Uvjeti optimalnosti u teoriji upravljanja i primjene

Posavec, Barbara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Posavec

UVJETI OPTIMALNOSTI U TEORIJI UPRAVLJANJA I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelji rada:
dr. sc. Petar Kunštek
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, rujan 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mojoj obitelji na neizmjernoj ljubavi i podršci.
Mateju hvala na prihvaćanju i na stalnom podsjećanju da će sve biti dobro.
Zahvaljujem mentorima dr.sc. Petru Kunšteku i prof.dr.sc. Marku Vrdoljaku na stručnoj pomoći i savjetima.

Sadržaj

Uvod

Teorija upravljanja je grana matematike koja se bavi upravljanjem dinamičkih sustava. Klasičan problem optimalnog upravljanja sastoji se od pronalaska funkcije upravljanja koja zadani sustav običnih diferencijalnih jednadžbi dovodi iz jednog stanja u drugo, uz minimizaciju ili maksimizaciju funkcionale cilja. U takvim problemima konačno vrijeme može biti fiksno ili varijabilno. Jedne od značajnijih primjena teorije upravljanja pronalazimo u svemirskoj industriji gdje je važna sposobnost pouzdanog upravljanja uz minimizaciju potrošnje goriva. Primjere optimalnog upravljanja možemo pronaći i u drugim područjima primijenjenih znanosti kao što su pronalazak optimalne terapije u medicini ili razvoj optimalnih strategija u ekonomiji.

Radovima akademika L.S.Pontryagina 1950-tih godina dolazi do značajnog razvoja teorije upravljanja. Pontryaginov princip maksimuma jedan je od osnovnih rezultata optimalnog upravljanja, a odnosi se na nužne uvjete optimalnosti. U sklopu diplomskog rada iskazat ćemo i dokazati nužne uvjete optimalnosti.

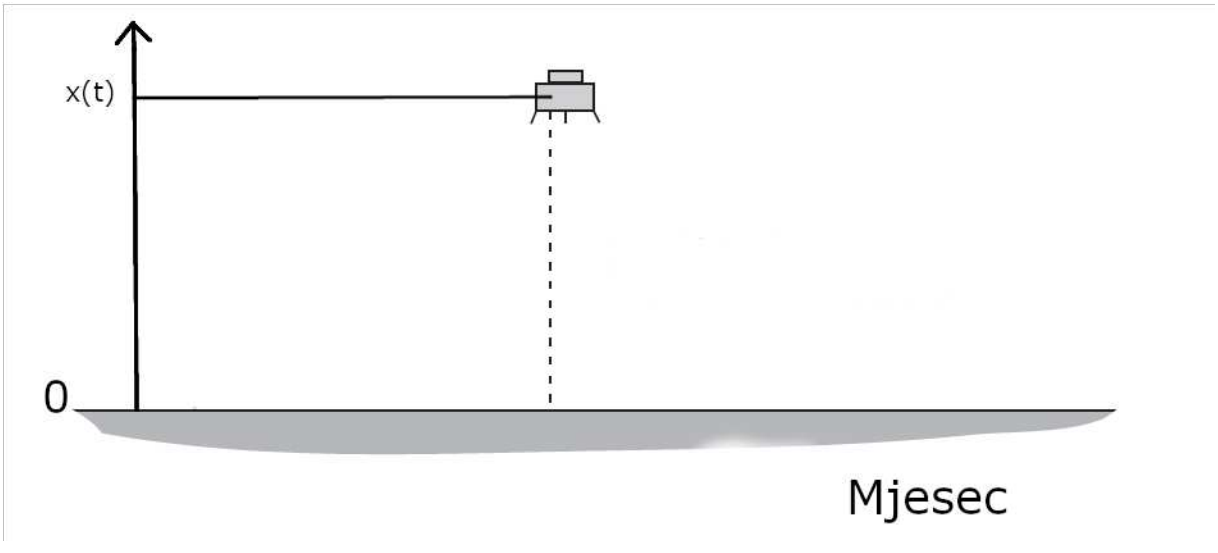
Varijacijski račun svoju primjenu pronalazi u optimalnom upravljanju, stoga se teorija varijacijskog računa koristi za zapis matematičkih problema u teoriji upravljanja. Postoje dva pristupa u rješavanju problema optimalnog upravljanja. Prvi pristup, discretize-then-optimize ili direktni pristup uzima problem optimalnog upravljanja te ga aproksimira diskretnim modelom u konačnodimenzionalnim prostorima. Optimizacija se tada radi na diskretnom modelu, odnosno traži se optimalno rješenje za diskretni model. Drugi pristup, optimize-then-discretize problem optimalnog upravljanja svodi na traženje uvjeta optimalnosti, te traženje optimalnih rješenja koja zadovoljavaju iste. Oba pristupa ćemo demonstrirati na jednostavnom modelu slijetanja na Mjesec. Metode ćemo implementirati koristeći matematički software MATLAB, a dobivene rezultate usporediti. Iskazat ćemo i nužan uvjet optimalnosti za probleme s varijabilnim vremenom, tj. pronaći konačno vrijeme i pripadnu funkciju upravljanja koje minimizira funkcional u usporedbi sa svim ostalim konačnim vremenima.

Poglavlje 1

Slijetanje letjelice na Mjesec

U ovom poglavlju uvodimo jednostavni model slijetanja na Mjesec kao primjer problema optimalnog upravljanja. Gibanje sustava iz tog primjera zapisujemo kao sustav diferencijalnih jednadžbi 1. reda. Model je preuzet iz [6].

Želimo sigurno sletjeti na Mjesec uz minimalnu potrošnju goriva. Sigurno slijetanje znači da je brzina letjelice 0 u trenutku T kada je i $x(T) = 0$ prvi puta.



Slika 1.1: Jednostavni model slijetanja na Mjesec.

Kako bismo riješili problem uvodimo sljedeće varijable:

$$\begin{aligned} &x(t)\ldots \text{ visina letjelice u trenutku } t,\\ &v(t) = \dot{x}(t)\ldots \text{ brzina letjelice u trenutku } t,\\ &m(t)\ldots \text{ masa letjelice u trenutku } t,\\ &u(t)\ldots \text{ potisak u trenutku } t. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $0 \leq u(t) \leq u_{\max}$. Ako je letjelica u slobodnom padu, tada je $u(t) = 0$, a $u(t) = u_{\max}$ u slučaju kada se koristi maksimalan potisak protiv gravitacije.

Na letjelicu djeljuje Mjesečeva gravitacijska sila $\vec{G}$ i potisna sila letjelice $\vec{F}_u$ koja pomiče letjelicu kroz zrak i u svemir. Gibanje letjelice određeno je drugim Newtonovim zakonom:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_u, \tag{1.1}$$

gdje uz dogovor da je smjer prema gore pozitivan, pripadne sile možemo modelirati kao $\vec{F}_u = u\vec{k}$ i $\vec{G} = -mg\vec{k}$. Zaključujemo da je gibanje jednodimenzionalno čime iz (1.1) imamo:

$$m\ddot{x} = -mg + u,$$

iz čega slijedi

$$\ddot{x} = -g + \frac{u}{m}.$$

Sada gibanje iz (1.1) možemo zapisati kao sustav diferencijalnih jednadžbi 1. reda s početnim uvjetima:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + \dfrac{u}{m}, & v(0) = 0 \\ \dot{x} = v, & x(0) = H > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Uz oznake

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -g + \frac{u}{m} \\ v \end{bmatrix}$$

sustav iz (1.2) možemo zapisati u obliku

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)). \tag{1.3}$$

Kako želimo minimizirati potrošnju goriva, cilj nam je pronaći funkciju upravljanja $u\colon [0, T] \to \mathbb{R}$, tako da rješenje od (1.3) zadovoljava $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$, uz minimizaciju funkcionala

$$\int_0^T u^2(t)\, dt \to \min, \tag{1.4}$$

gdje je $T > 0$ prvi trenutak u kojem je $x(T) = v(T) = 0$. Dodatno, prirodni uvjet koji se pojavljuje je:

$$x(t) > 0 \quad \text{za} \quad t \in [0, T\rangle \quad \text{i} \quad u(t) > 0.$$

Sada smo spremni za rješavanje problema sigurnog slijetanja uz minimalnu potrošnju goriva.

Poglavlje 2

Discretize-then-optimize

U ovom poglavlju riješit ćemo problem sigurnog slijetanja na Mjesec uz minimalnu potrošnju goriva pomoću pristupa discretize-then-optimize. U tom pristupu ideja je prvo konstruirani problem aproksimirati diskretnim te onda tražiti rješenje dobivenog diskretnog modela. Prethodni problem optimalnog upravljanja svesti ćemo na problem kvadratičnog programiranja i riješiti ga koristeći matematički software MATLAB.

2.1 Trapezna formula za numeričku integraciju

Na početku poglavlja uvodimo trapeznu formulu kao najjednostavniju formulu za numeričko integriranje, a nju ćemo koristiti u 3. koraku pristupa. Formula je izvedena po uzoru na [4].

Želimo izračunati integral funkcije f na intervalu $[a, b]$. Slika 2.1 nas upućuje na sljedeće: ako kroz $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ povučemo linearni interpolacijski polinom, a zatim ga egzaktno integriramo od a do b, dobit ćemo trapeznu formulu.

Interpolacijski polinom stupnja 1 koji prolazi kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ je

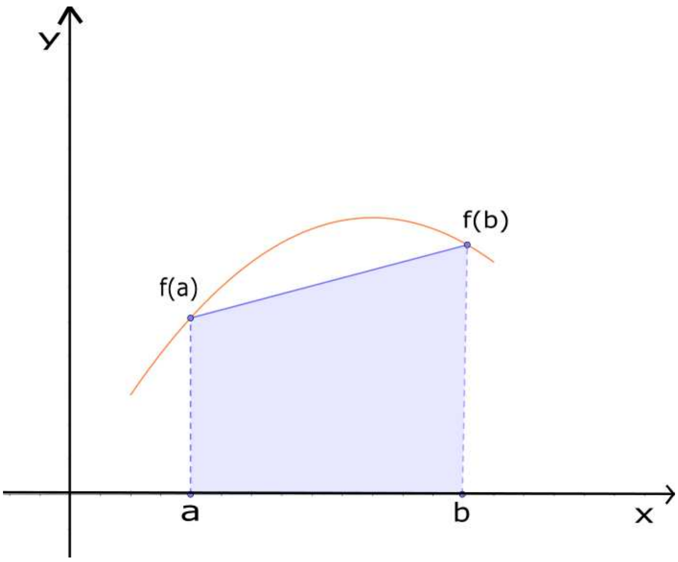
$$p_1(x) = f(a) + f[a, b](x - a).$$

Njegov integral na $[a, b]$ je

$$\begin{aligned}\int_a^b p_1(x)\,dx &= \Big(f(a)x - af[a,b]x + f[a,b]\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_a^b \\ &= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f[a,b] = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$I(f) = \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big). \tag{2.1}$$



Slika 2.1: Trapezna formula.

Kako bismo smanjili pogrešku prilikom aproksimacije, cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala oblika $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$, s tim da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

i na svakom od njih primijenimo trapeznu formulu (2.1).

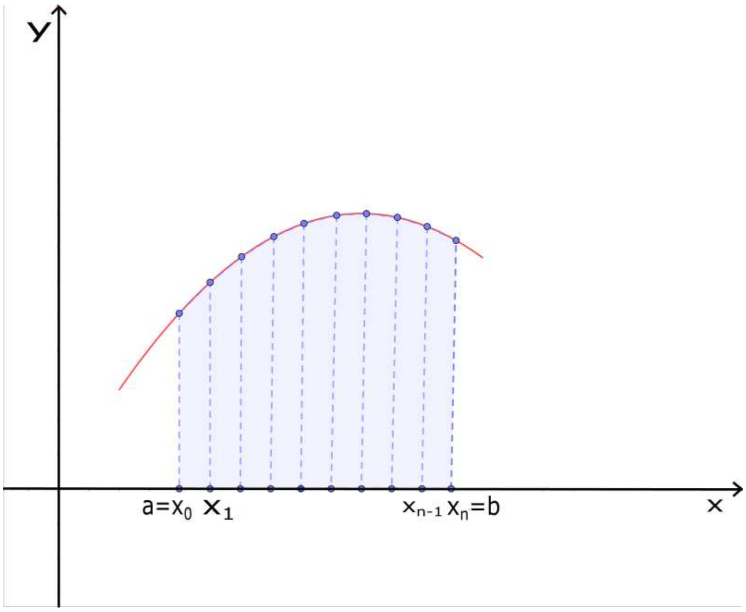
Najjednostavniji je slučaj kad su točke x_k ekvidistantne, tj. kad je svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ iste duljine h (Slika 2.2). To znači da je

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Uz dodatnu pretpostavku da je $f \in C([a, b])$, imamo

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\Big(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\Big), \tag{2.2}$$

gdje su $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.



Slika 2.2: Produljena trapezna formula.

Sada smo spremni provesti pristup discretize-then-optimize.

2.2 Discretize-then-optimize na problemu slijetanja letjelice na Mjesec

Radi jednostavnosti definiramo konačno vrijeme T, te mičemo restrikciju na gornju ogradu funkcije upravljanja u.

Pristup provodimo u 3 koraka:

1. **korak:** definiramo uniformnu mrežu intervala.

   Neka je n ukupan broj intervala na koje ćemo podijeliti segment $[0, T]$.

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t = \frac{T}{n}$$

   Tražimo nepoznate funkcije $v, x, u\colon [0, T] \to \mathbb{R}$, odnosno vrijednosti funkcija u točkama t_i, $i = 0, \ldots, n$:

$$v_i = v(t_i), \quad x_i = x(t_i), \quad u_i = u(t_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

2. **korak:** implicitna diskretizacija sustava diferencijalnih jednadžbi (1.2).
$$\begin{cases} \dfrac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} = -g + \dfrac{u_{i+1}}{m} \\ \dfrac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = v_{i+1} \end{cases}, \quad i = 0, \dots, n \tag{2.3}$$
uz rubne uvjete
$$\begin{cases} v_0 = 0 & v_n = 0 \\ x_0 = H & x_n = 0. \end{cases}$$
Pritom uzimamo u obzir da je
$$x_i \geq 0, \quad u_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, n. \tag{2.4}$$

3. **korak:** trapezna formula.
Prema (2.2)
$$\int_0^T u^2(t)\, dt \approx \frac{\Delta t}{2}\Big(u_0^2 + 2u_1^2 + \cdots + 2u_{n-1}^2 + u_n^2\Big) \to \min \tag{2.5}$$

Napomena 2.2.1. *Istaknimo da u implicitnoj shemi, u_0 ne ulazi u linearni sustav (2.3), odnosno uz jedini uvjet $u_0 \geq 0$ i (2.5) vidimo da je $u_0 = 0$.*

2.3 Kvadratično programiranje

Problem kvadratičnog programiranja je optimizacijski problem u kojem se minimizira kvadratna funkcija cilja, a ograničenja su zadana afinim funkcijama.

Označimo s
$$r = [v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u_1, u_2, \dots, u_n].$$
Tada (2.3) definira jednakost $A_{eq} r = b_{eq}$ pri čemu su matrice A_{eq} i b_{eq} sljedećeg oblika:
$$A_{eq} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
m & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\Delta t & 0 & \cdots & 0 \\
-m & m & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & m & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & -m & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\Delta t \\
-\Delta t & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & -\Delta t & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right) \quad i \quad b_{eq} = \begin{pmatrix} -gm\Delta t \\ \vdots \\ \vdots \\ -gm\Delta t \\ H \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prirodni uvjeti (2.4) kažu da je $x_i \geq 0$, $u_i \geq 0$ što zapisujemo kao nejednakost $Ar \leq b$.

Stoga se problem slijetanja letjelice na Mjesec može interpretirati kao kvadratično programiranje, tj.

$$\min_r \frac{1}{2} r^T K r \quad \text{tako da} \quad \begin{cases} Ar \leq b \\ A_{eq} r = b_{eq} \end{cases} \tag{2.6}$$

Rješenje ćemo pronaći uz pomoć programskog jezika MATLAB [1].

MATLAB nudi mogućnost rješavanja kvadratnog programiranja pomoću funkcije `quadprog` koja pronalazi minimum problema zadanog s

$$\min_r \frac{1}{2} r^T K r + f^T r \quad \text{tako da} \quad \begin{cases} Ar \leq b \\ A_{eq} r = b_{eq}, \end{cases} \tag{2.7}$$

gdje su K, A i A_{eq} matrice, a f, b, b_{eq} i r vektori. Poziv funkcije za rješavanje našeg problema je $r = \texttt{quadprog}(K, f, A, b, A_{eq}, b_{eq})$.

Na početku je potrebno definirati prikladne konstante:

```
T=5.48; %vremenski interval [0,T] kojeg promatramo
m=1; %masa
n=100; %broj podintervala na koji dijelimo [0,T]
dt=T/n;
g=10; %gravitacija
H=50; %pocetna visina
```

Uvrštavanjem $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ u (2.3), matrice i vektore iz (2.7) definiramo s

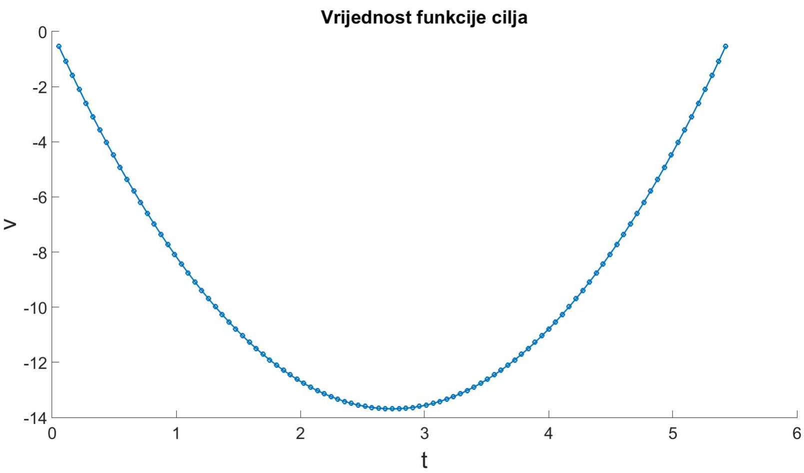
```
Aeq=zeros(2*n,3*n-2);
for i = 1 : n-1
    Aeq(i,i)= m;
    Aeq(i+1,i) = -m;
    Aeq(i, 2*n -1 + i -1) = -dt;
end
for i= n+1 : 2*n -1
    Aeq(i,i-n) = -dt;
    Aeq(i, i-1) = 1;
    Aeq(i+1,i-1) = -1;
end
Aeq(n, 2*n -1 + n -1) = -dt;

A=zeros(2*n-1,3*n-2);
A(1:(2*n-1),n:3*n-2)=eye(2*n-1);
A=-A;
```

```
K=zeros(3*n-2,3*n-2);
K(2*n-1:(3*n-2),2*n-1:(3*n-2))=dt*eye(n);

f=zeros(3*n-2,1);

beq=zeros(2*n,1);
for i=1 : n
    beq(i,1)= -g*m*dt;
end
beq(n+1, 1) = H;
b=zeros(2*n-1,1);
r=quadprog(K,f,A,b,Aeq,beq);
```

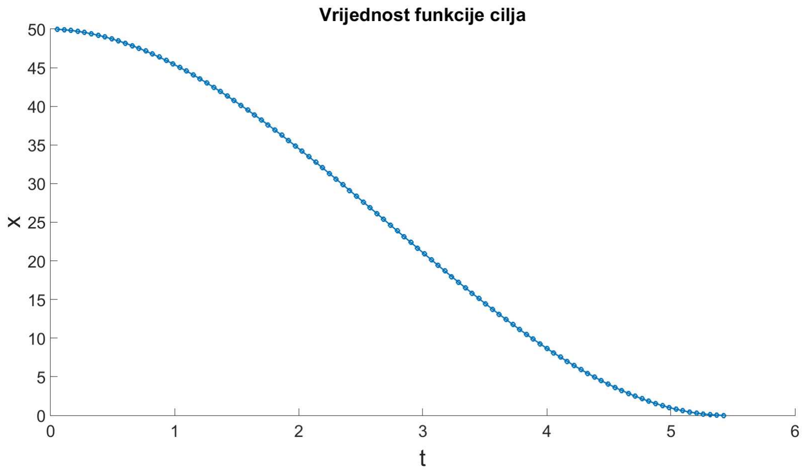
Pritom su v, x, u spremljeni u vektoru r:

```
v=r(1:n-1);
x=r(n:2*n-2);
u=r(2*n-1:3*n-2);
```

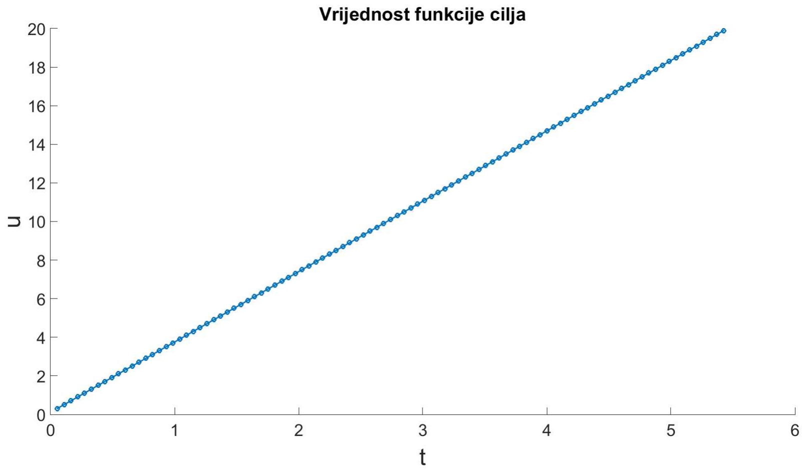
Njihovi grafovi prikazani su na slikama ispod.



Slika 2.3: Brzina letjelice v.



Slika 2.4: Visina letjelice x.



Slika 2.5: Funkcija upravljanja u.

Prethodni postupak je dao dosta dobre rezultate, s obzirom na to da smo interval podijelili na samo 100 dijelova. Istaknimo kako dobiveni sustav numerički diskretnih diferencijanih jednadžbi (2.3) ne mora biti linearan. Tada je prikladno koristiti druge metode, poput metode unutrašnje točke kroz automatizirani software (vidi [3]).

Poglavlje 3

Optimize-then-discretize

Na samom početku uvodimo pojmove i rezultate preuzete iz [7] koje ćemo koristiti u nastavku poglavlja.

Definicija 3.0.1. *Funkcional J je takvo preslikavanje koje svakoj funkciji iz klase funkcija* Ω *pridružuje realan broj, odnosno*

$$\begin{aligned} J\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ y &\to J(y). \end{aligned}$$

Navodimo primjere normi i pripadnih normiranih prostora:

- $C[a,b]$ je prostor svih neprekidnih funkcija $y = y(x)$ definiranih na segmentu $[a,b]$. Na njemu definiramo normu

  $$\|y\|_0 = \max_{a\le x\le b} |y(x)|.$$

  Okolinu funkcije y^* definiramo izrazom

  $$\|y - y^*\|_0 \le \delta, \quad \text{gdje je} \quad \delta > 0, \tag{3.1}$$

  koji označuje skup svih funkcija y čiji graf leži unutar trake širine 2δ oko grafa funkcije y^*.

- $C^1[a,b]$ je prostor svih funkcija $y = y(x)$ definiranih na segmentu $[a,b]$ koje su neprekidne i imaju neprekidne prve derivacije na segmentu $[a,b]$. Na njemu definiramo normu

  $$\|y\|_1 := \max_{a\le x\le b} |y(x)| + \max_{a\le x\le b} |y'(x)|.$$

3.1 Varijacija funkcionala

Neka je J funkcional definiran na normiranom prostoru X. Promatramo prirast $\Delta J(y,h)$ funkcionala J koja odgovara promjeni $h \in X$ neovisne varijable $y \in X$, odnosno

$$\Delta J(y,h) = J(y+h) - J(y).$$

Fiksiramo y. Tada je ΔJ funkcional od h, koji je u osnovi nelinearan.

Definicija 3.1.1. *Linearan funkcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ je ograničen ako postoji konstanta C takva da za svaki $h \in X$ vrijedi $|\phi(h)| \leq C|h|$.*

Definicija 3.1.2. *Ako je*

$$\Delta J(y,h) = \delta J(y,h) + o(h),$$

gdje je $h \mapsto \delta J(y;h)$ linearan i ograničen funkcional i

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{o(h)}{||h||} = 0,$$

onda kažemo da je J diferencijabilan u točki y. Funkcional δJ zovemo prva varijacija funkcionala J u točki y.

Sljedeću lemu koristiti ćemo u dokazu jedinstvenosti prve varijacije δJ.

Lema 3.1.3. *Ako je ϕ linearan funkcional i ako vrijedi*

$$\frac{\phi(h)}{||h||} \to 0 \quad \textit{kada} \quad ||h|| \to 0, \tag{3.2}$$

tada je $\phi(h) = 0$ za svaki h.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka vrijedi (3.2) i neka je $\phi(h_0) \neq 0$ za neki $h_0 \neq 0$. Neka je

$$h_n := \frac{h_0}{n} \quad \text{i} \quad \lambda := \frac{\phi(h_0)}{||h_0||} \neq 0.$$

Primijetimo da $||h_n|| \to 0$ kada $n \to \infty$. Međutim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(h_n)}{||h_n||} = \frac{n\phi(h_0)}{n||h_0||} = \lambda \neq 0$$

što je u kontradikciji s (3.2). □

Teorem 3.1.4. *Prva varijacija diferencijabilnog funkcionala je jedinstvena.*

Dokaz. Neka je funkcional $J : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilan u točki $y \in X$ i pretpostavimo da vrijedi

$$\Delta J(y,h) = \varphi_1(h) + o_1(h)$$
$$\Delta J(y,h) = \varphi_2(h) + o_2(h),$$

gdje su φ_1 i φ_2 linearni funkcionali u h i

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{o_1(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{o_2(h)}{\|h\|} = 0.$$

Iz toga slijedi da je

$$\varphi_1(h) - \varphi_2(h) = o_1(h) - o_2(h).$$

Dijeljenjem s $\|h\|$ i puštanjem $\|h\| \to 0$

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\varphi_1(h) - \varphi_2(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{o_1(h) - o_2(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{o_1(h)}{\|h\|} - \lim_{\|h\|\to 0} \frac{o_2(h)}{\|h\|} = 0.$$

Primjenom Leme 3.1.3 zaključujemo da vrijedi $\varphi_1(h) - \varphi_2(h) = 0$ za svaki h čime je tvrdnja dokazana. □

Primjer 3.1.5. *Neka je $J : C[a,b] \to \mathbb{R}$ dan s $J(y) = \int_a^b y^2(t)\,dt$. Odredimo prvu varijaciju funkcionala J u točki $y \in C[a,b]$.*

Promotrimo prirast $\Delta J(y,h)$ funkcionala J

$$\Delta J(y,h) = J(y+h) - J(y) = \int_a^b \Big((y+h)^2(t) - y^2(t)\Big)\,dt = \int_a^b \Big(2y(t)h(t) + h^2(t)\Big)\,dt =$$
$$= \int_a^b 2y(t)h(t)\,dt + \int_a^b h^2(t)\,dt.$$

Znamo $|h(t)| \leq \|h\|_0$, $t \in [a,b]$, odakle slijedi da je $h^2(t) \leq \|h\|_0^2$, $t \in [a,b]$. Time dobivamo da je

$$\left| \int_a^b h^2(t)\,dt \right| \leq \int_a^b \|h\|_0^2\,dt = (b-a)\|h\|_0^2,$$

odnosno

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\left| \int_a^b h^2(t)\,dt \right|}{\|h\|} \leq \lim_{\|h\|\to 0} \frac{(b-a)\|h\|_0^2}{\|h\|_0} = 0,$$

čime je

$$\int_a^b h^2(t)\,dt = o(h).$$

Stoga je s $h \mapsto \int_a^b 2y(t)h(t)\,dt$ dana prva varijacija funkcionala J u točki y.

Primjer 3.1.6. *Neka je $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klase C^1 i $J : y \mapsto \int_a^b F(y(t))\,dt$. Odredimo prvu varijaciju funkcionala J u točki y.*

$$J(y+h) - J(y) = \int_a^b \Big(F((y+h)(t)) - F(y(t))\Big)\,dt, \quad \textit{a kako je}$$
$$F(y(t)+h(t)) - F(y(t)) = h(t)F'(c_t), \quad c_t \in \langle y(t), y(t)+h(t)\rangle, \quad \textit{imamo}$$
$$J(y+h) - J(y) = \int_a^b h(t)F'(c_t)\,dt.$$

Vrijedi

$$\left|J(y+h) - J(y) - \int_a^b h(t)F'(y(t))\,dt\right| = \int_a^b \Big|h(t)F'(c_t) - h(t)F'(y(t))\Big|\,dt$$
$$\leq \|h\| \int_a^b \Big|F'(c_t) - F'(y(t))\Big|\,dt.$$

Kako je $K_y = [-\|y\|_0 - 1, \|y\|_0 + 1]$ kompaktan skup, a F' je neprekidna na K_y, onda je i uniformno neprekidna, odnosno BSOMP

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \langle 0,1\rangle \quad \textit{t.d.} \quad \|h\| < \delta \quad (\textit{specijalno } |c_t - y(t)| < \delta,\ t \in [a,b])$$
$$\Longrightarrow \Big|F'(c_t) - F'(y(t))\Big| < \epsilon.$$

Sada imamo

$$J(y+h) - J(y) - \int_a^b h(t)F'(y(t))\,dt = o(h)$$

pa je tražena prva varijacija funkcionala $\delta J(y,h) = \int_a^b h(t)F'(y(t))\,dt$.

Promotrimo sada funkcije na konačnodimenzionalnom prostoru.

Definicija 3.1.7. *Neka je $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ako postoji okolina Ω točke $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ takva da je*

$$\Delta F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \geq 0, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$$

kažemo da u točki $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ funkcija F ima lokalni minimum. Ukoliko je

$$\Delta F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leq 0, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$$

kažemo da u točki $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ funkcija F ima lokalni maksimum.

U ovisnosti o prostoru ($C[a,b]$ ili $C^1[a,b]$) nad kojim smo, definiramo dvije vrste ekstrema.

Definicija 3.1.8. *Kažemo da funkcional J ima slabi ekstrem y^* ako postoji $\delta > 0$ takav da ako je $\|y - y^*\|_1 < \delta$, onda razlika $J(y) - J(y^*)$ ima isti predznak.*
Kažemo da funkcional J ima jaki ekstrem y^* ako postoji $\delta > 0$ takav da ako je $\|y - y^*\|_0 < \delta$, onda razlika $J(y) - J(y^*)$ ima isti predznak.

Napomena 3.1.9. *Primijetimo, $\|y-y^*\|_1 < \delta \implies \|y-y^*\|_0 < \delta$. Stoga je svaki jaki ekstrem ujedno i slabi. Obrat ne vrijedi.*

Teorem 3.1.10. *(Nužan uvjet za lokalni ekstrem). Neka $J : X \to \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem $y^* \in X$ i neka je diferencijabilan u y^*. Tada je*

$$\delta J(y^*, h) = 0 \tag{3.3}$$

za svaki $h \in X$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da J ima minimum y^*, tj. da je $\Delta J(y^*, h) \geq 0$ za dovoljno male h. Imamo

$$\Delta J(y^*, h) = \delta J(y^*, h) + o\|h\|$$

gdje $\frac{o(h)}{\|h\|} \to 0$ kada $\|h\| \to 0$. Primijetimo da za dovoljno male $\|h\|$ vrijedi

$$\operatorname{sign}(\Delta J(y^*, h)) = \operatorname{sign}(\delta J(y^*, h)).$$

Pretpostavimo da je $\delta J(y^*, h_0) \neq 0$ za neki h_0. Tada za svaki $\alpha > 0$

$$\delta J(y^*, -\alpha h_0) = -\alpha \delta J(y^*, h_0)$$

zbog linearnosti od δJ. Dakle za dovoljno mali α (odnosno dovoljno mali $\|h\| = \|\alpha h_0\|$), ΔJ može biti bilo kojeg predznaka što je u kontradikciji s $\Delta J \geq 0$. □

Napomena 3.1.11. *Primijetimo da je Teorem 3.1.10 poopćenje sljedećeg rezultata poznatog pod nazivom Fermatova lema: ako funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima ekstrem u točki $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, onda je $\nabla F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \mathbf{0}$.*

3.2 Euler-Lagrangeove jednadžbe

Promatramo problem minimizacije funkcionala

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, \dot{y})\, dx \tag{3.4}$$

uz rubne uvjete

$$y(a) = y_a,$$
$$y(b) = y_b,$$

gdje su $y_a, y_b \in \mathbb{R}$, dok za domenu uzimamo skup

$$\mathcal{Y} = \Big\{ y \in C^1\big([a,b];\mathbb{R}^N\big) : y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \Big\}. \tag{3.5}$$

Napomena 3.2.1. *Primijetimo: za ekstrem $y \in \mathcal{Y}$ i čvrsti $h \in \Big\{h \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N) : h(a) = h(b) = \mathbf{0}\Big\}$ realna funkcija realne varijable $\epsilon \mapsto J(y + \epsilon h)$ postiže lokalni ekstrem u 0. To nas navodi na sljedeću definiciju.*

Definicija 3.2.2. *Kažemo da je $y \in \mathcal{Y}$ ekstremala ili stacionarna točka funkcionala J ako za svaki $h \in \Big\{h \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N) : h(a) = h(b) = \mathbf{0}\Big\}$ vrijedi*

$$\frac{d}{d\epsilon} J(y + \epsilon h)\Big|_{\epsilon=0} = 0.$$

Napomena 3.2.3. *(Povezanost definicije s Teoremom 3.1.10). $\frac{d}{d\epsilon} J(y + \epsilon h)\Big|_{\epsilon=0}$ je derivacija u smjeru h i može postojati čak i ako $\delta J(y, h)$ ne postoji. S druge strane $\delta J(y, h) = 0$ povlači da je y ekstremala.*

Sljedeći rezultat preuzet je iz [5].

Teorem 3.2.4. *(Euler-Lagrangeove jednadžbe). Neka je $F \in C^1\big([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N\big)$. Definiramo funkcional $J \colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ s (3.4), gdje je domena $\mathcal{Y}$ dana s (3.5).*
Funkcija $y \in \mathcal{Y}$ je ekstremala funkcionala J ako i samo ako je zadovoljena sljedeća Euler-Lagrangeova jednadžba

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad i = 0, \ldots, n. \tag{3.6}$$

3.3 Funkcionali koji uključuju varijabilne rubne uvjete

Funkcionali sljedećeg oblika često se pronalaze u problemima optimalnog upravljanja. Promatramo funkcional

$$J(y) = \varphi\big(y(a), y(b)\big) + \int_a^b F(x, y, \dot{y})\, dx$$

gdje su rubni uvjeti $y(a), y(b)$ varijabilni, a φ je neprekidno diferencijabilna u svojim argumentima. Želimo pronaći $y \in C^1[a,b]$ za koji J ima ekstrem.

Na početku navodimo lemu koju ćemo koristiti u daljnjim rezultatima.

Lema 3.3.1. *(Osnovna lema varijacijskog računa). Neka je $F \in C([a,b];\mathbb{R}^N)$. Ako za svaki $h \in \left\{h \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N) : h(a) = h(b) = \mathbf{0}\right\}$ vrijedi*

$$\int_a^b F(t)h(t)\,dt = 0,$$

onda je $F = 0$ na $[a,b]$.

Promatramo prirast $h \in C^1[a,b]$ funkcije $y \in C^1[a,b]$ pri čemu vrijednosti $h(a)$ i $h(b)$ nisu poznate.

$$\begin{aligned}\Delta J(y,h) &= J(y+h) - J(y)\\ &= \varphi\Big(y(a)+h(a), y(b)+h(b)\Big) - \varphi\Big(y(a), y(b)\Big) + \int_a^b F\Big(x, y(x)+h(x), \dot{y}(x)+\dot{h}(x)\Big)\,dx\\ &- \int_a^b F\Big(x, y(x), \dot{y}(x)\Big)\,dx\end{aligned}$$

Po uzoru na Primjer 3.1.6 možemo dokazati da vrijedi

$$\begin{aligned}\Delta J(y,h) &= \delta J(y,h) + o(h), \quad \text{gdje} \quad \frac{o(h)}{\|h\|_1} \to 0, \quad \text{za} \quad \|h\| \to 0\\ \text{i} \quad \delta J(y,h) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_a}\Big(y(a), y(b)\Big)h(a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_b}\Big(y(a), y(b)\Big)h(b)\\ &+ \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\Big(x, y(x), \dot{y}(x)\Big)h(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Big(x, y(x), \dot{y}(x)\Big)\dot{h}(x)\right)dx\end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned}\delta J(y,h) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y_a}\Big(y(a), y(b)\Big)h(a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y_b}\Big(y(a), y(b)\Big)h(b)\\ &+ \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\Big(x, y(x), \dot{y}(x)\Big) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Big(x, y(x), \dot{y}(x)\Big)\right)h(x)\,dx\\ &- \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Big(a, y(a), \dot{y}(a)\Big)h(a) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Big(b, y(b), \dot{y}(b)\Big)h(b).\end{aligned}$$

Ako je y ekstremala, onda je $\delta J(y,h) = 0$. Uz odabir $h \in C^1[a,b]$ t.d. $h(a) = h(b) = 0$ po Lemi 3.3.1 slijedi Euler-Lagrangeova jednadžba. Sada za proizvoljni h dobivamo nove rubne uvjete

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y_a}(y(a), y(b)) - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(a, y(a), \dot{y}(a)) = 0\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_b}(y(a), y(b)) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(b, y(b), \dot{y}(b)) = 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

3.4 Bezuvjetna optimizacija

Promotrimo problem optimalnog upravljanja

$$\min_{x(\cdot),u(\cdot)} J(x,u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t),u(t),t)\,dt \tag{3.8}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \quad \forall t \in [t_0,t_f], \tag{3.9}$$

gdje su:

$$\begin{aligned}
&x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \ldots \text{vektor stanja},\\
&x_i \in C^1([t_0,t_f];\mathbb{R}) \ldots \text{varijable stanja},\\
&u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) \ldots \text{vektor upravljanja},\\
&u_i \in C^1([t_0,t_f];\mathbb{R}) \ldots \text{varijable upravljanja},
\end{aligned}$$

a f_0 i f imaju neprekidne prve derivacije na svojim argumentima. Primijetimo da funkcional iz (3.8) i funkcional iz (3.4) imaju isti oblik, gdje x, y i F iz (3.4) odgovaraju redom $t, (x,u)$ i f_0 u (3.8) uz $t_0 = a$ i $t_1 = b$. Temeljna razlika između dva navedena problema je obična diferencijalna jednadžba (3.9) kojom je ograničena (3.8), a koju možemo zapisati i kao

$$f(x(t),u(t),t) - \dot{x}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0,t_f].$$

Definicija 3.4.1. *Problem optimalnog upravljanja* (3.8) — (3.9) *nazivamo bezuvjetnim problemom optimalnog upravljanja.*

Napomena 3.4.2. *Iako je ograničenje prisutno, Definicija 3.4.1 je smislena jer osim* (3.9) *nemamo druga ograničenja na varijable stanja niti upravljanja.*

Često želimo uvjetnu optimizaciju svesti na bezuvjetnu kako bismo mogli primijeniti standardne tehnike bezuvjetne optimizacije. Svođenje provodimo uvođenjem Lagrangeovog multiplikatora, tj.

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}(x,y,u) &= \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t),u(t),t)\,dt + \int_{t_0}^{t_f} y(t)\cdot[f(x(t),u(t),t) - \dot{x}(t)]\,dt\\
&= \int_{t_0}^{t_f} \Big\{f_0(x(t),u(t),t) + y(t)\cdot[f(x(t),u(t),t) - \dot{x}(t)]\Big\}\,dt,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

gdje $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ zovemo adjungirani vektor, a $y_i\colon [t_0,t_f] \to \mathbb{R}$ adjungirane varijable čije su prve derivacije neprekidne.

Sada s funkcionalom iz (3.10) možemo postupati na jednak način kao i s funkcionalom iz (3.4). Također, slučaj (3.6) možemo svesti na oblik (3.10) gdje se traži ekstrem $z =$

(x, y, u). Primijetimo da je uz zamjenu y iz (3.4) s (x, y, u) potrebno zamijeniti neovisnu varijabu x s neovisnom varijablom t. Tada rješenje Euler-Lagrangeove jednadžbe (3.6) daje uvjete za određivanje ekstrema neograničenog problema optimalnog upravljanja (3.8) — (3.9).

3.5 Nužni uvjeti optimalnosti

Funkcional $\widetilde{J}$ iz (3.10) možemo zapisati kao

$$\widetilde{J}(x, y, u) = \int_{t_0}^{t_f} \widetilde{F}\Big(x(t), \dot{x}(t), y(t), u(t), t\Big)\, dt,$$

gdje je

$$\widetilde{F}(x, \dot{x}, y, u, t) = f_0(x, u, t) + y \cdot [f(x, u, t) - \dot{x}]. \tag{3.11}$$

Definiramo Hamiltonov funkcional:

$$H(x, y, u, t) := f_0(x, u, t) + y \cdot f(x, u, t). \tag{3.12}$$

Sada (3.11) postaje

$$\widetilde{F}(x, \dot{x}, y, u, t) = H(x, y, u, t) - y \cdot \dot{x}.$$

Neka je $z := (x, y, u)$, odnosno $\dot{z} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{u})$ i neka je $F(z, \dot{z}, t) = \widetilde{F}(x, \dot{x}, y, u, t)$. Euler-Lagrangeova jednadžba (3.6) uz navedene z i F poprima oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n + m \tag{3.13}$$

odnosno po komponentama

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \iff \nabla_x H + \dot{y} = 0,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \iff \nabla_y H - \dot{x} = 0,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u_i} &= 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \iff \nabla_u H = 0
\end{aligned}$$

od kojih prve dvije jednadžbe nazivamo adjungiranim jednadžbama. Ovime smo dobili nužne uvjete optimalnosti za problem optimalnog upravljanja (3.8) — (3.9) koji su zadani sljedećim algebarskim diferencijanim jednadžbama:

$$\dot{y} = \nabla_x H, \tag{3.14}$$

$$\dot{x} = \nabla_y H, \tag{3.15}$$

$$\nabla_u H = 0. \tag{3.16}$$

Rubne uvjete za ove jednadžbe dobivamo iz rubnih uvjeta za funkcionale koji uključuju varijabilne rubne uvjete, odnosno iz (3.7):

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0} = y(t_0) = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_f} = y(t_f) = 0. \tag{3.17}$$

Rubni uvjeti mogu se pojaviti u sljedećim oblicima:

(i) $x(t_0) = x_0$ i $x(t_f) = x_f$ (x_0 i x_f su zadane)

(ii) $x(t_0) = x_0$ i $y(t_f) = 0$ (zadana je samo x_0)

(iii) $y(t_0) = 0$ i $x(t_f) = x_f$ (zadana je samo x_f)

(iv) $y(t_0) = 0$ i $y(t_f) = 0$ (nisu zadane ni x_0, ni x_f)

Kada kažemo da su rubne točke zadane, mislimo na to da su fiksirane, a kada nisu zadane to znači da su varijabilne, odnosno slobodne.

Nužne uvjete (3.14) — (3.16) možemo zapisati i kao

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{3.18}$$
$$-\dot{y} = \nabla_x f_0 + y \cdot \nabla_x f, \tag{3.19}$$
$$0 = \nabla_u f_0 + y \cdot \nabla_u f. \tag{3.20}$$

Navedene jednadžbe zajedno s jednim od četiri navedena rubna uvjeta predstavljaju rubni problem. Rubni problemi su često vrlo teški za riješiti. U mnogim slučajevima se (3.20) može riješiti za u u treminima varijable stanja x i pridružene varijable y tako da je $u = \phi(x, \psi, t)$. Supstitucijom u sa $\phi(x, y, t)$ u jednadžbama (3.18) i (3.19) dobivamo rubni problem koji je zadan samo s diferencijalnim jednadžbama (3.18) i (3.19).

Nužni uvjeti optimalnosti za primjer slijetanja letjelice na Mjesec

Prisjetimo se problema: želimo sigurno sletjeti na Mjesec uz minimalnu potrošnju goriva. Gibanje sustava je opisano diferencijalnim jednadžbama 1. reda s početnim uvjetima:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g + \dfrac{u}{m}, & v(0) = 0, & v(T) = 0 \\ \dot{x} = v, & x(0) = H > 0, & x(T) = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

dok nam je cilj pronaći funkciju upravljanja $u\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava navedene jednadžbe i rubne uvjete uz minimizaciju funkcionala

$$\int_0^T u^2(t)\, dt \to \min .$$

Pritom mičemo uvjete $u \geq 0,\ x \geq 0$.

Zapišimo Hamiltonov funkcional (3.12):

$$H(v, x, y_1, y_2, u) := u^2 + y_1\Big(-g + \frac{u}{m}\Big) + y_2 v. \tag{3.22}$$

Nužne uvjete optimalnosti dobivamo iz (3.14) — (3.16):

$$\begin{cases} \nabla_v H + \dot{y}_1 = 0 & \Longrightarrow \quad \dot{y}_1 = -y_2 \\ \nabla_x H + \dot{y}_2 = 0 & \Longrightarrow \quad \dot{y}_2 = 0 \\ \nabla_u H = 0 & \Longrightarrow \quad u = -\dfrac{y_1}{2m} \end{cases}$$

Uvrstimo li $u = -\frac{y_1}{2m}$ u početne jednadžbe (3.21) dobivamo da je $\dot{v} = -g - \frac{y_1}{2m^2}$. Zbog sigurnog slijetanja imamo da je $v(T) = 0$ kada $x(T) = 0$ prvi puta. Stoga naš rubni problem poprima sljedeći oblik:

$$\begin{cases} \dot{v} = -g - \dfrac{y_1}{2m^2}, & v(0) = 0, & v(T) = 0 \\ \dot{x} = v, & x(0) = H, & x(T) = 0 \\ \dot{y}_1 = -y_2 \\ y_2 = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

Rješenje ćemo pronaći koristeći numeričku metodu gađanja i njenu implementaciju u MATLAB-u.

3.6 Metoda gađanja

U ovom odjeljku opisujemo jednostavnu metodu gađanja kao numeričku metodu za rješavanje rubnog problema u kojoj rubni problem svodimo na inicijani. Metodu ćemo objasniti na primjeru rubnog problema slijetanja letjelice na Mjesec.

Na početku definiramo funkciju Y takvu da je

$$Y = (v, x, y_1, y_2), \quad \dot{Y} = f(Y)$$

i proglasimo

$$y_1(0) = a, \quad y_2(0) = b.$$

Također, neka je $t \mapsto Y(t; 0, H, a, b)$ rješenje sustava (3.23) uz početni uvjet $(0, H, a, b)$. Variranjem a i b tražimo da je

$$Y_1(T; a, b) = Y_2(T; a, b) = 0.$$

Definiramo

$$F(a,b) = \left(Y_1(T;a,b), Y_2(T;a,b)\right)^T$$

odakle slijedi da moramo naći rješenje $s = \begin{bmatrix} s_1, & s_2 \end{bmatrix}^T$ jednadžbe

$$F(s) = 0.$$

Rješenje jednadžbe može se izračunati Newtonovom metodom

$$s^{(i+1)} = s^{(i)} - DF(s^{(i)})^{-1} F(s^{(i)})$$

preuzetom iz [2].

U svakoj iteraciji Newtonove metode moramo

- naći rješenje $Y(t;s^{(i)})$ inicijalnog problema $\dot{Y} = f(Y)$, $Y_1(0) = 0$, $Y_2(0) = H$, $Y_3(0) = s_1^{(i)}$, $Y_4(0) = s_2^{(i)}$,
- izračunati $F(s^{(i)})$,
- izračunati $DF(s^{(i)})$ ili neku njegovu aproksimaciju,
- riješiti sustav linearnih jednadžbi
$$DF(s^{(i)})\, d^{(i)} = -F(s^{(i)}),$$
- napraviti korak $s^{(i+1)} = s^{(i)} + d^{(i)}$.

$DF(s^{(i)})$ aproksimiramo pomoću konačnih razlika

$$\Delta F(s) = [\Delta_1 F(s), \Delta_2 F(s)], \quad \text{gdje su}$$

$$\Delta_1 F(s) = \frac{F(s_1 + \Delta s_1, s_2) - F(s_1, s_2)}{\Delta s_1} \quad \text{i} \quad \Delta_2 F(s) = \frac{F(s_1, s_2 + \Delta s_2) - F(s_1, s_2)}{\Delta s_2}.$$

Pogledajmo sada kako navedena metoda izgleda implementirana u MATLABU-u. Kao i u metodi discretize-then-optimize, najprije je potrebno definirati prikladne konstante:

```
g=10; %gravitacija
m=1; %masa
H=50; %pocetna visina
T=5.48; %vremenski interval [0,T] kojeg promatramo
EPS=1e-2; %mala vrijednost potrebna kod diskretne
   aproksimacije DF
y0=[0 H 0 0]; % pocetni uvjet uz a=0, b=0
s=[0,0]; %inicijalni pocetni uvjet(a=0, b=0)
tspan=[0 T];
```

Zatim, počevši od startnih točaka iterativno gradimo neki niz aproksimacija (u našem primjeru broj iteracija ograničili smo s 1000).

U svakoj iteraciji radimo sljedeće:

```
y0=[0 H s];
[t,y]=ode45(@(t,y)RHS1(t,y,g,m),tspan,y0);
```

Postavili smo početni uvjet y_0 kojeg ćemo mijenjati kroz iteracije, a pomoću `ode45` rješavamo sustav diferencijalnih jednadžbi 1. reda tako da pošaljemo desnu stranu sustava označenu s $RHS1$:

```
function dydt=RHS1(t,y,g,m)
dydt=zeros(4,1);
dydt(1)=-g-y(3)/(2*m^2);
dydt(2)=y(1);
dydt(3)=-y(4);
dydt(4)=0;
end
```

Sada Newtonovom metodom tražimo nultočku $F(s^{(i)})$ vektorske funkcije $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ako je $F(s^{(i)})$ blizu nul-vektora dobili smo rješenje i pripadni broj iteracija:

```
F=[y(end,1); y(end,2)];
if (norm(F)<1e-2)
    display(iter);
    break;
end
```

Računamo $DF(s^{(i)})$:

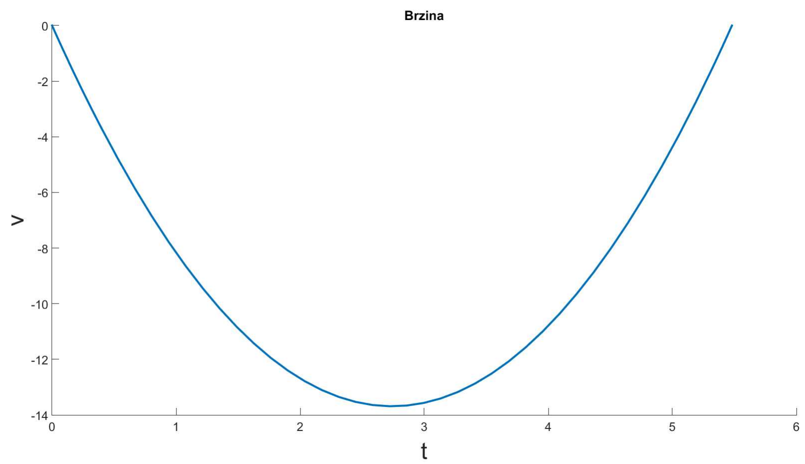
```
y0=[0 H s];
y0(3)=y0(3)+EPS;
[t,yaEPS]=ode45(@(t,y)RHS1(t,y,g,m),tspan,y0);
y0=[0 H s];
y0(4)=y0(4)+EPS;
[t,ybEPS]=ode45(@(t,y)RHS1(t,y,g,m),tspan,y0);
DF=[ yaEPS(end,1)-y(end,1), ybEPS(end,1)-y(end,1);
     yaEPS(end,2)-y(end,1), ybEPS(end,1)-y(end,1)];
```

Radimo Newtonov korak, tj.

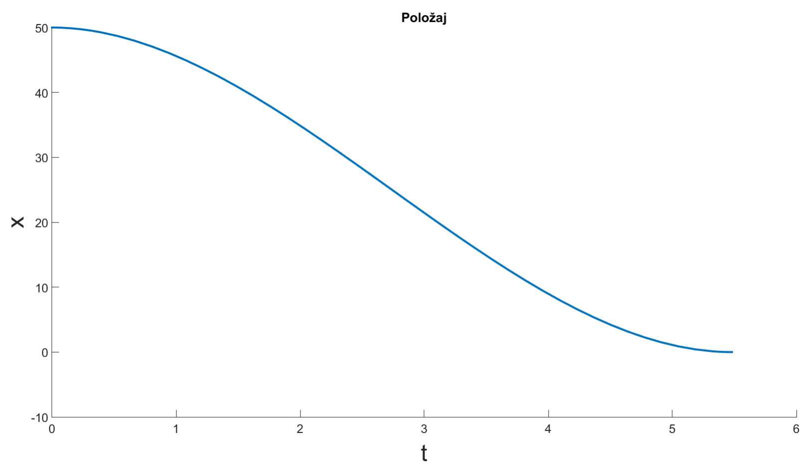
$$s^{(i+1)} = s^{(i)} - DF(s^{(i)})^{-1}F(s^{(i)}) :$$

```
DF=DF/EPS;
d=-DF\F;
s=s+d.';
```

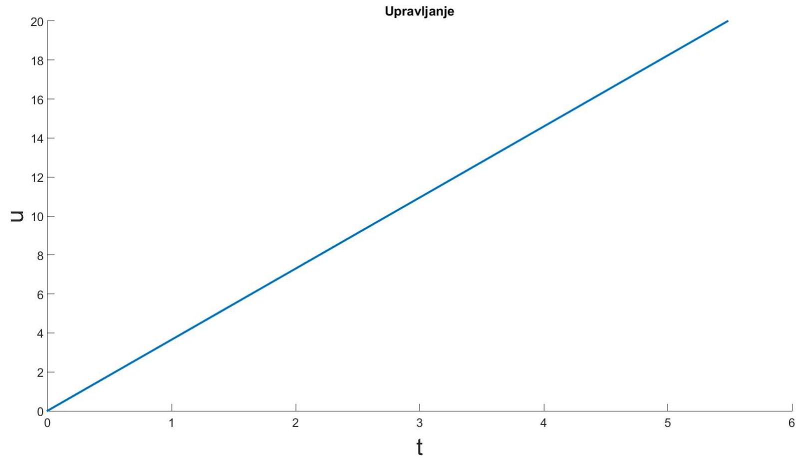
Nakon 5 iteracije dobivamo sljedeće vrijednosti funkcije cilja:



Slika 3.1: Brzina letjelice v.



Slika 3.2: Položaj letjelice x.

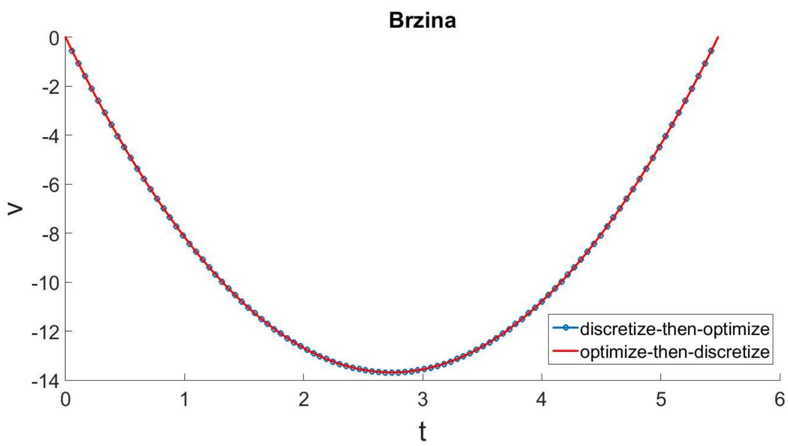


Slika 3.3: Funkcija upravljanja u.

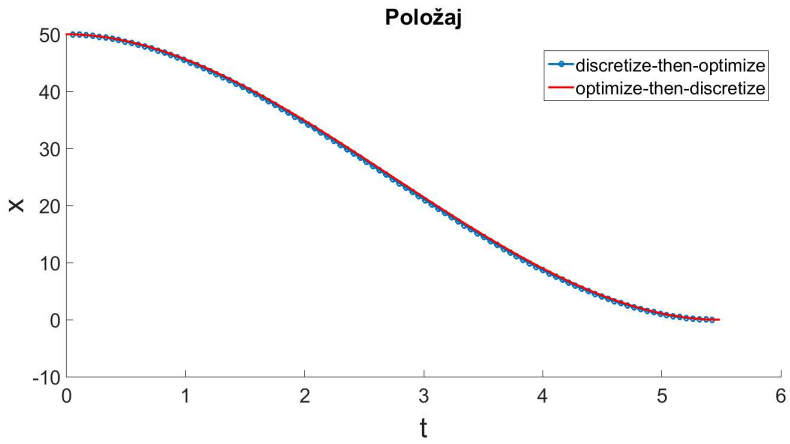
3.7 Usporedba pristupa discretize-then-optimize i optimize-then-discretize

U 2. poglavlju riješili smo problem slijetanja letjelice na Mjesec koristeći pristup discretize-then-optimize i kvadratično programiranje, dok smo u 3. poglavlju do rješenja istog problema došli pristupom optimize-then-discretize i metodom gađanja.

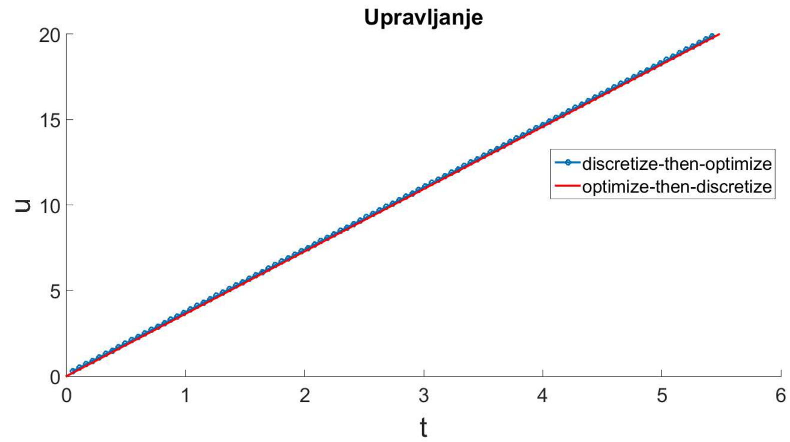
Grafički usporedimo rezultate:



Slika 3.4: Brzina letjelice v.



Slika 3.5: Položaj letjelice x.



Slika 3.6: Funkcija upravljanja u.

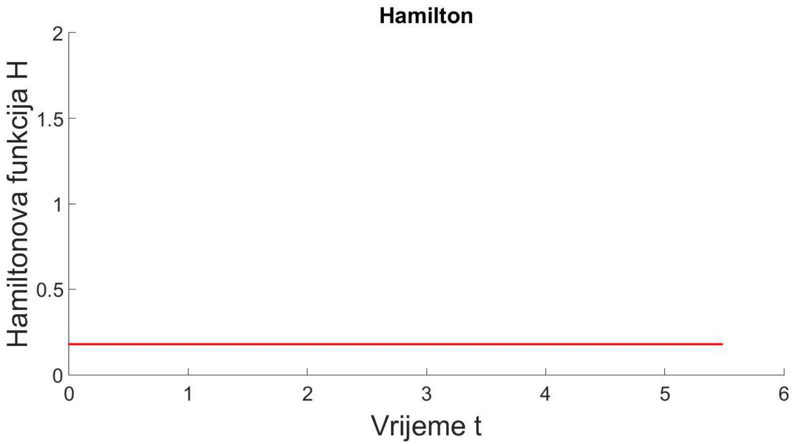
Možemo zaključiti da smo korištenjem oba pristupa došli do jednakih rješenja.

3.8 Uvjet optimalnosti za vremenski ovisne probleme optimalnog upravljanja

Izračunajmo Hamiltonov funkcional (3.22) kroz vrijeme $t \mapsto H(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t))$ gdje je $\bar{u}$ optimalno upravljanje, a $\bar{x}$, $\bar{y}$ rješenja od (3.4), (3.5), respektivno. Za primjer slijetanja letjelice na Mjesec izračunajmo

```
u = - y(:,3)/(2*m);
sizeT=max(size(t));
for i=1:sizeT
Hamilton(i) = u(i)^2+y(i,3)*(-g+u(i)/m)+y(i,4)*(y(i,1));
end
```

Njegov graf možemo vidjeti na sljedećoj slici.



Slika 3.7: Hamiltonov funkcional H.

Primjećujemo da je Hamiltonov funkcional konstantan.

Napomena 3.8.1. *Ako $\widetilde{F}$ ne ovisi o vremenu t, tj. ako je Hamiltonov funkcional H neovisan o vremenu t, tada je*

$$t \mapsto H(x(t), y(t), u(t))$$

konstantna funkcija za ekstremalu $(x, y, u) \in C^1[t_0, t_f]$.

Dokaz. Kako je (x, y, u) ekstremala vrijede nužni uvjeti optimalnosti (3.14) — (3.16) gdje su $\nabla_x H = -\dot{y}$, $\nabla_y H = \dot{x}$, $\nabla_u H = 0$. Stoga imamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x(t), y(t), u(t)) &= \nabla_x H \cdot \dot{x} + \nabla_y H \cdot \dot{y} + \nabla_u H \cdot \dot{u} \\ &= -\dot{y} \cdot \dot{x} + \dot{x} \cdot \dot{y} + 0 \cdot \dot{u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Što ako je t_f sastavni dio problema? Pogledajmo problem gdje je konačno vrijeme nepoznato:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t))\, dt \to \min \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \quad \text{gdje je } t_f \text{ prvi trenutak kada je } x(t_f) = x_f \end{cases}$$

Definiramo $J(u, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t))\, dt$, gdje je x rješenje rubnog problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \text{na} \quad \langle t_0, t_f \rangle \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

$u\colon [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^m$ dana funkcija, $t_f > t_0$ konačno vrijeme i $x_f = x(t_f)$ zadani cilj. Označimo s $\bar{u}$ optimalno upravljanje za vrijeme t_f i cilj x_f. Definiramo $S(t_f) = J(\bar{u}, t_f)$.

Teorem 3.8.2. *Neka su f_0 i f_1 klase C^1 i neka je $t \mapsto S(t)$ dobro definirana na segmentu $[a, b]$, gdje je $a > t_0$. Tada vrijedi*

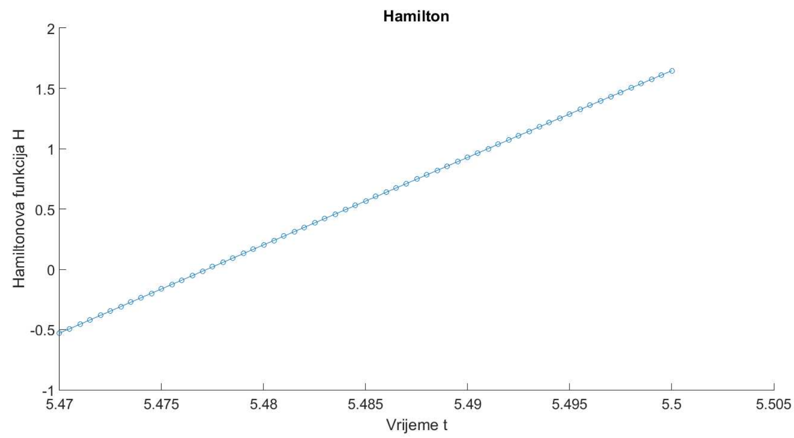
$$\frac{\partial S}{\partial t} = H,$$

gdje je H Hamiltonov funkcional.

Za više detalja pogledajte [8].

Napomena 3.8.3. *Ako funkcija $t \mapsto S(t)$ ima u T ekstrem, tada je nužno $S'(T) = 0$ što znači da je prema Teoremu 3.8.2 dovoljno tražiti konačna vremena za koje H postiže* 0.

Pogledajmo vrijednosti Hamiltonovog funkcionala za različita konačna vremena za problem slijetanja na Mjesec.

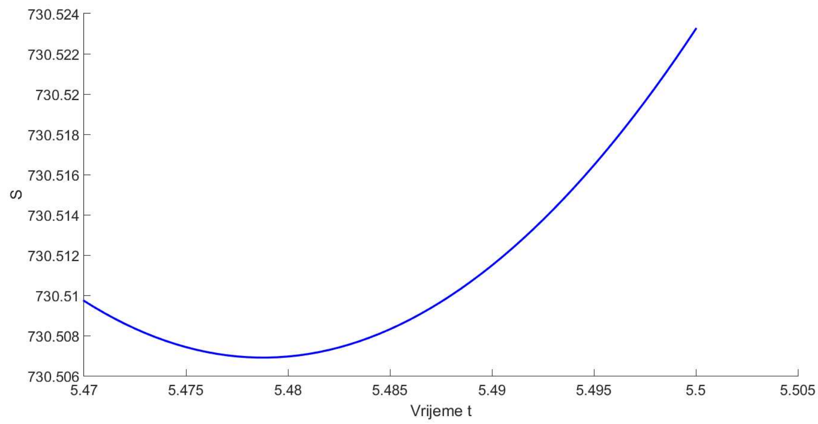


Slika 3.8: Hamiltonov funkcional H.

Vidimo da je $H = 0$ za $t_f = 5.478$ što znači da je prema Teoremu 3.8.2 kandidat za optimalno rješenje.

S ćemo dobiti pomoću t i u koji su dobiveni metodom gađanja

```
d=cumtrapz(t,u.^2);
S(br)=d(end);
```



Slika 3.9: Funkcija S kod metode gađanja.

Prema Slici 3.9, S u $t_f = 5.478$ ima lokalni minimum. Iako ovo nije dokaz da se radi o globalnom minimumu, iz dobivenog numeričkog testiranja sve upućuje na to da se radi o optimalnom vremenu za dani problem.

Bibliografija

[1] *Dokumentacija programskog jezika MATLAB*, https://www.mathworks.com/help/matlab/, posjećena u kolovozu 2023.

[2] Nela Bosner, *Znanstevno računanje 2, vježbe*, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2020.

[3] Jean Baptiste Caillau, Roberto Ferretti, Emmanuel Trélat i Hasnaa Zidani, *An algorithmic guide for finite-dimensional optimal control problems*, Handbook of Numerical Analysis **24** (2023), 559–626.

[4] Zlatko Drmač, Vjeran Hari, Miljenko Marušić, Mladen Rogina, Sanja Singer i Saša Singer, *Numerička analiza*, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2003.

[5] Marko Erceg, Marija Galić, Petar Kunštek i Marko Vrdoljak, *Metode matematičke fizike*, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2023.

[6] Lawrence C Evans, *An introduction to mathematical optimal control theory*, Lecture Notes, University of California, Department of Mathematics, Berkeley, 2001.

[7] Yalcin Kaya, *Optimal control*, Lecture Notes, University of south Australia, 2007.

[8] Robert Arthur Niemann, *Variable time optimal control*, University of California, Los Angeles, 1967.

Sažetak

U ovom radu opisani su uvjeti optimalnosti u teoriji upravljanja. Naglasak je stavljen na njihovu primjenu uvođenjem primjera slijetanja letjelice na Mjesec. U uvodnom poglavlju predstavljen je jednostavni model slijetanja na Mjesec kao primjer optimalnog upravljanja. Cilj ovog rada je riješiti zadani problem u matematičkom software-u MATLAB koristeći dva različita pristupa i usporediti dobivena rješenja.

U drugom poglavlju opisuje se pristup discretize-then-optimize koji se implementira u MATLAB-u, a korištenjem kvadratičnog programiranja dobiva se rješenje uvodnog problema slijetanja letjelice na Mjesec.

U trećem poglavlju izvode se temeljni rezultati varijacijskog računa, odnosno nužni uvjeti optimalnosti u teoriji upravljanja. Početni problem slijetanja letjelice na Mjesec interpretira se kao rubni problem, a do njegovog rješenja dolazi se implementacijom metode gađanja u MATLAB-u. Potom se uspoređuju rješenja dobivena pristupima discretize-then-optimize i optimize-then-discretize. Poglavlje završava uvjetima optimalnosti za vremenski ovisne probleme optimalnog upravljanja.

Summary

In this paper, the optimality conditions in control theory are described. The emphasis is placed on their application by introducing the example of the Moon lander. In the first chapter, a simple model of lunar landing is presented as an example of optimal control. The goal of this master thesis is to solve the given problem in the mathematical software MATLAB using two different approaches and compare the obtained results.

The second chapter describes the discretize-then-optimize approach implemented in MATLAB, and using the quadratic programming the result to the Moon lander problem is obtained.

In the third chapter, the fundamental results of variational calculus, i.e., the necessary optimality conditions in control theory, are derived. The initial Moon lander problem is interpreted as a boundary problem and its solution is obtained through the shooting method implemented in MATLAB. Then, the solutions obtained using the discretize-then-optimize and optimize-then-discretize approaches are compared. The chapter concludes with the optimality conditions for time-dependent optimal control problems.

Životopis

Rođena sam 10.02.1997. godine u Varaždinu. Osnovnoškolsko obrazovanje stječem u Osnovnoj školi Ivana Rangera Kamenica, a potom upisujem opću gimnaziju Srednje škole Ivanec. Sveučilišni prijediplomski studij Matematika upisujem 2016. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, a potom 2020. godine na istom fakultetu Sveučilišni diplomski studij Računarstvo i matematika.