Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sebastijan Horvat

Bisimulacije i bisimulacijske igre za Verbruggeinu semantiku

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2024.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sebastijan Horvat

Bisimulacije i bisimulacijske igre za Verbruggeinu semantiku

DOKTORSKI RAD

Mentori:

prof. dr. sc. Mladen Vuković, izv. prof. dr. sc. Tin Perkov

Zagreb, 2024.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Sebastijan Horvat

Bisimulations and bisimulation games for Verbrugge semantics

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisors:

Prof. dr. Mladen Vuković, Dr. Tin Perkov

Zagreb, 2024.

ZAHVALA

Zahvaljujem se svojim mentorima, profesorima Mladenu Vukoviću i Tinu Perkovu, na svemu što su me naučili, kao i svom uloženom vremenu i trudu pri izradi ove disertacije te usmjeravanju kroz doktorski studij i znanstveno istraživanje. Velika zahvala mojoj obitelji na podršci.

SAŽETAK

U ovoj disertaciji proučavaju se bisimulacije i bisimulacijske igre za Verbruggeinu semantiku logike interpretabilnosti.

Prvo se razmatraju bisimulacije i konačne bisimulacije za Verbruggeinu semantiku koje su se do sad koristile u literaturi. Dokazuju se svojstva koja one posjeduju te se ističu problemi koji se javljaju pri korištenju tih pojmova. Zatim se daju nove verzije definicija bisimulacija i konačnih bisimulacija koje se nazivaju slabe bisimulacije i konačne slabe bisimulacije (ili w-bisimulacije i n-w-bisimulacije). Dokazuje se da ti novi pojmovi zadržavaju sva dobra svojstva kao i bisimulacije i konačne bisimulacije, ali da vrijedi i više, tj. da nema problema koji su se javljali s ranijim definicijama. Kako bi se u dokazima lakše dokazala (n-)w-bisimuliranost svjetova, dokazuje se da je (n-)w-bisimuliranost svjetova ekvivalentna pobjedničkoj strategiji branitelja u odgovarajućim igrama (koje se nazivaju (n-)w-bisimulacijske igre).

U nastavku se izlažu nove definicije vezane uz alate koji se koriste pri dokazivanju teorema karakterizacije, a to su standardna translacija te q-saturirano raspetljavanje. Preciznije, definira se signatura jezika dvosortne logike prvog reda u čije će formule standardna translacija preslikavati formule logike interpretabilnosti. Korištenjem svojstava q-saturiranog raspetljavanja i metode selekcije dokazuje se svojstvo konačnih modela za logiku interpretabilnosti.

Konačno, korištenjem prethodno uvedenih pojmova i dokazanih rezultata, dokazuje se glavni rezultat ovog rada. Riječ je o analogonu van Benthemovog teorema karakterizacije za logiku intepretabilnosti uz Verbruggeinu semantiku koji pokazuje da logika interpretabilnosti uz Verbruggeinu semantiku odgovara fragmentu dvosortne logike prvog reda koji je invarijantan na w-bisimulacije.

Ključne riječi: logika interpretabilnosti, Verbruggeina semantika, bisimulacije, bisimulacijske igre, slabe bisimulacije, slabe bisimulacijske igre, van Benthemov teorem karakterizacije

SUMMARY

This doctoral thesis deals with bisimulations and bisimulation games for Verbrugge semantics of interpretability logic.

First, bisimulations and finite bisimulations for Verbrugge semantics that have been used in the literature so far are considered. The properties they possess are proved and the problems that arise when using these notions are highlighted. Then, new notions of the bisimulations and finite bisimulations are given, which are called weak bisimulations and finite weak bisimulations (or w-bisimulations and n-w-bisimulations). It is proved that these new notions still have all the good properties of bisimulations and finite bisimulations, but that they also possess more good properties, i.e. that there are no problems that occurred with earlier definitions. In order to obtain a simpler technique for proving (n-)w-bisimilarity of two worlds in Verbrugge models, it is proved that (n-)w-bisimilarity of worlds is equivalent to the winning strategy of the defender in the corresponding games (called (n-)w-bisimulation games).

In the next part of the thesis, new definitions related to the tools used in proving the characterization theorem are presented, namely standard translation and q-saturated unravelling. More precisely, the signature of the language of the two-sorted first-order logic is defined, into whose formulas the standard translation will map the formulas of the interpretability logic IL. Using the properties of q-saturated unravelling and the selection method, the finite model property of interpretability logic IL is proved.

Finally, using previously introduced concepts and proved results, the main result of this paper is proved. It is an analogue of van Benthem's characterization theorem for the logic of interpretability IL with respect to Verbrugge's semantics, which shows that the logic of interpretability with Verbrugge's semantics precisely corresponds to a fragment of the two-sorted first-order logic that is invariant to w-bisimulations.

Keywords: interpretability logics, Verbrugge semantics, bisimulations, bisimulation games, weak bisimulations, weak bisimulation games, van Benthem's characterization theorem

SADRŽAJ

Uvod

Propozicionalne modalne logike su proširenja logike sudova u kojima je moguće izraziti različite operatore na sudovima koji se neformalno interpretiraju, primjerice, na sljedeće načine: nužnost ili mogućnost (aletičke logike), prošlost ili budućnost (temporalne logike), znanje ili vjerovanje (epistemičke logike) te dokazivost ili konzistentnost (logike dokazivosti). U logici dokazivosti GL (Gödel-Löb) Gödelov predikat dokazivosti Peanove aritmetike (PA) formaliziran je kao modalni operator $\Box$. Veza između modalnog jezika i jezika PA uspostavljena je pomoću pojma aritmetičke interpretacije. R. Solovay [45] je dokazao aritmetičku potpunost sistema GL, tj. da je sistem GL logika dokazivosti PA, u smislu da je formula teorem sistema GL ako i samo ako je svaka njena aritmetička interpretacija teorem aritmetike PA. Pokazalo se da je sistem GL logika dokazivosti i nekih drugih aritmetičkih teorija, pa tako primjerice GL ne razlikuje konačno aksiomatizabilne teorije prvog reda od onih koje to nisu.

Stoga se razmatraju logike interpretabilnosti, proširenja sistema GL binarnim modalnim operatorom $\rhd$ koji formalizira pojam relativne interpretabilnosti između teorija, u istom smislu u kojem modalni operator $\Box$ sistema GL formalizira predikat dokazivosti. Opišimo ukratko što su aritmetičke interpretacije, te što je glavna motivacija za proučavanje logike interpretabilnosti IL. U dovoljno jakoj aritmetičkoj teoriji T, čiji je jezik $\mathscr{L}_T$, moguće je konstruirati binarni predikat interpretabilnosti $\mathtt{Int}_T$ kojim se iskazuje da jedno konačno proširenje od T interpretira drugo konačno proširenje od T. Aritmetičkom interpretacijom nazivamo svako preslikavanje $*$ koje svakoj modalnoj formuli A pridružuje neku formulu $A^* \in \mathscr{L}_T$ tako da vrijedi:

(i) ako je p propozicionalna varijabla tada je p^* aritmetička rečenica

(ii) preslikavanje $*$ komutira s logičkim veznicima (primjerice, $(A \land B)^* = A^* \land B^*$)

(iii) $(A \rhd B)^* = \mathtt{Int}_T(\ulcorner A^* \urcorner, \ulcorner B^* \urcorner)$, pri čemu je $\ulcorner X \urcorner$ numeral Gödelovog broja formule X.

Logika interpretabilnosti aritmetičke teorije T, u oznaci $\mathsf{IL}(T)$, skup je svih modalnih formula A za koje vrijedi $T \vdash A^*$ za svaku aritmetičku interpretaciju $*$. A. Berarducci [1] i V. Y. Shavrukov su neovisno dokazali da vrijedi $\mathsf{IL}(T)$=ILM, ako je T bitno refleksivna teorija, dok je A. Visser [50] dokazao da vrijedi $\mathsf{IL}(T)$=ILP, ako je T konačno aksiomatizabilna i u njoj je dokaziva totalnost funkcije supexp. Iz toga očito slijedi da logike interpretabilnosti bolje razlikuju aritmetičke teorije od logika dokazivosti. Sa ILM je označena logika interpretabilnosti dobivena proširenjem sistema IL principom interpretabilnosti M koji se naziva Montagnin princip interpretabilnosti, a definiran je ovako: $\mathsf{M} \equiv A \rhd B \to A \wedge \Box C \rhd B \wedge \Box C$. Zatim, logika interpretabilnosti ILP dobivena je proširenjem sistema IL principom interpretabilnosti P koji se naziva princip perzistentnosti, a koji je definiran na sljedeći način: $\mathsf{P} \equiv A \rhd B \to \Box(A \rhd B)$. Funkcija supexp je definirana sa $x \mapsto 2^x_x$, pri čemu $2^n_0 := n$ i $2^n_{m+1} := 2^{(2^n_m)}$.

Glavni otvoreni problem vezan uz logike interpretabilnosti je pitanje aksiomatizacije logike interpretabilnosti IL(All) koja je logika interpretabilnosti svih „razumnih aritmetičkih teorija," što je ujedno i glavna motivacija za proučavanje proširenja sistema IL.

U ovom radu mi ne razmatramo aritmetičke interpretacije već se bavimo samo problemima vezanim uz modalnu teoriju modela logika interpretabilnosti.

Relacijska semantika sistema GL su odgovarajući Kripkeovi modeli čije relacije dostiživosti služe za interpretaciju unarnog modalnog operatora $\Box$. Kako je modalni operator $\rhd$ binaran, to je za njegovu interpretaciju potrebna ternarna relacija.

D. de Jongh i F. Veltman [19] su definirali osnovnu semantiku logika interpretabilnosti koja se naziva Veltmanova semantika te su dokazali modalnu potpunost triju logika interpretabilnosti (IL, ILM i ILP) u odnosu na Veltmanovu semantiku. Važno je naglasiti da je u navedenom članku dokazana modalna potpunost u odnosu na konačne modele pa iz toga neposredno slijedi odlučivost tih sistema. Zatim, D. de Jongh i F. Veltman [20] su dokazali modalnu potpunost sistema ILW u odnosu na konačne Veltmanove modele, pa je i taj sistem odlučiv.

E. Goris i J. J. Joosten ([11], [12], [13]) su primjenom nove metode (tzv. *step-by-step* metoda) dokazali modalnu potpunost sistema ILM_0 i ILW^*. No, važno je naglasiti da nisu dokazali modalnu potpunost u odnosu na neku klasu konačnih modela, što je ostavilo otvorenim pitanje odlučivosti tih sistema.

Logike interpetabilnosti ILF i ILP_0 su nepotpune u odnosu na Veltmanovu semantiku ([52], [13]), što je otvorilo pitanje modalne potpunosti u odnosu na neku drugu semantiku, kao i pitanja o odlučivosti i složenosti navedenih sistema.

R. Verbrugge[1] je 1992. godine definirala novu relacijsku semantiku za logike interpretabilnosti kako bi dokazala nezavisnost nekih principa interpretabilnosti. Nova semantika je dobila naziv generalizirana Veltmanova semantika. Zadnjih godina navedena nova semantika se u čast Rineke Verbrugge naziva Verbruggeina semantika.

M. Vuković [55] je odredio karakterističnu klasu Verbruggeinih okvira za princip interpretabilnosti $\mathtt{M}_0$ i dokazao (ne)zavisnost raznih principa interpretabilnosti. D. Vrgoč i M. Vuković [53] su definirali bisimulacije za Verbruggeinu semantiku i dokazali osnovna svojstva. T. Perkov i M. Vuković [38] su dokazali analogon van Benthemovog teorema karakterizacije za logiku interpretabilnosti u odnosu na Veltmanovu semantiku. Zatim, T. Perkov i M. Vuković [39] su primjenom filtracija i bisimulacija između Verbruggeinih modela dali alternativni dokaz da logika IL ima svojstvo konačnih modela (eng. finite model property; kratko: fmp). Tu su bitno koristili rezultat o prijelazu s Verbruggeinih modela na Veltmanove modele [58] i rezultate o konačnim aproksimacijama bisimulacija [7]. Otvoreni je problem je li moguć prijelaz s proizvoljnog Verbruggeinog modela na njemu bisimulirani Veltmanov model. Ostao je otvoren problem je li moguć prijelaz s proizvoljnog Verbruggeinog modela na njemu bisimulirani Veltmanov model, koji je pozitivno riješen u [37].

T. Perkov i M. Vuković [39] su primjenom filtracija dokazali da sistemi ILM i ILM_0 imaju fmp u odnosu na Verbruggeinu semantiku. Dobro je poznato da fmp i potpunost povlače odlučivost nekog sistema. Pokazalo se da je Verbruggeina semantika pogodnija za filtracije nego Veltmanova. Otvoreni je problem vrijedi li fmp za ILM_0 u odnosu na Veltmanovu semantiku.

L. Mikec, T. Perkov i M. Vuković [31] su dokazali odlučivost logika interpretabilnosti ILM_0 i ILW^* i time riješili spomenuti otvoreni problem koji su postavili E. Goris i J. J. Joosten [11]. Ključne tehnike su opet bile filtracije i bisimulacije između Verbruggeinih modela za sistem ILW^*. Ostalo je otvoreno pitanje je li problem ispunjivosti za logike ILR, ILR^*, ILP_0 te ILR_n (n proizvoljan prirodan broj), odlučiv. Djelomični odgovor na to pitanje dali su L. Mikec i M. Vuković [32], dokazavši potpunost i fmp u odnosu na Verbruggeinu semantiku te posljedično odlučivost, za sisteme ILP_0 i ILR. Pritom su koristili tehniku tzv. potpunih oznaka. Tehnika označavanja u dokazima potpunosti predmet je članka Bílková, Goris, Joosten i Mikec [4].

Istraživanja o složenosti problema ispunjivosti, valjanosti i dokazivosti za logike dokazivosti i interpretabilnosti novijeg su datuma. I. Shapirovsky [44] je dokazao PSPACE-odlučivost problema ispunjivosti za polimodalnu logiku dokazivosti GLP. F. Pakhomov [35] je dokazao

[1] Rezultati su objavljeni u jednom preprintu. No, tekst preprinta je dostupan u [25].

PSPACE-potpunost problema dokazivosti za GLP. F. Bou i J. J. Joosten [6] su dokazali da je problem dokazivosti za zatvoreni fragment sistema IL jedan PSPACE-težak problem. L. Mikec, F. Pakhomov i M. Vuković [30] su dokazali da je problem odlučivosti za sistem IL jedan PSPACE-potpun problem. L. Mikec [29] je dokazao da su logike interpretabilnosti ILW i ILP također PSPACE-potpune. Trenutno je tu jedan od glavnih problema određivanje složenosti problema ispunjivosti za logike interpretabilnosti ILM i ILM_0.

Teorija korespondencije sustavno proučava vezu modalne i klasične logike. Glavni alati koji se pritom koriste su bisimulacije i standardna translacija. Jedan od najvažnijih rezultat teorije korespondencije je van Benthemov teorem karakterizacije koji pokazuje da modalni jezici odgovaraju fragmentima logika prvog reda koji su invarijantni na bisimulacije.

Van Benthemov teorem karakterizacije za osnovnu modalnu logiku glasi ovako:

> *Formula F logike prvog reda je logički ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule ako i samo ako je formula F invarijantna za bisimulacije između Kripkeovih modela.*

Dokaz ove osnove verzije je moguće vidjeti, primjerice, u [5] (kao dokaz teorema 2.68. na stranicama 103. i 104.). Standardni dokaz bitno koristi teoriju modela logike prvog reda. Ključan korak u dokazu je konstrukcija saturiranog modela koji se dobiva kao ultraprodukt nad prebrojivo nepotpunim ultrafiltrom. Međutim pokazuje se da ultraprodukt Veltmanovih modela nije nužno Veltmanov model. M. Vuković je dokazao da je ultraprodukt Veltmanovih modela nad prebrojivo potpunim ultrafiltrom Veltmanov model (propozicija 2.4. u [59]), no to ne povlači nužno njegovu saturiranost. Glavni uzrok problema leži u činjenici da svojstvo inverzno dobre fundiranosti nije definabilno u logici prvog reda pa ne mora biti očuvano na ultraprodukte. Iz tog razloga potrebne su drugačije tehnike u dokazu van Benthemovog teorema karakterizacije za logike dokazivosti i interpretabilnosti.

A. Dawar i M. Otto u članku [8] razvili su tzv. *models-for-games* metodu dajući četiri uvjeta koja treba ispuniti za dobivanje van Benthemovog teorema karakterizacije nad određenom klasom modela. Njihova metoda se umjesto na ω-saturirane modele oslanja na bisimulacijske igre. Korištenjem te metode dokazali su van Benthemov teorem karakterizacije za logiku dokazivosti GL koji glasi ovako (teorem 4.13. u [8], stranica 23.):

> *Formula F logike prvog reda je logički ekvivalentna standardnoj translaciji neke*

GL-formule u odnosu na GL modele ako i samo ako je formula F invarijantna za bisimulacije GL modela.

M. Vuković i T. Perkov u članku [38] koristili su tu metodu kako bi dokazali van Benthemov teorem karakterizacije za logiku interpretabilnosti IL koji glasi ovako (teorem 4.4. u [38], stranica 7.):

Formula F logike prvog reda je logički ekvivalentna standardnoj translaciji neke IL-formule u odnosu na Veltmanove modele ako i samo ako je formula F invarijantna za bisimulacije Veltmanovih modela.

Istaknimo da je u posljednje vrijeme vidljiv interes za logiku interpretabilnosti. Koristeći Verbruggeinu semantiku dobiveni su rezultati o potpunosti za neke logike interpretabilnosti koji su nepotpuni u odnosu na Veltmanovu semantiku. Za sistem ILP_0 to je napravljeno u [32]. U članku [27] promatrane su neki podsistemi od IL te je dokazana njihova potpunost u odnosu na Verbruggeinu semantiku i nepotponost u odnosu na Veltmanovu semantiku. Pregled rezultata vezanih uz Verbruggeinu semantiku dan je u [25].

Postoje mnogi članci koji razmatraju analogone van Benthemovog teorema. Primjerice, u [2] razmatrana je verzija za deskriptivne opće okvire, u [15] za atomarnu i molekularnu logiku, u [22] za okolinsku semantiku, u [17] za hibridnu logiku, u [18] za modalni μ-račun, u [26] za timsku semantiku, u [21] za slabu agregacijsku modalnu logiku, u [36] za Hornovu opisnu logiku, u [43] za koalgebarsku logiku predikata, u [60] za modalnu opisnu logiku, u [61] za *fuzzy* modalnu logiku, u [62] za kvantitativnu vjerojatnosnu modalnu logiku, u [63] za vjerojatnosnu *fuzzy* opisnu logiku te u [28] za inkvizitivnu modalnu logiku.

E. Rosen je u [40] dokazao verziju van Benthemovog teorema karakterizacije u odnosu na konačne modele. M. Otto dao je u [34] jednostavniji dokaz tog teorema koji se u literaturi naziva van Benthem - Rosenov teorem. Taj teorem iskazan je u [34] ovako (teorem 3.1. u [34]):

Za svaku formulu $\varphi(x) \in FO$ kvantifikatorskog ranga q sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) *$\varphi(x)$ je invarijantna na bisimulacije konačnih Kripkeovih struktura*

(ii) *$\varphi(x)$ je nad konačnih Kripkeovih strukturama logički ekvivalentna formuli iz ML_l pri čemu je $l = 2^q - 1$.*

Ovdje oznaka ML_l označava fragment modalne logike koji se sastoji od formula dubine najviše l. Iako Otto dokaz tog teorema temelji na Rosenovom dokazu, umjesto nekih alata klasične i modalne teorije modela koristi Ehrenfeucht-Fraïsseovéove igre za logiku prvog reda i njihove varijante za modalnu logiku. Istaknimo da je u dokazu tako izbjegnuta upotreba ultraprodukata i ultrafilterskih proširenja.

Bisimulacije, n-bisimulacije i bisimulacijske igre za Verbruggeinu semantiku proučavane su u nekoliko članaka koje ćemo ovdje navesti. U članku [53] pojam bisimulacije Veltmanovih modela (definiran u [50]) proširen je do pojma bisimulacije Verbruggeinih modela. Osnovna svojstva bisimulacija Verbruggeinih modela koja su dokazana su članku [53] su: bisimulacija svjetova Verbruggeinih modela povlači njihovu modalnu ekvivalentnost, relacija identitete na svjetovima je bisimulacija, inverz, kompozicija i unija bisimulacija je ponovo bisimulacija te da za bisimulacije Verbruggeinih modela vrijedi Hennessy-Milnerovo svojstvo. U tom članku dana je i usporedba pojma bisimulacije Verbruggeinih modela koji je uveden u tom članku s ranijim, drugačije definiranim pojmovima bisimulacije Verbruggeinih modela. Za pojam bisimulacije Verbruggeinih modela iz članka [56] ne vrijedi Hennessy-Milnerovo svojstvo pa su u članku [57] definirane tzv. V-bisimulacije Verbruggeinih modela. No one nisu intuitivne te stvaraju neke probleme pri radu s kvocijentima (iako zadovoljavaju osnovna svojstva bisimulacija koja smo prethodno naveli). To je bila glavna motivacija za definiciju bisimulacije Veltmanovih modela u [53]. U tom članku ustanovljen je i odnos bisimulacije te V-bisimulacije: dokazano je da je svaka bisimulacija jedna V-bisimulacija Verbruggeinih modela te je dan primjer V-bisimulacije koja nije bisimulacija Verbruggeinih modela. Također je definirana tzv. jaka bisimulacija Verbruggeinih modela koja je dobivena postavljanjem dodatnih uvjeta na bisimulacije Verbruggeinih modela. Izravna posljedica jest da je svaka jaka bisimulacija Verbruggeinih modela jedna bisimulacija Verbruggeinih modela (no može se pokazati da obrat ne vrijedi). To je korišteno kako bi se definirao bisimulacijski kvocijent Verbruggeinih modela. Dokazano je da je bisimulacijski kvocijent Verbruggeinog modela ponovo jedan Verbruggein model te da je pod određenim uvjetima, izomorfizam kvocijenata dvaju Verbruggeinih modela ekvivalentan globalnoj bisimuliranosti tih modela.

Sada navodimo članke u kojima su bisimulacije i n-bisimulacije Verbruggeinih modela korištene u svrhu dobivanja prikladnog pojma filtracije kojim bi se dokazalo svojstvo konačnih modela s obzirom na Verbruggeinu semantiku sistema IL i nekih njegovih proširenja. U članku [39] bisimulacije su korištene kako bi se definirao prikladan pojam filtracije Verbruggeinih modela.

Metoda filtracije i pojam n-bisimulacije korišteni su u tom članku kako bi se dao alternativni dokaz svojstva konačnih modela logike IL s obzirom na Verbruggeine modele. Također je metodom filtracije u [39] dokazano i svojstvo konačnih modela sistema ILM i $\mathsf{ILM_0}$ s obzirom na Verbruggeine modele. Korištena metoda za dokazivanje svojstva konačnih modela proširenja sistema IL svodi se na dokaz da filtracija čuva odgovarajuće karakteristično svojstvo Verbruggeinih modela pri čemu treba istaknuti da se u samim dokazima često koriste razna svojstva bisimulacija Verbruggeinih modela. U članku [31] ta metoda je korištena za dokaz svojstva konačnih modela s obzirom na Verbruggeine modele za ILW i ILW^*. U tu svrhu je u tom članku dokazano karakteristično svojstvo Verbruggeinih modela za ILW (to nije bilo potrebno za ILW^* jer je iz [52] poznato da vrijedi $\mathsf{ILW}^* = \mathsf{ILWM_0}$). Navedena svojstva konačnih modela s obzirom na Verbruggeine modele za $\mathsf{ILM_0}$ i ILW^* su zatim u članku [31] korištena kako bi se dokazala odlučivost tih sistema (odlučivost sistema ILW poznata je od ranije dok je odlučivost sistema ILW^* ranije iskazana kao otvoreni problem, primjerice, u [11]). U tu svrhu je u [31] dokazana i potpunost sistema $\mathsf{ILM_0}$ i ILW^*.

Potpunosti sistema $\mathsf{ILP_0}$ i ILR s obzirom na Verbruggeinu semantiku dokazane su u članku [32]. U istom članku korištenjem ranije spomenute metode filtracije dokazano je i svojstvo konačnih modela s obzirom na Verbruggeinu semantiku za te sisteme kako bi se dokazala njihova odlučivost. Dokazi potpunosti temelje se na tzv. pametnim (ili punim) oznakama iz [3] pomoću kojih su također u [32] dani kraći dokazi potpunosti s obzirom na Verbruggeinu semantiku za logiku interpretabilnosti IL te njezina proširenja ILM, $\mathsf{ILM_0}$ i ILP. Ključnu ulogu u dokazivanju potpunosti tih sistema ima pronalaženje dovoljno jake tzv. „leme o označavanju” za odgovarajući sistem. S obzirom da nije pronađena takva lema o označavanju za sistem ILW i njegova proširenja, u članku [32] je razvijena konstrukcija koja može biti korisna za dokaze potpunosti proširenja sistema ILW s obzirom na Verbruggeinu semantiku. Prikazana je upotreba te konstrukcije u dokazu potpunosti sistema ILW i sistema ILW^* (koji je zbog $\mathsf{ILW}^* = \mathsf{ILM_0W}$ upravo jedno proširenje od ILW).

U lemi 3.1(2) u članku [39] iskazana je sljedeća tvrdnja: pod pretpostavkom da imamo samo konačno mnogo propozicionalnih varijabli, modalna n-ekvivalencija dvaju svjetova povlači njihovu n-bisimuliranost. No dokaz te tvrdnje sadrži grešku. Primjerom 2.6. u članku [23] dokazano je da ta tvrdnja ne vrijedi. Navedeni primjer bio je glavna motivacija za definiciju w-bisimulacije Verbruggeinih modela: analogon te tvrdnje vrijedi za w-bisimulacije Verbruggenih modela.

Ova disertacija sastoji se od sedam poglavlja i dodatka. U prvome poglavlju dajemo pregled osnovnih definicija i oznaka koje ćemo koristiti u ovome radu. Opisujemo sintaksu sistema IL te dvije semantike sistema IL. Definiramo pojmove vezane uz pojam modalne ekvivalencije te dokazujemo neke tehničke rezultate koji će biti potrebni kasnije u radu.

U drugom poglavlju ponavljamo definiciju bisimulacije (i n-bisimulacije) za Verbruggeinu semantiku koja se do sad koristila u literaturi, dokazujemo svojstva koja ona posjeduje te naposlijetku ističemo problem koji se javlja pri korištenju tog pojma bisimulacije.

U trećem poglavlju dajemo novu verziju definicija bisimulacije i konačne bisimulacije za Verbruggeinu semantiku, koje redom nazivamo w-bisimulacija i konačna w-bisimulacija (ili n-w-bisimulacija). Zatim uspoređujemo taj pojam w-bisimulacije s pojmom bisimulacije iz prethodnog poglavlja. Pokazujemo da je w-bisimulacija strogo slabiji pojam od bisimulacije. Zatim dokazujemo da (n)-w-bisimulacija posjeduje sva dobra svojstva koja smo naveli i kod bisimulacija, ali i da se ne javlja problem koji je za bisimulacije istaknut u prethodnom poglavlju. Kako bi u dokazima lakše dokazali (n-)w-bisimuliranost svjetova, dokazujemo da je (n-)w-bisimuliranost svjetova ekvivalentna pobjedničkoj strategiji branitelja u odgovarajućim igrama (koje nazivamo (n-)w-bisimulacijske igre).

U četvrtom poglavlju definiramo signaturu σ jezika dvosortne logike prvog reda i standardnu translaciju koja IL-formule preslikava u σ-formule. To radimo kako bismo pokazali da se logika interpretabilnosti s Verbruggeinom semantikom zapravo može promatrati kao određeni fragment logike prvog reda.

U petom poglavlju dajemo definiciju q-saturiranog raspetljavanja Verbruggeinih modela te pokazujemo osnovna svojstva koja to raspetljavanje zadovoljava. Zatim pokazujemo da logika interpretabilnosti ima svojstvo stablastih modela u odnosu na Verbruggeinu semantiku te primjenom metode selekcije pokazujemo da logika interpretabilnosti također ima i svojstvo konačnih modela.

U šestom poglavlju dokazujemo tehničke leme potrebne za dokaz teorema karakterizacije. U drugome dijelu tog poglavlja dokazujemo van Benthemov teorem za logiku interpretabilnosti u odnosu na Verbruggeinu semantiku.

U sedmome poglavlju razmatramo nekoliko članaka koji koriste bisimulacije Verbruggeinih modela i njihova svojstva u dokazivanju glavnih rezultata tih članaka. Pokazujemo da ti rezultati vrijede ako koristimo w-bisimulacije Verbruggeinih modela umjesto bisimulacija Verbruggeinih modela.

U Dodatku pokazujemo da za dvosortnu logiku vrijedi analogon Ehrenfeuchtovog teorema za jednosortnu logiku prvog reda.

1. LOGIKA INTERPRETABILNOSTI IL

U ovom poglavlju dajemo pregled osnovnih definicija i oznaka koje ćemo koristiti u ovome radu. Prvo opisujemo sintaksu sistema IL. Zatim opisujemo dvije semantike sistema IL - prvo Veltmanovu semantiku, a zatim Verbruggeinu semantiku. Naposlijetku definiramo pojmove vezane uz pojam modalne ekvivalencije, te dokazujemo neke tehničke rezultate koji će biti potrebni kasnije u ovome radu.

1.1. SINTAKSA SISTEMA IL

Logike interpretabilnosti javile su se u osamdesetim godinama prošlog stoljeća - prvim objavljenim radom u kojem je koncept interpretabilnosti tretiran kao modalni operator smatra se (prema [25]) rad V. Švejdara [46] iz 1983. Daljni razvoj napravljen je u radu F. Montagne [33] iz 1987. Međutim, tek je 1988. godine Albert Visser definirao modalni sistem IL (eng. *interpretability logic*) koji nazivamo logika interpretabilnosti (više o tome može se pronaći u [49] i [50]). Alfabet sistema IL proširuje logiku dokazivosti GL (Gödel-Löb) jednim binarnim modalnim operatorom $\rhd$.

Prvo definiramo koje ćemo simbole koristiti, tj. definiramo alfabet sistema IL.

Definicija 1.1.1. **Alfabet logike interpretabilnosti** čine:

(i) prebrojiv skup *Prop* čije elemente nazivamo propozicionalne varijable $p_0, p_1, p_2, \ldots$

(ii) veznici logike sudova $\neg$ i $\wedge$, logička konstanta $\perp$ i modalni operator $\rhd$

(iii) skup pomoćnih simbola $\{(,)\}$ (zagrade).

Sada definiramo riječi u navedenom alfabetu koje su nam od interesa - uočimo da smo izostavili neke veznike i modalne operatore (poput $\Diamond$) iz definicije. To radimo kako bi u dokazima indukcijom po izgradnji formule imali manje slučajeva za razmatrati u koraku indukcije. Te veznike ipak možemo i dalje koristiti kao pokrate - o tome više u napomeni nakon definicije.

Definicija 1.1.2. IL–formula zadana je sljedećom formalnom gramatikom:

$$F \to p \mid \bot \mid \neg F \mid (F_1 \wedge F_2) \mid (F_1 \rhd F_2),$$

pri čemu je $p \in Prop$. Skup svih formula logike IL označavamo sa $Form_{IL}$.

IL-formule označavat ćemo s F, G, H, F_1, F_2, ...

Napomena 1.1.3. Ostale logičke veznike i modalne operatore promatramo kao pokrate. Tako je $\Box F$ pokrata za $\neg F \rhd \bot$, dok je $\Diamond F$ pokrata za $\neg\Box\neg F$.

Definirajmo još sistem IL. Istaknimo ovdje i da se u nastavku nećemo baviti teorijom dokaza logika interpretabilnosti (više o tome može se pronaći u [24], [41], [42] i [52]).

Definicija 1.1.4. Sistem IL najmanji je skup koji zadovoljava sljedeće:

(i) sadrži sve tautologije i instance sljedećih shema aksioma:

(L1) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

(L2) $\Box A \to \Box\Box A$

(L3) $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

(J1) $\Box(A \to B) \to A \rhd B$

(J2) $(A \rhd B) \wedge (B \rhd C) \to A \rhd C$

(J3) $(A \rhd C) \wedge (B \rhd C) \to A \vee B \rhd C$

(J4) $A \rhd B \to (\Diamond A \to \Diamond B)$

(J5) $\Diamond A \rhd A$,

(ii) zatvoren je na pravila izvoda **modus ponens** (kratko mod pon) i **nužnost**:

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \qquad \text{i} \qquad \frac{A}{\Box A}.$$

Definicija 1.1.5. Kažemo da je niz IL-formula $F_1, F_2, \ldots, F_n$ **dokaz** za IL-formulu F u sistemu IL ako vrijedi $F_n \equiv F$ te za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi barem jedno od sljedećeg:

(i) formula F_k je tautologija

(ii) formula F_k je instanca jedne od shema aksioma (L1) – (L3) ili (J1) – (J5)

(iii) formula F_k je nastala iz nekih formula F_i i F_j $(i, j < k)$ pomoću pravila modus ponens

(iv) formula F_k je nastala iz neke formule F_i $(i < k)$ pomoću pravila nužnosti.

Kažemo da je formula F **teorem** sistema IL, u oznaci $\vdash_{\mathsf{IL}} F$, ako postoji dokaz za nju u sistemu IL.

Semantika, a onda i pojam valjane formule, biti će definirani tek u sljedećoj točki. No, za sada istaknimo da vrijedi **teorem adekvatnosti** za sistem IL: ako za IL-formulu F vrijedi $\vdash_{\mathsf{IL}} F$ tada je F valjana formula.

Uočimo da je pojam dokaza u sistemu IL definiran slično kao i u logici sudova. Međutim, pojam izvoda u sistemu IL ne možemo definirati na sličan način kao u logici sudova ukoliko želimo da vrijedi teorem dedukcije za sistem IL. Opišimo taj problem preciznije.

Neka je S skup IL-formula te F IL-formula. Promotrimo što se događa ako pojam izvoda definiramo analogno kao u logici sudova, tj. ako izvodom formule F iz skupa formula S nazovemo svaki niz formula $F_1, F_2 \ldots, F_n$ takav da je $F_n \equiv F$ te za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi barem jedno od (i)–(iv) iz definicije dokaza u sistemu IL ili vrijedi sljedeće:

(v) $F_k \in S$ (u tom slučaju formulu F_k nazivamo **pretpostavkom**).

U slučaju da postoji izvod za formulu F iz skupa S pišemo $S \vdash_{\mathsf{IL}} F$. No, s ovakvom definicijom izvoda ne vrijedi **teorem dedukcije** za sistem IL: ako za neki skup IL-formula S te IL-formule A i B vrijedi $S \cup \{A\} \vdash_{\mathsf{IL}} B$, tada vrijedi $S \vdash_{\mathsf{IL}} A \to B$. Naime, zbog uvjeta (iv) možemo primijeniti pravilo nužnosti na bilo koju pretpostavku iz skupa pretpostavki S. Tako dobivamo, primjerice, da vrijedi $\{p_0\} \vdash_{\mathsf{IL}} \Box p_0$. Iz toga po teoremu dedukcije slijedi $\vdash_{\mathsf{IL}} p_0 \to \Box p_0$. No, tada iz teorema adekvatnosti za sistem IL slijedi da je formula $p \to \Box p_0$ valjana. Lako se pokaže da to ne vrijedi. Stoga definiramo pojam izvoda u sistemu IL kao u sljedećoj definiciji (istaknimo da smo samo izmijenili dosadašnji uvjet (iv)).

Definicija 1.1.6. Za niz IL-formula $F_1, F_2, \ldots, F_n$ kažemo da je **izvod** formule F iz skupa formula S u sistemu IL ako $F_n \equiv F$ te za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi jedno od sljedećeg:

(i) formula F_k je tautologija

(ii) formula F_k je instanca jedne od shema aksioma (L1) – (L3) ili (J1) – (J5)

(iii) formula F_k je nastala iz nekih formula F_i i F_j $(i, j < k)$ pomoću pravila modus ponens

(iv) formula F_k je nastala iz neke F_i $(i < k)$ pomoću pravila nužnosti, **pri čemu je F_i teorem sistema IL**

(v) $F_k \in S$.

1.2. Veltmanova semantika sistema $\mathbb{IL}$

Postoji nekoliko semantika za logiku intepretabilnosti. Osnovna semantika su Veltmanovi modeli. Veltmanove modele definirali su D. de Jongh i F. Veltman 1990. godine u svom članku [19] te su dokazali potpunost logike interpretabilnosti IL s obzirom na te modele. A. Berarducci i Y. Shavrukov su nezavisno dokazali aritmetičku potpunost sistema ILM koji je logika interpretabilnosti Peanove aritmetike. Berarducci pritom nije koristio samo Veltmanove modele već Visserove (ili pojednostavljene Veltmanove) modele (više u [1]). Njih je A. Visser definirao u [49] te je dokazao da je sistem IL potpun i s obzirom na takve modele. Zatim, Visser je u [50] dokazao aritmetičku potpunost sistema ILP, pri čemu je koristio i Friedmanove modele. Nadalje, R. Verbrugge je definirala generalizirane Veltmanove modele (koje danas nazivamo Verbruggeinim modelima). Pomoću njih su R. Verbrugge [48], V. Švejdar [47], A. Visser [51], M. Vuković [55] te E. Goris i J. Joosten [12] pokazali da su neki principi interpretabilnosti međusobno nezavisni.

Sada definiramo Veltmanovu semantiku sistema IL - redom definiramo Veltmanov okvir i Veltmanov model.

Definicija 1.2.1. Veltmanov okvir je trojka $(W, R, \{S_w : w \in W\})$, pri čemu je

(i) W neprazan skup čije elemente nazivamo **svjetovi**

(ii) R i S_w su binarne relacije na W, za svaki $w \in W$.

Pritom vrijedi:

(i) R je inverzno dobro fundirana relacija

(ii) ako $xRyRz$ tada xRz

(iii) ako yS_xz tada xRy i xRz

(iv) ako xRy tada yS_xy

(v) ako $xRyRz$ tada yS_xz

(vi) ako uS_xvS_xw tada uS_xw.

Definicija 1.2.2. Veltmanov model je četvorka $(W,R,\{S_w : w\in W\},V)$, pri čemu je $(W,R,\{S_w : w \in W\})$ Veltmanov okvir, a V je relacija na skupu $W \times Prop$. Relaciju V proširujemo do relacije $\Vdash$ na Kartezijevom produktu skupa W i skupa svih formula tako da za svaki $w \in W$ vrijedi:

(i) $w \nVdash \bot$

(ii) $w \Vdash \neg A$ ako i samo ako $w \nVdash A$

(iii) $w \Vdash A \wedge B$ ako i samo ako $w \Vdash A$ i $w \Vdash B$

(iv) $w \Vdash A \rhd B$ ako i samo ako $\forall u \in W\Big((wRu \wedge u \Vdash A) \Rightarrow \exists v \in W(uS_w v \wedge v \Vdash B)\Big)$.

Napomena 1.2.3. Uzimajući u obzir pokrate $\Box$ i $\Diamond$, iz prethodne definicije se dobiva:

(a) $w \Vdash \Box A$ ako i samo ako za svaki $v \in W$ vrijedi da wRv povlači $v \Vdash A$

(b) $w \Vdash \Diamond A$ ako i samo ako postoji $v \in W$ takav da vrijedi wRv i $v \Vdash A$.

Napomena 1.2.4. Neka je $(W,R,\{S_w : w \in W\},V)$ Veltmanov model. Lako se pokazuje da je proširenje relacije V do relacije $\Vdash$ iz prethodne definicije jedinstveno. Stoga ćemo u ostatku teksta za Veltmanov model $(W,R,\{S_w : w \in W\},V)$ pisati $(W,R,\{S_w : w \in W\},\Vdash)$. Također, u slučaju kada ćemo raditi s više Veltmanovih modela, relaciju $\Vdash$ najčešće ćemo označavati tim istim simbolom, a iz konteksta će biti jasno kojem modelu ta relacija pripada. Primjerice, ako je $(W,R,\{S_w : w \in W\},\Vdash)$ jedan Veltmanov model, tada ćemo drugi Veltmanov model zapisati kao $(W',R',\{S'_w : w \in W'\},\Vdash)$, korištenjem simbola $\Vdash$ umjesto npr. $\Vdash'$ (iako to nisu nužno iste relacije). U ostatku teksta s $\mathfrak{N}$ ćemo označavati Veltmanov model $(W,R,\{S_w : w \in W\},\Vdash)$, dok ćemo s $\mathfrak{N}'$ označavati Veltmanov model $(W',R',\{S'_w : w \in W'\},\Vdash)$. Slično ćemo oznaku $\mathfrak{N}_i$ koristiti za Veltmanov model $(W_i,R_i,\{S^{(i)}_w : w \in W_i\},\Vdash)$, pri čemu je $i \in \mathbb{N}$. Također, pisat ćemo $w \in \mathfrak{N}$ (odnosno $w \in \mathfrak{N}'$ ili $w \in \mathfrak{N}_i$) što će zapravo značiti $w \in W$ (odnosno $w \in W'$ ili $w \in W_i$). Slične dogovore o oznakama iz ove napomene koristit ćemo u daljnjem tekstu i za Kripkeove, GL te Verbruggeine modele koje opisujemo u sljedećoj točki.

1.3. VERBRUGGEINA SEMANTIKA

Vítězslav Švejdar je 1991. godine u [47] dokazao neke rezultate o nezavisnosti principa interpretabilnosti korištenjem Veltmanovih modela. Nizozemska matematičarka Rineke Verbrugge poopćila je pojam Veltmanovog modela u radu koji se može pronaći u [25]. Ta nova semantika se prvo nazivala generaliziranom Veltmanovom semantikom. No, nakon provedene rasprave u širokom krugu ljudi koji se bave logikom interpretabilnosti, odlučeno je da se u čast Rineke Verbrugge ova semantika naziva Verbruggeinom semantikom. U skladu s tim, u nastavku ove točke definiramo Verbruggeine okvire i Verbruggeine modele.

Osnovna razlika između Verbruggeine i Veltmanove semantike jest ta da se u Verbruggeinoj semantici koriste skupovi kod modeliranja $\rhd$ operatora, u smislu da za proizvoljan svijet w relacija S_w nije relacija između svjetova, nego između svjetova i skupova svjetova. Tako primjerice pišemo vS_wV, gdje standardno malim slovom (ovdje: v) označavamo svijet, a velikim slovom (ovdje: V) označavamo skup svjetova.

Slijedi definicija Verbruggeinog okvira i Verbruggeinog modela. Ako za neke svjetove w i v vrijedi wRv, kažemo da je svijet v sljedbenik svijeta w. Skup svih sljedbenika svijeta w označavamo s $R[w]$, tj. $R[w] = \{v \in W \mid wRv\}$.

Definicija 1.3.1. Verbruggein okvir $\mathfrak{F}$ je uređena trojka $\big(W, R, \{S_w : w \in W\}\big)$ pri čemu je W neprazan skup, R binarna relacija na W koja je tranzitivna i inverzno dobro fundirana, te za svaki $w \in W$ vrijedi sljedeće:

(i) $S_w \subseteq R[w] \times \big(\mathscr{P}(R[w]) \setminus \{\emptyset\}\big)$

(ii) wRu povlači $uS_w\{u\}$ (tj. relacija S_w je kvazi-refleksivna)

(iii) uS_wV i vS_wZ_v za sve $v \in V$ povlače $uS_w\left(\bigcup_{v\in V} Z_v\right)$ (tj. relacija S_w je kvazi-tranzitivna)

(iv) $wRuRv$ povlači $uS_w\{v\}$

(v) uS_wV i $V \subseteq Z \subseteq R[w]$ povlače uS_wZ (tj. relacija S_w je monotona).

Verbruggein model $\mathfrak{M}$ je uređena četvorka $(W, R, \{S_w \mid w \in W\}, \Vdash)$, pri čemu je $(W, R, \{S_w \mid w \in W\})$ Verbruggein okvir te je $\Vdash$ relacija na $W \times Prop$. Relaciju $\Vdash$ proširujemo do relacije na Kartezijevom produktu skupa W i skupa svih formula kao i prije s razlikom da sada vrijedi:

$$w \Vdash A \rhd B \quad \Leftrightarrow \quad \forall u \Big(wRu \;\&\; u \Vdash A \;\Rightarrow\; \exists V \,(uS_wV \;\&\; V \Vdash B) \Big).$$

Pritom $V \Vdash B$ znači da za svaki $v \in V$ vrijedi $v \Vdash B$.

U ostatku teksta s $\mathfrak{M}$ ćemo označavati Verbruggein model $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$, dok ćemo s $\mathfrak{M}'$ označavati Verbruggein model $(W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$. Slično ćemo oznaku $\mathfrak{M}_i$ koristiti za Verbruggein model $(W_i, R_i, \{S^{(i)}_w : w \in W_i\}, \Vdash)$, pri čemu je $i \in \mathbb{N}$. Također, pisat ćemo $w \in \mathfrak{M}$ (odnosno $w \in \mathfrak{M}'$ ili $w \in \mathfrak{M}_i$) što će zapravo značiti $w \in W$ (odnosno $w \in W'$ ili $w \in W_i$).

1.4. MODALNA EKVIVALENCIJA

U ovome radu definirat ćemo nešto kasnije pojam bisimulacije (i to na više načina). Zanimat će nas veza između pojmova modalne ekvivalentnosti i bisimuliranosti: jesu li modalno ekvivalentni svjetovi nužno bisimulirani te obratno, jesu li bisimulirani svjetovi nužno modalno ekvivalentni? Kako ćemo promatrati vezu bisimuliranosti i modalne ekvivalencije, tako ćemo promatrati i vezu n-bisimulacije i n-modalne ekvivalencije. U ovoj točki stoga definiramo potrebne pojmove modalne ekvivalencije te n-modalne ekvivalencije.

U tu svrhu nam je prvo potrebna definicija pojma modalne dubine neke formule.

Definicija 1.4.1. **Modalna dubina** je preslikavanje $d : Form_{IL} \to \mathbb{N}$ definirano rekurzivno ovako:

(i) $d(p) = 0$ za svaku propozicionalnu varijablu $p \in Prop$

(ii) $d(\bot) = 0$

(iii) $d(\neg F) = d(F)$

(iv) $d(F \wedge G) = \max\{d(F), d(G)\}$

(v) $d(F \rhd G) = 1 + \max\{d(F), d(G)\}$

pri čemu su F i G neke formule.

Sada definiramo pojmove modalne ekvivalencije i n-modalne ekvivalencije. Grubo govoreći, dva svijeta dvaju Verbruggeinih modela biti će n-modalno ekvivalentni ako zadovoljavaju točno iste formule čija je dubina najviše n. Ako pak zadovoljavaju točno iste formule (bez obzira na njihovu dubinu), tada ćemo reći da su oni modalno ekvivalentni.

Definicija 1.4.2. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Verbruggeini modeli, te $w \in \mathfrak{M}$, $w' \in \mathfrak{M}'$ i $n \in \mathbb{N}$ proizvoljni. Kažemo da su svjetovi w i w' **n-modalno ekvivalentni**, te pišemo $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$, ako za svaku formulu F takvu da je $d(F) \leq n$ vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash F.$$

Posebno, kažemo da su svjetovi w i w' **propozicionalno ekvivalentni**, u oznaci $\mathfrak{M}, w \equiv_0^{Prop} \mathfrak{M}', w'$, ako za svaku propozicionalnu varijablu $p \in Prop$ vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash p.$$

Ukoliko za svaku formulu F vrijedi ekvivalencija: $\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash F$, tada kažemo da su svjetovi w i w' **modalno ekvivalentni**, te pišemo $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$.

Napomena 1.4.3. Jednostavnom indukcijom po složenosti IL-formule (tj. broju veznika i modalnih operatora koji se pojavljuju u toj formuli) može se pokazati da ako su neka dva svijeta propozicionalno ekvivalentna, tj. zadovoljavaju točno iste propozicionalne varijable, da su tada oni i 0-modalno ekvivalentni.

Napomena 1.4.4. Jedna napomena o oznakama: modalna ekvivalencija se u logici obično označava simbolom $\equiv$, a tim se istim simbolom označava i grafička jednakost formula. Iz konteksta je jasno na što od toga u danom trenutku mislimo, npr. ako napišemo $F \equiv G$, gdje su F i G formule tada želimo reći da su te formule (tj. formule za koje su F i G oznake) grafički jednake.

Slijedi još jedna propozicija koju ćemo koristiti u ovome radu. Naime, ponekad će se javiti potreba da, primjerice, jednom formulom zapišemo sve što je istinito na nekome svijetu - npr. konjunkciju svih IL-formula F koje su istinite na nekom svijetu. Kako je jasno da takva konjunkcija nije konačna, ne možemo reći da smo tako dobili jednu IL-formulu. Međutim, pokazuje se da u slučaju kada je skup varijabli koji promatramo konačan, postoji samo konačno mnogo međusobno neekvivalentnih IL-formula. U tom slučaju, možemo napraviti konjunkciju svih međusobno neekvivalentnih IL-formula koje su istinite na nekom svijetu (što je tada konačna konjunkcija) i reći da je tako stvarno dobivena IL-formula. Stoga dokazujemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.4.5. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je skup $Prop$ konačan. Tada postoji konačno mnogo, do na logičku ekvivalenciju, IL-formula F takvih da vrijedi $d(F) \leq n$ te čije propozicionalne varijable pripadaju skupu $Prop$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

Promotrimo slučaj kada je $n = 0$. Neka je F proizvoljna IL-formula takva da vrijedi $d(F) \leq 0$ te čije propozicionalne varijable pripadaju skupu $Prop$. Iz $d(F) \leq 0$ slijedi $d(F) = 0$, što povlači da se u F ne pojavljuju modalni operatori. Prema tome, F promatramo kao formulu logike sudova, a za svaku formulu logike sudova postoji njoj ekvivalentna savršena disjunktivna normalna forma. Kako je skup $Prop$ konačan, tada svih savršenih disjunktivnih normalnih formi, do na logičku ekvivalenciju, ima konačno mnogo. Dakle, svaka takva formula F je ekvivalentna jednoj od konačno mnogo savršenih disjunktivnih formula, iz čega slijedi tražena tvrdnja.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da postoji konačno mnogo, do na logičku ekvivalenciju, IL-formula F takvih da vrijedi $d(F) \leq n$ te čije propozicionalne varijable pripadaju skupu $Prop$.

Uočimo da je svaka IL-formula dubine manje ili jednake $n+1$ zapravo Booleova kombinacija propozicionalnih varijabli i IL-formula oblika $G \rhd H$, pri čemu za sve takve IL-formule G i H iz $d(G \rhd H) \leq n+1$ slijedi $d(G) \leq n$ i $d(H) \leq n$.

Kako sada prema pretpostavci indukcije postoji samo konačno mnogo takvih, međusobno neekvivalentnih IL-formula G i H, zaključujemo da je samo konačno mnogo Booleovih kombinacija propozicionalnih varijabli i IL-formula oblika $G \rhd H$, gdje je $d(G) \leq n$ i $d(H) \leq n$. Stoga je samo konačno mnogo neekvivalentnih IL-formula dubine najviše $n+1$.

$\blacksquare$

2. BISIMULACIJE ZA VERBRUGGEINU SEMANTIKU

U ovom poglavlju ponavljamo definicije bisimulacije i n-bisimulacije za Verbruggeinu semantiku koje su se do sad koristile u literaturi, dokazujemo svojstva koje one posjeduju te naposlijetku ističemo problem koji se javlja pri korištenju tog pojma bisimulacije. To radimo kako bi nakon toga novu verziju definicije pojma bisimulacije za Verbruggeinu semantiku (koju dajemo u sljedećoj točki) mogli usporediti s ovom, pokazati da ona zadovoljava i dalje sva ovdje navedena svojstva, a čak i više, tj. da s njom nema ovdje istaknutog problema.

Bisimulacije Verbruggeinih modela su u [39] korištene za filtracije s ciljem dokazivanja svojstva konačnih modela. Ovdje ćemo ponoviti tu definiciju, kao i definiciju n-bisimulacije (ili konačne bisimulacije) za Verbruggeinu semantiku. Pritom ćemo navesti i svojstva tih bisimulacija i n-bisimulacija, pri čemu će nas posebno zanimati odnos modalne ekvivalencije i bisimulacije, te n-modalne ekvivalencije i n-bisimulacije. Prvo ćemo dokazati da n-bisimulacija povlači n-modalnu ekvivalenciju. Zatim ćemo dati protuprimjer koji će pokazati da obrat ne vrijedi. U tu svrhu dat ćemo definiciju slabih bisimulacijskih igara te pokazati da je pitanje (ne)bisimuliranosti dvaju svjetova ekvivalentno pitanju postojanja pobjedničke strategije jednog od igrača u pripadnoj bisimulacijskoj igri, što uvelike olakšava dokaz (ne)bisimuliranosti dvaju svjetova. Za traženi protuprimjer iskoristit ćemo dva Veltmanova modela koji su korišteni u [7], a koji sadrže dva svijeta koji su modalno ekvivalentni ali nisu bisimulirani (kao svjetovi Veltmanovih modela). Zatim ćemo pokazati kako im pridružiti dva Verbruggeina modela tako da ostanu sačuvana svojstva modalne ekvivalentnosti i bisimuliranosti (što će nam dati željeni protuprimjer). Iako općenito modalna ekvivalentnost ne povlači bisimuliranost, razmatrani su uvjeti (poput slikovne konačnosti modela u [53]) koje možemo zadati, a pod kojima bi ta tvrdnja vrijedila. U [39] dana je tvrdnja da se može taj obrat dobiti ako zahtijevamo da je skup propozicionalnih varijabli koji promatramo konačan. Kratko ćemo opisati grešku koja je tamo počinjena te navesti konkretan protuprimjer koji pokazuje da ta tvrdnja ne vrijedi.

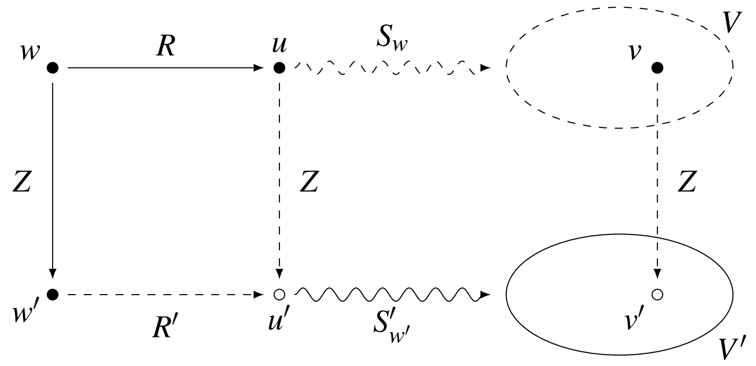
2.1. BISIMULACIJE I KONAČNE BISIMULACIJE VERBRUGGEINIH MODELA

Definicija bisimulacije za Verbruggeinu semantiku dana je u [53]. Ovdje ćemo ponoviti tu definiciju.

Definicija 2.1.1. **Bisimulacija** između dva Verbruggeina modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ je neprazna relacija $Z \subseteq W \times W'$ takva da vrijede sljedeći uvjeti koje smo redom označili sa (at), (forth) i (back):

(at) za svaki par $(w, w') \in Z$ i svaku propozicionalnu varijablu $p \in Prop$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $w \Vdash p$ ako i samo ako vrijedi $w' \Vdash p$

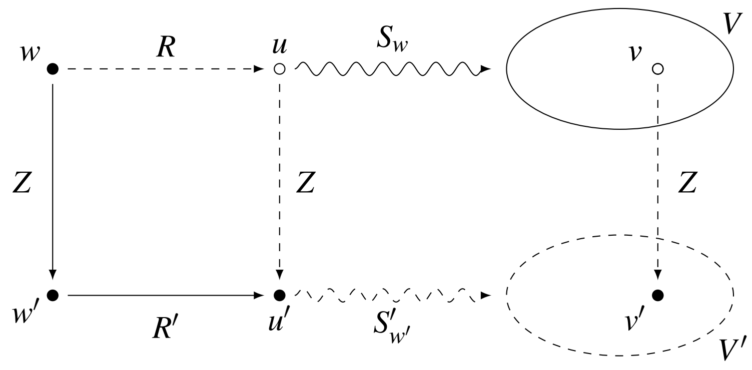
(forth) za svaki par $(w, w') \in Z$ i za svaki svijet $u \in W$ takav da vrijedi wRu, postoji svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi uZu' i $w'R'u'$ te za svaki skup svjetova $V' \subseteq W'$ takav da $u'S'_{w'}V'$, postoji skup svjetova $V \subseteq W$ takav da vrijedi uS_wV i za svaki svijet $v \in V$ postoji svijet $v' \in V'$ tako da vrijedi vZv'



Slika 2.1: Ilustracija uvjeta (forth).

(back) za svaki par $(w, w') \in Z$ i za svaki svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi $w'R'u'$, postoji svijet $u \in W$ takav da vrijedi uZu' i wRu te za svaki skup svjetova $V \subseteq W$ takav da uS_wV, postoji skup svjetova $V' \subseteq W'$ takav da vrijedi $u'S'_{w'}V'$ i za svaki svijet $v' \in V'$ postoji svijet $v \in V$ takav da vrijedi vZv'.

Za dva svijeta $w \in W$ i $w' \in W'$ kažemo da su **bisimulirani**, te pišemo $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$, ako postoji bisimulacija $Z \subseteq W \times W'$ takva da vrijedi wZw'.



Slika 2.2: Ilustracija uvjeta (back).

Ilustracija uvjeta (forth) dana je slikom 2.1., a uvjeta (back) slikom 2.2. Na slikama koristimo simbol $\bullet$ kako bi označili zadane svjetove, dok sa simbolom $\circ$ označavamo svjetove čija se egzistencija zahtijeva uvjetom (forth), odnosno (back). Koristimo pune strelice kako bi označili zadane relacije R, R', S_w, $S'_{w'}$, Z, a za relacije čija egzistencija slijedi iz nekih uvjeta koristimo isprekidane strelice. Pritom za relacije R, R', Z koristimo ravne strelice, a za relacije S_w, $S'_{w'}$ koristimo valovite strelice. Uz svaku strelicu naznačeno je koju relaciju ona prikazuje. Skupove svjetova prikazujemo punom elipsom ako su oni zadani, te isprekidanom elipsom ako njihova egzistencija slijedi iz nekih uvjeta.

Za tako definiran pojam bisimulacije u [53] su dokazana razna dobra svojstva koja navodimo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2.1.2. Neka su $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, \{S_w^{(i)} : w \in W_i\}, \Vdash)$, $i \in \{1,2,3\}$ Verbruggeini modeli.

(a) $Z = \{(w,w) : w \in W_1\}$ je jedna bisimulacija na $\mathfrak{M}_1$.

(b) Ako je $Z \subseteq W_1 \times W_2$ bisimulacija, tada je i njen inverz $Z^{-1} \subseteq W_2 \times W_1$ također bisimulacija.

(c) Ako su $Z \subseteq W_1 \times W_2$ i $Z' \subseteq W_2 \times W_3$ bisimulacije, tada je i njihova kompozicija $Z \circ Z' \subseteq W_1 \times W_3$ također jedna bisimulacija.

(d) Ako je za neki skup indeksa I neprazan skup $\{Z_i : i \in I\}$ bisimulacija između modela $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ tada je i njihova unija $\bigcup_{i \in I} Z_i$ jedna bisimulacija. Stoga postoji najveća bisimulacija između modela $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$.

U [39] je definiran pojam n-bisimulacije za Verbruggeinu semantiku. Ovdje ponavljamo tu definiciju.

Definicija 2.1.3. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Jedna n**–bisimulacija** između dva Verbruggeina modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ je konačan niz nepraznih binarnih relacija $Z_0, \dots, Z_n$ za koje imamo:

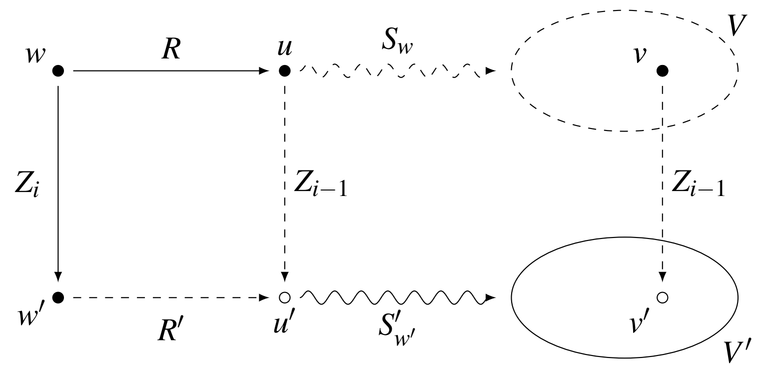
$$Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$$

te vrijede sljedeći uvjeti:

(at) za svaki par $(w, w') \in Z_0$ i svaku propozicionalnu varijablu $p \in Prop$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

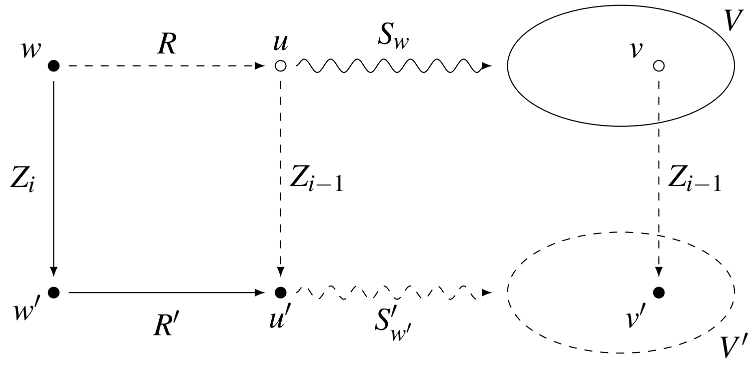
$$w \Vdash p \quad \text{ako i samo ako} \quad w' \Vdash p$$

(n–forth) za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ imamo da za svaki par $(w, w') \in Z_i$ i za svaki svijet $u \in W$ takav da vrijedi wRu, postoji svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi $uZ_{i-1}u'$, $w'R'u'$ i za svaki skup svjetova $V' \subseteq W'$ takav da $u'S'_{w'}V'$, postoji skup svjetova $V \subseteq W$ takav da vrijedi uS_wV i za svaki svijet $v \in V$ postoji svijet $v' \in V'$ takav da vrijedi $vZ_{i-1}v'$



Slika 2.3: Ilustracija uvjeta (n-forth).

(n–back) za svaki $i \in \{1,\ldots,n\}$ imamo da za svaki par $(w,w') \in Z_i$ i za svaki svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi $w'R'u'$, postoji svijet u takav da vrijedi $uZ_{i-1}u'$, wRu i za svaki skup svjetova $V \subseteq W$ takav da uS_wV, postoji skup svjetova $V' \subseteq W'$ takav da vrijedi $u'S'_{w'}V'$ i za svaki svijet $v' \in V'$ postoji svijet $v \in V$ takav da vrijedi $vZ_{i-1}v'$.



Slika 2.4: Ilustracija uvjeta (n-back).

Za dva svijeta $w \in W$ i $w' \in W'$ kažemo da su n–**bisimulirani**, te pišemo $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows_n \mathfrak{M}', w'$, ako postoji n–bisimulacija $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$ tako da vrijedi wZ_nw'.

2.2. BISIMULIRANOST POVLAČI MODALNU EKVIVALENTNOST

Zanima nas veza između pojmova modalne ekvivalentnosti i bisimuliranosti: jesu li modalno ekvivalentni svjetovi nužno bisimulirani te obratno, jesu li bisimulirani svjetovi nužno modalno ekvivalentni? Pritom kako promatramo vezu bisimuliranosti i modalne ekvivalencije, tako ćemo promatrati i vezu n-bisimulacije i n-modalne ekvivalencije.

Lako je dokazati sljedeću propoziciju koja je analogon leme 5. iz članka [7] za Veltmanove modele: (n-)bisimuliranost povlači (n-)modalnu ekvivalentnost.

Propozicija 2.2.1. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Verbruggeina modela. Neka su $w \in \mathfrak{M}$, $w' \in \mathfrak{M}'$ svjetovi iz tih modela te neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan.

(a) Ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$ tada imamo i $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$.

(b) Ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq \mathfrak{M}', w'$ tada imamo i $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$.

Dokaz. Za ilustraciju ćemo dokazati samo tvrdnju (a) (tvrdnja (b) dokazuje se analogno indukcijom po složenosti formule, tj. po broju logičkih veznika i modalnih operatora koji se javljaju u formuli). Tu tvrdnju dokazujemo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 0$ tvrdnja slijedi iz uvjeta (at) iz definicije n-bisimulacije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki $k < n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarroweq_n \mathfrak{M}', w'$. Tada postoji n-bisimulacija $Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$ takva da vrijedi wZ_nw'. Indukcijom po složenosti formule F, čija je dubina najviše n, pokazujemo da vrijedi sljedeća ekvivalencija: $w \Vdash F$ ako i samo ako vrijedi $w' \Vdash F$.

Razmotrit ćemo samo slučaj iz koraka indukcije kada je $F \equiv G \rhd H$, pri čemu je F dubine najviše n (ostali slučajevi lagano slijede iz uvjeta (at) ili pretpostavke indukcije).

Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash G \rhd H$ i pokažimo da vrijedi $w' \Vdash G \rhd H$. U tu svrhu, neka je $u' \in W'$ proizvoljan svijet takav da vrijedi $w'R'u'$ i $u' \Vdash G$. Sada iz wZ_nw' korištenjem uvjeta (n-back) slijedi da postoji svijet $u \in W$ takav da vrijedi wRu i $uZ_{n-1}u'$. Kako je $Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_0$ jedna $(n-1)$-bisimulacija, slijedi $\mathfrak{M}, u \leftrightarroweq_{n-1} \mathfrak{M}', u'$. Korištenjem pretpostavke indukcije slijedi $u \equiv_{n-1} u'$. Iz pretpostavke da je dubina od $G \rhd H$ najviše n slijedi da je dubina formule G najviše $n-1$. Iz toga, $u \equiv_{n-1} u'$ i $u' \Vdash G$ dobivamo $u \Vdash G$. Prema pretpostavci vrijedi $w \Vdash G \rhd H$, pa iz wRu i $u \Vdash G$ slijedi da postoji $V \subseteq W$ takav da vrijedi uS_wV i za svaki $v \in V$ vrijedi $v \Vdash H$. Sada ponovo korištenjem uvjeta (n-back) dobivamo da postoji $V' \subseteq W'$, takav da $u'S'_{w'}V'$ i za svaki svijet $v' \in V'$ postoji svijet $v \in V$ takav da vrijedi $vZ_{n-1}v'$.

Neka je $v' \in V'$ proizvoljan svijet. Tada prema prethodnom postoji svijet $v \in V$ takav da vrijedi $vZ_{n-1}v'$. Ponovo kako je $Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_0$ jedna $(n-1)$-bisimulacija, slijedi $\mathfrak{M}, v \leftrightarrows_{n-1} \mathfrak{M}', v'$. Korištenjem pretpostavke indukcije slijedi $v \equiv_{n-1} v'$. Iz pretpostavke da je dubina od $G \rhd H$ najviše n slijedi da je dubina formule H najviše $n-1$. Iz toga, $v \equiv_{n-1} v'$ i $v \Vdash H$ (jer za svaki $v_0 \in V$ vrijedi $v_0 \Vdash H$, pa posebno i za $v \in V$) dobivamo $v' \Vdash H$. Kako je svijet $v' \in V'$ bio proizvoljan, zaključujemo $V' \Vdash H$.

Dakle, vrijedi $w' \Vdash G \rhd H$, što je i trebalo pokazati. Obratan smjer, tj. da iz $w' \Vdash G \rhd H$ slijedi $w \Vdash G \rhd H$, pokazuje se analogno uz korištenje uvjeta (n-forth).

■

Obrat prethodne propozicije općenito ne vrijedi, tj. općenito (n-)modalno ekvivalentni svjetovi nisu (n-)bisimulirani. To ćemo uskoro dokazati navođenjem protuprimjera. Preciznije, pokazat ćemo da postoje dva Verbruggeina modela s dva svijeta koji su modalno ekvivalentni, ali nisu bisimulirani. U svrhu lakšeg pokazivanja (ne)bisimuliranosti, pokazat ćemo da je pitanje (ne)bisimuliranosti dvaju svjetova ekvivalentno postojanju pobjedničke strategije jednog od igrača u odgovarajućoj bisimulacijskoj igri. Stoga ćemo prvo definirati bisimulacijsku igru (te njenu konačnu verziju: konačnu bisimulacijsku igru) za Verbruggeinu semantiku.

2.3. (Konačne) bisimulacijske igre za Verbruggeinu semantiku

U ovoj točki definiramo bisimulacijske igre i konačne bisimulacijske igre za Verbruggeinu semantiku. Prvo navodimo kratak pregled bisimulacijskih igara za Kripkeove modele, kako bi kasnije to poopćili na bisimulacijske igre za Verbruggeine modele. Zatim dajemo sasvim nove definicije pojmova bisimulacijske igre i n-igre (ili konačne igre) za Verbruggeinu semantiku te pokazujemo da je pitanje n-bisimuliranosti dvaju svjetova ekvivalentno pitanju postojanja pobjedničke strategije branitelja u n-bisimulacijskoj igri s početnom konfiguracijom koja uključuje te svjetove. To ćemo iskoristiti u sljedećim točkama kako bi lakše dokazali (ne)bisimuliranost dvaju svjetova - naime, trebat će samo opisati pobjedničku strategiju jednog od igrača u bisimulacijskoj igri iz početne konfiguracije koja se sastoji od tih svjetova da bi pokazali da su oni (ne)bisimulirani.

Bisimulacijske igre za Kripkeove modele neformalno su opisane u [10]. Neka su $\mathfrak{K} = (W, R, \Vdash)$ i $\mathfrak{K}' = (W', R', \Vdash)$ Kripkeovi modeli. *Bisimulacijsku igru* nad modelima $\mathfrak{K}$ i $\mathfrak{K}'$ igraju dva igrača `I` i `II` s jednim kamenčićem u $\mathfrak{K}$ i jednim kamenčićem u $\mathfrak{K}'$. Svaki kamenčić predstavlja jedan svijet pojedinog modela koji trenutno promatramo. Jedna *konfiguracija* u igri sastoji se od trenutnog položaja dvaju kamenčića i opisana je četvorkom $(\mathfrak{K}, w, \mathfrak{K}', w')$, pri čemu su w i w' svjetovi koji odgovaraju trenutnim položajima dvaju kamenčića.

Jedna *runda* u igri se odvija ovako: prvi igrač `I`, ili *izazivač*, bira jedan od dva kamenčića i pomiče ga na R-sljedbenika svijeta na kojem se kamenčić nalazi (u odgovarajućem modelu). Potom drugi igrač `II`, ili *branitelj*, odgovara na potez igrača `I` pomicanjem drugog kamenčića na maloprije opisan način.

Igrač `II` gubi kad ne može pomaknuti drugi kamenčić na način da u sljedećoj konfiguraciji dva kamenčića ne predstavljaju dva svijeta koji zadovoljavaju iste propozicionalne varijable. Igrač `I` gubi u nekom trenutku igre ako se oba kamenčića nađu u svjetovima koji nemaju R-sljedbenika (pa se ne može prijeći u sljedeću rundu). Ako igra ima beskonačno rundi, koje se odvijaju prema prethodno opisanim pravilima, tada definiramo da pobjeđuje igrač `II`.

Kažemo da igrač `II` ima *pobjedničku strategiju* u bisimulacijskoj igri koja počinje konfiguracijom $(\mathfrak{K}, w, \mathfrak{K}', w')$ ako ima odgovor na svaki potez (izazov) igrača `I`, a koji mu osigurava pobjedu u bisimulacijskoj igri (ili zato što `I` zapne, ili zato što može odgovoriti dobrim potezima beskonačno puta).

U [10] je istaknuto kao propozicija da igrač `II` ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri počevši s konfiguracijom $(\mathfrak{K}, w, \mathfrak{K}', w')$ ako i samo ako su svjetovi w i w' bisimulirani.

Prethodno opisane ideje napravljene su za Veltmanove modele u [7]. Tamo su definirane n-bisimulacijske igre za Veltmanove modele kako bi se lakše dokazivala n-bisimuliranost dvaju svjetova u Veltmanovim modelima: pokazivanje da neka dva svijeta nisu n-bisimulirana svodi se na opisivanje pobjedničke strategije izazivača u n-igri, dok se pokazivanje da neka dva svijeta jesu bisimulirana svodi na opisivanje pobjedničke strategije branitelja u n-igri.

Sada definiramo bisimulacijske igre i n-bisimulacijske igre za Verbruggeinu semantiku. U čemu je razlika sljedeće definicije u odnosu na definiciju iz [7] za Veltmanove modele komentiramo u napomeni nakon te definicije.

Definicija 2.3.1. Neka su $\mathfrak{M}_i = \left(W_i, R_i, \{S_w^{(i)} : w \in W_i\}, \Vdash\right)$, $i \in \{0, 1\}$, dva Verbruggeina modela. **Bisimulacijsku igru** igraju dva igrača, izazivač (engl. *Challenger*) i branitelj (engl. *Defender*). Igra se odvija u nizu uzastopnih rundi kojima se iz jedne konfiguracije prelazi u drugu.

Konfiguracija je uređena četvorka $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$, pri čemu je $w_0 \in W_0$ i $w_1 \in W_1$. Svaka runda počinje nekom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$. Odmah se provjerava vrijedi li $\mathfrak{M}_0, w_0 \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w_1$. Ako to ne vrijedi igra završava i definiramo da je izazivač pobijedio.

Jedna runda koja počinje s konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ odvija se prema sljedećim pravilima:

1. Izazivač bira $i \in \{0, 1\}$, tj. indeks jednog Verbruggeinog modela. Označimo s $j := 1 - i$ indeks drugog Verbruggeinog modela.

2. Izazivač bira svijet $u_i \in W_i$ takav da vrijedi $w_i R_i u_i$. Ukoliko takav svijet u_i ne postoji, igra završava i branitelj pobjeđuje.

3. Branitelj bira svijet $u_j \in W_j$ takav da vrijedi $w_j R_j u_j$. Ukoliko takav svijet u_j ne postoji, igra završava i izazivač pobjeđuje.

4. Izazivač bira skup svjetova $V_j \subseteq W_j$ takav da vrijedi $u_j S_{w_j}^{(j)} V_j$.

5. Branitelj bira skup svjetova $V_i \subseteq W_i$ takav da vrijedi $u_i S_{w_i}^{(i)} V_i$.

Preostaje odabrati s kojom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$ počinje sljedeća runda. To se obavlja na sljedeći način:

(i) Izazivač bira svijet u_i ili neki svijet $v_i \in V_i$.

(ii) U slučaju da je izazivač izabrao svijet u_i, konfiguracija kojom počinje sljedeća runda je $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1)$. Ako je pak izazivač izabrao neki svijet $v_i \in V_i$, tada **branitelj bira** neki svijet $v_j \in V_j$, te je konfiguracija kojom počinje sljedeća runda $(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)$.

Napomena 2.3.2. U čemu se prethodna definicija razlikuje od definicije za Veltmanove modele iz [7]? U tome što u pravilu 4. (odnosno 5.) prethodne definicije izazivač (odnosno branitelj) ne bira jedan svijet v_k odgovarajućeg modela $\mathfrak{M}_k$ takav da vrijedi $u_k S_{w_k}^{(k)} v_k$, nego skup svjetova $V_k \subseteq W_k$ takav da vrijedi $u_k S_{w_k}^{(k)} V_k$. Također, u [7] nova runda počinje konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ ili $(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)$, gdje su v_0 i v_1 izabrani u 4. odnosno 5. Ovdje se u 4. odnosno 5. izabiru skupovi svjetova V_0 i V_1, pa sljedeća runda može početi i s nekim svjetovima $v_0 \in V_0$ i $v_1 \in V_1$. Uočimo da u tom slučaju i branitelj sudjeluje u procesu biranja konfiguracije kojom počinje sljedeća runda.

Kažemo da igrač branitelj ima *pobjedničku strategiju* u bisimulacijskoj igri koja počinje konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$, ako ima odgovor na svaki potez izazivača, a koji mu osigurava pobjedu u bisimulacijskoj igri (ili zato što izazivač zapne, ili zato što može odgovoriti dobrim potezima beskonačno puta). Slično, kažemo da izazivač ima pobjedničku strategiju u toj igri ako za bilo koji niz poteza branitelja ima niz poteza koji mu osigurava pobjedu. Očito u igri ne mogu istovremeno oba igrača imati pobjedničke strategije.

Sada definiramo konačnu igru ili n-igru za Verbruggeine modele.

Definicija 2.3.3. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Jedna ***n*-igra** je bisimulacijska igra koja završava nakon n rundi. Ako izazivač nije pobijedio u n-igri, tada po definiciji smatramo da je pobijedio branitelj.

Napomena 2.3.4. 0-igra je igra bez poteza. Uočimo da branitelj ima pobjedničku strategiju u 0-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ ako vrijedi $\mathfrak{M}_0, w_0 \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w_1$.

Drugim riječima, za pobjedu u n-igri branitelj treba „preživjeti" (u smislu ne izgubiti u) ukupno n rundi. Pobjednička strategija za igrača je način biranja svjetova kojim igrač niti u jednom trenutku ne stvara priliku drugome igraču za pobjedu u nekoj rundi. Naravno, kao specijalan slučaj, to povlači i mogućnost da taj igrač u nekoj rundi pobijedi (jer tada posebno ovaj drugi igrač nikad neće pobijediti).

Napomena 2.3.5. Uočimo da se pravila 4. i 5. iz definicije 2.3.1. mogu uvijek zadovoljiti. Primjerice, za pravilo 4. zbog kvazi-refleksivnosti relacije $S_{w_j}^{(j)}$, vrijedi $u_j S_{w_j}^{(j)} \{u_j\}$, pa izazivač može uvijek odabrati kao skup V_j upravo skup $\{u_j\}$.

Sljedeća propozicija analogon je propozicije 7. u [7] za bisimulacijske igre Veltmanovih modela.

Propozicija 2.3.6. Svaka bisimulacijska igra na Verbruggeinim modelima završava u konačno mnogo rundi.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji beskonačna bisimulacijska igra. Označimo njenu početnu konfiguraciju sa $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$. Uvodimo sljedeću oznaku za konfiguraciju nakon k-te runde (za $k \in \mathbb{N}$): $(\mathfrak{M}_0, w_0^{(k)}, \mathfrak{M}_1, w_1^{(k)})$. Uočimo da je konfiguracija nakon 0 rundi zapravo početna konfiguracija, tj. vrijedi $w_0^{(0)} = w_0$ i $w_1^{(0)} = w_1$.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan (igra je beskonačna po pretpostavci, pa se k-ta runda odigra). U k-toj rundi početna konfiguracija je $(\mathfrak{M}_0, w_0^{(k)}, \mathfrak{M}_1, w_1^{(k)})$. U toj rundi se, između ostalog, odabere svijet $u_0^{(k)} \in W_0$ takav da vrijedi $w_0^{(k)} R_0 u_0^{(k)}$ te skup svjetova $V_0^{(k)} \subseteq W_0$ takav da vrijedi $u_0^{(k)} S_{w_0^{(k)}}^{(0)} V_0^{(k)}$.

Sada se sljedeća runda odigrava od konfiguracije $(\mathfrak{M}_0, w_0^{(k+1)}, \mathfrak{M}_1, w_1^{(k+1)})$, pri čemu su, prema definiciji bisimulacijske igre, mogući sljedeći slučajevi:

(a) vrijedi $w_0^{(k+1)} = u_0^{(k)}$. Tada iz $w_0^{(k)} R_0 u_0^{(k)}$ slijedi $w_0^{(k)} R_0 w_0^{(k+1)}$.

(b) vrijedi $w_0^{(k+1)} = v_0^{(k)}$, za neki $v_0^{(k)} \in V_0^{(k)}$. Iz definicije relacije $S_{w_0^{(k)}}^{(0)}$ i $u_0^{(k)} S_{w_0^{(k)}}^{(0)} V_0^{(k)}$, slijedi $V_0^{(k)} \subseteq R_0[w_0^{(k)}]$. To i $v_0^{(k)} \in V_0^{(k)}$ povlači da vrijedi $w_0^{(k)} R_0 v_0^{(k)}$. Prema tome vrijedi $w_0^{(k)} R_0 w_0^{(k+1)}$.

Dakle, dobili smo da za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $w_0^{(k)} R_0 w_0^{(k+1)}$. Drugim riječima, dobili smo sljedeći beskonačan niz:

$$w_0^{(0)} R_0 w_0^{(1)} R_0 w_0^{(2)} R_0 w_0^{(3)} R_0 w_0^{(4)} R_0 \dots$$

što je u kontradikciji s inverzno dobrom fundiranošću relacije R_0. Dakle, početna pretpostavka bila je pogrešna, tj. ne postoje beskonačne bisimulacijske igre.

∎

Sljedeća propozicija analogna je prvom dijelu propozicije 8. iz [7] za slučaj Veltmanovih modela.

Propozicija 2.3.7. Neka su $\mathfrak{M}_0 = (W_0, R_0, \{S_w^{(0)} : w \in W_0\}, \Vdash)$ i $\mathfrak{M}_1 = (W_1, R_1, \{S_w^{(1)} : w \in W_1\}, \Vdash)$ dva Verbruggeina modela. Neka su $w_0 \in W_0$ i $w_1 \in W_1$ svjetovi iz tih modela te neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj n-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}_0, w_0 \leftrightarrows_n \mathfrak{M}_1, w_1$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj n-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$. Za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ definiramo relacije Z_i ovako:

$$Z_i := \big\{(v_0, v_1) \in W_0 \times W_1 : \text{branitelj ima pobjedničku strategiju u } i\text{-igri} \\ \text{s početnom konfiguracijom } (\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)\big\}.$$

Pokazujemo da je konačan niz $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ jedna n-bisimulacija za koju vrijedi $w_0 Z_n w_1$.

Kako po pretpostavci branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj n-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ tada iz definicije relacije Z_n slijedi $w_0 Z_n w_1$.

Uočimo sada da za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ vrijedi $Z_{i+1} \subseteq Z_i$, jer pobjednička strategija branitelja u $(i+1)$-igri s nekom početnom konfiguracijom može se primijeniti u i-igri s istom početnom konfiguracijom.

Očito vrijedi uvjet (at) iz definicije n-bisimulacije, jer ako $(w_0, w_1) \in Z_0$ tada iz definicije relacije Z_0 slijedi da branitelj ima pobjedničku strategiju u 0-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$, a to upravo znači $\mathfrak{M}_0, w_0 \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w_1$.

Pokazujemo da vrijedi uvjet (n-forth) iz definicije (sasvim analogno dokazuje se da vrijedi uvjet (n-back)). Neka je $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ proizvoljan. Neka su $(w, w') \in Z_i$ i $u \in W_0$ takvi da vrijedi $w R_0 u$. Dobivena situacija prikazana je slikom 2.5.

Iz pretpostavke $(w, w') \in Z_i$ i definicije relacije Z_i slijedi da branitelj ima pobjedničku strategiju S u svakoj i-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$.

Promotrimo i-igru s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$ u kojoj je izazivač u prvom potezu izabrao svijet $u \in W_0$. Uočimo da iz $(w, w') \in Z_i$ i $Z_i \subseteq Z_0$ slijedi $(w, w') \in Z_0$, pa vrijedi $\mathfrak{M}_0, w \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w'$. Budući da je $i \geq 1$ ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$),[1] tada branitelj primjenjuje strategiju

[1]Naime, izazivač je povukao već jedan potez, što bi bilo nemoguće za $i = 0$, s obzirom da u 0-igri nema poteza! Također, kako promatramo relaciju Z_i, mora vrijediti $i \leq n$. Dakle, sveukupno imamo $1 \leq i \leq n$.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "R_0"] \arrow[d, "Z_i"'] & u \\ w' & \end{tikzcd}$$

Slika 2.5

S, te obzirom na tu strategiju bira svijet $u' \in W_1$ takav da vrijedi $w'R_1u'$ i $\mathfrak{M}_0, u \equiv_0 \mathfrak{M}_1, u'$ te su također po pretpostavci ispunjeni uvjeti 4. i 5. iz definicije bisimulacijske igre koje ćemo koristiti u nastavku dokaza.

Primijetimo da iz $(w,w') \in Z_i$ te wR_0u i $w'R_1u'$ slijedi $(u,u') \in Z_{i-1}$ (branitelj nastavlja primjenjivati strategiju S u $(i-1)$-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, u, \mathfrak{M}_1, u')$). Dobivena situacija prikazana je slikom 2.6.

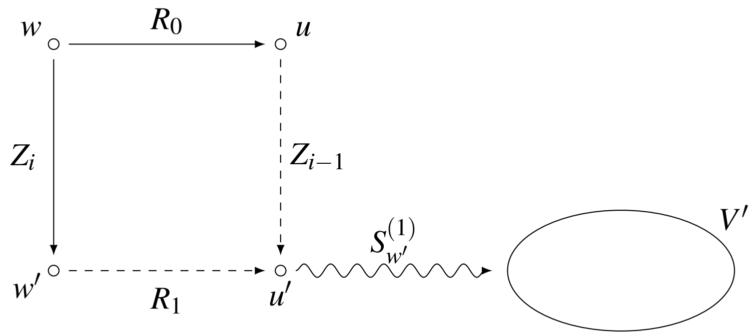
$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "R_0"] \arrow[d, "Z_i"'] & u \arrow[d, dashed, "Z_{i-1}"] \\ w' \arrow[r, dashed, "R_1"'] & u' \end{tikzcd}$$

Slika 2.6

Neka je $V' \subseteq W_1$ proizvoljan skup takav da vrijedi $u'S^{(1)}_{w'}V'$. Promotrimo sada nastavak i-igre s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$ u kojoj je izazivač izabrao svijet $u \in W_0$ (pri čemu wR_0u), branitelj izabrao svijet $u' \in W_1$ (pri čemu vrijedi $w'R_1u'$, $\mathfrak{M}_0, u \equiv_0 \mathfrak{M}_1, u'$ te $(u,u') \in Z_{i-1}$), a onda izazivač izabrao skup svjetova V' (za kojeg vrijedi $u'S^{(1)}_{w'}V'$). Dobivena situacija prikazana je slikom 2.7.

Tada branitelj primijeni strategiju S koja mu omogućava da izabere skup svjetova $V \subseteq W_0$ za koji vrijedi $uS^{(0)}_{w}V$. Iz definicije n-bisimulacije slijedi da za svojstvo (n-forth) preostaje samo pokazati da vrijedi sljedeće:

$$\text{za svaki svijet } v \in V \text{ postoji svijet } v' \in V' \text{ takav da vrijedi } vZ_{i-1}v'.$$



Slika 2.7

No to vrijedi, jer bi u suprotnom postojao svijet $v \in V$ takav da za niti jedan svijet $v' \in V'$ ne vrijedi $vZ_{i-1}v'$. To po definiciji relacije Z_{i-1} znači da tada branitelj nema pobjedničku strategiju u svakoj $(i-1)$-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, v, \mathfrak{M}_1, v')$, pa posebno onda ni u prethodno razmatranoj i-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$, što je u kontradikciji sa činjenicom $(w, w') \in Z_i$.

Time smo dokazali da vrijedi uvjet (n-forth).

Dokažimo sada obrat iz iskaza propozicije. U tu svrhu pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}_0, w_0 \leftrightarrows_n \mathfrak{M}_1, w_1$, tj. da postoji konačan niz relacija $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n \subseteq W_0 \times W_1$ koji zadovoljava uvjete iz definicije n-bisimulacije te vrijedi $w_0 Z_n w_1$. Treba pokazati da branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj n-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$.

Za početak, promotrimo slučaj za $n = 0$, tj. slučaj kada se radi o 0-igri. Iz $\mathfrak{M}_0, w_0 \leftrightarrows_n \mathfrak{M}_1, w_1$ korištenjem uvjeta (at) slijedi $\mathfrak{M}_0, w_0 \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w_1$. To znači da branitelj ima pobjedničku strategiju u 0-igri.

Promotrimo sada n-igru kada je $n > 0$. Iz pretpostavke $\mathfrak{M}_0, w_0 \leftrightarrows_n \mathfrak{M}_1, w_1$ slijedi posebno $w_0 Z_n w_1$. Kako je $n > 0$, izazivač u 1. rundi te n-igre bira model $\mathfrak{M}_i$, za neki $i \in \{0, 1\}$, te bira svijet $u_i \in W_i$ takav da vrijedi $w_i R_i u_i$. Opisat ćemo strategiju branitelja u toj 1. rundi. U ostatku ovog dokaza neka je $j = 1 - i$.

Ukoliko je $i = 0$, tada prema (n-forth) svojstvu, odnosno ako je $i = 1$ tada prema (n-back) svojstvu, iz $w_0 Z_n w_1$ slijedi da postoji svijet $u_j \in W_j$ takav da vrijedi $w_j R_j u_j$ te $u_0 Z_{n-1} u_1$. Nadalje, za taj svijet u_j i za svaki skup svjetova V_j takav da $u_j S^{(j)}_{w_j} V_j$, postoji skup svjetova V_i takav da vrijedi $u_i S^{(i)}_{w_i} V_i$ i za svaki svijet $v_i \in V_i$ postoji svijet $v_j \in V_j$ tako da vrijedi $v_i Z_{n-1} v_j$. Dakle, kako ovdje branitelj ne bi izgubio (prema definiciji n-igre), može izabrati upravo taj svijet u_j.

Pretpostavimo da izazivač bira skup svjetova $V_j \subseteq W_j$ takav da vrijedi $u_j S^{(j)}_{w_j} V_j$. Tada iz svojstva (n-forth) (ako je $i = 0$), odnosno svojstva (n-back) (ako je $i = 1$), branitelj može birati skup svjetova $V_i \subseteq W_i$ takav da vrijedi $u_i S_{w_i}^{(i)} V_i$ te imamo sljedeće:

$$\text{za svaki svijet } v_i \in V_i \text{ postoji svijet } v_j \in V_j \text{ takav da vrijedi } v_0 Z_{n-1} v_1. \tag{2.1}$$

Promotrimo sada sve moguće slučajeve početnih konfiguracija $(\mathfrak{M}_0, w'_0, \mathfrak{M}_1, w'_1)$ za sljedeću rundu. Mogućnosti koje ima izazivač su sljedeće:

(a) izabire neki svijet u_i. Tada imamo $w'_0 = u_0$ te $w'_1 = u_1$. Uočimo da za njih vrijedi $u_0 Z_{n-1} u_1$.

(b) izabire neki svijet $v_i \in V_i$. Tada prema činjenici koju smo označili s (2.1) branitelj može izabrati svijet $v_j \in V_j$ takav da vrijedi $v_0 Z_{n-1} v_1$. Tada imamo $w'_0 = v_0$ te $w'_1 = v_1$, pri čemu su $v_0 \in V_0$ i $v_1 \in V_1$ te ponovno imamo da vrijedi $v_0 Z_{n-1} v_1$.

Uočimo da u oba slučaja vrijedi $w'_0 Z_{n-1} w'_1$. Također zbog $Z_{n-1} \subseteq Z_0$ vrijedi $\mathfrak{M}_0, w'_0 \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w'_1$, što znači da izazivač ni ovdje ne pobjeđuje (ili drugim riječima, branitelj ne gubi). Istom strategijom pokazuje se da ako branitelj nije izgubio u k-toj rundi, za neki $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, da tada neće izgubiti ni u $(k+1)$. rundi. Dakle, opisana strategija je pobjednička strategija branitelja u ovoj n-igri. ■

Propozicija 2.3.8. Neka su $\mathfrak{M}_0$ i $\mathfrak{M}_1$ dva Verbruggeina modela, te neka su $w_0 \in \mathfrak{M}_0$, $w_1 \in \mathfrak{M}_1$ svjetovi iz tih modela. Tada branitelj ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}_0, w_0 \leftrightarrows \mathfrak{M}_1, w_1$.

Dokaz te propozicije dobivamo tako da u dokazu propozicije 2.3.7. zamijenimo sve oznake Z_i (za neki indeks i) s oznakom Z, te pojmove i-igra pojmom igra. Preciznije, umjesto definiranja skupova, za $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} Z_i := \big\{(v_0, v_1) \in W_0 \times W_1 : &\text{ branitelj ima pobjedničku strategiju u } i\text{-igri} \\ &\text{počevši s konfiguracijom } (\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)\big\}, \end{aligned}$$

definiramo samo jedan skup (uočimo da smo zamijenili Z_i s Z i „i-igri" s „igri"):

$$\begin{aligned} Z := \big\{(v_0, v_1) \in W_0 \times W_1 : &\text{ branitelj ima pobjedničku strategiju u igri} \\ &\text{počevši s konfiguracijom } (\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)\big\}. \end{aligned}$$

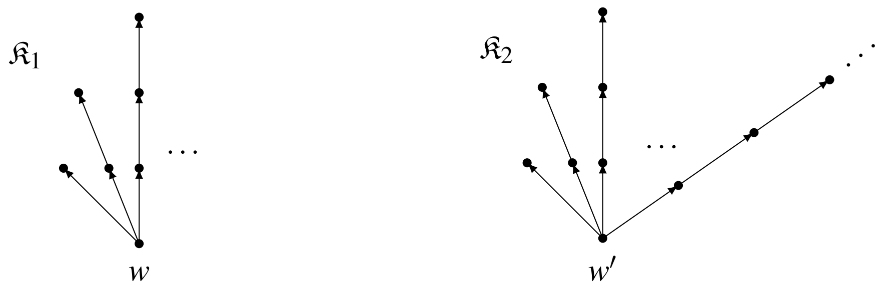
2.4. Pitanje obrata: modalna ekvivalentnost ne povlači bisimuliranost

Pokazat ćemo da modalna ekvivalentnost općenito ne povlači bisimuliranost, tj. da općenito ne vrijedi obrat propozicije 2.2.1. Prvo ćemo promotriti protuprimjere kojima je pokazano da ta tvrdnja ne vrijedi za Kripkeove, te zatim za GL i Veltmanove modele. Posebno ćemo promotriti način na koji je traženi rezultat dobiven u [7] za Veltmanovu semantiku. Preciznije, u [7] su dana dva GL-modela koji sadrže dva svijeta koji su modalno ekvivalentni, ali nisu bisimulirani (kao svjetovi GL-modela) što je pokazano opisivanjem izazivačeve pobjedničke strategije u odgovarajućoj igri. Zatim je opisana transformacija GL-modela u Veltmanov model tako da je očuvana bisimuliranost i modalna ekvivalentnost. To znači da Veltmanovi modeli dobiveni iz GL-modela koji su protuprimjer za GL-semantiku, upravo čine traženi protuprimjer za Veltmanovu semantiku, s obzirom da su njihova dva istaknuta svijeta i dalje modalno ekvivalentni, ali ne i bisimulirani. Mi ćemo ovdje primijeniti sličan pristup: prvo ćemo definirati postupak kojim iz Veltmanovih modela dobivamo Verbruggeine modele, te pokazati da taj postupak čuva modalnu ekvivalentnost i bisimuliranost. Tada će biti dovoljno taj postupak primijeniti na poznate Veltmanove modele koji predstavljaju protuprimjer za Veltmanovu semantiku. Zbog toga što naš postupak čuva modalnu ekvivalentnost i bisimuliranost, dobiveni Verbruggeini modeli će i dalje imati dva modalno ekvivalentna, ali ne i bisimulirana svijeta.

Kronološki gledano, prvo je dokazano (protuprimjerom navedenim u nastavku) da u slučaju Kripkeovih modela, modalna ekvivalentnost ne povlači bisimuliranost. U [5] je naveden primjer Kripkeovih modela $\mathfrak{K}_1 = (W, R, V)$ i $\mathfrak{K}_2 = (W', R', V')$ i njihovih svjetova $w \in W$ i $w' \in W'$ koji su modalno ekvivalentni (pri čemu sada gledamo samo formule osnovnog modalnog jezika), ali nisu bisimulirani (kao svjetovi Kripkeovih modela).

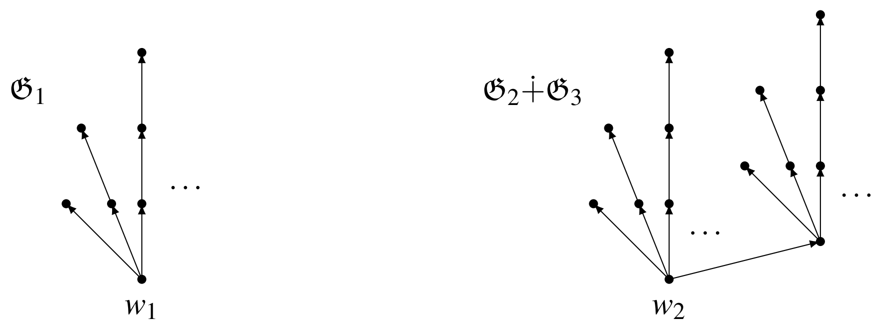
Pritom su valuacije u oba modela trivijalne (tj. vrijedi $V = V' = \emptyset$). Isti modeli ne mogu se iskoristiti kao protuprimjer u slučaju GL-modela. Razlog je očit: Kripkeov model $\mathfrak{K}_2$ ne može biti GL-model jer zbog postojanja beskonačne grane (slika 2.8 desno) relacija R nije inverzno dobro fundirana.

U [7] dokazano je da i u slučaju GL-modela modalna ekvivalentnost ne povlači bisimulira-



Slika 2.8: Svjetovi w i w' su modalno ekvivalentni, ali ne i bisimulirani

nost. Naveden je primjer GL-modela $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_2 \dot{+} \mathfrak{G}_3$ čiji svjetovi w_1 i w_2 jesu modalno ekvivalentni (gledajući samo GL-formule), ali nisu bisimulirani (kao svjetovi GL-modela). Sljedeća slika prikazuje te GL-modele (pri čemu na slici podrazumijevamo tranzitivnost relacije R). Pritom je $\mathfrak{G}_1$ izomorfna kopija Kripkeovog modela $\mathfrak{K}_1$ s prethodne slike (i zatvorena na tranzitivnost), dok je model $\mathfrak{G}_2 \dot{+} \mathfrak{G}_3$ dobiven „lijepljenjem" dvije izmorfne kopije $\mathfrak{G}_2$ i $\mathfrak{G}_3$ od $\mathfrak{K}_1$ (više detalja može se pronaći u [7]). U oba modela valuacija je trivijalna (tj. $V = V' = \emptyset$).



Slika 2.9: Svjetovi w i w' su modalno ekvivalentni, ali ne i bisimulirani

Postavlja se pitanje mogu li se prethodni GL-modeli iskoristiti kako bi se pokazalo da u slučaju Veltmanovih modela modalna ekvivalentnost ne povlači bisimuliranost. Za to je potrebno definirati, za skup svjetova W, relacije S_w, za svaki $w \in W$. U [7] je to napravljeno ovako:

Definicija 2.4.1. Neka je $\mathfrak{G} = (W, R, V)$ neki GL-model. Za svaki svijet $w \in W$ definiramo relaciju S_w ovako:

$$uS_w v \quad \text{ako i samo ako} \quad wRu\underline{R}v,$$

pri čemu s $\underline{R}$ označavamo refleksivno zatvorenje relacije R. Strukturu $\big(W, R, \{S_w : w \in W\}, V\big)$ označavamo s $Vel\ \mathfrak{G}$.

Pokazuje se da je ta struktura $Vel\ \mathfrak{G}$ jedan Veltmanov model (ukoliko je $\mathfrak{G}$ bio jedan GL-model). Sada navodimo glavni rezultat članka [7].

Teorem 2.4.2. Svjetovi w_1 i w_2 u Veltmanovim modelima $Vel\ \mathfrak{G}_1$ i $Vel\ (\mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2)$ su modalno ekvivalentni ali nisu bisimulirani.

Za potrebe korištenja u daljnjem tekstu uvodimo oznake: $\mathfrak{N}_1 := Vel\ \mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{N}_2 := Vel\ (\mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2)$.

Sada ćemo promatrati kako Veltmanovom modelu pridružiti odgovarajući Verbruggein model tako da je očuvana modalna ekvivalentnosti i bisimuliranost (u smislu da ako su neka dva svijeta Veltmanovog modela modalno ekvivalentna, odnosno bisimulirana, tada su oni modalno ekvivalentni, odnosno bisimulirani kao svjetovi Verbruggeinih modela koje smo pridružili tim Veltmanovim modelima). To nam treba kako bi iz Veltmanovih modela $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ dobili Verbruggeine modele koji predstavljaju traženi protuprimjer za obrat propozicije 2.2.1.

Prvo ćemo za dani Veltmanov model $\mathfrak{N}$ definirati Verbruggein model $Ver\ \mathfrak{N}$. To definiramo na način koji je napravljen u dokazu Propozicije 1. u [54].

Definicija 2.4.3. Neka je $\mathfrak{N} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ Veltmanov model. Definiramo **Verbruggein model pridružen tom Veltmanovom modelu**, u oznaci $Ver\ \mathfrak{N}$, kao uređenu četvorku $(W, R, \{\overline{S}_w : w \in W\}, \Vdash)$, pri čemu za svaki svijet $w \in W$, svaki $V \subseteq R[w]$ i svaki svijet $v \in R[w]$ relaciju $\overline{S}_w$ definiramo ovako:

$$v\overline{S}_w V \quad \text{ako i samo ako} \quad (\exists u \in V)(vS_w u).$$

Postavlja se pitanje je li u prethodnoj definiciji struktura $Ver\ \mathfrak{N}$ jedan Verbruggein model. U članku [54] istaknuto je (u dokazu Propozicije 1.) da je to lako pokazati. Ovdje sad to raspisujemo.

Lema 2.4.4. Neka je $\mathfrak{N} = \big(W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash\big)$ Veltmanov model. Tada je $Ver\ \mathfrak{N} = \big(W, R, \{\overline{S}_w : w \in W\}, \Vdash\big)$ Verbruggein model.

Dokaz. Provjeravamo redom uvjete iz definicije Verbruggeinog modela:

Kako je $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ Veltmanov model, slijedi da je W neprazan skup te R relacija na W koja je tranzitivna i inverzno dobro fundirana.

Prema definiciji 2.4.3, za svaki $w \in W$, $v\overline{S}_w V$ je definirano samo za $V \subseteq R[w]$ i $v \in R[w]$. Dakle, vrijedi $\overline{S}_w \subseteq R[w] \times \mathscr{P}\big(R[w]\big)$.

No, također vrijedi $v\overline{S}_w V$ ako i samo ako postoji neki svijet $v \in V$ s određenim svojstvom. Slijedi $V \neq \emptyset$. Dakle, $\overline{S}_w \subseteq R[w] \times \Big(\mathscr{P}\big(R[w]\big) \setminus \{\emptyset\}\Big)$.

Neka su $w, u \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi wRu. Definiramo $V = \{u\}$. Iz refleksivnosti relacije S_w na $R[w]$ slijedi $uS_w u$. Tada (zbog $u \in V$) definicija 2.4.3 povlači $u\overline{S}_w V$, tj. $u\overline{S}_w\{u\}$. Drugim riječima, relacija $\overline{S}_w$ je kvazi-refleksivna.

Neka su $u, w \in W$ te $V \subseteq R[w]$ proizvoljni takvi da vrijedi $u\overline{S}_w V$. Neka za svaki svijet $v \in V$ i $Z_v \subseteq R[w]$ vrijedi $v\overline{S}_w Z_v$. Iz $u\overline{S}_w V$ prema definiciji 2.4.3 slijedi da postoji svijet $v' \in V$ takav da vrijedi $uS_w v'$. Za taj svijet v' posebno vrijedi $v' \in V$ pa prema pretpostavci postoji $Z_{v'} \subseteq R[w]$ takav da vrijedi $v'\overline{S}_w Z_{v'}$. To opet prema definiciji 2.4.3 povlači da postoji svijet $v'' \in Z_{v'}$ takav da vrijedi $v'S_w v''$.

Dakle, imamo $uS_w v'$ i $v'S_w v''$, pa iz tranzitivnosti relacije S_w slijedi $uS_w v''$. Kako je $v'' \in Z_{v'}$ i $v' \in V$ slijedi $v'' \in \cup_{v \in V} Z_v$. To sad zajedno s $uS_w v''$ i definicijom 2.4.3 povlači $u\overline{S}_w \left(\cup_{v \in V} Z_v\right)$. Drugim riječima, relacija S_w je kvazi-tranzitivna.

Neka su $w, u, v \in W$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $wRuRv$. Tada iz svojstava relacije S_w slijedi $uS_w v$. Za skup $V = \{v\}$ prema definiciji 2.4.3 tada vrijedi $u\overline{S}_w V$, tj. $u\overline{S}_w\{v\}$.

Neka su $w, u \in W$ te $V, Z \subseteq R[w]$ proizvoljni takvi da vrijedi $u\overline{S}_w V$ i $V \subseteq Z \subseteq R[w]$. Iz $u\overline{S}_w V$ prema definiciji 2.4.3 slijedi da postoji svijet $v \in V$ takav da vrijedi $uS_w v$. No, kako za $Z \subseteq R[w]$ vrijedi $V \subseteq Z$, $v \in V$ povlači $v \in Z$. Dakle, imamo $v \in Z$ i $uS_w v$, što prema definiciji 2.4.3 povlači $u\overline{S}_w Z$.

Dakle, $Ver\, \mathfrak{N} = (W, R, \{\overline{S}_w : w \in W\}, \Vdash)$ je Verbruggein model. ■

Sljedeći teorem govori o tome da je istinitost proizvoljne formule na pojedinom svijetu nekog Veltmanovog modela očuvana pri prelasku na njegov pridruženi Verbruggein model. Teorem je iskazan, bez dokaza, kao propozicija 2.4. u članku [58].

Teorem 2.4.5. Neka je F proizvoljna IL-formula. Neka je $\mathfrak{N} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ Veltmanov model, te $Ver\, \mathfrak{N} = (W, R, \{\overline{S}_w : w \in W\}, \Vdash)$ njegov pridruženi Verbruggein model. Tada za svaki svijet $w \in W$ vrijedi:

$$\mathfrak{N}, w \Vdash F \quad \text{ako i samo ako} \quad Ver\, \mathfrak{N}, w \Vdash F.$$

Dokaz. Neka je $w \in W$ proizvoljan. Tvrdnju teorema dokazujemo indukcijom po složenosti formule F (tj. broju veznika i modalnih operatora koji se javljaju u formuli F).

Neka je F formula složenosti 0. Tada vrijedi $F \equiv p$, za neki $p \in Prop$, ili $F \equiv \perp$. Razmatramo oba ta slučaja.

(a) U slučaju $F \equiv p$, za neki $p \in Prop$, iz definicije 2.4.3. slijedi traženi rezultat: vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash p$ ako i samo ako vrijedi $Ver\ \mathfrak{N}, w \Vdash p$.

(b) U slučaju $F \equiv \perp$ tvrdnja vrijedi s obzirom da ne vrijedi ni $\mathfrak{N}, w \Vdash \perp$ ni $Ver\ \mathfrak{N}, w \Vdash \perp$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaku formulu F čija je složenost strogo manja od n, za neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Neka je formula F složenosti n. Razmatramo sljedeće slučajeve u ovisnosti o izgradnji formule F (pritom promatramo samo slučajeve koji su u skladu s definicijom 1.1.2):

(a) Slučaj $F \equiv \neg G$, pri čemu je G neka formula. Tada vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{N}, w \Vdash F \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{N}, w \Vdash \neg G \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{N}, w \nVdash G \\
&\Leftrightarrow \quad (G \text{ je složenosti } n-1 \text{ pa koristimo pretp. ind.}) \\
&\Leftrightarrow \quad Ver\ \mathfrak{N}, w \nVdash G \quad \Leftrightarrow \quad Ver\ \mathfrak{N}, w \Vdash \neg G \\
&\Leftrightarrow \quad Ver\ \mathfrak{N}, w \Vdash F
\end{aligned}
$$

(b) Slučaj $F \equiv G \wedge H$, pri čemu su G i H neke formule. Tada vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{N}, w \Vdash F \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{N}, w \Vdash G \wedge H \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{N}, w \Vdash G \quad \text{i} \quad \mathfrak{N} \Vdash H \\
&\Leftrightarrow \quad ((\text{formule } G \text{ i } H \text{ su složenosti strogo manje od } n, \\
&\qquad \text{pa koristimo pretpostavku indukcije})) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad Ver\ \mathfrak{N}, w \Vdash G \quad \text{i} \quad Ver\ \mathfrak{N}, w \Vdash H \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad Ver\ \mathfrak{N}, w \Vdash G \wedge H \quad \Leftrightarrow \quad Ver\ \mathfrak{N}, w \Vdash F
\end{aligned}
$$

(c) Slučaj $F \equiv G \rhd H$, pri čemu su G i H neke formule. Pokazujemo da vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash G \rhd H$ ako i samo ako vrijedi $Ver\ \mathfrak{N}, w \Vdash G \rhd H$.

Pretpostavimo prvo da vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash G \rhd H$. To znači da vrijedi:

$$
(\forall v \in W)\Big((wRv \;\&\; \mathfrak{N}, v \Vdash G) \Rightarrow (\exists u \in W)\big(vS_w u \;\&\; \mathfrak{N}, u \Vdash H\big)\Big). \tag{2.2}
$$

Tvrdimo da vrijedi $Ver\,\mathfrak{N}, w \Vdash G \rhd H$, tj. da vrijedi

$$(\forall v \in W)\Big(wRv \;\&\; Ver\,\mathfrak{N}, v \Vdash G \\ \Rightarrow\; (\exists V \subseteq R[w])\big(v\overline{S}_w V \;\&\; Ver\,\mathfrak{N}, V \Vdash H\big)\Big). \tag{2.3}$$

Neka je $v \in W$ proizvoljan svijet takav da vrijedi wRv i $Ver\,\mathfrak{N}, v \Vdash G$. Kako je formula G složenosti strogo manje od n, iz pretpostavke indukcije i $Ver\,\mathfrak{N}, v \Vdash G$ slijedi $\mathfrak{N}, v \Vdash G$. Iz toga, wRv i pretpostavke (2.2) slijedi da postoji svijet $u \in W$ takav da vrijedi vS_wu i $\mathfrak{N}, u \Vdash H$. Kako je formula H složenosti strogo manje od n, iz pretpostavke indukcije i $\mathfrak{N}, u \Vdash H$ slijedi $Ver\,\mathfrak{N}, u \Vdash H$. Za skup $V = \{u\}$, iz vS_wu i definicije 2.4.3 slijedi $v\overline{S}_w V$. Preostaje primijetiti da zbog $V = \{u\}$ i $Ver\,\mathfrak{N}, u \Vdash H$ vrijedi $Ver\,\mathfrak{N}, V \Vdash H$. Dakle, vrijedi (2.3).

Dokažimo sada obrat. U tu svrhu pretpostavimo da vrijedi $Ver\,\mathfrak{N}, w \Vdash G \rhd H$. To znači da vrijedi:

$$(\forall v \in W)\Big(wRv \;\&\; Ver\,\mathfrak{N}, v \Vdash G \\ \Rightarrow\; (\exists V \subseteq R[w])\big(v\overline{S}_w V \;\&\; Ver\,\mathfrak{N}, V \Vdash H\big)\Big). \tag{2.4}$$

Tvrdimo da vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash G \rhd H$, tj. da vrijedi

$$(\forall v \in W)\Big((wRv \;\&\; \mathfrak{N}, v \Vdash G) \Rightarrow (\exists u \in W)\big(vS_wu \;\&\; \mathfrak{N}, u \Vdash H\big)\Big). \tag{2.5}$$

Neka je $v \in W$ proizvoljan svijet takav da vrijedi wRv i $\mathfrak{N}, v \Vdash' G$. Kako je formula G složenosti strogo manje od n, iz pretpostavke indukcije i $\mathfrak{N}, v \Vdash G$ slijedi $Ver\,\mathfrak{N}, v \Vdash G$. Iz toga, wRv i pretpostavke (2.4) slijedi da postoji $V \subseteq R[w]$ takav da vrijedi $v\overline{S}_w V$ i $Ver\,\mathfrak{N}, V \Vdash H$. Iz $v\overline{S}_w V$ i definicije 2.4.3 slijedi da postoji svijet $u \in V$ (tada također i $u \in W$) takav da vrijedi vS_wu. Iz $Ver\,\mathfrak{N}, V \Vdash H$ i $u \in V$ slijedi $Ver\,\mathfrak{N}, u \Vdash H$. Preostaje primijetiti da je složenost formule H strogo manja od n, pa iz prethodnog i pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{N}, u \Vdash H$. Dakle, vrijedi (2.5).

■

Sljedeći teorem govori o tome da su svjetovi u Veltmanovim modelima bisimulirani ako i samo ako su bisimulirani u pridruženim Verbruggeinim modelima.

Teorem 2.4.6. Neka su $\mathfrak{N} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ i $\mathfrak{N}' = (W', R', \{S'_w : w \in W\}, \Vdash)$ dva Veltmanova modela, te neka su $w_0 \in W$ i $w'_0 \in W'$. Neka su $Ver\,\mathfrak{N} = (W, R, \{\overline{S}_w : w \in W\}, \Vdash)$ i $Ver\,\mathfrak{N}' = (W', R', \{\overline{S}'_w : w \in W\}, \Vdash)$ njima pridruženi Verbruggeini modeli. Tada vrijedi:

$$Ver\,\mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows Ver\,\mathfrak{N}', w'_0 \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows \mathfrak{N}', w'_0.$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da vrijedi $Ver\ \mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows Ver\ \mathfrak{N}', w'_0$. Pritom tu bisimulaciju kojom su svjetovi w_0 i w'_0 bisimulirani kao svjetovi Verbruggeinih modela označimo sa Z. Želimo pokazati da vrijedi $\mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows \mathfrak{N}', w'_0$. Preciznije, pokazujemo da je upravo Z tražena bisimulacija Veltmanovih modela $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$. Redom pokazujemo da za relaciju Z vrijede svojstva (at), (forth) i (back) iz definicije bisimulacije za Veltmanove modele.

Neka je $(w, w') \in Z$ proizvoljan. Iz uvjeta (at) za Z iz definicije bisimulacije Verbruggeinih modela slijedi da w i w' zadovoljavaju iste propozicionalne varijable. Dakle, vrijedi uvjet (at) iz definicije bisimulacije Veltmanovih modela.[2]

Dokažimo sada da vrijedi uvjet (forth). Neka je $(w, w') \in Z$ proizvoljan par. Neka je $u \in W$ proizvoljan svijet takav da vrijedi wRu. Tada prema (forth) svojstvu relacije Z iz definicije bisimulacije Verbruggeinih modela postoji svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi uZu' i $w'R'u'$.

Neka je sad $v' \in W'$ proizvoljan svijet takav da vrijedi $u'S'_{w'}v'$. Tada prema definiciji 2.4.3 (preciznije definiciji relacije $\overline{S}'_{w'}$) slijedi da za skup $V' = \{v'\}$ vrijedi $u'\overline{S}'_{w'}V'$. Sada prema svojstvu (forth) iz definicije bisimulacije Verbruggeinih modela slijedi da postoji skup svjetova V takav da vrijedi $u\overline{S}_wV$ i

$$\text{za svaki svijet } v \in V \text{ postoji svijet } v'' \in V' \text{ takav da vrijedi } vZv''. \tag{2.6}$$

Iz $u\overline{S}_wV$ prema definiciji 2.4.3 slijedi da postoji svijet $v \in V$ za koji vrijedi uS_wv. Kako je $v \in V$, iz (2.6) slijedi da postoji svijet $v'' \in V'$ takav da vrijedi vZv''. No, $v'' \in V' = \{v'\}$ povlači $v'' = v'$, pa vZv'' povlači vZv'.

Dakle, za relaciju Z vrijedi uvjet (forth) iz definicije bisimulacije Veltmanovih modela.

Provjerimo još da vrijedi uvjet (back). Neka je $(w, w') \in Z$ proizvoljan par. Neka je $u' \in W'$ proizvoljan svijet takav da vrijedi $w'R'u'$. Tada prema (back) svojstvu relacije Z iz definicije Verbruggeinih modela postoji svijet $u \in W$ takav da vrijedi uZu' i wRu.

Neka je sad $v \in W$ proizvoljan svijet takav da vrijedi uS_wv. Tada prema definiciji 2.4.3 (preciznije definiciji relacije $\overline{S}_w$) slijedi da za skup $V = \{v\}$ vrijedi $u\overline{S}_wV$. Sada prema svojstvu (back) iz definicije Verbruggeinih modela slijedi da postoji skup svjetova V' takav da vrijedi $u'\overline{S}'_{w'}V'$ i vrijedi sljedeće:

$$\text{za svaki svijet } v' \in V' \text{ postoji svijet } v_1 \in V \text{ takav da vrijedi } v_1Zv'. \tag{2.7}$$

[2] Uočimo da zapravo nema razlike između uvjet (at) iz definicije bisimulacije Verbruggeinih modela i uvjeta (at) iz definicije bisimulacije Veltmanovih modela.

Iz $u'\overline{S}'_{w'}V'$ prema definiciji 2.4.3 slijedi da postoji svijet $v' \in V'$ za koji vrijedi $u'S'_{w'}v'$. Kako je $v' \in V'$, iz (2.7) slijedi da postoji svijet $v_1 \in V$ takav da vrijedi v_1Zv'. No, $v_1 \in V = \{v\}$ povlači $v_1 = v$, pa v_1Zv' povlači vZv'.

Dakle, za relaciju Z vrijedi uvjet (back) iz definicije bisimulacije Veltmanovih modela.

Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows \mathfrak{N}', w_0'$. Pritom tu bisimulaciju kojom su svjetovi w_0 i w_0' bisimulirani kao svjetovi Veltmanovih modela označimo sa Z. Želimo pokazati da vrijedi $\mathit{Ver}\ \mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows \mathit{Ver}\ \mathfrak{N}', w_0'$. Preciznije, pokazujemo da je upravo Z tražena bisimulacija Verbruggeinih modela $\mathit{Ver}\ \mathfrak{N}$ i $\mathit{Ver}\ \mathfrak{N}'$. Redom pokazujemo da za relaciju Z vrijede svojstva (at), (forth) i (back) iz definicije bisimulacije za Verbruggeine modele.

Uočimo (kao u dokazu obratnog smjera maloprije) da se (at) iz definicije bisimulacije Verbruggeinih modela podudara s uvjetom (at) koji Z kao bisimulacija Veltmanovih modela zadovoljava.

Provjerimo prvo da vrijedi uvjet (forth) iz definicije bisimulacije Varbruggeinih modela. Neka su $(w, w') \in Z$ i $u \in W$ proizvoljni tako da vrijedi wRu. Iz uvjeta (forth) iz definicije bisimulacije Veltmanovih modela slijedi da postoji svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi uZu' i $w'R'u'$. Neka je V' proizvoljan skup svjetova takav da vrijedi $u'\overline{S}'_{w'}V'$. Iz definicije 2.4.3 slijedi da postoji svijet $v' \in V'$ takav da vrijedi $u'S'_{w'}v'$. Primjenom uvjeta (forth) iz definicije bisimulacije Veltmanovih modela slijedi da postoji svijet v_1 takav da vrijedi v_1Zv' i uS_wv_1. Iz definicije 2.4.3 slijedi da za skup $V = \{v_1\}$ vrijedi $u\overline{S}_wV$.

Neka je sada $v \in V$ proizvoljan svijet. Preostaje još pokazati da postoji svijet $v_1' \in V'$ takav da vrijedi vZv_1'. No, iz $v \in V = \{v_1\}$ slijedi $v = v_1$, pa zbog v_1Zv' slijedi da je traženi v_1' upravo v'.

Dakle, za relaciju Z vrijedi (forth) iz definicije bisimulacije Verbruggeinih modela.

Preostaje još samo dokazati da vrijedi uvjet (back) iz definicije bisimulacije za Verbruggeine modele. Neka su $(w, w') \in Z$ i $u' \in W'$ proizvoljni tako da vrijedi $w'R'u'$. Iz (back) svojstva iz definicije bisimulacije za Veltmanove modele slijedi da postoji svijet $u \in W$ takav da vrijedi uZu' i wRu. Neka je V proizvoljan skup svjetova takav da vrijedi $u\overline{S}_wV$. Iz definicije 2.4.3 slijedi da postoji svijet $v \in V$ takav da vrijedi uS_wv. Primjenom uvjeta (back) iz definicije bisimulacije Veltmanovih modela slijedi da postoji svijet v_1' takav da vrijedi vZv_1' i $u'S'_{w'}v_1'$. Iz definicije 2.4.3 slijedi da za skup $V' = \{v_1'\}$ vrijedi $u'\overline{S}'_{w'}V'$.

Neka je sada $v' \in V'$ proizvoljan svijet. Preostaje još pokazati da postoji svijet $v_1 \in V$ takav da vrijedi $v_1 Z v'$. No, iz $v' \in V' = \{v'_1\}$ slijedi $v' = v'_1$, pa zbog vZv'_1 slijedi da je traženi svijet v_1 upravo svijet v.

Dakle, za relaciju Z vrijedi (back) iz definicije bisimulacije Verbruggeinih modela. ■

Napomena 2.4.7. Goris i Joosten u svom članku [12] u dokazu teorema 3.4. definiraju pojam Verbruggeinog modela pridruženog Veltmanovom modelu $(W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ kao u definiciji 2.4.3. s razlikom da za svaki svijet $w \in W$, svaki $V \subseteq R[w]$ i svaki svijet $v \in R[w]$ definiraju relaciju $\overline{S}_w$ ovako:

$$v\overline{S}_w V \quad \text{ako i samo ako} \quad (\forall u \in V)(vS_w u)$$

(pri čemu je dodatno potrebno zahtijevati da vrijedi $V \neq \emptyset$). Uočimo da bi dokaz propozicije 2.4.6. (kao i kasnije propozicije 3.3.7) prošao i s takvom definicijom. Naime, na mjestima u tom dokazu gdje smo koristili definiciju relacije $\overline{S}_w$ iz pridruženog Verbruggeinog modela, radilo se o slučaju ili da je skup V jednočlan (pa nam je svejedno radi li se o kvantifikatoru $\exists$ ili $\forall$) ili da nam treba postojanje nekog elementa u nepraznom skupu V (pa kako je skup neprazan, slijedi da postoji neki element u tom skupu, a zatim primjenom univerzalnog kvantifikatora $\forall$ iz definicije slijedi da je i on kakav u dokazu tražimo). Međutim, tako definirani pridruženi Verbruggein model nije Verbruggein model kako smo ga mi definirali u ovome radu. Naime, tako definirana struktura ne zadovoljava svojstvo monotonosti, tj. ne vrijedi da iz $v\overline{S}_w V$ i $V \subseteq Z \subseteq R[w]$ nužno slijedi $v\overline{S}_w Z$ (stoga je u članku [12]. iz definicije Verbruggeinog modela, ili kako je tamo označeno IL_{set}-modela, izostavljen navedeni uvjet monotonosti).

Potpuno se analogno (zamjenom Z s Z_i, odnosno Z_{i-1} na odgovarajućim mjestima) dokazuje da analogan teorem vrijedi za n-bisimulacije.

Teorem 2.4.8. Neka su $\mathfrak{N} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ i $\mathfrak{N}' = (W', R', \{S'_w : w \in W\}, \Vdash)$ dva Veltmanova modela te neka su $w_0 \in W$ i $w'_0 \in W'$. Neka su $Ver\,\mathfrak{N} = (W, R, \{\overline{S}_w : w \in W\}, \Vdash)$ i $Ver\,\mathfrak{N}' = (W', R', \{\overline{S}'_w : w \in W\}, \Vdash)$ njima pridruženi Verbruggeini modeli. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$Ver\,\mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows_n Ver\,\mathfrak{N}', w'_0 \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows_n \mathfrak{N}', w'_0.$$

Konačno, dokažimo da u slučaju Verbruggeinih modela modalna ekvivalentnost općenito ne povlači bisimuliranost.

Teorem 2.4.9. Neka su $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ Veltmanovi modeli te w_1 i w_2 njihovi svjetovi iz iskaza teorema 2.4.2. Tada za te svjetove w_1 i w_2 u modelima $Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $Ver\ \mathfrak{N}_2$ (tj. u Verbruggeinim modelima pridruženim Veltmanovim modelima $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$) vrijedi da su oni modalno ekvivalentni, ali nisu bisimulirani.

Dokaz. Dokažimo prvo da su w_1 i w_2, kao svjetovi modela $Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $Ver\ \mathfrak{N}_2$ modalno ekvivalentni. Neka je F proizvoljna formula iz $Form_{IL}$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} Ver\ \mathfrak{N}_1, w_1 \Vdash F \quad & \xLeftrightarrow{\text{teorem } 2.4.5} \quad \mathfrak{N}_1, w_1 \Vdash F \\ & \xLeftrightarrow{\text{teorem } 2.4.2} \quad \mathfrak{N}_2, w_2 \Vdash F \\ & \xLeftrightarrow{\text{teorem } 2.4.5} \quad Ver\ \mathfrak{N}_2, w_2 \Vdash F. \end{aligned}$$

Dakle, svjetovi w_1 i w_2 su, kao svjetovi $Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $Ver\ \mathfrak{N}_2$, modalno ekvivalentni.

Dokažimo još da ne vrijedi $Ver\ \mathfrak{N}_1, w_1 \leftrightarrows Ver\ \mathfrak{N}_2, w_2$. Pretpostavimo suprotno, tj. vrijedi $Ver\ \mathfrak{N}_1, w_1 \leftrightarrows Ver\ \mathfrak{N}_2, w_2$. Tada teorem 2.4.6 povlači da vrijedi $\mathfrak{N}_1, w_1 \leftrightarrows \mathfrak{N}_2, w_2$. No, to je u kontradikciji s teoremom 2.4.2. Dakle, svjetovi w_1 i w_2 nisu bisimulirani u pripadnim Verbruggeinim modelima. ■

2.5. Odnos bisimuliranosti i n-bisimuliranosti

U ovoj točki želimo utvrditi odnos između bisimuliranosti i n-bisimuliranosti. Preciznije, za dva svijeta w i w' Verbruggeinih modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, želimo dati odgovor na sljedeća dva pitanja:

(a) ako $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$ vrijedi li tada nužno $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathfrak{M}, w \leftrightarrows_n \mathfrak{M}', w')$

(b) ako $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathfrak{M}, w \leftrightarrows_n \mathfrak{M}', w')$ vrijedi li tada nužno $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$?

Dokazat ćemo da je odgovor na prvo pitanje potvrdan, tj. bisimuliranost povlači n-bisimuliranost za svaki $n \in \mathbb{N}$. No, također ćemo dokazati da obrat ne vrijedi (tj. da je odgovor na drugo pitanje općenito negativan).

Prvo pokažimo da bisimuliranost povlači n-bisimuliranost za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 2.5.1. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Verbruggeini modeli, te $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ njihovi svjetovi. Ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$ tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows_n \mathfrak{M}', w'$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{M}', w'$. Tada postoji neka neprazna relacija $Z \subseteq W \times W'$ koja zadovoljava uvjete (at), (forth) i (back) iz definicije 2.1.1, te za koju vrijedi $(w, w') \in Z$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Za svaki $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ definiramo $Z_i := Z$. Tada je $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$ niz nepraznih binarnih relacija takav da vrijedi $(w, w') \in Z_n$. Preostaje još pokazati da za niz relacija $(Z_i)_{i=0}^n$ vrijede uvjeti (at), (n-forth) i (n-back) iz definicije 2.1.3. No, to direktno slijedi iz $Z_i = Z$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$, te svojstava (at), (forth) i (back) za relaciju Z. Dakle, vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows_n \mathfrak{M}', w'$. ■

Sada želimo pokazati da obrat te propozicije općenito ne vrijedi, tj. da postoje dva Verbruggeina modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te njihovi svjetovi $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ koji su n-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$, ali nisu bisimulirani. Kako po teoremu 2.4.9. imamo dva Verbruggeina modela $Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $Ver\ \mathfrak{N}_2$ te njihova dva svijeta $w_1 \in Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $w_2 \in \mathfrak{N}_2$ koji nisu bisimulirani, preostaje za navedeni rezultat pokazati da su ti svjetovi w_1 i w_2 n-bisimulirani, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 2.5.2. Neka su $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ Veltmanovi modeli te w_1 i w_2 njihovi svjetovi iz iskaza teorema 2.4.2. Tada za te svjetove w_1 i w_2 u modelima $Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $Ver\ \mathfrak{N}_2$ (tj. u Verbruggeinim modelima pridruženim Veltmanovim modelima $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$) vrijedi da su oni n-bisimilarni za svaki $n \in \mathbb{N}$, ali nisu bisimulirani.

Dokaz. Prisjetimo se da smo definirali Veltmanov model $\mathfrak{N}_1$ kao *Vel* $\mathfrak{G}_1$, a Veltmanov model $\mathfrak{N}_2$ kao *Vel* $(\mathfrak{G}_1 \dot{+} \mathfrak{G}_2)$, gdje su $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_1 \dot{+} \mathfrak{G}_2$ GL-modeli definirani u [7] i prikazani na slici 2.9. U [7] je kao korolar 15. istaknuto da su svjetovi w_1 u $\mathfrak{G}_1$ i w_2 u $\mathfrak{G}_1 \dot{+} \mathfrak{G}_2$ n-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$ (kao svjetovi GL-modela). Zatim je u [7] kao propozicija 18. istaknut sljedeći rezultat:

> *Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka su $\mathfrak{G}$ i $\mathfrak{G}'$ dva GL-modela te neka su $w \in \mathfrak{G}$ i $w' \in \mathfrak{G}'$ dva svijeta u njima. Ako vrijedi da su svjetovi w i w' $2n$-bisimulirani kao svjetovi GL-modela, tada su ti svjetovi w i w' n-bisimulirani kao svjetovi Veltmanovih modela Vel $\mathfrak{G}$ i Vel $\mathfrak{G}'$.*

Kako su w_1 i w_2 n-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$ kao svjetovi GL-modela $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_1 \dot{+} \mathfrak{G}_2$, slijedi da su posebno i $2n$-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 18. iz [7] to znači da su w_1 i w_2 n-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$ kao svjetovi Veltmanovih modela $\mathfrak{N}_1 =$ *Vel* $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{N}_2 =$ *Vel* $\mathfrak{G}_1 \dot{+} \mathfrak{G}_2$. Sada prema teoremu 2.4.8. vrijedi da su svjetovi w_1 i w_2 n-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$ kao svjetovi Verburggeinih modela *Ver* $\mathfrak{N}_1$ i *Ver* $\mathfrak{N}_2$, što smo i željeli pokazati. ■

2.6. Slučaj konačnog skupa propozicionalnih varijabli

Kako općenito ne vrijedi obrat, tj. ne vrijedi da modalna ekvivalentnost povlači bisimuliranost, razmatrani su uvjeti koje možemo zadati, a pod kojima bi ta tvrdnja vrijedila. Primjerice, u [53] je dokazano da željeni obrat vrijedi ukoliko zahtijevamo da su modeli slikovno konačni.

Propozicija 2.6.1. Kažemo da je Verbruggein model $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ slikovno konačan ako za svaki $w \in W$ vrijedi da je skup $R[w]$ konačan. Ako su $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ slikovno konačni te su svjetovi $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$ modalno ekvivalentni, tada su svjetovi w_1 i w_2 bisimulirani (kažemo još da vrijedi Hennessy-Milnerovo svojstvo).

Razmatrano je i dobivanje obrata na način da zahtijevamo da je skup propozicionalnih varijabli koji promatramo konačan. Tako su u [39] u Lemi 3.1. dane sljedeće dvije tvrdnje za Verbruggeine modele:

(a) ako su svjetovi w i w' n-bisimulirani tada su ti svjetovi n-modalno ekvivalentni

(b) ako imamo samo konačno mnogo propozicionalnih varijabli tada obrat također vrijedi: ako su svjetovi w i w' n-modalno ekvivalentni tada su oni i n-bisimulirani.

Međutim, dokaz tvrdnje 2. Leme 3.1. u [39] sadrži grešku. Kratko opisujemo što je krivo u tom dokazu. Ideja dokaza 2. tvrdnje bila je pokazati da je niz $\equiv_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, jedna n-bisimulacija. Uvjet (at) trivijalno vrijedi. Razmotrimo samo uvjet (forth). Neka je $0 < i \leqslant n$ proizvoljan i neka je $w \equiv_i w'$. Pretpostavimo da uvjet (forth) ne vrijedi, tj. da postoji svijet u tako da vrijedi wRu i za svaki svijet u' tako da je $w'R'u'$ i $u \equiv_{i-1} u'$ postoji skup svjetova V' tako da imamo $u'S'_{w'}V'$ i za svaki skup svjetova V takav da vrijedi uS_wV postoji svijet $v \in V$ koji nije $(i-1)$-modalno ekvivalentan niti s jednim svijetom iz skupa V'.

Zatim se uzme po jedan takav svijet v za sve takve skupove V i s B_V označi konjunkcija svih (do na logičku ekvivalenciju) formula dubine do $i-1$ istinitih na svijetu v. Sa B se označi konjunkcija negacija svih takvih formula B_V. Sada se tvrdi da vrijedi $w' \Vdash A \rhd B$, gdje je A konjunkcija svih (do na ekvivalenciju) formula dubine do $i-1$ istinitih na svijetu u, a onda i na svijetu u', što kasnije vodi na kontradikciju. Međutim, to je pogrešno, jer formula B nije ista za svaki svijet u' za koji vrijedi $w'R'u'$, nego se za svaki takav svijet u' konstruira posebno, odnosno moguće je da su za različite svjetove u' odabrani različiti predstavnici $v \in V$. Kasnije ćemo vidjeti kako nova verzija definicije bisimulacije, tj. definicija slabe bisimulacije, otklanja ovaj problem.

U ostatku ove točke dat ćemo primjer u kojem ćemo pokazati da čak ni modalna 1-ekvivalencija ne povlači nužno 1-bisimuliranost (pa stoga ne vrijedi ni tvrdnja da n-ekvivalencija povlači nužno n-bisimuliranost, za $n \in \mathbb{N}$). U nastavku promatramo samo konačan skup propozicionalnih varijabli.

Primjer 2.6.2. Verbruggein model $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ definiran je ovako:

(a) $W = \{w, u, v_1, v_2\}$

(b) R: wRx za sve svjetove $x \neq w$

(c) S_w: $uS_w\{v_1, v_2\}$ te sve što treba biti po kvazi-refleksivnosti i monotonosti

(d) $u \Vdash q$, $v_1 \Vdash p$.

Zatim, Verbruggein model $\mathfrak{M}' = (W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$ je zadan ovako:

(a) $W' = \{w', u'_1, u'_2, v'_1, v'_2\}$

(b) R': $w'R'x$ za sve svjetove $x \neq w'$

(c) $S'_{w'}$: $u'_1 S'_{w'}\{v'_1\}$, $u'_2 S'_{w'}\{v'_2\}$ te sve što treba zbog kvazi-refleksivnosti i monotonosti

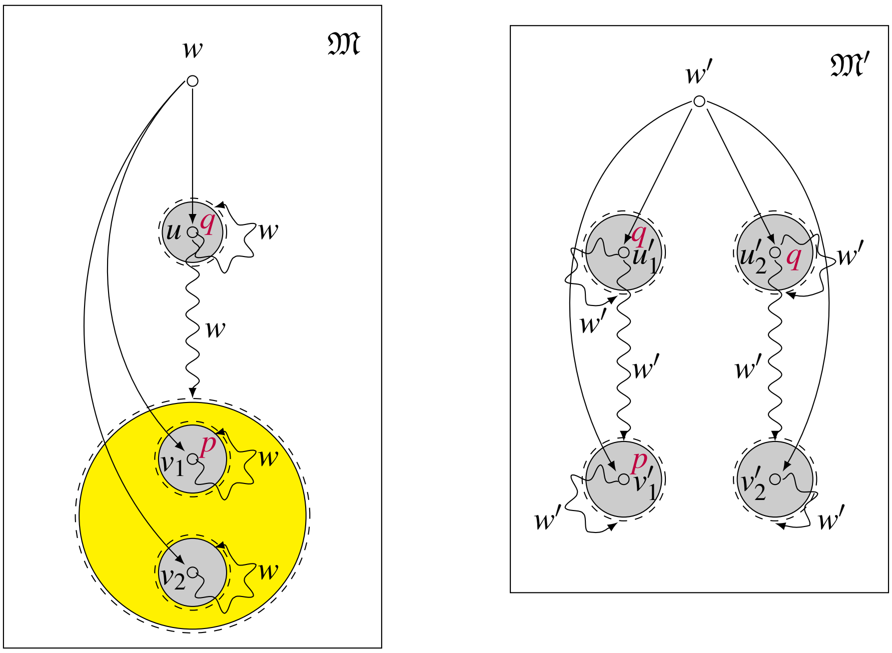
(d) $u'_1 \Vdash q$, $u'_2 \Vdash q$, $v'_1 \Vdash p$.

Na sljedećoj slici 2.10 prikazani su upravo definirani Verbruggeini modeli.

Lema 2.6.3. Svjetovi w i w' iz prethodnog primjera 2.6.2. nisu 1-bisimulirani.

Dokaz. Dovoljno je opisati pobjedničku strategiju izazivača u jednoj 1-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}, w, \mathfrak{M}', w')$. Naime, postojanje pobjedničke strategije izazivača u toj 1-igri povlači da ne postoji pobjednička strategija branitelja u toj 1-igri, a onda propozicija 2.3.7. povlači da svjetovi w i w' nisu 1-bisimulirani. Uočimo usput da iz definicije modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ očito slijedi $\mathfrak{M}, w \equiv_0 \mathfrak{M}', w'$ (pa će se doista morati ići u igranje 1. runde).

Definirajmo sada jednu pobjedničku strategiju izazivača. Izazivač početno odabire model $\mathfrak{M}$ te svijet $u \in W$. Kako vrijedi wRu, izazivač tu ne gubi i igra se nastavlja.



Slika 2.10: Prikaz modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ (isprekidane crtice oko skupova označavaju da su prema definiciji Verbruggeinih modela i svi nadskupovi tih skupova, koji su i podskupovi od $R[w]$, odnosno $R'[w']$, u označenoj S_w, odnosno $S'_{w'}$ relaciji).

Branitelj sada bira neki svijet $x' \in W'$ za koji vrijedi $w'R'x'$. Iz definicije modela $\mathfrak{M}'$ slijedi da vrijedi jedan od sljedeća dva slučaja: (a) branitelj je izabrao svijet u'_1 ili svijet u'_2; (b) branitelj je izabrao svijet v'_1 ili svijet v'_2. Svaki od navedena dva slučaja posebno razmatramo.

Promotrimo prvo slučaj (a). Neka je branitelj izabrao svijet u'_1 ili svijet u'_2. Izabrani svijet označimo sa u'_j gdje je $j \in \{1,2\}$. Sada izazivač bira skup $V' = \{v'_j\}$. Uočimo da prema definiciji modela $\mathfrak{M}'$ vrijedi $u_j S'_{w'} \{v'_j\}$, pa izazivač može doista odabrati taj skup. Potom branitelj bira neki skup svjetova $V \subseteq W$ za koji vrijedi uS_wV. Iz uS_wV i definicije modela $\mathfrak{M}$ slijedi da je V nadskup od $\{u\}$ ili $V \supseteq \{v_1, v_2\}$. Sada je potrebno izabrati konfiguraciju $(\mathfrak{M}, w_1, \mathfrak{M}', w'_1)$ kojom počinje sljedeća runda. U tu svrhu promatramo sljedeća dva slučaja.

(a_1) U slučaju da je V nadskup od $\{u\}$ tada izazivač bira svijet u kao dio početne konfiguracije za sljedeću rundu igre. U tom slučaju branitelj mora izabrati neki svijet iz skupa V'. No, budući je $V' = \{v'_j\}$ tada branitelj mora izabrati svijet v'_j kao dio početne konfiguracije sljedeće runde. Kako je očito $u \not\equiv_0 v'_j$ (jer $u \Vdash q$ i $v'_j \nVdash q$) tada je izazivač pobijedio na kraju prve runde.

(a_2) Neka je branitelj izabrao neki skup $V \supseteq \{v_1, v_2\}$. Tada izazivač bira svijet $v_{3-j} \in V$ kao dio početne konfiguracije sljedeće runde. Branitelj sada mora izabrati neki svijet iz skupa V'. No, budući da je $V' = \{v'_j\}$, tada branitelj mora izabrati svijet v'_j. Očito je $v_{3-j} \not\equiv_0 v'_j$, pa opet izazivač pobjeđuje.

Dakle, u oba slučaja izazivač pobjeđuje slijedeći opisanu strategiju u ovoj 1-igri s navedenom početnom konfiguracijom.

Promotrimo sada slučaj (b), tj. slučaj kada je branitelj izabrao svijet v'_j, gdje je $j \in \{1,2\}$. Sada izazivač bira skup $V' = \{v'_j\}$ (što može jer prema kvazirefleksivnosti vrijedi $v'_j S'_{w'} \{v'_j\}$). Potom branitelj treba izabrati neki skup svjetova $V \subseteq W$ za koji vrijedi $uS_w V$. Bez obzira na izbor skupa V promotrimo moguću početnu konfiguraciju za sljedeću rundu igre. Izazivač će svakako izabrati svijet u, pa bi branitelj trebao izabrati svijet v'_j. No, zbog $u \not\equiv_0 v'_j$ slijedi da izazivač pobjeđuje.

Dakle, u svakom slučaju, slijedeći opisanu strategiju, izazivač pobjeđuje u 1-igri s tom početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}, w, \mathfrak{M}', w')$.

■

Napomena 2.6.4. Iako prethodna lema 2.6.3. na prvi pogled samo pokazuje da svjetovi w i w' iz primjera 2.6.2. nisu 1-bisimulirani, uočimo iz nje također proizlazi da ti svjetovi nisu niti bisimulirani. To proizlazi iz obrata po kontrapoziciji rezultata prethodne točke, tj. ako svjetovi nisu n-bisimulirani za neki $n \in \mathbb{N}$, tada oni nisu niti bisimulirani.

Sada ćemo direktno iz definicije dokazati modalnu ekvivalentnost svjetova w i w' iz primjera 2.6.2.

Lema 2.6.5. Svjetovi w i w' iz prethodnog primjera 2.6.2. su modalno ekvivalentni.

Dokaz. Prema napomeni 1.4.3. vrijedi da ako su dva svijeta propozicionalno ekvivalentna, tada su i 0-ekvivalentna. Koristeći tu činjenicu, možemo uočiti koji svjetovi su 0-ekvivalentni (tj. zadovoljavaju iste formule bez modalnih operatora). U svakom od sljedeća tri skupa svjetovi su međusobno 0-ekvivalentni:

$PEN = \{w, w', v_2, v_2'\}$ (niti jedna propozicionalna varijabla nije istinita na njima);

$PEQ = \{u, u_1', u_2'\}$ (samo varijabla q je istinita na njima);

$PEP = \{v_1, v_1'\}$ (samo varijabla p je istinita na njima).

Treba dokazati $\mathfrak{M}, w \equiv_1 \mathfrak{M}', w'$, tj. da za svaku fomulu F za koju vrijedi $d(F) \leq 1$, imamo sljedeću ekvivalenciju:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \mathfrak{M}', w' \Vdash F.$$

Budući da $w, w' \in PEN$ tada su ti svjetovi 0-ekvivalentni, pa preostaje dokazati slučaj $d(F) = 1$. Razmatramo samo slučaj kada je formula za koju dokazujemo tvrdnju oblika $F \rhd G$, pri čemu formule F i G ne sadrže modalne operatore (tako da vrijedi $d(F \rhd G) = 1$). Dakle, dokazujemo da vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F \rhd G \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \mathfrak{M}', w' \Vdash F \rhd G.$$

Pretpostavimo prvo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash F \rhd G$, tj. neka vrijedi

$$\forall x (wRx \ \& \ x \Vdash F \Rightarrow \exists V (xS_wV \ \& \ V \Vdash G)). \tag{2.8}$$

Treba dokazati da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash F \rhd G$, tj. da vrijedi

$$\forall x' (w'R'x' \ \& \ x' \Vdash F \Rightarrow \exists V' (x'S'_{w'}V' \ \& \ V' \Vdash G)). \tag{2.9}$$

Neka je $x' \in W'$ proizvoljan svijet takav da vrijedi $w'R'x'$ i $x' \Vdash F$. Budući da iz $w'R'x'$ i definicije relacije R' slijedi $x' \in \{u_1', u_2', v_1', v_2'\}$, razmatramo sljedeća dva slučaja: (a) $x' \in \{u_1', u_2'\}$; (b) $x' \in \{v_1', v_2'\}$.

Promotrimo prvo slučaj (a). Neka $x' = u_i'$, za neki $i \in \{1, 2\}$. Kako vrijedi $u_i' \Vdash F$ te $u_i', u \in PEQ$ povlači da su ti svjetovi 0-ekvivalentni (formula F ne sadrži modalne operatore), zaključujemo $u \Vdash F$. Sada prema (2.8) slijedi da postoji skup svjetova V takav da vrijedi uS_wV i $V \Vdash G$. Iz uS_wV i definicije relacije S_w slijedi

$$V \in \Big\{ \{u\}, \{u, v_1\}, \{u, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{u, v_1, v_2\} \Big\},$$

pa zaključujemo da vrijedi $u \in V$ ili $V = \{v_1, v_2\}$. Promatramo dva podslučaja.

(a_1) Ako $u \in V$ tada iz $V \Vdash G$ slijedi posebno $u \Vdash G$. Kako formula G ne sadrži modalnih operatora te vrijedi $u, u'_i \in PEQ$, slijedi $u'_i \Vdash G$. Tada za $V' = \{u'_i\}$ vrijedi $u'_i S'_{w'} V'$ (prema kvazirefleksivnost od $S'_{w'}$) i $V' \Vdash G$. Time je dokazana tvrdnja (2.9) u ovom podslučaju.

(a_2) Ako je $V = \{v_1, v_2\}$ tada iz $V \Vdash G$ slijedi posebno $v_i \Vdash G$. Kako formula G ne sadrži modalnih operatora te $v_1, v'_1 \in PEP$ i $v_2, v'_2 \in PEN$ povlači da su svjetovi v_i i v'_i 0-ekvivalentni, slijedi $v'_i \Vdash G$. Tada za $V' = \{v'_i\}$ vrijedi $v'_i S'_{w'} V'$ (prema kvazirefleksivnosti od $S'_{w'}$) i $V' \Vdash G$. Time je dokazana tvrdnja (2.9) u ovom podslučaju.

Promotrimo sada slučaj (b). Neka je $x' = v'_i$, za neki $i \in \{1, 2\}$. Budući da $v'_i \Vdash F$ te $v_1, v'_1 \in PEP$ i $v_2, v'_2 \in PEN$ povlači da su svjetovi v'_i i v_i 0-ekvivalentni (formula F ne sadrži modalne operatore), zaključujemo $v'_i \Vdash F$. Sada iz (2.8) slijedi da postoji skup svjetova V takav da vrijedi $v_i S_w V$ i $V \Vdash G$. Uočimo da prema definiciji modela $\mathfrak{M}$ svakako za svaki skup X takav da vrijedi $v_i S_w X$ slijedi da on sadrži v_i, pa zaključujemo $v_i \in V$. Tada $V \Vdash G$ povlači posebno da vrijedi $v_i \Vdash G$. Kako G ne sadrži modalne operatore te $v_1, v'_1 \in PEP$ i $v_2, v'_2 \in PEN$ povlači da su svjetovi v_i i v'_i 0-ekvivalentni, slijedi $v'_i \Vdash G$. Tada za $V' = \{v'_i\}$ vrijedi $v'_i S'_{w'} V'$ (prema kvazirefleksivnosti od $S'_{w'}$) i $V' \Vdash G$. Time je dokazana tvrdnja (2.9).

Dokažimo sada obrat iz iskaza leme. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash F \rhd G$. Tada vrijedi

$$\forall x'(w' R' x' \ \& \ x' \Vdash F \Rightarrow \exists V'(x' S'_{w'} V' \ \& \ V' \Vdash G)). \tag{2.10}$$

Treba dokazati da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash F \rhd G$, tj. da vrijedi

$$\forall x(wRx \ \& \ x \Vdash F \Rightarrow \exists V(x S_w V \ \& \ V \Vdash G)). \tag{2.11}$$

Neka je $x \in W$ proizvoljan svijet takav da vrijedi wRx i $x \Vdash F$. Budući da prema definiciji modela $\mathfrak{M}$ iz wRx slijedi $x \in \{u, v_1, v_2\}$, razmatramo sljedeća sva slučaja:

(b_1) $x = u$. Kako vrijedi $u \Vdash F$ te $u, u'_1, u'_2 \in PEQ$ povlači da su ta tri svijeta 0-ekvivalentna (formula F ne sadrži modalne operatore), zaključujemo $u'_1 \Vdash F$ i $u'_2 \Vdash F$. Sada iz (2.10) slijedi da postoje skupovi svjetova V'_1 i V'_2 takvi da vrijedi $u'_1 S'_{w'} V'_1$, $V'_1 \Vdash G$, $u'_2 S'_{w'} V'_2$ i $V'_2 \Vdash G$. Prema definiciji modela $\mathfrak{M}'$ (preciznije, prema definiciji relacije $S'_{w'}$) iz $v'_1 S'_{w'} V'_1$ slijedi $v'_1 \in V'_1$, dok iz $v'_2 S'_{w'} V'_2$ slijedi $v'_2 \in V'_2$. Tada iz $V'_1 \Vdash G$ slijedi $v'_1 \Vdash G$, a iz $V'_2 \Vdash G$ slijedi $v'_2 \Vdash G$. Budući da $v_1, v'_1 \in PEP$ i $v_2, v'_2 \in PEN$ povlači da su svjetovi v'_i i v_i 0-ekvivalentni, kako formula G ne sadrži modalnih operatora slijedi $v_i \Vdash G$. Sada za $V = \{v_1, v_2\}$ vrijedi $V \Vdash G$ te $u S_w V$, tj. vrijedi (2.11).

(b$_2$) $x = v_i$, za neki $i \in \{1,2\}$. Budući da vrijedi $v_i \Vdash F$ te $v_1, v_1' \in PEP$ i $v_2, v_2' \in PEN$ povlači da su svjetovi v_i i v_i' 0-ekvivalentni (formula F ne sadrži modalne operatore), zaključujemo $v_i' \Vdash F$. Iz (2.10) slijedi da postoji skup svjetova V_i' takav da vrijedi $v_i' S_{w'}' V_i'$ i $V_i' \Vdash G$. Prema definiciji modela $\mathfrak{M}'$ (preciznije, prema definiciji relacije $S_{w'}'$) iz $v_i' S_{w'}' V_i'$ slijedi $v_i' \in V_i'$. Tada iz $V_i' \Vdash G$ slijedi $v_i' \Vdash G$. Budući da $v_1, v_1' \in PEP$ i $v_2, v_2' \in PEN$ povlači da su svjetovi v_i' i v_i 0-ekvivalentni, pa kako G ne sadrži modalnih operatora, slijedi $v_i \Vdash G$. Sada za $V = \{v_i\}$ vrijedi $V \Vdash G$ te $v_i S_w V$, tj. vrijedi (2.11).

■

Prethodne dvije leme pokazuju da su svjetovi w i w' iz primjera 2.6.2. modalno ekvivalentni (pa onda i 1-modalno ekvivalentni), ali nisu 1-bisimulirani. Uočimo da te dvije leme vrijede i u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli. Dakle, ne vrijedi tvrdnja da u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli n-modalna ekvivalentnost povlači n-bisimuliranost. Stoga ćemo dati novu definiciju pojma (n-)bisimulacije za Verbruggeine modele, koju ćemo nazvati (n)-w-bisimulacija te dokazati željenu tvrdnju: u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli n-modalna ekvivalencija povlači n-w-bisimuliranost. Istaknimo ovdje još da kada definiramo novi pojam bisimulacije Verbruggeinih modela tada ćemo pokazati da su svjetovi w i w' iz primjera 2.6.2. 1-bisimulirani u smislu nove verzije definicije bisimulacije 3.1.1 (to će slijediti iz leme 3.3.5 i propozicije 3.3.6). Time ćemo dobiti da su ti svjetovi i 1-bisimulirani (u smislu nove verzije definicije) i 1-modalno ekvivalentni.

U sljedećem poglavlju dajemo nove definicije i dokazujemo da ti novi pojmovi imaju željena svojstva.

3. SLABE BISIMULACIJE ZA VERBRUGGEINU SEMANTIKU

U ovom poglavlju dajemo novu verziju definicija bisimulacije i konačne bisimulacije za Verbruggeinu semantiku koje ćemo redom nazvati w-bisimulacija i konačna w-bisimulacija (ili n-w-bisimulacija). Zatim uspoređujemo taj pojam w-bisimulacije s pojmom bisimulacije iz prethodne točke. Pokazat ćemo da je w-bisimulacija strogo slabiji pojam od bisimulacije, tj. da su bisimulirani svjetovi nužno w-bisimulirani, ali da obrat ne vrijedi (što ćemo pokazati protuprimjerom). Dokazat ćemo da (n)-w-bisimulacija posjeduje sva dobra svojstva koja smo naveli i kod bisimulacija, primjerice, da (n-)w-bisimuliranost dvaju svjetova povlači njihovu (n-)modalnu ekvivalentnost. Također pokazujemo da općenito obrat ne vrijedi. No, u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli dokazat ćemo da dobivamo željeni obrat (što je važna razlika u odnosu na bisimulacije, s obzirom da smo pokazali da tamo ni u tom slučaju taj obrat ne vrijedi). Kako bi u tom dokazu lakše dokazali (n-)w-bisimuliranost svjetova, dokazat ćemo da je (n-)w-bisimuliranost svjetova ekvivalentna pobjedničkoj strategiji branitelja u odgovarajućim igrama (koje ćemo nazvati (n-)w-bisimulacijske igre).

3.1. W-BISIMULACIJE

Prvo dajemo novu verziju definicije bisimulacije za Verbruggeinu semantiku koju nazivamo w-bisimulacija.

Definicija 3.1.1. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Verbruggeina modela. Nepraznu relaciju $Z \subseteq W \times W'$ nazivamo **w-bisimulacija** ako vrijede sljedeći uvjeti:

(at) za svaki par $(w, w') \in Z$ i svaku propozicionalnu varijablu $p \in Prop$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $w \Vdash p$ ako i samo ako vrijedi $w' \Vdash p$

(w-forth) za svaki par $(w,w') \in Z$ i za svaki svijet $u \in W$ takav da vrijedi wRu, postoji neprazan skup $U' \subseteq W'$ takav da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi uZu' i $w'R'u'$ i za svaku funkciju $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ takvu da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $u'S'_{w'}V'(u')$ postoji skup $V \subseteq W$ takav da vrijedi uS_wV i za svaki svijet $v \in V$ postoji svijet $v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ tako da vrijedi vZv'

(w-back) za svaki par $(w,w') \in Z$ i za svaki svijet u' takav da vrijedi $w'R'u'$, postoji neprazan skup $U \subseteq W$ takav da za svaki svijet $u \in U$ vrijedi uZu' i wRu i za svaku funkciju $V : U \to \mathscr{P}(W)$ takvu da za svaki svijet $u \in U$ vrijedi $uS_wV(u)$ postoji skup V' takav da vrijedi $u'S'_{w'}V'$ i za svaki svijet $v' \in V'$ postoji svijet $v \in \bigcup_{u \in U} V(u)$ tako da vrijedi vZv'.

Za dva svijeta $w \in W$ i $w' \in W'$ kažemo da su **w-bisimulirani** ako postoji w-bisimulacija $Z \subseteq W \times W'$ tako da vrijedi wZw'.

Ako je $Z \subseteq W \times W'$ neka w-bisimulacija između Verbruggeinih modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ tada pišemo $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}'$. Pišemo $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$ ako postoji w-bisimulacija $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}'$ takva da vrijedi wZw'.

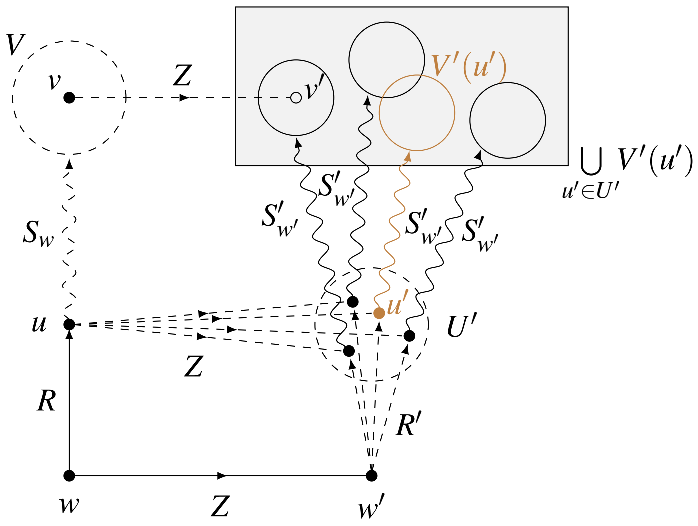
Uvjeti w-forth i w-back iz prethodne definicije ilustrirani su slikama 3.1 i 3.2.

Napomena 3.1.2. U ovoj napomeni dajemo simbolički zapis uvjeta (w-forth) i (w-back) iz prethodne definicije. Simbolički zapisa uvjeta (w-forth) je sljedeći:

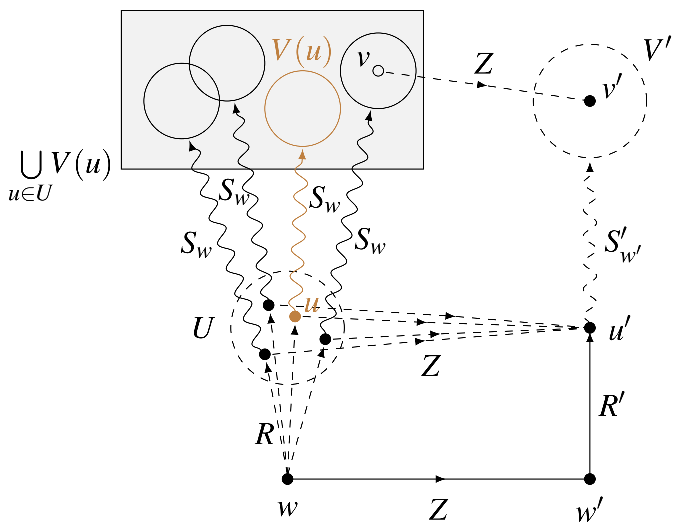
$$\begin{aligned}
&(\forall (w,w') \in Z)(\forall u \in W)\Big(wRu \Rightarrow (\exists U' \in \mathscr{P}(W') \setminus \{\emptyset\})(\forall u' \in U')(uZu' \text{ i } w'R'u' \text{ i} \\
&\quad (\forall V' \in {}^{U'}\mathscr{P}(W'))\Big((\forall u' \in U')(u'S'_{w'}V'(u')) \Rightarrow \\
&\qquad (\exists V \subseteq W)(uS_wV \text{ i } (\forall v \in V)(\exists v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u'))vZv'\Big)\Big),
\end{aligned}$$

dok je simbolički zapis uvjeta (w-back) sljedeći:

$$\begin{aligned}
&(\forall (w,w') \in Z)(\forall u' \in W')\Big(w'R'u' \Rightarrow (\exists U \in \mathscr{P}(W) \setminus \{\emptyset\})(\forall u \in U)(uZu' \text{ i } wRu \text{ i} \\
&\quad (\forall V \in {}^{U}\mathscr{P}(W))\Big((\forall u \in U)(uS_wV(u)) \Rightarrow \\
&\qquad (\exists V' \subseteq W')(u'S'_{w'}V' \text{ i } (\forall v' \in V')(\exists v \in \bigcup_{u \in U} V(u))vZv'\Big)\Big).
\end{aligned}$$



Slika 3.1: Ilustracija uvjeta (w-forth).



Slika 3.2: Ilustracija uvjeta (w-back).

3.2. SVOJSTVA W-BISIMULACIJE

U ovoj točki pokazat ćemo da w-bisimulacija ima ista osnovna svojstva kakva su za bisimulacije navedena u propoziciji 2.1.2: relacija jednakosti je jedna w-bisimulacija te su w-bisimulacije zatvorene na inverz, kompoziciju i proizvoljne unije.

Propozicija 3.2.1. Neka su $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ Verbruggeini modeli. Tada vrijedi:

(a) relacija $Z = \{(w,w) : w \in \mathfrak{M}\}$ je w-bisimulacija

(b) ako je Z jedna w-bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ tada je $Z^{-1} = \{(w',w) : wZw'\}$ w-bisimulacija između modela $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}$

(c) ako je Z neka w-bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te je Z' w-bisimulacija jedna između modela $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$, tada je $Z \circ Z' = \{(w,w'') : (\exists w' \in \mathfrak{M}')(wZw' \text{ i } w'Z'w'')\}$ jedna w-bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}''$

(d) ako je $\{Z_i : i \in I\}$ neki neprazan skup w-bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ tada je unija $\cup Z_i$ također w-bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.

Dokaz. (a) Pokazujemo redom da relacija Z zadovoljava uvjete (at), (w-forth) i (w-back).

Neka su $(w,w') \in Z$ i $p \in Prop$ proizvoljni. Iz $(w,w') \in Z$ slijedi $w' = w$, pa prema tome vrijedi: $w \Vdash p$ ako i samo ako vrijedi $w' \Vdash p$. Dakle, za relaciju Z vrijedi uvjet (at).

Provjerimo sada da vrijedi uvjet (w-forth). Neka je $(w,w') \in Z$ proizvoljan. Tada iz definicije relacije Z slijedi $w = w'$. Neka je $u \in W$ proizvoljan svijet takav da vrijedi wRu. Definiramo skup $U' = \{u\}$. Uočimo da je skup U' neprazan. Neka je $u' \in U'$ proizvoljan svijet. Iz $U' = \{u\}$ slijedi $u = u'$, pa iz definicije relacije Z slijedi uZu' te također vrijedi wRu'.

Neka je $V' : U' \to \mathscr{P}(W)$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $u'S_wV'(u')$. Iz $u \in U'$ slijedi da postoji skup $V'(u)$ takav da vrijedi $uS_wV'(u)$. Definiramo $V = V'(u)$. Sada iz $uS_wV'(u)$ slijedi uS_wV. Neka je $v \in V$ proizvoljan svijet. Definiramo $v' = v$. Iz $U' = \{u\}$ slijedi $\bigcup\limits_{u' \in U'} V'(u') = V'(u)$. Iz $V = V'(u)$ i $v \in V$ tada slijedi $v' \in \bigcup\limits_{u' \in U'} V'(u')$, te također iz definicije relacije Z i $v' = v$ slijedi vZv'.

Dakle, relacija Z zadovoljava svojstvo (w-forth).

Pokažimo još da relacija Z zadovoljava i uvjet (w-back). Neka je $(w,w') \in Z$ proizvoljan par. Tada iz definicije relacije Z slijedi $w = w'$. Neka je $u' \in W$ proizvoljan svijet takav da vrijedi $w'Ru'$. Definiramo skup $U = \{u'\}$. Uočimo da je skup U neprazan. Neka je $u \in U$ proizvoljan svijet. Iz $U = \{u'\}$ slijedi $u = u'$, pa iz definicije relacije Z slijedi uZu' te također vrijedi wRu.

Neka je $V : U \to \mathscr{P}(W)$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u \in U$ vrijedi $uS_wV(u)$. Iz $u' \in U$ slijedi da postoji skup $V(u')$ takav da vrijedi $u'S_wV(u')$. Definiramo $V' = V(u')$. Sada iz $u'S_wV(u')$ slijedi $u'S_wV'$. Neka je $v' \in V'$ proizvoljan svijet. Definiramo $v = v'$. Iz $U = \{u'\}$ slijedi $\bigcup\limits_{u \in U} V(u) = V(u')$. Iz $V' = V(u')$ i $v' \in V'$ tada slijedi $v \in \bigcup\limits_{u \in U} V(u)$ te također iz definicije relacije Z i $v = v'$ slijedi vZv'.

Dakle, relacija Z zadovoljava svojstvo (w-back).

(b) Pokazujemo da relacija Z^{-1} zadovoljava uvjete (at), (w-forth) i (w-back).

Neka su $(w',w) \in Z^{-1}$ te $p \in Prop$ proizvoljni. Iz $(w',w) \in Z^{-1}$ slijedi $(w,w') \in Z$. Kako je Z po pretpostavci w-bisimulacija tada iz svojstva (at) za relaciju Z slijedi: $w \Vdash p$ ako i samo ako $w' \Vdash p$. Dakle, relacija Z^{-1} zadovoljava uvjet (at).

Dokažimo sada da je zadovoljen i uvjet (w-forth). Neka su $(w',w) \in Z^{-1}$ te $u' \in W'$ proizvoljni takvi da vrijedi $w'R'u'$. Iz $(w',w) \in Z^{-1}$ slijedi $(w,w') \in Z$. Kako je Z po pretpostavci w-bisimulacija tada korištenjem svojstva (w-back) za relaciju Z slijedi da postoji neprazan skup $U \subseteq W$ takav da za svaki svijet $u \in U$ vrijedi uZu' i wRu. Iz uZu' slijedi $u'Z^{-1}u$. Neka je $V : U \to \mathscr{P}(W)$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u \in U$ vrijedi $uS_wV(u)$. Ponovno korištenjem svojstva (w-back) za relaciju Z slijedi da postoji skup V' takav da vrijedi $u'S'_{w'}V'$ i za svaki svijet $v' \in V'$ postoji svijet $v \in \bigcup_{u \in U} V(u)$ tako da vrijedi vZv'. Iz vZv' slijedi $v'Z^{-1}v$. Dakle, relacija Z^{-1} zadovoljava svojstvo (w-forth).

Provjerimo još da relacija Z^{-1} ima svojstvo (w-back). Neka su $(w',w) \in Z^{-1}$ te $u \in W$ proizvoljni takvi da vrijedi wRu. Iz $(w',w) \in Z^{-1}$ slijedi $(w,w') \in Z$. Kako je relacija Z po pretpostavci w-bisimulacija tada korištenjem svojstva (w-forth) za relaciju Z slijedi da postoji neprazan skup $U' \subseteq W'$ takav da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi uZu' i $w'R'u'$. Iz uZu' slijedi $u'Z^{-1}u$. Neka je $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $u'S'_{w'}V'(u')$. Ponovno korištenjem svojstva (w-forth) za relaciju Z

slijedi da postoji skup V takav da vrijedi uS_wV i za svaki svijet $v \in V$ postoji svijet $v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ tako da vrijedi vZv'. Iz vZv' slijedi $v'Z^{-1}v$. Dakle, relacija Z^{-1} zadovoljava svojstvo (w-back).

(c) Pokazujemo da relacija $Z \circ Z'$ zadovoljava uvjete (at) i (w-forth). Uvjet (w-back) se lako sasvim analogno provjeri pa taj dio dokaza ispuštamo.

Neka su $(w, w'') \in Z \circ Z'$ te $p \in Prop$ proizvoljni. Iz $(w, w'') \in Z \circ Z'$ slijedi da postoji svijet $w' \in \mathfrak{M}'$ takav da vrijedi wZw' i $w'Z'w''$. Primjenom toga te korištenjem uvjeta (at) za relacije Z i Z', slijedi da vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} w \Vdash p \quad & \text{ako i samo ako} \quad w' \Vdash p \\ & \text{ako i samo ako} \quad w'' \Vdash p. \end{aligned}$$

To znači da relacija $Z \circ Z'$ zadovoljava uvjet (at).

Dokažimo sada da je zadovoljen i uvjet (w-forth). Neka je $(w, w'') \in Z \circ Z'$ proizvoljni par te $u \in W$ proizvoljni svijet tako da vrijedi wRu. Iz $(w, w'') \in Z \circ Z'$ slijedi da postoji svijet $w' \in W'$ takav da vrijedi wZw' i $w'Z'w''$. Iz wZw', wRu te svojstva (w-forth) za relaciju Z slijedi da postoji neprazan skup $U' \subseteq R'[w']$ takav da vrijedi sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l} \text{za svaki svijet } u' \in U' \text{ vrijedi } uZu' \\ \text{i za svaku funkciju } V' : U' \to \mathscr{P}(W') \text{ takvu da za svaki svijet} \\ u' \in U' \text{ vrijedi } u'S'_{w'}V'(u') \\ \text{postoji skup } V \subseteq W \text{ takav da vrijedi } uS_wV \\ \text{i za svaki svijet } v \in V \text{ postoji svijet } v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u') \\ \text{tako da vrijedi } vZv'. \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

Sada primijenimo svojstvo (w-forth) relacije Z' za svaki svijet $u' \in U'$. Neka je $u' \in U'$ proizvoljan svijet. Budući da je $U' \subseteq R'[w']$ tada posebno vrijedi $w'R'u'$. Sada primjenom svojstva (w-forth) relacije Z' dobivamo da postoji neprazan skup $U''_{u'} \subseteq R''[w'']$ tako da vrijedi sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l}\text{za svaki svijet } u'' \in U''_{u'} \text{ vrijedi } u'Z'u'' \\ \text{i za svaku funkciju } V''_{u'} : U''_{u'} \to \mathscr{P}(W'') \text{ takvu da za svaki svijet} \\ u'' \in U''_{u'} \text{ vrijedi } u''S''_{w''}V''_{u'}(u'') \\ \text{postoji skup } V'_{u'} \subseteq W' \text{ takav da vrijedi } u'S'_{w'}V'_{u'} \\ \text{i za svaki svijet } v' \in V'_{u'} \text{ postoji svijet } v'' \in \bigcup_{u'' \in U''_{u'}} V''_{u'}(u'') \\ \text{tako da vrijedi } v'Z'v''.\end{array}\right\} \tag{3.2}$$

Definirajmo skup $U'' = \bigcup_{u' \in U'} U''_{u'}$. Očito je skup U'' neprazan.

Neka je $u'' \in U''$ proizvoljan svijet. Tada postoji svijet $u' \in U'$ tako da vrijedi $u'' \in U''_{u'}$. Iz tvrdnje (3.2) slijedi $u'Z'u''$ a iz tvrdnje (3.1) slijedi uZu'. Dakle, za svaki svijet $u'' \in U''$ vrijedi $u(Z \circ Z')u''$.

Neka je $V'' : U'' \to \mathscr{P}(W'')$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u'' \in U''$ vrijedi $u''S''_{w''}V''(u'')$. Tvrdimo da postoji skup svjetova $V \subseteq R[w]$ tako da imamo uS_wV i tako da za svaki svijet $v \in V$ postoji svijet $v'' \in \bigcup_{u'' \in U''} V''(u'')$ za koji vrijedi $v(Z \circ Z')v''$.

Za svaki svijet $u' \in U'$ sa $V''_{(u')}$ označimo restrikciju funkcije V'' na skup $U''_{u'}$. Neka je $u' \in U'$ proizvoljan svijet. Očito za funkciju $V'_{(u')} : U''_{u'} \to \mathscr{P}(W'')$ vrijedi da za svaki svijet $u'' \in U''_{u'}$ imamo $u''S''_{w''}V''_{(u')}(u'')$. Iz tvrdnje (3.2) slijedi da postoji skup $V'_{u'} \subseteq W'$ takav da vrijedi $u'S'_{w'}V'_{u'}$ te još vrijedi sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l}\text{za svaki svijet } v' \in V'_{u'} \text{ postoji svijet } v'' \in \bigcup_{u'' \in U''_{u'}} V''_{(u')}(u'') \\ \text{tako da vrijedi } v'Z'v''.\end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Neka je za svaki svijet $u' \in U'$ izabran po jedan skup $V'_{u'}$. Neka je funkcija $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ definirana sa $V'(u') = V'_{u'}$. Primijetimo da tada za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $u'S'_{w'}V'(u')$. Iz tvrdnje (3.1) slijedi da postoji skup $V \subseteq W$ tako da vrijedi uS_wV i za svaki svijet $v \in V$ postoji svijet $v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ tako da vrijedi vZv'.

Dokažimo sada da za svaki svijet $v \in V$ postoji svijet $v'' \in \bigcup_{u'' \in U''} V''(u'')$ za koji vrijedi $v(Z \circ Z')v''$. Neka je $v \in V$ proizvoljan svijet. Iz prethodno dokazanog slijedi da postoji svijet $v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ tako da vrijedi vZv'. Tada postoji svijet $u' \in U'$ tako da vrijedi $v' \in V'(u')$. Budući da imamo $V'(u') = V'_{u'}$ tada iz tvrdnje (3.3) slijedi da postoji svijet

$v'' \in \bigcup_{u'' \in U''_{u'}} V''_{(u')}(u'')$ tako da vrijedi $v'Z'v''$. Budući da očito vrijedi $U''_{u'} \subseteq U''$ tada imamo:

$$\bigcup_{u'' \in U''_{u'}} V''_{(u')}(u'') \subseteq \bigcup_{u'' \in U''} V''_{(u')}(u''),$$

a onda i

$$v'' \in \bigcup_{u'' \in U''} V''_{(u')}(u'').$$

Budući da je $V''_{(u')}$ restrikcija funkcije V'' tada vrijedi i sljedeće:

$$v'' \in \bigcup_{u'' \in U''} V''(u'').$$

Preostaje još samo primijetiti da činjenice vZv' i $v'Z'v''$ povlače $v(Z \circ Z')v''$.

(d) Pokazujemo da relacija $\bigcup Z_i$ zadovoljava uvjete (at) i (w-forth).

Neka su $(w, w') \in \bigcup Z_i$ te $p \in Prop$ proizvoljni. Iz $(w, w') \in \bigcup Z_i$ slijedi da postoji $i \in I$ takav da vrijedi $(w, w') \in Z_i$. Iz svojstva (at) relacije Z_i sada slijedi da vrijedi sljedeća ekvivalencija: $w \Vdash p$ ako i samo ako $w' \Vdash p$. Dakle, relacija $\bigcup Z_i$ zadovoljava uvjet (at).

Dokažimo da je zadovoljen uvjet (w-forth). Neka su $(w, w') \in \bigcup Z_i$ te $u \in W$ proizvoljni takvi da vrijedi wRu. Iz $(w, w') \in \bigcup Z_i$ slijedi da postoji $i \in I$ takav da vrijedi $(w, w') \in Z_i$. Iz svojstva (w-forth) relacije Z_i slijedi da postoji neprazan skup $U' \subseteq R'[w']$ takav da vrijedi sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l} \text{za svaki svijet } u' \in U' \text{ vrijedi } uZ_iu' \\ \text{i za svaku funkciju } V' : U' \to \mathscr{P}(W') \text{ takvu da za svaki svijet } u' \in U' \\ \text{vrijedi } u'S'_{w'}V'(u') \text{ postoji skup } V \subseteq W \text{ takav da vrijedi } uS_wV \\ \text{ i za svaki svijet } v \in V \text{ postoji svijet } v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u') \text{ tako da vrijedi } vZ_iv'. \end{array}\right\} \quad (3.4)$$

Neka je $u' \in U'$ proizvoljan svijet. Tada iz tvrdnje (3.4) slijedi da vrijedi uZ_iu' i $w'R'u'$. Iz $Z_i \subseteq \bigcup Z_i$ i uZ_iu' slijedi $u(\bigcup Z_i)u'$. Neka je $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $u'S'_{w'}V'(u')$. Tada iz tvrdnje (3.4) slijedi da postoji skup $V \subseteq W$ takav da vrijedi uS_wV i za svaki svijet $v \in V$ postoji svijet $v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ tako da vrijedi vZ_iv'. Iz $Z_i \subseteq \bigcup Z_i$ i vZ_iv' slijedi $v(\bigcup Z_i)v'$.

Dakle, relacija $\bigcup Z_i$ zadovoljava uvjet (w-forth).

Sasvim analogno se dokazuje da vrijedi uvjet (w-back) korištenjem uvjeta (w-back) za relaciju Z_i (za proizvoljan $i \in I$).

■

Kao korolar tvrdnje d) prethodnog teorema dobivamo da ako između dva Verbruggeina modela postoji neka w-bisimulacija, tada postoji i najveća w-bisimulacija među njima.

Korolar 3.2.2. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Verbruggeina modela. Ako postoji neka w-bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, tada postoji i najveća w-bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Ukoliko vrijedi $W = W'$, tada vrijedi i da je ta relacija jedna relacija ekvivalencije na W.

Dokaz. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ proizvoljni Verbruggeini modeli takvi da postoji neka w-bisimulacija između tih modela. Tada je skup $\mathfrak{Z} := \{Z \subseteq W \times W' : Z \text{ je w-bisimulacija između } \mathfrak{M} \text{ i } \mathfrak{M}'\}$ neprazan. Definiramo relaciju $Z' := \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}} Z$. Prema prethodnoj propoziciji relacija $Z' \subseteq W \times W'$ je jedna w-bisimulacija između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.

Neka je $Z \subseteq W \times W'$ proizvoljna w-bisimulacija. Tada vrijedi $Z \in \mathfrak{Z}$ pa slijedi $Z \subseteq Z'$. Dakle, Z' je najveća w-bisimulacija između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.

Pokažimo da je u slučaju $W = W'$ relacija $Z' \subseteq W \times W$ jedna relacija ekvivalencije na W, tj. da je Z' refleksivna na W, simetrična i tranzitivna.

Neka je $w \in W$ proizvoljan svijet. Po tvrdnji (a) prethodne propozicije relacija $Z = \{(w,w) : w \in \mathfrak{M}\}$ je jedna w-bisimulacija, pa vrijedi $Z \in \mathfrak{Z}$. Prema tome i definiciji relacije Z' vrijedi $Z \subseteq Z'$. Dakle, $(w,w) \in Z \subseteq Z'$, tj. vrijedi $wZ'w$. Zaključujemo da je Z' refleksivna relacija na W.

Neka su w, w' proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $wZ'w'$. Prema definiciji relacije Z' postoji w-bisimulacija $Z \in \mathfrak{Z}$, $Z \subseteq W \times W$, takva da vrijedi wZw'. Prema tvrdnji (b) prethodne propozicije slijedi da je $Z^{-1} \subseteq W \times W$ jedna w-bisimulacija. Iz toga slijedi $Z^{-1} \in \mathfrak{Z}$, pa iz definicije relacije Z' slijedi $Z^{-1} \subseteq Z'$. Prema tome, wZw' povlači $(w', w) \in Z^{-1} \subseteq Z'$, tj. vrijedi $w'Z'w$. Zaključujemo da je Z' simetrična relacija.

Neka su w, w', w'' proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $wZ'w'$ i $w'Z'w''$. Prema definiciji relacije Z' slijedi da postoje w-bisimulacije $Z_1 \subseteq W \times W$ i $Z_2 \subseteq W \times W$ takve da vrijedi wZ_1w' i $w'Z_2w''$. Sada tvrdnja (c) prethodne propozicije povlači da je relacija $Z_2 \circ Z_1 \subseteq W \times W$ jedna w-bisimulacija. Tada vrijedi $Z_2 \circ Z_1 \in \mathfrak{Z}$ pa dobivamo $(w, w'') \in Z_2 \circ Z_1 \subseteq Z'$. Dakle, vrijedi $wZ'w''$, pa zaključujemo da je Z' tranzitivna relacija. ∎

Sada želimo istaknuti da su osnovne konstrukcije Verbruggeinih modela w-bisimulacije. U tu svrhu navodimo definicije osnovnih konstrukcija Verbruggeinih modela kakve se mogu pronaći u [57]. Pritom treba napomenuti da se Verbruggeini modeli u tom članku nazivaju

IL_{set}–modeli. Za dva Verbruggeina modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ kažemo da su međusobno disjunktni ako vrijedi $W \cap W' = \emptyset$.

Definicija 3.2.3. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Verbruggeina modela. Kažemo da je model $\mathfrak{M}'$ podmodel od $\mathfrak{M}$ ako vrijedi:

(i) $W' \subseteq W$

(ii) $R' = R \cap (W' \times W')$

(iii) za svaki $w' \in W'$ vrijedi $S'_{w'} = S_{w'} \cap (R'[w'] \times (\mathscr{P}(W') \setminus \{\emptyset\}))$

(iv) za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi $V'(p) = V(p) \cap W'$.

Definicija 3.2.4. Neka je I neprazan skup, $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija Verbruggeinih modela koji su međusobno disjunktni te neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Verbruggeini modeli.

(i) Definiramo disjunktnu uniju familije $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ Verbruggeinih modela, u oznaci $\biguplus \mathfrak{M}_i$, kao strukturu $(W, R, \{S_w : w \in W\}, V)$, pri čemu je $W = \bigcup_{i \in I} W_i$, $R = \bigcup_{i \in I} R_i$, $S_w = \bigcup_{i \in I} S_w^{(i)}$ (pri čemu definiramo $S_w^{(i)} = \emptyset$ ako $w \notin W_i$), te za svaku propozicionalnu varijablu p definiramo $V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p)$.

(ii) Za podmodel $\mathfrak{M}'$ Verbruggeinog modela $\mathfrak{M}$ kažemo da je generirani podmodel od $\mathfrak{M}$ ako za sve svjetove $w, v \in \mathfrak{M}$ vrijedi da $w \in \mathfrak{M}'$ i wRv povlači $v \in \mathfrak{M}'$.

(iii) Za funkciju $f : W \to W'$ kažemo da je ograničeni morfizam između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ ako vrijedi:

(iii-1) za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi ekvivalencija: $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash p$

(iii-2) ako vrijedi wRv tada vrijedi $f(w)R'f(v)$

(iii-3) ako vrijedi uS_wV tada vrijedi $f(u)S'_{f(w)}f[V]$

(iii-4) ako vrijedi $f(w)R'v'$ tada postoji svijet $v \in \mathfrak{M}$ takav da vrijedi wRv i $v' = f(v)$

(iii-5) ako vrijedi $f(u)S_{f(w)}V'$ tada postoji skup svjetova $V \subseteq W$ takav da vrijedi uS_wV i $V' = f[V]$.

Istaknimo i da disjunktnu uniju $\biguplus \mathfrak{M}_i$ možemo definirati i za neprazan skup $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ Verbruggeinih modela koji nisu nužno međusobno disjunktni na način da promatramo njihove međusobno disjunktne izomorfne kopije. Prema [57] disjunktna unija Verbruggeinih modela je Verbruggein model. U sljedećoj propoziciji ističemo da su osnovne konstrukcije Verbruggeinih modela w-bisimulacije. Dokaz ispuštamo jer se radi o jednostavnoj provjeri uvjeta iz definicije.

Propozicija 3.2.5.

(a) Neka je $\biguplus \mathfrak{M}_i$ disjunktna unija Verbruggeinih modela. Tada vrijedi $\biguplus \mathfrak{M}_i, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}_i, w$, za svaki $i \in I$ i svaki svijet $w \in \mathfrak{M}_i$.

(b) Neka je $\mathfrak{M}'$ generirani podmodel Verbruggeinog modela $\mathfrak{M}$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}', w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}, w$, za svaki svijet $w \in \mathfrak{M}'$.

(c) Neka je $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ surjektivni ograničeni morfizam između Verbruggeinih modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', f(w)$, za svaki svijet $w \in \mathfrak{M}$.

3.3. MODALNA EKVIVALENTNOST I W-BISIMULIRANOST

U ovoj točki ćemo pokazati da vrijede analogoni tvrdnji 2.2.1. i 2.4.9, tj. da w-bisimuliranost povlači modalnu ekvivalentnost, ali da obrat ne vrijedi.

Prvo dajemo novu verziju definicije n-bisimulacije za Verbruggeinu semantiku koju nazivamo n-w-bisimulacija.

Definicija 3.3.1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Verbruggeini modeli. Za konačan niz nepraznih relacija $Z_0, Z_1, \dots, Z_n \subseteq W \times W'$ kažemo da je ***n*–w-bisimulacija** između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ ako vrijedi

$$Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0$$

te su ispunjeni sljedeći uvjeti:

(at) za svaki par $(w,w') \in Z_0$ i svaku propozicionalnu varijablu $p \in Prop$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash p$$

(*n*-w-forth) za svaki $i \in \{1,\dots,n\}$ i za svaki par $(w,w') \in Z_i$ te za svaki svijet $u \in W$ takav da vrijedi wRu, postoji neprazan skup $U' \subseteq W'$ tako da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $uZ_{i-1}u'$ i $w'R'u'$ i za svaku funkciju $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ takvu da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $u'S'_{w'}V'(u')$ postoji skup V takav da vrijedi uS_wV i za svaki svijet $v \in V$ postoji svijet $v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ tako da vrijedi $vZ_{i-1}v'$

(*n*-w-back) za svaki $i \in \{1,\dots,n\}$ i za svaki par $(w,w') \in Z_i$ te za svaki svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi $w'R'u'$, postoji neprazan skup $U \subseteq W$ tako da za svaki svijet $u \in U$ vrijedi $uZ_{i-1}u'$ i wRu i za svaku funkciju $V : U \to \mathscr{P}(W)$ takvu da za sve $u \in U$ vrijedi $uS_wV(u)$ postoji skup V' tako da vrijedi $u'S'_{w'}V'$ i za svaki svijet $v' \in V'$ postoji svijet $v \in \bigcup_{u \in U} V(u)$ tako da vrijedi $vZ_{i-1}v'$.

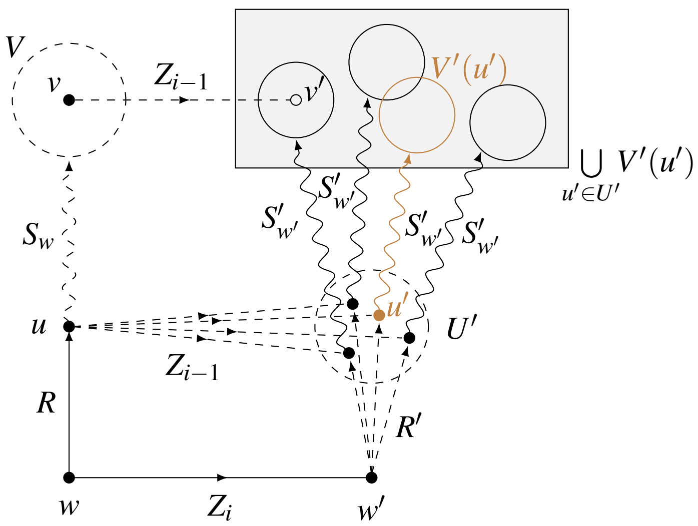
Za dva svijeta $w \in W$ i $w' \in W'$ kažemo da su ***n*-w-bisimulirani** ako postoji neka n-w-bisimulacija $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$ tako da vrijedi wZ_nw'. U tom slučaju pišemo $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_n \mathfrak{M}', w'$.

Napomena 3.3.2. U ovoj napomeni dajemo simbolički zapis uvjeta (n-w-forth) i (n-w-back) iz prethodne definicije. Simbolički zapis uvjeta (n-w-forth) je sljedeći:

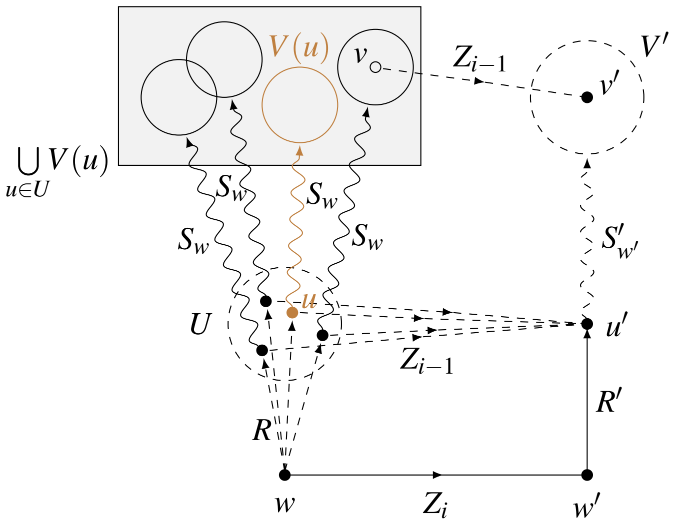
$$(\forall i \in \{1,\dots,n\})(\forall (w,w') \in Z_i)(\forall u \in W)\Big(wRu \Rightarrow (\exists U' \in \mathscr{P}(W') \setminus \{\emptyset\})(\forall u' \in U')(uZ_{i-1}u' \text{ i } w'R'u' \text{ i } (\forall V' \in {}^{U'}\mathscr{P}(W'))\Big((\forall u' \in U')(u'S'_{w'}V'(u')) \Rightarrow (\exists V \subseteq W)(uS_wV \text{ i } (\forall v \in V)(\exists v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u'))vZ_{i-1}v'\Big)\Big),$$

dok je simbolički zapis uvjeta (n-w-back) sljedeći:

$$(\forall i \in \{1,\dots,n\})(\forall (w,w') \in Z_i)(\forall u' \in W')\Big(w'R'u' \Rightarrow (\exists U \in \mathscr{P}(W) \setminus \{\emptyset\})(\forall u \in U)(uZ_{i-1}u' \text{ i } wRu \text{ i } (\forall V \in {}^{U}\mathscr{P}(W))\Big((\forall u \in U)(uS_wV(u)) \Rightarrow (\exists V' \subseteq W')(u'S'_{w'}V' \text{ i } (\forall v' \in V')(\exists v \in \bigcup_{u \in U} V(u))vZ_{i-1}v'\Big)\Big).$$



Slika 3.3: Ilustracija uvjeta (n-w-forth).



Slika 3.4: Ilustracija uvjeta (n-w-back).

Naziv w-bisimulacija dolazi od naziva slaba bisimulacija (engl. *weak bisimulation*). Kako bi opravdali taj naziv prvo dokazujemo da bisimuliranost povlači w-bisimuliranost. Preciznije, ako su dva svijeta dvaju Verbruggeinih modela bisimulirani, tada su oni nužno i w-bisimulirani.

Lema 3.3.3. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Verbruggeina modela. Neka su $w_0 \in \mathfrak{M}$ i $w_1 \in \mathfrak{M}'$ proizvoljni svjetovi. Ako su svjetovi w_0 i w_1 bisimulirani tada su w-bisimulirani.

Dokaz. Označimo sa Z bisimulaciju između svjetova w_0 i w_1. Treba pokazati da je relacija Z w-bisimulacija, tj. da vrijede svojstva (at), (w-forth) i (w-back). U nastavku pokazujemo samo da relacija Z zadovoljava uvjet (w-forth). Uvjet (w-back) se pokazuje sasvim analogno.

Neka su $(w,w') \in Z$ i $u \in W$ proizvoljni takvi da vrijedi wRu. Iz uvjeta (forth) slijedi da postoji svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi uZu' i $w'R'u'$. Definiramo $U' = \{u'\}$. Tada za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi uZu' i $w'R'u'$.

Neka je sada $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $u'S'_{w'}V'(u')$. Kako je $U' = \{u'\}$, funkcija V' je određena ako odredimo $V'(u')$. Iz uvjeta (forth) i $u'S'_{w'}V'(u')$ slijedi da vrijedi sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l} \text{za skup } V'(u') \text{ postoji skup } V \subseteq W \text{ tako da vrijedi } uS_wV \text{ i} \\ \text{za svaki svijet } v \in V \text{ postoji svijet } v' \in V'(u') \text{ tako da vrijedi } vZv'. \end{array}\right\} \quad (3.5)$$

Neka je $v \in V$ proizvoljan svijet. Iz $U' = \{u'\}$ slijedi $\bigcup_{u' \in U'} V'(u') = V'(u')$. Iz ovog posljednjeg i činjenice (3.5) slijedi da postoji svijet $v' \in V'(u') = \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ tako da vrijedi vZv'.

Time je dokazano da relacija Z ima svojstvo (w-forth). ■

Slično se pokazuje da n-bisimuliranost svjetova povlači njihovu n-w-bisimuliranost.

Propozicija 3.3.4. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Verbruggeina modela. Neka su $w_0 \in W$ i $w_1 \in W'$ proizvoljni svjetovi te $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Ako su svjetovi w_0 i w_1 n-bisimulirani tada su n-w-bisimulirani.

Kako bi pokazali da obrat ne vrijedi, tj. da dva n-w-bisimulirana svijeta dva Verbruggeina modela nisu nužno n-bisimulirana, iskoristit ćemo svjetove w i w' iz primjera 2.6.2. U lemi 2.6.3. pokazali smo da ti svjetovi nisu 1-bisimulirani, pa je stoga za navedeni rezultat dovoljno još pokazati su oni 1-w-bisimulirani.

Lema 3.3.5. Neka su $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, w i w' kao u primjeru 2.6.2. Vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_1 \mathfrak{M}', w'$.

Dokaz. Definiramo sljedeće relacije na $W \times W'$:

$$Z_1 = \{(w, w')\},$$
$$Z_0 = \{(w, w'), (u, u_1'), (u, u_2'), (v_1, v_1'), (v_2, v_2')\}.$$

Očito vrijedi $Z_1 \subseteq Z_0$ i $(w, w') \in Z_1$. Iz definicija modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ lako je provjeriti da za svaki par svjetova $(w_1, w_2) \in Z_0$ vrijedi da su w_1 i w_2 propozicionalno ekvivalentni (dakle vrijedi uvjet (at) za Z_0). Kako bismo pokazali $w_1 \leftrightsquigarrow_1 w_2$ preostaje pokazati da za $Z_1 = \{(w, w')\}$ vrijede uvjeti (1-w-forth) i (1-w-back).

Provjerimo prvo da vrijedi uvjet (1-w-forth). Neka je $x \in W$ proizvoljan svijet za kojeg vrijedi wRx. Razlikujemo sljedeće slučajeve: $x = u$ i $x \in \{v_1, v_2\}$. Posebno razmatramo svaki od navedena dva slučaja.

Neka je $x = u$. Definiramo skup $U' = \{u_1', u_2'\}$. Uočimo da za svaki svijet $x' \in U'$ vrijedi uZ_0x' i $w'R'x'$. Neka je $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ proizvoljna funkcija takva da za svaki $x' \in U'$ vrijedi $x'S_{w'}'V'(x')$. Posebno, zbog $u_1' \in U'$ vrijedi $u_1'S_{w'}'V'(u_1')$. Uočimo da prema definiciji modela $\mathfrak{M}'$, zbog $u_1'S_{w'}'V'(u_1')$ mora vrijediti $u_1' \in V'(u_1')$ ili $v_1' \in V'(u_1')$.

Ako $u_1' \in V'(u_1')$ definiramo $V = \{u\}$. Za tako definiran skup V vrijedi uS_wV. Očito vrijedi uZ_0u_1' i $u_1' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$.

Ako $v'_1 \in V'(u'_1)$ definiramo $V = \{v_1\}$. Za tako definiran skup V vrijedi uS_wV. Očito vrijedi $v_1Z_0v'_1$ i $v'_1 \in \bigcup_{x' \in U'} V'(x')$.

Promotrimo sada slučaj $x \in \{v_1, v_2\}$. Neka $x = v_i$. Definiramo skup $U' = \{v'_i\}$. Uočimo da za svaki $x' \in U'$ vrijedi uZ_0x' i $w'R'x'$. Neka je $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ proizvoljna funkcija takva da za svaki $x' \in U'$ vrijedi $u'S'_{w'}V'(x')$. Posebno, zbog $v'_i \in U'$ vrijedi $v'_iS'_{w'}V'(v'_i)$. Uočimo da prema definiciji modela $\mathfrak{M}'$, zbog $v'_iS'_{w'}V'(v'_i)$ mora vrijediti $v'_i \in V'(v'_i)$. Definiramo $V = \{v_i\}$. Za tako definiran skup V vrijedi uS_wV. Očito vrijedi $v_iZ_0v'_i$ i $v'_i \in \bigcup_{x' \in U'} V'(x')$.

Provjerimo sada da vrijedi uvjet (1-w-back). Neka je $x' \in W'$ proizvoljan svijet takav da vrijedi $w'R'x'$. Razlikujemo sljedeće slučajeve: $x' \in \{u'_1, u'_2\}$ i $x' \in \{v'_1, v'_2\}$. Razmatramo svaki slučaj posebno.

Promotrimo prvo slučaj kada je $x' \in \{u'_1, u'_2\}$. Neka je $x = u'_i$. Definiramo $U = \{u\}$. Uočimo da za svaki $x \in U$ vrijedi $xZ_0u'_i$ i wRx. Neka je $V : U \to \mathscr{P}(W)$ proizvoljna funkcija takva da za svaki $x \in U$ vrijedi $xS_wV(x)$. Posebno, zbog $u \in U$ vrijedi $uS_wV(u)$. Definiramo $V' = \{u'_i\}$. Očito vrijedi $u'S'_{w'}V'$, a onda očito vrijedi $uZ_0u'_i$ i $u'_i \in \bigcup_{x \in U} V(x)$

Promotrimo još slučaj kada je $x' = v'_i$, za neki $i \in \{1, 2\}$. Definiramo $U = \{v_i\}$. Uočimo da za svaki $x \in U$ vrijedi $xZ_0v'_i$ i wRx. Neka je $V : U \to \mathscr{P}(W)$ proizvoljna funkcija takva da za svaki $x \in U$ vrijedi $xS_wV(x)$. Posebno, zbog $v_i \in U$ vrijedi $v_iS_wV(v_i)$. Definiramo $V' = \{v'_i\}$. Za tako definiran V' vrijedi $u'S'_{w'}V'$. Očito vrijedi $v_iZ_0v'_i$ i $v_i \in \bigcup_{x \in U} V(x)$.

■

Pokažimo sada indukcijom da su w-bisimulirani svjetovi modalno ekvivalentni.

Propozicija 3.3.6. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Verbruggeina modela i neka su $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ proizvoljni svjetovi.

(a) Ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_n \mathfrak{M}', w'$ tada imamo i $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$.

(b) Ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$ tada imamo i $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$.

Dokaz. Dokazujemo samo tvrdnju (a). Tvrdnja (b) pokazuje se analogno indukcijom po složenosti formule. Traženu tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Točnije, indukcijom po n dokazujemo da za sve svjetove $w \in W$ i $w' \in W'$ takve da $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_n \mathfrak{M}', w'$, imamo da za svaku formulu F, za koju je $d(F) \leq n$, vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w' \Vdash F.$$

Neka je $n = 0$ i neka su $w \in W$ i $w' \in W'$ proizvoljni. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_0 \mathfrak{M}, w$, tj. postoji relacija $Z_0 \subseteq W \times W'$ takav da vrijedi uvjet (at). Želimo pokazati da za svaku formulu F takvu da vrijedi $d(F) \leq 0$ (što povlači da se u F ne javljaju modalni operatori) vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash F$. Kako se u F ne javljaju modalni operatori, ta se tvrdnja lako dokaže indukcijom po složenosti formule F potpuno analogno kao u bazi indukcije u dokazu propozicije 3.3.6.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki $i < n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Pokazujemo da tvrdnja vrijedi za n. Neka su $w \in W$ i $w' \in W'$ proizvoljni. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_n \mathfrak{M}', w'$, tj. da postoji konačan niz relacija

$$Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$$

takav da vrijedi wZ_nw' te vrijede uvjeti (at), (n-w-forth) i (n-w-back) iz definicije n-w-bisimula–cije. Treba pokazati da vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$, tj. da za proizvoljnu formulu F dubine manje ili jednake n vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F \quad \text{ako i samo ako vrijedi} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash F.$$

Gornju tvrdnju pokazujemo indukcijom po složenosti formule F. Razmotrimo prvo slučaj kada je formula F složenosti 0. Tada vrijedi $F \equiv p$, za neku propozicionalnu varijablu p, ili $F \equiv \bot$. Ako $F \equiv \bot$ tada očito vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash F$. Neka je sad $F \equiv p$, za neku propozicionalnu varijablu p. Iz wZ_nw' te $Z_n \subseteq Z_0$ slijedi wZ_0w'. Sada iz uvjeta (at) slijedi da vrijedi ekvivalencija: $\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash F$.

Pretpostavimo da za svaku formulu G složenosti manje ili jednake k, za neki $k \in \mathbb{N}$, takve da vrijedi $d(G) \leq n$, vrijedi

$$\mathfrak{M}, w \Vdash G \text{ ako i samo ako vrijedi } \mathfrak{M}', w' \Vdash G.$$

Neka je F proizvoljna formula složenosti $k+1$, takva da vrijedi $d(F) \leq n$. Razmatramo nekoliko slučajeva u ovisnosti o izgradnji formule F.

Neka je $F \equiv \neg G$. Tada je formula G složenosti k te vrijedi $d(G) \leq n$. Sada iz pretpostavke indukcije slijedi da vrijedi: $\mathfrak{M}, w \nVdash G$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}', w' \nVdash G$. Tada očito vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg G$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \neg G$. Dakle, vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash F$.

Neka je $F \equiv G \wedge H$. Tada su formule G i H složenosti manje ili jednake k te vrijedi $d(G) \leq n$ i $d(H) \leq n$. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash G \wedge H$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash G$ i $\mathfrak{M}, w \Vdash H$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash G$ i $\mathfrak{M}', w' \Vdash H$, pa slijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash G \wedge H$. Obratno, pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash G \wedge H$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash G$ i $\mathfrak{M}', w' \Vdash H$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash G$ i $\mathfrak{M}, w \Vdash H$, pa slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash G \wedge H$. Dakle, vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash F$.

Neka je $F \equiv G \rhd H$. Tada su formule G i H složenosti manje ili jednake k te iz $d(F) = d(G \rhd H) = 1 + \max\{d(F), d(G)\} \leq n$ očito slijedi $d(G) < n$ i $d(H) < n$.

Preostaje pokazati da vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash G \rhd H \quad \text{ako i samo ako vrijedi} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash G \rhd H.$$

Pokazat ćemo samo jednu implikaciju. Obratan smjer se dokazuje sasvim analogno korištenjem uvjeta (n-w-forth) iz definicije n-w-bisimulacije. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash G \rhd H$, tj. pretpostavimo da vrijedi:

$$(\forall u \in W)\Big(wRu \;\&\; u \Vdash G \quad \Rightarrow \quad \big(\exists V_1 \in \mathscr{P}(W)\big)\big(uS_wV_1 \;\&\; V_1 \Vdash H\big)\Big). \tag{3.6}$$

Treba pokazati da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash G \rhd H$, tj. da vrijedi

$$(\forall u' \in W')\Big(w'R'u' \;\&\; u' \Vdash G \quad \Rightarrow \quad \big(\exists V' \in \mathscr{P}(W')\big)\big(u'S'_{w'}V' \;\&\; V' \Vdash H\big)\Big). \tag{3.7}$$

Neka je $u' \in W'$ proizvoljan svijet takav da vrijedi $w'R'u'$ i $u' \Vdash G$. Sada iz wZ_nw' primjenom uvjeta (n-w-back) dobivamo da postoji neprazan skup $U \subseteq W$ takav da za svaki svijet $u \in U$ vrijedi $uZ_{n-1}u'$ i wRu te za svaku funkciju $V : U \to \mathscr{P}(W)$ takvu da za svaki $u \in U$ vrijedi $uS_wV(u)$ postoji skup V' takav da vrijedi $u'S'_{w'}V'$ i za svaki svijet $v' \in V'$ postoji svijet $v \in \bigcup_{u \in U} V(u)$ takav da vrijedi $vZ_{n-1}v'$.

Uočimo da kako je $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0$ jedna n-w-bisimulacija, tako je $Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0$ jedna $(n-1)$-w-bisimulacija. Sada iz $uZ_{n-1}u'$ zaključujemo da su svjetovi u i u' $(n-1)$-w-bisimulirani, pa budući da za svaki svijet $u \in U$ vrijedi wRu i $uZ_{n-1}u'$ te vrijedi $u' \Vdash G$ i $d(G) < n$, tada iz pretpostavke indukcije slijedi $u \Vdash G$, a onda $U \Vdash G$.

Iz istaknute tvrdnje (3.6) imamo da za svaki svijet $u \in U$, kako vrijedi wRu i $u \Vdash G$, postoji skup $V_u \in \mathscr{P}(W)$ takav da vrijedi uS_wV_u i $V_u \Vdash H$. Definirajmo funkciju $V : U \to \mathscr{P}(W)$ ovako:

$$V(u) = V_u, \quad u \in U.$$

Prema tome vrijedi $uS_wV(u)$ pa (opet prema već korištenom (n-w-back) uvjetu za relaciju Z) postoji skup V' takav da vrijedi $u'S'_{w'}V'$ i za svaki svijet $v' \in V'$ postoji $v \in \bigcup_{u \in U} V(u)$ takav da vrijedi vZ_kv'.

Neka je $v' \in V'$ proizvoljan svijet. Prema prethodnom, postoji svijet $v \in \bigcup_{u\in U} V(u)$ takav da vrijedi vZ_kv'. Iz $v \in \bigcup_{u\in U} V(u)$ slijedi da postoji svijet $u \in U$ takav da vrijedi $v \in V(u) = V_u$. Iz $V_u \Vdash H$ i vZ_kv', po pretpostavci indukcije i $d(H) \leq n$, slijedi da vrijedi $v' \Vdash H$. Kako je $v' \in V'$ bio proizvoljan slijedi $V' \Vdash H$.

Dakle, za $V' \in \mathscr{P}(W')$ vrijedi $u'S'_{w'}V'$ i $V' \Vdash H$, čime je dokazana tražena tvrdnja (3.7).

■

Postavlja se pitanje obrata prethodnog teorema, tj. vrijedi li sljedeća tvrdnja:

> *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Verbruggeini modeli i neka su $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ proizvoljni svjetovi. Ako su svjetovi w i w' modalno ekvivalentni, tada su oni w-bisimulirani.*

Kako bi dokazali da to ne vrijedi, koristit ćemo sličan postupak koji je korišten u [7] kako bi se dokazalo da modalna ekvivalencija ne povlači bisimuliranost u slučaju Veltmanovih modela. Sličan postupak već smo primijenili prilikom dokaza teorema 2.4.9. koji je tvrdio da modalna ekvivalencija ne povlači bisimuliranost u slučaju Verbruggeinih modela. U definiciji 2.4.3. definirali smo za dani Veltmanov model $\mathfrak{M}$ pridruženi Verbruggein model, u oznaci $Ver\ \mathfrak{M}$ (u lemi 2.4.4. pokazali smo da je tako definirana struktura doista jedan Verbruggein model).

Sada primjenjujemo sličan postupak kao pri dokazivanju teorema 2.4.9. U teoremu 2.4.2. definirali smo dva Veltmanova modela, označimo ih s $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$, koji sadrže dva svijeta koji su modalno ekvivalentni, ali nisu bisimulirani (kao svjetovi dva Veltmanova modela). Označimo te svjetove s w_1, odnosno w_2. U teoremu 2.4.5 pokazali smo da je istinitost proizvoljne formule na pojedinom svijetu nekog Veltmanovog modela očuvana pri prelasku na njegov pridruženi Verbruggein model. Prema tome, svjetovi w_1 i w_2 iz modela $Ver\ \mathfrak{N}_1$, odnosno $Ver\ \mathfrak{N}_2$ su modalno ekvivalentni (jer su modalno ekvivalentni kao svjetovi Veltmanovih modela $\mathfrak{N}_1$, odnosno $\mathfrak{N}_2$). Kako w_1 i w_2 nisu bisimulirani svjetovi Veltmanovih modela $\mathfrak{N}_1$, odnosno $\mathfrak{N}_2$, dovoljno je još pokazati da tada oni nisu w-bisimulirani kao svjetovi Verbruggeinih modela $Ver\ \mathfrak{N}_1$, odnosno $Ver\ \mathfrak{N}_2$. To proizlazi iz sljedeće propozicije.

Propozicija 3.3.7. Neka su $\mathfrak{N} = \big(W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash\big)$ i $\mathfrak{N}' = \big(W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash\big)$ dva Veltmanova modela te neka su $w_0 \in W$ i $w'_0 \in W'$ proizvoljni svjetovi. Neka su $Ver\ \mathfrak{N} = \big(W, R, \{\overline{S}_w : w \in W\}, \Vdash\big)$ i $Ver\ \mathfrak{N}' = \big(W', R', \{\overline{S}'_w : w \in W'\}, \Vdash\big)$ njihovi pridruženi Verbruggeini modeli. Tada vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$Ver\,\mathfrak{N}, w_0 \underset{\rightsquigarrow}{\leftrightarrow} Ver\,\mathfrak{N}', w_0' \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows \mathfrak{N}', w_0'.$$

Dokaz. Ako vrijedi $\mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows \mathfrak{N}', w_0'$, tada vrijedi $Ver\,\mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows Ver\,\mathfrak{N}', w_0'$, pa korištenjem leme 3.3.3. slijedi $Ver\,\mathfrak{N}, w_0 \underset{\rightsquigarrow}{\leftrightarrow} Ver\,\mathfrak{N}', w_0'$.

Pretpostavimo da vrijedi $Ver\,\mathfrak{N}, w_0 \underset{\rightsquigarrow}{\leftrightarrow} Ver\,\mathfrak{N}', w_0'$. Označimo sa Z jednu w-bisimulaciju za koju vrijedi $(w_0, w_0') \in Z$. Prema definiciji w-bisimulacije za tu relaciju Z vrijede uvjeti (at), (w-forth) i (w-back). Dovoljno je pokazati da za relaciju Z vrijedi uvjet (forth) iz definicije bisimulacije Veltmanovih modela (jer uvjet (at) vrijedi, a uvjet (back) bi se pokazao analogno) kako bi dokazali željenu tvrdnju $\mathfrak{N}, w_0 \leftrightarrows \mathfrak{N}', w_0'$.

Neka su $w \in W$ i $w' \in W'$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi wZw'. Neka je $u \in W$ proizvoljan svijet takav da vrijedi wRu. Kako bi dokazali da za relaciju Z vrijedi uvjet (forth) iz definicije bisimulacije Veltmanovih modela, potrebno je dokazati sljedeće:

$$(\exists u' \in W')\Big(uZu' \text{ i } w'R'u' \text{ i } (\forall v' \in W')(u'S'_{w'}v' \Rightarrow (\exists v \in W)(uS_w v \text{ i } vZv'))\Big).$$

Prema svojstvu (w-forth) relacije Z, iz wZw' i wRu slijedi da postoji neprazan skup $U' \subseteq W'$ takav da vrijedi:

$$(\forall u' \in U')(uZu' \text{ i } w'R'u') \tag{3.8}$$

i za svaku funkciju $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ vrijedi

$$(\forall u' \in U')(u'\overline{S}'_{w'}V'(u')) \Rightarrow (\exists V_{u'} \subseteq W)\Big(u\overline{S}_w V_{u'} \text{ i } (\forall v \in V_{u'})(\exists v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u'))(vZv')\Big).$$

Uočimo da je sada za željenu tvrdnju dovoljno dokazati da postoji neki svijet $u' \in U'$ (jer prema (3.8) tada za taj svijet vrijedi uZu' i $w'R'u'$) za koji vrijedi sljedeće:

$$(\forall v' \in W')\Big(u'S'_{w'}v' \Rightarrow (\exists v \in W)(uS_w v \text{ i } vZv')\Big).$$

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

$$(\forall u' \in U')(\exists v' \in W')\Big(u'S'_{w'}v' \text{ i } (\forall v \in W)(uS_w v \Rightarrow \neg(vZv'))\Big).$$

Prema tome možemo za svaki svijet $u' \in U'$ odabrati po jedan svijet $v'_{u'} \in W'$ za koji vrijedi $u'S'_{w'}v'_{u'}$ te vrijedi $(\forall v \in W)(uS_w v \Rightarrow vZv'_{u'})$. Sada možemo definirati funkciju $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ ovako:

$$V'(u') = \{v'_{u'}\}, \quad \forall u' \in U'.$$

Uočimo da tada vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$\big(\forall v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u') = \{v'_{u'} : u' \in U'\}\big)(\forall v \in W)(uS_w v \Rightarrow \neg(vZv')). \tag{3.9}$$

Kako za svaki svijet $u' \in U'$, prema definiciji relacije $\overline{S}'_{w'}$ i funkcije V', iz $u'S'_{w'}v'_{u'}$ slijedi $u'\overline{S}'_{w'}\{v'_{u'}\} = V'(u')$, tada prema (w-forth) svojstvu relacije Z slijedi:

$$(\exists V_{u'} \subseteq W)\Big(u\overline{S}_w V_{u'} \text{ i } (\forall v \in V_{u'})\big(\exists v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')\big)(vZv')\Big).$$

Kako iz $u\overline{S}_w V_{u'}$ i definicije relacije $\overline{S}_w$ slijedi da postoji svijet $v \in V_{u'}$ za koji vrijedi $uS_w v$, tada posebno za taj svijet $v \in V_{u'}$ postoji svijet $v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ takav da vrijedi vZv'.

Dakle, dobili smo da vrijedi $(\exists v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u'))(\exists v \in W)(uS_w v \text{ i } vZv')$, što je u kontradikciji sa (3.9). Dakle, suprotna pretpostavka bila je pogrešna.

■

Sada imamo sve potrebno za dokaz analogona teorema 2.4.9 za slučaj w-bisimulacije: modalna ekvivalentnost ne povlači w-bisimuliranost.

Teorem 3.3.8. Neka su $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ Veltmanovi modeli te w_1 i w_2 njihovi svjetovi iz iskaza teorema 2.4.2. Tada za te svjetove w_1 i w_2 u modelima $Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $Ver\ \mathfrak{N}_2$ (tj. u Verbruggeinim modelima pridruženim Veltmanovim modelima $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$) vrijedi da su oni modalno ekvivalentni, ali nisu w-bisimulirani.

Dokaz. U dokazu teorema 2.4.9. dokazano je da su svjetovi w_1 i w_2 modalno ekvivalentni kao svjetovi Verbruggeinih modela $Ver\ \mathfrak{N}_1$, odnosno $Ver\ \mathfrak{N}_2$. Preostaje pokazati da svjetovi w_1 i w_2 nisu w-bisimulirani.

Pretpostavimo suprotno, tj. vrijedi $Ver\ \mathfrak{N}_1, w_1 \leftrightsquigarrow Ver\ \mathfrak{N}_2, w_2$. Tada teorem 3.3.7 povlači da vrijedi $\mathfrak{N}_1, w_1 \leftrightharpoons \mathfrak{N}_2, w_2$. No, to je u kontradikciji s teoremom 2.4.2.

Dakle, svjetovi w_1 i w_2 nisu w-bisimulirani u pridruženim Verbruggeinim modelima.

■

Iako općenito (n-)modalno ekvivalentni svjetovi nisu (n-)w-bisimulirani, možemo dobiti da to vrijedi ako je skup propozicionalnih varijabli koji promatramo konačan. To je važna razlika između w-bisimulacije i bisimulacije za Verbruggeine modele, budući da smo upravo pokazali da to ne vrijedi za bisimulacije Verbruggeinih modela. Kako bi pokazali željeni rezultat, prvo ćemo definirati pojam w-bisimulacijske igre te njenu konačnu verziju, tj. konačnu w-bisimulacijsku igru. Pokazat ćemo da, kao što bisimulacijske igre odgovaraju pojmu bisimulacije, tako w-bisimulacijske igre odgovaraju pojmu w-bisimulacije. Drugim riječima, dokazat ćemo da vrijedi analogon propozicije 2.3.7 za w-bisimulacije: pitanje (ne)bisimuliranosti dvaju svjetova ekvivalentno je postojanju pobjedničke strategije jednog od igrača u odgovarajućoj w-bisimulacijskoj igri. To ćemo iskoristiti u dokazu teorema 3.6.2 (obrat u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli) kako bi lakše pokazali w-bisimuliranost dvaju svjetova: jednostavnim opisom pobjedničke strategije igrača branitelja u pripadnoj w-bisimulacijskoj igri.

3.4. Odnos w-bisimuliranosti i n-w-bisimuliranosti

U točki 2.5. utvrdili smo odnos između bisimuliranosti i n-bisimuliranosti. Sada na sličan način želimo utvrditi odnos između w-bisimuliranosti i n-w-bisimuliranosti. Preciznije, za proizvoljna dva svijeta w i w' Verbruggeinih modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ želimo dati odgovor na sljedeća dva pitanja:

(a) ako imamo $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$, vrijedi li tada nužno $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_n \mathfrak{M}', w')$?

(b) ako imamo $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_n \mathfrak{M}', w')$, vrijedi li tada nužno $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$?

Dokazat ćemo da je odgovor na prvo pitanje potvrdan, tj. w-bisimuliranost povlači n-w-bisimuliranost za svaki $n \in \mathbb{N}$. No, također ćemo dokazati da obrat ne vrijedi (tj. da je odgovor na drugo pitanje općenito negativan).

Prvo pokažimo da w-bisimuliranost povlači n-w-bisimuliranost za svaki $n \in \mathbb{N}$ (na sličan način kao što je u propoziciji 2.5.1. pokazano da bisimuliranosti povlači n-bisimuliranost za svaki $n \in \mathbb{N}$).

Propozicija 3.4.1. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Verbruggeini modeli te $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ proizvoljni svjetovi. Ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_n \mathfrak{M}', w'$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$. Tada postoji neka neprazna relacija $Z \subseteq W \times W'$ koja zadovoljava uvjete (at), (w-forth) i (w-back) iz definicije 3.1.1 te za koju vrijedi $(w, w') \in Z$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ definiramo $Z_i := Z$. Tada je $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$ niz nepraznih binarnih relacija takav da vrijedi $(w, w') \in Z_n$. Preostaje još pokazati da za niz relacija $(Z_i)_{i=0}^n$ vrijede uvjeti (at), (n-w-forth) i (n-w-back) iz definicije 3.3.1. No, to direktno slijedi iz $Z_i = Z$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ te svojstava (at), (w-forth) i (w-back) za relaciju Z. Dakle, vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_n \mathfrak{M}', w'$. ■

Sada želimo pokazati da obrat te propozicije općenito ne vrijedi, tj. da postoje dva Verbruggeina modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te njihovi svjetovi $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ koji su n-w-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$, ali nisu w-bisimulirani. Kako po teoremu 3.3.8. imamo dva Verbruggeina modela

Ver $\mathfrak{N}_1$ i *Ver* $\mathfrak{N}_2$ te njihova dva svijeta $w_1 \in Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $w_2 \in \mathfrak{N}_2$ koji nisu w-bisimulirani, preostaje za navedeni rezultat pokazati da ti svjetovi w_1 i w_2 jesu n-w-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokaz sljedeće propozicije sličan je dokazu propozicije 2.5.2. za bisimulacije i n-bisimulacije, uz razliku što sada koristimo prethodno dokazane tvrdnje za w-bisimulacije i n-w-bisimulacije.

Propozicija 3.4.2. Neka su $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ Veltmanovi modeli te w_1 i w_2 njihovi svjetovi iz iskaza teorema 2.4.2. Tada za te svjetove w_1 i w_2 u modelima *Ver* $\mathfrak{N}_1$ i *Ver* $\mathfrak{N}_2$ (tj. u Verbruggeinim modelima pridruženim Veltmanovim modelima $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$) vrijedi da su oni n-w-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$, ali nisu w-bisimulirani.

Dokaz. Prisjetimo se da smo definirali Veltmanov model $\mathfrak{N}_1$ kao *Vel* $\mathfrak{G}_1$, a Veltmanov model $\mathfrak{N}_2$ kao *Vel* $(\mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2)$, gdje su $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2$ GL-modeli definirani u [7] i prikazani na slici 2.9. U [7] je kao korolar 15. istaknuto da svjetovi w_1 u $\mathfrak{G}_1$ i w_2 u $\mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2$ jesu n-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$ (kao svjetovi GL-modela). Kako su svjetovi w_1 i w_2 n-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$ kao svjetovi GL-modela $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2$, slijedi da su posebno i $2n$-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$. U [7] kao propozicija 18. istaknut je sljedeći rezultat:

> Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka su $\mathfrak{G}$ i $\mathfrak{G}'$ dva GL-modela te neka su $w \in \mathfrak{G}$ i $w' \in \mathfrak{G}'$ dva proizvoljna svijeta. Ako vrijedi da su svjetovi w i w' $2n$-bisimulirani kao svjetovi GL-modela, tada svjetovi w i w' jesu n-bisimulirani kao svjetovi Veltmanovih modela *Vel* $\mathfrak{G}$ i *Vel* $\mathfrak{G}'$.

To povlači da svjetovi w_1 i w_2 jesu n-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$ kao svjetovi Veltmanovih modela $\mathfrak{N}_1 = Vel\ \mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{N}_2 = Vel\ \mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2$. Prema teoremu 2.4.8. vrijedi da svjetovi w_1 i w_2 jesu n-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$ kao svjetovi Verburggeinih modela *Ver* $\mathfrak{N}_1$ i *Ver* $\mathfrak{N}_2$. Sada propozicija 3.3.4. povlači da svjetovi w_1 i w_2 jesu n-w-bisimulirani za svaki $n \in \mathbb{N}$ kao svjetovi Verbruggeinih modela *Ver* $\mathfrak{N}_1$ i *Ver* $\mathfrak{N}_2$, što smo i željeli pokazati. ■

U propoziciji 3.2.1. pokazali smo da je kompozicija w-bisimulacija ponovo w-bisimulacija. U sljedećoj propoziciji ističemo sličan rezultat u slučaju konačnih w-bisimulacija.

Propozicija 3.4.3. Neka su $l, k \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $l \leq k$. Neka su $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ Verbruggeini modeli i neka su $w \in \mathfrak{M}$, $w' \in \mathfrak{M}'$ i $w'' \in \mathfrak{M}''$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}', w'$ i $\mathfrak{M}', w' \underline{\leftrightsquigarrow}_k \mathfrak{M}'', w''$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}'', w''$. Posebno $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$ i $\mathfrak{M}', w' \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}'', w''$ povlači $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}'', w''$.

Dokaz. Iz $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}', w'$ slijedi da postoji l-w-bisimulacija $Z_l \subseteq \ldots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$ takva da vrijedi $(w, w') \in Z_l$. Slično iz $\mathfrak{M}', w' \underline{\leftrightsquigarrow}_k \mathfrak{M}'', w''$ slijedi da postoji k-w-bisimulacija $Z'_k \subseteq \ldots \subseteq Z'_1 \subseteq Z'_0 \subseteq W' \times W''$ takva da vrijedi $(w', w'') \in Z'_k$. Za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, l\}$ definiramo relaciju $Z''_i \subseteq W \times W''$ kao relaciju $Z_i \circ Z'_i$. Tvrdimo da je niz relacija $Z''_0, \ldots, Z''_{l-1}, Z''_l \subseteq W \times W''$ jedna l-w-bisimulacija za koju vrijedi $(w, w'') \in Z''_l$. Iz toga će slijediti $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}'', w''$.

Iz $l \leq k$ slijedi $(w', w'') \in Z'_k \subseteq Z'_l$, pa iz toga i $(w, w') \in Z_l$ slijedi $(w, w'') \in Z_l \circ Z'_l = Z''_l$.

Pokažimo da vrijedi $Z''_l \subseteq \ldots \subseteq Z''_1 \subseteq Z''_0$. Neka je $i \in \{1, 2, \ldots, l''\}$ proizvoljan te neka vrijedi $(v, v'') \in Z''_i$. Tada prema definiciji relacije Z''_i postoji svijet $v' \in W'$ za koji vrijedi vZ_iv' i $v'Z'_iv''$. Iz $Z_i \subseteq Z_{i-1}$ i $Z'_i \subseteq Z'_{i-1}$ slijedi $vZ_{i-1}v'$ i $v'Z'_{i-1}v''$, što prema definiciji relacije Z''_{i-1} povlači $(v, v'') \in Z''_{i-1}$. Dakle, vrijedi $Z''_i \subseteq Z''_{i-1}$.

Preostaje pokazati da niz relacija $Z''_l \subseteq \ldots \subseteq Z''_1 \subseteq Z''_0$ zadovoljava uvjete (at), (l-w-forth) i (l-w-back) iz definicije 3.3.1. Neka je $(v, v'') \in Z''_0$ te $p \in Prop$ proizvoljna propozicionalna varijabla. Iz $(v, v'') \in Z''_0$ prema definiciji relacije Z''_0 slijedi da postoji svijet $v' \in W'$ takav da vrijedi vZ_0v' i $v'Z'_0v''$. Iz uvjeta (at) za relacije Z_0 i Z'_0 slijedi

$$\mathfrak{M}, v \Vdash p \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', v' \Vdash p \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}'', v'' \Vdash p.$$

Dakle, vrijedi uvjet (at).

Pokažimo još da vrijedi uvjet (l-w-forth). Uvjet (l-w-back) pokazuje se analogno. Neka je $i \in \{1, \ldots, l\}$, $(v, v'') \in Z''_i$ te $u \in W$ proizvoljan svijet takav da vrijedi vRu. Iz $(v, v'') \in Z''_i$ prema definiciji relacije Z''_i slijedi da postoji svijet $v' \in W'$ takav da vrijedi vZ_iv' i $v'Z'_iv''$. Iz vZ_iv', vRu te svojstva (l-w-forth) za relaciju Z_i slijedi da postoji neprazan skup $U' \subseteq R'[v']$ takav da vrijedi sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{za svaki svijet } u' \in U' \text{ vrijedi } uZ_{i-1}u' \\
\text{i za svaku funkciju } V' : U' \to \mathscr{P}(W') \text{ takvu da za svaki svijet} \\
u' \in U' \text{ vrijedi } u'S'_{v'}V'(u') \\
\text{postoji skup } V \subseteq W \text{ takav da vrijedi } uS_vV \\
\text{i za svaki svijet } x \in V \text{ postoji svijet } x' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u') \\
\text{tako da vrijedi } xZ_{i-1}x'.
\end{array}\right\} \tag{3.10}$$

Sada primijenimo svojstvo (l-w-forth) relacije Z'_i za svaki svijet $u' \in U'$. Neka je $u' \in U'$ proizvoljan svijet. Budući da je $U' \subseteq R'[v']$ tada posebno vrijedi $v'R'u'$. Sada primjenom svojstva

(l-w-forth) relacije Z'_i dobivamo da postoji neprazan skup $U''_{u'} \subseteq R''[v'']$ tako da vrijedi sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l} \text{za svaki svijet } u'' \in U''_{u'} \text{ vrijedi } u'Z'_{i-1}u'' \\ \text{i za svaku funkciju } V''_{u'} : U''_{u'} \to \mathscr{P}(W'') \text{ takvu da za svaki svijet} \\ u'' \in U''_{u'} \text{ vrijedi } u''S''_{v''}V''_{u'}(u'') \\ \text{postoji skup } V'_{u'} \subseteq W' \text{ takav da vrijedi } u'S'_{v'}V'_{u'} \\ \text{i za svaki svijet } x' \in V'_{u'} \text{ postoji svijet } x'' \in \bigcup_{u'' \in U''_{u'}} V''_{u'}(u'') \\ \text{tako da vrijedi } x'Z'_{i-1}x''. \end{array}\right\} \tag{3.11}$$

Definirajmo skup $U'' = \bigcup_{u' \in U'} U''_{u'}$. Očito je skup U'' neprazan.

Neka je $u'' \in U''$ proizvoljan svijet. Tada postoji $u' \in U'$ tako da vrijedi $u'' \in U''_{u'}$. Iz tvrdnje (3.11) slijedi $u'Z'_{i-1}u''$ a iz tvrdnje (3.10) slijedi $uZ_{i-1}u'$. Dakle, za svaki svijet $u'' \in U''$ vrijedi $(u,u'') \in Z_{i-1} \circ Z'_{i-1}$, tj. $(u,u'') \in Z''_{i-1}$.

Neka je $V'' : U'' \to \mathscr{P}(W'')$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u'' \in U''$ vrijedi $u''S''_{v''}V''(u'')$. Tvrdimo da postoji skup svjetova $V \subseteq R[w]$ tako da imamo uS_vV i tako da za svaki svijet $x \in V$ postoji svijet $x'' \in \bigcup_{u'' \in U''} V''(u'')$ za koji vrijedi $xZ''_{i-1}x''$.

Za svaki svijet $u' \in U'$ sa $V''_{(u')}$ označimo restrikciju funkcije V'' na skup $U''_{u'}$. Neka je $u' \in U'$ proizvoljan svijet. Očito za funkciju $V'_{(u')} : U''_{u'} \to \mathscr{P}(W'')$ vrijedi da za svaki svijet $u'' \in U''_{u'}$ imamo $u''S''_{v''}V''_{(u')}(u'')$. Iz tvrdnje (3.11) slijedi da postoji skup $V'_{u'} \subseteq W'$ takav da vrijedi $u'S'_{v'}V'_{u'}$ te još vrijedi sljedeće:

$$\left.\begin{array}{l} \text{za svaki svijet } x' \in V'_{u'} \text{ postoji svijet } x'' \in \bigcup_{u'' \in U''_{u'}} V''_{(u')}(u'') \\ \text{tako da vrijedi } x'Z'_{i-1}x''. \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

Neka je za svaki svijet $u' \in U'$ izabran po jedan skup $V'_{u'}$. Neka je funkcija $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ definirana sa $V'(u') = V'_{u'}$. Primijetimo da tada za svaki $u' \in U'$ vrijedi $u'S'_{v'}V'(u')$. Iz tvrdnje (3.10) slijedi da postoji skup $V \subseteq W$ tako da vrijedi uS_vV i za svaki svijet $x \in V$ postoji svijet $x' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ tako da vrijedi $xZ_{i-1}x'$.

Dokažimo sada da za svaki svijet $x \in V$ postoji svijet $x'' \in \bigcup_{u'' \in U''} V''(u'')$ za koji vrijedi $(x,x'') \in Z''_{i-1}$, tj. $(x,x'') \in Z_{i-1} \circ Z'_{i-1}$. Neka je $x \in V$ proizvoljan svijet. Iz prethodno dokazanog slijedi da postoji svijet $x' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$ tako da vrijedi $xZ_{i-1}x'$. Tada postoji svijet $u' \in U'$ tako da vrijedi $x' \in V'(u')$. Budući da imamo $V'(u') = V'_{u'}$ tada iz tvrdnje (3.12) slijedi da postoji svijet $x'' \in \bigcup_{u'' \in U''_{u'}} V''_{(u')}(u'')$ tako da vrijedi $x'Z'_{i-1}x''$. Budući da očito vrijedi $U''_{u'} \subseteq U''$ tada imamo:

$$\bigcup_{u'' \in U''_{u'}} V''_{(u')}(u'') \subseteq \bigcup_{u'' \in U''} V''_{(u')}(u''),$$

a onda i

$$x'' \in \bigcup_{u'' \in U''} V''_{(u')}(u'').$$

Budući da je $V''_{(u')}$ restrikcija funkcije V'' tada vrijedi i sljedeće:

$$x'' \in \bigcup_{u'' \in U''} V''(u'').$$

Preostaje još samo primijetiti da činjenice $xZ_{i-1}x'$ i $x'Z'_{i-1}x''$ povlače $xZ''_{i-1}x''$.

Za dokaz druge tvrdnje iz iskaza ove propozicije pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$ i $\mathfrak{M}', w' \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}'', w''$. Iz $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$ prema propoziciji 3.4.1. slijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}', w'$. Prema prvom dijelu ove propozicije iz $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}', w'$ i $\mathfrak{M}', w' \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}'', w''$ slijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_l \mathfrak{M}'', w''$. ■

3.5. (KONAČNE) W-BISIMULACIJSKE IGRE ZA VERBRUGGEINU SEMANTIKU

U definiciji 2.3.1. definirali smo bisimulacijske igre za Verbruggeine modele (odnosno konačne bisimulacijske igre u definiciji 2.3.3.) te smo u propoziciji 2.3.6. dokazali da svaka bisimulacijska igra završava uvijek u konačno mnogo rundi. Zatim smo u propoziciji 2.3.7. dokazali vezu između postojanja pobjedničke strategije za branitelja u odgovarajućoj n-bisimulacijskoj igri i n-bisimuliranosti (odnosno, odgovarajućoj bisimulacijskoj igri i bisimuliranosti u propoziciji 2.3.8.). U ovoj točki definiramo novi pojam bisimulacijske igre između Verbruggeinih modela (nazivamo ih w-bisimulacijske igre). Definicija tog novog pojma usklađena je s novom definicijom w-bisimulacije, u smislu da imamo ekvivalenciju između postojanja pobjedničke strategije za branitelja u odgovarajućoj (n-)w-bisimulacijskoj igri i (n-)w-bisimuliranosti. To ćemo dokazati u propoziciji 3.5.4.

Prvo definiramo pojam w-bisimulacijske igre.

Definicija 3.5.1. Neka su $\mathfrak{M}_i = \big(W_i, R_i, \{S_w^{(i)} : w \in W_i\}, \Vdash\big)$, $i \in \{0,1\}$, dva Verbruggeina modela. Jednu **w-bisimulacijsku igru** igraju dva igrača: izazivač i branitelj. Igra se odvija u nizu uzastopnih rundi kojima se iz jedne konfiguracije prelazi u drugu.

Konfiguracija je uređena četvorka $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$, pri čemu je $w_0 \in W_0$ i $w_1 \in W_1$. Svaka runda počinje nekom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$. Odmah se provjerava da vrijedi $\mathfrak{M}_0, w_0 \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w_1$. Ako to ne vrijedi, igra završava i definiramo da je izazivač pobijedio.

Jedna runda, koja počinje s konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$, odvija se prema sljedećim pravilima:

1. Izazivač bira $i \in \{0,1\}$, tj. indeks jednog Verbruggeinog modela.
   Označimo s $j := 1 - i$ indeks drugog Verbruggeinog modela.

2. Izazivač bira svijet $u_i \in W_i$ takav da vrijedi $w_i R_i u_i$. Ukoliko takav svijet u_i ne postoji, igra završava i definiramo da branitelj pobjeđuje.

3. Branitelj bira neprazan skup svjetova $U_j \subseteq W_j$ takav da za svaki svijet $u_j \in U_j$ vrijedi $w_j R_j u_j$. Ukoliko takav skup U_j ne postoji, igra završava i definiramo da izazivač pobjeđuje.

4. Izazivač bira funkciju $V_j : U_j \to \mathscr{P}(W_j)$ tako da vrijedi $u_j S^{(j)}_{w_j} V_j(u_j)$ za svaki svijet $u_j \in U_j$.

5. Branitelj bira skup svjetova $V_i \subseteq W_i$ takav da vrijedi $u_i S^{(i)}_{w_i} V_i$.

Preostaje odabrati s kojom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$ počinje sljedeća runda. To se obavlja na sljedeći način:

(i) Izazivač bira neki svijet $u_j \in U_j$ ili neki svijet $v_i \in V_i$.

(ii) U slučaju da je izazivač izabrao svijet u_j konfiguracija kojom počinje sljedeća runda je $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1)$. Ako je pak izazivač izabrao neki svijet $v_i \in V_i$, tada branitelj bira neki svijet $v_j \in \bigcup_{u_j \in U_j} V_j(u_j)$ te je konfiguracija kojom počinje sljedeća runda $(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)$.

Primijetimo da izazivač uvijek može izabrati neku funkciju V_j (jer je svaka relacija $S^{(j)}_{w_j}$ kvazirefleksivna). Zatim, branitelj uvijek može izabrati skup svjetova V_i iz uvjeta 5. (opet zbog kvazirefleksivnosti). Primijetimo da je branitelju u cilju birati što veći skup svjetova U_j jer onda prisiljava izazivača da za svaki svijet $u_j \in U_j$ izabere po jednog $S^{(j)}_{w_j}$-sljedbenika. Branitelju to daje više šanse za dobar odgovor kod izbora konfiguracije za sljedeći potez, jer može birati element iz unije svih tih $S^{(j)}_{w_j}$-sljedbenika, a ne samo iz jednog takvog sljedbenika.

Kao što je u propoziciji 2.3.6. pokazano da svaka bisimulacijska igra na Verbruggeinim modelima završava u konačno mnogo rundi, tako se može na isti način pokazati da svaka w-bisimulacijska igra završava u konačno mnogo rundi. Naime, ključna stvar za dokaz propozicije 2.3.6. bila je inverzno dobra fundiranost relacije dostiživosti iz pripadnog Verbruggeinog modela te da su svjetovi koji čine sljedeću konfiguraciju igre dostiživi iz onih koji čine trenutnu konfiguraciju igre (što vrijedi i u slučaju w-bisimulacijskih igara).

Propozicija 3.5.2. Svaka w-bisimulacijska igra na Verbruggeinim modelima završava u konačno mnogo rundi.

Pojam konačne w-bisimulacijske (ili n-w-bisimulacijske) igre definiramo na sličan način kako je to za slučaj n-bisimulacijskih igara napravljeno u definiciji 2.3.3.

Definicija 3.5.3. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Jedna ***n*-w-igra** je svaka w-bisimulacijska igra koja završava nakon n rundi. Ako izazivač nije pobijedio u n-w-igri, tada po definiciji smatramo da je pobijedio branitelj.

Sljedeća propozicija analogna je propoziciji 2.3.7. za slučaj bisimulacijskih igara na Verbruggeinim modelima.

Propozicija 3.5.4. Neka su $\mathfrak{M}_i = \big(W_i, R_i, \{S_w^{(i)} : w \in W_i\}, \Vdash\big)$, $i \in \{0,1\}$, dva Verbruggeina modela te neka su $w_0 \in W_0$ i $w_1 \in W_1$ proizvoljni svjetovi tih modela. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(a) branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj n-w-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$

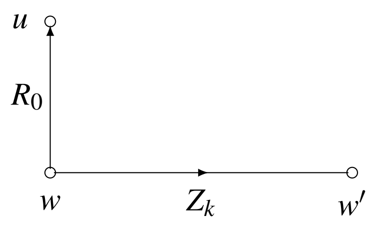
(b) $\mathfrak{M}_0, w_0 \underline{\leftrightsquigarrow}_n \mathfrak{M}_1, w_1$.

Dokaz. Dokažimo prvo da tvrdnja a) povlači tvrdnju b). Za svaki $k \leq n$ definiramo skupove Z_k ovako:

$$Z_k := \big\{(v_0, v_1) \in W_0 \times W_1 : \text{branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj} \\ k\text{-w-igri s početnom konfiguracijom}(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)\big\}.$$

Pokazujemo da je konačan niz $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ jedna n-bisimulacija takva da vrijedi $w_0 Z_n w_1$. Budući da po pretpostavci branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj n-w-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$, tada iz definicije relacije Z_n posebno slijedi $w_0 Z_n w_1$. Uočimo sada da za svaki $k < n$ vrijedi $Z_{k+1} \subseteq Z_k$, jer pobjednička strategija branitelja u $(k+1)$-w-igri s nekom početnom konfiguracijom može se primijeniti u k-w-igri s istom početnom konfiguracijom. Očito vrijedi uvjet (at) iz definicije n-w-bisimulacije, jer ako $(v_0, v_1) \in Z_0$, tada iz definicije relacije Z_0 slijedi da branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj 0-w-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)$, a to upravo znači $\mathfrak{M}_0, v_0 \equiv_0 \mathfrak{M}_1, v_1$.

Sada dokazujemo da vrijedi uvjet (n-w-forth) iz definicije n-w-bisimulacije. Sasvim analogno dokazuje se da vrijedi uvjet (n-w-back). Neka je $k \leq n$ proizvoljan. Neka su $(w, w') \in Z_k$ i $u \in W_0$ takvi da vrijedi wR_0u. Dobivena situacija prikazana je slikom 3.5.



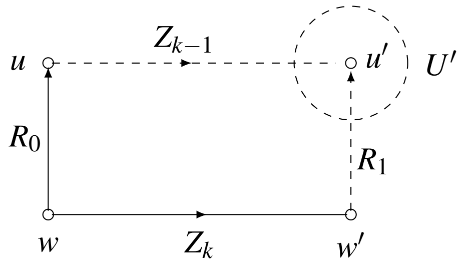
Slika 3.5

Iz pretpostavke $(w,w') \in Z_k$ i definicije relacije Z_k slijedi da branitelj ima neku pobjedničku strategiju S u svakoj k-w-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$.

Promotrimo k-w-igru s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$ u kojoj je izazivač u prvom potezu izabrao svijet $u \in W_0$. Uočimo da iz pretpostavke $(w,w') \in Z_k$ i činjenice $Z_k \subseteq Z_0$ očito slijedi $(w,w') \in Z_0$, pa vrijedi $\mathfrak{M}_0, w \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w'$.

Budući da je $k \geq 1$,[1] tada branitelj primjenjuje strategiju S te obzirom na tu strategiju bira skup svjetova $U' \subseteq W_1$ takav da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $w'R_1u'$ i $\mathfrak{M}_0, u \equiv_0 \mathfrak{M}_1, u'$. Primijetimo da su također po pretpostavci ispunjeni uvjeti 4. i 5. iz definicije k-w-igre koje ćemo koristiti u nastavku dokaza.

Primijetimo da iz $(w,w') \in Z_k$ te wR_0u i $(\forall u' \in U')w'R_1u'$ slijedi da za svaki svijet $u' \in U'$ branitelj može nastavljati primjenjivati strategiju S u svakoj $(k-1)$-w-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, u, \mathfrak{M}_1, u')$, pa za svaki svijet $u' \in U'$ imamo $(u,u') \in Z_{k-1}$. Dobivena situacija prikazana je slikom 3.6.



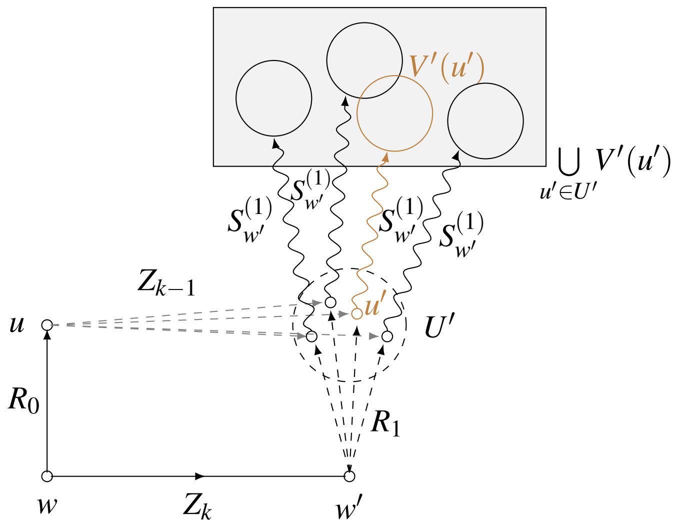
Slika 3.6

Neka je $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $u'S'_{w'}V'(u')$.

Promotrimo sada nastavak k-w-igre s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$ u kojoj je izazivač u prvom potezu izabrao svijet $u \in W_0$ (pri čemu vrijedi wR_0u). Zatim je u tom prvom potezu branitelj izabrao skup svjetova $U' \subseteq W_1$ (pri čemu vrijedi $w'R_1u'$ i $\mathfrak{M}_0, u \equiv_0 \mathfrak{M}_1, u'$ te vrijedi $(u,u') \in Z_{k-1}$, za svaki $u' \in U'$). Nakon toga je izazivač izabrao funkciju $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ takvu da za svaki $u' \in U'$ vrijedi $u'S^{(1)}_{w'}V'(u')$.

[1] Naime, izazivač je povukao već jedan potez, što bi bilo nemoguće za $k = 0$, s obzirom da u 0-w-igri nema poteza! Također, kako promatramo relaciju Z_k, mora vrijediti $k \leq n$. Dakle, sveukupno imamo $1 \leq k \leq n$.

Dobivena situacija prikazana je slikom 3.7.



Slika 3.7

Tada branitelj primijeni strategiju S koja mu omogućava da izabere skup svjetova $V \subseteq W_0$ za koji vrijedi $uS_w^{(0)}V$. Iz definicije n-w-bisimulacije slijedi da za uvjet (n-w-forth) preostaje samo pokazati da vrijedi sljedeće:

$$\text{za svaki svijet } v \in V \text{ postoji svijet } v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u') \text{ tako da vrijedi } vZ_{k-1}v'.$$

U tu svrhu razmatramo ponovo k-w-igru s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w, \mathfrak{M}_1, w')$ u kojoj su kao malo prije u prvom potezu izabrani svijet $u \in W_0$, skup svjetova $U' \subseteq W_1$, funkcija V' i skup svjetova $V \subseteq W_0$ (koji ispunjavaju uvjete iz definicije k-w-igre). Promotrimo nastavak igre u kojem je izazivač izabrao neki svijet $v \in V$. Primjenom pobjedničke strategije S branitelj može izabrati neki svijet $v' \in \bigcup_{u' \in U'} V'(u')$. Tada očito branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj $(k-1)$-w-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, v, \mathfrak{M}_1, v')$ (to je, naravno, nastavak primjene strategije S). Iz definicije relacije Z_{k-1} slijedi da vrijedi $vZ_{k-1}v'$.

Time smo dokazali da vrijedi uvjet (n-w-forth) iz definicije n-w-bisimulacije.

Dokažimo sada da tvrdnja b) povlači tvrdnju a). U tu svrhu pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}_0, w_0 \leftrightsquigarrow_n \mathfrak{M}_1, w_1$. Tada postoji konačan niz relacija $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n \subseteq W_0 \times W_1$ koji zadovoljava uvjete definicije n-w-bisimulacije. Treba pokazati da branitelj ima pobjedničku strategiju u svakoj n-w-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$.

Za početak promotrimo slučaj za $n = 0$, tj. slučaj kada se radi o 0-w-igri. Iz pretpostavke $\mathfrak{M}_0, w_0 \leftrightsquigarrow_n \mathfrak{M}_1, w_1$ korištenjem uvjeta (at) slijedi $\mathfrak{M}_0, w_0 \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w_1$. Dakle, branitelj ima pobjedničku strategiju u 0-w-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$.

Promotrimo sada n-w-igru, pri čemu je $n > 0$. Iz pretpostavke $\mathfrak{M}_0, w_0 \leftrightsquigarrow_n \mathfrak{M}_1, w_1$ slijedi posebno $w_0 Z_n w_1$. Kako je $n > 0$, izazivač u prvoj rundi te n-w-igre bira neki model $\mathfrak{M}_i$ ($i \in \{0,1\}$). Zatim, izazivač bira svijet $u_i \in W_i$ takav da vrijedi $w_i R_i u_i$. Opisat ćemo strategiju branitelja u toj 1. rundi. Na kraju će biti jasno da je time opisana strategija branitelja kada se iz neke k. runde prelazi u $(k+1)$. rundu.

Promotrimo kako se odvija ta prva runda nakon što je izazivač odabrao model $\mathfrak{M}_i$, za neki $i \in \{0,1\}$ te je izabrao svijet $u_i \in W_i$ takav da vrijedi $w_i R_i u_i$. U ostatku ovog dokaza neka je $j = 1 - i$. Ako je $i = 0$ tada prema (n-w-forth) svojstvu, odnosno ako je $i = 1$ tada prema (n-w-back) svojstvu, iz činjenice $w_0 Z_n w_1$ slijedi da postoji neprazan skup svjetova $U_j \subseteq W_j$ takav da za svaki svijet $u_j \in U_j$ vrijedi $w_j R_j u_j$ te $u_0 Z_{n-1} u_1$. Nadalje, za taj skup svjetova U_j i za svaku funkciju $V_j : U_j \to \mathscr{P}(W_j)$ takvu da za sve $u_j \in U_j$ vrijedi $u_j S^{(j)}_{w_j} V_j(u_j)$, postoji skup svjetova V_i takav da vrijedi $u_i S^{(i)}_{w_i} V_i$ i za svaki svijet $v_i \in V_i$ postoji svijet $v_j \in \bigcup_{u_j \in U_j} V_j(u_j)$ tako da vrijedi $v_i Z_{n-1} v_j$. Dakle, kako ovdje branitelj ne bi izgubio (prema definiciji n-w-igre), može izabrati upravo taj skup svjetova U_j.

Pretpostavimo da sada izazivač izabere neku funkciju $V_j : U_j \to \mathscr{P}(W_j)$ takvu da za svaki svijet $u_j \in U_j$ vrijedi $u_j S^{(j)}_{w_j} V_j(u_j)$. Sada, prema svojstvu ($n$-w-forth) (ako je $i = 0$), odnosno iz svojstva (n-w-back) (ako je $i = 1$), branitelj može izabrati skup svjetova $V_i \subseteq W_i$ takav da vrijedi $u_i S^{(i)}_{w_i} V_i$ i

$$\text{za svaki svijet } v_i \in V_i \text{ postoji svijet } v_j \in \bigcup_{u_j \in U_j} V_j(u_j) \text{ tako da vrijedi } v_0 Z_{n-1} v_1. \tag{3.13}$$

Promotrimo sada sve slučajeve mogućih konfiguracija $(\mathfrak{M}_0, w_0', \mathfrak{M}_1, w_1')$ kojima bi mogla početi sljedeća runda. Iz definicije n-w-bisimulacije slijedi da su moguće sljedeće dvije situacije:

(a) izazivač je odabrao neki svijet $u_j \in U_j$. Dakle, $w_0' = u_0$ te $w_1' = u_1$. (Prisjetimo se još da vrijedi $u_0 Z_{n-1} u_1$, tj. $w_0' Z_{n-1} w_1'$.)

(b) izazivač je odabrao neki svijet $v_i \in V_i$. Tada prema tvrdnji označenoj s (3.13) branitelj može izabrati neki svijet $v_j \in \bigcup_{u_j \in U_j} V_j(u_j)$ takav da vrijedi $v_0 Z_{n-1} v_j$. Dakle, $w_0' = v_0$ te $w_1' = v_j$, pri čemu vrijedi $v_0 \in V_0$ i $v_j \in V_1$ te ponovno imamo $v_0 Z_{n-1} v_1$, tj. $w_0' Z_{n-1} w_1'$.

Uočimo da u oba slučaja vrijedi $w_0' Z_{n-1} w_1'$, a onda zbog $Z_{n-1} \subseteq Z_0$ slijedi posebno $\mathfrak{M}_0, w_0' \equiv_0 \mathfrak{M}_1, w_1'$. Time imamo da izazivač ni ovdje ne pobjeđuje (ili drugim riječima, branitelj ne gubi).

Istim načinom pokazuje se da ako branitelj nije izgubio u k-toj rundi, za neki $k < n$, da tada neće izgubiti ni u $(k+1)$. rundi. Dakle, opisana strategija je pobjednička strategija branitelja u ovoj n-w-igri.

■

Prethodnu propoziciju 3.5.4. koristit ćemo, primjerice, u dokazu teorema 3.6.2. kako bi n-w-bisimuliranost dvaju svjetova Verbruggeinih modela pokazali opisivanjem pobjedničke strategije branitelja u n-w-bisimulacijskoj igri s početnom konfiguracijom koja se sastoji od tih svjetova (za koje pokazujemo n-w-bisimuliranost).

3.6. OBRAT U SLUČAJU KONAČNOG SKUPA VARIJABLI

U teoremu 3.3.6. pokazali smo da w-bisimuliranost povlači modalnu ekvivalentnost. Obrat ne vrijedi: općenito modalno ekvivalentni svjetovi Verbruggeinih modela ne moraju biti w-bisimulirani. No, možemo zahtijevati dodatne uvjete pod kojima će taj obrat vrijediti. Primjerice, u propoziciji 2.6.1 iskazali smo rezultat iz članka [53] da, iako općenito modalna ekvivalencija ne povlači bisimuliranost, možemo dobiti obrat ako su Verbruggeini modeli koje promatramo slikovno konačni. Analogan rezultat dobivamo kao izravnu posljedicu već dobivenih rezultata. Naime, ako su dva svijeta iz slikovno konačnih Verbruggeinih modela modalno ekvivalentna, tada su prema propoziciji 2.6.1. bisimulirani, a onda i prema lemi 3.3.3. w-bisimulirani (također iz dokaza tih tvrdnju proizlazi da je tražena relacija w-bisimulacije u kojoj bi se nalazili ti svjetovi upravo relacija modalne ekvivalencije).

Korolar 3.6.1. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva slikovno konačna Verbruggeina modela. Tada je relacija modalne ekvivalencije, tj. relacija $\equiv$, jedna w-bisimulacija.

U primjeru 2.6.2. definirali smo dva Verbruggeina modela te smo zatim za dva svijeta tih modela pokazali (u lemama 2.6.3. i 2.6.5.) da su oni modalno ekvivalentni, ali ne i bisimulirani (preciznije da nisu 1-bisimulirani, iz čega onda slijedi da niti ne mogu biti bisimulirani). Kako je pritom skup propozicionalnih varijabli koji smo promatrali bio konačan, dobili smo da čak niti u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli modalna ekvivalentnost ne povlači bisimuliranost.

Sada ćemo pokazati glavnu prednost w-bisimulacija: n-modalna ekvivalentnost povlači n-w-bisimuliranost, pod uvjetom da imamo samo konačno mnogo propozicionalnih varijabli. Naime, sada se može provesti dokaz analogan onom 2. tvrdnje Leme 3.1. iz [39], kod kojeg više ne dolazi do greške koju smo opisali u tekstu prije primjera 2.6.2. Podsjetimo, ideja je pokazati da je niz relacija $\equiv_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, jedna n-w-bisimulacija. Promotrimo uvjet (n-w-forth). Neka je $0 < i \leqslant n$ i neka je $w \equiv_i w'$. Pretpostavimo da uvjet (n-w-forth) ne vrijedi, tj. da postoji svijet u tako da vrijedi wRu i za sve neprazne skupove $U' \subseteq W'$ takve da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $w'R'u'$ i $u \equiv_{i-1} u'$ postoji funkcija $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ takva da je $u'S'_{w'}V'(u')$ za svaki svijet $u' \in U'$ tako da za svaki skup V takav da je uS_wV postoji svijet $v \in V$ koji nije $(n-1)$-modalno ekvivalentan ni s kim iz $\bigcup_{u' \in U'} V'(u')$. Posebno, ta tvrdnja vrijedi ako za U' uzmemo skup svih svjetova u' takvih da je $w'R'u'$ i $u \equiv_{i-1} u'$.

Sada možemo uzeti po jedan takav svijet v za sve takve skupove V i s B_V označiti konjunkciju svih (do na ekvivalenciju) formula dubine do $i-1$ istinitih u svijetu v, a s B konjunkciju negacija svih takvih B_V. Kako sada konstrukcija više ne ovisi o izboru svijeta u', sada vrijedi $w' \Vdash A \rhd B$, gdje je A konjunkcija svih (do na ekvivalenciju) formula dubine do $i-1$ istinitih u svijetu u te se dokaz može nastaviti na isti način kao u [39]. Ostale detalje dokaza ispuštamo - mi ćemo istu tvrdnju dokazati na drugi način: pomoću w-bisimulacijskih igara.

Teorem 3.6.2. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Verbruggeini modeli te neka je skup propozicionalnih varijabli $Prop$ konačan. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve svjetove $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ vrijedi da $w \equiv_n w'$ povlači $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_n \mathfrak{M}', w'$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 0$ očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki $k \leqslant n$ i dokažimo je za $n+1$.

Za svijet x bilo kojeg Verbruggeinog modela i za $k \in \mathbb{N}$ sa χ_x^k označimo konjunkciju svih IL-formula dubine najviše k koje su istinite na svijetu x te su međusobno IL-neekvivalentne (takvih je prema propoziciji 1.4.5. samo konačno mnogo). Naravno, uvijek vrijedi $x \Vdash \chi_x^k$.

Neka su $w \in W$ i $w' \in W'$ neki $(n+1)$-modalno ekvivalentni svjetovi. Iz propozicije 3.5.4. slijedi da je dovoljno dokazati da u svakoj $(n+1)$-w-igri s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}, w, \mathfrak{M}', w')$ branitelj ima pobjedničku strategiju.

Pretpostavimo da izazivač na početku prvog poteza izabere model $\mathfrak{M}$ i svijet $u \in W$ takav da vrijedi wRu (tvrdnja se dokazuje sasvim analogno ako izazivač izabere model $\mathfrak{M}'$). Uočimo da vrijedi $w \Vdash \Diamond\chi_u^n$. Očito je formula $\Diamond\chi_u^n$ dubine najviše $n+1$, pa iz pretpostavke slijedi $w' \Vdash \Diamond\chi_u^n$. Branitelj tada treba izabrati skup $U' = \{u' \in W' : w'R'u' \text{ i } u' \Vdash \chi_u^n\}$. Taj skup je neprazan zbog $w' \Vdash \Diamond\chi_u^n$. Sada izazivač mora za svaki svijet $u' \in U'$ izabrati po jedan skup svjetova $V'(u') \subseteq R'[w']$ takav da vrijedi $u'S'_{w'}V'(u')$. Treba dokazati da za svaki takav izbor izazivača branitelj ima odgovor koji ga vodi do pobjede. Najprije uočimo da za bilo koji odgovor branitelj ima strategiju za ostatak igre ako izazivač odluči nastaviti igru s konfiguracijom $(\mathfrak{M}, u, \mathfrak{M}', u')$ za neki $u' \in U'$. Naime, iz $u' \Vdash \chi_u^n$ slijedi da su svjetovi u i u' n-modalno ekvivalentni, pa tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije.

Preostaje razmotriti slučaj u kojem nakon odgovora branitelja, odnosno izbora skupa $V \subseteq R[w]$ takvog da vrijedi uS_wV, izazivač za sljedeću konfiguraciju bira neki svijet $v \in V$. Želimo dokazati da postoji izbor skupa V takav da za svaki izbor svijeta $v \in V$ postoji odgovor branitelja koji osigurava pobjedničku strategiju za ostatak igre.

U daljnjem tekstu sa C ćemo označavati skup $\bigcup_{u' \in U'} V'(u')$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaki skup svjetova $V \subseteq R[w]$ takav da vrijedi uS_wV postoji svijet $v \in V$ koji nije n-modalno ekvivalentan ni s jednim svijetom iz skupa C. To znači da za svaki skup $V \subseteq R[w]$ takav da uS_wV postoji svijet $v \in V$ tako da za svaki svijet $x' \in C$ imamo $v \nVdash \chi^n_{x'}$. Iz toga onda slijedi da za svaki skup $V \subseteq R[w]$ takav da uS_wV imamo $V \nVdash \bigvee_{x' \in C} \chi^n_{x'}$. Budući da vrijedi wRu i $u \Vdash \chi^n_u$ tada $w \nVdash \chi^n_u \rhd \bigvee_{x' \in C} \chi^n_{x'}$, tj. $w \Vdash \neg(\chi^n_u \rhd \bigvee_{x' \in C} \chi^n_{x'})$. Ova posljednja formula je dubine najviše $n+1$, pa iz pretpostavke teorema slijedi $w' \Vdash \neg(\chi^n_u \rhd \bigvee_{x' \in C} \chi^n_{x'})$. Iz toga slijedi da postoji svijet $u' \in R'[w']$ tako da $u' \Vdash \chi^n_u$ i za svaki skup svjetova $V' \subseteq R'[w']$ takav da je $u'S'_{w'}V'$ postoji svijet $v' \in V'$ tako da vrijedi $v' \Vdash \neg \bigvee_{x' \in C} \chi^n_{x'}$. Posebno, postoji svijet $v' \in V'(u')$ tako da vrijedi $v' \Vdash \neg \bigvee_{x' \in C} \chi^n_{x'}$, što je kontradikcija jer vrijedi $v' \Vdash' \chi^n_{v'}$ i $v' \in C$.

Dakle, postoji dobar izbor skupa V nakon kojeg za svaki izbor svijet $v \in V$ branitelj može izabrati svijet $v' \in C$ tako da za konfiguraciju $(\mathfrak{M}, v, \mathfrak{M}', v')$ ima pobjedničku strategiju za preostalih n poteza. ∎

Napomena 3.6.3. Čak i u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli općenito $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$ ne povlači $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$. Za protuprimjer koristimo dva Verbruggeina modela koje smo već razmatrali.

U teoremu 3.3.8. istaknuli smo dva Verbruggeina modela $Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $Ver\ \mathfrak{N}_2$ s pripadnim svjetovima w_1 i w_2 koji su modalno ekvivalentni, ali nisu w-bisimulirani. Pritom su ti modeli zapravo Verbruggeini modeli pridruženi Veltmanovim modelima $\mathfrak{N}_1 = Vel\ \mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{N}_2 = Vel\ (\mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2)$ iz iskaza teorema 2.4.2. Kako operacije pridruživanja modela Vel i Ver ne mijenjaju valuaciju modela od kojeg se polazi, slijedi da je valuacija u Verbruggeinim modelima $Ver\ \mathfrak{N}_1 = Ver(Vel\ \mathfrak{G}_1)$ i $Ver\ \mathfrak{N}_2 = Ver(Vel(\mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2))$ ista kao u modelima $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_1 \dotplus \mathfrak{G}_2$, dakle trivijalna (tj. $V = V' = \emptyset$). Stoga čak i u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli ostaje isti rezultat: svjetovi modela $Ver\ \mathfrak{N}_1$ i $Ver\ \mathfrak{N}_2$ su modalno ekvivalentni, ali nisu w-bisimulirani.

4. STANDARDNA TRANSLACIJA

U ovom poglavlju želimo pokazati da se logika interpretabilnosti s Verbruggeinom semantikom zapravo može promatrati kao određeni fragment logike prvog reda. Preciznije, definirat ćemo signaturu σ jezika dvosortne logike prvog reda i standardnu translaciju koja će IL-formule preslikati u σ-formule. Dvosortne logike prvog reda korištene su za translacije raznih modalnih logika (a u svrhu dokazivanja odgovarajućeg analogona van Benthemovog teorema za te logike) - primjerice, može se vidjeti njihova upotreba u [16] i [14].

4.1. DVOSORTNA LOGIKA PRVOG REDA

Dvije sorte jezika dvosortne logike označavamo s $\mathfrak{w}$ (*worlds*) i $\mathfrak{s}$ (*sets of worlds*). Intendirane interpretacije terma pojedine sorte su: term sorte $\mathfrak{w}$ predstavlja svijet nekog modela, dok term sorte $\mathfrak{s}$ predstavlja skup svjetova nekog modela. Kako ne bi morali ekplicitno naglašavati sortu pojedine varijable, koristimo sljedeću konvenciju: s $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ označavamo varijable sorte $\mathfrak{w}$, a s $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \ldots$ označavamo varijable sorte $\mathfrak{s}$.

Definicija 4.1.1. Neka je *Prop* skup propozicionalnih varijabli. Definiramo dvosortnu logiku prvog reda čija se signatura σ sastoji od:

(i) po jednog unarnog relacijskog simbola P za svaku propozicionalnu varijablu $p \in Prop$

(ii) binarnih relacijskih simbola R, $\in$ i $=$

(iii) ternarnog relacijskog simbola S.

Za konačan skup propozicionalnih varijabli *Prop* na ovaj smo način u signaturu σ dodali konačno mnogo unarnih relacijskih simbola (pa je dobivena signatura σ konačna). U daljnjem tekstu ćemo za zadani skup *Prop* reći da je signatura σ pridružena tom skupu *Prop*.

Definicija 4.1.2. σ-formula zadana je sljedećom formalnom gramatikom:

$$\varphi \to Px \mid \bot \mid xRy \mid x \in X \mid x = y \mid X = Y \mid S(x,y,X) \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\exists x\varphi) \mid (\exists X\varphi),$$

pri čemu su x i y varijable sorte $\mathfrak{w}$ te su X i Y varijable sorte $\mathfrak{s}$.

Formule dvosortne logike ćemo označavati s φ, ψ, φ_1, ... kako bi ih lakše razlikovali od IL-formula (koje označavamo s $A,B,F,G,F_1,\ldots$). Ostale logičke veznike i kvantifikator $\forall$ promatramo kao standardne pokrate.

σ-formule interpretiramo u **σ-strukturama** - uređenim trojkama $\mathfrak{N} = (M^{\mathfrak{w}}, M^{\mathfrak{s}}, \phi)$, gdje su $M^{\mathfrak{w}}$ i $M^{\mathfrak{s}}$ neprazni skupovi, a ϕ preslikavanje sa skupa nelogičkih simbola σ koje ima sljedeća svojstva:

(i) svakom unarnom relacijskom simbolu P preslikavanje ϕ pridružuje neki podskup skupa $M^{\mathfrak{w}}$, tj. vrijedi $\phi(P) \subseteq M^{\mathfrak{w}}$

(ii) relacijskom simbolu R pridružuje binarnu relaciju $\phi(R)$ na $M^{\mathfrak{w}}$, tj. vrijedi $\phi(R) \subseteq M^{\mathfrak{w}} \times M^{\mathfrak{w}}$

(iii) relacijskom simbolu S pridružuje ternarnu relaciju $\phi(S) \subseteq M^{\mathfrak{w}} \times M^{\mathfrak{w}} \times M^{\mathfrak{s}}$.

Interpretacija simbola = je standardna (jednakost), tj. promatramo samo normalne strukture. Na isti način, interpretacija relacijskog simbola $\in$ u daljnjem izlaganju je također standardna. Umjesto $\phi(R)$ pisat ćemo samo R, kao i za relaciju dostiživosti u Verbruggeinim modelima - iz konteksta će biti jasno na što se R odnosi. Za danu σ-strukturu $\mathfrak{N}$ svaku funkciju sa skupa varijabli koja svakoj varijabli sorte $\mathfrak{w}$ pridružuje element skupa $D^{\mathfrak{w}}$, a svakoj varijabli sorte $\mathfrak{s}$ pridružuje element skupa $D^{\mathfrak{s}}$, nazivamo valuacijom. Jedna σ-interpretacija, ili kratko interpretacija, je uređeni par σ-strukture $\mathfrak{N}$ i proizvoljne valuacije v na $\mathfrak{N}$. Tada se istinitost σ-formule φ za danu interpretaciju $(\mathfrak{N}, v)$, u oznaci $\mathfrak{N} \vDash_v \varphi$, definira prirodno. Istaknimo samo značenje nekih oznaka. Za interpretaciju $(\mathfrak{N}, v)$ i formulu φ posebno ističemo sljedeće:

(i) ukoliko je x slobodna varijabla u formuli φ tada pišemo $\mathfrak{N} \vDash \varphi[w]$ ako je formula φ istinita za strukturu $\mathfrak{N}$ kada varijablu x valuiramo s $w \in S^{\mathfrak{w}}$

(ii) ako je X slobodna varijabla u formuli φ taa pišemo $\mathfrak{N} \vDash \varphi[V]$ ako je formula φ istinita za strukturu $\mathfrak{N}$ kada varijablu X valuiramo s $V \in S^{\mathfrak{s}}$.

Svaki Verbruggein model $\mathfrak{M}$ možemo promatrati kao σ-strukturu $\mathfrak{N} = (M^{\mathfrak{w}}, M^{\mathfrak{s}}, \phi)$, gdje redom definiramo sljedeće:

(i) $M^{\mathfrak{w}} = W$

(ii) $M^{\mathfrak{s}} = \mathscr{P}(W)$

(iii) $\phi(R) = R$

(iv) $(w, u, V) \in \phi(S)$ ako i samo uS_wV, za sve $w, u \in W$ i $V \subseteq W$

(v) $\phi(P) = \{w \in W : \mathfrak{M}, w \Vdash p\}$, za svaki unarni relacijski simbol P.

4.2. Definicija standardne translacije

Sada dajemo rekurzivnu definiciju standardne translacije - preslikavanja koje svakoj IL-formuli pridružuje σ-formulu.

Definicija 4.2.1. Neka je x varijabla sorte $\mathfrak{w}$. **Standardnu translaciju** ST_x definiramo ovako:

$$\begin{aligned}
ST_x(p) &= P(x), \quad \text{za svaku propozicionalnu varijablu } p \in Prop \\
ST_x(\bot) &= \bot \\
ST_x(\neg A) &= \neg ST_x(A) \\
ST_x(A \wedge B) &= ST_x(A) \wedge ST_x(B) \\
ST_x(A \rhd B) &= \forall y((Rxy \wedge ST_y(A)) \to \exists X(S(x,y,X) \wedge \forall z(z \in X \to ST_z(B)))),
\end{aligned}$$

pri čemu su y i z varijable sorte $\mathfrak{w}$ koje još nisu bile korištene u translaciji.

U sljedećoj propoziciji dokazujemo osnovno svojstvo standardne translacije.

Propozicija 4.2.2. Neka je A modalna formula, $\mathfrak{M}$ Verbruggein model i w svijet tog modela. Tada vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash A \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(A)[w].$$

Dokaz. Indukcijom po složenosti formule F dokazujemo da vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(F)[w].$$

Prvo promotrimo slučaj kada je formula F složenosti 0. Tada vrijedi jedan od sljedeća dva slučaja: $F \equiv p$, za neku propozicionalnu varijablu $p \in Prop$ ili vrijedi $F \equiv \bot$. U slučaju da vrijedi $F \equiv p$ za neku propozicionalnu varijablu p, korištenjem $ST_x(p) \equiv P(x)$ dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash F \quad &\text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash p \\
&\text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \vDash P(x)[w] \\
&\text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(p)[w] \\
&\text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(F)[w].
\end{aligned}$$

U slučaju da vrijedi $F \equiv \bot$, tvrdnja je trivijalna.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da za svaku modalnu formulu G čija je složenost manja ili jednaka n, imamo sljedeće:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash G \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(G)[w].$$

Neka je F proizvoljna formula složenosti $n+1$. Tada imamo jedan od sljedećih slučajeva:

(a) $F \equiv \neg G$

(b) $F \equiv G \wedge H$

(c) $F \equiv G \rhd H$.

Promotrimo prvo slučaj $F \equiv \neg G$. Tada iz pretpostavke da je formula F složenosti $n+1$ slijedi da je formula G složenosti n. Korištenjem tog dobivamo da vrijede redom sljedeće ekvivalencije:

$\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg G$

ako i samo ako ne vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash G$

ako i samo ako (korištenjem pretpostavke indukcije) ne vrijedi $\mathfrak{M} \vDash ST_x(G)[w]$

ako i samo ako $\mathfrak{M} \vDash \neg ST_x(G)[w]$

ako i samo ako $\mathfrak{M} \vDash ST_x(\neg G)[w]$

ako i samo ako $\mathfrak{M} \vDash ST_x(F)[w]$.

U slučaju $F \equiv G \wedge H$, iz pretpostavke da je formula F složenosti $n+1$ slijedi da je složenost svake od formula G i H manja ili jednaka n. Lako je vidjeti da vrijede sljedeće ekvivalencije:

$\mathfrak{M}, w \Vdash F$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash G \wedge H$

ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash G$ i $\mathfrak{M}, w \Vdash H$

ako i samo ako (korištenjem pretpostavke indukcije) $\mathfrak{M} \vDash ST_x(G)[w]$ i

$\mathfrak{M} \vDash ST_x(H)[w]$

ako i samo ako $\mathfrak{M} \vDash (ST_x(G) \wedge ST_x(H))[w]$

ako i samo ako $\mathfrak{M} \vDash ST_x(G \wedge H)[w]$

ako i samo ako $\mathfrak{M} \vDash ST_x(F)[w]$.

Preostaje još promotriti slučaj $F \equiv G \rhd H$. Iz pretpostavke da je formula F složenosti $n+1$ slijedi da je složenost svake od formula G i H manja ili jednaka n. Tada imamo sljedeće ekvivalencije:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash F \quad & \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash G \rhd H \\
& \text{ako i samo ako} \quad \forall u(wRu \wedge \mathfrak{M}, u \Vdash G \Rightarrow \exists V(uS_wV \wedge (\forall v \in V)(\mathfrak{M}, v \Vdash H))) \\
& \text{ako i samo ako (korištenjem pretpostavke indukcije)} \\
& \qquad \forall u(wRu \wedge \mathfrak{M} \vDash ST_x(G)[u] \Rightarrow \exists V(uS_wV \wedge (\forall v \in V)\mathfrak{M} \vDash ST_x(H)[v])) \\
& \text{ako i samo ako} \quad \forall u(\mathfrak{M} \vDash (Rxu)[w] \wedge \mathfrak{M} \vDash ST_x(G)[u] \Rightarrow \\
& \qquad \exists V(\mathfrak{M} \vDash S(x,u,V)[w] \wedge (\forall v \in V)\mathfrak{M} \vDash ST_x(H)[v])) \\
& \text{ako i samo ako} \\
& \qquad \mathfrak{M} \vDash \forall y((Rxy \wedge ST_y(G)) \to \exists X(S(x,y,X) \wedge \forall z(z \in X \to ST_z(H))))[w] \\
& \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(G \rhd H)[w] \\
& \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(F)[w].
\end{aligned}
$$

■

Definicija 4.2.3. Neka je $\varphi(x)$ neka σ-formula sa slobodnom varijablom x. Kažemo da je **formula $\varphi(x)$ invarijantna na w-bisimulacije** ako za sve Verbruggeine modele $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te sve svjetove $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ takve da vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$, imamo sljedeću ekvivalenciju:

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi[w] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}' \vDash \varphi[w'].$$

Kažemo da je **σ-formula $\varphi(x)$ invarijantna na n-w-bisimulacije** ($n \in \mathbb{N}$) ako za sve Verbruggeine modele $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te sve svjetove $w \in W$ i $w' \in W'$ takve da vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow}_n \mathfrak{M}', w'$, imamo sljedeću ekvivalenciju:

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi[w] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}' \vDash \varphi[w'].$$

Propozicija 4.2.4. Neka je $\varphi(x)$ proizvoljna σ-formula koja je invarijantna na n-w-bisimulacije Verbruggeinih modela za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je formula φ ekvivalentna standardnoj translaciji neke IL–formule na Verbruggeinim modelima.

Dokaz. Želimo pokazati da postoji IL-formula F takva da za svaki Verbruggein model $\mathfrak{M}$ i svaki svijet $w \in \mathfrak{M}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi(x)[w] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \vDash ST_x(F)[w] \tag{4.1}$$

Budući da je σ-formula $\varphi(x)$ konačan niz simbola tada se u njoj javlja samo konačno mnogo unarnih relacijskih simbola P. Označimo sa $Prop$ konačan skup svih propozicionalnih varijabli koje odgovaraju nekom od tih relacijskim simbola.

Za proizvoljan Verbruggein model $\mathfrak{M}$ i svijet $w \in \mathfrak{M}$ takav da vrijedi $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$ označimo s F_w konjunkciju svih logički neekvivalentnih IL-formula čije varijable pripadaju skupu $Prop$ te čija je dubina najviše n. Uočimo da je prema propoziciji 1.4.5. samo konačno mnogo takvih IL-formula (pa se radi o konačnoj konjunkciji, tj. F_w je IL-formula).

Promotrimo skup svih logički međusobno neekvivalentnih IL-formula G čije varijable pripadaju skupu $Prop$, čija je dubina najviše n te za koje postoji Verbruggein model $\mathfrak{M}$ i svijet $w \in \mathfrak{M}$ takvih da je $\mathfrak{M} \models \varphi(x)[w]$ i G je logički ekvivalentna formuli F_w. Definiramo formulu F kao disjunkciju svih takvih formula G. Istaknimo da je prema propoziciji 1.4.5. samo konačno mnogo takvih IL-formula G, pa je formula F dobro definirana.

Tvrdimo da je F tražena IL-formula, tj. tvrdimo da vrijedi ekvivalencija (4.1). Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan Verbruggein model i neka je $w \in W$ proizvoljan.

Pretpostavimo prvo da vrijedi $\mathfrak{M} \models \varphi(x)[w]$. Tada je za model $\mathfrak{M}$ i svijet w dobro definirana formula F_w te iz definicije te formule slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash F_w$. Iz definicije formule F slijedi da postoji formula $F_{w'}$ koja je logički ekvivalentna formuli F_w i dio je disjunkcije F. Tada vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash F_{w'}$, a onda i $\mathfrak{M}, w \Vdash F$. Iz propozicije 4.2.2. slijedi $\mathfrak{M} \models ST_x(F)[w]$.

Dokažimo još i da vrijedi obratna implikacija iz ekvivalencije (4.1). U tu svrhu pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M} \models ST_x(F)[w]$. Propozicija 4.2.2. povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash F$. Iz definicije formule F slijedi da postoji Verbruggein model $\mathfrak{M}'$ i svijet $w' \in \mathfrak{M}'$ (za koje vrijedi $\mathfrak{M}' \models \varphi(x)[w']$) takvi da vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F_{w'} \tag{4.2}$$

(pri čemu je $d(F_{w'}) \leq n$ i formula $F_{w'}$ dio je disjunkcije F). Tvrdimo da su svjetovi w i w' međusobno n-modalno ekvivalentni, tj. zadovoljavaju točno iste modalne formule dubine najviše n, a čije se propozicionalne varijable nalaze u skupu $Prop$.

Neka je G proizvoljna modalna formula takva da vrijedi $d(G) \leq n$ i sve propozicionalne varijable koje se pojavljuju u formuli G pripadaju skupu $Prop$. Želimo pokazati da vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash G \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash G.$$

Pretpostavimo prvo da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash G$. Tada je formula G ekvivalentna jednoj od formula iz konjunkcije $F_{w'}$. Tada $\mathfrak{M}, w \Vdash F_{w'}$ očito povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash G$.

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash G$ te $\mathfrak{M}', w' \nVdash G$. Tada imamo $\mathfrak{M}', w' \Vdash \neg G$. Budući da $d(G) \leq n$ tada očito $d(\neg G) = d(G) \leq n$. Zatim, očito se u formuli $\neg G$ pojavljuju samo varijable iz skupa $Prop$. Tada postoji formula G' koja je logički ekvivalentna formuli $\neg G$ i dio je konjunkcije $F_{w'}$. Sada iz (4.2) slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash G'$, pa onda i $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg G$. No, to je u kontradikciji s $\mathfrak{M}, w \Vdash G$ pa zaključujemo da vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash G$.

Time smo dokazali da su svjetovi w i w' modalno n-ekvivalentni u odnosu na modalne formule u kojima se pojavljuju samo propozicionalne varijable iz konačnog skupa $Prop$.

Sada teorem 3.6.2. povlači $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$. Iz posljednjeg i činjenice $\mathfrak{M}' \models \varphi(x)[w']$ te pretpostavke da je σ-formula $\varphi(x)$ invarijantna na n-w-bisimulacije Verbruggeinih modela, slijedi $\mathfrak{M} \models \varphi(x)[w]$, što je i trebalo pokazati. ■

5. q–SATURIRANO RASPETLJAVANJE

Metoda raspetljavanja modela za osnovnu modalnu logiku dana je, primjerice, u [5]. Navedena metoda se koristi kako bi se dokazalo svojstvo stablastih modela koje glasi ovako: za svaku formulu osnovne modalne logike koja je ispunjiva na nekom Kripkeovom modelu postoji Kripkeov model koji je stablo te na kojem je ta formula također ispunjiva. Neformalno možemo reći da raspetljavanjem modela dobivamo model koji je stablo na način da su svjetovi dobivenog modela R-putevi početnog modela (pri čemu je s R označena relacija dostiživosti početnog modela).

A. Dawar i M. Otto u [8] koriste posebnu vrstu raspetljavanja modela koju nazivaju q-saturirano raspetljavanje. T. Perkov i M. Vuković u članku [38] daju definiciju q-saturiranog raspetljavanja Veltmanovih modela kako bi tu metodu iskoristili za dokazivanje teorema karakterizacije za logiku IL u odnosu na Veltmanovu semantiku.

U ovom poglavlju dajemo definiciju q-saturiranog raspetljavanja Verbruggeinih modela te pokazujemo osnovna svojstva koja to raspetljavanje zadovoljava. Posebno, pokazujemo da je tom transformacijom ponovo dobiven jedan Verbruggein model te da je svaki svijet w polaznog modela slabo bisimuliran s korijenom modela koji je nastao q-saturiranim raspetljavanjem iz tog svijeta w. U posljednjoj točki ovog poglavlja pokazujemo da logika interpretabilnosti ima svojstvo stablastih modela u odnosu na Verbruggeinu semantiku. Zatim, primjenom metode selekcije pokazujemo da logika interpretabilnosti također ima i svojstvo konačnih modela (eng. finite model property).

5.1. OSNOVNE DEFINICIJE

Prvo uvodimo oznaku koju ćemo koristiti u ostatku ovog rada. Neka je W proizvoljan neprazan skup. Označimo s W^* skup svih riječi nad alfabetom $\{(w,l) : w \in W,\ l \in \mathbb{N}\}$. Tada s π

označavamo funkciju sa skupa W^* u skup W koja je definirana ovako:

$$\pi\Big((w_0,l_0)(w_1,l_1)\dots(w_n,l_n)\Big) = w_n.$$

Definicija 5.1.1. Neka je $\mathfrak{M} = (W,R,\{S_w : w \in W\},\Vdash)$ Verbruggein model, $w_0 \in \mathfrak{M}$ te $q \in \mathbb{N}$. Definiramo **q–saturirano raspetljavanje modela** $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0 kao uređenu četvorku $(W^*,R^*,\{S^*_w : w \in W^*\},\Vdash)$, pri čemu imamo:

(i) W^* je skup svjetova oblika

$$w^* = (w_0,0)(w_1,l_1)(w_2,l_2)\dots(w,l_{n-1}),$$

gdje je $w_0Rw_1\dots Rw_{n-2}Rw$ jedan R–put u W iz svijeta w_0 te $l_i \in \{0,1,\dots,q-1\}$

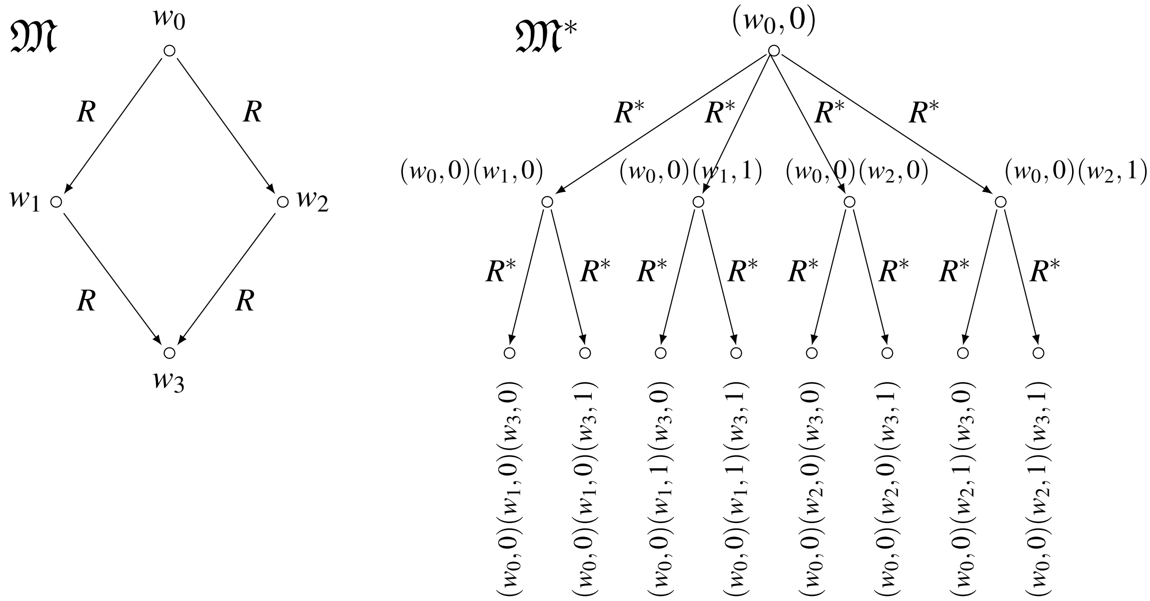
(ii) $R^* \subseteq W^* \times W^*$ relacija pravog prefiksa

(iii) za svaki svijet $w^* \in W^*$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $u^*S^*_{w^*}V^*$ ako i samo ako $u^* \in R^*[w^*]$, $V^* \subseteq R^*[w^*]$ te $\pi(u^*)S_{\pi(w^*)}\pi[V^*]$

(iv) za svaki svijet $w^* \in W^*$ i svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi sljedeća ekvivalencija: $w^* \Vdash p$ ako i samo ako vrijedi $\pi(w^*) \Vdash p$.

U nastavku ćemo za Verbruggein model $\mathfrak{M}$, svijet w_0 tog modela i $q \in \mathbb{N}$, q–saturirano raspetljavanje od $\mathfrak{M}$ iz w_0 jednostavno označavati s $\mathfrak{M}^*$ (nećemo u oznaci isticati svijet w_0 i prirodan broj q jer će oni biti jasni iz konteksta). Također, za svjetove od $\mathfrak{M}^*$ koristit ćemo oznake w^*, v^*, u^*, ..., dok ćemo za skupove svjetova iz $\mathfrak{M}^*$ koristiti oznake V^*, U^*, ...

Na slici 5.1. prikazan je jedan Verbruggein model $\mathfrak{M}$ i njegovo 2–saturirano raspetljavanje $\mathfrak{M}^*$.



Slika 5.1: Model $\mathfrak{M}$ i njegovo 2–saturirano raspetljavanje $\mathfrak{M}^*$

5.2. Osnovna svojstva q–saturiranog raspetljavanja

U ovoj točki dokazujemo osnovna svojstva q–saturiranog raspetljavanja. Prije toga istaknimo jednu pomoćnu tvrdnju koju ćemo koristiti u dokazima tvrdnji koje slijede.

Lema 5.2.1. Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model, $w_0 \in \mathfrak{M}$ proizvoljan svijet te $q \in \mathbb{N}$. Neka je $\mathfrak{M}^*$ q–saturirano raspetljavanje modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0. Tada za sve svjetove $w^*, v^* \in \mathfrak{M}^*$ vrijedi da $w^* R^* v^*$ povlači $\pi(w^*) R \pi(v^*)$.

Dokaz. Neka su $w^*, v^* \in \mathfrak{M}^*$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $w^* R^* v^*$. Iz $w^* \in \mathfrak{M}^*$ slijedi da je w^* riječ oblika

$$(w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \ldots (w_n, l_n),$$

gdje je $w_0 R w_1 \ldots R w_{n-1} R w_n$ jedan R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te imamo $l_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sada iz pretpostavke $w^* R^* v^*$ i definicije relacije R^* slijedi da je $v^* \in \mathfrak{M}^*$ riječ oblika

$$(w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \ldots (w_n, l_n) \ldots (w_m, l_m),$$

gdje je $w_n R w_{n+1} \ldots R w_m$ jedan R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te vrijedi $l_j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ za svaki $j \in \{n+1, n+2, \ldots, m\}$. Kako je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model tada je posebno je relacija R tranzitivna. To znači da iz $w_n R w_{n+1} \ldots R w_m$ slijedi $w_n R w_m$. Sada iz posljednjeg korištenjem $\pi(w^*) = w_n$ i $\pi(v^*) = w_m$ slijedi $\pi(w^*) R \pi(v^*)$, što je i trebalo pokazati. ∎

Propozicija 5.2.2. Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model, $w_0 \in \mathfrak{M}$ proizvoljan svijet te $q \in \mathbb{N}$. Tada je q–saturirano raspetljavanje $\mathfrak{M}^*$ modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0 jedan Verbruggein model.

Dokaz. Provjeravamo redom uvjete iz definicije 1.3.1. Uočimo da je W^* neprazan skup, primjerice, zbog $(w_0, 0) \in W^*$. Zatim, iz definicije q–saturiranog raspetljavanja slijedi da je R^* jedna binarna relacija na skupu W^*.

(a) Tvrdimo da je R^* tranzitivna relacija.

Neka su $w^*, u^*, v^* \in W^*$ proizvoljni svjetovi tako da vrijedi $w^* R^* u^*$ i $u^* R^* v^*$. Iz $w^* \in \mathfrak{M}^*$ slijedi da je w^* riječ oblika

$$(w_0, 0)(w_1, l_1) \ldots (w_n, l_n),$$

gdje je $w_0Rw_1\ldots Rw_n$ jedan R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te $l_i \in \{0,1,\ldots,q-1\}$ za svaki $i \in \{0,1,\ldots,n\}$. Iz definicije relacije R^* te pretpostavke $w^*R^*u^*$, slijedi da riječ $u^* \in \mathfrak{M}^*$ mora biti oblika

$$(w_0,0)(w_1,l_1)\ldots(w_n,l_n)(w_{n+1},l_{n+1})\ldots(w_m,l_m),$$

gdje je $w_nRw_{n+1}...Rw_m$ jedan R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te $l_i \in \{0,1,\ldots,q-1\}$ za svaki $i \in \{n+1,n+2,\ldots,m\}$.

Zatim, kako je po definiciji relacije R^* riječ w^* pravi prefiks riječi u^*, tada slijedi $m > n$. Sada iz pretpostavke $u^*R^*v^*$ i definicije relacije R^* slijedi da je $v^* \in \mathfrak{M}^*$ riječ oblika

$$(w_0,0)\ldots(a,l_{n-1})(w_n,l_n)\ldots(w_{n+1},l_{n+1})\ldots(w_m,l_m)(w_{m+1},l_{m+1}),\ldots(w_p,l_p),$$

gdje je $w_mRw_{m+1}\ldots Rw_p$ jedan R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te vrijedi $l_i \in \{0,1,\ldots,q-1\}$ za svaki $i \in \{m+1,m+2,\ldots,p\}$.

Iz definicije relacije R^* slijedi da je riječ u^* pravi prefiks riječi v^* a onda imamo $p > m$. Budući da je $m > n$ tada vrijedi i $p > n$. Dakle, riječ w^* je pravi prefiks riječi v^* pa iz definicije relacije R^* slijedi $w^*R^*v^*$.

Time smo dokazali da je R^* tranzitivna relacija.

(b) Tvrdimo da je R^* inverzno dobro fundirana relacija.

Pretpostavimo suprotno, tj. da R^* nije inverzno dobro fundirana relacija. Tada postoji niz svjetova $(w_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ u modelu $\mathfrak{M}^*$ takav da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $w_i^*R^*w_{i+1}^*$. Iz $w_i^*R^*w_{i+1}^*$ i leme 5.2.1. slijedi $\pi(w_i^*)R\pi(w_{i+1}^*)$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Tako smo dobili niz svjetova $(\pi(w_i^*))_{i\in\mathbb{N}}$ u modelu $\mathfrak{M}$ takav da vrijedi $\pi(w_i^*)R\pi(w_{i+1}^*)$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. No, to je u kontradikciji s inverznom dobrom fundiranošću relacije R. Dakle, R^* je inverzno dobro fundirana relacija.

(c) Tvrdimo da za svaki svijet $w^* \in W^*$ vrijedi sljedeće:

$$S^*_{w^*} \subseteq R^*[w^*] \times \Big(\mathscr{P}(R^*[w^*]) \setminus \{\emptyset\}\Big).$$

Neka su svijet $w^* \in \mathfrak{M}^*$ i $(v^*,V^*) \in S^*_{w^*}$ proizvoljni. Iz definicije q–saturiranog raspetljavanja slijedi da je $v^* \in R^*[w^*]$ te $V^* \subseteq R^*[w^*]$. Tada očito vrijedi $V^* \in \mathscr{P}(R^*[w^*])$. Za traženu tvrdnju $(v^*,V^*) \in R^*[w^*] \times \Big(\mathscr{P}(R^*[w^*]) \setminus \{\emptyset\}\Big)$ preostaje pokazati $V^* \neq \emptyset$.

Iz $v^*S^*_{w^*}V^*$ i definicije q–saturiranog raspetljavanja slijedi $\pi(v^*)S_{\pi(w^*)}\pi[V^*]$. Kako je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model tada posebno slijedi $\pi[V^*] \neq \emptyset$, a onda i $V^* \neq \emptyset$.

(d) Tvrdimo da je relacija $S^*_{w^*}$ kvazi-refleksivna za svaki svijet w^* iz $\mathfrak{M}^*$.

Neka su $w^*, v^* \in \mathfrak{M}^*$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $w^*R^*v^*$. Iz $w^*R^*v^*$ i leme 5.2.1. slijedi $\pi(w^*)R\pi(v^*)$. Po pretpostavci je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model pa je relacija $S_{\pi(w^*)}$ kvazi-refleksivna. Tada posebno iz $\pi(w^*)R\pi(v^*)$ slijedi $\pi(v^*)S_{\pi(w^*)}\{\pi(v^*)\}$. Iz definicije relacije $S^*_{w^*}$ konačno slijedi $v^*S^*_{w^*}\{v^*\}$.

(e) Tvrdimo da je relacija $S^*_{w^*}$ kvazi-tranzitivna za svaki svijet w^* iz $\mathfrak{M}^*$.

Neka su $w^*, v^* \in W^*$ proizvoljni svjetovi te $Z^* \subseteq W^*$ proizvoljan skup svjetova tako da vrijedi $v^*S^*_{w^*}Z^*$ te za sve $z^* \in Z^*$ vrijedi $z^*S^*_{w^*}Z^*_{z^*}$. (Želimo dokazati da vrijedi $v^*S^*_{w^*} \bigcup_{z^* \in Z^*} Z^*_{z^*}$). Iz $v^*S^*_{w^*}Z^*$ i definicije relacije $S^*_{w^*}$ slijedi $\pi(v^*)S_{\pi(w^*)}\pi[Z^*]$.

Neka je $z \in \pi[Z^*]$ proizvoljan svijet. Tada postoji svijet $z^* \in Z^*$ takav da vrijedi $\pi(z^*) = z$. Posebno za taj svijet z^* po pretpostavci vrijedi $z^*S^*_{w^*}Z^*_{z^*}$. Iz definicije relacije $S^*_{w^*}$ slijedi $\pi(z^*)S_{\pi(w^*)}\pi[Z^*_{z^*}]$, tj. $zS_{\pi(w^*)}\pi[Z^*_{z^*}]$.

Dakle, vrijedi $\pi(v^*)S_{\pi(w^*)}\pi[Z^*]$ i za svaki svijet $z \in \pi[Z^*]$ vrijedi $zS_{\pi(w^*)}\pi[Z^*_{z^*}]$. Sada kvazi-tranzitivnost relacije $S_{\pi(w^*)}$ povlači da vrijedi $\pi(v^*)S_{\pi(w^*)} \bigcup_{z^* \in Z^*} \pi[Z^*_{z^*}]$. Sada iz $\bigcup_{z^* \in Z^*} \pi[Z^*_{z^*}] = \pi\left[\bigcup_{z^* \in Z^*} Z^*_{z^*}\right]$ slijedi $\pi(v^*)S_{\pi(w^*)}\pi\left[\bigcup_{z^* \in Z^*} Z^*_{z^*}\right]$, pa prema definiciji relacije $S^*_{w^*}$ vrijedi $v^*S^*_{w^*} \bigcup_{z^* \in Z^*} Z^*_{z^*}$.

(f) Tvrdimo da za proizvoljne svjetove $w^*, v^*, u^* \in \mathfrak{M}^*$ vrijedi da $w^*R^*v^*R^*u^*$ povlači $v^*S^*_{w^*}\{u^*\}$.

Neka su $w^*, v^*, u^* \in \mathfrak{M}^*$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $w^*R^*v^*$ i $v^*R^*u^*$. Iz leme 5.2.1. slijedi $\pi(w^*)R\pi(v^*)$ i $\pi(v^*)R\pi(u^*)$. Sada iz pretpostavke da je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model slijedi $\pi(v^*)S_{\pi(w^*)}\{\pi(u^*)\}$. Iz toga, pretpostavke $w^*R^*v^*$ i $\{u^*\} \subseteq R^*[v^*]$ (zbog pretpostavke $v^*R^*u^*$) slijedi po definiciji relacije $S^*_{w^*}$ da vrijedi $v^*S^*_{w^*}\{u^*\}$.

(g) Tvrdimo da za proizvoljne svjetove $w^*, u^* \in \mathfrak{M}^*$ te $V^*, Z^* \subseteq W^*$, takve da $u^*S^*_{w^*}V^*$ i $V^* \subseteq Z^* \subseteq R^*[w^*]$, imamo $u^*S^*_{w^*}Z^*$.

Neka su $w^*, u^* \in \mathfrak{M}^*$ proizvoljni svjetovi te $V^*, Z^* \subseteq W^*$ takvi da vrijedi $u^*S^*_{w^*}V^*$ i $V^* \subseteq Z^* \subseteq R^*[w^*]$. Iz $u^*S^*_{w^*}V^*$ prema definiciji od $S^*_{w^*}$ slijedi $\pi(u^*)S_{\pi(w^*)}\pi[V^*]$. Iz toga, monotonosti relacije $S_{\pi(w^*)}$ i činjenice da $V^* \subseteq Z^*$ povlači $\pi[V^*] \subseteq \pi[Z^*]$, slijedi $\pi(u^*) S_{\pi(w^*)} \pi[Z^*]$. Posljednje po definiciji relacije $S^*_{w^*}$ povlači $u^* S^*_{w^*} Z^*$.

Dakle, struktura $\mathfrak{M}^*$ zadovoljava sve uvjete iz definicije 1.3.1. pa zaključujemo da je $\mathfrak{M}^*$ jedan Verbruggein model. ■

Propozicija 5.2.3. Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model, $w_0 \in \mathfrak{M}$ neki svijet, $q \in \mathbb{N}$ te $\mathfrak{M}^*$ q–saturirano raspetljavanje modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0. Tada vrijedi $\mathfrak{M}, w_0 \Leftrightarrow \mathfrak{M}^*, (w_0, 0)$. Nadalje vrijedi i $\mathfrak{M}, w_0 \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}^*, (w_0, 0)$.

Dokaz. Definiramo binarnu relaciju $Z \subseteq W \times W^*$ ovako:

$$(w, w^*) \in Z \text{ ako i samo ako vrijedi } \pi(w^*) = w.$$

Sada iz $\pi\big((w_0, 0)\big) = w_0$ i definicije relacije Z slijedi $\big(w_0, (w_0, 0)\big) \in Z$, pa za dokaz tražene tvrdnje preostaje dokazati da je Z bisimulacija. Kako bismo to pokazali, redom pokazujemo da relacija Z zadovoljava uvjete (at), (forth) i (back) iz definicije 2.1.1.

(at) Neka je $(w, w^*) \in Z$ proizvoljni par. Iz definicije relacije Z slijedi $\pi(w^*) = w$. Tada prema definiciji q–saturiranog raspetljavanja za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi sljedeća ekvivalencija: $\mathfrak{M}^*, w^* \Vdash p$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash p$.

Dakle, relacija Z zadovoljava uvjet (at).

(forth) Neka je $(w, w^*) \in Z$ proizvoljni par te neka je $u \in W$ proizvoljni svijet takav da vrijedi wRu. Iz $(w, w^*) \in Z$ slijedi $w^* \in W^*$ i $\pi(w^*) = w$. Prema tome, w^* je riječ oblika

$$(w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \ldots (w, l_{n-1}),$$

gdje je $w_0 R w_1 \ldots R w_{n-2} R w$ jedan R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te $l_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Definiramo u^* kao riječ

$$(w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \ldots (w, l_{n-1})(u, 0).$$

Iz $w_0 R w_1 \ldots R w_{n-2} R w$ i pretpostavke wRu slijedi da je

$$w_0 R w_1 \ldots R w_{n-2} R w R u$$

jedan R-put u W. Kako je također po pretpostavci $l_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, zaključujemo da vrijedi $u^* \in W^*$. Sada prema definiciji relacije Z, zbog $\pi(u^*) = u$ vrijedi $(u, u^*) \in Z$. Također prema definiciji relacije R^* vrijedi $w^* R^* u^*$.

Neka je $V^* \subseteq W^*$ proizvoljan skup takav da vrijedi $u^* S^*_{w^*} V^*$. Tada iz definicije relacije $S^*_{w^*}$ slijedi da vrijedi $\pi(u^*) S_{\pi(w^*)} \pi[V^*]$. Kako je $\pi(w^*) = w$ i $\pi(u^*) = u$ slijedi $uS_w\pi[V^*]$.

Neka je sada $v \in \pi[V^*]$ proizvoljan svijet. Tada postoji svijet $v^* \in V^*$ takav da vrijedi $\pi(v^*) = v$. Iz definicije relacije Z slijedi $(v, v^*) \in Z$. Dakle, za relaciju Z vrijedi uvjet (forth).

(back) Neka je $(w, w^*) \in Z$ proizvoljni par. Neka je $u^* \in W^*$ proizvoljni svijet takav da vrijedi $w^* R^* u^*$. Iz toga prema lemi 5.2.1. slijedi $\pi(w^*) R \pi(u^*)$. Prema definiciji relacije Z iz pretpostavke $(w, w^*) \in Z$ slijedi $\pi(w^*) = w$, pa dobivamo da vrijedi wRu, gdje smo s u označili svijet $\pi(u^*)$.

Neka je $V \subseteq W$ proizvoljan skup svjetova takav da vrijedi uS_wV. Za dokazivanje uvjeta (back) preostaje naći skup $V^* \subseteq W^*$ takav da vrijedi $u^* S^*_{w^*} V^*$ i takav da za svaki svijet $v^* \in V^*$ postoji svijet $v \in V$ za koji vrijedi $(v, v^*) \in Z$.

Definirajmo skup $V^* := \{v^* \in W^* : \pi(v^*) \in V\} \cap R^*[w^*]$. (Drugim riječima, V^* su svi R-putevi iz w_0 do nekog svijeta $v \in V$, ali takvi da „prolaze" kroz svijet w.)

– Prvo pokazujemo da vrijedi $u^* S^*_{w^*} V^*$. Kako vrijedi $u^* \in R^*[w^*]$, prema definiciji relacije $S^*_{w^*}$ preostaje pokazati da vrijedi $V^* \subseteq R^*[w^*]$ i $uS_w\pi[V^*]$.

  - Uočimo da $V^* \subseteq R^*[w^*]$ slijedi iz $V^* = \{v^* \in W^* : \pi(v^*) \in V\} \ \cap \ R^*[w^*] \subseteq R^*[w^*]$.
  - Kako bi pokazali da vrijedi $uS_w\pi[V^*]$ pokazujemo da je $V \subseteq \pi[V^*]$ (tada traženi rezultat slijedi iz pretpostavke uS_wV i monotonosti relacije S_w). Neka je svijet $v \in V$ proizvoljan. Iz uS_wV slijedi $V \subseteq R[w]$, pa iz $v \in V$ zaključujemo da vrijedi wRv. Kako je $w^* \in W^*$ i $\pi(w^*) = w$ slijedi da je w^* riječ oblika

$$(w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2)\ldots(w, l_{n-1})$$

za neki R-put $w_0 R w_1 \ldots R w_{n-2} R w$ u W, te $l_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Definiramo svijet v^* kao riječ

$$(w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2)\ldots(w, l_{n-1})(v, 0).$$

Iz $w_0Rw_1 \dots Rw_{n-2}Rw$ i wRv slijedi da je

$$w_0Rw_1 \dots Rw_{n-2}RwRv$$

jedan R-put u W. Kako je također po pretpostavci $l_i \in \{0,1,\dots,q-1\}$, zaključujemo da vrijedi $v^* \in W^*$. Sada iz $\pi(v^*) = v$ i $v^* \in R^*[w^*]$ (jer riječ w^* je pravi prefiks riječi v^*) slijedi $v^* \in \{v^* \in W^* : \pi(v^*) \in V\} \cap R^*[w^*] = V^*$. Tada vrijedi $\pi(v^*) \in \pi[V^*]$, pa iz $\pi(v^*) = v$ slijedi $v \in \pi[V^*]$. Dakle, vrijedi $V \subseteq \pi[V^*]$.

Neka je sada svijet $v^* \in V^*$ proizvoljan. Iz definicije skupa V^* posebno slijedi $v \in V$. Sada za taj svijet v prema definiciji relacije Z vrijedi $(v, v^*) \in Z$. Dakle, za relaciju Z vrijedi uvjet (back).

Druga tvrdnja propozicije slijedi iz upravo dokazane tvrdnje $\mathfrak{M}, w_0 \leftrightarrows \mathfrak{M}^*, (w_0, 0)$ i leme 3.3.3. ■

U nastavku ćemo raditi sa stablima koja su tranzitivna. Prema tome, pisat ćemo samo stablo umjesto tranzitivno stablo.

Propozicija 5.2.4. Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model, $w_0 \in \mathfrak{M}$ proizvoljni svijet, $q \in \mathbb{N}$ te $\mathfrak{M}^*$ q–saturirano raspetljavanje modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0. Tada je (W^*, R^*) stablo s korijenom $(w_0, 0)$.

Dokaz. Tranzitivnost relacije R^* je već dokazana u propoziciji 5.2.2.

Tvrdimo da je da je $(w_0, 0) \in W$ najmanji element. Neka je $w^* \in W^* \setminus \{(w_0, 0)\}$ proizvoljan svijet. Tada iz definicije skupa W^* slijedi da je riječ w^* oblika

$$w^* = (w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \dots (w, l_{n-1}),$$

gdje je $w_0Rw_1 \dots Rw_{n-2}Rw$ neki R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te $l_i \in \{0,1,\dots,q-1\}$. Prema definiciji relacije R^* to znači da vrijedi $(w_0, 0)R^*w^*$. Dakle, $(w_0, 0)$ je najmanji element.

Neka je $w^* \in W^* \setminus \{(w_0, 0)\}$ proizvoljan svijet. Tada je prema definiciji skupa W^* riječ w^* oblika

$$w^* = (w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \dots (w, l_{n-1}),$$

gdje je $w_0Rw_1 \dots Rw_{n-2}Rw$ neki R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te $l_i \in \{0,1,\dots,q-1\}$. Definiramo svjetove w_i^* za svaki $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, ovako:

$$w_i^* = (w_0, 0)(w_1, l_1) \dots (w_i, l_i),$$

pri čemu je $w_i = w$. Za svaki $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ očito vrijedi $w_i^* \in W^*$ te posebno za $i = n-1$ vrijedi $w_{n-1}^* = w^*$. Pokažimo da za svaki $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ imamo da je svijet w_{i+1}^* neposredni sljedbenik svijeta w_i^*. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji svijet $z^* \in W^*$ takav da vrijedi $w_i^* R^* z^* R^* w_{i+1}^*$. Iz $w_i^* R^* z^*$ te definicije relacije R^* i definicije svijeta w_i^* slijedi da svijet z^* mora biti riječ oblika

$$w_i^* = (w_0,0)(w_1,l_1)\dots(w_i,l_i)(z_{i+1},l_{i+1})\dots(z,l_m),$$

za neki $m > i$ (jer relacija R^* je relacija pravog prefiksa, tj. nije refleksivna), gdje je $w_0 R w_1 \dots R w_i R z_{i+1} \dots R z$ neki R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te $l_i \in \{0,1,\dots,q-1\}$. No, to je u kontradikciji sa činjenicom $z^* R^* w_{i+1}^*$, jer sada riječ z^* nije pravi prefiks od riječi

$$w_i^* = (w_0,0)(w_1,l_1)\dots(w_i,l_i)(w_{i+1},l_{i+1}).$$

Preostaje pokazati jedinstvenost. Neka je $v_1^*,\dots,v_m^* \in W^*$ niz takav da vrijedi

$$w_0^* R^* v_1^* R^* v_2^* \dots R^* v_m^* = w^*$$

te za svaki $i \in \{0,1,\dots,m-1\}$ vrijedi da je v_{i+1}^* neposredni sljedbenik od v_i^*. Pokazat ćemo da vrijedi $v_1^* = w_1^*$ (analogno se pokazuje i da za svaki $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ vrijedi $v_i^* = w_i^*$, iz čega posebno slijedi $v_n^* = w_m^* = w^*$ pa vrijedi i $n = m$). Iz $w_0^* R^* v_1^*$ te pretpostavke da je v_1^* neposredni sljedbenik svijeta w_0^*, slijedi da je v_1^* riječ oblika

$$(w_0,0)(v_1,l_1'),$$

pri čemu je $w_0 R v_1$ i $l_1' \in \{1,2,\dots,q-1\}$. No, kako iz $v_1^* R^* v_2^* \dots R^* w^*$ korištenjem tranzitivnosti relacije R^* slijedi $v_1^* R^* w^*$, tada korištenjem definicije relacije R^* dobivamo da mora vrijediti $v_1 = w_1$ i $l_1' = l_1$. Prema tome, vrijedi $v_1^* = w_1^*$. ■

Ako je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model takav da je (W,R) tranzitivno stablo s korijenom $r \in W$, kažemo da je $\mathfrak{M}$ **stablasti model s korijenom** r.

Propozicija 5.2.5. Neka je $\mathfrak{M} = (W,R,\{S_w : w \in W\},\Vdash)$ Verbruggein model, $w_0 \in W$ proizvoljni svijet, $q \in \mathbb{N}$ te $\mathfrak{M}^* = (W^*,R^*,\{S_{w^*}^* : w^* \in W^*\},\Vdash)$ q–saturirano raspetljavanje modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0. Tada za sve svjetove $w^*,v^* \in W^*$ takve da je svijet $v^* \in W^*$ neposredni R^*–sljedbenik svijeta w^*, vrijedi da svijet w^* ima barem q različitih neposrednih R^*–sljedbenika $v^*,v_1^*,v_2^*,\dots,v_{q-1}^*$ te su podstabla od (W^*,R^*) redom s korijenima $v^*,v_1^*,v_2^*,\dots,v_{q-1}^*$ međusobno izomorfna. Verbruggeini podmodeli inducirani tim podstablima su međusobno izomorfni.

Dokaz. Neka je $w^* \in W^*$ proizvoljan svijet. Tada iz definicije skupa W^* slijedi da je riječ w^* oblika

$$w^* = (w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \ldots (w, l_{n-1}),$$

gdje je $w_0 R w_1 \ldots R w_{n-2} R w$ neki R-put u modelu $\mathfrak{M}$ te $l_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Neka je svijet $v^* \in W^*$ jedan neposredni R^*-sljedbenik svijeta w^*. Slijedi da je svijet v^* riječ oblika

$$v^* = (w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \ldots (w, l_{n-1})(v_0, x_0),$$

pri čemu je $x_0 \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Definirajmo

$$v_i^* = (w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \ldots (w, l_{n-1})(v_0, x_i),$$

pri čemu je $x_i = \min\big(\{0, 1, \ldots, q-1\} \setminus \{x_0, \ldots, x_{i-1}\}\big)$, za $i \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$. Uočimo da tada skup $\{v^*, v_1^*, \ldots, v_{q-1}^*\}$ sadrži točno q različitih neposrednih R^*-sljedbenika svijeta w^*.

Radi jednostavnijeg zapisa uvedimo oznaku $v_0^* = v^*$. Neka su $i, j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ proizvoljni te promotrimo podstabla od (W^*, R^*) s korijenima v_i^* i v_j^*, koja ćemo redom označiti s $\mathfrak{T}_i$, odnosno $\mathfrak{T}_j$. Definirajmo preslikavanje Φ koje svakom svijetu podstabla $\mathfrak{T}_i$ pridružuje svijet podstabla $\mathfrak{T}_j$ na način koji ćemo sada opisati. Neka je u_i^* proizvoljan svijet podstabla $\mathfrak{T}_i$. Tada vrijedi $v_i^* R^* u_i^*$ pa slijedi da je u_i^* riječ oblika

$$u_i^* = (w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \ldots (w, l_{n-1})(v_0, x_i)(v_1, y_1) \ldots (v_k, y_k),$$

pri čemu je $v_1, \ldots, v_k$ neki konačan niz svjetova za koje vrijedi $v_0 R v_1 R \ldots R v_k$ te $y_j \in \{0, \ldots, q-1\}$ za svaki $j \in \{1, \ldots, k\}$. Definiramo

$$\Phi(u_i^*) = (w_0, 0)(w_1, l_1)(w_2, l_2) \ldots (w, l_{n-1})(v_0, x_j)(v_1, y_1) \ldots (v_k, y_k).$$

Tada je Φ traženi izomorfizam iz iskaza propozicije.

$\blacksquare$

5.3. METODA SELEKCIJE

Neka je F proizvoljna ispunjiva IL-formula. Tada postoji Verbruggein model $\mathfrak{M}$ i njegov svijet w tako da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash F$. Neka je $\mathfrak{M}^*$ 1-saturirano raspetljavanje modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w. Tada prema propoziciji 5.2.3. vrijedi $\mathfrak{M}, w_0 \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}^*, (w_0, 0)$, pa propozicija 3.3.6. povlači $\mathfrak{M}, w_0 \equiv \mathfrak{M}^*, (w_0, 0)$. Sada iz $\mathfrak{M}, w \Vdash F$ slijedi $\mathfrak{M}^*, (w_0, 0) \Vdash F$. Kako je prema propoziciji 5.2.4. model $\mathfrak{M}^*$ tranzitivno stablo s korijenom $(w_0, 0)$, dobiven je sljedeći rezultat:

> ako je neka formula F ispunjiva na nekom Verbruggeinom modelu tada je ona ispunjiva na Verbruggeinom modelu koji je tranzitivno stablo.

Ponekad se u literaturi (vidi [5]) još u tom slučaju kaže da logika interpretabilnosti ima svojstvo stablastog modela (eng. *tree model property*) u odnosu na Verbruggeinu semantiku.

U nastavku želimo pokazati da vrijedi i više: svaka ispunjiva formula ispunjiva je na Verbruggeinom modelu koji je konačno tranzitivno stablo. Prvo ćemo definirati pojam visine svijeta Verbruggeinog modela.

Definicija 5.3.1. Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model s korijenom w_0 (tj. za svaki svijet w iz $\mathfrak{M}$ postoji neki R-put od svijeta w_0 do svijeta w). Rekurzivno definiramo **visinu svijeta** iz $\mathfrak{M}$ ovako:

(i) jedini svijet visine 0 je korijen w_0

(ii) svjetovi visine $n+1$ su neposredni sljedbenici svjetova visine n.

Visinu svijeta $w \in \mathfrak{M}$ označavamo s $h(w)$. **Visina modela** $\mathfrak{M}$ je maksimalni n takav da postoji neki svijet visine n u $\mathfrak{M}$. Ukoliko ne postoji takav maksimalni n, kažemo da model $\mathfrak{M}$ ima beskonačnu visinu.

Definicija 5.3.2. Za $k \in \mathbb{N}$ i Verbruggein model $\mathfrak{M}$ s korijenom w_0 definiramo **restrikciju od** $\mathfrak{M}$ **na** k, u oznaci $\mathfrak{M} \upharpoonright k$, kao podmodel modela $\mathfrak{M}$ koji sadrži samo one svjetove modela $\mathfrak{M}$ čija visina je manja ili jednaka k.

Propozicija 5.3.3. Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model s korijenom w_0 te neka je $k \in \mathbb{N}$. Neka je $\mathfrak{M}^*$ 1-saturirano raspetljavanje Verbruggeinog modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0. Tada za svaki svijet w^* modela $\mathfrak{M}^* \upharpoonright k$ vrijedi

$$(\mathfrak{M}^*, w_0^*) \upharpoonright k, w^* \; \underline{\leftrightsquigarrow}_l \; \mathfrak{M}, w,$$

pri čemu je $l = k - h(w^*)$.

Dokaz. Neka je w^* proizvoljan svijet modela $(\mathfrak{M}^*, w_0^*) \upharpoonright k = (W', R', \{S'_{w'} : w' \in W'\}, \Vdash)$.

Želimo konstruirati l-w-bisimulaciju, za $l = k - h(w^*)$, između svijeta w^* modela $\mathfrak{M}^* \upharpoonright k$ i svijeta w modela $\mathfrak{M}$. U tu svrhu, definiramo niz relacija

$$Z_n = \{(v^*, v) \in W' \times W \mid \text{postoji } v' \in \mathfrak{M}^* \upharpoonright (k-n) \text{ takav da } \pi(v^*) = \pi(v') = v\}$$

za $n \in \{0, 1, \dots, l\}$. Iz definicije tog niza relacija slijedi $Z_l \subseteq Z_{l-1} \subseteq \ldots \subseteq Z_0$ te $(w^*, w) \in Z_l$. Za traženu tvrdnju preostaje provjeriti da vrijede svojstva (at), (l-w-forth) i (l-w-back) iz definicije l-w-bisimulacije.

Neka je $(v'', v) \in Z_0$ proizvoljan par svjetova. Iz definicije relacije Z_0 slijedi $v'' = v^*$. Sada iz definicije 1-saturiranog raspetljavanja $\mathfrak{M}^*$ i definicije podmodela $\mathfrak{M}^* \upharpoonright k$ slijedi da za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi sljedeći niz ekvivalencija: $\mathfrak{M}, v \Vdash p$ ako i samo ako $\mathfrak{M}^*, v^* \Vdash p$ ako i samo ako $\mathfrak{M}^* \upharpoonright k, v^* \Vdash p$. Dakle, vrijedi uvjet (at).

Dokažimo još da vrijedi uvjet (l-w-forth). Uvjet (l-w-back) dokazuje se analogno. Neka je $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ proizvoljan te neka su svjetovi $x'', u'' \in W'$ i $x \in W$ takvi da vrijedi $(x'', x) \in Z_i$ i $x'' R' u''$. Iz definicije relacije Z_i slijedi $x'' = x^*$. Iz $u'' \in W'$ te definicije 1-saturiranog raspetljavanja slijedi

$$u'' = (w_0, 0)(w_1, 0) \ldots (u, 0),$$

pri čemu je $w_0 R w_1 \ldots R u$ jedan R–put u modelu $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0. Prema tome za svijet $u \in W$ vrijedi $u^* = u''$. Sada $x'' R' u''$, $x'' = x^*$ i $u'' = u^*$ povlače $x^* R' u^*$ što prema definiciji 1-saturiranog raspetljavanja i tranzitivnosti relacije R znači da vrijedi xRu. Iz $x'' = x^*$, $(x'', x) \in Z_i$ i definicije relacije Z_i slijedi da postoji svijet x' modela $\mathfrak{M}^* \upharpoonright (k - i)$ takav da vrijedi $\pi(x') = x$. To znači da vrijedi $h(x') \leqslant k - i$. Iz definicije 1-saturiranog raspetljavanja slijedi

$$x' = (w_0, 0)(w_1', 0) \ldots (x, 0),$$

pri čemu je $w_0 R w_1' \ldots R x$ jedan R–put u W iz svijeta w_0. Tada korištenjem xRu dobivamo da je svijet $u' = (w_0, 0)(w_1', 0) \ldots (x, 0)(u, 0)$ jedan neposredan R'-sljedbenik svijeta x' pa iz $h(x') \leqslant k - i$ slijedi $h(u') \leqslant k - i + 1 = k - (i - 1)$. To povlači $u' \in \mathfrak{M}^* \upharpoonright (k - (i - 1))$. Dakle, vrijedi

$(u'', u) \in Z_{i-1}$. Neka je $U = \{u\}$. Prema prethodno dobivenom za svaki $u_1 \in U$ vrijedi $(u'', u) \in Z_{i-1}$.

Neka je $V \subseteq W$ proizvoljan skup za koji vrijedi uS_xV. Preostaje pokazati da postoji skup svjetova $V' \subseteq W'$ takav da vrijedi $u''S'_{x''}V'$ i za svaki svijet $v' \in V'$ postoji $v \in V$ za koji vrijedi $vZ_{i-1}v'$.

Iz $x'' = x^* \in W' \subseteq W^*$ po definiciji 1-saturiranog raspetljavanja slijedi

$$x'' = (w_0, 0)(w''_1, 0) \ldots (x, 0),$$

pri čemu je $w_0Rw''_1 \ldots Rx$ jedan R–put u modelu $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0. Neka je

$$V' = \{(w_0, 0)(w''_1, 0) \ldots (x, 0)(v, 0) \mid v \in V\}.$$

Iz uS_xV slijedi $V \subseteq R[w]$, tj. za svaki svijet $v \in V$ vrijedi xRv pa definicija skupa V' i 1-saturiranog raspetljavanja povlači da je svaki svijet $v' \in V'$ jedan R^*-neposredni sljedbenik svijeta x''. Kako je $x'' \in W'$ te za $u'' \in W'$ vrijedi $x''R'u''$ ne može vrijediti $h(x'') = k$ jer bi tada moralo vrijediti $h(u'') > k$ što nije moguće zbog $u'' \in W'$. Zaključujemo da vrijedi $h(x'') < k$ pa iz činjenice da je svaki svijet $v' \in V'$ jedan neposredan R^*-sljedbenik od x'' slijedi $V' \subseteq W'$. Tada iz $V' \subseteq R^*[x'']$ i definicije modela $\mathfrak{M}^* \upharpoonright k$ slijedi $V' \subseteq R'[x'']$. Iz uS_xV, $\pi[V'] = V$, $\pi(u'') = u$, $\pi(x'') = x$ te definicije 1-saturiranog raspetljavanja slijedi $u''S'_{x''}V'$.

Neka je sada $v' \in V'$ proizvoljan svijet. Iz definicije skupa V' slijedi da postoji $v \in V$ takav da vrijedi $\pi(v') = v$, a onda iz $V \subseteq R[x]$ slijedi xRv. Tada je svijet

$$v'' = (w_0, 0)(w'_1, 0) \ldots (x, 0)(v, 0)$$

jedan neposredan R^*-sljedbenik svijeta x' pa iz $h(x') \leqslant k - i$ slijedi $h(v'') \leqslant k - i + 1 = k - (i - 1)$. Kako je $\pi(v'') = v$ slijedi $(v, v') \in Z_{i-1}$. Dakle, vrijedi uvjet (l-w-forth). ■

U sljedećem teoremu ističemo svojstvo konačnih modela za Verbruggeinu semantiku. Rezultat je dobiven korištenjem metode selekcije.

Teorem 5.3.4. Neka je F formula. Ako je F ispunjiva na nekom Verbruggeinom modelu tada je F ispunjiva na nekom konačnom Verbruggeinom modelu.

Dokaz. Neka je F ispunjiva formula. Tada postoji Verbruggein model $\mathfrak{M}$ i svijet w_0 tog modela tako da vrijedi $\mathfrak{M}, w_0 \Vdash F$. Označimo s k modalnu dubinu formule F te neka je *Prop* skup svih propozicionalnih varijabli koje se javljaju u formuli F. Uočimo da je taj skup *Prop* konačan. Tada prema propoziciji 5.2.3. za Verbruggein model $\mathfrak{M}^*$ nastao 1-saturiranim raspetljavanjem Verbruggeinog modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0 vrijedi $\mathfrak{M}, w_0 \leftrightarrows \mathfrak{M}^*, (w_0, 0)$, iz čega prema propoziciji 2.2.1. i pretpostavci $\mathfrak{M}, w_0 \Vdash F$ slijedi $\mathfrak{M}^*, w_0^* \Vdash F$ pri čemu koristimo oznaku $w_0^* = (w_0, 0)$. Prema prethodnoj propoziciji 5.3.3. za Verbruggein model $\mathfrak{N} = (\mathfrak{M}^* \upharpoonright k)$ vrijedi $\mathfrak{M}^*, w_0^* \leftrightsquigarrow_k \mathfrak{N}, w_0^*$. To povlači da vrijedi $\mathfrak{N}, w_0^* \Vdash F$.

Time je dobiven model koji je tranzitivno stablo konačne visine. No, to stablo može imati beskonačno grana. Preostaje samo prilagoditi proces odabira konačno mnogo grana iz Teorema 2.34. u [5] te pokazati da u tom novom modelu, koji ćemo označiti s $\mathfrak{N}'$, vrijedi $\mathfrak{N}, w_0^* \leftrightsquigarrow_k \mathfrak{N}', w_0^*$.

Prvo uvodimo neke oznake koje ćemo koristiti u nastavku. Neka je $\mathfrak{A}$ Verbruggein model i $w \in \mathfrak{A}$ proizvoljan svijet tog modela. Znamo da za $n \in \mathbb{N}$ postoji samo konačno mnogo međusobno neekvivalentnih formula G čija je modalna dubina manja ili jednaka n, čije su varijable iz skupa $Prop$ te za koje vrijedi $\mathfrak{A}, w \Vdash G$. Konjunkciju tih konačno mnogo formula označavamo s χ_w^n. Iz toga slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathfrak{A}, w \Vdash \chi_w^n$. Za modele $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ koristit ćemo sljedeće oznake: $\mathfrak{N} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ i $\mathfrak{N}' = (W', R', \{S'_w : w \in W'\}, \Vdash)$.

Prvo definiramo niz skupova svjetova $(Set_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Neka je $Set_0 = \{w_0^*\}$. Pretpostavimo da je za neki $i \in \mathbb{N}$ definiran skup Set_i. Tada skup Set_{i+1} dobivamo na sljedeći način:

- za svaki svijet $v \in Set_i$ promotrimo skup svih formula oblika $\neg(G \rhd H)$ koje su međusobno logički neekvivalentne, čija je modalna dubina manja ili jednaka k, čiji je skup propozicionalnih varijabli podskup od $Prop$ te za koje vrijedi $\mathfrak{N}, v \Vdash \neg(G \rhd H)$. Takvih je formula konačno mnogo, pa ih možemo označiti s $F_0, F_1, \ldots, F_m$, za neki $m \in \mathbb{N}$.

  Sada za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, iz $\mathfrak{N}, v \Vdash F_i \equiv \neg(G \rhd H)$ slijedi da postoji neki svijet $u \in \mathfrak{N}$ takav da vrijedi vRu i $\mathfrak{N}, u \Vdash G$ te za svaki skup svjetova $V \subseteq W$ takav da vrijedi uS_wV postoji svijet $v' \in V$ za koji vrijedi $\mathfrak{N}, v' \nVdash H$.

  U skup Set_{i+1} stavimo po jedan takav svijet u za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ te taj postupak ponovimo za svaki svijet $v \in Set_i$.

Time smo dobili niz skupova svjetova $(Set_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Lako je indukcijom dokazati da je svaki skup Set_i konačan te da za svaki svijet $v \in Set_i$ vrijedi $h(v) \geq i$. Kako je visina modela $\mathfrak{N}$ jednaka k, slijedi da za svaki $i > k$ vrijedi $Set_i = \emptyset$.

Definiramo model $\mathfrak{N}'$ kao podmodel od $\mathfrak{N}$ čiji je nosač skup $W' = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Set_i$. Prema prethodnom vrijedi $W' = \bigcup_{i=0}^{k} Set_i$. Kako je svaki od skupova Set_i konačan, slijedi da je dobiveni model konačan. Za svaki $i \in \{0,1,\dots,k\}$ definiramo relaciju $Z_i \subseteq W \times W'$ ovako:

$$(w,w') \in Z_i \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N}, w' \Vdash \chi_w^i.$$

Obzirom da za sve svjetove $u, v \in \mathfrak{N}$ i svaki $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ vrijedi da $\mathfrak{N}, v \Vdash \chi_u^i$ povlači $\mathfrak{N}, v \Vdash \chi_u^{i-1}$, dobivamo da vrijedi $Z_k \subseteq Z_{k-1} \subseteq \ldots \subseteq Z_0$. Također, vrijedi $(w_0^*, w_0^*) \in Z_k$ jer vrijedi $\mathfrak{N}, w_0^* \Vdash \chi_{w_0^*}^k$.

Pokazat ćemo da je niz relacija $Z_0, Z_1, \dots, Z_k$ jedna k-w-bisimulacija. Iz toga će slijediti $\mathfrak{N}, w_0^* \leftrightsquigarrow_k \mathfrak{N}', w_0^*$, što povlači $\mathfrak{N}, w_0^* \equiv_k \mathfrak{N}', w_0^*$. Zbog $\mathfrak{N}, w_0^* \Vdash F$ i $d(F) \leqslant k$, tada vrijedi $\mathfrak{N}', w_0^* \Vdash F$. Kako je $\mathfrak{N}'$ konačan Verbruggein model, dobivamo traženu tvrdnju.

Prvo pokažimo da vrijedi uvjet (at) iz definicije k-w-bisimulacije. Neka su $(w,w') \in Z_0$ i $p \in Prop$ poizvoljni. Iz definicije relacije Z_0 slijedi $\mathfrak{N}, w' \Vdash \chi_w^0$. To povlači da vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash p$ ako i samo ako $\mathfrak{N}, w' \Vdash p$.

Pokazujemo sada da vrijedi uvjet (k-w-forth) iz definicije k-w-bisimulacije. Neka je $i \in \{1,\dots,k\}$ proizvoljan. Neka su $(w,w') \in Z_i$ te $u \in W$ takvi da vrijedi wRu. Iz wRu i $\mathfrak{N}, u \Vdash \chi_u^{i-1}$ slijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash \Diamond\chi_u^{i-1}$. Korištenjem dogovora o pokrati $\Diamond$ slijedi da vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash \neg(\chi_u^{i-1} \rhd \bot)$. Iz $(w,w') \in Z_i$ i definicije relacije Z_i slijedi $\mathfrak{N}, w' \Vdash \chi_w^i$. Kako je dubina formule $\neg(\chi_u^{i-1} \rhd \bot)$ manja ili jednaka i, iz $\mathfrak{N}, w \Vdash \neg(\chi_u^{i-1} \rhd \bot)$ slijedi da vrijedi $\mathfrak{N}, w' \Vdash \neg(\chi_u^{i-1} \rhd \bot)$. Iz definicije skupa W' slijedi da za neki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi $w' \in Set_j$ pa postoji $u' \in Set_{j+1}$ (pa prema tome $u' \in W'$) takav da vrijedi $\mathfrak{N}, u' \Vdash \chi_u^{i-1}$. Prema tome vrijedi $(u,u') \in Z_{i-1}$. Definiramo skup U' koji sadrži svaki svijet $u' \in W'$ za koji vrijedi $w'R'u'$ i $\mathfrak{N}, u' \Vdash \chi_u^{i-1}$. Iz prethodnih razmatranja slijedi $U' \neq \emptyset$.

Neka je $V' : U' \to \mathscr{P}(W')$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u' \in U'$ vrijedi $u'S'_{w'}V'(u')$. Neka je $V'' = \bigcup_{u'\in U'} V'(u')$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaki skup V takav da vrijedi uS_wV postoji svijet $v \in V$ takav da za svaki svijet $v' \in V''$ ne vrijedi $vZ_{i-1}v'$. Posljednje je prema definiciji relacije Z_{i-1} ekvivalentno s $\mathfrak{N}, v' \Vdash \neg\chi_v^{i-1}$, a to je ekvivalentno s $\mathfrak{N}, v \Vdash \neg\chi_{v'}^{i-1}$. Prema tome, imamo da za svaki skup V takav da vrijedi uS_wV postoji svijet $v \in V$ takav da $\mathfrak{N}, v \Vdash \neg\bigvee_{v'\in V''} \chi_{v'}^{i-1}$. Istaknimo da je zbog konačnosti skupa W' (pa onda i $V'' \subseteq W'$) posljednja disjunkcija konačna (pa je time dobro definirana navedena formula). Dakle, dobili smo da za svijet $u \in W$ takav da wRu imamo da za svaki skup svjetova $V \subseteq W$ takav da uS_wV ne vrijedi $\mathfrak{N}, V \Vdash \bigvee_{v'\in V''} \chi_{v'}^{i-1}$. To znači da vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash \neg\left(\chi_u^{i-1} \rhd \bigvee_{v'\in V''} \chi_{v'}^{i-1}\right)$. Dubina prethodne formule je najviše i pa iz $\mathfrak{N}, w' \Vdash \chi_w^i$ slijedi $\mathfrak{N}, w' \Vdash \neg\left(\chi_u^{i-1} \rhd \bigvee_{v'\in V''} \chi_{v'}^{i-1}\right)$. Kako je $w' \in Set_j$, za neki $j \in \mathbb{N}$, to je odabran neki svijet $u'' \in Set_{j+1}$ takav da vrijedi $\mathfrak{N}, u'' \Vdash \chi_u^{i-1}$ i za svaki skup X' za koji vrijedi $u'S'_{w'}X'$, ne vrijedi $\mathfrak{N}, X' \Vdash \bigvee_{v' \in V''} \chi^{i-1}_{v'}$. Tada je posebno $u'' \in U'$ pa posebno ne vrijedi $\mathfrak{N}, V'(u'') \Vdash \bigvee_{v' \in V''} \chi^{i-1}_{v'}$. No, to znači da postoji svijet $v'' \in V'(u'') \subseteq V''$ takav da vrijedi $\mathfrak{N}, v'' \Vdash \neg \bigvee_{v' \in V''} \chi^{i-1}_{v'}$, što je u kontradikciji s $\mathfrak{N}, v'' \Vdash \bigvee_{v' \in V''} \chi^{i-1}_{v'}$ (jer vrijedi $v'' \in V''$ i $\mathfrak{N}, v'' \Vdash \chi^{i-1}_{v''}$).

Dakle, vrijedi uvjet (k-w-forth) iz definicije k-w-bisimulacije. Pokažimo još da vrijedi uvjet (k-w-back). Neka je $i \in \{1, \ldots, k\}$ proizvoljan. Neka su $(w, w') \in Z_i$ te $u' \in W' \subseteq W$ takvi da vrijedi $w'R'u'$. Iz $w'R'u'$ slijedi $w'Ru'$, pa iz toga i $\mathfrak{N}, u' \Vdash \chi^{i-1}_{u'}$ slijedi $\mathfrak{N}, w' \Vdash \Diamond \chi^{i-1}_{u'}$. Korištenjem dogovora o pokrati $\Diamond$, to znači da vrijedi $\mathfrak{N}, w' \Vdash \neg(\chi^{i-1}_{u'} \rhd \bot)$. Iz $(w, w') \in Z_i$ i definicije relacije Z_i slijedi $\mathfrak{N}, w' \Vdash \chi^i_w$, što je ekvivalentno s $\mathfrak{N}, w \Vdash \chi^i_{w'}$. Kako je dubina formule $\neg(\chi^{i-1}_{u'} \rhd \bot)$ manja ili jednaka i slijedi da vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash \neg(\chi^{i-1}_{u'} \rhd \bot)$. Tada postoji svijet $u \in W$ takav da wRu i $\mathfrak{N}, u \Vdash \chi^{i-1}_{u'}$, što je ekvivalentno $\mathfrak{N}, u' \Vdash \chi^{i-1}_{u}$. Prema tome vrijedi $(u, u') \in Z_{i-1}$. Definiramo U kao skup svih takvih svjetova $u \in W$ za koje vrijedi wRu i $\mathfrak{N}, u \Vdash \chi^{i-1}_{u'}$. Iz prethodnih razmatranja slijedi $U \neq \emptyset$.

Neka je $V : U \to \mathscr{P}(W)$ proizvoljna funkcija takva da za svaki svijet $u \in U$ vrijedi $uS_wV(u)$. Definiramo $V'' = \bigcup_{u \in U} V(u)$. Kako se skup U sastoji od svih svjetova u za koje vrijedi wRu i $\mathfrak{N}, u \Vdash \chi^{i-1}_{u'}$, dobivamo da vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash \chi^{i-1}_{u'} \rhd \bigvee_{v \in V''} \chi^{i-1}_v$. Iako sada skup $V'' \subseteq W$ nije nužno konačan, prethodna disjunkcija je konačna ako promatramo samo međusobno logički neekvivalentne formule χ^{i-1}_v čija je modalna dubina najviše $i-1$. Iz $(w, w') \in Z_i$ i činjenice da je dubina formule $\chi^{i-1}_{u'} \rhd \bigvee_{v \in V''} \chi^{i-1}_v$ najviše i, slijedi $\mathfrak{N}, w' \Vdash \chi^{i-1}_{u'} \rhd \bigvee_{v \in V''} \chi^{i-1}_v$. Sada iz $\mathfrak{N}, u' \Vdash \chi^{i-1}_{u'}$ slijedi da postoji skup V' takav da vrijedi $u'S'_{w'}V'$ i $\mathfrak{N}, V' \Vdash \bigvee_{v \in V''} \chi^{i-1}_v$. Iz toga očito slijedi da za svaki svijet $v' \in V'$ postoji svijet $v \in V''$ za koji vrijedi $\mathfrak{N}, v' \Vdash \chi^{i-1}_v$, tj. $(v, v') \in Z_{i-1}$. Prema tome, vrijedi i uvjet (k-w-back). ∎

Svojstvo konačnih modela za logiku interpretabilnosti IL dokazano je i u [39] ali korištenjem metode filtracije. Metodom filtracije dokazano je svojstvo konačnih modela i za razna proširenja logike interpretabilnosti: za logike ILM i ILM_0 to je napravljeno u članku [39], za logiku ILW^* u članku [31] te za logike ILP_0 i ILR u članku [32]. Više o tome može se vidjeti u poglavlju 7.

6. VAN BENTHEMOV TEOREM

Kako bismo dokazali teorem karakterizacije, potrebne su nam neke tehničke leme. Leme se dokazuju na sličan način kao u slučaju logike GL u članku [8]. U ovom poglavlju sa σ ćemo označavati signaturu dvosortne logike prvog reda koja je dana u definiciji 4.1.1, pri čemu je skup *Prop* iz te definicije konačan. Za σ-strukturu $\mathfrak{N}$ reći ćemo da je konačna ako je skup $N^{\mathfrak{w}}$ konačan.

6.1. METODA DEKOMPOZICIJE

Sljedeća lema je analogon leme 4.5. iz članka [8]. Prije te leme istaknimo činjenicu da svaka konačna uređena σ-struktura ima korijen.

Lema 6.1.1. Neka je signatura σ pridružena k članom skupu propozicionalnih varijabli *Prop*. Tada za svaki $q \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $N(q,k)$ tako da za svaku konačnu uređenu σ-strukturu $\mathfrak{N}$ postoji σ-podstruktura $\mathfrak{N}'$ od $\mathfrak{N}$ takva da vrijedi: $|(N')^{\mathfrak{w}}| \leq N(q,k)$, σ-struktura $\mathfrak{N}$ sadrži $R^{\mathfrak{N}}$-najveći element strukture $\mathfrak{N}$ i $(\mathfrak{N},w) \equiv_q (\mathfrak{N}',w')$, pri čemu je svijet w korijen σ-strukture $\mathfrak{N}$, a svijet w' je korijen σ-strukture $\mathfrak{N}'$.

Dokaz. Prema pretpostavci u signaturi σ imamo samo k relacijskih simbola P_i. Lako se vidi da tada postoji samo konačno mnogo logički neekvivalentnih σ-formula čiji je kvantifikatorski rang najviše q te imaju jednu slobodnu varijablu x. Neka je n broj takvih σ-formula i označimo skup svih takvih σ-formula s $\mathscr{F}$. Definiramo $N(q,k) = 2^n$.

Neka je $\mathfrak{N}$ konačna uređena σ-struktura s korijenom w. Neka je $m = |N^{\mathfrak{w}}|$ te s w_1 označimo $R^{\mathfrak{N}}$-najveći element skupa $N^{\mathfrak{w}}$. Ako vrijedi $m \leq N(q,k)$ tada kao traženu σ-podstrukturu $\mathfrak{N}'$ možemo uzeti $\mathfrak{N}$.

Promotrimo slučaj kada vrijedi $m > N(q,k)$. Opisat ćemo postupak dobivanja prave σ-podstrukture $\mathfrak{N}'$ od $\mathfrak{N}$ takve da $(N')^{\mathfrak{w}}$ ima barem jedan element manje od $N^{\mathfrak{w}}$ te za koju vrijedi

$w_1 \in (N')^{\mathfrak{w}}$ i $(\mathfrak{N}, w) \equiv_q (\mathfrak{N}', w')$, pri čemu je w' korijen od $\mathfrak{N}'$. Tada uzastopnim primjenama opisanog postupka dobivamo traženu σ-podstrukturu $\mathfrak{N}_1$ od $\mathfrak{N}$ takvu da je $|N_1^{\mathfrak{w}}| \leq N(q,k)$.

Promatramo σ-strukturu $\mathfrak{N}$ koja ima m svjetova, pri čemu vrijedi $m > N(q,k)$. Za svaki $v \in N^{\mathfrak{w}}$ promotrimo skup σ-formula $\mathscr{F}_v = \{\varphi \mid \mathfrak{N} \vDash \varphi[v] \text{ i } \varphi \in \mathscr{F}\} \subseteq \mathscr{F}$. Skup $\mathscr{F}$ ima najviše n elemenata, pa prema tome različitih skupova $\mathscr{F}_v$ ima najviše 2^n (jer vrijedi $\mathscr{F}_v \in \mathscr{P}(\mathscr{F})$, a $|\mathscr{P}(\mathscr{F})| = 2^n$). Kako je $|N^{\mathfrak{w}}| = m > N(q,k) = 2^n$ tada iz Dirichletovog principa slijedi da postoje barem dva različita svijeta $v_1, v_2 \in N^{\mathfrak{w}}$ tako da vrijedi $\mathscr{F}_{v_1} = \mathscr{F}_{v_2}$, tj. za svaku σ-formulu $\varphi(x)$ kvantifikatorskog ranga najviše q vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{N} \vDash \varphi[v_1] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \vDash \varphi[v_2]. \tag{6.1}$$

Zbog linearnosti uređaja vrijedi točno jedno od: $v_1 R^{\mathfrak{N}} v_2$ ili $v_2 R^{\mathfrak{N}} v_1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $v_1 R^{\mathfrak{N}} v_2$. Označimo s $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}'_1$ i $\mathfrak{N}'_2$ sljedeće σ-podstrukture od $\mathfrak{N}$ koje su definirane ovako:

$$\begin{aligned}
N_1^{\mathfrak{w}} &= \{v \in N^{\mathfrak{w}} \mid v R^{\mathfrak{N}} v_1\}, \quad N_1^{\mathfrak{s}} = \emptyset, \\
N_2^{\mathfrak{w}} &= \{v \in N^{\mathfrak{w}} \mid v_1 R^{\mathfrak{N}} v \text{ ili } v = v_1\}, \quad N_2^{\mathfrak{s}} = N^{\mathfrak{s}}, \\
(N'_1)^{\mathfrak{w}} &= \{v \in N^{\mathfrak{w}} \mid v R^{\mathfrak{N}} v_2\}, \quad (N'_1)^{\mathfrak{s}} = \emptyset, \\
(N'_2)^{\mathfrak{w}} &= \{v \in N^{\mathfrak{w}} \mid v_2 R^{\mathfrak{N}} v \text{ ili } v = v_2\}, \quad (N'_2)^{\mathfrak{s}} = N^{\mathfrak{s}}.
\end{aligned}$$

Iz pretpostavke (6.1) primjenom teorema 8.5.1. slijedi da branitelj ima pobjedničku strategiju u Ehrenfeuchtovoj igri $G_q(\mathfrak{N}, v_1, \mathfrak{N}, v_2)$. Propozicija 8.6.3. povlači da tada branitelj ima pobjedničku strategiju u Ehrenfeuchtovoj igri $G_q(\mathfrak{N}_2, v_1, \mathfrak{N}'_2, v_2)$. Tada iz teorema 8.5.1. slijedi $(\mathfrak{N}_2, v_1) \equiv_q (\mathfrak{N}'_2, v_2)$.

Sada iz $(\mathfrak{N}_1, w) \equiv_q (\mathfrak{N}_1, w)$, $(\mathfrak{N}_2, v_1) \equiv_q (\mathfrak{N}'_2, v_2)$ primjenom propozicije 8.6.6. dobivamo $(\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, wv_1) \equiv_q (\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}'_2, wv_2)$. Iz toga jednostavno slijedi $(\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, w) \equiv_q (\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}'_2, w)$. Definirajmo σ-strukturu $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}'_2$. Kako očito vrijedi $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$ tada imamo $(\mathfrak{N}, w) \equiv_q (\mathfrak{N}', w)$.

Obzirom da za σ-strukturu $\mathfrak{N}'$ vrijedi $v_1 \notin (N')^{\mathfrak{w}}$, dobivamo da vrijedi $|(N')^{\mathfrak{w}}| < m$ te iz $w_1 \in (N'_2)^{\mathfrak{w}}$ slijedi $w_1 \in (N')^{\mathfrak{w}}$. Dakle, tražena σ-struktura je $\mathfrak{N}'$. ■

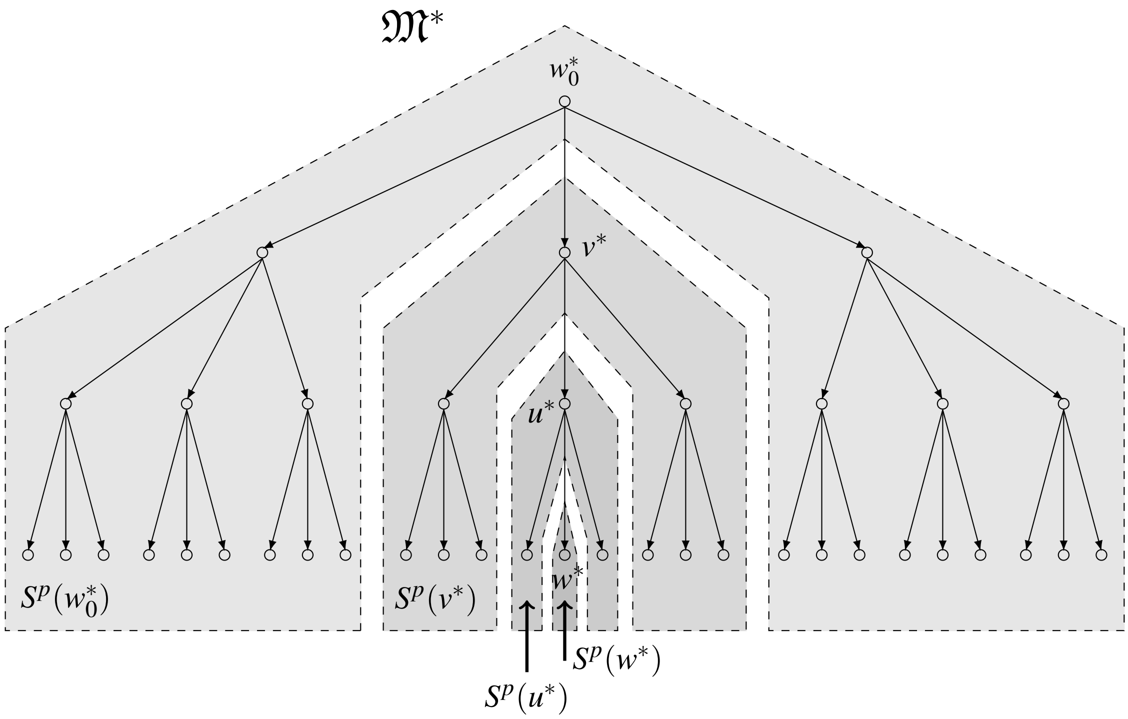
Fiksirajmo $q \in \mathbb{N}$ i neki konačan skup propozicionalnih varijabli *Prop*. Neka je σ signatura iz definicije 4.1.1. nad tim konačnim skupom *Prop*. Iz činjenice da je signatura σ konačna slijedi da postoji samo konačno mnogo međusobno neekvivalentnih σ-formula $\varphi(x)$ čiji je kvantifikatorski ranga najviše $q-1$. Označimo broj takvih σ-formula s n te označimo takve

σ-formule s $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. Tada označavamo s σ_q signaturu kao u definiciji 4.1.1. pri čemu se skup unarnih simbola koje promatramo sastoji od novih unarnih relacijskih simbola Q_1, Q_2, ..., Q_n. Intuitivno, zamišljamo da za σ-formulu $\varphi_i(x)$ imamo u signaturi σ_q jedan novi simbol Q_i, za svaki $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model, $w_0 \in \mathfrak{M}$ proizvoljan svijet tog modela te $\mathfrak{M}^*$ q-saturirano raspetljavanje iz svijeta w_0. Neka je $w^* \in \mathfrak{M}^*$ proizvoljan te neka je p jedinstveni maksimalni R^*-put od korijena w_0^* do svijeta w^*. Za svijet $v^* \in p$ definiramo sljedeći skup:

$$\begin{aligned} S^p(v^*) = \{v_1^* \in \mathfrak{M}^* \mid (v^* R^* v_1^* \text{ ili } v_1^* = v^*) \text{ i ne vrijedi } (v_2^* R^* v_1^* \text{ ili } v_2^* = v_1^*) \\ \text{za svaki } v_2^* \text{ takav da } v^* R^* v_2^* \text{ i } (v_2^* R^* w^* \text{ ili } v_2^* = w^*)\}. \end{aligned}$$

Upravo definirani skup $S^p(v^*)$ nazivamo sloj (eng. *slice*).



Slika 6.1: Verbruggein model $\mathfrak{M}^*$ s istaknutim skupovima $S^p(v_1^*)$, za svaki svijet v_1^* puta p od korijena w_0^* do svijeta w^*

Skup $S^p(v^*)$ zamišljamo kao skup svih svjetova podstabla od stabla $\mathfrak{M}^*$ čiji je korijen v^* te kojem smo uklonili sve elemente na putu p koji su R^*-sljedbenici svijeta v^* i sve R^*-sljedbenike tih svjetova. Na slici 6.1. prikazan je primjer 3-saturiranog raspetljavanja nekog modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta $w_0 \in \mathfrak{M}$ te su označeni skupovi $S^p(v_1^*)$, za sve svjetove v_1^* iz puta $p = \{w_0^*, v^*, u^*, w^*\}$. Kao što je vidljivo sa slike, skup $\{S^p(v_1^*) \mid v_1^* \in p\}$ čini jednu particiju skupa svih svjetova W^*.

Prema tome, za proizvoljno raspetljavanje $\mathfrak{M}^*$ i put p u $\mathfrak{M}^*$, možemo definirati preslikavanje η^p koje svakom svijetu $v \in \mathfrak{M}^*$ pridružuje jedinstveni svijet $\eta^p(v)$ takav da vrijedi $v \in S^p(\eta^p(v))$. Uočimo da na taj način svakom svijetu $v \in \mathfrak{M}^*$ možemo pridružiti jedinstveni svijet $\eta^p(v) \in p$.

Za proizvoljan put p u Verbruggeinom modelu $\mathfrak{M}^*$ i svijet $v^* \in p$ skup svjetova $S^p(v^*)$ poistovjećujemo s Verbruggeinom podmodelom $\mathfrak{N}^*$ modela $\mathfrak{M}^*$ čiji je nosač $S^p(v^*)$. Također u nastavku ćemo svaki Verbruggein model $\mathfrak{M}^*$ promatrati kao σ_q-strukturu ili σ-strukturu na način opisan u točki 4.1. To posebno znači i da Verbruggein model $S^p(v^*)$ poistovjećujemo s pripadnom σ_q-strukturom ili σ-strukturom.

Za svaki svijet $w^* \in \mathfrak{M}^*$ definiramo σ_q-strukturu $\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*, w^*)$ ovako:

(i) $L^{\mathfrak{w}} = \{v^* \in \mathfrak{M}^* \mid v^* R^* w^* \text{ ili } v^* = w^*\}$

(ii) $L^{\mathfrak{s}} = \mathscr{P}(L^{\mathfrak{w}})$

(iii) $v_1^* R^{\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*, w^*)} v_2^*$ ako i samo ako $v_1^* R^* v_2^*$

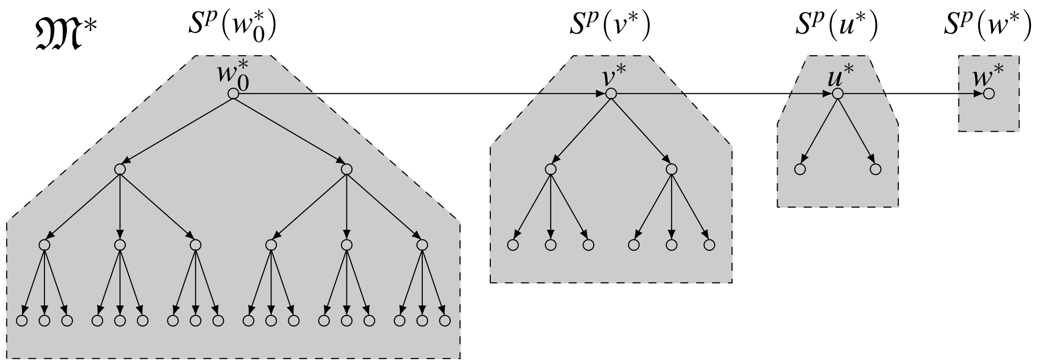
(iv) $(v_1^*, v_2^*, V^*) \in S^{\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*, w^*)}$ ako i samo ako $v_2^* S_{v_1^*}^* V^*$

(v) za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, vrijedi: $Q_i^{\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*, w^*)} v^*$ ako i samo ako vrijedi $S^p(v^*) \models \varphi_i[v^*]$.

Drugim riječima, ako s p označimo jedinstveni maksimalni R^*-put iz korijena w_0^* do svijeta w^* u modelu $\mathfrak{M}^*$ tada se $L^{\mathfrak{w}}$ sastoji od svih svjetova modela $\mathfrak{M}^*$ koji se nalaze na tom putu p. Uvjet (v) zamišljamo kao označavanje svakog svijeta v^* puta p skupom σ-formula $\varphi_i(x)$ kvantifikatorskog ranga najviše $q-1$ za koje vrijedi $S^p(v^*) \models \varphi_i[v^*]$. Tada $\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*, w^*)$ možemo shvatiti kao prikaz σ-strukture $\mathfrak{M}^*$ kao linearno uređenog skupa σ-podstabala koje razlikujemo do na $\equiv_{q-1}$ (linearni uređaj $\leq$ možemo zadati ovako: $S^p(v_1^*) \leq S^p(v_2^*)$ ako i samo ako $v_1^* = v_2^*$ ili $v_1^* R^* v_2^*$). Prikaz σ-strukture $\mathfrak{M}^*$ sa slike 6.1. kao linearno uređenog skupa podstabala $S^p(v_1^*)$, za $v_1^* \in p$, prikazan je na slici 6.2.

Sljedeća lema analogon je leme 4.6. iz [8]. Istaknimo prije te leme činjenicu da za proizvoljan Verbruggein model $\mathfrak{M}$, $q \in \mathbb{N}$, q-saturirano raspetljavanje $\mathfrak{M}^*$ iz svijeta $w \in \mathfrak{M}$ te svijet $v^* \in \mathfrak{M}^*$ vrijedi da je svijet w^* korijen σ-strukture $\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*, v^*)$.

Lema 6.1.2. Neka su $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ dva Verbruggeina modela te $\mathfrak{M}_1^*$ i $\mathfrak{M}_2^*$ njihova q-saturirana raspetljavanja iz svijeta $w_1 \in \mathfrak{M}_1$ odnosno svijeta $w_2 \in \mathfrak{M}_2$, tako da vrijedi:



Slika 6.2: Prikaz σ_q-strukture $\mathfrak{M}^*$ sa slike 6.1. kao linearno uređenog skupa podstabala $S^p(v_1^*)$, za $v_1^* \in p$.

(a) za svaki svijet $w^* \in \mathfrak{M}_1^*$ postoji svijet $v^* \in \mathfrak{M}_2^*$ takav da vrijedi $(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*) \equiv_{q-1} (\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*), w_2^*)$

(b) za svaki svijet $v^* \in \mathfrak{M}_2^*$ postoji svijet $w^* \in \mathfrak{M}_1^*$ takav da vrijedi $(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*) \equiv_{q-1} (\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*), w_2^*)$.

Tada vrijedi $(\mathfrak{M}_1^*, w_1^*) \equiv_q (\mathfrak{M}_2^*, w_2^*)$.

Dokaz. Iz teorema 8.5.1. slijedi da je dovoljno dokazati da postoji pobjednička strategija branitelja u Ehrenfeuchtovoj igri $G_q(\mathfrak{M}_1^*, w_1^*, \mathfrak{M}_2^*, w_2^*)$. Promotrimo dvije moguće situacije u 1. rundi te igre:

(1.) izazivač je izabrao σ-strukturu $\mathfrak{M}_1^*$ i neki svijet $w^* \in \mathfrak{M}_1^*$. Tada branitelj bira onaj svijet $v^* \in \mathfrak{M}_2^*$ za koji prema pretpostavci (a) leme vrijedi $(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*) \equiv_{q-1} (\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*), w_2^*)$.

(2.) izazivač je izabrao σ-strukturu $\mathfrak{M}_2^*$ i neki svijet $v^* \in \mathfrak{M}_2^*$. Tada branitelj bira onaj svijet $w^* \in \mathfrak{M}_1^*$ za koji prema pretpostavci (b) leme vrijedi $(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*) \equiv_{q-1} (\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*), w_2^*)$.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je u 1. rundi nastupila situacija (1.). Time su nakon 1. runde fiksirane σ_q-strukture $\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*)$ i $\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*)$ te preostaje opisati strategiju branitelja u preostalih $q-1$ rundi Ehrenfeuchtove igre $G_q(\mathfrak{M}_1^*, w_1^*, \mathfrak{M}_2^*, w_2^*)$.

Strategija branitelja je osigurati da nakon što je prošlo r rundi, pri čemu su u tih r rundi redom odabrani svjetovi w^*, $w^*_{(1)}$, ..., $w^*_{(r-1)}$ iz $\mathfrak{M}_1^*$ te svjetovi v^*, $v^*_{(1)}$, ..., $v^*_{(r-1)}$ iz $\mathfrak{M}_2^*$, vrijedi

$$\left.\begin{array}{r}(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*, \eta^p(w^*_{(1)}), \ldots, \eta^p(w^*_{(r-1)})) \equiv_{q-r} \\ (\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*), w_2^*, \eta^{p'}(v^*_{(1)}), \ldots, \eta^{p'}(v^*_{(r-1)}))\end{array}\right\} \tag{6.2}$$

te za svaki i, ako su $w^*_{(j_1)}, \ldots, w^*_{(j_k)}$ elementi od $S^p(\eta^p(w^*_{(i)}))$ da tada vrijedi

$$(S^p(\eta^p(w^*_{(i)})), w^*_{(j_1)}, \ldots, w^*_{(j_k)}) \equiv_{q-r} (S^{p'}(\eta^{p'}(v^*_{(i)})), v^*_{(j_1)}, \ldots, v^*_{(j_k)}). \tag{6.3}$$

Tvrdnja (6.2) treba nam samo kao pomoćna tvrdnja. Dokazujemo je istovremeno s tvrdnjom (6.3). Iz tvrdnje (6.3) očito slijedi traženi rezultat. Naime, kako su različiti skupovi $S^p(\eta^p(w^*_{(i)}))$ te različiti skupovi $S^p(\eta^{p'}(v^*_{(i)}))$ međusobno disjunktni te prema (6.3) i definiciji Ehrenfeuchtove igre vrijedi $w^*_{(j_1)} \ldots w^*_{(j_k)} \mapsto v^*_{(j_1)} \ldots v^*_{(j_k)} \in Part(S^p(\eta^p(w^*_{(i)})), S^{p'}(\eta^{p'}(v^*_{(i)})))$, slijedi $w^* w^*_{(1)} \ldots w^*_{(q-1)} \mapsto v^* v^*_{(1)} \ldots v^*_{(q-1)} \in Part(\mathfrak{M}_1^*, \mathfrak{M}_2^*)$. To znači da je branitelj pobijedio u q rundi ove igre a onda iz teorema 8.5.1. slijedi tražena tvrdnja $(\mathfrak{M}_1^*, w_1^*) \equiv_q (\mathfrak{M}_2^*, w_2^*)$.

Za $r = 1$ tvrdnja (6.2) glasi $(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*) \equiv_{q-1} (\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*), w_2^*)$, što vrijedi po pretpostavci. Tvrdnja (6.3) je trivijalno ispunjena (jer nemamo drugih $w^*_{(j)}$ iz $S^p(\eta^p(w^*))$).

Pretpostavimo da nakon r rundi vrijede tvrdnje (6.2) i (6.3). Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je u $(r+1)$. rundi izazivač odabrao σ-strukturu $\mathfrak{M}_1^*$ i neki svijet x^* iz te σ-strukture. Promatramo dva slučaja: postoji neki $i < r$ takav da skup $S^p(\eta^p(x^*))$ već sadrži svijet $w^*_{(i)}$ i ne postoji takav $i < r$.

Promotrimo prvo slučaj kada postoji neki $i < r$ takav da skup $S^p(\eta^p(x^*))$ već sadrži svijet $w^*_{(i)}$. Neka su $w^*_{(j_1)}, \ldots, w^*_{(j_k)}$ svi svjetovi koji su elementi skupa $S^p(\eta^p(x^*))$. Iz $w^*_{(i)} \in S^p(\eta^p(x^*))$ slijedi $S^p(\eta^p(x^*)) = S^p(\eta^p(w^*_{(i)}))$, a onda po pretpostavci (6.3) imamo:

$$(S^p(\eta^p(x^*)), w^*_{(j_1)}, \ldots, w^*_{(j_k)}) \equiv_{q-r} (S^{p'}(\eta^p(v^*_{(i)})), v^*_{(j_1)}, \ldots, v^*_{(j_k)}).$$

To znači da branitelj ima pobjedničku strategiju u sljedećoj Ehrenfeuchtovoj igri:

$$G_{q-r}(S^p(\eta^p(x^*)), w^*_{(j_1)} \ldots w^*_{(j_k)}, S^{p'}(\eta^{p'}(v^*_{(i)})) v^*_{(j_1)} \ldots v^*_{(j_k)}).$$

Obzirom da vrijedi $x^* \in S^p(\eta^p(x^*))$, branitelj može slijedeći tu strategiju odabrati neki svijet $y^* \in S^{p'}(\eta^{p'}(v^*_{(i)}))$. Time branitelj ima pobjedničku strategiju u preostalih $q - r - 1$ rundi te igre, tj. ima pobjedničku strategiju u sljedećoj igri:

$$G_{q-r-1}\left(S^p(\eta^p(x^*)), w^*_{(j_1)} \ldots w^*_{(j_k)} x^*, S^{p'}(\eta^{p'}(v^*_{(i)})), v^*_{(j_1)} \ldots v^*_{(j_k)} y^*\right).$$

Iz teorema 8.5.1. slijedi da vrijedi sljedeće:

$$(S^p(\eta^p(x^*)), w^*_{(j_1)}, \ldots, w^*_{(j_k)}, x^*) \equiv_{q-r-1} (S^{p'}(\eta^{p'}(v^*_{(i)})), v^*_{(j_1)}, \ldots, v^*_{(j_k)}, y^*).$$

Time smo dobili da ako branitelj u ovoj rundi igre odgovori na izazivačev izbor svijeta x^* izborom svijeta y^* tada vrijedi analogon tvrdnje (6.3) za slučaj $r+1$ (istaknuli smo pritom samo skupove $S^p(\eta^p(x^*))$ i $S^{p'}(\eta^{p'}(v^*))$ jer za ostale skupove $S^p\big(\eta^p(w^*_{(i)})\big)$ i $S^{p'}\big(\eta^{p'}(v^*_{(i)})\big)$ koji ne sadrže svijet x^* odnosno svijet y^*, i dalje vrijedi tvrdnja (6.3) za slučaj $r+1$). Preostaje još provjeriti da u ovom slučaju vrijedi i analogon tvrdnje (6.2) za slučaj $r+1$, tj. da vrijedi sljedeće:

$$\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_1, w^*), w^*_1, \eta^p\big(w^*_{(1)}\big), \ldots, \eta^p\big(w^*_{(r-1)}\big), \eta^p(x^*) \equiv_{q-r-1}$$

$$\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_2, v^*), w^*_2, \eta^{p'}\big(v^*_{(1)}\big), \ldots, \eta^{p'}\big(v^*_{(r-1)}\big), \eta^{p'}(y^*).$$

No, obzirom da je za neki $i < r$, $x^* \in S^p\big(\eta^p(w^*_{(i)})\big)$ i $y^* \in S^{p'}\big(\eta^{p'}(v^*_{(i)})\big)$ slijedi $\eta^p(x^*) = \eta^p\big(w^*_{(i)}\big)$ i $\eta^{p'}(y^*) = \eta^{p'}\big(v^*_{(i)}\big)$, tražena tvrdnja ekvivalentna je pretpostavci (6.2).

Preostaje još promotriti slučaj kad ne vrijedi da postoji neki $i < r$ takav da skup $S^p(\eta^p(x^*))$ već sadrži svijet $w^*_{(i)}$. Drugim riječima, skup $S^p(\eta^p(x^*))$ ne sadrži niti jedan prethodno odabrani svijet $w^*_{(i)}$. Vrijedi $\eta^p(x^*) \in \mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_1, w^*)$ jer se po definiciji preslikavanja η^p, $\eta^p(x^*)$ nalazi na putu p. Iz pretpostavke (6.2) i teorema 8.5.1. slijedi da branitelj ima pobjedničku strategiju sljedećoj igri:

$$G_{q-r}\Big(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_1, w^*), \eta^p\big(w^*_{(1)}\big) \ldots \eta^p\big(w^*_{(r-1)}\big), \mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_2, v^*), \eta^{p'}\big(v^*_{(1)}\big) \ldots \eta^{p'}\big(v^*_{(r-1)}\big)\Big).$$

Iz $\eta^p(x^*) \in \mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_1, w^*)$ slijedi da branitelj prema toj strategiji može odabrati neki svijet $v \in \mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_2, v^*)$ takav da ima pobjedničku strategiju u preostalih $q-r-1$ rundi te igre, tj. da ima pobjedničku strategiju u igri

$$G_{q-r-1}\Big(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_1, w^*), \eta^p\big(w^*_{(1)}\big) \ldots \eta^p\big(w^*_{(r-1)}\big)\eta^p(x^*), \mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_2, v^*), \eta^{p'}\big(v^*_{(1)}\big) \ldots \eta^{p'}\big(v^*_{(r-1)}\big)v\Big).$$

Teorem 8.5.1. tada povlači da vrijedi

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_1, w^*), \eta^p(w^*_{(1)}) \ldots \eta^p(w^*_{(r-1)})\eta^p(x^*)) \equiv_{q-r-1} \\ (\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_2, v^*), \eta^{p'}(v^*_{(1)}) \ldots \eta^{p'}(v^*_{(r-1)})v). \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Kako branitelj ima pobjedničku strategiju u igri

$$G_{q-r-1}\Big(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_1, w^*), \eta^p\big(w^*_{(1)}\big) \ldots \eta^p\big(w^*_{(r-1)}\big)\eta^p(x^*), \mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_2, v^*), \eta^{p'}\big(v^*_{(1)}\big) \ldots \eta^{p'}\big(v^*_{(r-1)}\big)v\Big),$$

iz definicije Ehrenfeuchtove igre slijedi

$$\eta^p\big(w^*_{(1)}\big) \ldots \eta^p\big(w^*_{(r-1)}\big)\eta^p(x^*) \mapsto \eta^{p'}\big(v^*_{(1)}\big) \ldots \eta^{p'}\big(v^*_{(r-1)}\big)v \in Part\big(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_1, w^*), \mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}^*_2, v^*)\big).$$

Tada definicija parcijalnog izomorfizma povlači da za svaku atomarnu formulu ψ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*) \Vdash \psi[\eta^p(x^*)] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*) \Vdash \psi[v].$$

Posebno za svaki $l \in \{1,2,\ldots,n\}$ vrijedi:

$$\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*) \Vdash (Q_l x)[\eta^p(x^*)] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*) \Vdash (Q_l x)[v].$$

To prema uvjetu (v) definicije σ_q-strukture $\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*)$ odnosno $\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*)$, znači da vrijedi $S^p(\eta^p(x^*)) \equiv_{q-1} S^{p'}(v)$. Tada iz teorema 8.5.1. slijedi da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_{q-1}(S^p(\eta^p(x^*)), S^{p'}(v))$. Prema toj strategiji branitelj tada može odabrati neki svijet $y^* \in S^{p'}(v)$. Pokažimo da tim odabirom vrijede analogoni tvrdnji (6.2) i (6.3) za slučaj $r+1$, tj. da vrijedi

$$\left.\begin{array}{l}\big(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_1^*, w^*), \eta^p(w^*_{(1)}) \ldots \eta^p(w^*_{(r-1)}) \eta^p(x^*)\big) \equiv_{q-r-1} \\ \qquad\qquad \big(\mathfrak{L}_q(\mathfrak{M}_2^*, v^*), \eta^{p'}(v^*_{(1)}) \ldots \eta^{p'}(v^*_{(r-1)}) \eta^{p'}(y^*)\big)\end{array}\right\} \tag{6.5}$$

te da za sve svjetove $w^*_{(j_1)}, \ldots, w^*_{(j_k)}$ koji su elementi skupa $S^p\big(\eta^p(x^*)\big)$ vrijedi

$$\big(S^p(\eta^p(x^*)), w^*_{(j_1)} \ldots w^*_{(j_k)}\big) \equiv_{q-r-1} \big(S^{p'}(\eta^{p'}(y^*)), v^*_{(j_1)} \ldots v^*_{(j_k)}\big). \tag{6.6}$$

Istaknimo da je ovdje dovoljno promatrati skup $S^p\big(\eta^p(x^*)\big)$ jer drugi skupovi $S^p\big(\eta^p(w^*_{(i)})\big)$ nisu promijenjeni pa se za njih tražena tvrdnja (6.6) svodi na pretpostavku (6.4).

Tvrdnja (6.5) slijedi iz (6.4) korištenjem da $y^* \in S^{p'}(v)$ po definiciji preslikavanja $\eta^{p'}$ povlači $\eta^{p'}(y^*) = v$. Tvrdnja (6.6) slijedi iz $S^p\big(\eta^p(x^*)\big) \equiv_{q-1} S^{p'}(v)$. Naime tada branitelj ima pobjedničku strategiju i u igri

$$G_{q-r-1}\Big(S^p\big(\eta^p(x^*)\big), w^*_{(j_1)} \ldots w^*_{(j_k)}, S^{p'}\big(\eta^{p'}(y^*)\big), v^*_{(j_1)} \ldots v^*_{(j_k)}\Big),$$

tj. vrijedi tvrdnja (6.6).

■

U svrhu iskazivanja i dokazivanja sljedeće leme uvodimo prvo neke oznake. Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model i $q \in \mathbb{N}$. Za q-saturirano raspetljavanje $\mathfrak{M}^*$ tog modela iz nekog svijeta w_0^* te neki svijet $a \in \mathfrak{M}^*$, sa $\mathfrak{M}_a^*$ označavamo Verbruggein podmodel koji je podstablo od $\mathfrak{M}^*$ s korijenom a. Za dvije σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ kažemo da su **izomorfne**, i pišemo $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ ako postoji preslikavanje p koje je parcijalni izomorfizam za koji vrijedi $dom(p) = M^{\mathfrak{w}} \cup M^{\mathfrak{s}}$ i $rng(p) = N^{\mathfrak{w}} \cup N^{\mathfrak{s}}$.

Tvrdnja sljedeće leme analogna je napomeni 4.7. u [8].

Lema 6.1.3. Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, w_0 proizvoljan svijet modela $\mathfrak{M}$ te $\mathfrak{M}^*$ q-saturirano raspetljavanje modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w_0. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ proizvoljan te neka su svjetovi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{M}^*$ takvi da vrijedi $a_1 R^* a_2 R^* \ldots R^* a_n$. Tada za svaki maksimalni R^*-put p koji sadrži svjetove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $(S^p(a_i), a_i) \equiv_{q-1} (\mathfrak{M}^*_{a_i}, a_i)$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

(b) postoji maksimalni put $p' = (a'_1 R^* \ldots R^* a'_n)$ takav da vrijedi $a_1 = a'_1$ i $(S^{p'}(a'_i), a'_i) \equiv_{q-1} (S^p(a_i), a_i)$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dokaz. (a) Pokazat ćemo da za svaki svijet w^* puta p vrijedi $(S^p(w^*), w^*) \equiv_{q-1} (\mathfrak{M}^*_{w^*}, w^*)$. Tada posebno zbog $a_i \in p$ vrijedi tražena tvrdnja $(S^p(a_i), a_i) \equiv_{q-1} (\mathfrak{M}^*_{a_i}, a_i)$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zbog inverzne dobre fundiranosti relacije R^* put p je konačan pa mora postojati R^*-maksimalni svijet puta p. Označimo taj svijet s u^*. Tada prema definiciji skupa $S^p(u^*)$ vrijedi $S^p(u^*) = \mathfrak{M}^*_{u^*}$. To povlači da posebno vrijedi $(S^p(u^*), u^*) \equiv_{q-1} (\mathfrak{M}^*_{u^*}, u^*)$.

Neka je $w^* \in \mathfrak{M}^*$ proizvoljan svijet puta p za koji vrijedi $w^* \neq u^*$. Tada svijet w^* ima neposrednog R^*-sljedbenika v^* za koji vrijedi $v^* \in p$. Svijet v^* je riječ oblika $w^*(v, l)$, za neki svijet $v \in \mathfrak{M}$ i neki $l \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Također, tada vrijedi $S^p(w^*) = \mathfrak{M}^*_{w^*} \setminus \mathfrak{M}^*_{v^*}$. Prema propoziciji 5.2.5. svijet w^* ima barem q neposrednih sljedbenika $v_i^* = (v, i)$, takvih da su podmodeli $\mathfrak{M}^*_{v_i^*}$ međusobno izomorfni. Opisat ćemo pobjedničku strategiju branitelja u Ehrenfeuchtovoj igri $G_{q-1}(S^p(w^*), w^*, \mathfrak{M}^*_{w^*}, w^*)$. Ukoliko je izazivač u nekoj od $q-1$ rundi te igre odabrao neki svijet $x^* \in \mathfrak{M}^*_{w^*}$ takav da vrijedi $x^* \notin \mathfrak{M}^*_{v_i^*}$, za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, branitelj može odabrati taj isti svijet x^* s obzirom da vrijedi $x^* \in \mathfrak{M}^*_{w^*} \setminus \mathfrak{M}^*_{v^*} = S^p(w^*)$ (jer $v^* = v_i^*$, za neki $i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$).

Promotrimo još slučaj kada je izazivač u k-toj rundi, za neki $k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ odabrao neki svijet $x^* \in \mathfrak{M}^*_{v_i^*}$, za neki $i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Razlikujemo dva slučaja:

(a1) izazivač nije niti u jednoj od proteklih $k-1$ rundi odabrao neki svijet iz $\mathfrak{M}^*_{v_i^*}$. Označimo s Q skup $\{j \in \{0, 1 \ldots, q-1\} \mid j \neq l$ i u prvih $k-1$ rundi branitelj nije odabrao niti jedan svijet iz $\mathfrak{M}^*_{v^*_j}\}$. Taj skup je neprazan jer skup $\{0,1\dots,q-1\}\setminus\{l\}$ ima $q-1$ elemenata, dok je u Ehrenfeuchtovoj igri $G_{q-1}(S^p(w^*),w^*,\mathfrak{M}^*_{w^*},w^*)$ prije k-te runde odigrano $k-1<q-1$ rundi. Stoga postoji bar jedan $j\in Q$, a onda postoji i $j'=\min Q$. Vrijedi da je model $\mathfrak{M}^*_{v^*_i}$ izomorfan s $\mathfrak{M}^*_{v^*_{j'}}$. Označimo s f izomorfizam tih struktura. Tada branitelj u ovoj rundi bira svijet $f(x^*)\in\mathfrak{M}^*_{v^*_{j'}}$.

(a2) izazivač je u proteklih $k-1$ rundi već odabrao neki svijet x^*_1 iz $\mathfrak{M}^*_{v^*_i}$. Tada je u toj rundi nastupio prethodno opisani slučaj (a1), pa je slijedeći opisanu strategiju u tom slučaju odabrao svijet $f(x^*_1)$ iz $\mathfrak{M}^*_{v^*_j}$, pri čemu je f izomorfizam struktura $\mathfrak{M}^*_{v^*_i}$ i $\mathfrak{M}^*_{v^*_j}$. Tada branitelj u ovoj rundi bira svijet $f(x^*)\in\mathfrak{M}^*_{v^*_j}$.

Iz opisane strategije slijedi da je $a_1\dots a_{q-1}\mapsto b_1\dots b_{q-1}\in Part(S^p(w^*),\mathfrak{M}^*_{w^*})$, pri čemu smo s a_i označili izbor izazivača, a s b_i izbor branitelja u i-toj rundi ove igre. Dakle, opisana je pobjednička strategija branitelja u Ehrenfeuchtovoj igri $G_{q-1}(S^p(w^*),w^*,\mathfrak{M}^*_{w^*}, w^*)$. Iz teorema 8.5.1. slijedi da vrijedi $(S^p(w^*),w^*)\equiv_{q-1}(\mathfrak{M}^*_{w^*},w^*)$.

(b) Za svaki $i\in\{1,2,\dots,n\}$, prema definiciji 5.1.1. činjenica $a_i\in\mathfrak{M}^*$ znači da je a_i riječ nad alfabetom $\{(w,l)\mid w\in\mathfrak{M},\ l\in\mathbb{N}\}$. Neka je (w_i,l_i) posljednji dio u riječi a_i. Definiramo $a'_1=a_1$ te $a'_i=a'_{i-1}(w_i,l_i)$, za $i\in\{2,\dots,n\}$. Sada se na isti način kao u dokazu (a) tvrdnje, korištenjem propozicije 5.2.5. opisuje pobjednička strategija branitelja u Ehrenfeuchtovoj igri $G_{q-1}(S^p(a_i),a_i,S^{p'}(a'_i),a'_i)$. Tada iz teorema 8.5.1. slijedi da vrijedi tražena tvrdnja $(S^{p'}(a'_i),a'_i)\equiv_{q-1}(S^p(a_i),a_i)$, za svaki $i\in\{1,2,\dots,n\}$.

■

Lema 6.1.4. Za svaki $q\in\mathbb{N}$ postoji $n\in\mathbb{N}$ takav da za sve Verbruggeine modele $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te njihove svjetove $w\in\mathfrak{M}$ i $w'\in\mathfrak{M}'$ vrijedi: ako $\mathfrak{M},w \leftrightsquigarrow_n \mathfrak{M}',w'$ tada za q-saturirana raspetljavanja tih modela iz w, odnosno w', vrijedi $(\mathfrak{M}^*,w^*)\equiv_q((\mathfrak{M}')^*,(w')^*)$.

Dokaz. Za svaki $q\in\mathbb{N}$ postoji do na logičku ekvivalenciju samo konačno mnogo σ-formula čiji je kvantifikatorski rang najviše q. Označimo taj broj međusobno neekvivalentnih formula sa $f(q)$. Definiramo funkciju $n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ rekurzivno ovako:

$$n(0)=0$$
$$n(q+1)=N(q,f(q))\cdot(n(q)+1)$$

pri čemu je N funkcija iz leme 6.1.1. Indukcijom po $q\in\mathbb{N}$ dokazujemo sljedeću tvrdnju:

> za sve Verbruggeine modele $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te njihove svjetove $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ takve da $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_{n(q)} \mathfrak{M}', w'$ imamo da za q-saturirana raspetljavanja tih modela iz svijeta w, odnosno svijeta w', vrijedi $(\mathfrak{M}^*, w^*) \equiv_q ((\mathfrak{M}')^*, (w')^*)$.

Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_{n(0)} \mathfrak{M}', w'$. Iz definicije funkcije n imamo $n(0) = 0$ pa iz prethodnog slijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_0 \mathfrak{M}', w'$. To znači da svjetovi w i w' zadovoljavaju iste propozicionalne varijable. Tada za njihova 0-saturirana raspetljavanja iz svijeta w, odnosno svijeta w', vrijedi $(\mathfrak{M}^*, w^*) \equiv_0 ((\mathfrak{M}')^*, (w')^*)$.

Pretpostavimo sada da za neki $q \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

> za sve Verbruggeine modele $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ te njihove svjetove $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ takve da $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_{n(q)} \mathfrak{M}', w'$, imamo da za q-saturirana raspetljavanja tih modela iz svijeta w, odnosno svijeta w', vrijedi $(\mathfrak{M}^*, w^*) \equiv_q ((\mathfrak{M}')^*, (w')^*)$.

Promotrimo prvo malo pobliže što nam daje induktivna pretpostavka. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan Verbruggein model te $w \in \mathfrak{M}$ njegov svijet. Označimo s A_w konjunkciju svih međusobno neekvivalentnih IL-formula modalne dubine najviše $n(q)$ koje su istinite na svijetu w. Budući da postoji samo konačno mnogo (do na logičku ekvivalenciju) IL-formula modalne dubine najviše $n(q)$, tada je IL-formula A_w dobro definirana. Tada za svaki Verbruggein model $\mathfrak{M}'$ i njegov svijet $w' \in \mathfrak{M}'$ takav da $\mathfrak{M}', w' \Vdash A_w$ vrijedi da su svjetovi w i w' $n(q)$-modalno ekvivalentni, pa teorem 3.6.2. povlači $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_{n(q)} \mathfrak{M}', w'$. Iz induktivne pretpostavke slijedi da vrijedi $(\mathfrak{M}^*, w^*) \equiv_q ((\mathfrak{M}')^*, (w')^*)$.

U svrhu dokazivanja koraka indukcije pretpostavimo da su $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ proizvoljni Verbruggeini modeli te $w_1 \in \mathfrak{M}_1$ i $w_2 \in \mathfrak{M}_2$ njihovi svjetovi takvi da vrijedi $\mathfrak{M}_1, w_1 \leftrightsquigarrow_{n(q+1)} \mathfrak{M}_2, w_2$. Treba pokazati da za $(q+1)$-saturirana raspetljavanja $\mathfrak{M}_1^*$ i $\mathfrak{M}_2^*$ tih modela iz svijeta w_1 odnosno svijeta w_2, vrijedi $(\mathfrak{M}_1^*, w_1^*) \equiv_q (\mathfrak{M}_2^*, w_2^*)$.

Koristit ćemo lemu 6.1.2. Zbog očite simetričnosti zahtjeva (a) i (b) te leme dovoljno je za traženu tvrdnju koraka indukcije pokazati da je zadovoljen zahtjev (a), tj. da vrijedi:

> za svaki svijet $w^* \in \mathfrak{M}_1^*$ postoji svijet $v^* \in \mathfrak{M}_2^*$ takav da vrijedi $(\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*) \equiv_q (\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_2^*, v^*), w_2^*)$.

Neka je svijet $w^* \in \mathfrak{M}_1^*$ proizvoljan. Očito je σ-struktura $\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*)$ konačna i relacija $R^{\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*)}$ je strogi linearni uređaj (i σ je nad konačnim *Prop*), pa prema lemi 6.1.1 postoji

σ-podstruktura $\mathfrak{N}_1$ (s korijenom $(w')^*$) od $\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*)$ s ukupno $N \leq N(q, f(q))$ elemenata koja sadrži $R^{\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*)}$-najveći element od $\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*)$ i za koju vrijedi sljedeće:

$$(\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*) \equiv_q (\mathfrak{N}_1, (w_1)^*).$$

Kako je $R^{\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*)}$-najveći element skupa $\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*)$ upravo svijet w^*, prethodno povlači $w^* \in \mathfrak{N}_1$.

Posebno za strukturu $\mathfrak{N}_1$ kao σ-podstrukturu od $L_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*)$ vrijedi da je $R^{\mathfrak{N}_1}$ strogi linearni uređaj. Znamo da struktura $\mathfrak{N}_1$ ima samo N svjetova, pa ih možemo označiti s $w_1^*, \dots, w_N^*$ tako da vrijedi $w_1^* R_1^* \dots R_1^* w_N^*$. Iz toga slijedi $w_N^* = w^*$.

Promotrimo sljedeći put u $\mathfrak{M}_1^*$:

$$p = w_0^* R_1^* w_1^* R_1^* w_2^* R_1^* \dots R_1^* w^*,$$

pri čemu je $w_0^* = (w_1, 0)$.

Iz leme 6.1.3. slijedi da postoji maksimalni R^*-put

$$p' = v_0^* R_1^* v_1^* R^* \dots R^* v_N^*$$

iz svijeta $v_0^* = (w_1, 0)$ do nekog svijeta v_N^* tako da za svaki $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ vrijedi $S^p(w_i^*) \cong S^p(v_i^*)$. To povlači $(\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, v_N^*), w_1^*) \equiv_q (\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*)$.

Za svaki $i \leqslant N$ neka je $\mathfrak{M}_{1,i}^*$ Verbruggein model induciran podstablom od $\mathfrak{M}_1^*$ s korijenom v_i^* te označimo s A_i konjunkciju svih međusobno neekvivalentnih IL-formula modalne dubine najviše $n(q)$ koje su istinite na svijetu $v_i^* \in \mathfrak{M}_{1,i}^*$. Kako takvih IL-formula ima konačno mnogo, IL-formula A_i je dobro definirana za svaki $i \leqslant N$.

Definiramo IL-formulu A ovako:

$$A \equiv A_0 \land \Diamond(A_1 \land \Diamond(A_2 \cdots \land \Diamond A_N) \cdots)).$$

Kako je za svaki $i \leqslant N$ formula A_i modalne dubine najviše $n(q)$ (kao konjunkcija IL-formula modalne dubine najviše $n(q)$) slijedi da je modalna dubina IL-formule A najviše

$$N(q, f(q)) \cdot (n(q) + 1) = n(q+1),$$

što slijedi iz $N + n(q) \leq N \cdot (n(q) + 1) \leq N(q, f(q)) \cdot (n(q) + 1)$.

Iz definicije IL-formule A slijedi $\mathfrak{M}_1^*(w_1,0) \Vdash A$, pa pretpostavka $\mathfrak{M}_1, w_1 \leftrightsquigarrow_{n(q+1)} \mathfrak{M}_2, w_2$ i činjenica da je A IL-formula čija je modalna dubina najviše $n(q+1)$, povlače $\mathfrak{M}_2^*(w_2,0) \Vdash A$. To pak znači da postoji put (za koji zbog leme 6.1.3. možemo pretpostaviti da je maksimalan)

$$u_0^* R_2^* u_1^* R_2^* u_2^* \dots R_2^* u_N^*,$$

pri čemu je $u_0 = (w_2, 0)$, takav da za svaki $i \leqslant N$ vrijedi $u_i^* \Vdash A_i$.

Iz pretpostavke indukcije sada slijedi (uzevši u obzir kako je definirana IL-formula A_i, za svaki $i \leqslant N$) $\mathfrak{M}_{1,i}^* \equiv_q \mathfrak{M}_{2,i}^*$, gdje su $\mathfrak{M}_{2,i}^*$ inducirani podstablima od $\mathfrak{M}_2^*$ s korijenom u_i^*, za svaki $i \leqslant N$. Lema 6.1.3 povlači da su odgovarajući slojevi q-elementarno ekvivalentni, pa vrijedi $(\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_1^*, w^*), w_1^*) \equiv_q (\mathfrak{L}_{q+1}(\mathfrak{M}_2^*, v^*), w_2^*)$, što je i trebalo pokazati. ■

6.2. Dokaz van Benthemovog teorema

U ovoj točki dokazujemo van Benthemov teorem za logiku interpretabilnosti u odnosu na Verbruggeinu semantiku. Van Benthemov teorem za osnovnu modalnu logiku može se pronaći, primjerice, u [5]. Analogon tog teorema za logiku intepretabilnosti u odnosu na Veltmanovu semantiku dokazan je u [38] i to metodama koje se temelje na bisimulacijskim igrama, a koje su razvijene u [8]. Kako bismo dokazali van Bethemov teorem koristit ćemo rezultate za Verbruggeinu semantiku koje smo dokazali u prethodnim poglavljima.

U ovoj točki sa σ ćemo označavati signaturu dvosortne logike prvog reda koja je dana u definiciji 4.1.1.

Teorem 6.2.1. Neka σ-formula $\varphi(x)$ ekvivalentna je standardnoj translaciji neke IL-formule u odnosu na Verbruggeine modele ako i samo ako je σ-formula $\varphi(x)$ invarijantna na w-bisimulacije Verbruggeinih modela.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je formula $\varphi(x)$ ekvivalentna standardnoj translaciji neke IL-formule F u odnosu na Verbruggeine modele. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ proizvoljni Verbruggeini modeli te neka su $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}', w'$. Tada iz propozicije 3.3.6. slijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$. Sada primjenom propozicije 4.2.2. dobivamo da redom vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \models \varphi(x)[w] \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models ST_x(F)[w] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}, w \Vdash F \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash F \\ &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}' \models ST_x(F)[w'] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}' \models \varphi(x)[w'].\end{aligned}$$

Time smo dokazali da je formula $\varphi(x)$ invarijantna na w-bisimulacije Verbruggeinih modela.

Dokažimo sada da vrijedi i obratna implikacija iz iskaza teorema. U tu svrhu pretpostavimo da je σ-formula $\varphi(x)$ invarijantna na w-bisimulacije Verbruggeinih modela. Primijetimo da je dovoljno dokazati da je σ-formula $\varphi(x)$ invarijantna na n-w-bisimulacije Verbruggeinih modela za neki $n \in \mathbb{N}$ jer tada propozicija 4.2.4. povlači da je σ-formula $\varphi(x)$ ekvivalentna standardnoj translaciji neke IL-formule.

Neka je q kvantifikatorski rang σ-formule $\varphi(x)$. Iz leme 6.1.4 slijedi da postoji $n \in \mathbb{N}$ koji ima svojstvo iz iskaza navedene leme. Tvrdimo da je σ-formula $\varphi(x)$ invarijatna za n-w-bisimulacije. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ proizvoljni Verbruggeini modeli te $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow_n \mathfrak{M}', w'$. Označimo sa $\mathfrak{M}^*$ q-saturirano raspetljavanje modela $\mathfrak{M}$ iz svijeta w odnosno sa $(\mathfrak{M}')^*$ označimo q-saturirano raspetljavanje modela $\mathfrak{M}'$ iz svijeta w'. Iz leme 6.1.4. slijedi da vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}^* \vDash \varphi(x)[(w,0)] \quad \text{ako i samo ako} \quad (\mathfrak{M}')^* \vDash \varphi(x)[(w',0)]. \tag{6.7}$$

Iz propozicije 5.2.3. znamo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}^*, (w,0) \quad \text{i} \quad \mathfrak{M}', w' \leftrightsquigarrow (\mathfrak{M}')^*, (w',0)$.

Budući da je po pretpostavci σ-formula $\varphi(x)$ invarijantna na w-bisimulacije tada iz prethodne ekvivalencije i (6.7) slijedi da redom vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \vDash \varphi(x)[w] \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}^* \vDash \varphi(x)[(w,0)] \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{M}')^* \vDash \varphi(x)[(w',0)] \\ &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}' \vDash \varphi(x)[w'] \end{aligned}$$

Time smo dokazali da je σ-formula $\varphi(x)$ invarijantna na n-w-bisimulacije. ■

Time smo dokazali van Benthemov teorem karakterizacije za logiku interpretabilnosti u odnosu na Verbruggeinu semantiku korištenjem slabih bisimulacijskih igara, a ne klasičnim metodama koje koriste ω-saturirane modele. Problem postojanja saturiranih Verbruggeinih modela je otvoren, kao što je otvoren i problem postojanja saturiranih GL-modela. Rješavanje tog problema moglo bi dovesti do alternativnog dokaza tog teorema. Obzirom da je inverzna dobra fundiranost relacije R jedino svojstvo Verbruggeinih modela koje nije definabilno u logici prvog reda, nalaženje saturiranih GL-modela ne bi trebalo biti teže od nalaženja saturiranih Verbruggeinih modela.

7. Usporedba bisimulacije i w-bisimulacije

U ovom poglavlju razmatramo nekoliko znanstvenih članaka koji koriste bisimulacije Verbruggeinih modela i njihova svojstva u dokazivanju glavnih rezultata tih članaka. Pokazat ćemo da ti rezultati i dalje vrijede ako koristimo w-bisimulacije Verbruggeinih modela umjesto bisimulacija Verbruggeinih modela. Preciznije, analizirat ćemo koja se svojstva bisimulacija Verbruggeinih modela koriste u dokazima tih rezultata i vidjeti da analogna svojstva zadovoljavaju w-bisimulacije Verbruggeinih modela.

7.1. Filtracije Verbruggeinih modela

U teoremu 5.3.4 koristili smo metodu selekcije kako bismo pokazali da logika interpretabilnosti IL ima svojstvo konačnih modela s obzirom na Verbruggeinu semantiku. U članku [39] to je pokazano korištenjem metode filtracije. Metoda selekcije često se ne može jednostavno poopćiti kako bi se primijenila u dokazivanju svojstva konačnih modela za ostale sisteme poput ILM ili ILM_0. Razlog je u tome što od Verbruggeinih modela zahtijevamo dodatna svojstva koja se provođenjem metode selekcije često gube, pa dobiveni konačan Verbruggein model nije onaj koji nam je potreban (što tada zahtijeva dodatan netrivijalan posao kako bismo dobili traženi model). Tu se metoda filtracije pokazala uspješnijom. Tako su pomoću nje u članku [39] pokazana i svojstva konačnih modela za logike interpretabilnosti ILM i ILM_0 s obzirom na Verbruggeinu semantiku.

Svojstva bisimulacija između Verbruggeinih modela koja su korištena u [39] istaknuta su u lemi 2.2. tog članka:

Neka su $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ Verbruggeini modeli. Tada vrijedi:

(a) Ako su $w \in W$ i $w' \in W'$ bisimulirani tada su i modalno ekvivalentni.

(b) Identiteta $\{(w,w) : w \in W\} \subseteq W \times W$ je bisimulacija između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}$.

(c) Inverz bisimulacije između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ je bisimulacija između $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}$.

(d) Kompozicija bisimulacija $Z \subseteq W \times W'$ i $Z' \subseteq W' \times W''$ je bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}''$.

(e) Unija neprazne familije bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ je također bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Prema tome postoji najveća bisimulacija između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.

Tvrdnje leme vrijede i za w-bisimulacije Verbruggeinih modela: svojstvo (a) za w-bisimulacije dokazali smo kao tvrdnju (b) propozicije 3.3.6, dok smo ostala svojstva dokazali u propoziciji 3.2.1. Pritom nismo eksplicitno iskazali da je unija svih w-bisimulacija između dva Verbruggeina modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ najveća w-bisimulacija između tih modela. No, to se lako dobiva iz tvrdnje (d) propozicije 3.2.1. Označimo s $\sim_{\mathfrak{M}}$ najveću w-bisimulaciju na $\mathfrak{M}$, tj. w-bisimulaciju između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}$. Iz propozicije 3.2.1 također slijedi da je $\sim_{\mathfrak{M}}$ jedna relacija ekvivalencije na W.

Prije opisa metode filtracije koja je korištena u članku [39] ističemo svojstva bisimulacije Verbruggeinih modela koja se u tom članku koriste. Oba svojstva slijede izravno iz definicije bisimulacije Verbruggeinih modela 2.1.1.

Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Verbruggeina modela i $Z \subseteq W \times W'$ bisimulacija. Tada vrijedi:

(forth') za svaki par $(w,w') \in Z$ i za svaki svijet $u \in W$ takav da vrijedi wRu, postoji svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi uZu'

(back') za svaki par $(w,w') \in Z$ i za svaki svijet $u' \in W'$ takav da vrijedi $w'R'u'$, postoji svijet $u \in W$ takav da vrijedi uZu'.

Glavna ideja metode selekcije jest odabrati konačan broj prikladnih svjetova polaznog modela. Za razliku od toga, u metodi filtracije koristimo neku relaciju ekvivalencije među svjetovima početnog modela kako bismo dobili novi model čiji su svjetovi klase ekvivalencije u polaznom modelu. Određenom daljnjom transformacijom izdvajamo samo konačno mnogo klasa ekvivalencije čime se dobiva konačan model (čiji svjetovi su te klase). Sada ćemo navedenu konstrukciju opisati detaljnije.

Klase ekvivalencije koje se promatraju za zadani model $\mathfrak{M}$ dobivene su korištenjem najveće bisimulacije $\approx_{\mathfrak{M}}$ na $\mathfrak{M}$ koja je ujedno i relacija ekvivalencije na W. U lemi 2.2. iz [39] opisan je postupak kojim se iz Verbruggeinog modela $\mathfrak{M}$ dobiva struktura $\widetilde{\mathfrak{M}} = (\widetilde{W}, \widetilde{R}, \{\widetilde{S}_w : w \in \widetilde{W}\}, \Vdash)$ tako da je $\widetilde{W}$ skup klasa ekvivalencije s obzirom na tu relaciju ekvivalencije. Lema 2.2. iz [39] pokazuje da je tako dobivena struktura jedan Verbruggein model, tj. da zadovoljava svojstva iz definicije 1.3.1. Pritom je svojstvo bisimulacije koje se koristi u dokazu svojstava tranzitivnosti i inverzno dobre fundiranosti relacije $\widetilde{R}$ te svojstva (iv) iz definicije 1.3.1. svojstvo (back') za relaciju $\approx_{\mathfrak{M}}$.

Kako je w-bisimulacija $\sim_{\mathfrak{M}}$ također relacija ekvivalencije na W, možemo nju iskoristiti umjesto najveće bisimulacije na $\mathfrak{M}$ za dobivanje klasa ekvivalencije. Pritom iz definicije w-bisimulacije 3.1.1. slijedi da za tu relaciju također vrijedi uvjet (back'). Prema tome zaključujemo da je tom zamjenom dobivena struktura $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ponovo jedan Verbruggein model.

Kako bi se pokazalo svojstvo konačnih modela za logiku interpretabilnosti IL u dokazu teorema 3.2. članka [39] se za danu formulu A i Verbruggein model $\mathfrak{M}$ na čijem je svijetu formula A istinita primjenjuje spomenuta transformacija kako bi se dobio model $\widetilde{\mathfrak{M}}$ na čijem je svijetu formula A također istinita. No, tako se ne dobiva nužno konačan Verbruggein model, ali se dobiva model za čije duljine $\widetilde{R}$-lanaca možemo naći neku gornju ogradu. Zatim se ponovnom upotrebom te transformacije iz modela $\widetilde{\mathfrak{M}}$ dobiva traženi konačan model za formulu A. U tu svrhu koristi se pojam n-bisimulacije te sljedeća svojstva n-bisimulacije koja su iskazana u lemi 3.1. iz tog članka.

Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Verbruggeina modela te $w \in W$ i $w' \in W'$ njihovi svjetovi. Tada vrijedi:

(a) ako su svjetovi w i w' n-bisimulirani, tada su oni i n-modalno ekvivalentni

(b) u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli, ako su svjetovi w i w' n-modalno ekvivalentni, tada su oni i n-bisimulirani.

Svojstvo (a) vrijedi i u slučaju n-w-bisimulacija Verbruggeinih modela što je dokazano u propoziciji 3.3.6. Svojstvo (b) ne vrijedi za n-bisimulacije Verbruggeinih modela – riječ je o grešci koju smo opisali u potpoglavlju 2.6. Međutim, to svojstvo vrijedi u slučaju n-w-bisimulacija Verbruggeinih modela, što smo dokazali u teoremu 3.6.2.

Osim toga, u dokazu iz članka koristi se i sljedeća tvrdnja:

Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model i $m \in \mathbb{N}$. Ako svaki R-lanac u modelu $\mathfrak{M}$ ima najviše $m+1$ elemenata, tada za sve svjetove $w, v \in \mathfrak{M}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: svjetovi w i v su bisimulirani ako i samo ako su m-bisimulirani.

To svojstvo se jednostavno dokazuje, a također se jednostavno dokazuje i analogno svojstvo u slučaju w-bisimulacija Verbruggeinih modela. S obzirom da za sva svojstva bisimulacija koja su potrebna u dokazu svojstva konačnih modela za logiku interpretabilnosti vrijede njihovi analogoni za slabe bisimulacije, zaključujemo da taj rezultat vrijedi ako umjesto bisimulacije koristimo w-bisimulacije Verbruggeinih modela.

U članku [39] se također pokazuje da logike interpretabilnosti ILM i ILM_0 imaju svojstvo konačnih modela. Preciznije, za svaku od tih logika promatraju se Verbruggeini modeli s određenim svojstvom. Za proizvoljnu formulu A, ukoliko neki Verbruggein model ima to svojstvo i formula A je istinita na nekom svijetu tog modela, treba naći konačan Verbruggein model koji ponovo ima traženo svojstvo i na čijem je svijetu istinita formula A. Prema tome dovoljno je za željeno svojstvo X, pokazati da ako Verbruggein model ima svojstvo X da tada i model dobiven prije spomenutom transformacijom $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ima to isto svojstvo. Drugim riječima, treba pokazati da ta transformacija čuva željeno svojstvo. Za logiku ILM to je u članku [39] napravljeno u lemi 4.1, a za logiku ILM_0 to je napravljeno u lemi 4.3. U obje te leme od svojstava bisimulacije koristi se jedino ranije navedeno svojstvo (forth') koje također vrijedi i za w-bisimulacije Verbruggeinih modela. Prema tome zaključujemo da rezultat svojstva konačnih modela za te logike vrijedi ako umjesto bisimulacija koristimo w-bisimulacije Verbruggeinih modela.

7.2. ODLUČIVOST LOGIKA INTERPRETABILNOSTI $\mathtt{ILM}_0$ I $\mathtt{ILW}^*$

Prije pregleda rezultata iz članka [31] uvodimo oznaku koja je korištena u tom članku. Za princip interpretabilnosti $\mathtt{X}$ označavamo s $(\mathtt{X})$ svojstvo Veltmanovih okvira takvo da vrijedi sljedeća ekvivalencija: princip $\mathtt{X}$ je valjan na nekom Veltmanovom okviru ako i samo ako taj Veltmanov okvir ima svojstvo $(\mathtt{X})$. Slično označavamo s $(\mathtt{X})_{gen}$ svojstvo Verbruggeinih okvira takvo da vrijedi sljedeća ekvivalencija: princip $\mathtt{X}$ je valjan na nekom Verbruggeinom okviru ako i samo ako taj Verbruggein okvir ima svojstvo $(\mathtt{X})_{gen}$.

U članku [31] dokazana je odlučivost logika interpretabilnosti $\mathtt{ILM}_0$ i $\mathtt{ILW}^*$ (prethodno je odlučivost logike interpretabilnosti $\mathtt{ILM}_0$ bila otvoreni problem eksplicitno postavljen u, primjerice, članku [11]). Odlučivost logika interpretabilnosti $\mathtt{ILM}_0$ i $\mathtt{ILW}^*$ dokazana je na standardan način (kao u [5]) koji se temelji na sljedećim svojstvima tih logika:

- potpunost s obzirom na Verbruggeine modele koji zadovoljavaju svojstva $(\mathtt{M}_0)_{gen}$ odnosno $(\mathtt{W}^*)_{gen}$ (korolar 5. i korolar 6. u [31]) te
- svojstvo konačnih modela s obzirom na Verbruggeinu semantiku (korolar 4. u [31] i lema 4.3. u [31]).

Dokaz potpunosti sistema $\mathtt{ILM}_0$ i $\mathtt{ILW}^*$ s obzirom na Verbruggeine modele koji zadovoljavaju svojstva $(\mathtt{M}_0)_{gen}$ odnosno $(\mathtt{W}^*)_{gen}$ u članku [31] koristi transformaciju Veltmanovih modela u Verbruggeine modele iz definicije 2.4.3. i sljedeća svojstva te transformacije:

- očuvanje istinitosti iz teorema 2.4.5 (iskazano kao lema 6. u [31])
- ako Veltmanov model $\mathfrak{N}$ ima svojstvo $(\mathtt{M}_0)$ tada njemu pridruženi Verbruggein model $Ver(\mathfrak{N})$ ima svojstvo $(\mathtt{M}_0)_{gen}$ (lema 7. u [31])
- ako Veltmanov model $\mathfrak{N}$ ima svojstvo $(\mathtt{W}^*)$ tada njemu pridruženi Verbruggein model $Ver(\mathfrak{N})$ ima svojstvo $(\mathtt{W}^*)_{gen}$ (lema 8. u [31]).

Korištenjem tih svojstava pitanje potpunosti sistema $\mathtt{ILM}_0$ i $\mathtt{ILW}^*$ s obzirom na Verbruggeine modele koji zadovoljavaju svojstva $(\mathtt{M}_0)_{gen}$ odnosno $(\mathtt{W}^*)_{gen}$ svedeno je u dokazu korolara 6.

odnosno 7. u [31] na potpunost sistema ILM_0 i ILW^* s obzirom na Veltmanove modele koji posjeduju svojstva (M_0) odnosno (W^*), što je već ranije bilo dokazano u [11] (teorem 6.1. i teorem 7.1.).

Svojstvo konačnih modela logike interpretabilnosti ILM_0 s obzirom na Verbruggeine modele dokazano je metodom filtracije u članku [39] što smo analizirali u prethodnoj točki. Ista tehnika iskorištena je i u članku [31] kako bi se dokazalo svojstvo konačnih modela ne samo logike interpretabilnosti ILW^* nego i logike interpretabilnosti ILW. Potrebna svojstva bisimulacije ista su kao i u članku [39], te su svi potrebni rezultati tog članka iskazani u lemi 3. članka [31]:

> *Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model, Γ adekvatan skup formula te $\sim$ najveća bisimulacija na $\mathfrak{M}$. Tada je Verbruggein model $\widetilde{\mathfrak{M}}$ filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na Γ, $\sim$. Ako je skup Γ konačan tada je i Verbruggein model $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{M}}}$ konačan.*

U prethodnoj točki zaključili smo da vrijedi analogon te leme za w-bisimulacije.

Kako bi se primijenila metoda filtracije iz [39] za dokazivanje svojstva konačnih modela potrebno je dokazati da je svojstvo $(\mathsf{W}^*)_{gen}$ očuvano na filtracije, tj. da ako Verbruggein model $\mathfrak{M}$ ima svojstvo $(\mathsf{W}^*)_{gen}$ tada i model $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ima to svojstvo. Iz [52] je poznato da vrijedi ILW^*=ILWM_0, pa je dovoljno dokazati da su svojstva $(\mathsf{M}_0)_{gen}$ i $(\mathsf{W})_{gen}$ očuvana na filtracije. Za svojstvo $(\mathsf{M}_0)_{gen}$ to je napravljeno u članku [39], što smo komentirali u prethodnoj točki. Istaknimo da je u definiciji 7. članka [31] definirano svojstvo Verbruggeinih modela za koje je u lemi 4. tog članka dokazano da je to upravo svojstvo $(\mathsf{W})_{gen}$, tj. da je princip W valjan na Verbruggeinom okviru $\mathfrak{F}$ ako i samo ako Verbruggein okvir $\mathfrak{F}$ ima to svojstvo. Preostalo je samo dokazati da je svojstvo $(\mathsf{W})_{gen}$ očuvano na filtracije i to je napravljeno u lemi 5. u [31]. Time je dobiven ne samo dokaz svojstva konačnih modela za logiku interpretabilnosti ILW^*, nego i za logiku interpretabilnosti ILW. U dokazu te leme 5. (stranice 767. i 768. u [31]) nekoliko je puta korišteno svojstvo (back') za bisimulacije, a već smo istaknuli da to vrijedi i za w-bisimulacije. Prema tome zaključujemo da rezultat svojstva konačnih modela za te logike vrijedi i ako umjesto bisimulacija koristimo w-bisimulacije Verbruggeinih modela. Istaknimo i da odlučivost logike ILW nije dokazana u članku [31] na ovaj način jer je ona već otprije poznata iz [20]. Također, autori članka [31] ističu u napomeni 2. tog članka da se na ovaj način može dokazati i odlučivost sistema ILM, ILP te ILW, međutim ti rezultati dobiveni su već ranije na drugačiji način.

7.3. Odlučivost logika interpretabilnosti ILP_0 i ILR

U članku [32] dokazano je da su logike ILP_0 i ILR odlučive (v. korolar 37. i korolar 39. u tom članku). Dokaz odlučivosti za te logike je standardan - kao što smo naveli u prethodnoj točki. U tu svrhu u tom članku je dokazano da logike interpretabilnosti ILP_0 i ILR imaju svojstvo konačnih modela s obzirom na Verbruggeinu semantiku. Pritom je korišten pojam bisimulacije. U ovoj točki dokazat ćemo analogone tih tvrdnji uz korištenje w-bisimulacije Verbruggeinih modela umjesto bisimulacije Verbruggeinih modela.

Prvo ćemo iskazati karakteristične uvjete $(\mathsf{P}_0)_{gen}$ i $(R)_{gen}$. Sljedeći uvjet na Verbruggein model $\mathfrak{M}$ iskazan je u definiciji 3.7. u članku [12] te je u lemi 3.8. tog članka dokazano da je taj uvjet karakteristično svojstvo $(\mathsf{P}_0)_{gen}$:

$$(\forall w,x,u \in W)(\forall V,Z \in \mathscr{P}(W))\Big(wRxRuS_wV \ \& \ (\forall v \in V)R[v] \cap Z \neq \emptyset \ \Rightarrow \ (\exists Z' \subseteq Z)uS_xZ'\Big).$$

Zatim navodimo uvjet na Verbruggein model $\mathfrak{M}$ iskazan u definiciji 3.13. u članku [12] - u lemi 3.14. tog članka dokazano da je taj uvjet karakteristično svojstvo $(R)_{gen}$:

$$(\forall w,x,u \in W)(\forall V \in \mathscr{P}(W))\Big(wRxRuS_wV \ \Rightarrow (\forall C \in \mathscr{C}(x,u))(\exists U \subseteq V)(xS_wU \ \& \ R[U] \subseteq C)\Big)$$

pri čemu je $\mathscr{C}(x,u) = \big\{C \subseteq R[x] : (\forall Z)(uS_xZ \Rightarrow Z \cap C \neq \emptyset)\big\}$ familija „skupova izbora" (eng. *choice sets*).

Kao što je istaknuto u prethodnoj točki, kako bi se primijenila metoda filtracije iz [39] za dokazivanje svojstva konačnih modela potrebno je dokazati da je svojstvo $\mathtt{X} \in \{(\mathtt{P}_0)_{gen}, (\mathtt{R})_{gen}\}$ očuvano na filtracije, tj. da ako Verbruggein model $\mathfrak{M}$ ima svojstvo $\mathtt{X}$ tada i model $\widetilde{\mathfrak{M}}$ dobiven filtracijom ima to svojstvo. Međutim, u članku [32] dokazano je da je dovoljno promatrati za $\mathtt{X} \in \{\mathtt{P}_0, \mathtt{R}\}$ tzv. $\mathsf{IL}\mathtt{X}$-strukture za skup formula $\mathscr{D}$, pri čemu je $\mathscr{D}$ konačan skup formula koji sadrži formulu $\top$ te koji je zatvoren na potformule i jednostruke negacije. Ovdje ponavljamo definiciju $\mathsf{IL}\mathtt{X}$-strukture za skup formula $\mathscr{D}$ s obzirom da ćemo koristiti neka svojstva iz nje u dokazima koji slijede. U definiciji se koriste sljedeće oznake uvedene u članku [3]: za $\mathsf{IL}\mathtt{X}$-maksimalno konzistentne skupove w i u te skup formula S pišemo $w \prec_S u$ ako za svaki konačan skup formula $S' \subseteq S$ i svaku formulu A vrijedi da $A \rhd \bigvee_{G \in S'} \neg G \in w$ povlači $\neg A, \Box\neg A \in u$. Također, koristimo $w \prec u$ kao pokratu za $w \prec_\emptyset u$, što zapravo znači da za svaku formulu A vrijedi da $\Box\neg A \in w$ povlači $\neg A, \Box\neg A \in u$.

U daljnjem tekstu neka je $\mathscr{D}$ neki konačan skup formula koji sadrži formulu $\top$ te koji je zatvoren na potformule i jednostruke negacije. Sljedeća definicija je dana kao definicija 9. u [32].

Definicija 7.3.1. Neka je $\mathtt{X} \in \{\mathtt{P_0}, \mathtt{R}\}$ i $\mathscr{D}$ skup formula. Kažemo da je $\mathfrak{M} = (W, R, \{S_w : w \in W\}, \Vdash)$ jedna $\mathsf{IL}\mathtt{X}$-struktura za $\mathscr{D}$ ako vrijedi:

(i) $W = \{w : w$ je $\mathsf{IL}\mathtt{X}$-maksimalno konzistentan skup i $(\exists G \in \mathscr{D})(G \wedge \Box\neg G \in w)\}$

(ii) wRu ako i samo ako vrijedi $w \prec u$

(iii) uS_wV ako i samo ako vrijedi wRu, $V \subseteq R[w]$ te $(\forall S)(w \prec_S u \Rightarrow (\exists v \in V) w \prec_S v)$

(iv) $w \Vdash p$ ako i samo ako vrijedi $p \in w$.

Pokazuje se da je tako definirana $\mathsf{IL}\mathtt{X}$-struktura za skup formula $\mathscr{D}$ jedan Verbruggein model (lema 11. u [32]). U dokazima koji slijede trebat će nam i sljedeća lema koja se često naziva lemom o istinitosti s obzirom na skup $\mathscr{D}$ (lema 11. u [32]).

Lema 7.3.2. Neka je $\mathtt{X} \in \{\mathtt{P_0}, \mathtt{R}\}$ te neka je $\mathfrak{M}$ jedna $\mathsf{IL}\mathtt{X}$-struktura za skup formula $\mathscr{D}$. Tada za svaku formulu $G \in \mathscr{D}$ te svaki svijet $w \in W$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash G \text{ ako i samo ako } G \in w.$$

Filtracija Verbruggeinog modela $\mathfrak{M}$ u [32] nije definirana kao i inače korištenjem skupa $\mathscr{D}$ nego malo modificiranog skupa $\Gamma_{\mathscr{D}}$ - tzv. adekvatnog skupa s obzirom na $\mathscr{D}$. Navodimo njegovu definiciju (definicija 32. u [32]) s obzirom da ćemo neka njegova svojstva koristiti u dokazu leme 7.3.5.

Definicija 7.3.3. Kažemo da je skup formula $\Gamma_{\mathscr{D}}$ adekvatan s obzirom na skup formula $\mathscr{D}$ ako vrijedi:

(i) skup $\Gamma_{\mathscr{D}}$ je zatvoren na potformule

(ii) za svaku formulu A vrijedi da $A \in \Gamma_{\mathscr{D}}$ povlači $\sim A \in \Gamma_{\mathscr{D}}$

(iii) $\bot \rhd \bot \in \Gamma_{\mathscr{D}}$

(iv) za sve formule A i B koje su antecedente ili konsekvente neke $\rhd$-formule iz skupa $\Gamma_{\mathscr{D}}$ vrijedi $A \rhd B \in \Gamma_{\mathscr{D}}$

(v) za svaku formulu $A \in \mathscr{D}$ vrijedi $\Box\neg A \in \Gamma_{\mathscr{D}}$.

Kao što je istaknuto u [32], ukoliko je skup formula $\mathscr{D}$ konačan tada je i skup formula $\Gamma_{\mathscr{D}}$ konačan. Također je istaknuto u tom članku i da skup $\Gamma_{\mathscr{D}}$ zadovoljava i sva svojstva od $\mathscr{D}$ koja su ranije bila potrebna u dokazima tvrdnji. Drugim riječima, sve ranije dokazane tvrdnje o filtraciji vrijede i ako se umjesto skupa $\mathscr{D}$ koristi skup $\Gamma_{\mathscr{D}}$. Sljedeća lema iskazana je kao lema 34. u [32] te su u njoj sakupljeni svi rezultati iz članaka koje smo analizirali u prethodnim točkama. Prije same leme istaknimo neke oznake: najveću w-bisimulaciju na Verbruggeinom modelu $\mathfrak{M}$ označavamo s $\sim_{\mathfrak{M}}$, klasu ekvivalencije s obzirom na relaciju $\sim_{\mathfrak{M}}$ svijeta $w \in W$ označavamo s $[w]$ te za proizvoljan skup svjetova $V \subseteq W$ s $\widetilde{V}$ označavamo skup $\{[w] : w \in V\}$.

Lema 7.3.4. Neka je $\mathfrak{M}$ Verbruggein model. Definiramo strukturu $\widetilde{\mathfrak{M}} = (\widetilde{W}, \widetilde{R}, \{\widetilde{S}_{[w]} : w \in W\}, \Vdash)$ ovako:

(i) vrijedi $[w]\widetilde{R}[u]$ ako i samo ako za neke svjetove $w' \in [w]$ i $u' \in [u]$ vrijedi $w'Ru'$ te postoji formula $\Box A \in \Gamma_{\mathscr{D}}$ tako da vrijedi $\mathfrak{M}, w' \nVdash \Box A$ i $\mathfrak{M}, u' \Vdash \Box A$

(ii) vrijedi $[u]\widetilde{S}_{[w]}V$ ako i samo ako vrijedi $[w]\widetilde{R}[u]$, $V \subseteq \widetilde{R}\big[[w]\big]$ te za sve svjetove $w' \in [w]$ i $u' \in [u]$ takve da $w'Ru'$ vrijedi $u'S_{w'}V'$ za neki skup V' takav da $\widetilde{V'} \subseteq V$

(iii) za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \Gamma_{\mathscr{D}}$ vrijedi $\widetilde{\mathfrak{M}}, [w] \Vdash p$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash p$, dok ostale propozicionalne varijable $q \notin \Gamma_{\mathscr{D}}$ interpretiramo na proizvoljan način (primjerice, definiramo $\widetilde{\mathfrak{M}}, [w] \nVdash q$ za sve $[w] \in \widetilde{W}$).

Tada je $\widetilde{\mathfrak{M}}$ filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na $\Gamma_{\mathscr{D}}, \sim_{\mathfrak{M}}$ te je Verbruggein model $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{M}}}$ konačan.

Prvo ćemo provjeriti da lema 35. iz [32] vrijedi ako se koriste w-bisimulacije Verbruggeinih modela umjesto bisimulacija Verbruggeinih modela. Radi se o tehničkoj lemi koju ćemo koristiti u dokazu leme 7.3.6 kako bi pokazali očuvanje karakterističnog svojstva $(\mathsf{P}_0)_{gen}$ na filtracije. Iako sada sljedeća lema govori o klasama ekvivalencije s obzirom na w-bisimulaciju $\sim_{\mathfrak{M}}$, za razliku od leme 35. u [32] koja govori o klasama ekvivalencije s obzirom na bisimulaciju Verbruggeinih modela, provjerit ćemo da dokaz leme ostaje isti.

Lema 7.3.5. Neka je $\mathsf{X} \in \{\mathsf{P}_0, \mathsf{R}\}$ i $\mathfrak{M}$ jedna ILX-struktura za skup $\mathscr{D}$. Tada za sve svjetove $w, v \in W$ vrijedi da wRv povlači $[w]\widetilde{R}[v]$.

Dokaz. Neka su svjetovi $w, v \in W$ proizvoljni takvi da vrijedi wRv. Vrijedi $w \in [w]$ i $v \in [v]$ pa je za željenu tvrdnju $[w]\widetilde{R}[v]$ prema definiciji relacije $\widetilde{R}$ dovoljno pokazati da postoji formula $\Box A \in \Gamma_{\mathscr{D}}$ takva da vrijedi $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box A$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box A$.

Iz $v \in W$ i definicije ILX-strukture $\mathfrak{M}$ za $\mathscr{D}$ slijedi da postoji formula $B \in \mathscr{D}$ takva da vrijedi $B \wedge \Box\neg B \in v$. Prema definiciji ILX-strukture za $\mathscr{D}$ svijet v je ILX-maksimalno konzistentan skup pa slijedi $B \in v$ i $\Box\neg B \in v$. Korištenjem leme o istinitosti s obzirom na skup $\mathscr{D}$ (lema 11. u [32]), iz $B \in v$ i $B \in \mathscr{D}$ slijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash B$. No, ne možemo primjenom te leme iz $\Box\neg B \in v$ dobiti i $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box\neg B$ jer ne vrijedi nužno $\Box\neg B \in \mathscr{D}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $\mathfrak{M}, v \nVdash \Box\neg B$. Tada postoji svijet $u \in W$ takav da vrijedi vRu i $\mathfrak{M}, u \nVdash \neg B$, tj. $\mathfrak{M}, u \Vdash B$. Kako vrijedi $B \in \mathscr{D}$, primjenom leme o istinitosti s obzirom na skup $\mathscr{D}$ slijedi $B \in u$. No, prema definiciji ILX-strukture $\mathfrak{M}$ za $\mathscr{D}$, činjenica vRu povlači da za svaku formulu F vrijedi da $\Box\neg F \in v$ povlači $\neg F, \Box\neg F \in u$. Posebno za formulu B vrijedi $\Box\neg B \in v$ pa dobivamo $\neg B \in u$, što je zbog $B \in u$ u kontradikciji s maksimalnom konzistentnošću od $u \in W$. Dakle, vrijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box\neg B$.

Sada iz $\mathfrak{M}, v \Vdash B$ i wRv slijedi $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box\neg B$. Kako je $B \in \mathscr{D}$ prema definiciji skupa $\Gamma_{\mathscr{D}}$, tada vrijedi $\Box\neg B \in \Gamma_{\mathscr{D}}$. Prema tome, dobili smo da za formulu $\Box\neg B \in \Gamma_{\mathscr{D}}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box\neg B$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash \Box\neg B$. Dakle, tražena formula A je $\neg B$. ■

Kao što je istaknuto u članku [32], gornji dokaz prolazi ne samo pri transformaciji ILX-strukture $\mathfrak{M}$ u $\widetilde{\mathfrak{M}}$ nego i pri transformaciji $\widetilde{\mathfrak{M}}$ u $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{M}}}$.

Sada ćemo provjeriti da lema 36. u [32] vrijedi ako se koriste w-bisimulacije Verbruggeinih modela umjesto bisimulacija Verbruggeinih modela.

Lema 7.3.6. Neka je $\mathfrak{M}$ neka ILP_0-struktura za $\mathscr{D}$ i $\sim_{\mathfrak{M}}$ najveća w-bisimulacija na $\mathfrak{M}$. Tada filtracija $\widetilde{\mathfrak{M}}$ definirana kao u lemi 7.3.4. ima svojstvo $(\mathsf{P}_0)_{gen}$.

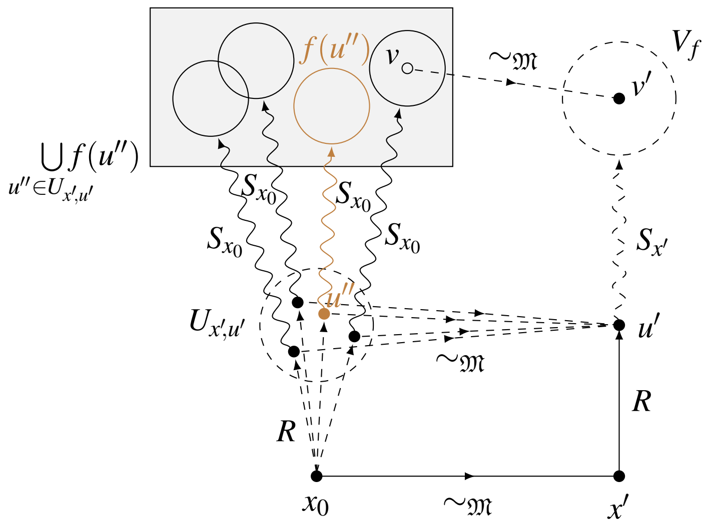
Dokaz. U svrhu dokazivanja da $\mathfrak{M}$ ima svojstvo $(\mathsf{P}_0)_{gen}$ pretpostavimo da vrijedi

$$[w]\widetilde{R}[x]\widetilde{R}[u]\widetilde{S}_{[w]}V \ \& \ (\forall [v] \in V)\widetilde{R}\big[[v]\big] \cap Z \neq \emptyset.$$

Potrebno je dokazati da postoji skup $Z' \subseteq Z$ takav da vrijedi $[u]\widetilde{S}_{[x]}Z'$.

Iz pretpostavke $[w]\widetilde{R}[x]$ i definicije relacije $\widetilde{R}$ slijedi da postoje svjetovi $w_0 \in [w]$ i $x_0 \in [x]$ takvi da vrijedi $w_0 R x_0$.

Neka su svjetovi $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ proizvoljni takvi da vrijedi $x'Ru'$. Iz $x_0 \in [x]$ i $x' \in [x]$ slijedi $x_0 \sim_{\mathfrak{M}} x'$. Sada iz $x_0 \sim_{\mathfrak{M}} x'$ i $x'Ru'$ primjenom uvjeta (w-back) za w-bisimulaciju $\sim_{\mathfrak{M}}$ slijedi da postoji neprazan skup $U_{x',u'} \subseteq W$ takav da za svaki svijet $u'' \in U_{x',u'}$ vrijedi $u'' \sim_{\mathfrak{M}} u'$



Slika 7.1

i x_0Ru'' i

$$\left.\begin{array}{l}\text{za svaku funkciju } f : U_{x',u'} \to \mathscr{P}(W) \text{ takvu da za svaki svijet } u'' \in U_{x',u'} \\ \text{vrijedi } u''S_{x_0}f(u'') \text{ postoji skup } V_f \text{ takav da vrijedi } u'S_{x'}V_f \text{ i za svaki} \\ \text{svijet } v' \in V_f \text{ postoji svijet } v \in \bigcup\limits_{u''\in U_{x',u'}} f(u'') \text{ tako da vrijedi } v \sim_{\mathfrak{M}} v'.\end{array}\right\} \tag{7.1}$$

Dobivena situacija prikazana je slikom 7.1.

Kako za svaki svijet $u'' \in U_{x',u'}$ vrijedi $u'' \sim_{\mathfrak{M}} u'$ i kako vrijedi $u' \in [u]$ dobivamo da za svaki svijet $u'' \in U_{x',u'}$ vrijedi $u'' \in [u]$. Dakle, vrijedi $U_{x',u'} \subseteq [u]$.

Po pretpostavci vrijedi $[u]\widetilde{S}_{[w]}V$ što prema definiciji relacije $\widetilde{S}_{[w]}$ znači da vrijedi

$$(\forall w' \in [w])(\forall u'' \in [u])\Big(w'Ru'' \Rightarrow (\exists V')(u''S_{w'}V' \ \&\ \widetilde{V'} \subseteq V)\Big).$$

Posebno za svijet $w_0 \in [w]$ i proizvoljan svijet $u'' \in U_{x',u'} \subseteq [u]$ iz w_0Ru'' (što se dobiva iz w_0Rx_0Ru'' korištenjem tranzitivnosti relacije R) slijedi da postoji skup $V_{u''}$ takav da vrijedi $u''S_{w_0}V_{u''}$ i $\widetilde{V_{u''}} \subseteq V$.

Neka je $v'' \in V_{u''}$ proizvoljan. Tada je $[v''] \in \widetilde{V_{u''}}$ pa iz $\widetilde{V_{u''}} \subseteq V$ slijedi $[v''] \in V$. Po pretpostavci za svaki svijet $[v] \in V$ vrijedi $\widetilde{R}\big[[v]\big] \cap Z \neq \emptyset$ pa posebno za svijet $[v''] \in V$ vrijedi $\widetilde{R}\big[[v'']\big] \cap Z \neq \emptyset$. Prema tome, za svaki svijet $v'' \in V_{u''}$ možemo odabrati svijet $z_{v''} \in W$ takav da vrijedi $[z_{v''}] \in \widetilde{R}\big[[v'']\big] \cap Z$. Iz toga slijedi $[v'']\widetilde{R}[z_{v''}]$, pa iz definicije relacije $\widetilde{R}$ slijedi da postoje svjetovi $v_0 \in [v'']$ i $z_0 \in [z_{v''}]$ takvi da vrijedi v_0Rz_0. Iz $v_0 \in [v'']$ slijedi $v'' \sim_{\mathfrak{M}} v_0$ pa iz toga i iz v_0Rz_0 primjenom svojstva (back') koje vrijedi za w-bisimulaciju $\sim_{\mathfrak{M}}$ slijedi da postoji svijet z_1 takav da vrijedi $v''Rz_1$ i $z_1 \sim_{\mathfrak{M}} z_0$ (pa iz $z_0 \in [z_{v''}]$ slijedi $z_1 \in [z_{v''}]$). Kako je svijet $v'' \in V_{u''}$ bio proizvoljan, time smo dobili da za svaki svijet $v'' \in V_{u''}$ možemo odabrati neki takav svijet z_1. Definiramo skup $Z_{u''}$ kao skup svih tako odabranih svjetova z_1, za svaki svijet $v'' \in V_{u''}$. Dakle, za svaki svijet $v'' \in V_{u''}$ postoji svijet $z_1 \in Z_{u''}$ takav da vrijedi $v''Rz_1$, tj. vrijedi

$$(\forall v'' \in V_{u''})(R[v''] \cap Z_{u''} \neq \emptyset). \tag{7.2}$$

Također, kako za svaki svijet $z_1 \in Z_{u''}$ prema definiciji tog skupa $Z_{u''}$ postoji svijet $v'' \in V_{u''}$ i svijet $z_{v''}$ takav da vrijedi $z_1 \in [z_{v''}] \in \widetilde{R}\big[[v'']\big] \cap Z$ slijedi $[z_1] = [z_{v''}] \in Z$, tj. dobili smo da vrijedi

$$\widetilde{Z_{u''}} \subseteq Z. \tag{7.3}$$

Po pretpostavci za model $\mathfrak{M}$ vrijedi karakteristično svojstvo $(\mathsf{P}_0)_{gen}$, tj. vrijedi

$$(\forall w_2, x_2, u_2 \in W)(\forall V_2, Z_2 \in \mathscr{P}(W))\Big(w_2Rx_2Ru_2S_{w_2}V_2 \;\&\; (\forall v_2 \in V_2)(R[v_2] \cap Z_2 \neq \emptyset)$$
$$\Rightarrow\; (\exists Z_2' \subseteq Z_2)(u_2S_{x_2}Z_2')\Big).$$

Sada za proizvoljan svijet $u'' \in U_{x',u'}$ primjenom te pretpostavke na činjenice $w_0Rx_0Ru''S_{w_0}V_{u''}$ i (7.2), dobivamo da postoji skup $Z'_{u''} \subseteq Z_{u''}$ takav da vrijedi $u''S_{x_0}Z'_{u''}$. Iz $Z'_{u''} \subseteq Z_{u''}$ slijedi $\widetilde{Z'_{u''}} \subseteq \widetilde{Z_{u''}}$, pa tvrdnja (7.3) povlači $\widetilde{Z'_{u''}} \subseteq Z$. Dakle, vrijedi

$$(\forall u'' \in U_{x',u'})\widetilde{Z'_{u''}} \subseteq Z. \tag{7.4}$$

Neka je $f : U_{x',u'} \to \mathscr{P}(W)$ preslikavanje koje svakom svijetu $u'' \in U_{x',u'}$ pridružuje takav skup $Z'_{u''}$. Kako za svaki svijet $u'' \in U_{x',u'}$ vrijedi $u''S_{x_0}f(u'')$ činjenica (7.1) povlači da postoji skup $V'_{x',u'}$ takav da vrijedi $u'S_{x'}V'_{x',u'}$ i za svaki svijet $v' \in V'_{x',u'}$ postoji svijet $v \in \bigcup\limits_{u'' \in U_{x',u'}} Z'_{u''}$ tako da vrijedi $v \sim_{\mathfrak{M}} v'$. Posljednje povlači $[v'] = [v] \in \widetilde{\bigcup\limits_{u'' \in U_{x',u'}} Z'_{u''}} \subseteq Z$, pri čemu smo koristili tvrdnju (7.4). Kako je $v' \in V'_{x',u'}$ bio proizvoljan, zaključujemo da vrijedi $\widetilde{V'_{x',u'}} \subseteq Z$. Dakle,

$$\text{za sve svjetove } x' \in [x] \text{ i } u' \in [u] \text{ za koje vrijedi } x'Ru' \text{ vrijedi } \widetilde{V'_{x',u'}} \subseteq Z. \tag{7.5}$$

Definiramo skupove $T = \bigcup\limits_{\substack{x' \in [x], u' \in [u] \\ x'Ru'}} V'_{x',u'}$ i $Z' = \widetilde{T}$. Iz (7.5) slijedi $Z' \subseteq Z$ pa za traženu tvrdnju preostaje dokazati da vrijedi $[u]\widetilde{S}_{[x]}Z'$. Prema definiciji relacije $\widetilde{S}_{[x]}$ to znači da mora vrijediti $[x]\widetilde{R}[u]$, $Z' \subseteq \widetilde{R}\big[[x]\big]$ te za sve svjetove $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ takve da vrijedi $x'Ru'$ mora vrijediti $u'S_{x'}V'$ za neki skup V' za koji vrijedi $\widetilde{V'} \subseteq Z'$. Uočimo da $[x]\widetilde{R}[u]$ vrijedi po pretpostavci.

Neka su $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ proizvoljni svjetovi takvi da vrijedi $x'Ru'$. Tada vrijedi $u'S_{x'}V'_{x',u'}$ i prema definiciji skupa Z' vrijedi $\widetilde{V'_{x',u'}} \subseteq Z'$. Dakle, za $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ traženi skup V' je skup $V'_{x',u'}$.

Dokažimo još da vrijedi $Z' \subseteq \widetilde{R}\big[[x]\big]$. Neka je $[z] \in Z'$ proizvoljan. Kako je $Z' = \widetilde{T}$ slijedi da postoji svijet $z' \in [z]$ takav da vrijedi $z' \in T$. Iz definicije skupa T slijedi da postoje svjetovi $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ takvi da vrijedi $x'Ru'$ i $z' \in V'_{x',u'}$. Skup $V'_{x',u'}$ je odabran tako da vrijedi $u'S_{x'}V'_{x',u'}$ pa definicija relacije $S_{x'}$ povlači $V'_{x',u'} \subseteq R[x']$. Sada iz $z' \in V'_{x',u'}$ slijedi $z' \in R[x']$, tj. vrijedi $x'Rz'$. Primjenom leme 7.3.5. dobivamo $[x']\widetilde{R}[z']$. Iz $x' \in [x]$ slijedi $[x'] = [x]$ te iz $z' \in [z]$ slijedi $[z'] = [z]$ pa prethodno povlači da vrijedi $[x]\widetilde{R}[z]$, tj. $[z] \in \widetilde{R}\big[[x]\big]$. Kako je svijet $[z] \in Z'$ bio proizvoljan zaključujemo da vrijedi $Z' \subseteq \widetilde{R}\big[[x]\big]$. Time je dokaz tražene tvrdnje gotov. ■

Sada ćemo provjeriti da lema 38. u [32] vrijedi ako se koriste w-bisimulacije Verbruggeinih modela umjesto bisimulacija Verbruggeinih modela.

Lema 7.3.7. Neka je $\mathfrak{M}$ neka ILR-struktura za $\mathscr{D}$ i $\sim_{\mathfrak{M}}$ najveća w-bisimulacija na $\mathfrak{M}$. Tada filtracija $\widetilde{\mathfrak{M}}$ definirana kao u lemi 7.3.4 ima svojstvo $(\mathtt{R})_{gen}$.

Dokaz. U svrhu dokazivanja da model $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ima svojstvo $(\mathtt{R})_{gen}$ pretpostavimo da vrijedi

$$[w]\widetilde{R}[x]\widetilde{R}[u]\widetilde{S}_{[w]}V$$

te neka je $C \in \mathscr{C}([x],[u])$ proizvoljan. Iz $C \in \mathscr{C}([x],[u])$ slijedi da vrijedi $C \subseteq \widetilde{R}\big[[x]\big]$ i

$$(\forall Z)([u]\widetilde{S}_{[x]}Z \Rightarrow Z \cap C \neq \emptyset). \tag{7.6}$$

Potrebno je dokazati da postoji skup $U \subseteq V$ takav da vrijedi $[x]\widetilde{S}_{[w]}U$ i $\widetilde{R}[U] \subseteq C$.

Za svaki svijet $x' \in [x]$ definiramo skup $C_{x'} = \{c \in R[x'] : [c] \in C\}$.

Dokažimo prvo da vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$(\exists x_0 \in [x])(\exists u_0 \in [u])\big(x_0Ru_0 \ \& \ C_{x_0} \in \mathscr{C}(x_0,u_0)\big). \tag{7.7}$$

Pretpostavimo suprotno. Tada za sve svjetove $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ za koje vrijedi $x'Ru'$ mora vrijediti $C_{x'} \notin \mathscr{C}(x',u')$. Posljednje znači da vrijedi $C_{x'} \not\subseteq R[x']$ ili da postoji skup svjetova Z' takav da vrijedi $u'S_{x'}Z'$ i $Z' \cap C_{x'} = \emptyset$. Kako prema definiciji skupa $C_{x'}$ ne može vrijediti $C_{x'} \not\subseteq R[x']$ dobili smo da za sve svjetove $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ za koje vrijedi $x'Ru'$ možemo odabrati neki skup svjetova $Z_{x',u'}$ takav da vrijedi $u'S_{x'}Z_{x',u'}$ i $Z_{x',u'} \cap C_{x'} = \emptyset$. Neka je $Z = \bigcup\limits_{\substack{x' \in [x], u' \in [u] \\ x'Ru'}} Z_{x',u'}$.

Tvrdimo da vrijedi $[u]\widetilde{S}_{[x]}\widetilde{Z}$. Prema definiciji relacije $\widetilde{S}_{[x]}$ to znači da treba dokazati da vrijedi $[x]\widetilde{R}[u]$, $\widetilde{Z} \subseteq \widetilde{R}\big[[x]\big]$ te da za sve svjetove $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ takve da $x'Ru'$ vrijedi $u'S_{x'}Z'$ za neki skup Z' takav da $\widetilde{Z'} \subseteq \widetilde{Z}$. Po pretpostavci vrijedi $[x]\widetilde{R}[u]$. Zatim, za proizvoljne svjetove $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ za koje vrijedi $x'Ru'$ također vrijedi $u'S_{x'}Z_{x',u'}$ te prema definiciji skupa Z vrijedi $Z_{x',u'} \subseteq Z$. Iz toga slijedi $\widetilde{Z}_{x',u'} \subseteq \widetilde{Z}$ pa za traženi skup Z' iz definicije relacije $\widetilde{S}_{[x]}$ za svjetove x' i u' možemo uzeti skup $Z_{x',u'}$. Preostaje još dokazati da vrijedi $\widetilde{Z} \subseteq \widetilde{R}\big[[x]\big]$. Neka je $[z] \in \widetilde{Z}$ proizvoljan. Tada postoji svijet $z' \in [z]$ takav da vrijedi $z' \in Z$. Iz definicije skupa Z slijedi da postoje svjetovi $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ za koje vrijedi $x'Ru'$ i $z' \in Z_{x',u'}$. Tada vrijedi $u'S_{x'}Z_{x',u'}$ iz čega slijedi $Z_{x',u'} \subseteq R[x']$. Iz $z' \in Z_{x',u'}$ tada slijedi $z' \in R[x']$, tj. vrijedi $x'Rz'$. Primjenom leme 7.3.5. dobivamo $[x']\widetilde{R}[z']$. Iz $x' \in [x]$ slijedi $[x'] = [x]$ te iz $z' \in [z]$ slijedi $[z'] = [z]$. Prema tome dobili smo da vrijedi $[x]\widetilde{R}[z]$, tj. $[z] \in \widetilde{R}\big[[x]\big]$. Kako je $[z] \in \widetilde{Z}$ bio proizvoljan slijedi $\widetilde{Z} \subseteq \widetilde{R}\big[[x]\big]$. Dakle, vrijedi $[u]\widetilde{S}_{[x]}\widetilde{Z}$.

Iz $[u]\widetilde{S}_{[x]}\widetilde{Z}$ i pretpostavke (7.6) slijedi $\widetilde{Z} \cap C \neq \emptyset$. Prema tome postoji svijet $z \in Z$ takav da vrijedi $[z] \in \widetilde{Z} \cap C$. Iz $z \in Z$ i definicije skupa Z slijedi da postoje svjetovi $x' \in [x]$ i $u' \in [u]$ za koje vrijedi $x'Ru'$ tako da vrijedi $z \in Z_{x',u'}$. Također iz $[z] \in C$ i $z \in Z_{x',u'} \subseteq R[x']$ (što vrijedi zbog $u'S_{x'}Z_{x',u'}$) prema definiciji skupa $C_{x'}$ slijedi $z \in C_{x'}$. Time smo dobili $z \in Z_{x',u'} \cap C_{x'}$ što je u kontradikciji s pretpostavkom $Z_{x',u'} \cap C_{x'} = \emptyset$. Dakle, vrijedi tvrdnja (7.7).

Neka su $x_0 \in [x]$ i $u_0 \in [u]$ svjetovi za koje vrijedi (7.7). Sad tvrdimo da vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$(\forall y \in [x])(\exists u_y \in [u_0])\big(yRu_y \ \&\ C_y \in \mathscr{C}(y,u_y)\big). \tag{7.8}$$

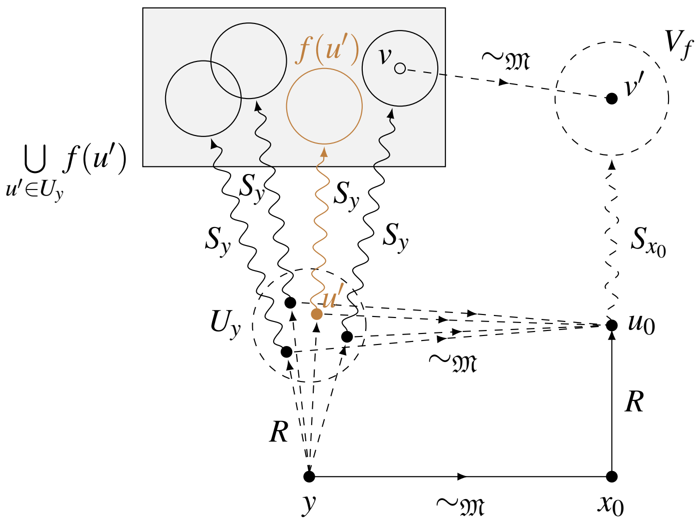
Neka je svijet $y \in [x]$ proizvoljan. Iz $x_0 \in [x]$ slijedi $[x_0] = [x]$ pa dobivamo $y \in [x_0]$. To povlači da vrijedi $y \sim_{\mathfrak{M}} x_0$. Iz toga i x_0Ru_0 primjenom svojstva (w-back) za w-bisimulaciju $\sim_{\mathfrak{M}}$ dobivamo da postoji neprazan skup $U_y \subseteq W$ takav da

$$\left.\begin{array}{l}\text{za svaki svijet } u' \in U_y \text{ vrijedi } u' \sim_{\mathfrak{M}} u_0 \text{ i } yRu' \text{ i za svaku funkciju}\\ f : U_y \to \mathscr{P}(W) \text{ takvu da za svaki svijet } u' \in U_y \text{ vrijedi } u'S_y f(u')\\ \text{postoji skup } V_f \text{ takav da vrijedi } u_0S_{x_0}V_f \text{ i za svaki svijet } v' \in V_f\\ \text{postoji svijet } v \in \displaystyle\bigcup_{u' \in U_y} f(u') \text{ tako da vrijedi } v \sim_{\mathfrak{M}} v'.\end{array}\right\} \tag{7.9}$$

Prema tome, za svaki svijet $y \in [x]$ moguće je odabrati skup svjetova U_y za koji vrijedi upravo istaknuta tvrdnja (7.9). Dobivena situacija prikazana je slikom 7.2.

Uočimo da je za dokaz tvrdnje (7.8) dovoljno dokazati sljedeću tvrdnju:

$$(\forall y \in [x])(\exists u_y \in U_y)(\forall Z)(u_yS_yZ \Rightarrow Z \cap C_y \neq \emptyset). \tag{7.10}$$



Slika 7.2

Naime, iz $u_y \in U_y$ slijedi yRu_y te zbog $u_y \sim_{\mathfrak{M}} u_0$ vrijedi $u_y \in [u_0]$. Također, definicija skupa C_y povlači $C_y \subseteq R[y]$ pa tvrdnja $(\forall Z)(u_y S_y Z \Rightarrow Z \cap C_y \neq \emptyset)$ povlači $C_y \in \mathscr{C}(y, u_y)$. Dakle, za dokaz tvrdnje (7.8) dovoljno je dokazati tvrdnju (7.10).

Tvrdnju (7.10) dokazujemo svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da ne vrijedi tvrdnja (7.10), tj. da postoji svijet $y \in [x]$ takav da za svaki svijet $u' \in U_y$ postoji skup $Z_{u'}$ takav da vrijedi $u' S_y Z_{u'}$ i $Z_{u'} \cap C_y = \emptyset$. Neka je $y \in [x]$ svijet za kojeg vrijedi prethodno napisana tvrdnja. Tada za svaki svijet $u' \in U_y$ prema toj tvrdnji možemo odabrati skup $Z_{u'}$ sa svojstvima iz te tvrdnje. Promotrimo funkciju $f : U_y \to \mathscr{P}(W)$ definiranu s $f(u') = Z_{u'}$. Tada za svaki svijet $u' \in U_y$ vrijedi $u' S_y f(u')$ pa iz (7.9) slijedi da postoji skup V_f takav da vrijedi $u_0 S_{x_0} V_f$ i za svaki svijet $v' \in V_f$ postoji svijet $v \in \bigcup_{u' \in U_y} f(u') = \bigcup_{u' \in U_y} Z_{u'}$ tako da vrijedi $v \sim_{\mathfrak{M}} v'$. Prema tvrdnji (7.7) vrijedi $C_{x_0} \in \mathscr{C}(x_0, u_0)$ što prema definiciji od $\mathscr{C}(x_0, u_0)$ znači da za svaki skup Z' vrijedi da $u_0 S_{x_0} Z'$ povlači $Z' \cap C_{x_0} \neq \emptyset$. Tada posebno za $Z' = V_f$ iz $u_0 S_{x_0} V_f$ slijedi $V_f \cap C_{x_0} \neq \emptyset$. Slijedi da postoji neki svijet $v' \in V_f \cap C_{x_0}$. Iz $v' \in V_f$ slijedi da postoji svijet $v \in \bigcup_{u' \in U_y} Z_{u'}$ takav da vrijedi $v \sim_{\mathfrak{M}} v'$. Iz $v \in \bigcup_{u' \in U_y} Z_{u'}$ slijedi da postoji svijet $u' \in U_y$ takav da vrijedi $v \in Z_{u'}$. Po definiciji skupa C_{x_0} vrijedi $\widetilde{C_{x_0}} \subseteq C$ pa $v' \in C_{x_0}$ povlači $[v'] \in C$. Kako vrijedi $v \sim_{\mathfrak{M}} v'$ slijedi $[v] = [v']$ pa dobivamo da vrijedi $[v] \in C$. Sada iz toga i $v \in R[y]$ (što slijedi iz $v \in Z_{u'}$ i $Z_{u'} \subseteq R[y]$ zbog $u' S_y Z_{u'}$) prema definiciji skupa C_y slijedi $v \in C_y$. Iz toga i $v \in Z_{u'}$ slijedi $v \in Z_{u'} \cap C_y$ što je u kontradikciji sa suprotnom pretpostavkom da za svaki svijet $u' \in U_y$ vrijedi $Z_{u'} \cap C_y = \emptyset$. Dakle, vrijedi tvrdnja (7.10), a onda i tvrdnja (7.8).

Sad ćemo dokazati traženu tvrdnju. Preciznije dokazat ćemo da postoji skup svjetova U

takav da vrijedi $\widetilde{U} \subseteq V$, $[x]\widetilde{S}_{[w]}\widetilde{U}$ i $\widetilde{R}[\widetilde{U}] \subseteq C$.

Neka su svjetovi $w' \in [w]$ i $y \in [x]$ proizvoljni takvi da vrijedi $w'Ry$. Kako je $y \in [x]$ prema (7.8) postoji svijet $u_y \in [u_0]$ takav da vrijedi yRu_y i $C_y \in \mathscr{C}(y, u_y)$. Iz $w'Ry$, yRu_y i tranzitivnosti relacije R slijedi $w'Ru_y$. Po pretpostavci vrijedi $[u]\widetilde{S}_{[w]}V$. Iz toga, $w' \in [w]$, $u_y \in [u_0] = [u]$, $w'Ru_y$ i definicije relacije $\widetilde{S}_{[w]}$ slijedi da postoji skup svjetova V_y takav da vrijedi $\widetilde{V_y} \subseteq V$ i $u_y S_{w'} V_y$.

Po pretpostavci model $\mathfrak{M}$ ima svojstvo $(\mathtt{R})_{gen}$, tj. vrijedi

$$(\forall w, x, u \in W)(\forall V \in \mathscr{P}(W))\Big(wRxRuS_wV \ \Rightarrow (\forall C \in \mathscr{C}(x, u))(\exists U \subseteq V)(xS_wU \ \& \ R[U] \subseteq C)\Big).$$

Prema tome iz $w'RyRu_yS_{w'}V_y$ i $C_y \in \mathscr{C}(y, u_y)$ slijedi da postoji skup $U_{w',y} \subseteq V_y$ takav da vrijedi $yS_{w'}U_{w',y}$ i $R[U_{w',y}] \subseteq C_y$. Definiramo

$$U = \bigcup_{\substack{w' \in [w], y \in [x] \\ w'Ry}} U_{w',y}.$$

Kako bismo dokazali da je skup $\widetilde{U}$ traženi skup trebamo dokazati da vrijedi $\widetilde{U} \subseteq V$, $[x]\widetilde{S}_{[w]}\widetilde{U}$ i $\widetilde{R}[\widetilde{U}] \subseteq C$. Za sve svjetove $w' \in [w]$ i $y \in [x]$ za koje vrijedi $w'Ry$ iz $U_{w',y} \subseteq V_y$ slijedi $\widetilde{U_{w',y}} \subseteq \widetilde{V_y}$, što zbog $\widetilde{V_y} \subseteq V$ povlači $\widetilde{U_{w',y}} \subseteq V$. Sada iz definicije skupa U slijedi $\widetilde{U} \subseteq V$.

Dokažimo da vrijedi $[x]\widetilde{S}_{[w]}\widetilde{U}$. Prema definiciji relacije $\widetilde{S}_{[w]}$ to znači da treba vrijediti $[w]\widetilde{R}[x]$, $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{R}\big[[w]\big]$ te za sve svjetove $w' \in [w]$ i $y \in [x]$ takve da $w'Ry$ vrijedi $yS_{w'}U'$ za neki skup U' takav da vrijedi $\widetilde{U'} \subseteq \widetilde{U}$. Po početnoj pretpostavci vrijedi $[w]\widetilde{R}[x]$. Pretpostavka $[u]\widetilde{S}_{[w]}V$ povlači $V \subseteq \widetilde{R}\big[[w]\big]$ pa iz $\widetilde{U} \subseteq V$ slijedi $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{R}\big[[w]\big]$. Za proizvoljne svjetove $w' \in [w]$ i $y \in [x]$ takve da $w'Ry$ skup $U_{w',y}$ zadovoljava $yS_{w'}U_{w',y}$ te prema definiciji skupa U vrijedi $U_{w',y} \subseteq U$ što povlači $\widetilde{U_{w',y}} \subseteq \widetilde{U}$. Time smo dokazali da vrijedi $[x]\widetilde{S}_{[w]}\widetilde{U}$.

Preostaje još dokazati da vrijedi $\widetilde{R}[\widetilde{U}] \subseteq C$. Neka je $[z] \in \widetilde{R}[\widetilde{U}]$ proizvoljan. Tada postoji svijet $t \in U$ takav da vrijedi $[t]\widetilde{R}[z]$. Iz $t \in U$ i definicije skupa U slijedi da postoje svjetovi $w' \in [w]$ i $y \in [x]$ takvi da vrijedi $w'Ry$ i $t \in U_{w',y}$. Iz $[t]\widetilde{R}[z]$ prema definiciji relacije $\widetilde{R}$ slijedi da postoje svjetovi $t' \in [t]$ i $z' \in [z]$ takvi da vrijedi $t'Rz'$. Kako iz $t' \in [t]$ slijedi $t' \sim_{\mathfrak{M}} t$, iz toga i $t'Rz'$ primjenom svojstva (forth') koje vrijedi za w-bisimulaciju $\sim_{\mathfrak{M}}$ dobivamo da postoji svijet z'' takav da vrijedi tRz'' i $z' \sim_{\mathfrak{M}} z''$. Iz tRz'' i $t \in U_{w',y}$ slijedi $z'' \in R[t] \subseteq R[U_{w',y}]$ pa $R[U_{w',y}] \subseteq C_y$ povlači $z'' \in C_y$. Po definiciji skupa C_y vrijedi $\widetilde{C_y} \subseteq C$ pa iz prethodnog dobivamo da vrijedi $[z''] \in C$. Sada $z' \sim_{\mathfrak{M}} z''$ i $z' \in [z]$ slijedi $[z] = [z''] \in C$. Kako je $[z] \in \widetilde{R}[\widetilde{U}]$ bio proizvoljan, dokazali smo da vrijedi $\widetilde{R}[\widetilde{U}] \subseteq C$ čime je dokaz tvrdnje da je skup $\widetilde{U}$ traženi skup gotov. ■

Napomena 7.3.8. U [25] su sakupljeni svi rezultati iz članaka o filtracijama i odlučivosti koje smo naveli u ovome poglavlju. U [25] se također koristi naziv Verbruggeini modeli umjesto generaliziranih Veltmanovih modela i koristi se pojam bisimulacije Verbruggeinih modela. Iako se ne koristi pojam w-bisimulacije Verbruggeinih modela, tamo je već navedeno da rezultati koji su tamo dobiveni vrijede i za w-bisimulacije Verbruggeinih modela.

8. DODATAK

U ovome dodatku pokazujemo da za dvosortnu logiku vrijedi analogon Ehrenfeuchtovog teorema koji se za jednosortnu logiku prvog reda može naći, primjerice, u [9].

Prvo uvodimo oznake koje ćemo koristiti u ovome dodatku. Koristimo oznaku τ za proizvoljnu ali fiksnu jednosortnu konačnu signaturu za neku jednosortnu teoriju prvog reda koja sadrži samo relacijske i konstantske simbole. Signaturu dvosortne logike označavamo sa σ, pri čemu smatramo da je pripadni skup propozicionalnih varijabli *Prop* koji se javlja u definiciji te signature, konačan. Za proizvoljan skup M i $n \in \mathbb{N}$ koristimo sljedeću pokratu: $\vec{a}^n = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M^n$. Koristimo i $\vec{a}^n a_{n+1}$ kao pokratu za $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$. Ako je n jasan iz konteksta, pišemo samo $\vec{a}$ umjesto $\vec{a}^n$. Također, koristit ćemo oznake $v, v_1, v_2, \ldots$ za varijable prve ili druge sorte signature σ (ako će njihova sorta biti jasna iz konteksta ili nam neće u tom trenutku biti važno koje je točno ta varijabla sorte).

8.1. EHRENFEUCHTOV TEOREM ZA JEDNOSORTNU LOGIKU

Sljedeći teorem iskazan je kao teorem 2.2.8. u [9]. U teoremu se spominju Ehrenfeuchtove igre za jednosortni jezik čiju definiciju nećemo ovdje ponavljati. U nastavku ćemo definirati pojam Ehrenfeuchtovih igara za dvosortnu logiku prvog reda. Sljedeći teorem navodimo samo iz razloga kako bi bilo jasnije koja analogna svojstva želimo dobiti u dvosortnom slučaju.

Teorem 8.1.1 (Ehrenfeuchtov teorem za jednosortnu logiku prvog reda)**.** Za dane τ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$, $m, n \in \mathbb{N}$ te $\vec{a} \in |\mathfrak{M}|^n$ i $\vec{b} \in |\mathfrak{N}|^n$, ekvivalentno je:

(a) branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_m(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$

(b) ako je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ neka τ-formula takva da $qr(\varphi) \leq m$, tada vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}].$$

8.2. PARCIJALNI IZOMORFIZMI

Ehrenfeuchtove igre za jednosortnu logiku prvog reda definirane su korištenjem pojma parcijalnog izomorfizma. Stoga prvo navodimo definiciju i neka svojstva parcijalnog izomorfizma za jednosortnu logiku prvog reda. Zatim dajemo definiciju parcijalnog izomorfizma za dvosortnu logiku prvog reda i pokazujemo da vrijede analogna svojstva koja smo istaknuli za parcijalne izomorfizme za logiku prvog reda.

Sljedeća definicija dana je kao definicija 2.2.1. u [9].

Definicija 8.2.1. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ proizvoljne τ-strukture. Neka je p preslikavanje takvo da je $dom(p) \subseteq |\mathfrak{M}|$ i $rng(p) \subseteq |\mathfrak{N}|$. Kažemo da je p **parcijalni izomorfizam** između τ-struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ ako vrijedi:

(i) p je injekcija

(ii) za svaki konstantski simbol $c \in \tau$ je $c^{\mathfrak{M}} \in dom(p)$ i $p(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$

(iii) za svaki $n \in \mathbb{N}$, n-mjesni relacijski simbol $R \in \tau$ i sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in dom(p)$ vrijedi:

$$R^{\mathfrak{M}} a_1 a_2 \ldots a_n \quad \text{ako i samo ako} \quad R^{\mathfrak{N}} p(a_1) p(a_2) \ldots p(a_n).$$

Osnovna svojstva parcijalnih izomorfizama koja se koriste u dokazu Ehrenfeuctovog teorema za logiku prvog reda iskazana su u sljedećoj lemi. Ta lema iskazana je kao tvrdnja (c) napomene 2.2.2. u [9].

Lema 8.2.2. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije τ-strukture, $n \in \mathbb{N}$, te neka su $\vec{a} \in |\mathfrak{M}|^n$ i $\vec{b} \in |\mathfrak{N}|^n$ proizvoljni. Tada je ekvivalentno:

(a) s $p(a_i) = b_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n$ i $p(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$, za konstantski simbol $c \in \tau$, definirano je preslikavanje koje je parcijalni izomorfizam između struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$.

(b) za svaku formulu $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ takvu da je $qr(\varphi) = 0$, vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}].$$

(c) za svaku atomarnu formulu $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}].$$

Slijedi definicija parcijalnog izomorfizma za dvosortnu logiku te analogon prethodne leme za dvosortnu logiku. Prisjetimo se da σ-formule interpretiramo na σ-strukturama oblika $\mathfrak{M} = (M^{\mathfrak{w}}, M^{\mathfrak{s}}, \phi_1)$ i $\mathfrak{N} = (N^{\mathfrak{w}}, N^{\mathfrak{s}}, \phi_2)$.

Definicija 8.2.3. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ proizvoljne σ-strukture. Neka je p preslikavanje takvo da je $dom(p) \subseteq M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}}$ i $rng(p) \subseteq N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}}$. Kažemo da je p **parcijalni izomorfizam** između struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ ako vrijedi:

(i) p je injekcija takva da za svaki a za koji je definirano $p(a)$ vrijedi sljedeće:

- ako $a \in M^{\mathfrak{w}}$ tada $p(a) \in N^{\mathfrak{w}}$
- ako $a \in M^{\mathfrak{s}}$ tada $p(a) \in N^{\mathfrak{s}}$.

(ii) za svaki $n \in \mathbb{N}$, n-mjesni relacijski simbol $R_1 \in \sigma$ i sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in dom(p)$ vrijedi

$$R_1^{\mathfrak{M}} a_1 a_2 \ldots a_n \quad \text{ako i samo ako} \quad R_1^{\mathfrak{N}} p(a_1) p(a_2) \ldots p(a_n).$$

Uočimo da signatura σ ne sadrži konstantskih simbola, pa u prethodnoj definiciji za razliku od one za τ-strukture nema uvjeta na preslikavanje p vezanog uz konstantske simbole.

Za σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ skup svih parcijalnih izomorfizama označavamo s $Part(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Lema 8.2.4. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture, $n \in \mathbb{N}$, te neka su $\vec{a} \in |\mathfrak{M}|^n$ i $\vec{b} \in |\mathfrak{N}|^n$ proizvoljni. Tada je ekvivalentno:

(a) Preslikavanje definirano s

$$p(a_i) = b_i, \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n,$$

je parcijalni izomorfizam između struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$. Tako definirano preslikavanje p označavamo s $\vec{a} \mapsto \vec{b}$.

(b) Za svaku formulu $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ takvu da je $qr(\varphi) = 0$, vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}].$$

(c) Za svaku atomarnu formulu $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}].$$

Dokaz. Iz činjenice da za svaku atomarnu σ-formulu φ vrijedi $qr(\varphi) = 0$ slijedi da tvrdnja (b) povlači tvrdnju (c).

Iz činjenice da svaka σ-formula φ čiji je kvantifikatorski rang jednak 0 ne sadrži kvantifikatore slijedi da je svaka takva σ-formula Booleova kombinacija atomarnih σ-formula. Time se lako dobiva (indukcijom po složenosti formule φ) da tvrdnja (c) povlači tvrdnju (b).

Preostaje dokazati da su tvrdnje (a) i (c) ekvivalentne. U tu svrhu pretpostavimo prvo da vrijedi tvrdnja (a), tj. da je p parcijalni izomorfizam s navedenim svojstvima. Neka je $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ proizvoljna atomarna σ-formula. Tada je $\varphi \equiv R_1 v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}$ za neki k-mjesni relacijski simbol $R_1 \in \sigma$. Također, kao što je istaknuto oznakom $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$, u toj σ-formuli φ slobodan nastup mogu imati samo varijable iz skupa $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Kako je svaki nastup svake varijable u atomarnoj σ-formuli slobodan, zaključujemo da vrijedi $v_{i_j} \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, za svaki $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Vrijedi

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] & \text{ako i samo ako} & \mathfrak{M} \models R_1 v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}[\vec{a}] \\
& \text{ako i samo ako} & R_1^{\mathfrak{M}} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \\
& \text{ako i samo ako} & R_1^{\mathfrak{N}} p(a_{i_1}) p(a_{i_2}) \dots p(a_{i_k}) \quad (8.1) \\
& \text{ako i samo ako} & R_1^{\mathfrak{N}} b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_k} \quad (8.2) \\
& \text{ako i samo ako} & \mathfrak{N} \models R_1 v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}[\vec{b}] \\
& \text{ako i samo ako} & \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}]
\end{array}
$$

Pritom ekvivalencija označena s (8.1) slijedi iz pretpostavke da je p parcijalni izomorfizam i uvjeta (ii) iz definicije parcijalnog izomorfizma, dok ekvivalencija označena s (8.2) slijedi iz pretpostavke da je p injekcija.

Uočimo da je u slučaju kada je relacijski simbol R_1 zapravo relacijski simbol $=$, važno svojstvo iz definicije parcijalnog izomorfizma da za svaki $a \in dom(p)$ vrijedi $p(a) \in N^{\mathfrak{w}}$ ako $a \in M^{\mathfrak{w}}$ i $p(a) \in N^{\mathfrak{s}}$ ako $a \in M^{\mathfrak{s}}$. Naime, iz pretpostavke $R_1^{\mathfrak{M}} a_{i_1} a_{i_2}$, tj. $a_{i_1} = a_{i_2}$, svojstvo (ii) iz definicije parcijalnog izomorfizma povlači da vrijedi $R_1^{\mathfrak{N}} p(a_{i_1}) p(a_{i_2})$, tj. $p(a_{i_1}) = p(a_{i_2})$, tj. $b_{i_1} = b_{i_2}$. No, ako je primjerice varijabla v_{i_1} bila prva sorte te smo joj valuacijom pridružili neki $a_{i_1} \in M^{\mathfrak{w}}$, tada da bi dobili da $b_{i_1} = b_{i_2}$ povlači $\mathfrak{N} \models (v_{i_1} = v_{i_2})[\vec{b}]$, mora vrijediti $b_{i_1} \in N^{\mathfrak{w}}$, a ne $b_{i_1} \in N^{\mathfrak{s}}$ (jer ne možemo varijabli v_{i_1} prve sorte pridružiti element iz $N^{\mathfrak{s}}$). No, to vrijedi upravo zbog istaknutog svojstva preslikavanja p iz definicije parcijalnog izomorfizma. Time smo pokazali da tvrdnja (a) povlači tvrdnju (c).

Preostaje pokazati da tvrdnja (c) povlači tvrdnju (a). U tu svrhu pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c), te neka je p preslikavanje definirano ovako:

$$p(a_i) = b_i, \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Potrebno je pokazati da je p parcijalni izomorfizam između struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$. Provjeravamo zadovoljava li preslikavanje p uvjete (i) i (ii) iz definicije parcijalnog izomorfizma.

Pokažimo prvo da je p injekcija. Pretpostavimo da vrijedi $p(a_i) = p(a_j)$ za neke $a_i, a_j \in dom(p) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Iz definicije preslikavanja p slijedi $p(a_i) = b_i$ i $p(a_j) = b_j$, pa dobivamo da vrijedi $b_i = b_j$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $b_i, b_j \in N^{\mathfrak{w}}$ (slučaj $b_i, b_j \in N^{\mathfrak{s}}$ pokazuje se analogno). To znači da vrijedi $\mathfrak{N} \models (v_i = v_j)[\vec{b}]$, pri čemu su v_i i v_j varijable sorte $\mathfrak{w}$. S obzirom da je $v_i = v_j$ atomarna σ-formula, pretpostavka da vrijedi tvrdnja (c) povlači $\mathfrak{M} \models (v_i = v_j)[\vec{a}]$, što je ekvivalentno s $a_i = a_j$. Dakle, p je injekcija.

Neka je $a_i \in dom(p) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ proizvoljan. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $a_i \in M^{\mathfrak{w}}$ (tvrdnja da $a_i \in M^{\mathfrak{s}}$ povlači $p(a_i) \in N^{\mathfrak{s}}$ pokazuje se analogno). Vrijedi $a_i = a_i$, pa za varijablu v_i sorte $\mathfrak{w}$ vrijedi $\mathfrak{M} \models (v_i = v_i)[\vec{a}]$. Po pretpostavci vrijedi tvrdnja (c), pa kako je σ-formula $(v_i = v_i)$ atomarna, slijedi $\mathfrak{N} \models (v_i = v_i)[\vec{b}]$, što je ekvivalentno s $b_i = b_i$ te vrijedi $b_i \in N^{\mathfrak{w}}$ (jer varijabla v_i je sorte $\mathfrak{w}$). Iz $p(a_i) = b_i$ slijedi $p(a_i) \in N^{\mathfrak{w}}$. Time smo pokazali da za preslikavanje p vrijedi uvjet (i) iz definicije parcijalnog izomorfizma.

Preostaje još pokazati da preslikavanje p zadovoljava uvjet (ii) iz definicije parcijalnog izomorfizma. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan, $R_1 \in \sigma$ proizvoljan k-mjesni relacijski simbol te $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in dom(p) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ proizvoljni. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} R_1^{\mathfrak{M}} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \quad & \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models R_1 v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_k}[\vec{a}] \\ & \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models R_1 v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_k}[\vec{b}] \\ & \text{ako i samo ako} \quad R_1^{\mathfrak{N}} b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_k} \\ & \text{ako i samo ako} \quad R_1^{\mathfrak{N}} p(a_{i_1}) p(a_{i_2}) \ldots p(a_{i_k}). \end{aligned}$$

Pritom je u drugoj po redu ekvivalenciji korištena pretpostavka da vrijedi tvrdnja (c) te je u posljednjoj ekvivalenciji korištena injektivnost preslikavanja p.

■

8.3. Ehrenfeuchtove igre za dvosortnu logiku

Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture. Neka su $m,n \in \mathbb{N}$ te $\vec{a} \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^n$ i $\vec{b} \in (N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}})^n$. **Ehrenfeuchtovu igru** $G_m(\mathfrak{M},\vec{a},\mathfrak{N},\vec{b})$ igraju dva igrača koje nazivamo **izazivač** i **branitelj**. Igra se odvija u m rundi. U i-toj rundi, za svaki $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, najprije izazivač bira jednu od σ-struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$. Promatramo sljedeće slučajeve:

(a) izazivač je odabrao σ-strukturu $\mathfrak{M}$. Tada izazivač mora odabrati neki element $e_i \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})$, a zatim branitelj bira neki element $f_i \in (N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}})$.

(b) izazivač je odabrao σ-strukturu $\mathfrak{N}$. Tada izazivač mora odabrati neki element $f_i \in (N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}})$, a zatim branitelj bira neki element $e_i \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})$.

Na taj način je u m uzastopnih rundi odabrano m elemenata iz σ-strukture $\mathfrak{M}$ i m elemenata iz σ-strukture $\mathfrak{N}$, kako je prikazano u sljedećoj tablici:

	$\mathfrak{M},\vec{a}$	$\mathfrak{N},\vec{b}$
1. runda	e_1	f_1
2. runda	e_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m-ta runda	e_m	f_m

Uočimo da u svakoj rundi oba igrača mogu birati neki element iz odgovarajuće σ-strukture $\mathfrak{M}$ ili $\mathfrak{N}$ jer iz definicije σ-strukture slijedi da su skupovi $M^{\mathfrak{w}}$, $M^{\mathfrak{s}}$, $N^{\mathfrak{w}}$ i $N^{\mathfrak{s}}$ neprazni.

Označimo $\vec{e} = (e_1,e_2,\ldots,e_m)$ i $\vec{f} = (f_1,f_2,\ldots,f_m)$. Nakon što je odigrano svih m rundi branitelj pobjeđuje ako vrijedi $\vec{a}\vec{e} \mapsto \vec{b}\vec{f} \in Part(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ (u slučaju $m=0$, taj zahtjev se svodi na $\vec{a} \mapsto \vec{b} \in Part(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$). U protivnom pobjeđuje izazivač. Uočimo da je ekvivalentno tome reći da izazivač pobjeđuje ako

za neki $k \leq m$ vrijedi $\vec{a}e_1\ldots e_k \mapsto \vec{b}f_1\ldots f_k \notin Part(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$.

Kažemo da igrač (izazivač ili branitelj) ima **pobjedničku strategiju** u Ehrenfeuchtovoj igri $G_m(\mathfrak{M},\vec{a},\mathfrak{N},\vec{b})$ ako može u svakoj od m rundi, bez obzira na odabir drugog igrača, odabrati elemente koji ga vode do pobjede.

Činjenice o Ehrenfeuchtovim igrama koje slijede direktno iz definicije sakupljene su u sljedećoj lemi (koja je analogon leme 2.2.4. iz [9]). Tvrdnje iz te leme koriste se u dokazu Ehrenfeuchtovog teorema 8.5.1.

Lema 8.3.1. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije σ-strukture, $n, m \in \mathbb{N}$ te $\vec{a} \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^n$ i $\vec{b} \in (N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}})^n$.

(a) Branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_0(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$ ako i samo ako vrijedi $\vec{a} \mapsto \vec{b} \in Part(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

(b) Ako je $m > 0$ tada je ekvivalentno:

(b_1) branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_m(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$

(b_2) za svaki $a_{n+1} \in M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}}$ postoji $b_{n+1} \in N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}}$ takav da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_{m-1}(\mathfrak{M}, \vec{a}a_{n+1}, \mathfrak{N}, \vec{b}b_{n+1})$ i za svaki $b_{n+1} \in N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}}$ postoji $a_{n+1} \in M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}}$ takav da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_{m-1}(\mathfrak{M}, \vec{a}a_{n+1}, \mathfrak{N}, \vec{b}b_{n+1})$.

(c) Ako branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_m(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$ i $m' \in \mathbb{N}$ takav da $m' < m$ tada branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_{m'}(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$.

Prethodna lema daje ideju za definiranje σ-formule $\varphi^m_{\vec{a}}$ u sljedećoj točki kojom bismo iskazali postojanje pobjedničke strategije branitelja u Ehrenfeuchtovoj igri $G_m(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$. Ukoliko je $n = 0$ (tj. prije 1. runde nije odabran niti jedan a_i te niti jedan b_i), tada takvu igru označavamo s $G_m(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ umjesto, primjerice, $G_m(\mathfrak{M}, \emptyset, \mathfrak{N}, \emptyset)$.

8.4. σ-FORMULE $\varphi_{\vec{a}}^m$

Neka je $\mathfrak{M}$ zadana σ-struktura te neka su $m,n \in \mathbb{N}$ i $\vec{a} \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^n$ proizvoljni. Želimo definirati σ-formulu $\varphi_{\vec{a}}^m$ takvu da za svaku σ-strukturu $\mathfrak{N}$ i $\vec{b} \in (N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}})^n$ vrijedi

$$\mathfrak{N} \models \varphi_{\vec{a}}^m[\vec{b}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \text{branitelj ima pobjedničku strategiju u igri } G_m(\mathfrak{M},\vec{a},\mathfrak{N},\vec{b}).$$

Definicija 8.4.1. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna σ-struktura te neka su $m,n \in \mathbb{N}$ i $\vec{a} \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^n$ proizvoljni. Definiramo σ-formulu $\varphi_{\vec{a}}^m(v_1,v_2,\dots,v_n)$ rekurzivno ovako:

(i) $\varphi_{\vec{a}}^0(v_1,v_2,\dots,v_n)$ je konjunkcija svih σ-formula $\varphi(v_1,v_2,\dots,v_n)$ koje su atomarne σ-formule ili negacije atomarnih σ-formula te za koje vrijedi $\mathfrak{M} \models \varphi(v_1,v_2,\dots,v_n)[\vec{a}]$

(ii) za $m > 0$ definiramo σ-formulu $\varphi_{\vec{a}}^m(v_1,v_2,\dots,v_n)$ na sljedeći način:

$$\bigwedge_{a \in M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}}} \exists v_{n+1} \varphi_{\vec{a}a}^{m-1}(v_1,v_2,\dots v_{n+1}) \land \forall v_{n+1} \bigvee_{a \in M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}}} \varphi_{\vec{a}a}^{m-1}(v_1,v_2,\dots,v_{n+1}),$$

pri čemu u gornjoj konjunkciji i disjunkciji promatramo samo logički međusobno neekvivalentne σ-formule.

Postavlja se pitanje jesu li σ-formule iz prethodne definicije dobro definirane, tj. jesmo li doista definirali σ-formule. Potvrdan odgovor na to pitanje dajemo u sljedećoj napomeni.

Napomena 8.4.2. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna σ-struktura. Indukcijom po $m \in \mathbb{N}$ pokazat ćemo da je za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ i $\vec{a} \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^n$ pripadna σ-formula $\varphi_{\vec{a}}^m(v_1,v_2,\dots,v_n)$ dobro definirana.

Prvo promotrimo slučaj kada je $m = 0$. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $\vec{a} \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^n$ proizvoljni. S obzirom da je signatura σ konačna tada σ-formula koje su atomarne σ-formule ili negacije atomarnih σ-formula, a čiji je skup varijabli koje se u njima javljaju podskup od $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, ima konačno mnogo. Tada je konjunkcija iz (i) prethodne definicije konačna, pa zaključujemo da je σ-formula $\varphi_{\vec{a}}^0(v_1,v_2,\dots,v_n)$ dobro definirana.

Pretpostavimo da je za neki $m > 0$ dobro definirana σ-formula $\varphi_{\vec{a}a}^{m-1}(v_1,v_2,\dots,v_{n+1})$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\vec{a}a \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^{n+1}$. Lako se može pokazati da za $m' \in \{0,1,\dots,m-1\}$ vrijedi da je kvantifikatorski rang formule $\varphi_{\vec{a}}^{m'}$ jednak m'. Prema tome je kvantifikatorski rang σ-formule $\varphi_{\vec{a}a}^{m-1}$ jednak $m-1$. S obzirom da je signatura σ-konačna te je skup varijabli koje se javljaju u toj formuli podskup od $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$, takvih je međusobno logički neekvivalentnih σ-formula samo konačno mnogo. Stoga su konjunkcija i disjunkcija iz (ii) definicije σ-formule $\varphi^m_{\vec{a}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ konačne, pa je σ-formula $\varphi^m_{\vec{a}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dobro definirana.

Osnovna svojstva σ-formula koje smo definirali u ovoj točki ističemo u sljedećoj lemi.

Lema 8.4.3. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna σ-struktura te neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i $\vec{a} \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^n$ proizvoljni. Tada vrijedi

(a) $qr(\varphi^m_{\vec{a}}) = m$

(b) $\mathfrak{M} \models \varphi^m_{\vec{a}}[\vec{a}]$

(c) za svaku σ-strukturu $\mathfrak{N}$ te $\vec{b} \in (N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}})^n$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{N} \models \varphi^0_{\vec{a}}[\vec{b}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \vec{a} \mapsto \vec{b} \in Part(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Dokaz. Tvrdnje (a) i (b) dokazuju se indukcijom po $m \in \mathbb{N}$. Dokažimo tvrdnju (c). Neka je $\mathfrak{N}$ proizvoljna σ-struktura i $\vec{b} \in (N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}})^n$. Po definiciji σ-formule $\varphi^0_{\vec{a}}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tvrdnja $\mathfrak{N} \models \varphi^0_{\vec{a}}[\vec{b}]$ ekvivalentna je tome da za svaku atomarnu σ-formulu $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vrijedi sljedeće:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}].$$

Sada lema 8.2.4 povlači $\vec{a} \mapsto \vec{b} \in Part(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

■

Ako σ-struktura $\mathfrak{M}$ nije jasna iz konteksta, tada koristimo oznaku $\varphi^m_{\mathfrak{M},\vec{a}}$ za σ-formulu $\varphi^m_{\vec{a}}$. Također, u slučaju $n = 0$ (tj. $\vec{a}$ je prazan niz), pišemo $\varphi^m_{\mathfrak{M}}$ ili samo φ^m za σ-formulu $\varphi^m_{\mathfrak{M},\emptyset}$.

8.5. Ehrenfeuchtov teorem za dvosortnu logiku

Sada ćemo iskazati verziju Ehrenfeuchtovog teorema za dvosortnu logiku prvog reda. Taj teorem koristimo u poglavlju 6.

Teorem 8.5.1. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ proizvoljne σ-strukture, $n, m \in \mathbb{N}$ te $\vec{a} \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^n$ i $\vec{b} \in (N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}})^n$. Tada je ekvivalentno:

(a) branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_m(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$

(b) vrijedi $\mathfrak{N} \models \varphi_{\vec{a}}^m[\vec{b}]$

(c) ako je σ-formula $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ kvantifikatorskog ranga manjeg ili jednakog m, tada vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}].$$

Dokaz. Redom pokazujemo sljedeće: tvrdnja (c) povlači tvrdnju (b), tvrdnje (a) i (b) su ekvivalentne te tvrdnja (a) povlači tvrdnju (c).

Pretpostavimo prvo da vrijedi tvrdnja (c). Prema tvrdnji (a) leme 8.4.3. vrijedi $qr(\varphi_{\vec{a}}^m) = m$ te prema tvrdnji (b) te leme vrijedi $\mathfrak{M} \models \varphi_{\vec{a}}^m[\vec{a}]$. Sada tvrdnja (c) povlači da za σ-formulu $\varphi_{\vec{a}}^m(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vrijedi $\mathfrak{N} \models \varphi_{\vec{a}}^m[\vec{b}]$. Dakle, tvrdnja (c) povlači tvrdnju (b).

Ekvivalenciju tvrdnji (a) i (b) dokazujemo indukcijom po $m \in \mathbb{N}$. Za bazu indukcije promotrimo slučaj kada je $m = 0$. Tada vrijede redom sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} &\text{branitelj ima pobjedničku strategiju u igri } G_0(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b}) \\ &\text{ako i samo ako} \quad \vec{a} \mapsto \vec{b} \in Part(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \\ &\text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi_{\vec{a}}^0[\vec{b}]. \end{aligned}$$

Pritom prva od gornje dvije ekvivalencije slijedi iz tvrdnje (a) leme 8.3.1, dok druga ekvivalencija slijedi iz tvrdnje (c) leme 8.4.3.

Pretpostavimo da za neki $m > 0$ vrijedi da je za svaki $k \in \mathbb{N}$ te sve $\vec{a}_1 \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})^k$ i $\vec{b}_1 \in (N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}})^k$ postojanje pobjedničke strategije branitelja u igri $G_{m-1}(\mathfrak{M}, \vec{a}_1, \mathfrak{N}, \vec{b}_1)$ ekvivalentno s $\mathfrak{N} \models \varphi_{\vec{a}_1}^{m-1}[\vec{b}_1]$.

Dokažimo sada da tvrdnja vrijedi za $m > 0$. Prema tvrdnji (b) leme 8.3.1, postojanje pobjedničke strategije branitelja u igri $G_m(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$ ekvivalentno je sljedećem:

> za svaki $a_{n+1} \in M^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} M^{\mathfrak{s}}$ postoji $b_{n+1} \in N^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} N^{\mathfrak{s}}$ takav da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_{m-1}(\mathfrak{M}, \vec{a}a_{n+1}, \mathfrak{N}, \vec{b}b_{n+1})$ i za svaki $b_{n+1} \in N^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} N^{\mathfrak{s}}$ postoji $a_{n+1} \in M^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} M^{\mathfrak{s}}$ takav da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_{m-1}(\mathfrak{M}, \vec{a}a_{n+1}, \mathfrak{N}, \vec{b}b_{n+1})$.

Prema pretpostavci indukcije prethodno je ekvivalentno sljedećem (za $k = n+1$):

> za svaki $a_{n+1} \in M^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} M^{\mathfrak{s}}$ postoji $b_{n+1} \in N^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} N^{\mathfrak{s}}$ takav da vrijedi $\mathfrak{N} \models \varphi^{m-1}_{\vec{a}a_{n+1}}[\vec{b}b_{n+1}]$ i za svaki $b_{n+1} \in N^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} N^{\mathfrak{s}}$ postoji $a_{n+1} \in M^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} M^{\mathfrak{s}}$ takav da vrijedi $\mathfrak{N} \models \varphi^{m-1}_{\vec{a}a_{n+1}}[\vec{b}b_{n+1}]$.

Konačno, prethodno je ekvivalentno s (pri čemu ćemo a_{n+1} označiti s a)

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N} \models \left(\bigwedge_{a \in M^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} M^{\mathfrak{s}}} \exists v_{n+1} \varphi^{m-1}_{\vec{a}a}(v_1, v_2, \ldots v_{n+1}) \right) [\vec{b}] \\ \text{i} \qquad &\mathfrak{N} \models \left(\forall v_{n+1} \bigvee_{a \in M^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} M^{\mathfrak{s}}} \varphi^{m-1}_{\vec{a}a}(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}) \right) [\vec{b}], \end{aligned}$$

tj. $\mathfrak{N} \models \varphi^m_{\vec{a}}[\vec{b}]$.

Preostaje još pokazati da tvrdnja (a) povlači tvrdnju (c). To također pokazujemo indukcijom po $m \in \mathbb{N}$. Neka je prvo $m = 0$ te pretpostavimo da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_0(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$. Neka je $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ proizvoljna σ-formula čiji je kvantifikatorski rang jednak 0. Prema tvrdnji (a) leme 8.3.1. postojanje pobjedničke strategije branitelja u igri $G_0(\mathfrak{M}, \vec{a}, \mathfrak{N}, \vec{b})$ povlači $\vec{a} \mapsto \vec{b} \in Part(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Tada iz leme 8.2.2. slijedi:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}].$$

Pretpostavimo da za neki $m > 0$ vrijedi da za svaki $k \in \mathbb{N}$ te sve $\vec{a_1} \in (M^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} M^{\mathfrak{s}})^k$ i $\vec{b_1} \in (N^{\mathfrak{w}} \dot{\cup} N^{\mathfrak{s}})^k$ postojanje pobjedničke strategije branitelja u igri $G_{m-1}(\mathfrak{M}, \vec{a_1}, \mathfrak{N}, \vec{b_1})$ povlači da za svaku σ-formulu $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ kvantifikatorskog ranga manjeg ili jednakog $m-1$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a_1}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b_1}]. \tag{8.3}$$

U svrhu dokazivanja koraka indukcije pretpostavimo da postoji pobjednička strategija branitelja u igri $G_m(\mathfrak{M},\vec{a},\mathfrak{N},\vec{b})$. Neka je $\varphi(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ proizvoljna σ-formula kvantifikatorskog ranga manjeg ili jednakog m. Ako je kvantifikatorski rang te σ-formule manji ili jednak $m-1$ tada tražena tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije te činjenice da tvrdnja (c) leme 8.3.1. povlači da postoji pobjednička strategija branitelja u igri $G_{m-1}(\mathfrak{M},\vec{a},\mathfrak{N},\vec{b})$. Prema tome je dovoljno promotriti samo σ-formule $\varphi(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ čiji je kvantifikatorski rang točno m. Tada je ta σ-formula proizvoljna Booleova kombinacija σ-formula oblika $\varphi \equiv \exists v\psi$ pa je dovoljno pokazati tvrdnju za takve σ-formule. Uočimo da u σ-formuli $(\exists v\psi)(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ varijabla v nije slobodna pa možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je varijabla v različita od varijabli v_1, v_2, ..., v_n. Stoga možemo tu varijablu u nastavku označavati s v_{n+1}.

Pokazujemo da ako vrijedi $\mathfrak{M} \models \exists v_{n+1}\psi[\vec{a}]$ tada imamo $\mathfrak{N} \models \exists v_{n+1}\psi[\vec{b}]$ (obratan smjer pokazuje se analogno). Iz $\mathfrak{M} \models \exists v_{n+1}\psi[\vec{a}]$ slijedi da postoji $a \in (M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}})$ takav da vrijedi $\mathfrak{M} \models \psi[\vec{a},a]$. Po pretpostavci postoji pobjednička strategija branitelja u igri $G_m(\mathfrak{M},\vec{a},\mathfrak{N},\vec{b})$, pa tvrdnja (b) leme 8.3.1. povlači da za $a \in M^{\mathfrak{w}} \dot\cup M^{\mathfrak{s}}$ postoji $b \in N^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}}$ takav da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_{m-1}(\mathfrak{M},\vec{a}a,\mathfrak{N},\vec{b}b)$. Iz posljednjeg te $\mathfrak{M} \models \psi[\vec{a},a]$ i činjenice da je $qr(\psi) \le m-1$ te tvrdnje (8.3) iz pretpostavke indukcije, slijedi $\mathfrak{N} \models \psi[\vec{b},b]$. Prema tome vrijedi $\mathfrak{N} \models \exists v_{n+1}\psi[\vec{b}]$, što je i trebalo pokazati.

$\blacksquare$

Ako promatramo samo σ-formule koje su rečenice tada dobivamo sljedeći korolar prethodnog teorema.

Korolar 8.5.2. Za σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ te $m \in \mathbb{N}$ ekvivalentno je:

(a) branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_m(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$

(b) vrijedi $\mathfrak{N} \models \varphi^m$

(c) $\mathfrak{M} \equiv_m \mathfrak{N}$.

8.6. NEKE PRIMJENE EHRENFEUCHTOVIH IGARA

Prvo ćemo definirati uređenu σ-strukturu te pokazati jednu primjenu Ehrenfeuchtovih igara vezanu uz određene σ-podstrukture uređene σ-strukture. Zatim ćemo definirati uređenu sumu dvije uređene σ-strukture te pokazati jednu primjenu Ehrenfeuchtovog teorema vezanu uz uređenu sumu dvije uređene σ-strukture.

Prije sljedeće definicije prisjetimo se da po definiciji signatura σ sadrži jedan binarni relacijski simbol R te da za proizvoljnu σ-strukturu $\mathfrak{M}$ mora vrijediti $R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^{\mathfrak{w}} \times M^{\mathfrak{w}}$.

Definicija 8.6.1. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna σ-struktura. Ako je skup $(M^{\mathfrak{w}}, R^{\mathfrak{M}})$ linearno uređen tada σ-strukturu $\mathfrak{M}$ nazivamo uređenom σ-strukturom.

Sljedeća lema jednostavna je posljedica definicije parcijalnog izomorfizma. Tu lemu koristit ćemo u dokazu propozicije 8.6.3. u kojoj primjenjujemo Ehrenfeuchtove igre u slučaju određenih σ-podstruktura uređenih σ-struktura.

Lema 8.6.2. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ proizvoljne σ-strukture te neka je $\mathfrak{M}'$ neka σ-podstruktura od $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}'$ neka σ-podstruktura od $\mathfrak{N}$. Ako vrijedi $p \in Part(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ te $dom(p) \subseteq (M')^{\mathfrak{w}} \cup (M')^{\mathfrak{s}}$ i $rng(p) \subseteq (N')^{\mathfrak{w}} \cup (N')^{\mathfrak{s}}$, tada vrijedi $p \in Part(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')$.

Propozicija 8.6.3. Neka je $\mathfrak{M}$ uređena σ-struktura te neka su $a_1, a_2 \in M^{\mathfrak{w}}$ i $m \in \mathbb{N}$ proizvoljni. Neka je $\mathfrak{N}_1$ σ-podstruktura od $\mathfrak{M}$ takva da je $N_1^{\mathfrak{w}} = \{a_1' \in M^{\mathfrak{w}} \mid a_1 = a_1' \text{ ili } a_1 R^{\mathfrak{M}} a_1'\}$ i $N_1^{\mathfrak{s}} = M^{\mathfrak{s}}$ te neka je $\mathfrak{N}_2$ σ-podstruktura od $\mathfrak{M}$ takva da je $N_2^{\mathfrak{w}} = \{a_2' \in M^{\mathfrak{w}} \mid a_2 = a_2' \text{ ili } a_2 R^{\mathfrak{M}} a_2'\}$ i $N_2^{\mathfrak{s}} = M^{\mathfrak{s}}$. Ako branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_m(\mathfrak{M}, a_1, \mathfrak{M}, a_2)$, tada ima pobjedničku strategiju i u igri $G_m(\mathfrak{N}_1, a_1, \mathfrak{N}_2, a_2)$.

Dokaz. Označimo pobjedničku strategiju branitelja u igri $G_m(\mathfrak{M}, a_1, \mathfrak{M}, a_2)$ sa St. Pokažimo da je to ujedno i pobjednička strategija u igri $G_m(\mathfrak{N}_1, a_1, \mathfrak{N}_2, a_2)$.

Neka je $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ proizvoljan. Promotrimo dvije moguće situacije u i-toj rundi igre $G_m(\mathfrak{N}_1, a_1, \mathfrak{N}_2, a_2)$.

(1.) Izazivač je odabrao σ-strukturu $\mathfrak{N}_1$ i neki $e_i \in N_1^{\mathfrak{w}} \cup N_1^{\mathfrak{s}}$. Iz $N_1^{\mathfrak{w}} \cup N_1^{\mathfrak{s}} \subseteq M^{\mathfrak{w}} \cup M^{\mathfrak{s}}$ slijedi $e_i \in M^{\mathfrak{w}} \cup M^{\mathfrak{s}}$. Tada primjenom strategije St branitelj odabire $f_i \in M^{\mathfrak{w}} \cup M^{\mathfrak{s}}$.

(2.) Izazivač je odabrao σ-strukturu $\mathfrak{N}_2$ i neki $f_i \in N_2^{\mathfrak{w}} \cup N_2^{\mathfrak{s}}$. Iz $N_2^{\mathfrak{w}} \cup N_2^{\mathfrak{s}} \subseteq M^{\mathfrak{w}} \cup M^{\mathfrak{s}}$ slijedi $f_i \in M^{\mathfrak{w}} \cup M^{\mathfrak{s}}$. Tada primjenom strategije St branitelj odabire $e_i \in M^{\mathfrak{w}} \cup M^{\mathfrak{s}}$.

Kako je St pobjednička strategija branitelja u igri $G_m(\mathfrak{M}, a_1, \mathfrak{M}, a_2)$ dobivamo (prema definiciji Ehrenfeuchtove igre) da vrijedi $p = (a_1 e_1 e_2 \ldots e_m \mapsto a_2 f_1 f_2 \ldots f_m) \in Part(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$. Dovoljno je pokazati da vrijedi $dom(p) \subseteq N_1^{\mathfrak{w}} \cup N_1^{\mathfrak{s}}$ i $rng(p) \subseteq N_2^{\mathfrak{w}} \cup N_2^{\mathfrak{s}}$. Tada lema 8.6.2. povlači $p \in Part(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$, a onda iz definicije Ehrenfeuchtove igre $G_m(\mathfrak{N}_1, a_1, \mathfrak{N}_2, a_2)$ slijedi da je branitelj pobijedio u toj igri.

Pokažimo sada da vrijedi $dom(p) \subseteq N_1^{\mathfrak{w}} \cup N_1^{\mathfrak{s}}$. Neka je $a_1' \in dom(p)$ proizvoljan. Tada vrijedi $a_1' = a_1$ ili $a_1' = e_i$, za neki $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. U slučaju $a_1' = a_1$ uočimo da iz definicije σ-strukture $\mathfrak{N}_1$ slijedi $a_1 \in N_1^{\mathfrak{w}}$. Neka je sada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ proizvoljan i pokažimo da vrijedi $e_i \in N_1^{\mathfrak{w}} \cup N_1^{\mathfrak{s}}$. Taj e_i izabran je u i-toj rundi, pri čemu je bila nastupila prethodno opisana situacija (1.) ili situacija (2.). U situaciji (1.) vrijedi $e_i \in N_1^{\mathfrak{w}} \cup N_1^{\mathfrak{s}}$, pa preostaje promotriti situaciju (2.). U toj situaciji izabran je neki $f_i \in N_2^{\mathfrak{w}} \cup N_2^{\mathfrak{s}}$. Tada vrijedi $f_i \in N_2^{\mathfrak{w}}$ ili $f_i \in N_2^{\mathfrak{s}}$. U slučaju $f_i \in N_2^{\mathfrak{w}}$ iz definicije σ-strukture $\mathfrak{N}_2$ vrijedi $a_2 R^{\mathfrak{M}} f_i$. Iz $p(a_1) = a_2$ i $p(e_i) = f_i$ slijedi $p(a_1) R^{\mathfrak{M}} p(e_i)$, pa definicija parcijalnog izomorfizma povlači $a_1 R^{\mathfrak{M}} e_i$. Definicija σ-strukture $\mathfrak{N}_1$ povlači $e_i \in N_1^{\mathfrak{w}}$. U slučaju $f_i \in N_2^{\mathfrak{s}} = M^{\mathfrak{s}}$, iz $p(e_i) = f_i$ i svojstva (i) iz definicije parcijalnog izomorfizma slijedi $e_i \in M^{\mathfrak{s}} = N_1^{\mathfrak{s}}$.

Preostaje još pokazati da vrijedi $rng(p) \subseteq N_2^{\mathfrak{w}} \cup N_2^{\mathfrak{s}}$. Neka je $a_2' \in rng(p)$ proizvoljan. Tada vrijedi $a_2' = a_2$ ili $a_2' = f_i$, za neki $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. U slučaju $a_2' = a_2$ uočimo da iz definicije σ-strukture $\mathfrak{N}_2$ vrijedi $a_2 \in N_2^{\mathfrak{w}}$. Neka je sada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ proizvoljan i pokažimo da vrijedi $f_i \in N_2^{\mathfrak{w}} \cup N_2^{\mathfrak{s}}$. Taj f_i izabran je u i-toj rundi, pri čemu je bila nastupila prethodno opisana situacija (1.) ili situacija (2.). U situaciji (2.) vrijedi $f_i \in N_2^{\mathfrak{w}} \cup N_2^{\mathfrak{s}}$, pa preostaje promotriti situaciju (1.). U toj situaciji izabran je neki $e_i \in N_1^{\mathfrak{w}} \cup N_1^{\mathfrak{s}}$. Tada vrijedi $e_i \in N_1^{\mathfrak{w}}$ ili $e_i \in N_1^{\mathfrak{s}}$. U slučaju $e_i \in N_1^{\mathfrak{w}}$ iz definicije σ-strukture $\mathfrak{N}_1$ slijedi $a_1 R^{\mathfrak{M}} e_i$. Iz definicije parcijalnog izomorfizma slijedi $p(a_1) R^{\mathfrak{M}} p(e_i)$, što zbog $p(a_1) = a_2$, $p(e_i) = f_i$ povlači $a_2 R^{\mathfrak{M}} f_i$. Definicija σ-strukture $\mathfrak{N}_2$ povlači $f_i \in N_2^{\mathfrak{w}}$. U slučaju $e_i \in N_1^{\mathfrak{s}} = M^{\mathfrak{s}}$, iz $p(e_i) = f_i$ i svojstva (i) iz definicije parcijalnog izomorfizma slijedi $f_i \in M^{\mathfrak{s}} = N_2^{\mathfrak{s}}$.

■

Za dvije σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ moguće je definirati pojam disjunktne unije tih σ-struktura na analogan način na koji je to napravljeno u slučaju τ-struktura. Međutim, lako je pokazati da u tom slučaju disjunktna unija dviju uređenih σ-struktura više nije uređena σ-struktura. Zbog toga se definira pojam uređene sume dviju uređenih σ-struktura. Lako je pokazati da je tako dobivena σ-struktura ponovo jedna uređena σ-struktura.

Definicija 8.6.4. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije uređene σ-strukture takve da vrijedi $M^{\mathfrak{w}} \cap N^{\mathfrak{w}} = \emptyset$ i $M^{\mathfrak{s}} \cap N^{\mathfrak{s}} = \emptyset$. Definiramo uređenu sumu σ-struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$, u oznaci $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, kao σ-strukturu $(M^{\mathfrak{w}} \dot\cup N^{\mathfrak{w}}, M^{\mathfrak{s}} \dot\cup N^{\mathfrak{s}}, \phi)$ pri čemu je:

(i) $\phi(P) = P^{\mathfrak{M}} \cup P^{\mathfrak{N}}$, za svaki unarni relacijski simbol $P \in \sigma$

(ii) $\phi(R) = R^{\mathfrak{M}} \cup R^{\mathfrak{N}} \cup (M^{\mathfrak{w}} \times N^{\mathfrak{w}})$

(iii) $\phi(S) = S^{\mathfrak{M}} \cup S^{\mathfrak{N}}$.

U slučaju da su uređene σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ takve da ne vrijedi $M^{\mathfrak{w}} \cap N^{\mathfrak{w}} = \emptyset$ ili $M^{\mathfrak{s}} \cap N^{\mathfrak{s}} = \emptyset$ tada možemo promatrati njihove izomorfne kopije. Tada bi, primjerice, umjesto skupova $M^{\mathfrak{w}}$, $M^{\mathfrak{s}}$, $N^{\mathfrak{w}}$ i $N^{\mathfrak{s}}$ redom promatrali skupove $M^{\mathfrak{w}} \times \{1\}$, $M^{\mathfrak{s}} \times \{1\}$, $N^{\mathfrak{w}} \times \{2\}$ i $N^{\mathfrak{s}} \times \{2\}$. Naravno, tada bi trebali i prilagoditi interpretaciju relacijskih simbola iz signature σ s obzirom na ovako promijenjene domene.

Disjunktnost domena u σ-strukturama iz kojih se dobiva uređena suma važna je u sljedećoj lemi. Tu lemu koristit ćemo u dokazu propozicije 8.6.6. u kojoj primjenjujemo Ehrenfeuchtov teorem u slučaju uređene sume.

Lema 8.6.5. Neka su $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ uređene σ-strukture takve da su definirane σ-strukture $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ i $\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$. Neka su $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ te $p_1 = (\vec{a}_1^{\,n_1} \mapsto \vec{b}_1^{\,n_1}) \in Part(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1)$ i $p_2 = (\vec{a}_2^{\,n_2} \mapsto \vec{b}_2^{\,n_2}) \in Part(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_2)$ proizvoljni. Tada vrijedi $p = (\vec{a}_1\vec{a}_2 \mapsto \vec{b}_1\vec{b}_2) \in Part(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2)$.

Dokaz. Pokazujemo da preslikavanje p zadovoljava uvjete iz definicije 8.2.3. Uočimo da je to preslikavanje dobro definirana funkcija zbog disjunktnosti skupova $(M_1^{\mathfrak{w}} \dot\cup M_1^{\mathfrak{s}})$ i $(N_1^{\mathfrak{w}} \dot\cup N_2^{\mathfrak{s}})$.

Pokažimo prvo da vrijedi svojstvo (i) iz definicije 8.2.3. Neka su $a_i, a_j \in dom(p)$ takvi da vrijedi $p(a_i) = p(a_j)$. Iz $a_i \in dom(p) = dom(p_1) \dot\cup dom(p_2)$ slijedi da vrijedi točno jedno od sljedeća dva slučaja: $a_i \in dom(p_1)$ ili $a_i \in dom(p_2)$. Bez smanjenja općenitost pretpostavimo da vrijedi $a_i \in dom(p_1)$ (slučaj $a_i \in dom(p_2)$ pokazuje se analogno). Tada je $p(a_i) = p_1(a_i) \in rng(p_1)$. Iz $p(a_i) = p(a_j)$ sada slijedi $p(a_j) \in rng(p_1)$. Tada mora vrijediti $a_j \in dom(p_1)$. U protivnom bi iz $a_j \in dom(p_2)$ dobili $p(a_j) \in rng(p_2)$, što bi značilo $p(a_j) \in rng(p_1) \cap rng(p_2)$, a to je u kontradikciji s $rng(p_1) \cap rng(p_2) = \emptyset$. Dakle, dobili smo da vrijedi $a_i, a_j \in dom(p_1)$, pa slijedi $p_1(a_i) = p(a_i) = p(a_j) = p_1(a_j)$. Sada injektivnost preslikavanja p_1 povlači $a_i = a_j$. Zaključujemo da je p injekcija.

Neka je $a \in dom(p)$ proizvoljan. Pokažimo da $a \in M_1^{\mathfrak{w}} \dot\cup M_2^{\mathfrak{w}}$ povlači $p(a) \in N_1^{\mathfrak{w}} \dot\cup N_2^{\mathfrak{w}}$ (analogno se pokazuje da $a \in M_1^{\mathfrak{s}} \dot\cup M_2^{\mathfrak{s}}$ povlači $p(a) \in N_1^{\mathfrak{s}} \dot\cup N_2^{\mathfrak{s}}$). Iz $a \in M_1^{\mathfrak{w}} \dot\cup M_2^{\mathfrak{w}}$ slijedi $a \in M_1^{\mathfrak{w}}$

ili $a \in M_2^{\mathfrak{w}}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $a \in M_1^{\mathfrak{w}}$ (slučaj $a \in M_2^{\mathfrak{w}}$ pokazuje se na analogan način). Iz $a \in dom(p)$ i $a \in M_1^{\mathfrak{w}}$ slijedi $a \in dom(p_1)$, pa tada zbog svojstva (i) iz definicije parcijalnog izomorfizma za preslikavanje p_1, iz $a \in M_1^{\mathfrak{w}}$ slijedi $p_1(a) = p(a) \in N_1^{\mathfrak{w}}$. Tada vrijedi $p(a) \in N_1^{\mathfrak{w}} \dot\cup N_2^{\mathfrak{w}}$. Dakle, preslikavanje p zadovoljava svojstvo (i) iz definicije 8.2.3.

Preostaje još pokazati da preslikavanje p zadovoljava i svojstvo (ii) iz definicije 8.2.3. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan i $R_1 \in \sigma$ proizvoljan relacijski simbol. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in dom(p)$ proizvoljni. Promatramo dva slučaja $R_1 \neq R$ i $R_1 = R$.

U slučaju kad $R_1 \in \sigma$ nije relacijski simbol R, iz definicije uređene sume slijedi $R_1^{\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2} = R_1^{\mathfrak{M}_1} \dot\cup R_1^{\mathfrak{M}_2}$ i $R_1^{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2} = R_1^{\mathfrak{N}_1} \dot\cup R_1^{\mathfrak{N}_2}$. Pretpostavimo da vrijedi $R_1^{\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2} a_1 a_2 \ldots a_n$. Tada vrijedi $R_1^{\mathfrak{M}_1} a_1 a_2 \ldots a_n$ ili $R_1^{\mathfrak{M}_2} a_1 a_2 \ldots a_n$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $R_1^{\mathfrak{M}_1} a_1 a_2 \ldots a_n$. Iz definicije relacije R_1 slijedi $a_1 a_2 \ldots a_n \in dom(p_1)$. Svojstvo (ii) iz definicije parcijalnog izomorfizma za preslikavanje p_1 povlači da tada vrijedi $R_1^{\mathfrak{N}_1} p_1(a_1) p_1(a_2) \ldots p_1(a_n)$, tj. (uz korištenje $p(a_i) = a_i$, za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) vrijedi $R_1^{\mathfrak{N}_1} p(a_1) p(a_2) \ldots p(a_n)$. Slijedi $R_1^{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2} p(a_1) p(a_2) \ldots p(a_n)$. Tvrdnja da $R_1^{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2} p(a_1) p(a_2) \ldots p(a_n)$ povlači $R_1^{\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2} a_1 a_2 \ldots a_n$ pokazuje se analogno.

Promotrimo još slučaj kad je $R_1 \in \sigma$ relacijski simbol R (tada je $n = 2$). Iz definicije uređene sume slijedi $R^{\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2} = R^{\mathfrak{M}_1} \dot\cup R^{\mathfrak{M}_2} \dot\cup (M_1^{\mathfrak{w}} \times M_2^{\mathfrak{w}})$ i $R^{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2} = R^{\mathfrak{N}_1} \dot\cup R^{\mathfrak{N}_2} \dot\cup (N_1^{\mathfrak{w}} \times N_2^{\mathfrak{w}})$. Pretpostavimo da vrijedi $R^{\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2} a_1 a_2$. Tada vrijedi $R^{\mathfrak{M}_1} a_1 a_2$ ili $R^{\mathfrak{M}_1} a_1 a_2$ ili $(a_1, a_2) \in M_1^{\mathfrak{w}} \times M_2^{\mathfrak{w}}$. U slučaju $R^{\mathfrak{M}_1} a_1 a_2$ i u slučaju $R^{\mathfrak{M}_2} a_1 a_2$ tvrdnja se dokazuje kao i ranije. U slučaju $a_1 \in M_1^{\mathfrak{w}}$ i $a_2 \in M_2^{\mathfrak{w}}$, svojstvo (i) iz definicije parcijalnog izomorfizma za preslikavanja p_1 i p_2 povlači $p_1(a_1) = p(a_1) \in N_1^{\mathfrak{w}}$ i $p_2(a_2) = p(a_2) \in N_2^{\mathfrak{w}}$. Dakle, vrijedi $R^{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2} p(a_1) p(a_2)$. Tvrdnja da $R^{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2} p(a_1) p(a_2)$ povlači $R^{\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2} a_1 a_2$ pokazuje se analogno. ■

Prije sljedeće propozicije uvodimo jednu oznaku radi lakšeg zapisa. Ako su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ neke σ-strukture, $m, n \in \mathbb{N}$ te $\vec{a} \in (M^{\mathfrak{w}} \cup M^{\mathfrak{s}})^n$ i $\vec{b} \in (N^{\mathfrak{w}} \cup N^{\mathfrak{s}})^n$, tada pišemo $(\mathfrak{M}, \vec{a}) \equiv_m (\mathfrak{N}, \vec{b})$ ako za svaku σ-formulu $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvantifikatorskog ranga manjeg ili jednakog m vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models \varphi[\vec{b}].$$

Propozicija 8.6.6. Neka su $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{N}_2$ proizvoljne σ-strukture, $n_1, n_2, m \in \mathbb{N}$ te $\vec{a}_1 \in (M_1^{\mathfrak{w}} \dot\cup M_1^{\mathfrak{s}})^{n_1}$, $\vec{a}_2 \in (M_2^{\mathfrak{w}} \dot\cup M_2^{\mathfrak{s}})^{n_2}$, $\vec{b}_1 \in (N_1^{\mathfrak{w}} \dot\cup N_1^{\mathfrak{s}})^{n_1}$ i $\vec{b}_2 \in (N_2^{\mathfrak{w}} \dot\cup N_2^{\mathfrak{s}})^{n_2}$. Tada vrijedi:

(a) ako $(\mathfrak{M}_1, \vec{a}_1) \equiv_m (\mathfrak{N}_1, \vec{b}_1)$ i $(\mathfrak{M}_2, \vec{a}_2) \equiv_m (\mathfrak{N}_2, \vec{b}_2)$ tada $(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2, \vec{a}_1 \vec{a}_2) \equiv_m (\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \vec{b}_1 \vec{b}_2)$

(b) ako $\mathfrak{M}_1 \equiv_m \mathfrak{N}_1$ i $\mathfrak{M}_2 \equiv_m \mathfrak{N}_2$ tada $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \equiv_m \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$.

Dokaz. Istaknimo prvo da je tvrdnja (b) posljedica tvrdnje (a) za $n_1 = n_2 = 0$. Prema tome, dovoljno je dokazati da vrijedi tvrdnja (a).

Pretpostavimo da vrijedi $(\mathfrak{M}_1, \vec{a}_1) \equiv_m (\mathfrak{N}_1, \vec{b}_1)$. Tada iz Ehrenfeuchtovog teorema 8.5.1. slijedi da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_m(\mathfrak{M}_1, \vec{a}_1, \mathfrak{N}_1, \vec{b}_1)$. Označimo tu strategiju sa St_1. Slično iz $(\mathfrak{M}_2, \vec{a}_2) \equiv_m (\mathfrak{N}_2, \vec{b}_2)$ slijedi da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_m(\mathfrak{M}_2, \vec{a}_2, \mathfrak{N}_2, \vec{b}_2)$. Tu strategiju ćemo označiti sa St_2. Iz definicije Ehrenfeuchtove igre slijedi da su St_1 i St_2 pobjedničke strategije branitelja i u igrama $G_k(\mathfrak{M}_1, \vec{a}_1, \mathfrak{N}_1, \vec{b}_1)$, odnosno $G_k(\mathfrak{M}_2, \vec{a}_2, \mathfrak{N}_2, \vec{b}_2)$, za svaki $k \leq m$. Iz Ehrenfeuchtovog teorema 8.5.1. slijedi da je dovoljno pokazati da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_m(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2, \vec{a}_1\vec{a}_2, \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \vec{b}_1\vec{b}_2)$.

Promotrimo prvo slučaj kada je $m = 0$. Prema tvrdnji (a) leme 8.3.1. postojanje pobjedničke strategije branitelja u igri $G_0(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2, \vec{a}_1\vec{a}_2, \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \vec{b}_1\vec{b}_2)$ ekvivalentno je tome da vrijedi $\vec{a}_1\vec{a}_2 \mapsto \vec{b}_1\vec{b}_2 \in Part(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2)$. Po pretpostavci vrijedi da branitelj ima pobjedničku strategiju u igri $G_0(\mathfrak{M}_1, \vec{a}_1, \mathfrak{M}_2, \vec{a}_2)$ i pobjedničku strategiju u igri $G_0(\mathfrak{N}_1, \vec{b}_1, \mathfrak{N}_2, \vec{b}_2)$. Tvrdnja (a) leme 8.3.1. povlači $\vec{a}_1 \mapsto \vec{b}_1 \in Part(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1)$ i $\vec{a}_2 \mapsto \vec{b}_2 \in Part(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_2)$. Lema 8.6.5. povlači traženu tvrdnju $\vec{a}_1\vec{a}_2 \mapsto \vec{b}_1\vec{b}_2 \in Part(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2)$.

Za $m > 0$ opisat ćemo strategiju branitelja u 1. rundi. Na kraju će biti jasno da je time opisana strategija branitelja kada se iz neke k. runde prelazi u $(k+1)$. rundu, za $k \in \{1, \ldots, m-1\}$. Dvije su moguće situacije u 1. rundi igre $G_m(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2, \vec{a}_1\vec{a}_2, \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \vec{b}_1\vec{b}_2)$:

(1.) izazivač je odabrao σ-strukturu $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ i neki $e_1 \in M_1^{\mathfrak{w}} \cup M_1^{\mathfrak{s}} \cup M_2^{\mathfrak{w}} \cup M_2^{\mathfrak{s}}$,

(2.) izazivač je odabrao σ-strukturu $\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$ i neki $f_1 \in N_1^{\mathfrak{w}} \cup N_1^{\mathfrak{s}} \cup N_2^{\mathfrak{w}} \cup N_2^{\mathfrak{s}}$.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je nastupila situacija (1.). Tada vrijedi točno jedan od sljedećih slučajeva: $e_1 \in M_1^{\mathfrak{w}} \cup M_1^{\mathfrak{s}}$ ili $e_1 \in M_2^{\mathfrak{w}} \cup M_2^{\mathfrak{s}}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $e_1 \in M_1^{\mathfrak{w}} \cup M_1^{\mathfrak{s}}$ (drugi slučaj dokazuje se analogno uz korištenje strategije St_2 umjesto strategije St_1). Tada korištenjem strategije St_1 branitelj za taj e_1 može odabrati $f_1 \in N_1^{\mathfrak{w}} \cup N_1^{\mathfrak{s}}$ koji bi ga odveo do pobjede u igri $G_1(\mathfrak{M}_1, \vec{a}_1, \mathfrak{N}_1, \vec{b}_1)$. To prema definiciji Ehrenfeuchtove igre znači da vrijedi $\vec{a}_1 e_1 \mapsto \vec{b}_1 f_1 \in Part(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1)$. Sada iz $\vec{a}_2 \mapsto \vec{b}_2 \in Part(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_2)$ i 8.6.5. slijedi $\vec{a}_1\vec{a}_2 e_1 \mapsto \vec{b}_1\vec{b}_2 f_1 \in Part(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2)$. Iz definicije Ehrenfeuchtove igre slijedi da branitelj nije izgubio u ovoj rundi. ∎

ZAKLJUČAK

Glavni rezultat ove disertacije je dokaz analogona van Benthemovog teorema karakterizacije za logiku interpretabilnosti u odnosu na Verbruggeinu semantiku. U tu svrhu u disertaciji su dane nove definicije bisimulacija i bisimulacijskih igara za Verbruggeinu semantiku logike interpretabilnosti koje se redom nazivaju w-bisimulacije i w-bisimulacijske igre. Napravljena je usporedba svojstava tih novih definicija sa svojstvima bisimulacija i bisimulacijskih igara za Verbruggeinu semantiku koje su se do sad koristile u literaturi. Dokazano je da w-bisimulacije i dalje zadržavaju sva dobra svojstva bisimulacija, ali da vrijedi važna razlika u odnosu na bisimulacije: ako je skup propozicionalnih varijabli koji promatramo konačan tada su (n-)modalno ekvivalentni svjetovi (n-)w-bisimulirani. Razmatrani su i znanstveni članci koji koriste bisimulacije Verbruggeinih modela i njihova svojstva u dokazivanju glavnih rezultata tih članaka. Radi se o znanstvenim člancima u kojima se razmatraju svojstvo konačnih modela i odlučivost raznih proširenja logike interpretabilnosti IL. U disertaciji je dokazano da ti rezultati i dalje vrijede ako se koriste w-bisimulacije Verbruggeinih modela umjesto bisimulacija Verbruggeinih modela.

Što se tiče budućih istraživanja, s obzirom da je dokazan van Benthemov teorem, postavlja se pitanje je li moguće dokazati analogon van Benthem-Rosenovog teorema (vidi [40]) za logiku interpretabilnosti u odnosu na Verbruggeinu semantiku, tj. verziju van Benthemovog teorema karakterizacije u odnosu na konačne Verbruggeine modele. Analizom pojednostavljenog dokaza tog teorema koji je dao M. Otto (vidi [34]) lako je vidjeti da je velik broj potrebnih rezultata za dobivanje analogona tog teorema dokazan u ovoj disertaciji. Ključni tehnički problem koji preostaje riješiti kako bi se dobio željeni analogon glasi ovako:

> *za dani Verbruggein model $\mathfrak{M}$ koji je stablo s korijenom w treba konstruirati Verbruggeine modele $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}''$ s pripadnim svjetovima $w' \in \mathfrak{M}'$ i $w'' \in \mathfrak{M}''$ tako da činjenice $\mathfrak{M}', w' \underline{\leftrightsquigarrow} \mathfrak{M}, w$ i $\mathfrak{M}'', w'' \underline{\leftrightsquigarrow} (\mathfrak{M} \upharpoonright l), w$ povlače $\mathfrak{M}', w' \equiv_q \mathfrak{M}'', w''$.*

Pritom je prirodni broj $q \in \mathbb{N}$ unaprijed zadan te je $l = 2^q - 1$.

Zatim, postavlja se pitanje je li moguće upotrebom w-bisimulacija umjesto bisimulacija dokazati svojstvo konačnih modela za proširenja logike interpretabilnosti za koje to još nije dokazano ili barem dati kraće dokaze već postojećih dokaza svojstva konačnih modela nekih proširenja logika interpretabilnosti.

BIBLIOGRAFIJA

[1] A. Berarducci, *The Interpretability Logic of Peano Arithmetic*, Journal of Symbolic Logic 55, 1990, 1059–1089

[2] N. Bezhanishvili, T. Henke, *A model-theoretic approach to descriptive general frames: the van Benthem characterization theorem*, Journal of Logic and Computation 30(2020), 1331–1355

[3] M. Bílková, E. Goris, J. J. Joosten, *Smart labels*, In: Liber Amicorum for Dick de Jongh, J. van Benthem et al. eds., Institute for Logic, Language and Computation, 2004.

[4] M. Bílková, E. Goris, J. J. Joosten, L. Mikec, *Theory and application of labelling techniques for interpretability logics*, Mathematical Logic Quarterly 68(2022), 352–374

[5] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[6] F. Bou, J. J. Joosten, *The closed fragment of IL is PSPACE-hard*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 278(2011), 47–54

[7] V. Čačić, D. Vrgoč, *A Note on Bisimulation and Modal Equivalence in Provability Logic and Interpretability Logic*, Studia Logica 101(2013), 31–44

[8] A. Dawar, M. Otto, *Modal characterisation theorems over special classes of frames*, Annals of Pure and Applied Logic 161(2009), 1–42

[9] H. D. Ebbinghaus, J. Flum, *Finite Model Theory*, Springer, 1999.

[10] V. Goranko, M. Otto, *Model theory for modal logic*, In: P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter (eds.), Handbook of Modal Logic, 249-329, Elsevier, Amsterdam (2006)

[11] E. Goris, J. J. Joosten, *Modal Matters for Interpretability Logics*, Logic Journal of the IGPL 16(2008), 371–412

[12] E. Goris, J. J. Joosten, *A new principle in the interpretability logic of all reasonable arithmetical theories*, Logic Journal of the IGPL 19(2011), 1–17

[13] E. Goris, J. J. Joosten, *Self provers and σ_1 sentences*, Logic Journal of the IGPL 20(2012), 1–21

[14] J. de Groot, *Hennessy-Milner and Van Benthem for Instantial Neighbourhood Logic*, Studia Logica 110(2022), 717–743

[15] A. Guillaume, *A van Benthem Theorem for Atomic and Molecular Logics*, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science, 358(2022), 84–101
https://arxiv.org/pdf/2204.06720.pdf

[16] H. H. Hansen, C. Kupke, E. Pacuit, *Neighbourhood structures: Bisimilarity and basic model theory*, Logical Methods in Computer Science 5(2009), 1–38

[17] I. Hodkinson, H. Tahiri, *A bisimulation characterization theorem for hybrid logic with the current-state binder*, The Review of Symbolic Logic 3(2010), 247–261

[18] D. Janin, I. Walukiewicz, *On the expressive completeness of the propositional calculus with respect to the monadic second order logic*, In: *Proceedings of the 7th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR'96)*, Lecture Notes in Computer Science 1119(1996), 263–277

[19] D. de Jongh, F. Veltman, *Provability logics for relative interpretability*, In: Mathematical Logic, Proceedings of the 1988 Heyting Conference, P. P. Petkov (ed.), Plenum Press, New York, 1990, 31–42

[20] D. de Jongh, F. Veltman, *Modal completeness of* ILW, In: J. Gerbrandy et al. (eds.), Essays Dedicated to Johan van Benthem on the Occasion of His 50th Birthday, Amsterdam University Press, 1999.

[21] J. Liu, Y. Wang, Y. Ding, *Weakly Aggregative Modal Logic: Characterization and Interpolation*, In: P. Blackburn, E. Lorini, M. Guo (eds) *Logic, Rationality, and Interaction (LORI 2019)*, Lecture Notes in Computer Science 11813(2019), 153–167
https://arxiv.org/pdf/1803.10953.pdf

[22] H. H. Hansen, C. Kupke, E. Pacuit, *Neighbourhood Structures: Bisimilarity and Basic Model Theory*, Logical Methods in Computer Science 5(2009), 1–38 https://arxiv.org/pdf/0901.4430v4.pdf

[23] S. Horvat, T. Perkov, M. Vuković, *Bisimulations and bisimulation games between Verbrugge models*, Mathematical Logic Quarterly 69(2023), 231–243

[24] S. Iwata, T. Kurahashi, Y. Okawa, *The persistence principle over the logic* $\mathtt{IL}^-$, Mathematical Logic Quarterly, prihvaćeno za objavljivanje https://arxiv.org/pdf/2203.02183.pdf, 2022.

[25] J. J. Joosten, J. Mas Rovira, L. Mikec, M. Vuković, *An overview of Generalised Veltman Semantics*, to appear in S. O. Hansson, M. Kracht, L. Moss, S. Smets, H. Wansing (eds.), **Dick de Jongh on Intuitionistic and Provability Logic**, Outstanding Contributions to Logic, Springer, prihvaćeno za objavljivanje https://arxiv.org/pdf/2007.04722.pdf

[26] J. Kontinen, J-S. Müller, H. Schnoor, H. Vollmer, *A Van Benthem Theorem for Modal Team Semantics*, In: S. Kreutzer, editor, *24th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2015)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, Dagstuhl, 2015, 277–291 https://arxiv.org/pdf/1410.6648.pdf

[27] T. Kurahashi, Y. Okawa, *Modal completeness of sublogics of the interpretability logic IL*, Mathematical Logic Quarterly 67(2021), 164–185

[28] S. Meissner, M. Otto, *A first-order framework for inquisitive modal logic*, The Review of Symbolic Logic 15(2022), 311–333

[29] L. Mikec, *Complexity of the interpretability logics* ILW *and* ILP, Logic Journal of the IGPL 31(2023), 194–213

[30] L. Mikec, F. Pakhomov, M. Vuković, *Complexity of the interpretability logic* IL, Logic Journal of the IGPL 27(2019), 1–7

[31] L. Mikec, T. Perkov, M. Vuković, *Decidability of interpretability logics* ILM_0 *and* ILW^*, Logic Journal of the IGPL 25(2017), 758–772

[32] L. Mikec, M. Vuković, *Interpretability logics and generalized Veltman semantics*, The Journal of Symbolic Logic 85(2020), 749–772

[33] F. Montagna, *Provability in finite subtheories of PA and relative interpretability: a modal investigation*, The Journal of Symbolic Logic 52(1987), 494–511

[34] M. Otto, *Elementary Proof of the van Benthem-Rosen Characterisation Theorem*, Fachbereich Mathematik, Technische Universitat Darmstadt, 2004.

[35] F. Pakhomov, *On the complexity of the closed fragment of Japaridze's provability logic*, Archive for Mathematical Logic 53(2014), 949–967

[36] F. Papacchini, F. Wolter, *A Van Benthem Theorem for Horn Description and Modal Logic*, In: *Proceedings of the 31st International Workshop on Description Logics co-located with 16th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2018)*, Tempe, Arizona, US, 2018

[37] T. Perkov, *Bisimulations between Verbrugge models and Veltman models*, In: H. H. Hansen, A. Scedrov, R. J. G. B. de Queiroz (ur.), *Proceedings of 29th International Workshop on Logic, Language, Information and Computation (WoLLIC 2023)*, Halifax, Canada, Springer, 2023, 305–317

[38] T. Perkov, M. Vuković, *A bisimulation characterization for interpretability logic*, Logic Journal of the IGLP 22(2014), 872–879

[39] T. Perkov, M. Vuković, *Filtrations of generalized Veltman models*, Mathematical Logic Quarterly 62(2016), 412–419

[40] E. Rosen, *Modal logic over finite structures*, Journal of Logic, Language and Information 6(1997), 427–439

[41] K. Sasaki, *A cut-free sequent system for the smallest interpretability logic*, Studia Logica 70(2002), 353–372

[42] K. Sasaki, *On Sequent Systems for Bimodal Provability Logics MOS and* PRL_1, Bulletin of the Section of Logic 31/2(2002), 91–101

[43] L. Schröder, D. Pattinson, T. Litak, *A Van Benthem/Rosen theorem for coalgebraic predicate logic*, Journal of Logic and Computation 27(2017), 749–773

[44] I. Shapirovsky, *PSPACE-decidability of Japaridze's polymodal logic*, Advances in modal logic 7(2008), 289–304

[45] R. M. Solovay, *Provability Interpretations of Modal Logic*, Israel Journal of Mathematics 25(1976), 287–304

[46] V. Švejdar, *Modal analysis of generalized Rosser sentences*, The Journal of Symbolic Logic 48(1983), 986–999

[47] V. Švejdar, *Some independence results in interpretability logic*, Studia Logica 50(1991), 29–38

[48] L. C. Verbrugge, *Verzamelingen-Veltman frames en modellen (Set Veltman frames and models)*, neobjavljeni rukopis, Amsterdam, 1992.
Dostupno ovdje: http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/173054

[49] A. Visser, *Preliminary notes on Interpretability Logic*, Technical Report LGPS 29, Department of Philosophy, Utrecht University, 1988.

[50] A. Visser, *Interpretability logic*, In: P. P. Petkov (ed.), *Mathematical Logic, Proceedings of the Heyting 1988 summer school in Varna, Bulgaria*, Plenum Press, 1990, 175–209

[51] A. Visser, *The formalization of interpretability*, Studia Logica 50(1991), 81–106

[52] A. Visser, *An overview of interpretability logic*. In: M. Kracht (ed.) et al., Advances in modal logic. Vol. 1. Selected papers from the 1st international workshop (AiML'96), Berlin, Germany, 1996, Stanford, CA: CSLI Publications, CSLI Lect. Notes. 87, 307–359 (1998)

[53] D. Vrgoč, M. Vuković, *Bisimulations and bisimulation quotients of generalized Veltman models*, Logic Journal of the IGPL 18(2010), 870–880

[54] M. Vuković, *Some correspondences of principles in interpretability logic*, Glasnik matematički 31(1996), 193–200

[55] M. Vuković, *The principles of interpretability*, Notre Dame Journal of Formal Logic 40(1999), 227—235

[56] M. Vuković, *Characteristic classes and bisimulations of generalized Veltman models*, Grazer Mathematische Berichte, 341 (2000), 7–16

[57] M. Vuković, *Hennessy-Milner theorem for interpretability logic*, Bulletin of the Section of Logic 34(2005), 195–201

[58] M. Vuković, *Bisimulations between generalized Veltman models and Veltman models*, Mathematical Logic Quarterly 54(2008), 368–373

[59] M. Vuković, *A Note on ultraproducts of Veltman models*, Glasnik matematički 46(66)(2011), 7–10

[60] P. Wild, L. Schröder, *A Characterization Theorem for a Modal Description Logic*, In: *Proceedings of the 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'17)*, AAAI Press, 2017, 1304–1310
https://arxiv.org/pdf/1705.06214.pdf

[61] P. Wild, L. Schröder, D. Pattinson, B. König, *A van Benthem Theorem for Fuzzy Modal Logic*, In: *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS '18)*, Association for Computing Machinery, New York, 2018, 909–918
https://arxiv.org/pdf/1802.00478.pdf

[62] P. Wild, L. Schröder, D. Pattinson, B. König, *A van Benthem Theorem for Quantitative Probabilistic Modal Logic*, 2018
https://arxiv.org/pdf/1810.04722.pdf

[63] P. Wild, L. Schröder, D. Pattinson, B. König, *A Modal Characterization Theorem for a Probabilistic Fuzzy Description Logic*, In: *Proceedings of the Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-19)*, International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, 2019, 1900–1906
https://arxiv.org/pdf/1906.00784.pdf

Životopis

Sebastijan Horvat je rođen 27. srpnja 1994. godine u Varaždinu. Završio je osnovnu školu u Ivancu te potom Prvu gimnaziju i Srednju glazbenu školu u Varaždinu. Preddiplomski studij matematike upisao je 2013. godine na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu te ga je završio 2016. godine. Iste godine upisuje diplomski studij Računarstvo i matematika na istom fakultetu. Tijekom diplomskog studija nagrađen je nagradama za izvrsnost Matematičkog odsjeka i Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Diplomirao je 2018. godine s temom „Modalna potpunost logika interpretabilnosti" pod vodstvom prof. dr. sc. Mladena Vukovića i izv. prof. dr. sc. Tina Perkova te tako stekao zvanje magistra računarstva i matematike.

Godine 2018. upisao je Združeni doktorski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu te počeo sudjelovati u radu Seminara za matematičku logiku i osnove matematike gdje trenutno obnaša dužnost tajnika seminara. Od listopada 2018. do siječnja 2020. godine zaposlen je kao asistent na Učiteljskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. U siječnju 2020. godine zaposlen je kao asistent na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, gdje radi i danas. Osim toga radio je i kao honorarni asistent na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u zimskom semestru ak. god. 2021./2022. i 2022./2023.

Održao je nekoliko priopćenja na međunarodnim znanstvenim skupovima od kojih se posebno ističe priopćenje na skupu Workshop on Proof Theory, Modal Logic and Reflection Principles u Bernu (Švicarska) 2023. godine.

Koautor je jednog objavljenog članka:

- S. Horvat, T. Perkov, M. Vuković, *Bisimulations and bisimulation games between Verbrugge models*, Mathematical Logic Quarterly 69(2023), 231-243.

te jednog članka prihvaćenog za objavljivanje:

- S. Horvat, T. Perkov, *Correspondence theorem for interpretability logic with respect to Verbrugge semantics*, Rad HAZU, Matematičke znanosti.

Bio je suradnik na dva projekta Hrvatske zaklade za znanost: projektu „Formalno rasuđivanje i semantike" (UIP-05-2017-9219) te projektu „Izračunljive strukture, odlučivost i složenost" (IP-2018-01-7459). Godine 2021. dobio je nagradu „Stipe Vidak" Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta za istaknuti doprinos u radu sa studentima te tri nagrade „Brdo” Studentskog zbora Prirodoslovno-matematičkog fakulteta za najboljeg asistenta po izboru studenata.

IZJAVA O IZVORNOSTI RADA

Ja, ______________________________, student/ica Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, s prebivalištem na adresi ____,OIB _____________________, JMBAG ___________________________, ovim putem izjavljujem pod materijalnom i kaznenom odgovornošću da je moj završni/diplomski/doktorski rad pod naslovom: ____

____

____, isključivo moje autorsko djelo, koje je u potpunosti samostalno napisano uz naznaku izvora drugih autora i dokumenata korištenih u radu.

U Zagrebu, ______________________

____

Potpis