Matematičko modeliranje diferencijalnim jednadžbama u ekonomiji

Ritz, Nina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nina Ritz

MATEMATIČKO MODELIRANJE DIFERENCIJALNIM JEDNADŽBAMA U EKONOMIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Marko Radulović

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji, za podršku od prvoga dana

Sadržaj

Uvod

Matematika je oduvijek bila neizostavan i ključan alat za modeliranje u ekonomiji, koji pruža strukturu i formalni okvir za ekonomske probleme. Razvojem financijskih tržišta javlja se sve veća potreba za matematičkim modelima koji će opisati sve mnogobrojnije financijske instrumente i njihovo kretanje cijena. Jedan od tih instrumenata, koji često investitorima i financijskim stručnjacima služi kao sredstvo upravljanja rizikom, je i opcija (*eng. option*).
Opcija je vrsta financijske izvedenice ili derivata, što prvenstveno znači da njena cijena ovisi o cijeni nekog drugog financijskog instrumenta ili varijable (to može biti dionica, obveznica, kamatna stopa i sl.). Upravo je ta povezanost ono što čini modeliranje cijene opcija intrigantnim te će stoga predstavljati glavni dio ovog rada.
U prvom ćemo se poglavlju pobliže upoznati s opcijama, opisati razliku između američkih i europskih opcija te uvesti određene matematičke pojmove koji će nam kasnije trebati za modeliranje. Napravit ćemo i kratki uvod u parcijalne diferencijalne jednadžbe kojima ćemo se baviti.
Drugo i treće poglavlje bave se matematičkim modelima cijena europske te američke opcije. U oba slučaja počinjemo s okolinom u kojoj radimo i određenim pretpostavkama, zatim postavljamo model s diferencijalnim jednadžbama te, u slučaju europske opcije, završavamo s konkretnom formulom za cijenu opcije. U drugom ćemo se poglavlju kratko dotaknuti i modeliranja cijene pojedinih egzotičnih opcija.
Rad je napisan prema Lishang Jiang: Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing [3].

Poglavlje 1

Ključni pojmovi

Ovo ćemo poglavlje započeti detaljnijim upoznavanjem s opcijama, njenin vrstama te formaliziranjem problema kojim se bavimo u ovom radu. Nakon toga uvodimo pojam arbitraže te nekoliko povezanih teorema koji će nam kasnije trebati. Upoznajemo se i s Brownovim gibanje, procesom koji opisuje kretanje cijene instrumeta s kojim je opcija povezana, te s usko povezanim Itôvim integralom i formulom. Završavamo s uvodom u parcijalne diferencijalne jednadžbe kako bi nam kasnije bilo jednostavnije pratiti pojmove s kojima se susrećemo u modelima. Definicije su većinom preuzete iz [3].

1.1 Opcije

Opcija je ugovor prema kojem kupac opcije ima pravo, ali ne i obvezu, kupiti ili prodati određeni iznos imovine u nekom trenutku u budućnosti po unaprijed određenoj cijeni. Tu cijenu zovemo cijena izvršenja (*engl. strike price ili exercise price*), a imovinu uz koju je opcija vezana zovemo temeljnom imovinom (*engl. underlying asset*).
Razlikujemo *call* i *put* opcije; *call* opcija je ugovor kojim imamo pravo na kupnju temeljne imovine po određenoj cijeni, dok kao vlasnici *put* opcije imamo pravo na prodaju imovine po danoj cijeni izvršenja. Opcije možemo podijeliti i ovisno o tome u kojem trenutku imamo pravo na kupnju/prodaju imovine na koju ona glasi; *europske* se opcije mogu izvršiti samo na dan dospijeća, tj. na dan isteka ugovora, dok kod *američkih* opcija imamo pravo na izvršenje u bilo kojem trenutku do dana dospijeća.
Budući da vlasnik opcije nema obvezu izvršiti kupnju/prodaju imovine te se stoga nalazi u poziciji gdje ne može izgubiti, on je dužan izdavatelju opcije platiti određeni iznos, tzv. premiju; u suprotnom, izdavatelj opcije nema motivaciju za sklapanje takvog ugovora kojim on nikako ne može zaraditi. U ovom radu želimo, između ostalog, odrediti upravo iznos te premije. Mi ćemo postaviti model diferencijalnih jednadžbi za određivanje cijene opcije za svaki trenutak $t, t \in [0, T], T \in \mathbb{R}$, a premija onda upravo predstavlja cijenu u

trenutku $t = 0$.
Cijena opcije, kao i svake druge izvedenice, ovisi o cijeni njene temeljne imovine. Koristimo oznake: S_t je cijena temeljne imovine, a V_t cijena opcije u trenutku t, $t \in [0, T]$ (S_t je slučajna varijabla jer se radi o rizičnoj imovini; iz toga odmah slijedi kako je i cijena opcije slučajna varijabla). Tada postoji funkcija $V(S, t)$, $t \in [0, T]$, $0 \leq S < \infty$, t.d. je

$$V_t = V(S_t, t).$$

Vrijednost funkcije V u trenutku T nam je poznata; to je upravo isplata, tj. vrijednost opcije na dan dospijeća. Vrijedi:

$$V_T = V(S_T, T) = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{za call opciju} \\ (K - S_T)^+, & \text{za put opciju.} \end{cases}$$

gdje je K cijena izvršenja. Naš zadatak je pronaći funkciju V koja zadovoljava dani terminalni uvjet.

1.2 Arbitraža

Arbitraža predstavlja, jednostavno rečeno, siguran i nerizičan profit. Na financijskom tržistu mogućnost arbitraže, ako se i pojavi, ne traje dugo; cijene se brzo prilagođavaju akcijama arbitražera na tržištu te dosežu novu ravnotežu pri čemu mogućnost za arbitražu nestaje. Stoga naše modeliranje cijene opcije počiva na činjenici da na tržistu ne postoji arbitraža.
U ovom ćemo poglavlju dati (matematički) uvjet za nepostojanje arbitraže te nekoliko rezultata koji iz toga proizlaze.

Promatramo financijsko tržiste koje se sastoji od jedne nerizične imovine B (npr. obveznice) i n rizičnih imovina S_i (npr. dionice, opcije,...). Neka je B_t cijena nerizične imovine u trenutku t, a S_{it} cijena i-te rizične imovine ($i = 1, 2, .., n,$) u trenutku t. Strategija ulaganja je predstavljena portfeljom ϕ:

$$\phi = \alpha B + \sum_{i=1}^{n} \phi_i S_i,$$

gdje su α, ϕ_i ($i = 1, 2, ..., n$) udjeli uloženi u pripadnu imovinu i $\{\alpha, \phi_1, ..., \phi_n\} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Zapravo su α, ϕ_i ($i = 1, 2, ..., n$) funkcije vremena t budući da investitori mogu mijenjati i prilagođavati svoju strategiju kroz vrijeme. Sa $V_t(\phi)$ ili ϕ_t označavamo vrijednost portfelja u trenutku t, točnije:

$$\phi_t = V_t(\phi) = \alpha_t B_t + \sum_{i=1}^{n} \phi_{it} S_{it}.$$

Ukoliko tijekom cijelog vremena transakcije $[0, T]$ investitor dodatno ne ulaže niti povlači sredstva, strategija ulaganja ϕ naziva se **samofinancirajućom**.

Definicija 1.2.1. *Samofinancirajuća strategija ϕ ima arbitražnu priliku u periodu [0,T] ako postoji trenutak $T^* \in [0, T]$ t.d. vrijedi: $V_{T^*}(\phi) = 0$, $V_T(\phi) \geq 0$ i $\mathbb{P}(\{V_T(\phi) \geq 0\}) > 0$.*

Definicija 1.2.2. *Ako ne postoji arbitražna prilika niti za jednu samofinancirajuću strategiju ϕ u periodu [0,T], tada kažemo da tržiste **ne dopušta arbitražu**.*

Završit ćemo potpoglavlje s dva bitna rezultata koja vrijede za tržista koja ne dopuštaju arbitražu. Dokaze možemo pronaći u [3].

Teorem 1.2.3. *Ako tržiste ne dopušta arbitražu u periodu [0,T] te za portfelje ϕ_1 i ϕ_2 vrijedi*

$$V_T(\phi_1) \geq V_T(\phi_2)$$

$$\mathbb{P}(V_T(\phi_1) > V_T(\phi_2)) > 0$$

tada za svaki $t \in [0, T\rangle$ mora vrijediti

$$V_t(\phi_1) > V_t(\phi_2).$$

Korolar 1.2.4. *Ako tržiste ne dopušta arbitražu u periodu [0,T] te u trenutku T za portfelje ϕ_1 i ϕ_2 vrijedi*

$$V_T(\phi_1) = V_T(\phi_2)$$

tada za svaki $t \in [0, T]$ vrijedi

$$V_t(\phi_1) = V_t(\phi_2).$$

1.3 Brownovo gibanje i Itôv integral

Kretanje cijena temeljne imovine opcije je stohastički proces. Stoga u ovom poglavlju uvodimo jedan takav proces, Brownovo gibanje, te se pomoću njega upoznajemo i s Itôvim integralom i Itôvom formulom. Sve će nam to kasnije poslužiti kod modeliranja cijene opcija.

1.3.1 Slučajna šetnja i Brownovo gibanje

Neka su $X_i(\omega), i = 1, 2, ...,$ Bernoullijeve slučajne varijable s vrijednostima ± 1 i parametrom $p = \frac{1}{2}$. Za svaki X_i definiramo slučajnu varijablu $X_i^\Delta = \sqrt{\Delta} X_i$ i slučajni niz

$S_k^\Delta, k = 0, 1, 2, .., $ kao:

$$S_0^\Delta = 0$$
$$S_k^\Delta = \sum_{i=1}^{k} R_i^\Delta = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\Delta} R_i \quad (k = 1, 2, ...).$$

Sada promatramo period $[0, T]$ koji podijelimo na N jednakih intervala;
neka je $\Delta = \frac{T}{N}, t_n = n\Delta, (n = 0, 1, 2, ..., N)$. Točke particije segmenta $[0, T]$ su tada upravo

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T.$$

Slučajnu šetnju $S^\Delta(t)$ na segmentu $[0, T]$ definiramo na sljedeći način:

$$S^\Delta(t) = \begin{cases} S_k^\Delta, & t = t_k \\ \dfrac{t - t_k}{\Delta} S_{k+1}^\Delta + \dfrac{t_{k+1} - t}{\Delta} S_k^\Delta, & t_k \leq t \leq t_{k+1}. \end{cases}$$

$S^\Delta(t)$ se naziva put slučajne šetnje i ima sljedeća svojstva:

1. $E(S^\Delta(\hat{t}_2) - S^\Delta(\hat{t}_1)) = 0$
2. $Var(S^\Delta(\hat{t}_2) - S^\Delta(\hat{t}_1)) = E([S^\Delta(\hat{t}_2) - S^\Delta(\hat{t}_1)]^2) = |\hat{t}_2 - \hat{t}_1| + o(\Delta)$
3. $E(S^\Delta(\hat{t}_2) S^\Delta(\hat{t}_1)) = min(\hat{t}_2, \hat{t}_1) + o(\Delta)$
4. $S^\Delta(t_k + \delta) - S^\Delta(t_k)$ i $S^\Delta(t_k)$ su nezavisni,

gdje su $t_k = k\Delta$, $1 \leq k \leq (N - 1)$, $\delta > 0$, $0 \leq \hat{t}_1, \hat{t}_2 \leq T$.

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza; bit će nam potreban za definiciju Brownova gibanja.

Teorem 1.3.1. ***(Centralni granični teorem)***
Za svaki slučajni niz $\left\{\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} R_i\right\}$, *gdje za* R_i *vrijedi* $E(R_i) = 0$ *i* $Var(R_i) = 1$, *kad* $k \to \infty$, *vrijedi*

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} R_i \to X,$$

gdje je X *slučajna varijabla t.d.* $X \sim N(0, 1)$.

Cilj nam je sada, primjenom centralnog graničnog teorema, izračunati limes slučajne šetnje $S^{\Delta}(t)$ kada $\Delta \to 0$.

Uzmimo neki t, $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, te promatramo $\dfrac{S^{\Delta}(t)}{\sqrt{t}}$. Budući da je $\Delta = \dfrac{t_k}{k}$, $k = 1, 2, ..., N$, za dani t slijedi:

$$\frac{S^{\Delta}(t)}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{t_{k+1}-t}{\Delta}S_k^{\Delta} + \frac{t-t_k}{\Delta}S_{k+1}^{\Delta}\right] = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{t_{k+1}-t}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i=1}^{k}R_i + \frac{t-t_k}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i=1}^{k+1}R_i\right]$$
$$= \left(\frac{t_{k+1}-t}{\Delta}\sqrt{\frac{t_k}{t}}\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k}R_i + \left(\frac{t-t_k}{\Delta}\sqrt{\frac{t_{k+1}}{t}}\right)\frac{1}{\sqrt{k+1}}\sum_{i=1}^{k+1}R_i.$$

Sada slijedi, korištenjem gornjeg teorema, kada Δ teži u 0, tj. k teži u ∞, cijeli ovaj izraz teži prema X_t.

Definicija 1.3.2. *Neka je $W(t)$ limes od $S^{\Delta}(t)$. Tada iz svojstava slučajne šetnje slijedi da $W(t)$ ima sljedeća svojstva:*

1. *Neprekidnost puta: $W(0) = 0$, $W(t)$ je neprekidna funkcija od t.*

2. *Normalno distribuirani prirasti: Za svaki $t > 0$, $W(t) \sim N(0, t)$, dok za svaki $0 \leq s \leq t$, $W(t) - W(s)$ je normalno distribuiran s očekivanjem 0 i varijancom $t - s$, tj. $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.*

3. *Nezavisnost prirasta: za bilo koji izbor $t_i \in [0, T], 0 < t_1 < t_2 ... < t_n$, prirasti $W(t_n) - W(t_{n-1}), W(t_{n-1}) - W(t_{n-2}), ..., W(t_2) - W(t_1)$ i $W(t_1)$ su nezavisni.*

Slučajni proces $W(t)$ (skraćeno W_t), koji zadovoljava gornja svojstva, zove se ***Brownovo gibanje****.*

Za kraj ćemo još definirati **kvadratnu varijaciju** Brownovog gibanja.
Neka je Π particija segmenta $[0, T] : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$. Tada je pripadna kvadratna varijacija:

$$Q_{\Pi} = \sum_{k=0}^{N-1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2.$$

Vrijedi

$$\lim_{\Delta \to 0} Q_{\Pi} = T$$

gdje je $\Delta = \max_{0 \leq k \leq N-1} |t_{k+1} - t_k|$.

1.3.2 Itôv integral i Itôva formula

Definicija 1.3.3. *Neka je $f(t)$ neanticipirajući stohastički proces (neanticipirajući se odnosi na svojstvo da se buduće vrijednosti procesa ne mogu predvidjeti na temelju prošlih vrijednosti ili trenutnog stanja). Ukoliko za takav proces limes*

$$\lim_{\Delta\to 0} I_\Delta(f) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\,[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]\,,$$

($0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ je particija segmenta [0,T], $\Delta = \max_{0\le k\le N-1}(t_{k+1} - t_k)$) postoji i ne ovisi o particiji segmenta [0,T], tada se taj limes naziva ***Itôv integral*** *od $f(t)$ te se označava $\int_0^T f(t)dW(t)$. Dakle,*

$$\int_0^T f(t)dW(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\,[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]\,.$$

.

Ukoliko je $f(t)$ upravo Brownovo gibanje, vrijedi

$$\int_0^T W_t dW(t) = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{T}{2}$$

(izvod se može pronaći u [7]).
U nastavku spominjemo i vrlo bitnu Itôvu formulu;
Ako je $Y_t = f(X_t, t)$, gdje je X_t stohastički proces, zanima nas

$$dY_t = df(X_t, t) =?$$

Itôva formula zapravo predstavlja lančano pravilo (za deriviranje kompozicije funkcija) u stohastičkom računu.

Teorem 1.3.4. ***(Itôva formula)***
Označimo $V_t = V(S_t, t)$, gdje je funkcija V diferencijabilna s obzirom na obje varijable. Ako stohastički proces S_t zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t,$$

tada vrijedi

$$\begin{aligned} dV_t &= \Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S_t, t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Big)dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_t \\ &= \Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu(S_t, t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2(S_t, t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Big)dt + \sigma(S_t, t)\frac{\partial V}{\partial S}dW_t \end{aligned}$$

(dokaz se može pronaći u [3]).

1.4 Osnovno o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama

Ovdje ćemo napraviti kratki uvod o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama te spomenuti neke konkretne vrste jednadžbi s kojima ćemo se susresti u radu. Iskaze i definicije većinom preuzimamo iz [2] i [6].
Parcijalna diferencijalna jednadžba (PDJ) uključuje nepoznatu funkciju dviju ili više varijabli (ovdje ćemo ju označavati s u) i neke njene parcijalne derivacije. Koristimo sljedeću notaciju:

1. Ako je $u : U \to \mathbb{R}$, pišemo $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (U \subset \mathbb{R}^n, x \in U)$
2. $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, ...$

Definicija 1.4.1. *Parcijalna diferencijalna jednadžba je jednadžba oblika*

$$F(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, ...) = 0$$

gdje je $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ nepoznata funkcija u nepoznatim varijablama $x_1, x_2, ..., x_n$. [6]

Red parcijalne diferencijalne jednadžbe predstavlja red najviše derivacije koja se pojavljuje u jednadžbi. Sve PDJ možemo podijeliti ovisno o redu jednadžbe i linearnosti: razlikujemo linearne, kvazi - linearne i nelinearne jednadžbe.
Mi ćemo se u ovom radu susretati sa linearnim jednadžbama drugog reda u dvije nezavisne varijable pa ćemo stoga sada reći nešto malo više o njima. Opći oblik takve jednadžbe je:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{1.1}$$

gdje su u, A, B, C, D, E, F, G funkcije varijabli x, y u području $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (ovdje sada radi jednostavnosti zapisa koristimo x, y umjesto x_1, x_2). Definiramo pripadnu diskriminantu kao:

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y).$$

Definicija 1.4.2. *Kažemo da je jednadžba* (1.1) *:*

(a) hiperbolička u točki (x,y) ako je $\Delta(x, y) > 0$

(b) parabolička u točki (x,y) ako je $\Delta(x, y) = 0$

(c) eliptička u točki (x,y) ako je $\Delta(x, y) < 0$

Ako je jednadža hiperbolička (parabolička, eliptička) u svakoj točki područja Ω, onda kažemo da je ona hiperbolička (parabolička, eliptička). [6]

U ovom ćemo se radu susresti isključivo s PDJ **paraboličkog** tipa. Glavni primjer takve jednadžbe je jednadžba provođenja topline (eng. *heat equation*); promatramo strujanje topline u homogenom štapu te sa $u(x,t)$ označimo temperaturu štapa na udaljenosti x u trenutku t. Jednadžba provođenja tada glasi:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad k > 0. \tag{1.2}$$

Mi ćemo rješavanje paraboličke PDJ svesti upravo na rješavanje jednadžbe provođenja topline s nekim određenim k.
U općenitoj formi, parabolička parcijalna diferencijalna jednadžba je oblika:

$$u_t = -Lu$$

gdje je L eliptički operator - [1].
U radu ćemo se susresti i s tzv. obrnutom paraboličkom jednadžbom (*eng. backward parabolic PDE*), koja poprima oblik:

$$u_t = Lu.$$

Sada ćemo reći nešto o rješavanju PDJ. Kažemo da je dani problem za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu dobro postavljen ukoliko vrijede sljedeće tri tvrdnje: problem ima rješenje, rješenje je jedinstveno i rješenje kontinuirano ovisi o danim podacima u jednadžbi (parametri, početni uvjeti). Rješenje PDJ koje zadovoljava dana tri uvjeta zvat ćemo *klasičnim* rješenjem.

Prvi korak u rješavanju parcijalne diferencijalne jednadžbe je obično pronalazak jednog, konkretnog rješenja (tzv. fundamentalno rješenje), pomoću kojeg onda možemo, kada dodamo rubni ili početni uvjet, doći do općeg rješenja. Tako je primjerice za jednadžbu provođenja topline fundamentalno rješenje dano sa:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{\frac{-x^2}{4kt}} \tag{1.3}$$

(izvod za slučaj $k = 1$ se može pronaći u [2, str. 46]).
Nakon pronalaska fundamentalnog rješenja, možemo dodati početni, terminalni ili rubni uvjet da bismo pronašli opće rješenje jednadžbe. Ponovno za jednadžbu provođenja topline, rješenje početnog (Cauchyjevog) problema:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

je dano sa:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-\xi,t) g(\xi) d\xi \tag{1.4}$$

gdje je $\Phi(x, t)$ fundamentalno rješenje (1.3).

Za kraj ćemo još nešto reći o problemima bez ograničenja (*eng. free boundary problems*) (više o toj temi može se pronaći u [5]). Najopćenitije rečeno, problem bez ograničenja ima dvije nepoznanice: područje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i funkciju $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Rub područja $\Omega, \partial\Omega$, se naziva slobodna granica (*free boundary*). Problem se sastoji od pronalaska $\{\Omega, u\}$ koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

1. u je rješenje PDJ na području Ω
2. u zadovoljava rubni uvjet s obzirom na koji je dana PDJ dobro postavljena na $\partial\Omega$
3. u zadovoljava dodatni uvjet na $\partial\Omega$.

Dakle, glavna ideja iza takvog problema je da uz pronalazak funkcije koja zadovoljava danu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, moramo pronaći i područje u kojem tražimo to rješenje i koje je a-priori nepoznato. Detaljnije ćemo se s takvim problemom susresti kod američkih opcija.

Poglavlje 2

Modeliranje cijene europskih opcija

Nakon što smo se upoznali sa svim pojmovima koji će nam dalje kroz rad trebati, krećemo s modeliranjem. Budući da kod europske opcije postoji samo jedan mogući trenutak kada se opcija može iskoristiti, modeliranje njezine cijene je nešto jednostavnije pa ćemo s njom i početi. Ovdje ćemo definirati dobro poznatu Black - Scholesovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu čije je rješenje, uz dodatne uvjete, upravo formula za cijenu europske opcije. Nakon toga prelazimo na nešto općenitiji slučaj, s pretpostavkama koje su vjernije realnosti. Završit ćemo poglavlje s modeliranjem cijena nekoliko egzotičnih opcija. U ovom poglavlju nastavljamo pratiti [3].

2.1 Black - Scholesova jednadžba

Prvo uvodimo dva nova pojma koja će nam biti potrebna za daljnji razvoj modela te dokazujemo bitan teorem koji nam pokazuje da postoji veza između europske call i put opcije s istim cijenama izvršenja i danima dospijeća.

Definicija 2.1.1. ***(Δ - hedging)***
Δ - hedging je strategija upravljanja rizikom; za danu opciju V, trgujemo s određenom količinom temeljne imovine S (ta količina je upravo Δ) u suprotnom smjeru, tako da je portfelj

$$\Pi = V - \Delta S$$

bezrizičan.

Dio sljedeće definicije preuzet je iz [7].

Definicija 2.1.2. ***(Geometrijsko Brownovo gibanje)***
Neka je $W(t)$ Brownovo gibanje te $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante. Geometrijsko Brownovo

gibanje je slučajni proces definiran kao

$$S(t) = S_0 e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}.$$

Dani slučajni proces zadovoljava sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha dt + \sigma dW_t.$$

Za sljedeći teorem pretpostavljamo da tržište ne dopušta arbitražu.

Teorem 2.1.3. *Vrijedi*

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} = p_t + S_t$$

uz oznake: c_t - cijena europske call opcije, p_t - cijena europske put opcije, S_t - cijena temeljne imovine, r - bezrizična kamatna stopa, K - cijena izvršenja, T - dan dospijeća.

Gornja jednakost naziva se **call-put paritet**.

Dokaz. Konstruiramo dva portfelja u trenutku $t = 0$:

$$\phi_1 = c + Ke^{-rT}$$
$$\phi_2 = p + S.$$

Promatramo njihovu vrijednost u $t = T$:

$$V_T(\phi_1) = V_T(c) + V_T(Ke^{-rT}) = (S_T - K)^+ + K = \max(K, S_T)$$
$$V_T(\phi_2) = V_T(p) + V_T(S) = (K - S_T)^+ + S_T = \max(K, S_T).$$

Stoga vrijedi

$$V_T(\phi_1) = V_T(\phi_2).$$

Iz gornjeg korolara tada slijedi

$$V_t(\phi_1) = V_t(\phi_2)\text{ , za } t < T,$$

čime je tvrdnja teorema dokazana. □

Sada znamo da se kod postavljanja modela za cijenu opcije možemo fokusirati isključivo na call ili put opciju; cijenu one druge lako ćemo dobiti pomoću gornjeg teorema i call - put pariteta.
Geometrijsko Brownovo gibanje, koje smo gore definirali, koristi se za modeliranje cijene temeljne imovine kod izvedenica.
S tom pretpostavkom, uz još neke dodatne, krećemo razvijati naš model za cijenu opcije:

1. Cijena temeljne imovine (primjerice dionice) prati geometrijsko Brownovo gibanje:
$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{2.1}$$
gdje je μ očekivana stopa povrata, a σ predstavlja *volatilnost*, tj. mjeri koliko cijena temeljne imovine varira na tržistu (W_t je, kao i uvijek, standardno Brownovo gibanje).

2. Bezrizična kamatna stopa r je konstantna.

3. Nema isplati dividendi po temeljnoj imovini.

4. Tržiste ne dopušta arbitražu.

5. Zanemarujemo troškove transakcija i poreze.

Želimo pronaći funkciju $V = V(S, t)$ koja opisuje cijenu opcije (poznata nam je njena vrijednost u trenutku T, tj. na dan dospijeća).
Model ćemo izvesti koristeći Δ - hedging tehniku. Prvo konstruiramo portfelj $\Pi = V - \Delta S$ kao u definiciji (2.1.1) (biramo Δ t.d. je portfelj bezrizičan u vremenskom intervalu $(t, t + dt)$). Ako portfelj kreiramo u trenutku t i Δ ostane nepromijenjen u cijelom vremenskom intervalu $(t, t + dt)$, zahtjev za bezrizičnost portfelja Π zapravo daje sljedeću jednakost za povrat portfelja u trenutku $t + dt$:
$$\frac{\Pi_{t+dt} - \Pi_t}{\Pi_t} = rdt$$
tj.
$$dV_t - \Delta dS_t = r\Pi_t dt = r(V_t - \Delta S_t)dt. \tag{2.2}$$
Kako je $V_t = V(S_t, t)$, gdje slučajni proces $S(t)$ zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu (2.1), možemo primjeniti Itôvu formulu (1.3.4):
$$dV_t = \Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S}\Big)dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t.$$
Uvrstimo li gornju jednadžbu u (2.2) imamo:
$$\Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \mu S\Big)dt + (\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \sigma S)dW_t = r(V - \Delta S)dt. \tag{2.3}$$
Sada, budući da je desna strana ove jednadžbe bezrizična, koeficijent uz dW_t, koji predstavlja slučajni dio, mora biti 0, tj.:
$$\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \sigma S = 0 \rightarrow \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Uvrštavanjem u (2.3) dobijemo sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

To je **Black - Scholesova jednadžba** koja opisuje kretanje cijene opcije.
Sada nam je cilj pronaći rješenje dane PDJ (za $0 \leq S < \infty$, $0 \leq t \leq T$; označimo to područje sa Σ):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 & (\Sigma) \\ V|_{t=T} = \begin{cases} (S-K)^+, & \text{(call opcija)} \\ (K-S)^+, & \text{(put opcija).} \end{cases} \end{cases}$$

Ovo je sada terminalni problem za obrnutu paraboličku jednadžbu sa varijabilnim koeficijentima.
Kada napravimo transformaciju

$$x = \ln S,\ \tau = T - t$$

naš se problem svodi na Cauchyjev problem za paraboličku PDJ s konstantnim koeficijentima, s čime nam je puno jednostavnije raditi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \tau} - \dfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (r - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial V}{\partial x} + rV = 0 & (-\infty < x < \infty, 0 < \tau \leq T) \\ V|_{\tau=0} = \begin{cases} (e^x - K)^+, & \text{(call opcija)} \\ (K - e^x)^+, & \text{(put opcija).} \end{cases} \end{cases} \tag{2.4}$$

Dani Cauchyjev problem je, po PDJ teoriji, dobro postavljen, iz čega slijedi da je i prvotni problem dobro postavljen.
Sada ćemo još dodatno pojednostaviti tako da ćemo ovaj problem svesti na Cauchyjev problem za jednadžbu provođenja topline, čije smo rješenje već definirali.
Počinjemo na sljedeći način:

$$V = ue^{\alpha\tau+\beta x}.$$

Konstante α i β biramo tako da gornju paraboličku jednadžbu možemo svesti na jednadžbu provođenja topline. Jednostavnim računom dobijemo sljedeće derivacije od V:

$$\begin{aligned} V_\tau &= e^{\alpha\tau+\beta x}(u_\tau + \alpha u) \\ V_x &= e^{\alpha\tau+\beta x}(u_x + \beta u) \\ V_{xx} &= e^{\alpha\tau+\beta x}(u_{xx} + 2\beta U_x + \beta^2 u). \end{aligned}$$

Uvrstimo li to u jednadžbu u (2.4) te podijelimo cijelu jednadžbu s $e^{\alpha\tau+\beta x}$, imamo:

$$u_\tau - \frac{\sigma^2}{2}u_{xx} - [\beta\sigma^2 + r - \frac{\sigma^2}{2}]u_x + [r - \beta(r - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{\sigma^2}{2}\beta^2 + \alpha]u = 0.$$

Sada biramo konstante:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\\ \alpha &= -r + \beta\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big) + \frac{\sigma^2}{2}\beta^2 = -r - \frac{1}{2\sigma^2}\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)^2.\end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem i tih koeficijenata u našu jednadžbu, početna parabolička jednadžba se svodi na:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

s početnom vrijednosti (npr. za call opciju):

$$u|_{\tau=0} = e^{-\beta x}V|_{\tau=0} = e^{-\beta x}(e^x - K)^+$$

što je sada zapravo jednadžba provođenja topline (1.2) uz $k = \frac{\sigma^2}{2}$.
Rješenje jednadžbe je, koristeći (1.4)

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-\xi,\tau)g(\xi)d\xi,$$

gdje je (fokusiramo se na call opciju):

$$\Phi(x-\xi,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}}, g(\xi) = e^{-\beta\xi}(e^\xi - K)^+.$$

Kada sve uvrstimo i sredimo, dobijemo

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}}[e^{-\beta\xi}(e^\xi - K)^+]d\xi = \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}}[e^{(1-\beta)\xi} - Ke^{-\beta\xi}]d\xi$$

gdje je $\beta = -\frac{1}{\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})$.
Sada se vraćamo na originalnu funkciju $V(x,\tau)$.

$$\begin{aligned}V(x,\tau) &= u(x,\tau)e^{-r\tau - \frac{1}{2\sigma^2}(r-\frac{\sigma^2}{2})^2\tau - \frac{1}{\sigma^2}(r-\frac{\sigma^2}{2})x}\\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
I_1 &= e^{-r\tau}\int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\{(x-\xi)^2+2(x-\xi)(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+(r-\frac{\sigma^2}{2})^2\tau^2\}+\xi\right]d\xi\\
&= e^{-r\tau}\int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[\,(x-\xi)+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau]^{\,2}+\xi\right]d\xi\\
I_2 &= -e^{-r\tau}\int_{\ln K}^{+\infty}\frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\{x-\xi+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau\}^2\right]d\xi.
\end{aligned}$$

Uvedimo oznake

$$\begin{aligned}
\eta &= x-\xi+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau\\
\omega &= \frac{\eta+\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\\
N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\omega^2}{2}d\omega}
\end{aligned}$$

(N je zapravo funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe).
Sada možemo zapisati:

$$\begin{aligned}
I_1 &= e^xN\Big(\frac{x-\ln K+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)\\
I_2 &= -Ke^{-r\tau}N\Big(\frac{x-\ln K+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\Big)
\end{aligned}$$

te povratkom na početnu transformaciju($x = lnS, \tau = T - t$) imamo

$$V(S,t) = SN\Bigg(\frac{\ln S-\ln K+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Bigg)-Ke^{-r(T-t)}N\Bigg(\frac{\ln S-\ln K+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Bigg).$$

Označimo

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\frac{S}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\\
d_2 &= d_1-\sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}$$

i dobit ćemo formulu za cijenu europske call opcije:

$$V(S,t) = SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

koja je poznata kao **Black - Scholesova formula**.
Za put opciju ćemo koristiti spomenuti call - put paritet (2.1.3) :

$$p_t = c_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t = Ke^{-r(T-t)}[1 - N(d_2)] - S[1 - N(d_1)].$$

Vrijedi

$$1 - N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_1}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega = N(-d_1)$$

pa stoga formulu za cijenu europske put opcije možemo zapisati kao:

$$V(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

2.2 Generalizirani Black - Scholesov model

U ovom ćemo potpoglavlju malo modificirati i generalizirati pretpostavke s kojima smo krenuli u razradu modela kako bi bio primjenjiv u više situacija.
Radimo sa sljedećim pretpostavkama:

1. Cijena temeljne imovine zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

   $$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$$

   Dakle, očekivana stopa povrata i volatilnost više nisu konstante već funkcije vremena t.

2. Bezrizična kamatna stopa $r = r(t)$ (više nije konstanta).

3. Za temeljnu imovine se kontinuirano isplaćuju dividende po stopi $q(t)$.

4. Tržište je bez arbitraže te zanemarujemo troškove transakcija i poreze.

Postupak će biti sličan kao u gornjem primjeru; koristimo Δ - hedging tehniku kako bismo postavili neprekidni model za cijenu opcije te dobili eksplicitnu formulu.
Konstruiramo portfelj

$$\Pi = V - \Delta S$$

gdje biramo Δ tako da je portfelj bezrizičan u $[t, t + dt]$. Slično kao gore, za povrat tada mora vrijediti:

$$\Pi_{t+dt} - \Pi_t = r\Pi_t dt.$$

Sada još moramo uzeti u obzir i dividende tako da je vrijednost portfelja u trenutku $t + dt$:

$$\Pi_{t+dt} = V_{t+dt} - \Delta_t S_t q_t dt - \Delta_t S_{t+dt}.$$

Kombinirajući gornje dvije jednadžbe dobivamo sljedeću formulu, analogon formuli (2.2) gore:

$$dV_t - \Delta_t dS_t = r_t \Pi_t dt + \Delta_t S_t q_t dt.$$

Primjenom Itôve formule i odabirom

$$\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S}$$

imamo:

$$\Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Big) dt = r(t)\Big(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\Big) dt + q(t) S \frac{\partial V}{\partial S} dt.$$

Time smo dobili parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za V:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t)}{2} S^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r(t) - q(t)) S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t) V = 0.$$

Ovo je **Black - Scholesova jednadžba za cijenu opcije s isplatom dividendi**.

Kroz ostatak računa ćemo, radi jednostavnosti zapisa, promatrati samo call opciju. Da bismo odredili formulu za cijenu, moramo riješiti sljedeći problem u području Σ (isti kao gore):

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r(t) - q(t)) S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t) V = 0 \\ V|_{t=T} = (S - K)^+ \qquad (0 \leq S < \infty). \end{cases} \tag{2.5}$$

Prvo uvodimo dvije nove varijable:

$$\begin{aligned} u &= V e^{\beta(t)} \\ y &= S e^{\alpha(t)}. \end{aligned}$$

Želimo izabrati $\alpha(t), \beta(t)$ tako da u jednadžbi (2.5) eliminiramo članove $\frac{\partial V}{\partial S}$ i V.
Vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} e^{-\beta(t)} + y \frac{\partial u}{\partial y} \alpha'(t) e^{-\beta(t)} - u\beta'(t) e^{-\beta(t)} \\ S \frac{\partial V}{\partial S} &= y \frac{\partial u}{\partial y} e^{-\beta(t)} \\ S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{-\beta(t)}. \end{aligned}$$

Uvrstimo li to u (2.5), imamo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t)}{2} y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \{[r(t) - q(t)] + \alpha'(t)\} y \frac{\partial u}{\partial y} - [r(t) + \beta'(t)]u = 0.$$

Sada ćemo $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ dobiti kao rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi (uz dani rubni uvjet):

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} + r(t) - q(t) = 0 \\ \dfrac{d\beta}{dt} + r(t) = 0 \\ \alpha(T) = \beta(T) = 0. \end{cases}$$

Jednostavno dobivamo rješenja:

$$\alpha(t) = \int_t^T [r(\tau) - q(\tau)] d\tau$$
$$\beta(t) = \int_t^T r(\tau) d\tau.$$

Sada, uz danu transformaciju s varijablama u i y, i uvrštavanjem danih $\alpha(t)$ i $\beta(t)$, početni problem (2.5) se svodi na:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2(t)}{2} y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u|_{t=T} = Ve^{\beta(t)}|_{t=T} = (y - K)^+. \end{cases}$$

Dodatnom transformacijom

$$\tau = \int_0^t \sigma^2(\omega) d\omega$$

imamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} + \dfrac{1}{2} y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u_{\tau=\hat{T}} = (y - K)^+ \end{cases}$$

gdje je $\hat{T} = \int_0^T \sigma^2(t) dt$.
Primjenom Black - Scholesove formule (za $\sigma = 1, r = 0, T = \hat{T}, t = \tau$) dobijemo:

$$u(y, \tau) = yN(\hat{d}_1) - KN(\hat{d}_2)$$

gdje je

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\frac{y}{K} + \frac{1}{2}(\hat{T} - \tau)}{\sqrt{\hat{T} - \tau}}$$
$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sqrt{\hat{T} - \tau}.$$

Povratkom na originalne varijable, koristeći rezultate i izvode koje smo do sada pokazali, dobit ćemo formulu za **cijenu europske call opcije** u ovom generaliziranom slučaju:

$$\begin{aligned} V(S,t) &= e^{-\beta(t)}[S e^{\alpha(t)} N(\hat{d}_1) - KN(\hat{d}_2)] \\ &= S e^{-\int_t^T q(\tau)d\tau} N(\hat{d}_1) - Ke^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} N(\hat{d}_2) \end{aligned}$$

gdje je

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \int_t^T [r(\tau) - q(\tau) + \frac{\sigma^2(\tau)}{2}]d\tau}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(\tau)d\tau}}$$
$$\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma^2(\tau)d\tau}.$$

U prethodnom smo poglavlju, kod Black - Scholesove jednadžbe, formulu za put opciju dobili preko call - put pariteta. Isto ćemo napraviti i ovdje, no prvo ćemo dokazati teorem koji uspostavlja vezu između call i put opcije u ovakvom generalnom slučaju.

Teorem 2.2.1. *Označimo sa $c(S,t)$ i $p(S,t)$ cijene europske call i put opcije, s istom cijenom izvršenja K i datumom dospijeća T. Call - put paritet je tada dan sa:*

$$c(S,t) + Ke^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} = p(S,t) + S e^{-\int_t^T q(\tau)d\tau}$$

gdje je $r = r(t)$ bezrizičan kamatna stopa, $q = q(t)$ je stopa dividende i $\sigma = \sigma(t)$ je volatilnost.

Dokaz. Promatramo razliku u cijeni između call i put opcije:

$$W(S,t) = c(S,t) - p(S,t).$$

U $t = T$ vrijedi:

$$W(S,T) = (S - K)^+ - (K - S)^+ = S - K.$$

Kao i gore, pokazuje se da je W rješenje donjeg problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2(t)}{2} S^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial S^2} + (r(t) - q(t)) S \dfrac{\partial W}{\partial S} - r(t) W = 0 \\ W|_{t=T} = S - K. \end{cases} \tag{2.6}$$

Neka je W oblika:

$$W(t) = a(t)S - b(t)K. \tag{2.7}$$

Uvrstimo li to u (2.6) imamo:

$$a'(t)S - b'(t)K + [r(t) - q(t)]S\,a(t) - r(t)[a(t)S - b(t)K] = 0.$$

Biramo $a(t), b(t)$ takve da vrijedi

$$\begin{aligned} a'(t) + [r(t) - q(t)]a(t) - r(t)a(t) &= 0 \\ b'(t) - b(t)r(t) &= 0 \\ a(T) = b(T) &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje je dano u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{-\int_t^T q(\tau)d\tau} \\ b(t) &= e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}. \end{aligned}$$

Uvrstimo li to u (2.7) dobijemo traženi call - put paritet čime je teorem dokazan. □

Koristeći gornji teorem sada imamo formulu i za **cijenu europske put opcije**:

$$V(S,t) = Ke^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} N(-\hat{d}_2) - S\,e^{-\int_t^T q(\tau)d\tau} N(-\hat{d}_1).$$

2.3 Egzotične opcije

U ovom ćemo se poglavlju kratko posvetiti trima vrstama egzotičnih opcija - binarne, *compound* i *chooser* opcije. Pojam egzotičnih opcija podrazumijeva sve novije vrste opcija, koji su se nešto kasnije pojavile na tržištu, te se razlikuju od klasičnih call i put opcija (tzv. *vanilla* opcije) po načinu isplate i nešto složenijim značajkama. Egzotične su opcije zapravo proizašle iz klasičnih, *vanilla* opcija, te često nude mogućnost za veću dobit.
Mi ćemo ovdje klasični Black - Scholesov model, s kojim smo se do sada susreli, malo prilagoditi kako bi opisali kretanje cijena ovakvih opcija. Za modeliranje i dalje pratimo [3], a više detalja o egzotičnim opcijama može se pronaći u [4].

2.3.1 Binarne opcije

Binarna opcija je konceptualno najjednostavniji oblik opcije na tržištu. Često se naziva i *bet* opcija jer se investitor zapravo ”kladi” na rast ili pad cijene određene imovine (mi ćemo se ovdje fokusirati na binarne opcije koje su vezane uz dionice). Ukoliko ”pogodi”, ostvaruje profit, u suprotnom je isplata nula. Ovdje ćemo promatrati dvije osnovne vrste binarnih opcija: *Cash-or-nothing call* opcija (*CONC*) i *Asset-or-nothing call* opcija (*AONC*).

1. *Cash-or-nothing call opcija* : Ako je cijena dionice na datum dospijeća ($t = T$) ispod cijene izvršenja, isplata je nula. U slučaju da je cijena dionice viša od cijene izvršenja, vlasnik opcije dobiva 1$ u gotovini.
2. *Asset-or-nothing call opcija* : Analogno kao kod *CONC* opcije, ako je cijena dionice u trenutku dospijeća manja od cijene izvršenja, vlasnik opcije ne dobiva ništa. No ako je cijena iznad dane cijene izvršenja, isplata je jednaka trenutnoj cijeni dionice.

Ovdje ćemo pretpostaviti da vrijede iste pretpostavke kao kod generaliziranog Black - Scholesovog modela. Tada se cijena binarne opcije može modelirati na sljedeći način:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2} S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q) S \dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V|_{t=T} = \begin{cases} H(S-K), & \text{(CONC)} \\ SH(S-K), & \text{(AONC)} \end{cases} \end{cases} \tag{2.8}$$

gdje je $H(x)$ funkcija t.d. $H(x) = 1$ za $x > 0$ i $H(x) = 0$ za $x < 0$.
Sada ćemo promatrati običnu (vanilla) call opciju te CONC i AONC binarne opcije, sve s istim datumom dospijeća T i cijenom izvršenja K. Njihove cijene ćemo redom označavati s V, V_C, V_A. Na dan dospijeća $t = T$ vrijedi sljedeća jednakost:

$$V(S,T) = V_A(S,T) - KV_C(S,T).$$

Izvod slijedi iz terminalnog uvjeta u (2.8):

$$V(S,T) = (S-K)^+ = (S-K)H(S-K) = SH(S-K) - KH(S-K) = V_A(S,T) - KV_C(S,T).$$

Dodatno, $V(S,t), V_C(S,t), V_A(S,t)$ zadovoljavaju istu Black - Scholesovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, danu u (2.8). Sada zbog linearnosti problema terminalne vrijednosti, slijedi da za svaki (S,t) u $\Sigma = \{0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}$, vrijedi

$$V(S,t) = V_A(S,t) - KV_C(S,t).$$

Sada još želimo pronaći vezu između cijene CONC i cijene AONC opcije.

Teorem 2.3.1. *Vrijedi*

$$V_A(S,t;r,q) = S\,V_C(S,t;q,\hat{r})$$

gdje je $\hat{r} = 2q - r - \sigma^2$

Dokaz. Neka je $V_A(S,t) = S\,u(S,t)$. Funkcija u tada mora zadovoljavati sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + (r - q + \sigma^2) S \frac{\partial u}{\partial S} - qu = 0.$$

Ako definiramo $\hat{r} = 2q - r - \sigma^2$, gornju jednadžbu možemo zapisati kao:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + (q - \hat{r}) S \frac{\partial u}{\partial S} - qu = 0. \tag{2.9}$$

Na dan dospijeća $t = T$ vrijedi

$$u(S,T) = \frac{1}{S} V_A(S,T) = V_C(S,T). \tag{2.10}$$

Sada usporedimo problem terminalne vrijednosti (2.9) - (2.10) za $u(S,t)$ s analognim problemom (2.8) za $V_C(S,t)$. Ako u problemu (2.8) zamjenimo r, q sa $q, \hat{r}$, tada $u(S,t)$ i $V_C(S,t)$ zadovoljavaju isti problem. Zbog jedinstvenosti rješenja sada mora vrijediti

$$u(x,t) = V_C(S,t;q,\hat{r}).$$

Time je jednakost teorema dokazana. □

Dakle, jednom kada znamo cijenu CONC opcije, možemo jednostavno pomoću gornjeg teorema doći do cijene pripadne AONC opcije. Stoga ćemo sada rješiti problem (2.8) za CONC opciju. Uvodimo transformaciju:

$$\tau = T - t$$
$$x = \ln \frac{S}{K}.$$

Tada imamo

$$H(S - K) = H\Big(\frac{S}{K} - 1\Big) = H(e^x - 1) = H(x).$$

Time se početni problem svodi na sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \tau} = \dfrac{\sigma^2}{2} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (r - q - \dfrac{\sigma^2}{2}) \dfrac{\partial V}{\partial x} - rV \\ V(x,0) = H(x). \end{cases}$$

Analognim postupkom kao u posljednja dva poglavlja, dolazimo do sljedećeg izraza

$$V(x,\tau) = e^{-r\tau} N\left(\frac{x + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

gdje je $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$.
Povratkom na originalne varijable (S, t) imamo:

$$V_C(S,t;r,q) = e^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Sada uz pomoć teorema (2.3.1) slijedi:

$$V_A(S,t;r,q) = S\, V_C(S,t;q,\hat{r}) = S\, e^{-q(T-t)} N\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

2.3.2 *Compound* (složene) opcije

Compound ili složene opcije su zapravo standardne opcije na druge standardne opcije (vidjeti [4]). Postoji puno vrsta i varijacija ovakvih opcija pa ćemo mi stoga ovdje opisati njen najjednostavniji oblik.
Compound opcija daje vlasniku pravo da nakon određenog datuma $(t = T_1)$ i po nekoj fiksnoj dogovorenoj cijeni $\hat{K}$ kupi/proda call/put opciju s datumom dospijeća $t = T_2$ i s cijenom izvršenja K. Kako postoje dvije vrste klasičnih opcija (call i put), ovdje imamo četiri mogućnosti za compund opciju:

1. kupnja *call* opcije za *call* opciju

2. kupnja *call* opcije za *put* opciju

3. prodaja *put* opcije za *call* opciju

4. prodaja *put* opcije za *put* opciju.

U ovakvim su opcijama stoga prisutne tri vrste rizične imovine: temeljna imovina (primjerice dionica), temeljna opcija i složena, *compound* opcija. Određivanje cijene ovakve opcije je stoga nešto zahtjevnije te se odvija u više koraka. Prvo, u domeni $\Sigma_2 = \{0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T_2\}$ određujemo cijenu osnovne, temeljne opcije koja se može opisati Black - Scholesovom formulom. Njenu ćemo cijenu označiti sa $V(S,t)$. Nakon toga ćemo u domeni $\Sigma_1 = \{0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T_1\}$ postaviti problem s PDJ za cijenu *compound* opcije,

$V_{co}(S,t)$. Opet ćemo koristiti Δ - hedging tehniku da bismo uspostavili Black - Scholesovu jednadžbu za $V_{co}(S,t)$. U trenutku $t = T_1$, pripadna terminalna vrijednost iznosi

$$V_{co}(S,T_1) = \begin{cases} (V(S,T_1) - \hat{K})^+, & \text{("call" opcija)} \\ (\hat{K} - V(S,T_1))^+, & \text{("put" opcija).} \end{cases}$$

Promatrat ćemo slučaj kad su r, q, σ fiksni, tada možemo izvesti formulu za cijenu ove vrste *compound* opcije. Za primjer ćemo uzeti call opciju na call opciju. U trenutku $t = 0$ vrijedi

$$V_{co}(S,0) = Se^{-qT_2}M(a_1, b_1; \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}) - Ke^{-rT_2}M(a_2, b_2; \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}) - e^{rT_1}\hat{K}N(a_2)$$

gdje su

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln\frac{S}{S^*} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1} \\ b_1 &= \frac{\ln\frac{S}{S^*} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2} \end{aligned}$$

a S^* je korijen sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} \hat{K} = S^*e^{-q(T_2-T_1)}&N\left(\frac{\ln\frac{S^*}{K} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}\right) \\ -Ke^{-r(T_2-T_1)}&N\left(\frac{\ln\frac{S^*}{K} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}\right) \end{aligned}$$

i $M(a, b; \rho)$ je funkcija bivarijantne normalne razdiobe;

$$M(a, b; \rho) = \mathrm{Prob}\{X \leq a, Y \leq b\},$$

gdje $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1), \mathrm{Cov}(X, Y) = \rho$.

2.3.3 *Chooser* opcije (*as you like it*)

Chooser opcije, poznate kao i *as-you-like-it*, mogu se smatrati posebnom vrstom *compound* opcija. Vlasnik opcije ima sljedeće pravo: u trenutku $t = T_1$, bira hoće li opcija biti standardna *call* opcija s cijenom izvršenja K_1 i datumom dopsijeća T_2 ili *put* opcija s cijenom K_2 i dospijećem $\hat{T}_2$ ($T_2, \hat{T}_2 > T_1 > 0$). Dakle, investitor kupuje opciju i plaća za nju premiju, ali tek u nekom trenutku u budućnosti (trenutak T_1) odlučuje hoće li to biti call ili put opcija. Ovdje su uključene čak četiri vrste rizične imovine: temeljna imovina (primjerice dionica), temeljna (osnovna) call opcija s cijenom izvršenja K_1 i dospijećem T_2, temeljna put opcija s cijenom izvršenja K_2 i dospijećem $\hat{T}_2$ te glavna, *chooser* opcija. Koristit ćemo sljedeće oznake:

$$V_C(S,t) - \text{cijena temeljne call opcije}$$
$$V_P(S,t) - \text{cijena temeljne put opcije.}$$

Obje cijene su opisane Black - Scholesovom formulom. Mi sada želimo pronaći cijenu *chooser* opcije $V_{ch}(S,t)$ na području $\Sigma_1 = \{0 \le S < \infty, 0 \le t \le T_1\}$. Da bismo pronašli tu cijenu, moramo riješiti sljedeći problem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2} S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V|_{t=T_1} = \max\{V_C(S,T_1), V_P(S,T_1)\}. \end{cases}$$

Ako pretpostavimo da temeljna call i put opcija imaju istu cijenu izvršenja K i datum dospijeća T_2, tada po call-put paritetu (2.1.3) vrijedi:

$$V_P(S,T_1) = V_C(S,T_1) + Ke^{-r(T_2-T_1)} - S e^{-q(T_2-T_1)}.$$

Iz toga sada slijedi:

$$\begin{aligned} V|_{t=T_1} &= \max\{V_C(S,T_1), V_P(S,T_1)\} \\ &= V_C(S,T_1) + e^{-q(T_2-T_1)}(Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S)^+. \end{aligned}$$

Sada po principu superpozicije za linearne jednadžbe (vidjeti [6]) vrijedi

$$V_{ch}(S,t) = V_C(S,t) + e^{-q(T_2-T_1)}\hat{V}(S,t)$$

gdje je $\hat{V}(S,t)$ jednako izrazu $e^{-q(T_2-T_1)}$ pomnoženim s cijenom put opcije s datumom dospijeća T_1 i cijenom izvršenja $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$.

Poglavlje 3

Američke opcije

U ovom se poglavlju fokusiramo na američke call i put opcije. Kao što je već gore spomenuto, kod američke opcije vlasnik ima pravo na kupnju/prodaju temeljne imovine na koju opcija glasi u bilo kojem trenutku do njenog isteka, tj. do dana dospijeća. S obzirom na to, modeliranje cijene američkih opcija će biti nešto drugačije od onog za europske; prvo što možemo sa sigurnošću zaključiti jest da cijena američke opcije, zbog toga što nudi više mogućnosti, ne može biti manja od cijene ekvivalentne europske opcije. Stoga je glavno pitanje je li vlasniku američke opcije isplativo platiti veću premiju za mogućnost ranijeg iskorištavanja opcije, a odgovor ovisi o njegovoj strategiji i odabiru pravog trenutka za realizaciju opcije.
Započet ćemo poglavlje s nekoliko teorema.
Koristimo oznake

$$\begin{aligned} C_t &= \text{cijena američke call opcije} \\ S_t &= \text{cijena američke put opcije} \\ K &= \text{cijena izvršenja} \\ S_t &= \text{cijena temeljne imovine.} \end{aligned}$$

Teorem 3.0.1. *Ako tržiste ne dopušta arbitražu, za svaki $t \in [0, T]$ mora vrijediti:*

$$\begin{aligned} C_t &\geq (S_t - K)^+ \qquad (3.1) \\ P_t &\geq (K - S_t)^+. \end{aligned}$$

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju za call opciju, analogno se pokaže i za put.
Prepostavimo suprotno, da tvrdnja (3.1) ne vrijedi, tj. postoji $t \in [0, T\rangle$ takav da je

$$C_t < S_t - K \qquad (3.2)$$

(jer je $C_t > 0$, umjesto $C_t < (S_t - K)^+$ možemo pisati samo gornji izraz). Ukoliko to vrijedi, investitor može iskoristiti gotovinu u iznosu C_t za kupnju američke opcije u trenutku t i u istom tom trenutku iskoristiti opciju; kupuje dionicu (ili neku drugu temeljnu imovinu) po cijeni K i odmah ju prodaje na tržištu po njenoj trenutnoj cijeni, S_t. Zbog (3.2), sada je tok novca ovog investitora jednak $S_t - C_t - K > 0$, što znači da je investitor ostvario trenutni bezrizični profit. No, to je nemoguće zbog pretpostavke da tržište ne dopušta arbitražu te stoga (3.1) mora biti istinita. □

Kao što smo gore već i spomenuli, logično je da vrijede sljedeće dvije tvrdnje:

$$\begin{aligned} C_t &\geq c_t \\ P_t &\geq p_t \end{aligned} \tag{3.3}$$

(gdje je c_t cijena analogne europske call opcije, a p_t europske put opcije).
Posebno, vrijedi i sljedeće:

Teorem 3.0.2. *Ukoliko se po temeljnoj imovini (dionici) ne isplaćuju dividende, vrijedi*

$$C_t = c_t.$$

Drugim riječima, mogućnost ranijeg iskorištavanja kod američke opcije nema koristi kod opcija za dionice koje ne isplaćuju dividende.

Tvrdnja teorema ne vrijedi kod američkih put opcija i kod call opcija za dionice s isplatom dividendi.
Iako za američke opcije ne vrijedi call - put paritet kao kod europskih, imamo sljedeću relaciju:

Teorem 3.0.3. *Neka su C, P američka call i put opcija za dionice bez isplate dividendi. Tada vrijedi:*

$$S_t - K < C_t - P_t \leq S_t - Ke^{-r(T-t)}. \tag{3.4}$$

Dokaz. Iz tvrdnje (3.3), call - put pariteta za europske opcije i gornjeg teorema slijedi:

$$P_t \geq p_t = c_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t = C_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

čime je desna strana tražene relacije (3.4) dokazana. Da bismo pokazali i lijevu stranu, konstruirat ćemo dva portfelja u trenutku t:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= C + K \\ \Phi_2 &= P + S. \end{aligned}$$

Ako u periodu $[t, T]$ američka put opcija P nije iskorištena, vrijedit će:

$$\begin{aligned} V_T(\Phi_1) &= (S_T - K)^+ + Ke^{r(T-t)} \\ V_T(\Phi_2) &= (K - S_T)^+ + S_T. \end{aligned}$$

Stoga, kada je $K \geq S_T$, vrijedi

$$V_T(\Phi_1) = Ke^{r(T-t)} > K = V_T(\Phi_2).$$

Kada je $K < S_T$, imamo

$$V_T(\Phi_1) = S_T + K(e^{r(T-t)} - 1) > S_T = V_T(\Phi_2).$$

Drugim riječima, imamo

$$\mathbb{P}(V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)) = 1.$$

Neka sada vrijedi da je put opcija P iskorištena ranije, u trenutku $\tau \in \langle t, T \rangle$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} V_\tau(\Phi_1) &= C_\tau + Ke^{r(\tau-t)} \\ V_\tau(\Phi_2) &= (K - S_\tau)^+ + S_\tau. \end{aligned}$$

Sada ponovno pomoću gornjeg teorema i tvrdnje za europske opciju dobivamo

$$V_\tau(\Phi_1) > (S_\tau - K)^+ + Ke^{r(\tau-t)} \geq V_\tau(\Phi_2).$$

Time smo ponovno dobili

$$\mathbb{P}(V_T(\Phi_1) > V_T(\Phi_2)) = 1.$$

Sada smo pokazali da u svakom slučaju, zbog teorema (1.2.3), mora vrijediti

$$\begin{aligned} V_t(\Phi_1) &> V_t(\Phi_2) \\ C_t + K &> P_t + S_t. \end{aligned}$$

Time je dokazana i lijeva strana naše tvrdnje. □

Sada prelazimo na modeliranje cijene američke opcije. Njeno određivanje je problem bez ograničenja koji smo već spomenuli: uz nepoznatu funkciju, moramo pronaći i područje na kojem tražimo rješenje dane PDJ. U ovom slučaju, uz pronalazak funkcije koja opisuje cijenu američke opcije, cilj nam je pronaći i tzv. **granicu optimalnog zaustavljanja** (*eng. optimal exercise boundary*) koja razdvaja domenu $\Sigma : \{0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ na područje nastavka i područje zaustavljanja. Drugim riječima, granica optimalnog zaustavljanja razdvaja domenu na područje gdje je optimalno iskoristiti opciju te na ono gdje je optimalno još ju neko vrijeme zadržati. Mi ćemo u modelu tražiti rješenje određene PDJ samo u području nastavka te stoga moramo znati njegovu granicu.
Počet ćemo s najjednostavnijim oblikom američke opcije, za koju možemo dobiti konkretno rješenje,tj. zatvorenu formulu.

3.1 Perpetualne američke opcije

Perpetualna američka opcija nema datum dospijeća pa time vlasnik opcije ima pravo na kupnju/prodaju temeljne imovine po cijeni izvršenja u bilo kojem trenutku u budućnosti. Prvo ćemo navesti neka svojstva takve opcije:

1. Budući da ne postoji dan dospijeća, cijena opcije ne ovisi o vremenu, tj $V = V(S)$.

2. Cijena opcije nikad nije manja od funkcije isplate, tj.

$$\begin{aligned} V(S) &\geq (S-K)^+, \quad \text{(call opcija)} \\ V(S) &\geq (K-S)^+, \quad \text{(put opcija)} \end{aligned}$$

   (u suprotnom bi postojala mogućnost za arbitražu).

3. Ako sa $V_L(S,t)$ označimo cijenu američke opcije s istom cijenom izvršenja K, ali koja ima datum dospijeća T, vrijedi:

$$V(S) \geq V_L(S,t).$$

4. Promatrajmo sada konkretno put opciju. Raspon cijena temeljne imvovine S, $0 \leq S < \infty$, možemo podijeliti na dva područja; područje nastavka Σ_1 i područje zaustavljanja Σ_2. Kada je $S \in \Sigma_1$, vrijedi

$$V(S) > (K-S)^+ \tag{3.5}$$

   što znači da bi investitor trebao još zadržati opciju kako bi izbjegao gubitak. S druge strane, kad je $S \in \Sigma_2$ imamo:

$$V(S) = (K-S)^+. \tag{3.6}$$

   Investitor sada treba odmah iskoristiti opciju.

Očito vrijedi sljedeće za put opciju: ukoliko je cijena temeljne imovine na tržištu S dovoljno mala, investitor bi trebao odmah iskoristiti opciju, tj. $S \ll 1, S \in \Sigma_2$. S druge strane, ako je $S \geq K$, budući da je tada isplata 0, investitor bi trebao zadržati opciju, tj, $S \geq K, S \in \Sigma_1$. Dakle, zaključujemo da postoji $S_0 \in \langle 0, K \rangle$ t.d.

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{S_0 \leq S < \infty\} \\ \Sigma_2 &= \{0 \leq S < S_0\} \end{aligned}$$

gdje se S_0 naziva **granica optimalnog zaustavljanja**. Zadatak je upravo odrediti tu granicu S_0 zajedno s funkcijom $V(S)$.

Kod modeliranja ćemo se fokusirati na perpetualnu američku **put** opciju; želimo odrediti cijenu opcije $V(S)$ u Σ_1 i granicu optimalnog zaustavljanja S_0.
Slično kao u prethodnom poglavlju, koristeći Δ - hedging tehniku te iz Itôve formule, dobit ćemo sljedeći problem za $V(S)$:

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2} + rS\frac{dV}{dS} - rV = 0 \quad (S_0 < S < \infty) \\ V(S_0) = K - S_0 \\ V(\infty) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

(po definiciji je $S_0 < K$, pa kada je $S = S_0$ isplata je jednaka $(K - S_0)^+ = K - S_0$).
Ovo je sada rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu (ODJ) drugog reda u intervalu $[S_0, \infty\rangle$.
Prvo ćemo pronaći dva linearno nezavisna posebna rješenja za jednadžbu iz (3.7). Definiramo

$$V = S^\alpha$$

i uvrstimo u gornju jednadžbu da bi dobili izraz za α:

$$\frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + (r - \frac{\sigma^2}{2})\alpha - r = 0.$$

Imamo dva korijena ove jednadžbe: $\alpha = 1$ i $\alpha = -\frac{2r}{\sigma^2}$. To znači da je opće rješenje jednadžbe pod (3.7) jednako

$$V(S) = AS + BS^{-\frac{2r}{\sigma^2}}.$$

A i B određujemo pomoću rubnih uvjeta u (3.7):

$$A = 0, \qquad B = S_0^{\frac{2r}{\sigma^2}}(K - S_0).$$

Time je rješenje početnog problema jednako

$$V(S, S_0) = \Big(\frac{S_0}{S}\Big)^{\frac{2r}{\sigma^2}}(K - S_0).$$

Kao što vidimo, rješenje ovisi o S_0 koji još želimo odrediti.
S_0 je granica optimalnog zaustavljanja pa stoga vrijednost opcije mora postizati maksimum upravo u toj točki; drugim riječima, investitor postiže maksimalnu isplatu ukoliko odluči iskoristiti opciju kada je $S = S_0$.
Da bismo razlikovali od oznaka iz gornjeg problema (3.7), ovdje ćemo granicu optimalnog zaustavljanja označiti sa $S = S_0^*$:

$$V(S; S_0^*) = \max_{0 \le S_0 \le K} V(S; S_0) = \max_{0 \le S_0 \le K} \Big(\frac{S_0}{S}\Big)^{\frac{2r}{\sigma^2}}(K - S_0).$$

Neka je

$$F(S_0) = \left(\frac{S_0}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} (K - S_0).$$

Tada vrijedi:

$$\frac{dF}{dS_0} = \left(\frac{S_0}{S}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \left[\frac{2r}{\sigma^2}\frac{K}{S_0} - \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)\right].$$

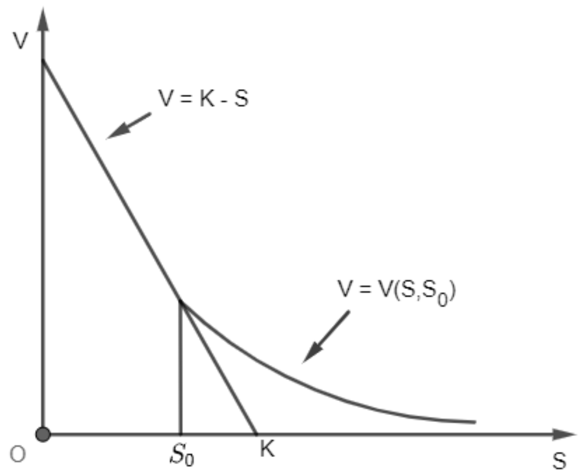
Da bismo odredili S_0^*, izjednačimo gornju derivaciju s 0 i dobijemo:

$$S_0^* = \frac{K}{1 + \frac{\sigma^2}{2r}}.$$

Kada je $S_0 = S_0^*$, $V(S; S_0)$ dostiže svoju maksimalnu vrijednost:

$$V(S; S_0^*) = \frac{\sigma^2}{2r}\left(\frac{K}{1 + \frac{\sigma^2}{2r}}\right)^{\frac{2r+\sigma^2}{\sigma^2}} S^{-\frac{2r}{\sigma^2}}.$$

Sada ćemo još malo promotriti geometrijsko značenje gornjih jednadžbi. Promatramo sljedeću sliku:



Slika 3.1: Geometrijska interpretacija modela

Neka je α nagib krivulje cijene opcije $V(S) = V(S; S_0)$ u $S = S_0$, tj.

$$\alpha = \frac{\partial V(S; S_0)}{\partial S}\bigg|_{S=S_0} = \frac{2r}{\sigma^2}\left(1 - \frac{K}{S_0}\right).$$

Kada je $S_0 < S_0^*$, vrijedi da je $\alpha < -1$, tj. ako je $0 < S - S_0 \ll 1$ je

$$\frac{V(S;S_0) - V(S_0;S_0)}{S - S_0} < -1$$

odnosno

$$V(S;S_0) - (K - S_0) < -(S - S_0).$$

Stoga kada je $S < S_0$, tj. kada je S dovoljno blizu S_0, vrijedi

$$V(S;S_0) < K - S.$$

No, to je nemoguće; imamo kontradikciju s relacijama (3.5) i (3.6).
S druge strane, kad je $S_0 \geq S_0^*$, vrijedi da je $\alpha \geq -1$. Dodatno, vrijedi $\alpha = -1$ ako i samo ako je $S_0 = S_0^*$. Geometrijski, to znači da jedino u slučaju kada je $S_0 = S_0^*$ vrijedi da je krivulja cijene opcije $V = V(S;S_0)$ tangenta na krivulju isplate $V = K - S$ u $S = S_0$.
Po (3.6) vrijedi: kada je $S \in \Sigma_2$, imamo

$$V(S) = (K - S)^+.$$

No kako je $S \leq S_0 < K$, možemo zapisati $(K - S)^+ = K - S$.
Stoga imamo:

$$V(S) = \begin{cases} V(S;S_0), S \in \Sigma_1 \\ (K - S), S \in \Sigma_2 \end{cases}$$

gdje su Σ_1 i Σ_2 definirani kao prije.
Sada smo dobili potpuni model za cijenu američke perpetualne put opcije:
pronaći $\{V(S), S_0\}$ t.d.

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2V}{dS^2} + rS\frac{dV}{dS} - rV = 0, \quad (S_0 < S < \infty) \\ V(S_0) = K - S_0 \\ V'(S_0) = -1 \\ V(\infty) = 0. \end{cases}$$

Ovaj se problem naziva **problem bez ograničenja**.

Sada ćemo promotriti slučaj gdje se po temeljnoj imovini isplaćuju dividende, i to po fiksnoj stopi q (neovisnoj o vremenu). Matematički model tada glasi:
pronađi $\{V(S), S_0\}$ t.d.

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2V}{dS^2} + (r - q)S\frac{dV}{dS} - rV = 0, \quad (S_0 < S < \infty) \\ V(S_0) = K - S_0 \\ V'(S_0) = -1 \\ V(\infty) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Sličnim postupkom kao gore doći ćemo do rješenja danog problema. Uvrstimo $V = S^{\alpha}$ da bismo dobili jednadžbu za α:

$$\frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + (r - q - \frac{\alpha^2}{2})\alpha - r = 0.$$

Imamo dva korijena:

$$\alpha = \alpha_{\pm} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

gdje je

$$\omega = \frac{-r + q + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}.$$

Opće rješenje jednadžbe pod (3.8) je stoga

$$V(S) = AS^{\alpha_+} + BS^{\alpha_-}$$

te uvrštavanjem danih rubnih uvjeta dobivamo konačno rješenje:

$$V(S) = -\frac{1}{\alpha_-}\left(\frac{K}{1 - \frac{1}{\alpha_-}}\right)^{1-\alpha_-} S^{\alpha_-}.$$

Do sada smo se fokusirali isključivo na put opciju pa sada želimo odrediti i cijenu call opcije. Promatrat ćemo call opcije kod kojih se za temeljnu imovinu isplaćuju dividende, ponovno po fiksoj stopi q.
Za razliku od put opcije, ovdje je područje nastavka $\Sigma_1 = \{0 \leq S \leq S_0\}$, a područje zaustavljanja je $\Sigma_2 = \{S_0 \leq S < \infty\}$ (S_0 je ponovno granica optimalnog zaustavljanja.) Sada je $S_0 > K$ pa pripadni problem bez ograničenja glasi:

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2} + (r - q)S\frac{dV}{dS} - rV = 0, \quad (0 < S < S_0) \\ V(S_0) = S_0 - K \\ V'(S_0) = 1 \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

Iako bismo ovaj problem mogli riješiti analogno kao i kod put opcije, ipak ćemo odabrati malo elegantnije rješenje koje se zasniva na call - put simetriji za perpetualne američke opcije.

Teorem 3.1.1. *Neka su $V_c(S;r,q)$, $V_p(S;r,q)$ i $S_c(r,q)$, $S_p(r,q)$ cijene i granice optimalnog zaustavljanja za perpetualne američke call i put opcije (s plaćanjem dividendi). Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} V_c(S;r,q) &= \frac{S}{K} V_p(\frac{K^2}{S};q,r) \\ \sqrt{S_c(r,q) S_p(q,r)} &= K \end{aligned}$$

gdje je K cijena izvršenja.

Dokaz se može pronaći u [3, str. 122].
Sada možemo, na temelju gornjeg teorema i formule za američku put opciju, izvesti cijenu američke perpetualne call opcije.
Prvo imamo sljedeći izraz:

$$\alpha_-(q,r) = 1 - \alpha_+(r,q) \tag{3.9}$$

što možemo izvesti iz:

$$\begin{aligned} \alpha_-(q,r) &= \frac{-q+r+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{(q-r-\frac{\sigma^2}{2})^2 + 2\sigma^2 q} \\ &= -\left[\frac{-r+q-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})^2 + 2\sigma^2 r}\right] \\ &= 1 - \alpha_+(r,q). \end{aligned}$$

Sada, uz teorem (3.1.1) i jednakost (3.9), imamo:

$$\begin{aligned} V_c(S;r,q) &= \left[\frac{K}{y} V_p(y;q,r)\right]_{y=\frac{K^2}{S}} \\ &= \left[\frac{-K}{\alpha_-(q,r)}\left(\frac{K}{1-\frac{1}{\alpha_-(q,r)}}\right)^{1-\alpha_-(q,r)} y^{-1+\alpha_-(q,r)}\right]_{y=\frac{K^2}{S}} \\ &= \frac{1}{\alpha_+(r,q)-1}\left(1-\frac{1}{\alpha_+(r,q)}\right)^{\alpha_+(r,q)} K^{1-\alpha_+(r,q)} S^{\alpha_+(r,q)} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} S_c(r,q) &= \frac{K^2}{S_p(q,r)} \\ &= K\frac{\alpha_-(q,r)-1}{\alpha_-(q,r)} \\ &= K\frac{\alpha_+(r,q)}{\alpha_+(r,q)-1}. \end{aligned}$$

Dodatno, kada je $q = 0$, tj. kada se po temeljnoj imovini ne isplaćuju dividende, vrijedi da je $\alpha_+ = 1$ pa je stoga

$$\begin{aligned} S_c(r, 0) &= \infty \\ V_c(S; r, 0) &= S. \end{aligned}$$

3.2 Američke opcije s datumom dospijeća

Sada želimo postaviti model za američke opcije koje imaju određen datum dospijeća $t = T$. U ovom slučaju, za razliku od perpetualne američke opcije, zatvorena formula za cijenu opcije ne postoji pa nam je ovdje stoga cilj samo izvesti model. Dodatno ćemo pokazati dekompoziciju za njenu cijenu, koja povezuje američku i europsku opciju. Promatrat ćemo ponovno put opciju i to u slučaju gdje nema isplate dividendi po temeljnoj imovini.
Ponovno imamo podjelu na dva područja: prvo je područje nastavka, Σ_1, gdje vrijedi

$$V(S, t) > (K - S)^+$$

i područje zaustavljanja, Σ_2, gdje je

$$V(S, t) = (K - S)^+.$$

Između njih se nalazi granica optimalnog zaustavljanja $\Gamma : S = S(t)$.
Slično kao u prethodnom slučaju, no ovaj put uz dodatak vremenske komponente, vrijedi

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(S, t) | S(t) \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T\} \\ \Sigma_2 &= \{(S, t) | 0 \leq S \leq S(t), 0 \leq t \leq T\} \end{aligned}$$

te

$$S(t) < K, \quad (0 \leq t < T).$$

Korištenjem Δ - hedging tehnike te uz pomoć Itôve formule, imamo sljedeći zaključak: kada je $(S, t) \in \Sigma_1$, cijena opcije $V = V(S, t)$ zadovoljava Black - Scholesovu jednadžbu:

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (\Sigma_1). \tag{3.10}$$

Na granici optimalnog zaustavljanja Γ je

$$\begin{aligned} V(S(t), t) &= K - S(t) \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S(t), t) &= -1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dodatno vrijedi, kada $S \to \infty$, tada $V \to 0$ te

$$V(S,T) = (K - S)^+.$$

Dakle, da bismo odredili cijenu američke put opcije, moramo pronaći par funkcija $\{V(S,t), S(t)\}$ u Σ_1 koje zadovoljavaju problem (3.10) - (3.11). Ovo je ponovno problem bez ograničenja za danu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu.
Ukoliko u model želimo dodati isplatu dividendi, moramo samo malo prilagoditi danu parcijalnu jednadžbu:

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

(q je fiksna stopa isplate).
Za call opciju možemo ponovno koristiti call - put simetriju, točnije njenu generalizaciju za sve američke opcije s datumom dospijeća.

Teorem 3.2.1. *Neka su $V_c(S,t;r,q)$, $V_p(S,t;r,q)$ i $S_c(t;r,q)$, $S_p(T;r,q)$ cijene i granice optimalnog zaustavljanja za američku call i put opciju s istom cijenom izvršenja K, datumom dospijeća T i stopom isplate dividendi q (r je bezrizična kamatna stopa). Tada vrijedi:*

$$V_c(S,t;r,q) = \frac{S}{K}V_p(\frac{K^2}{S},t;q,r)$$

i

$$\sqrt{S_c(t;r,q)S_p(t;q,r)} = K.$$

Završit ćemo s financijskom dekompozicijom cijene američke opcije: možemo ju dobiti kao zbroj cijene europske opcije, koja je definirana Black - Scholesovom formulum, i dodatnog iznosa koji proizlazi iz mogućnosti ranijeg iskorištavanja opcije.
Prvo ćemo definirati tzv. temeljno rješenje Black - Scholesove jedndžbe.

Definicija 3.2.2. *G(S,t;ξ,T) je* ***fundamentalno rješenje Black - Scholesove jednadžbe*** *ukoliko zadovoljava sljedeći problem za Black - Scholesovu jednadžbu:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}V = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V(S,T) = \delta(S-\xi) \end{cases}$$

gdje $0 < S < \infty, 0 < \xi < \infty, 0 < t < T, \delta(x)$ *je Diracova delta funkcija.*

Sada želimo izvodom doći do izraza za $G(S,t;\xi,T)$. Definiramo

$$x = \ln\frac{S}{\xi} \qquad \tau = T - t.$$

Uz tu zamjenu, gornji problem postaje:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \tau} - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - (r - q - \dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial V}{\partial x} + rV = 0 \\ V(x,0) = \frac{1}{\xi}\delta(x) \end{cases} \tag{3.12}$$

gdje $x \in \mathbb{R}, 0 < \tau \leq T$.
Sada napravimo sljedeću transformaciju:

$$V = e^{\alpha\tau+\beta x}u \tag{3.13}$$

gdje su:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{r-q}{\sigma^2}$$
$$\alpha = -r - \frac{1}{2\sigma^2}\Big(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\Big)^2.$$

Sada problem (3.12) svodimo na:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} - \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = e^{-\beta x}\frac{1}{\xi}\delta(x) = \frac{1}{\xi}\delta(x). \end{cases}$$

Rješenje ovog problema početne vrijednosti za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu je:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\xi\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2\tau}\Big).$$

Korištenjem transformacija (3.13) imamo

$$V(x,\tau) = \frac{1}{\xi\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\Big(-r\tau - \frac{1}{2\sigma^2\tau}[x + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\tau]^2\Big).$$

Konačno, povratkom na originalne varijable (S,t) dobivamo fundamentalno rješenje Black - Scholesove jednadžbe:

$$G(S,t;\xi,T) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\xi\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\Big[\ln\frac{S}{\xi} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\Big]^2\Big).$$

Sada navodimo teorem koji će nam kasnije trebati kod dokaza glavnog rezultata ovog poglavlja, dekompozicije cijene američke opcije.

Teorem 3.2.3. *Ako fundamentalno rješenje $G(S,t;\xi,\eta)$ gledamo kao funkciju varijabli ξ,η, tada je to istovremeno i fundamentalno rješenje pripadne pridružene jednadžbe za Black - Scholesovu. Drugim riječima, ako je*

$$\upsilon(\xi,\eta) = G(S,t;\xi,\eta)$$

tada $\upsilon(\xi,\eta)$ zadovoljava sljedeći problem:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\upsilon}{\partial\eta} + \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\xi^2\upsilon) - (r-q)\dfrac{\partial}{\partial\xi}(\xi\upsilon) - r\upsilon = 0 \\ \upsilon(\xi,t) = \delta(\xi - S) \end{cases} \tag{3.14}$$

gdje je $0 < \xi < \infty, 0 < S < \infty, t < \eta$

Gornjim teoremom je zapravo pokazano sljedeće : ako je fundamentalno rješenje problema (3.14) upravo $G^*(\xi,\eta;S,t)$, tada je

$$G(S,t;\xi,\eta) = G^*(\xi,\eta;S,t).$$

Dokaz ove tvrdnje, kao i gornjeg teorema, može se pronaći u [3, str. 129-130].

Sada možemo uspostaviti formulu za dekompoziciju cijene američke opcije:

Teorem 3.2.4. *Neka je V(S,t) cijena američke put opcije. Tada je:*

$$V(S,t) = V_E(S,t) + e(S,t)$$

gdje je $V_E(S,t)$ cijena europske put opcije

$$V_E(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-\hat{d}_2) - S\,e^{-q(T-t)}N(-\hat{d}_1)$$

a e(S,t) predstavlja premiju za mogućnost ranijeg iskorištavnja opcije:

$$e(S,t) = \int_t^T d\eta \int_0^{S(\eta)} (Kr - q\xi)G(S,t;\xi,\eta)d\xi.$$

$G(S,t;\xi,\eta)$ je fundamentalno rješenje Black - Scholesove jednadžbe.

Dokaz. Promatramo američku put opciju. Budući da u domeni $\Sigma = \{0 \le S < \infty, 0 \le t \le T\}$ cijena opcije $V(S,t)$ ima neprekidnu prvu derivaciju, a u svakom području ima i neprekidnu drugu derivaciju, vrijedi da $V(S,t)$ zadovoljava:

$$-\mathcal{L}V(S,t) = \begin{cases} 0, & (S,t) \in \Sigma_1 \\ Kr - qS, & (S,t) \in \Sigma_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

gdje je $\mathcal{L}$ Black - Scholesov operator. Obje strane u (3.15) pomnožimo s $G^*(\xi, \eta; S, t)$ i integriramo po domeni $\{0 \leq \xi < \infty, t + \epsilon \leq \eta \leq T\}$. Kako Σ_2 sada možemo zapisati $\Sigma_2 = \{0 \leq \xi \leq S(\eta), 0 \leq \eta \leq T\}$, a $S(\eta)$ je monotona, vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}
&\int_{t+\epsilon}^{T} d\eta \int_0^{S(\eta)} (Kr - q\xi) G^*(\xi, \eta; S, t) d\xi \\
&= - \int_{t+\epsilon}^{T} d\eta \int_0^{\infty} G^*(\xi, \eta; S, t) \mathcal{L} V d\xi \\
&= - \int_{t+\epsilon}^{T} d\eta \int_0^{\infty} [G^*(\xi, \eta; S, t) \mathcal{L} V(\xi, \eta) - V(\xi, \eta) \mathcal{L}^* G^*(\xi, \eta; S, t)] d\xi \\
&= - \int_{t+\epsilon}^{T} d\eta \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \eta}(G^* V) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^2 G^* \frac{\partial V}{\partial \xi}) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi}(V \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^2 G^*)) + (r - q) \frac{\partial(\xi V G^*)}{\partial \xi} \right] d\xi
\end{aligned}$$

($\mathcal{L}^*$ je operator definiran sa $\mathcal{L}^* u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}(x)u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x)u) + c(x)u)$.
Kada $\xi \to 0$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\xi^2 G^* \frac{\partial V}{\partial xi} &\to 0 \\
V \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^2 G^*) &\to 0 \\
\xi V G^* &\to 0.
\end{aligned}$$

Stoga imamo:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} G^*(\xi, t + \epsilon; S, t) V(\xi, t + \epsilon) d\xi \\
&= \int_0^{\infty} G^*(\xi, T; S, t) V(\xi, T) d\xi + \int_{t+\epsilon}^{T} d\eta \int_0^{S(\eta)} (Kr - q\xi) G^*(\xi, \eta; S, t) d\xi.
\end{aligned}$$

Sada pustimo da $\epsilon \to 0$. Koristeći (3.14) te tvrdnju iza teorema, napokon slijedi:

$$\begin{aligned}
V(S, t) &= \int_0^{\infty} G(S, t; \xi, T)(K - \xi)^+ d\xi + \int_t^T d\eta \int_0^{S(\eta)} (Kr - q\xi) G(S, t; \xi, \eta) d\xi \\
&= V_E(S, t) + e(S, t).
\end{aligned}$$

□

Za kraj još želimo odrediti granicu optimalnog zaustavljanja $S = S(t)$. Točnije, pomoću gornjeg teorema možemo odrediti integralnu jednažbu koju granica optimalnog zasutavljanja zadovoljava.

Teorem 3.2.5. *Optimalna granica zaustavljanja američke put opcije $S = S(t)$ zadovoljava sljedeću ne-linearnu Volterra integralnu jednadžbu druge vrste:*

$$
\begin{aligned}
S(t) = K + S(t)e^{-q(T-t)}N\left(-\frac{-\ln\frac{S(t)}{K} + \beta_2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
-Ke^{-r(T-t)}N\left(-\frac{-\ln\frac{S(t)}{K} + \beta_1(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
-Kr\int_t^T e^{-r(\eta-t)}\left[1 - N\left(\frac{-\ln\frac{S(t)}{S(\xi)} + \beta_1(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}\right)\right]d\eta \\
+qS\int_t^T e^{-q(\eta-t)}\left[1 - N\left(\frac{-\ln\frac{S(t)}{S(\xi)} + \beta_2(\eta-t)}{\sigma\sqrt{\eta-t}}\right)\right]d\eta
\end{aligned}
$$

gdje su

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= r - q - \frac{\sigma^2}{2} \\
\beta_2 &= r - q + \frac{\sigma^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Dok je rješenje gornje jednadžbe prilično komplicirano za pronaći, može se nešto jednostavnije izvesti asimptotski izraz za granicu optimalnog zaustavljanja $S = S(t)$ blizu krajnje točke $t = T$.

Dokaz gornjeg teorema, kao i svi ostali detalji o temi, mogu se pronaći u [3].

Bibliografija

[1] M. Duspara, *Parcijalne diferencijalne jednadžbe paraboličkog tipa*, Disertacija, University of Zagreb, Faculty of Science, Department of Mathematics, 2022.

[2] L. C Evans, *Partial differential equations*, sv. 19, American Mathematical Society, 2022.

[3] L. Jiang, *Mathematical modeling and methods of option pricing*, World Scientific Publishing Company, 2005.

[4] Nika Kajfeš, *Određivanje vrijednosti egzotičnih opcija*, Disertacija, University of Zagreb, Faculty of Science, Department of Mathematics, 2016.

[5] D. Kriventsov, *Free boundary problems - introduction*, `https://sites.math.rutgers.edu/~dnk34/Notes01.pdf`, pristupljeno 30. kolovoza 2023.

[6] S. Krešić Jurić, *Parcijalne diferencijalne jednadžbe, skripta (radna verzija)*, PMF Split, 2018.

[7] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 2*, PMF Zagreb, 2023.

Sažetak

Glavna ideja ovog rada bila je modeliranje cijene opcije, financijskog instrumenta koji investitorima na tržištu često služi kao metoda zaštite od rizika. Cilj je bio pomoću diferencijalnih jednadžbi postaviti model te, ako je to moguće, doći do zatvorene formule za cijenu opcije u trenutku t i uz cijenu temeljne imovine S.

U prvom smo se poglavlju upoznali s ključnim pojmovima, i financijskim i matematičkim, koji su nam bili potrebni kroz cijeli rad. Tako smo saznali nešto više o opcijama, uveli pojmove poput arbitraže i Brownovog gibanja, te na kraju napravili uvod u parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Drugo je poglavlje bilo posvećeno konkretno europskim opcijama. Nakon uvođenja nekoliko osnovnih pretpostavki, izveli smo jednu od najpoznatijih jednadžbi u svijetu financija, Black - Scholesovu jednadžbu, čijim smo rješavanjem došli do formule za cijenu europske opcije: Black - Scholesova formula. Nakon toga smo malo generalizirali početne pretpostavke kako bismo dobili nešto općenitiji model, primjenjiv u realnom svijetu, te smo u konačnici postavili modele (i izveli formule) za nekoliko vrsta egzotičnih opcija.

Rad smo završili s trećim poglavljem gdje smo se bavili isključivo američkim opcijama. Kako je kod američke opcije koncept isplate nešto kompliciraniji, generalno ne postoji zatvorena formula za cijenu. Ipak smo kod perpetualne američke opcije, koja ja nešto jednostavnija, uspjeli izvesti konkretnu formulu, dok smo za opći slučaj razvili model te dokazali formulu za dekompoziciju cijene američke opcije, koja se sastoji od cijene europske opcije te dodatne premije.

Summary

The main idea behind this work was to model the price of an option, a financial instrument that often serves investors as a method of risk protection in the market. The goal was to establish a model using partial differential equations and then, if possible, derive a closed-form solution for the option price at time t, with underlying asset price being S.
In the first chapter, we defined some of the key concepts, both financial and mathematical, that were necessary throughout the paper. We learned more about options, introduced concepts such as arbitrage and Brownian motion, and, in the end, finalized the chapter with an introduction to partial differential equations.
The second chapter was dedicated specifically to European options. After introducing few basic assumptions, we derived one of the most famous equations in the world of finance, the Black - Scholes equation, which we then solved to obtain the formula for the price of an European option: the Black - Scholes formula. Following that, we made a few changes to the basic assumptions to obtain a more general model, applicable in the real world, and concluded with deriving models for several types of exotic options.
The work was finalized with the third chapter, where we exclusively dealt with American options. As the concept of payout for American options is slightly more complicated, a closed-form solution for the option price generally does not exist. We still managed to derive a specific formula for perpetual American options, which are somewhat simpler, while for the general case, we developed a model and proved a formula for the decomposition of the American option price that consists of the European option price and an additional premium.

Životopis

Rođena sam 5.10.1999. u Zagrebu, gdje sam i završila osnovnu školu Ivana Filipovića te potom i 15. gimnaziju. 2018. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike na PMF-u u Zagrebu, gdje stječem titulu prvostupnika matematike tri godine kasnije, 2021. godine. Odmah po završetku upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike na istom fakultetu. Na posljednjoj, petoj godini, sam se zaposlila kao analitičar podataka u jednoj firmi kako bih se malo upoznala sa svijetom rada.