz istu stranicu uvijek 180°.

Kako nazivamo takve kutove?

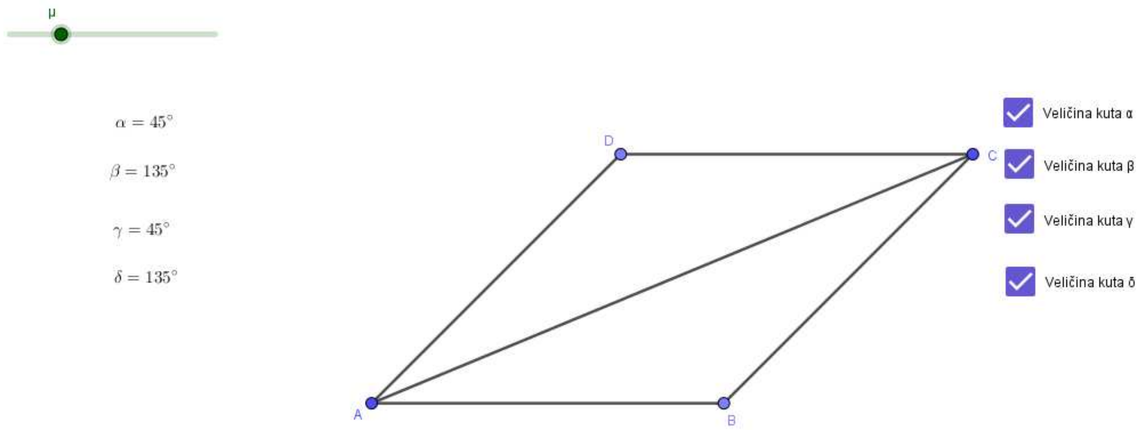
Suplementarni kutovi.

Zaključak:

Nasuprotni kutovi romba su sukladni, a kutovi uz istu stranicu su suplementarni.

Dokažimo otkriveno svojstvo:

Povucite dužinu $\overline{AC}$ (Slika 3.4).

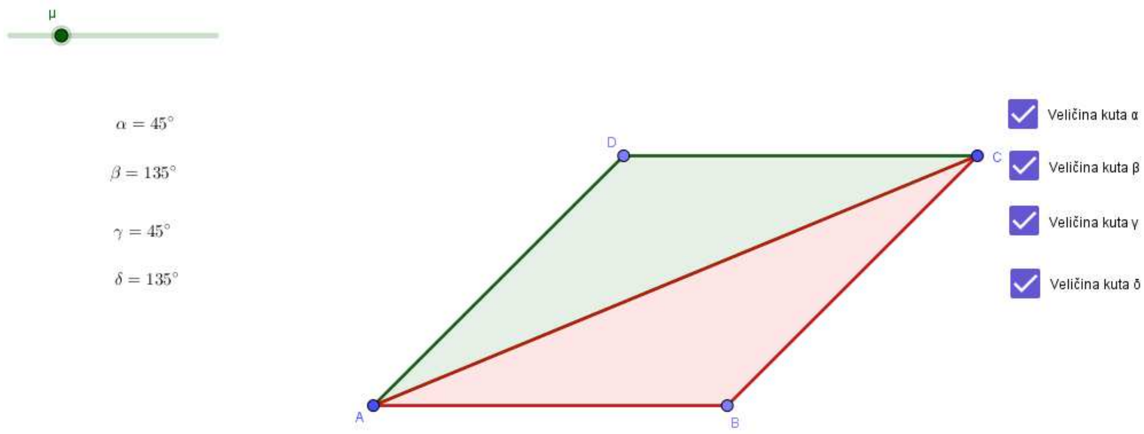


Slika 3. 4

Što je ona za romb $ABCD$?

To je jedna od dijagonala.

Promotrite dobivene trokute, što uočavate?



Slika 3. 5

Trokuti ABC i ACD su sukladni po S-S-S teoremu o sukladnosti trokuta.

Što možemo zaključiti?

Da su kutovi ABC i CDA sukladni.

Što znate o zbroju kutova u četverokutu?

On je uvijek jednak 360°.

Zapišite što to znači za romb $ABCD$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Primijenite uočeno svojstvo, što uočavate?

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \alpha + \beta = 360°$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 180°$$

Da je zbroj nasuprotnih kutova jednak 180°.

Nakon toga učenici povlače dužinu $\overline{BD}$ te uočavaju da isto vrijedi i za kutove DAB i BCD.

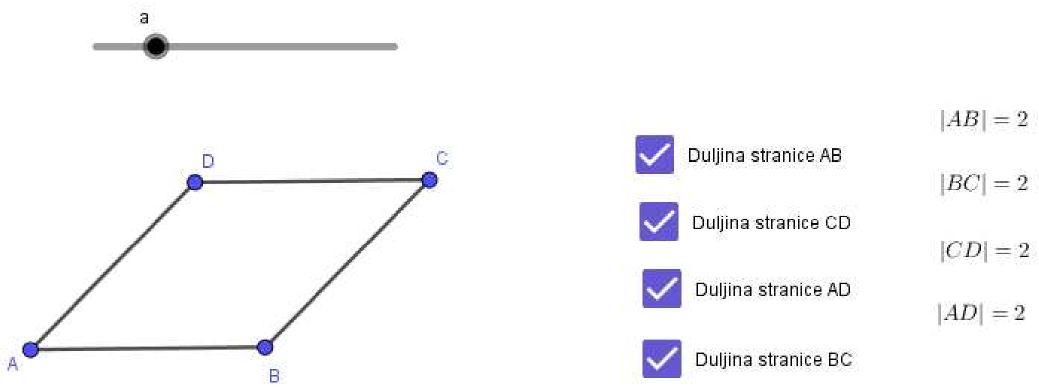
Aktivnost 2

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da su sve stranice romba međusobno sukladne.

Potreban materijal: tablica za svaki par učenika, materijal u Geogebri, PC računalo za svaki par učenika

Način rada: rad u paru

Tijek aktivnosti: Učenici su podijeljeni u parove, svaki par sjedi za računalom. Učenici dobivaju Nastavni listić s uputama. Otvaraju datoteku Romb 2 u Geogebri.



Slika 3. 6

Učenici mijenjaju duljinu a i zapisuju različite duljine u dobivenu tablicu (Tablica 3. 2).

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\lvert AB \rvert}$	$\boldsymbol{\lvert BC \rvert}$	$\boldsymbol{\lvert CD \rvert}$	$\boldsymbol{\lvert AD}$
2	2	2	2	2
6	6	6	6	6
8	8	8	8	8
10	10	10	10	10

Tablica 3. 2

Uočavaju da su sve stranice uvijek jednake duljine.

Pitanja za diskusiju:

Što primjećujete?

Promjenom duljine stranice $\overline{AB}$, mijenjaju se i duljine ostalih stranica, tj. uvijek su sve stranice istih duljina.

Kako nazivamo veličine koje su jednake?

Sukladne.

Zaključak: Sve stranice romba su jednake duljine tj. sukladne.

Otkriveno svojstvo nije potrebno dokazivati pomoću alata dinamičke geometrije jer je samo po sebi dosta intuitivno

Dokažimo otkriveno svojstvo:

Znamo da su susjedne stranice romba jednake duljine:

$$|AB| = |BC|$$

$$|BC| = |CD|$$

$$|CD| = |AD|$$

$$|AD| = |AB|$$

Promotrimo trokute ABC i ADC, znamo da vrijedi

$$|BC| = |CD|$$

$$|AD| = |AB|$$

Te je $\overline{AC}$ zajednička stranica tih trokuta. Iz čega, po S-S-S poučku o sukladnosti trokuta slijedi da su trokuti ABC i ADC sukladni.

Slijedi, da su kutovi DAC i CAB sukladni te su kutovi ACD i BCA sukladni.

Analogno možemo zaključiti i da dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja odgovarajuće kutove.

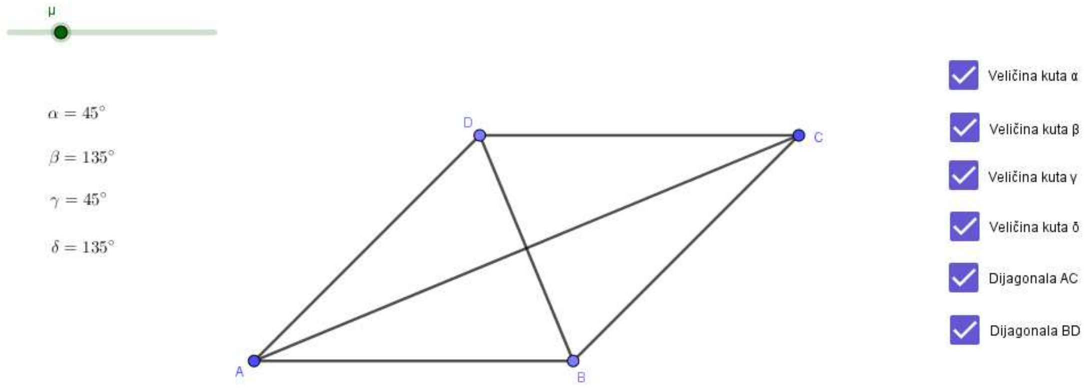
Aktivnost 3

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da dijagonale romba raspolavljaju unutarnje kutove romba.

Potreban materijal: tablica za svaki par učenika, materijal u Geogebri, PC računalo za svaki par učenika

Način rada: rad u paru

Tijek aktivnosti: Učenici su podijeljeni u parove, svaki par sjedi za računalom. Učenici dobivaju Nastavni listić s uputama. Otvaraju datoteku Romb 3 u Geogebri.



Slika 3. 7

Učenici određuju veličine kutova DAC, CAB, BDA i CDB, mijenjaju veličinu μ te u tablicu (Tablica 3. 3) zapisuje veličine kutova na koje odgovarajuća dijagonala dijeli unutarnje kutove.

μ	α	β	$\measuredangle DAC$	$\measuredangle CAB$	$\measuredangle BDA$	$\measuredangle CDB$
40°	40°	140°	20°	20°	70°	70°
70°	70°	110°	35°	35°	55°	55°
120°	120°	60°	60°	60°	30°	30°
130°	130°	50°	65°	65°	25°	25°

Tablica 3. 3

Učenici uočavaju da dijagonala romba dijeli kutove na sukladne kutove.

Pitanja za diskusiju:

Što možemo reći za kutove na koje dijagonala $\overline{AC}$ dijeli $\measuredangle DAC$?

Nastali kutovi su jednake veličine.

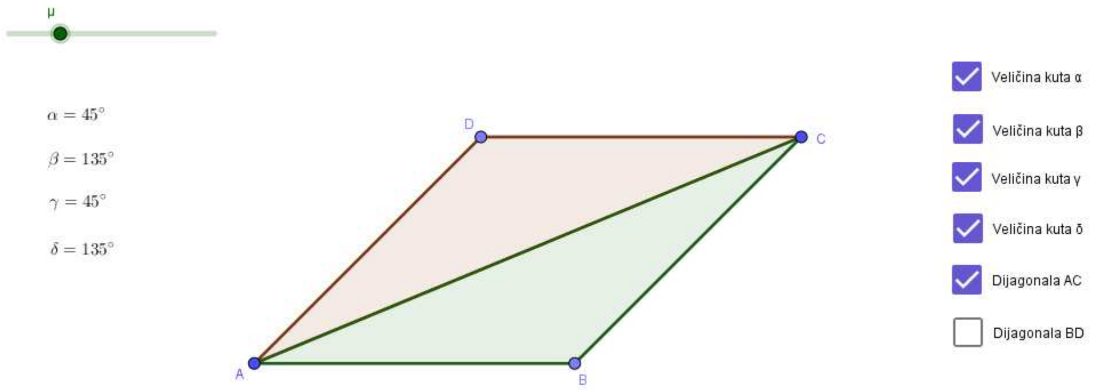
Što je onda pravac kojem pripada dijagonala $\overline{AC}$ za $\measuredangle DAC$?

On je simetrala tog kuta.

Što s kutovima koji nastaju uz vrh C i D?

Za njih vrijedi isto što i za kutove koje smo promatrali zato što znamo da su nasuprotni kutovi romba sukladni.

1. Promotrite trokute koji nastaju kada povučemo dijagonalu $\overline{AC}$, što uočavate?



Slika 3. 8

Trokuti ABC i ACD su sukladni po S-S-S teoremu o sukladnosti trokuta.

2. Što možemo zaključiti za kutove koji nastaju?

Da su kutovi CAB i DAC sukladni, isto vrijedi i za kutove BCD i ACD.

Kakav je odnos nastalih kutova u odnosu na kut od kojeg su nastali?

Nastali kutovi su dvostruko manji od početnog, tj. dijagonala $\overline{AC}$ dijeli kutove romba na pola.

Analogno za kutove CAD i CBA.

Dokažimo otkriveno:

Znamo da su susjedne stranice romba jednake duljine:

$$|AB| = |BC|$$

$$|BC| = |CD|$$

$$|CD| = |AD|$$

$$|AD| = |AB|$$

Promotrimo trokute ABC i ADC, što znamo o dužinama stranica tih trokuta?

Znamo da vrijedi:

$|BC| = |CD|$, $|AD| = |AB|$te je $\overline{AC}$ zajednička stranica tih trokuta.

Što to znači za te trokute?

Oni su sukladni po S-S-S poučku o sukladnosti trokuta.

Što zaključujete o kutovi tih trokuta?

Da su sukladni, tj. da kutovi DAC i CAB sukladni te su kutovi ACD i BCA sukladni. Dakle, AC raspolavlja odgovarajuće unutarnje kutove romba.

Analogno možemo zaključiti i da dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja odgovarajuće kutove.

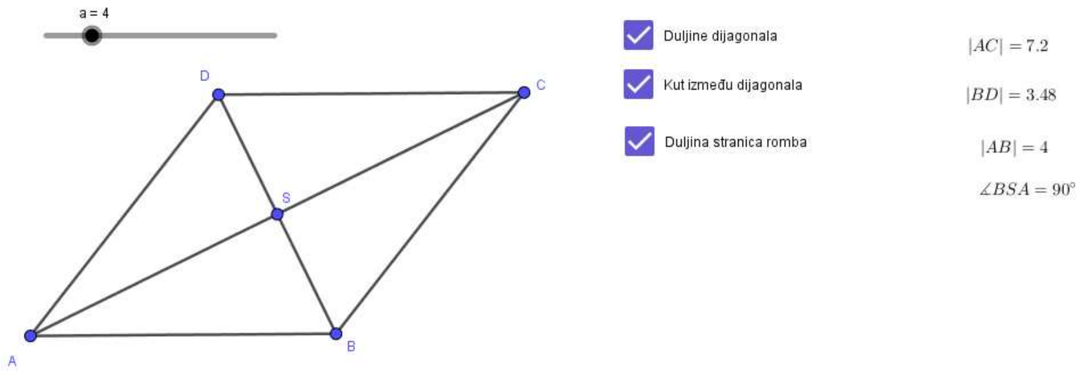
Aktivnost 4.

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da se dijagonale romba međusobno raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom.

Potreban materijal: tablica za svaki par učenika, materijal u Geogebri, PC računalo za svaki par učenika

Način rada: rad u paru

Tijek aktivnosti: Učenici su podijeljeni u parove, svaki par sjedi za računalom. Učenici dobivaju Nastavni listić s uputama. Otvaraju datoteku Romb 4 u Geogebri.



Slika 3. 9

Učenici određuju duljine dijagonala i duljine dužina na koje sjecište S dijagonala dijeli dijagonale. Mijenjaju veličinu a, promjene zapisuju u dobivenu tablicu (Tablica 3. 4).

a	$\|AB\|$	$\|AC\|$	$\|BD\|$	$\|AS\|$	$\|SC\|$	$\|BS\|$	$\|SD\|$	$\measuredangle ASB$
4	4	7,2	3,48	3,6	3,6	1,74	1,74	90°
6	6	10,8	5,22	5,4	5,4	2,61	2,61	90°
10	10	18,01	8,71	9	9	4,35	4,35	90°
14	14	25,12	12,19	12,6	12,6	6,09	6,09	90°

Tablica 3. 4

Dokažimo sada otkriveno:

Što do sada znate o rombu?

Znamo da su sve stranice romba sukladne, da dijagonale raspolavljaju unutarnje kutove romba i da su nasuprotni unutarnji kutovi romba sukladni, a uz istu stranicu suplementarni.

Promotrite četiri trokuta na koje je romb podijeljen dijagonalama. Što uočavate?

Oni su međusobno sukladni po K-S-K teoremu i sukladnosti trokuta. Zato što znamo da dijagonale raspolavljaju unutarnje kutove i sve stranice romba su sukladne.

Slijedi da se dijagonale međusobno raspolavljaju. Znamo da su i svi kutovi tih trokuta sukladni, tada su i kutovi između dijagonala sukladni i pravi.

Dakle, dijagonale romba se međusobno raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom.

Aktivnost 5.

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da je četverokut kojemu su sve stranice sukladne romb.

Potreban materijal: nastavni listić s uputama i pitanjima za svaki par učenika

Način rada: rad u paru

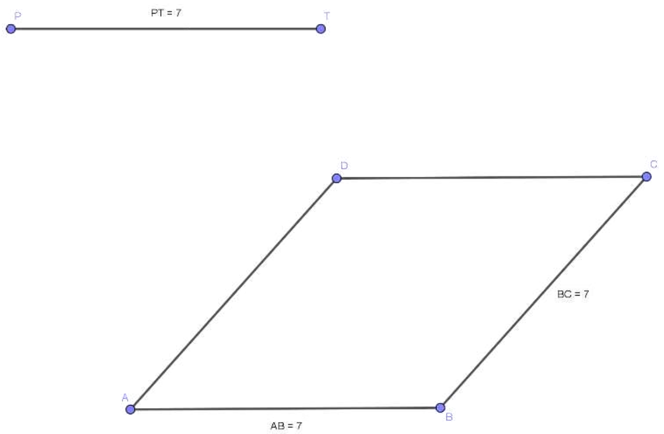
Tijek aktivnosti: Učenici su podijeljeni u parove, svaki par sjedi za računalom. Učenici dobivaju Nastavni listić s uputama. Slijede upute s nastavnog listića i u Geogebri konstruiraju četverokut $ABCD$ po uputama. U tablicu zapisuju duljine stranica tog četverokuta. Uočavaju da se radi o rombu, tj. vrijedi obrat Teorema 2.

Nastavni listić

Otvorite novu datoteku u Geogebri.

Nacrtajte dužinu $\overline{PT}$ proizvoljne dužine manje od 15.

Konstruirajte četverokut $ABCD$ kojemu su sve stranice sukladne dužini $\overline{PT}$.



Slika 3. 10

Mijenjajte duljinu dužine $\overline{PT}$ i zapisujte u tablicu (Tablica 3. 5) duljine susjednih stranica nastalog četverokuta. Što uočavate?

Uočavamo da su susjedne stranice sukladne, tj. zadani četverokut jer romb.

$\|PT\|$	$\|AB\|$	$\|BC\|$
7	7	7
3	3	3
10	10	10
4	4	4

Tablica 3. 5

Aktivnost 6.

<u>Cilj aktivnosti</u>: Učenici će otkriti da je četverokut kojemu dijagonale raspolavljaju unutarnje kutove romb.

<u>Potreban materijal</u>: nastavni listić s uputama i pitanjima za svaki par učenika

<u>Način rada</u>: rad u paru

<u>Tijek aktivnosti</u>: Učenici su podijeljeni u parove, svaki par sjedi za računalom. Učenici dobivaju Nastavni listić s uputama. Slijede upute s nastavnog listića i u Geogebri konstruiraju četverokut $ABCD$ po uputama. Mijenjaju veličinu kuta α po uputama, određuju duljine stranica dobivenog četverokuta. Uočavaju da su sve stranice sukladne, time i susjedne te da je dobiveni četverokut romb, tj. vrijedi obrat Teorema 3.

Nastavni listić

Otvorite novu datoteku u Geogebri.

1. Zadajte šiljaste kutove α i β.

2. Konstruirajte pravac p i odaberite točku A na pravcu.

3. Rotirajte pravac p oko točke A za kut α u pozitivnom smjeru. Dobiveni pravac imenujte s.

4. Rotirajte pravac s oko točke A za kut α u pozitivnom smjeru. Dobiveni pravac imenujte q.

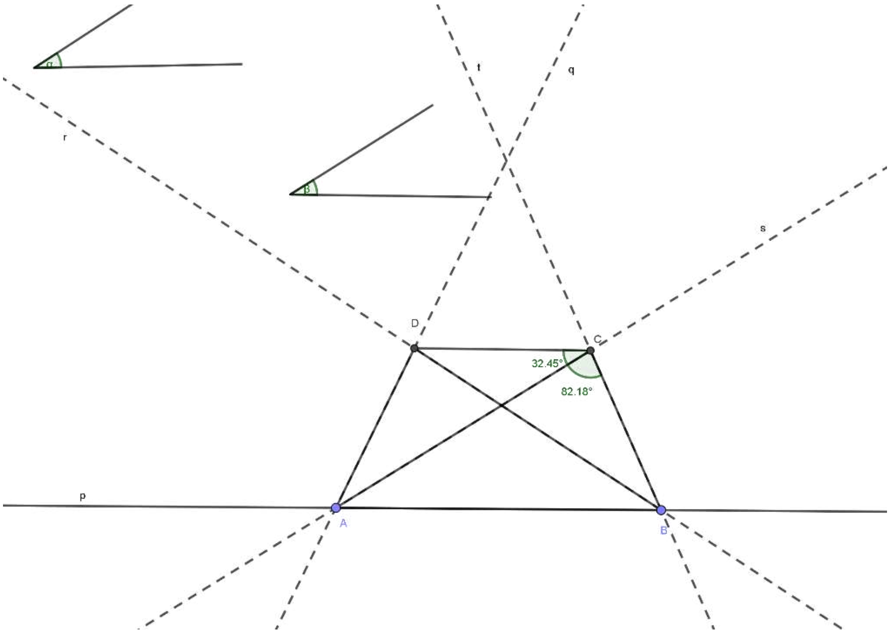
5. Odaberite točku B na pravcu p.

6. Rotirajte pravac p oko točke B za kut β u negativnom smjeru. Dobiveni pravac imenujte r.

7. Rotirajte pravac r oko točke B za kut β u negativnom smjeru. Dobiveni pravac imenujte t.

8. Neka je C sjecište pravaca s i t. Neka je D sjecište pravaca q i r.

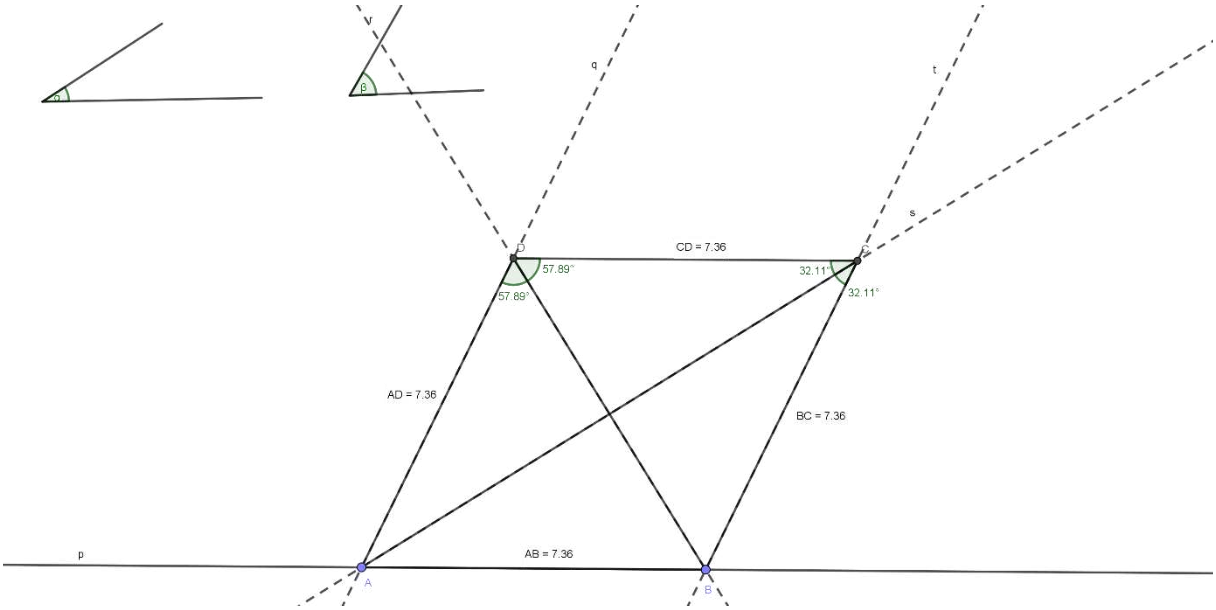
9. Označite dobiveni četverokut $ABCD$.



Slika 3. 11

10. Mijenjajte veličinu kuta β dok kutovi BDA i CDB ne budu sukladni (Slika 3. 12).

11. Odredite duljine dužina stranica četverokuta $ABCD$.



Slika 3. 12

Pitanja za diskusiju:

Što predstavljaju pravci s i r za kutove BAD i ABC?

Ti pravci su simetrale kutova BAD i ABC.

O kojem se četverokutu radi u koraku 9?

Radi se o trapezu.

Odredite veličine kutova BCD i ACD četverokuta u koraku 11.

One su jednake, tj. kutovi BCD i ACD su sukladni. Pravac r je simetrala kuta BCD.

Što predstavlja pravac s za kut ADB?

Pravac s je simetrala kuta ADB.

O kojem se četverokutu radi u koraku 11? Objasnite.

Radi se o rombu zato što su svake dvije susjedne stranice sukladne.

Aktivnost 7.

<u>Cilj aktivnosti</u>: Učenici će otkriti da je četverokut kojemu se dijagonale sijeku pod pravim kutom i raspolavljaju romb.

<u>Potreban materijal</u>: nastavni listić s uputama i pitanjima za svaki par učenika

<u>Način rada</u>: rad u paru

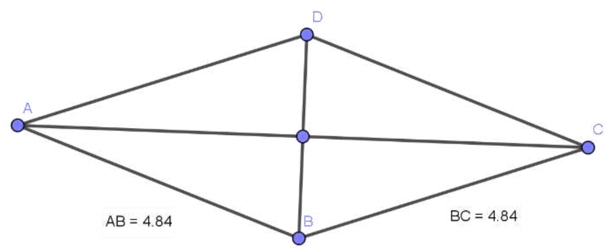
<u>Tijek aktivnosti</u>: Učenici su podijeljeni u parove, svaki par sjedi za računalom. Učenici dobivaju Nastavni listić s uputama. Slijede upute s nastavnog listića i u Geogebri konstruiraju četverokut $ABCD$ po uputama. U tablicu zapisuju duljine stranica tog četverokuta. Uočavaju da se radi o rombu, tj. vrijedi obrat Teorema 4.

Nastavni listić

Otvorite novu datoteku u Geogebri.

Nacrtajte dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ koje su međusobno okomite i raspolavljaju se.

Nacrtajte četverokut $ABCD$ (Slika 3. 13).



Slika 3. 13

Mijenjajte duljine dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Nemojte zaboraviti da dužine moraju biti okomite i da se moraju raspolavljati. Zapisujte u tablicu (Tablica 3. 6) duljine susjednih stranica nastalog četverokuta. Što uočavate?

Uočavamo da su susjedne stranice sukladne, tj. zadani četverokut je romb.

$\|AB\|$	$\|BC\|$	$\|CD\|$	$\|AD\|$
4.84	4.84	4.84	4.84
5.46	5.46	5.46	5.46
3.84	3.84	3.84	3.84
4	4	4	4

Tablica 3. 6

U prethodnim aktivnostima učenici su otkrili da vrijede i obrati nekih teorema, ali to ne vrijedi za sve.

Aktivnost 8.

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da četverokut kojemu su nasuprotni kutovi sukladni, a kutovi uz istu stranicu suplementarni ne mora biti romb.

Potreban materijal: nastavni listić s uputama i pitanjima za svaki par učenika

Način rada: rad u paru

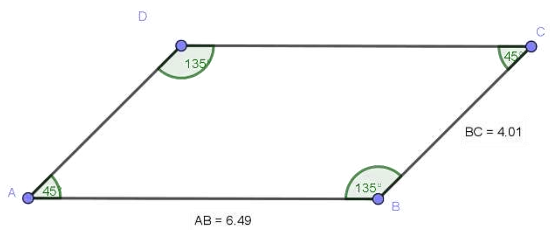
Tijek aktivnosti: Učenici su podijeljeni u parove, svaki par sjedi za računalom. Učenici dobivaju Nastavni listić s uputama. Slijede upute s nastavnog listića i u Geogebri konstruiraju četverokut $ABCD$ po uputama. U tablicu zapisuju duljine stranica tog četverokuta. Uočavaju da se radi o paralelogramu, tj. da ne vrijedi obrat Teorema 1.

Nastavni listić

Otvorite novu datoteku u Geogebri.

Odredite kut μ proizvoljne veličine, manji od 180°.

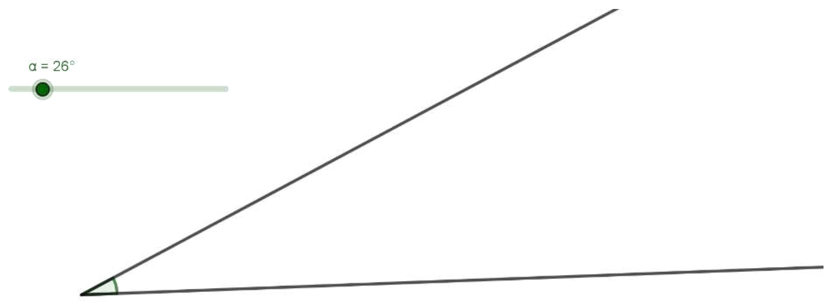
Nacrtajte proizvoljnu dužinu $\overline{AB}$ te četverokut $\overline{ABCD}$ kojemu su nasuprotni kutovi sukladni kutu iz točke 2, a druga dva kuta su njima suplementarni (Slika 3. 14).

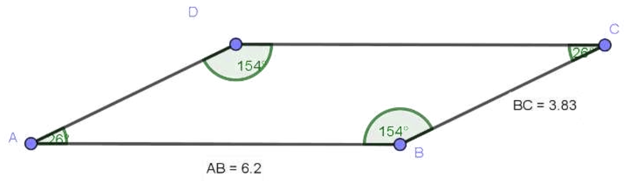


Slika 3. 14

Mijenjajte veličinu kuta pod 2 i duljinu dužine $\overline{AB}$ (Slika 3. 15). Promjene zapisujte u tablicu duljine stranica nastalog četverokuta. Što uočavate?

<u>Uočavamo da su nasuprotne stranice sukladne i paralelne, tj. zadani četverokut je paralelogram.</u>





Slika 3. 15

μ	α	β	$\lvert AB\rvert$	$\lvert BC\rvert$	$\lvert CD\rvert$	$\lvert AD\rvert$
45°	45°	135°	6.49	4.01	6.49	4.01
70°	70°	110°	7.52	4.64	7.52	4.64
120°	120°	60°	2.96	1.83	2.96	1.83
130°	130°	50°	6.2	3.83	6.2	3.83

Tablica 3. 7

Kod izrade aktivnosti, tamo gdje učenici dobivaju gotove materijale, potrebno je mijenjati položaj romba. Naime, potrebno je da učenici uoče da ne moraju uvijek dvije stranice romba biti paralelne s rubom, npr. rub papira. U protivnom, ukoliko romb uvijek stavimo u isti položaj i slične veličine unutarnjih kutova (npr. uvijek stavimo da je kut uz vrh A uvijek šiljasti, približno 45°, učenici će kao romb prepoznati samo takve rombove.

Poglavlje 4

Učeničke pretpostavke i zaključci

Formalno se romb uči u višim razredima, ali se s njime učenici susreću ranije neformalno, točnije ne definiraju ga kao romb. Naime, kvadrat je zapravo romb čiji su svi unutarnji kutovi sukladni. Učenici često to ne povezuju, te romb i kvadrat smještaju u dva disjunktna skupa. Nadalje, analogno tome ne uočavaju da je romb trapez. Učenici u osnovnoj školi nerijetko smatraju kako je potrebno navesti sva svojstva nekog objekta kako bi ga definirali. Na primjer, romb će definirati kao četverokut kojemu su sve stranice iste duljine, dijagonale rapolavljaju unutarnje kutove, sijeku se pod pravim kutom i međusobno raspolavljaju. Zato je potrebno učenicima razjasniti da su te tvrdnje ekvivalentne i da nije potrebno navesti sva svojstva romba kako bismo ga definirali. Aktivnosti navedene u prethodnom poglavlju služe tomu da učenici uoče da su to zapravo svojstva romba i nije ih potrebno uvijek navoditi kod definicije romba. Dovoljno je reći da je romb četverokut kojemu su svake dvije susjedne stranice sukladne. Pogrešne pretpostavke i zaključci o rombu koje su učenici usvojili često se javljaju i u srednjoj školi.

Slijedi primjer aktivnosti pogodne za neformalnu provjeru razumijevanja koncepta romba kod učenika.

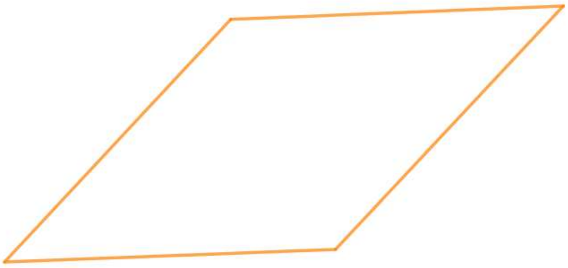
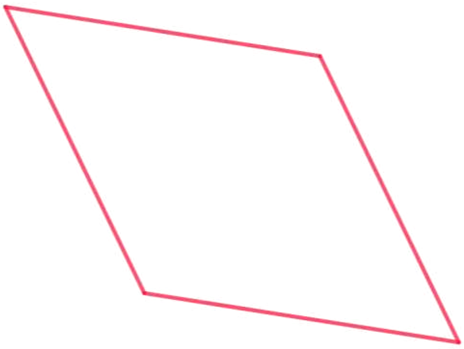
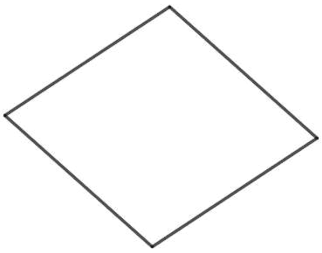
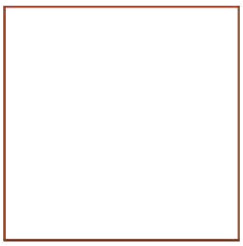
Cilj aktivnosti: Učenici će uvježbati koncept romba i prepoznati te objasniti zašto je neki četverokut romb.

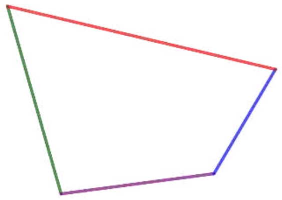
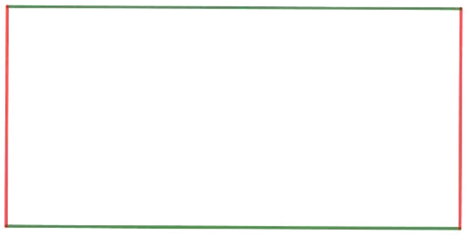
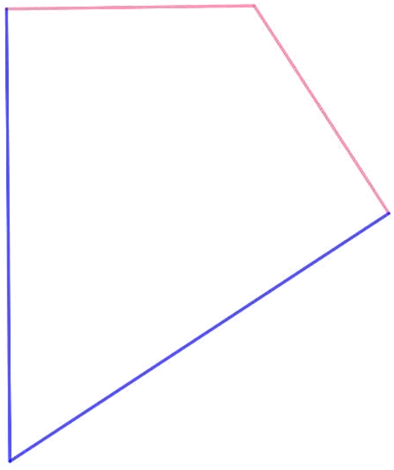
Potreban materijal: nastavni listić s primjerima raznih četverokuta

Način rada: individualni rad, frontalna nastava

Tijek aktivnosti: Nastavnik na ploču crta tablicu (Tablica 4. 1) sa stupcima Romb i Nije romb. Sa strane magnetom pričvršćuje kartice sa slikama raznih četverokuta. Učenici dolaze redom na ploču i svaki odabire jednu karticu s ploče koju svrstava u jednu od kategorija. Nakon što karticu stavi u jednu od kategorija objašnjava svoj odabir. Ukoliko se netko od ostalih učenika ne slaže, daje svoje objašnjenje i zašto smatra da je prvi učenik u krivu.

Primjer svrstanih kartica:

Romb
 C Sve susjedne stranice su međusobno sukladne.
 D Sve susjedne stranice su međusobno sukladne.
 E Sve susjedne stranice su međusobno sukladne.
 G

Sve susjedne stranice su međusobno sukladne.
Ne romb
 A Stranice nisu sukladne.
 B Stranice nisu sukladne.
 F Neke dvije susjedne stranice su sukladne, ali ne sve.

Tablica 4. 1

Učenički odgovori:
Neki učenici ne bi prepoznali da su četverokuti E i G romb.

Primjer odgovora:
„Četverokut G nije romb zato što su svi unutarnji kutovi sukladni, tj. pravi su. Znamo da je to kvadrat pa ne može biti romb."

Potrebno je s učenicima diskutirati o tome i dovesti ih do pravog zaključka.

Primjer četverokut E
Učenik smješta četverokut u stupac Nije romb. Učenikovo objašnjenje:
„Četverokut E nije romb, zato što ni jedna stranica nije paralelna s rubom."

Nastavnik: „Prisjetite se definicije romba, što je romb?"
Učenik: „ Romb je paralelogram kojemu su svake dvije susjedne stranice sukladne."

Nastavnik: „Promotrite ponovo četverokut E i njegove stranice. Što uočavate?"
Učenik: „Svake dvije susjedne stranice tog četverokuta su sukladne. On ipak je romb"

Uočimo, četverokut G je kvadrat, a kvadrat je zapravo podvrsta romba. Učenici često romb, kvadrat i paralelogram smještaju u disjunktne skupove. Tako će i kvadrat smatrati četverokutom različitim od romba:
„Četverokut G nije romb zato što je kvadrat pa ne može biti i romb.
Potrebno je s učenicima diskutirati o tome i dovesti ih do pravog zaključka.

Nastavnik: „Prisjetite se definicije romba i definicije kvadrata. Što je romb, a što je kvadrat?"
Učenik: „ Romb je paralelogram kojemu su svake dvije susjedne stranice sukladne. Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice sukladne"

Nastavnik: „Što to znači za susjedne stranice kvadrata?"
Učenik: „Ako su sve stranice sukladne, znači da su i svake dvije susjedne sukladne. To je zapravo definicija romba, dakle kvadrat je romb."

Kako ne bi došlo do pogrešnih učeničkih zaključaka, potrebno je da i studenti nastavničkog smjera matematike, a samim time i profesori dobro prouče i razumiju romb. Na tu temu, 2007. godine, je Jamar Pickreign (državno sveučilište New York, Fredonia, fakultet obrazovanja) proveo istraživanje u kojemu je sudjelovalo 40 studenata nastavničkog smjera (*pre-service teachers*) koji su pohađali prvi matematički kolegij od dva koja se podučavaju na fakultetu. Svi studenti su kolegij slušali kod istog profesora, koncept geometrije nije bio dio sadržaja kolegija. Ispitanici su trebali definirati pojmove romb i paralelogram svojim riječima. Zanimljivo je da je samo jedan ispitanik, točnije 2.5 % dao definiciju romba koja je uključila kvadrat i isključila paralelograme kojima susjedne stranice nisu sukladne. Iako su skoro svi sudionici (njih 39) pokušali definirati pravokutnik, 27 % sudionika (njih 11) nije ni pokušalo definirati romb. U tablici (Tablica 4. 2) su navedene definicije romba ispitanika te postotak i broj ispitanika koji su tu definiciju napisali. Potrebno je napomenuti da je samo prva navedena definicija korektan odgovor, ostalo su pokušaji ispitanika.

Zanimljivo je da je 14 ispitanika naglašavalo da je romb „nakošen“ i opisivali su ga kao dijamant. Time su smatrali i da je kvadrat koji „stoji na vrhu“ romb, ali kvadrat općenito nije. Kvadrat su ovisno o položaju opisivali kao romb ili nije romb. Zaključujemo da je romb pojam koji često stvara krive postavke i kod studenata. Zato je potrebno da romb ne crtamo uvijek u istom položaju kako ne bi više dolazilo do pogrešnih pretpostavki.

Definicija	Postotak ispitanika	Broj ispitanika
Romb je paralelogram kojemu su bilo koje dvije susjedne stranice jednakih duljina.	2.5 %	1
Romb je četverokut koji nije kvadrat, ali ima sve četiri stranice jednake duljine	20 %	8
Romb je paralelogram koji nema sve stranice jednakih duljina i unutarnji kutovi nisu pravi.	15 %	6
Romb je paralelogram.	10 %	4
Romb je trapez.	10 %	4
Romb je vrsta kvadrata.	5 %	2
Romb je četverokut.	5 %	2
Romb je vrsta kocke.	2.5 %	1
Romb je geometrijski lik koji je s jedne strane omeđen dužinom, a s druge s kružnim lukom (kružni odsječak).	2.5 %	1

Tablica 4. 2

Zaključak

Dokaz je bitan u nastavi matematike. Učenicima pomaže oko razumijevanja određenog gradiva. Kako bi učenici bolje razumjeli dokaz i njegovu svrhu, koristimo alat dinamičke geometrije. Alat dinamičke geometrije nije sam po sebi dovoljan kako bismo rekli da smo nešto dokazali. On je koristan za lakšu vizualizaciju. Potrebno je da učenici razumiju da matematika nije samo ono što vide, nego je potrebno sve uočeno i dokazati. Učenici najviše problema imaju sa geometrijom. Najviše s vizualizacijom, iz tog razloga potrebno je uvesti alate dinamičke geometrije u svakodnevnu upotrebu u nastavi.

Bibliografija

1. D. Ilišević, M. Bombardelli, Elementarna geometrija- skripta, PMF, 2007.
2. GeoGebra, dostupno na https://www.geogebra.org/about?lang=hr (kolovoz 2023.)
3. Ivana Grgić, Uloge, vrste i važnost dokaza
4. Jamar Pickreign, Rectangles and Rhombi: How Well Do Preservice Teachers Know Them?, State University of New York at Fredonia, 2007.
5. Kirsti Hemmi, Clas Löfwall , Why do we need proof?, Linköping University, Sweden Stockholm University, Sweden, 2009.
6. Michael de Villiers, The Role and Function of Proof in Mathematics, Pythagoras, 1990.
7. Michael de Villiers, Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketchpada i drugi tekstovi, HUNI, 2021.
8. Patricio Herbst,1 Takeshi Miyakawa, 2 and Daniel Chazan3,4 , Functions of proof, 2010.
9. Reuben Hersh Source, Educational Studies in Mathematics , of Proof , Springer, 1993.
10. Vimolan Mudaly & Michael de Villiers , Mathematical modeling and proof, University of the North-West, Potchefstroom, 2004.

Sažetak

Dokaz je temelj matematike kakvu znamo. Kao što je bitan za matematičare, bitan je i za učenike u osnovnoj, te pogotovo srednjoj školi. Dokaz ima više uloga, a jedna od bitnijih uloga dokaza u srednjoškolskoj matematici je dokaz kao sistematizacija znanja. Romb je paralelogram kojemu su bilo koje dvije susjedne stranice sukladne. Iz definicije romba proizlaze njegova svojstva koja je potrebno dokazati. Pojam romba često stvara poteškoće kod učenika. U nastavi matematike potrebno je provesti razne aktivnosti pomoću kojih će se omogućiti učenicima razumijevanje romba. Aktivnosti su napravljene u alatu dinamičke geometrije. Alat dinamičke geometrije pomaže učenicima kod vizualizacije dokaza, te lakšeg razumijevanja.

Summary

Proof is the foundation of mathematics as we know it. As important it is for mathematicians, it is also important for students in primary and especially secondary school. Proof has multiple roles and one of its essential roles in high school mathematics is proof as a systematization of knowledge. A rhombus is a parallelogram in which any two adjacent sides are congruent. From the definition of a rhombus derive the properties that need to be proven. The concept of rhombus often creates difficulties to students. In mathematics teaching, it is necessary to carry out various activities that enable students to understand the rhombus. Activities are prepared for a dynamic geometry tool. The dynamic geometry tool helps students visualize the proof, and makes it easier to understand.

Životopis

Moje ime je Dora Prah. Rođena sam 20. veljače 1998. godine u Zagrebu. Djetinjstvo provodim u Samoboru gdje 2004. godine upisujem Osnovnu Školu Bogumil Toni. Nakon osnovne škole, 2012. svoje školovanje nastavljam upisivanjem Gimnazije Antuna Gustava Matoša u Samoboru. 2016. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, matematički odsjek. Preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer, završavam 2021. godine. Iste te godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu upisujem diplomski studij matematika, nastavnički smjer koji dvije godine kasnije, 2023. i završavam.