SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tadej Petar Tukara

PROBLEMI TURÁNOVOG TIPA ZA HIPERGRAFOVE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Nina Kamčev

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U središtu proučavanja ekstremalne teorije grafova je pitanje postojanja nekog podgrafa, ili familije podgrafova, u danom grafu s određenim globalnim ili lokalnim svojstvima. Smatra se da je prvi rezultat ovog tipa poznati Mantelov teorem iz 1907. koji daje gornju ogradu na broj bridova grafa koji ne sadrži trokut.

Centralni pojam proučavanja u ovom radu je ekstremalni ili Turánov broj $ex(n, F)$, koji se definira kao maksimalni broj bridova u F-slobodnom grafu. Graf s n vrhova i $ex(n, F)$ bridova koji je F-slobodan nazivamo ekstremalni graf od F. Turán je 1941. odredio ekstremalni broj klika $ex(n, K_t)$, te je odredio točnu strukturu ekstremalnog grafa. Turánov graf $T(n, t)$ je potpuni t-partitni graf s n vrhova, čiji dijelovi particije su veličina $\lfloor n/t \rfloor$ i $\lceil n/t \rceil$. Turánov graf je jedinstven ekstremalni graf za K_{t+1}, stoga je ekstremalni broj klika $ex(n, K_{t+1}) = e(T(n, t)) \sim (1 - \frac{1}{t})\frac{n^2}{2}$.

Za općenite ne bipartitne grafove F, problem određivanja Turánovog broja $ex(n, F)$ asimptotski su riješili Erdős i Stone 1946. godine, povezavši ga s kromatskim brojem $\chi(F)$. Erdős i Simonovits su 1966. proširili taj rezultat, pokazavši da je, za dovoljno velik n, jedinstveni ekstremalni graf upravo $T(n, \chi(F) - 1)$.

Za bipartitne grafove problem ostaje otvoren. Naime, Erdős-Stone teorem daje ogradu $ex(n, F) = o(n^2)$ za bipartitne F. Ovo je daleko od dobre aproksimacije. Dokazana je bolja gornja ograda $ex(n, F) = O(n^{2-c})$ za neku konstantu $c = c(F)$. Zanimljivo je pitanje postoji li najbolja takva konstanta te kako ju odrediti. Poznato je na primjer da je za 4-ciklus $ex(n, C_4)$ reda veličine $n^{3/2}$. Međutim, već za C_6 nije poznat red veličine $ex(n, C_6)$.

U svom radu iz 1941., Turán je postavio pitanje određivanja ekstremalnog broja za r-uniformne potpune hipergrafove. Unatoč zadovoljavajućem rješenju za grafove, isti problem se za r-uniformne hipergrafove pokazao iznimno teškim. Već i određivanje Turánove gustoće, koja je limes $\lim_{n\to\infty} ex(n, F)/\binom{n}{r}$, se pokazalo kao velik izazov. Do danas je taj problem riješen tek za nekolicinu posebnih slučajeva. Dok se pokazalo da za grafove postoje jedinstvene ekstremalne konstrukcije, za hipergrafove vrlo često postoji veći broj ekstremalnih konstrukcija. Iz ovog, kao i brojnih drugih razloga, određivanje Turánove gustoće za hipergrafove poznato je kao vrlo težak problem.

U ovom radu izlažu se neke od metoda za određivanje Turánovog broja i Turánove gustoće hipergrafova koje su se pokazale učinkovitima.

U prvom poglavlju bavimo se problemima Turánovog tipa za grafove. Dokazuju se klasični rezultati ovog tipa, Turánov i Erdős-Stone teorem. U drugom poglavlju prelazimo na hipergrafove. Ključan je pojam r-uniformnog hipergrafa, koji je generalizacija grafa u kojoj bridove sa dva vrha zamijenjuju hiperbridovi sa r vrhova. Dokazuje se Erdősev rezultat o r-partitnim r-uniformnim hipergrafovima, koji generaliziraju pojam bipartitnog grafa. Pokazujemo važan fenomen prezasićenosti i uvodimo pojam t-napuhavanja. Pokazuje se da je Turánova gustoća hipergrafa jednaka Turánovoj gustoći bilo kojeg t-napuhavanja istog. Za kraj poglavlja bavimo se konstrukcijama ekstremalnih hipergrafova, pri čemu se uvodi pojam iteriranog napuhavanja.

U trećem poglavlju izlažemo metodu link grafova. Link graf vrha v u r-uniformnom hipergrafu H definiramo kao $(r-1)$-uniformni hipergraf čiji su hiperbridovi sve $(r-1)$-torke koje s v čine brid u H. Koristeći link grafove dokazani su prvi egzaktni rezultati u području, poput određivanja Turánove gustoće Fanove ravnine.

Četvrto poglavlje daje pregled nedavnih rezultata vezanih za Turánovu gustoću tijesnih ciklusa i tijesnih ciklusa bez jednog brida. Ovi rezultati generaliziraju poznatu činjenicu iz teorije grafova, da je svaki graf koji ne sadrži cikluse neparne duljine bipartitan. Kada se bavimo 3-uniformnim hipergrafovima, neparni ciklusi su ciklusi duljine koja nije djeljiva s 3. Ovaj uvjet je ekvivalentan tome da ti ciklusi nisu 3-partitni.

U petom poglavlju demonstrira se metoda stabilnosti, koja je ključan sastojak u dokazu spomenutih rezultata. Ova metoda oslanja se na jedinstvenu strukturu ekstremalnog hipergrafa. Često se primjenjuje za grafove, ali ju je teže primijeniti na hipergrafove gdje rijetko postoji jedinstvena ekstremalna konstrukcija. Navest ćemo također nekoliko zanimljivih otvorenih problema ovog tipa za koje postoje razumne slutnje. Većina ovakvih slutnji oslanja se na dobru konstrukciju, kojoj je podrška bliska gornja ograda, u većini slučajeva dana metodom flag algebri. U ovom radu nećemo ulaziti u detalje ove metode, a zainteresirani čitatelj može naći kvalitetnu ekspoziciju na primjer u [1].

Poglavlje 1

Problemi Turánovog tipa za grafove

1.1 Turánov teorem

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je F neki graf. Kažemo da je graf G F*-slobodan* ako ne sadrži kopiju od F kao podgraf. Definiramo *Turánov broj* $ex(n, F)$ kao maksimalan broj bridova F-slobodnog grafa G s n vrhova. Maksimalan F-slobodan graf na n vrhova ćemo nazivati *ekstremalnim* grafom za F. Pitanje određivanja $ex(n, F)$ za proizvoljne n i F jedan je od centralnih problema ekstremalne teorije grafova. Prvi značajan rezultat u ovom području bio je Mantelov teorem, koji određuje $ex(n, K_3)$.

Teorem 1.1.1 (Mantel)**.** *Graf G s n vrhova koji ne sadrži trokut ima najviše $\lfloor n^2/4 \rfloor$ bridova.*

Dokaz. Neka je A najveći nezavisan skup u G, tj. najveći skup koji ne razapinje nijedan brid. Budući da G ne sadrži trokut, za svaki vrh $x \in V(G)$ je susjedstvo $N(x) := \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$ nezavisan skup. Stoga je $d(x) := |N(x)| \leq |A|$ za svaki vrh x. Neka je $B = V(G) \setminus A$. Svaki brid u G nužno ima barem jedan vrh u B. Možemo zaključiti da vrijedi

$$e(G) \leq \sum_{x \in B} d(x) \leq |A||B| \leq \left(\frac{|A|^2 + |B|^2}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

Za paran n, jednakost vrijedi ako i samo ako je $|A| = |B| = \frac{n}{2}$, $d(x) = |A|$ za sve $x \in B$ i graf nema bridova unutar B. Ako je n neparan, maksimalan broj bridova se postiže kada je $|A| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ i $|B| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. U oba slučaja G ima bipartitnu strukturu. □

Primijetimo da smo pokazali ne samo da je $ex(n, F) = \lfloor n^2/4 \rfloor$, već i da ekstremalni graf ima strukturu potpunog bipartitnog grafa s jednakim, ili gotovo jednakim, dijelovima particije. Kao generalizacija ovog rezultata, prirodno proizlazi pitanje određivanja $ex(n, K_t)$, za sve prirodne $t \geq 3$. Odgovor je dao Turán 1941. godine.

Teorem 1.1.2 (Turán)**.** *Ako graf G s n vrhova ne sadrži K_{t+1} kao podgraf, onda G ima najviše $\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{n^2}{2}$ vrhova.*

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po n. Za $1 \leq n \leq t$ vrijedi $\frac{n-1}{n} \leq \frac{t-1}{t}$, pa vidimo da je $\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{n^2}{2} \geq \binom{n}{2}$. Pretpostavimo sada da za neki $n > t$ tvrdnja vrijedi za $1, \ldots, n-1$. Uzmimo maksimalan K_{t+1}-slobodan graf na n vrhova. Taj graf očito sadrži podgraf K_t, inače bismo mogli sigurno dodati bilo koji brid i ponovno dobiti K_{t+1}-slobodan graf. Fiksiramo takav podgraf. Skup njegovih vrhova označimo s A, a skup preostalih $n-t$ vrhova s B. Broj bridova u A je najviše $\binom{t}{2}$. Broj bridova između A i B je najviše $(t-1)(n-t)$, jer nijedan vrh iz B ne može biti povezan sa svim vrhovima iz A. Broj bridova unutar B je najviše $\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{(n-t)^2}{2}$, po induktivnoj pretpostavci. Zbrajanjem svih ograda dobivamo da je broj bridova najviše

$$\binom{t}{2} + (t-1)(n-t) + \left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{(n-t)^2}{2} = \left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Slijedi tvrdnja teorema. □

1.2 Erdős-Stone teorem

Za proizvoljan graf F, ne znamo odrediti točnu vrijednost $ex(n, F)$. Međutim, sljedeći rezultat koji su dokazali Erdős i Stone 1946. daje vrijednost $ex(n, F)$ asimptotski, povezujući je s kromatskim brojem grafa.

Definicija 1.2.1. Kromatski broj $\chi(H)$ grafa H je najmanji prirodni broj c takav da vrhove od H možemo obojiti u c boja tako da nikoja dva susjedna vrha nisu istobojna.

Teorem 1.2.2 (Erdős-Stone)**.** *Za svaki graf H i svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi*

$$\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}-\epsilon\right)\frac{n^2}{2} \leq ex(n, H) \leq \left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+\epsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

Primijetimo da je, ako je graf H bipartitan, tada je $\chi(H) = 2$. Iz gornjeg teorema vidimo da je tada $ex(n, H) = o(n^2)$. Ovaj rezultat nam govori malo o ponašanju funkcije $ex(n, H)$. Ovaj problem do danas nije riješen za općenite H. Kasnije (v. Teorem 2.2.2) ćemo pokazati da za svaki bipartitan graf H postoji konstanta $c = c(H)$ takva da je

$ex(n,H) = O(n^{2-c})$. Poznata je slutnja Erdősa i Simonovitsa da postoje $a \in [0,1)$ i $c > 0$ takvi da $ex(n,H)/n^{1+a} \to c$ kad $n \to \infty$. Povijesni pregled rezultata ovog tipa dali su Füredi i Simonovits [8].

Prije nego što prijeđemo na dokaz Teorema 1.2.2, pokazat ćemo sljedeću lemu, koja sadržajem obuhvaća većinu onoga što treba pokazati.

Lema 1.2.3. *Za svaki par prirodnih brojeva r i t i svaki $0 < \epsilon < \frac{1}{r}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi sljedeće. Svaki graf G sa $n \geq n_0$ vrhova i barem $\left(1 - \frac{1}{r} + \epsilon\right)\frac{n^2}{2}$ bridova sadrži $r+1$ disjunktnih skupova vrhova $A_1, \ldots, A_{r+1}$ veličine t takvih da G sadrži sve bridove između A_i i A_j, za sve $1 \leq i < j \leq r+1$.*

Dokaz. Za početak, pokazujemo da postoji inducirani podgraf G' od G, takav da je stupanj svakog vrha iz G' barem $\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right)|v(G')|$. Takav podgraf možemo konstruirati sljedećim procesom uklanjanja vrhova: počevši od grafa G, kad u procesu dođemo do grafa s l vrhova u kojem postoji vrh stupnja manjeg od $\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right) l$, uklonimo taj vrh iz grafa. Ovaj proces završava kada dođemo do grafa G' s m vrhova koji zadovoljava traženo svojstvo (zasad znamo samo da je $m \geq 0$). Dokažimo da je m dovoljno velik za potrebe dokaza. Kad u procesu dođemo do grafa s l vrhova, uklanjamo najviše $\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right) l$ bridova. Ukupan broj uklonjenih bridova je najviše

$$\sum_{l=m+1}^{n} \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right) l = \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(\binom{n}{2} - \binom{m}{2}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{n^2 - m^2}{2} + \frac{n-m}{2}.$$

Nadalje, budući da G' ima najviše $\frac{m^2}{2}$ bridova, slijedi

$$e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{n^2 - m^2}{2} + \frac{n-m}{2} + \frac{m^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{n^2}{2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{m^2}{2} + \frac{n-m}{2}.$$

Također imamo $\left(1 - \frac{1}{r} + \epsilon\right)\frac{n^2}{2} \leq e(G)$. Dakle, m nužno zadovoljava nejednakost

$$0 \leq \left(\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} - \epsilon\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo da, za dovoljno velik n, vrijedi

$$m \geq \frac{\sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\epsilon}{2}n^2 - n\right)}}{\frac{2}{r} - \epsilon} \geq \sqrt{\frac{\frac{\epsilon}{2}n^2 - n}{\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{2}}} \geq \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon r}n.$$

Odsada nadalje promatramo graf G'. On ima traženo svojstvo stupnjeva i možemo uzeti da je dovoljno velik. Pokažimo traženu tvrdnju indukcijom po r. Za $r = 0$ tvrdnja je očita. Za neki $r > 0$, uzmimo $s = \lceil 3t/\epsilon \rceil$. Po pretpostavci indukcije možemo naći disjunktne skupove vrhova $B_1, \dots, B_r$ veličine s takve da G' sadrži sve bridove među različitim skupovima. Neka je $U = V(G') \setminus \{B_1 \cup \cdots \cup B_r\}$ te neka je W skup svih vrhova iz U koji imaju barem t susjednih vrhova u svakom B_i. Označimo sa $\hat{m}$ broj bridova koji nedostaju između U i $\{B_1 \cup \cdots \cup B_r\}$. Svaki vrh iz $U \setminus W$ je povezan s najviše t vrhova iz $\{B_1 \cup \cdots \cup B_r\}$. Stoga vrijedi

$$\hat{m} \geq |U \setminus W| (s - t) \geq (m - rs - |W|) \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) s.$$

S druge strane, svakom vrhu iz G' nedostaje najviše $\left(\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{2}\right) m$ bridova. Stoga je

$$\hat{m} \leq rs \left(\frac{1}{r} - \frac{\epsilon}{2}\right) m = \left(1 - \frac{r\epsilon}{2}\right) sm.$$

Kombinirajući prethodne nejednakosti dobivamo

$$|W| \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) s \geq (m - rs) \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) s - \left(1 - \frac{r\epsilon}{2}\right) sm = \epsilon \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{3}\right) sm - \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) rs^2.$$

Budući da su ϵ, r i s konstante, za dovoljno velik m vrijedi da je $|W| \geq \binom{s}{t}^r (t-1)$. Po Dirichletovom principu, postoje skupovi $A_1 \subseteq B_1, \dots, A_r \subseteq B_r$ veličine t i $A_{r+1} \subseteq W$ veličine t takvi da je svaki vrh u A_{r+1} povezan sa svakim vrhom u $A_1 \cup \cdots \cup A_r$. Budući da $A_1, \dots, A_r$ zadovoljavaju pretpostavku indukcije, ovime smo pokazali traženu tvrdnju. □

Dokaz Teorema 1.2.2. Neka je $r = \chi(H) - 1$. Donju ogradu dobivamo promatrajući potpun r-partitan graf s n vrhova čiji su dijelovi particije veličina $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ i $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$. Za dovoljno velik n ovakav graf ima traženi broj bridova. Nadalje, svaki podgraf ovog grafa ima kromatski broj najviše $\chi(H) - 1$, stoga on ne sadrži H kao podgraf. Za gornju ogradu, primijetimo da za dovoljno velik t, H možemo uložiti u graf G čiji su vrhovi particionirani u skupove $A_1, \dots, A_{\chi(H)}$ veličine t, a bridovi su mu svi bridovi između A_i i A_j, za sve $1 \leq i < j \leq \chi(H)$. Iz ovoga i Leme 1.2.3 slijedi tražena gornja ograda. □

Poglavlje 2

Turánov problem za hipergrafove

2.1 Osnovno o hipergrafovima

Definicija 2.1.1. Hipergraf H je uređeni par (V, E), gdje je $V \neq \emptyset$ konačan skup vrhova, a E neprazna familija podskupova od V. Elemente iz E nazivamo bridovima hipergrafa H.

Hipergrafovi u punoj općenitosti imaju široku upotrebu u kombinatorici. U ovom radu bavit ćemo se samo uniformnim hipergrafovima.

Definicija 2.1.2. Za prirodan broj r, hipergraf $H = (V, E)$ je r-uniformni hipergraf (r-graf) ako sadrži samo skupove sa r elemenata. Posebno, graf je 2-uniformni hipergraf.

Pojam hipergrafa je prirodna generalizacija grafa. Stoga ćemo često koristiti iste oznake kao i za grafove. Sa $V(H)$ i $E(H)$ označavamo redom skup vrhova i skup bridova od H. Koristit ćemo oznaku za broj vrhova $v(H) = |V(H)|$ i za broj bridova $e(H) = |E(H)|$. Nadalje, radi jednostavnijeg zapisa za bridove često koristimo skraćene oznake, $x_1 \ldots x_r$ umjesto $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Uvodimo daljnje pojmove koji proširuju poznate definicije za grafove.

Definicija 2.1.3. Neka su $H = (V, E)$ i $H' = (V', E')$ hipergrafovi. Kažemo da je H' podgraf od H ako je $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$.

Homomorfizam hipergrafova je preslikavanje između skupova vrhova takvo da se svaki brid jednog preslikava u neki brid drugog hipergrafa. Injektivni homomorfizam hipergrafova nazivamo još i *ulaganje*. Neka su $H = (X, E)$ i $G = (Y, F)$ hipergrafovi sa skupovima bridova $E = \{e_i : i \in I\}$ i $F = \{f_i : i \in I\}$. Hipergraf H je izomorfan s hipergrafom G ako postoji bijekcija $\phi : X \to Y$ i permutacija π od I takva da je $\phi(e_i) = f_{\pi(i)}$ za sve $i \in I$. Za ϕ tada kažemo da je *izomorfizam* hipergrafova.

Sa $K^{(r)}(s_1, \ldots, s_r)$ označavat ćemo r-graf sa $s_1 + s_2 + \cdots + s_r$ vrhova i $s_1 s_2 \cdots s_n$ bridova, definiran na sljedeći način. Vrhovi su

$$x_i^{(j)},\ 1 \leq j \leq r,\ 1 \leq i \leq s_j,$$

a bridovi su r-torke

$$\{x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \ldots, x_{i_r}^{(r)}\},\ 1 \leq i_j \leq n_j,\ 1 \leq j \leq r.$$

Svaki graf koji se može uložiti u neki $K^{(r)}(s_1, \ldots, s_r)$ nazivamo r-partitni r-graf. r-graf koji je izomorfan s nekim $K^{(r)}(s_1, \ldots, s_r)$ nazivamo potpun r-partitni r-graf. Za svaki r-partitni r-graf H postoje $s_1, \ldots, s_r$ takav da postoji ulaganje H u $K^{(r)}(s_1, \ldots, s_r)$ koje je bijekcija na odgovarajućim skupovima vrhova. Ako pritom vrijedi $|s_i - s_j| \leq 1$ za sve $1 \leq i, j \leq r$, kažemo da je H *balansiran*. Lako se pokaže da za potpun balansiran r-partitan r-graf H na n vrhova vrijedi

$$e(H) = \prod_{k=0}^{r-1} \left\lfloor \frac{n+k}{r} \right\rfloor.$$

2.2 Ekstremalni problem za hipergrafove

Neka su H i F hipergrafovi, te neka je G podgraf od H. Ako postoji podgraf G od H koji je izomorfan s F, reći ćemo za njega da je *kopija* od F. Kažemo da je H *F-slobodan* ako H ne sadrži kopiju od F kao podgraf.

Neka je $\mathcal{F}$ familija $r-$grafova. Turánov broj $ex(n, \mathcal{F})$ je najveći prirodan broj takav da postoji $\mathcal{F}-$slobodan (F-slobodan za svaki $F \in \mathcal{F}$) $r-$graf H sa n vrhova i $ex(n, \mathcal{F})$ bridova. Takav r-graf ćemo nazivati *ekstremalnim* za $\mathcal{F}$. Za jednočlanu familiju pišemo još i $ex(n, F) = ex(n, \{F\})$.

Nakon što je odredio $ex(n, F)$ za $F = K_t$, Turán je postavio prirodno pitanje određivanja $ex(n, F)$ kada je $F = K_t^r$ potpun r-graf s t vrhova. Turán je predložio mnoge konstrukcije ekstremalnih grafova (v. odjeljak 2.3), međutim do danas taj problem nije riješen ni za jedan $t > r > 2$, čak ni asimptotski. Unatoč manjku napretka na Turánovom problemu za potpune hipergrafove, postoje neki hipergrafovi za koje je problem riješen asimptotski. Egzaktnih rješenja je vrlo malo, stoga uvodimo pojam Turánove gustoće da bismo mogli rigorozno promatrati asimptotsko ponašanje Turánovog broja.

Lema 2.2.1. *Neka je $\mathcal{F}$ familija r-grafova, te neka je*

$$\pi(n, \mathcal{F}) = \frac{ex(n, \mathcal{F})}{\binom{n}{r}}.$$

Tada je $\pi(n, \mathcal{F})$ padajuć niz. Posebno, dobro je definirana Turánova gustoća

$$\pi(\mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty} \pi(n, \mathcal{F}).$$

Dokaz. Neka je G ekstremalni r-graf na $n+1$ vrhova ($\mathcal{F}$-slobodan r-graf na $n+1$ vrhova s maksimalnim brojem bridova). Ako u G obrišemo neki vrh, dobit ćemo r-graf s najviše $ex(n, F)$ bridova. Prebrojavanjem po svih $n+1$ vrhova, svaki brid smo prebrojali $n-r+1$ puta. Stoga je

$$\frac{ex(n,\mathcal{F})}{n+1} \geq \frac{ex((n+1),\mathcal{F})}{n-r+1}.$$

Budući da je $\binom{n+1}{r}/\binom{n}{r} = n+1/n-r+1$, dobivamo da je $\pi(n,\mathcal{F}) \geq \pi(n+1,\mathcal{F})$. □

Primijetimo da, ako r-graf F nije r-partitan, on ne može biti podgraf nijednog r-partitnog grafa. Ako promatramo potpun balansiran r-partitan graf na n vrhova, on ima približno $(n/r)^r$ bridova. Stoga dobivamo ocjenu $\pi(F) \geq r!/r^r$. Posebno, svaki r-graf koji nije r-partitan ima pozitivnu Turánovu gustoću. Štoviše, vrijedi i obrat; svaki r-partitan r-graf ima Turánovu gustoću 0. Za $r = 2$, najbolju poznatu ogradu na Turánov broj potpunog bipartitnog grafa daje poznati Kővári-Sós-Turán teorem [12]. Za većinu bipartitnih grafova, to je i danas najbolja poznata ograda.

Hipergrafovi Turánove gustoće 0

Teorem 2.2.2. *Neka je $l \in \mathbb{N}$. Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi*

$$ex(n, K^{(r)}(l,\ldots,l)) \leq n^{r-1/l^{r-1}}.$$

Posebno, $\pi(K^{(r)}(l,\ldots,l)) = 0$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po r. Kao bazu indukcije uzimamo $r = 2$. Neka je G graf sa n vrhova i barem $n^{2-1-1/l}$ bridova. Prosječan stupanj vrhova iz G je $2n^{1-1/l}$. Brojimo parove (v, S) za koje je v vrh od G, a S skup od l vrhova iz G koji su povezani s v. Označimo sa $d(v)$ stupanj vrha v. Takvih parova je

$$\sum_{v\in G}\binom{d(v)}{l}.$$

Direktnom primjenom Jensenove nejednakosti vidimo da se minimum ove sume postiže kada su svi $d(v)$ jednaki. Jednostavnim računom vidimo da za dovoljno velik n vrijedi

$$\sum_{v\in G}\binom{d(v)}{l} \geq n\binom{2cn^{1-\frac{1}{l}}}{l} > l\binom{n}{l}.$$

Stoga zaključujemo da G sadrži l vrhova $y_1,\ldots,y_l$ koji su povezani sa svakim vrhom iz $S = \{x_1,\ldots,x_l\}$. Da bismo proveli korak indukcije, bit će nam potrebna sljedeća tehnička lema.

Lema 2.2.3. *Neka je S skup od N elemenata $S = \{y_1, \dots, y_N\}$, te neka su $A_1, \dots, A_n$ podskupovi od S. Pretpostavimo da za neki $w > 0$ vrijedi $\sum_{i=1}^{n} |A_i| \geq \frac{nN}{w}$. Ako pritom za neki $l \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \geq 2l^2 w^l$, tada postoje $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n$ takvi da je*

$$\left| \bigcap_{j=1}^{l} A_{i_j} \right| \geq \frac{N}{2w^l}. \tag{*}$$

Dokaz Leme 2.2.3. Označimo sa $\mathbf{1}_i : S \to \{0, 1\}$ karakterističnu funkciju skupa A_i. Neka je $F : S \to \mathbb{N}$ funkcija dana s

$$F(y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_i(y) \text{ za sve } y \in S.$$

Vrijedi

$$\sum_{j=1}^{N} F(y_j) = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \geq \frac{nN}{w}.$$

Elementarna nejednakost među sredinama daje

$$\sum_{j=1}^{N} F(y_j)^l \geq N \frac{\sum_{j=1}^{N} F(y_j)^l}{N^l} \geq N \left(\frac{n}{w} \right)^l.$$

S druge strane, iz definicije funkcije F lako vidimo da je

$$\sum_{j=1}^{N} F(y_j)^l = \sum |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}|$$

pri čemu s desne strane sumiramo po svim uređenim l-torkama indeksa $(i_1, \dots, i_l)$ takvim da je $1 \leq i_j \leq n$. Takvih l-torki u kojima su svi indeksi različiti ima $n!/(n-l)! \leq n^l$. Nadalje, l-torki u kojima su barem dva indeksa ista ima manje od $\binom{l}{2} n^{l-1} < l^2 n^{l-1}$. Ako pretpostavimo da ne vrijedi (*), svaka l-torka međusobno različitih indeksa doprinosi sumi najviše $\frac{N}{2w^l}$, dok preostale doprinose najviše N. Iz ovih opažanja i prethodno pokazanih nejednakosti možemo zaključiti da je

$$N \left(\frac{n}{w} \right)^l \leq \sum_{j=1}^{N} F(y_j)^l < n^l \cdot \frac{N}{2w^l} + l^2 n^{l-1} \cdot N \leq \frac{Nn^l}{w^l}.$$

Posljednja nejednakost slijedi iz $n \geq 2l^2 w^l$. Ovo je kontradikcija, dakle vrijedi (*). □

Pretpostavimo sada da za $r \geq 3$ i $n \geq n_0(r,l)$ vrijedi $ex(n, K^{(r-1)}(l,\dots,l)) \leq n^{r-1-1/l^{r-2}}$. Pokažimo tvrdnju za r i dovoljno velik n.

Neka je H r-graf na n vrhova, sa barem $n^{r-1/l^{r-1}}$ bridova. Označimo vrhove od H sa $x_1,\dots,x_n$. Označimo sa K_n^{r-1} potpun $(r-1)$-graf na skupu vrhova $V(H)$, a njegove bridove sa $y_1,\dots,y_N$, pri čemu je $N = \binom{n}{r-1}$. Neka je $A_i := \{y_j : x_i \cup y_j \in E(H), 1 \leq j \leq N\}$, za $1 \leq i \leq n$. Vidimo da je

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| = r \cdot e(H) \geq rn^{r-1/l^{r-1}} > nNr!n^{-1/l^{r-1}}.$$

Dakle možemo primijeniti Lemu 2.2.3 uz $N = \binom{n}{r-1}$, $w = n^{1/l^{r-1}}/r!$, jer lako vidimo da će za dovoljno velike n biti zadovoljen uvjet $n \geq 2l^2w^l$. Po Lemi 2.2.3 možemo odabrati l različitih indeksa $i_1,\dots,i_l$ takvih da je

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}| \geq \frac{1}{2}\binom{n}{r-1} \cdot (r!n^{-1/l^{r-1}})^l > n^{r-1-1/l^{r-2}}.$$

Primijetimo sada da $(r-1)$-graf sa skupom vrhova $V(H)$ i skupom bridova $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}$ po pretpostavci indukcije ima više od $ex(n, K^{(r-1)}(l,\dots,l))$ bridova. Dakle, u tom $(r-1)$-grafu možemo pronaći kopiju G od $K^{(r-1)}(l,\dots,l)$. Budući da svaki od vrhova $x_{i_1},\dots x_{i_l}$ u uniji sa svakim bridom iz G čini brid iz H, slijedi da bridovi oblika $x_{i_j} \cup y$, za $1 \leq j \leq l$ i $y \in E(G)$, čine kopiju od $K^{(r)}(l,\dots,l)$ u H. Po indukciji slijedi tražena tvrdnja.

□

Korolar 2.2.4. *Turánova gustoća r-partitnog r-grafa je 0.*

Dokaz. Svaki r-partitni r-graf F se može uložiti u neki $K^{(r)}(l,\dots,l)$, za dovoljno velik l. Stoga je $\pi(F) \leq \pi(K^{(r)}(l,\dots,l)) = \lim_{n\to\infty} ex(n, K^{(r)}(l,\dots,l))/\binom{n}{r} \leq \lim_{n\to\infty} n^{r-1/l^{r-1}}/\binom{n}{r} = 0$. □

Dokažimo sada važan fenomen "prezasićenosti", koji su otkrili Erdős i Simonovits [4]. Neformalno, pokazat ćemo da kada je gustoća r-grafa G veća od Turánove gustoće F, ne samo da nalazimo kopiju od F, već konstantan udio svih podskupova od G veličine $v(F)$ razapinje kopiju od F.

Lema 2.2.5 (Prezasićenost)**.** *Za svaki r-graf F i $\epsilon > 0$ postoje $\delta > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da svaki r-graf G s $n \geq n_0$ vrhova i barem $(\pi(F)+\epsilon)\binom{n}{r}$ bridova sadrži barem $\delta\binom{n}{v(F)}$ kopija od F.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $ex(k, F) \leq (\pi(F) + \epsilon/2)\binom{k}{r}$. Po definiciji $ex(k, F)$, svaki podskup $K \subseteq V(G)$ veličine k koji razapinje više od $(\pi(F)+\epsilon/2)\binom{k}{r}$ bridova razapinje kopiju

r-grafa F. Stoga postoji barem $\frac{\epsilon}{2}\binom{n}{k}$ takvih K, inače bi vrijedilo

$$\binom{n-r}{k-r}e(G) = \sum_{|K|=k} e(K) < \binom{n}{k}\left(\pi(F) + \frac{\epsilon}{2}\right)\binom{k}{r} + \frac{\epsilon}{2}\binom{n}{k}\binom{k}{r}$$
$$= \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}(\pi(F) + \epsilon)\,,$$

što je kontradikcija. Svaki od tih $\frac{\epsilon}{2}\binom{n}{k}$ skupova K sadrži kopiju od F, i svaki skup vrhova neke kopije od F je sadržan u najviše $\binom{n-v(F)}{k-v(F)}$ takvih skupova K. Stoga je broj kopija od F u G barem $\frac{\epsilon}{2}\binom{n}{k}/\binom{n-v(F)}{k-v(F)} = \frac{\epsilon}{2}\binom{n}{v(F)}/\binom{k}{v(F)}$. Uzevši $\delta = \frac{\epsilon}{2}/\binom{k}{v(F)}$ slijedi tražena tvrdnja. □

Iskoristit ćemo prezasićenost da bismo dokazali da "napuhavanje" ne mijenja Turánovu gustoću. Neformalno, t-napuhavanje r-grafa je r-graf koji dobijemo kada svaki vrh zamijenimo t-nezavisnim skupom.

Definicija 2.2.6. Neka je F r-graf i $t \in \mathbb{N}$. Konstruiramo r-graf $F(t)$ na sljedeći način.

- Svaki vrh $x \in V(F)$ zamijenimo s t "kopija" $x^{(1)}, \dots, x^{(t)}$.
- Svaki brid $\{x_1, \dots x_r\} \in E(F)$ zamijenimo odgovarajućim potpunim r-partitnim r-grafom kopija, tj. svim bridovima $\{x_1^{(a_1)}, \dots, x_r^{(a_r)}\}$ takvim da je $1 \le a_1, \dots a_r \le t$.

Dobiveni r-graf $F(t)$ nazivamo *t-napuhavanje* od F.

Teorem 2.2.7. *Za svaki r-graf F i $t \in \mathbb{N}$ je $\pi(F(t)) = \pi(F)$.*

Istaknimo prvo poseban slučaj koji ćemo koristiti u dokazu. Kada je $F = K_r^r$ jedan brid, trivijalno je $\pi(F) = 0$. Također, $F(t) = K_r^r(t)$ je potpun r-partitan graf s t vrhova u svakom dijelu. Po Teoremu 2.2.2 je $\pi(F(t)) = 0$

Dokaz. Po prezasićenosti, za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za dovoljno velik n, graf G s n vrhova i barem $(\pi(F) + \epsilon)\binom{n}{r}$ bridova sadrži barem $\delta\binom{n}{v(F)}$ kopija od F. Promotrimo $v(F)$-uniformni hipergraf H na vrhovima od G čiji su bridovi skupovi koji razapinju kopije od F u G. Za svaki $T > 0$, ako je n dovoljno velik možemo naći kopiju K od $K_{v(F)}^{v(F)}(T)$ u H. Obojimo svaki brid od K nekom od $v(F)!$ boja, ovisno o tome kojim redoslijedom su njegovi vrhovi (koji su ujedno vrhovi neke kopije od F u G) uloženi u dijelove od K. Standardni rezultat Ramseyjeve teorije je da za dovoljno velik T postoji jednobojna kopija od $K_{v(F)}^{v(F)}(t)$, što nam daje kopiju $F(t)$ u G. □

2.3 Ekstremalne konstrukcije F-slobodnih hipergrafova

Problem konstrukcije ekstremalnog hipergrafa

Iz Erdős Simonovitsevog teorema o stabilnosti (v. Teorem 5.1.1) vidimo da su ekstremalne konstrukcije za grafove vrlo jednostavne. Svaki graf H možemo uložiti u potpun balansiran $(\chi(H)-1)$-partitan graf. Asimptotski, ova konstrukcija je optimalna i daje Turánovu gustoću $1-\frac{1}{\chi(H)-1}$.

U suprotnosti sa slučajem za grafove, ekstremalne konstrukcije za hipergrafove mogu postati vrlo komplicirane. Često postoji više različitih ekstremalnih konstrukcija, što dodatno komplicira određivanje Turánove gustoće hipergrafova.

Promotrimo sljedeću konstrukciju 3-grafa koju je predložio Turán: neka je $\{V_0, V_1, V_2\}$ balansirana particija n vrhova (dijelovi su veličina $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$, $\left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor$ i $\left\lfloor\frac{n+2}{3}\right\rfloor$). Neka su bridovi sve trojke koje imaju ili po jedan vrh u svakom V_i, ili dva vrha u V_i i jedan u V_{i+1} za neki i, pri čemu je $V_3 := V_0$. Ova konstrukcija daje donju ogradu $\pi(K_4^3) \geq \frac{5}{9}$. Međutim, ova konstrukcija nije jedinstvena.

Pronalaženje različitih konstrukcija koje daju istu ogradu za ovaj problem je samo po sebi zanimljiv problem. Frohmader [6] je pokazao da za $n = 3k+1$ postoji barem $6^{k-1}/2$ neizomorfnih konstrukcija, dok za $n = 3k+2$ postoji barem 6^{k-1} takvih konstrukcija.

Promotrit ćemo jedan čest tip konstrukcija koji se naziva "iterirano napuhavanje". Mnoge ovakve konstrukcije daju najbolje poznate ograde za neki Turánov problem.

Definicija 2.3.1. 3-graf na skupu vrhova $\{1,\ldots,l\}$ s bridovima $\{\{i,i+1,i+2\} : 1 \leq i \leq l-2\}$ nazivamo *tijesni put* duljine l i označavamo $\mathcal{P}_l$.

Neka je F r-graf. Kažemo da je F *tijesno povezan* ako postoji *tijesni put* koji povezuje svaka dva vrha od F. Neka je H neki r-graf s h vrhova sa svojstvom da je H F-slobodan i da je t-napuhavanje $H(t)$ također F-slobodan, za svaki $t \in \mathbb{N}$. Označimo vrhove od h sa $x_1,\ldots,x_h$. Konstruiramo r-graf G na sljedeći način.

1. Vrhove grafa G particioniramo na h dijelova, $V_1,\ldots,V_h$. Optimalne konstrukcije često zahtijevaju da ti dijelovi budu podjednaki, ali to nije uvijek slučaj.

2. Za svaki brid $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\} \in E(H)$, r-grafu G dodajemo sve bridove potpunog r-partitnog r-grafa s dijelovima $V_{i_1},\ldots,V_{i_r}$, tj. sve $\{y_{i_1},\ldots,y_{i_r}\}$ takve da je $y_{i_j} \in V_{i_j}$.

3. Isti postupak ponavljamo na svakom skupu vrhova V_i, za $i = 1,\ldots,h$, dok god V_i ima barem h vrhova.

Pokažimo da je ovako konstruiran G zaista F-slobodan. Razložimo prethodni postupak na korake. Neka je jedan korak uzimanje svih nastalih dijelova particija iz prethodnog koraka i provođenje 1. i 2. na svakom od njih. Neka je A_i skup svih bridova koji su nastali u i-tom koraku postupka.

Pretpostavimo da G sadrži F kao podgraf. Ukoliko je $e(F) \subseteq A_i$ za neki i, zbog povezanosti F nužno će svi vrhovi od F biti sadržani u jednom dijelu particije. Po konstrukciji, r-graf s vrhovima iz jednog dijela particije i bridovima iz A_i se može uložiti u $H(t)$ za dovoljno velik t. Budući da je $H(t)$ F-slobodan, to dovodi do kontradikcije. Slijedi da F ima bridove iz više različitih razina.

Neka je $S = e(F) \cap A_1$ skup svih bridova od F koji su nastali u prvom koraku, Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Neka je $K = e(F) \setminus S$. Po konstrukciji, svaki brid iz K je sadržan u nekom V_i, dok svaki brid iz S ima najviše jedan vrh u svakom V_i. Stoga nikoja dva vrha iz K i S ne mogu biti tijesno povezana, što je kontradikcija jer je F tijesno povezan.

Primjer 2.3.2. Neka je K_4^- jedinstveni (do na izomorfizam) 3-graf sa četiri vrha i tri brida. Koristeći prethodno obrazloženu metodu konstruiramo 3-graf koji ne sadrži K_4^- kao podgraf. Primijetimo da su za 3-graf H tvrdnje "H je K_4^- slobodan" i "svaka četvorka vrhova iz H razapinje najviše dva brida" ekvivalentne.

Neka je $S(6)$ 3-graf na skupu vrhova $\{1, \ldots, 6\}$ sa skupom bridova

$$\{123, 124, 345, 346, 561, 562, 135, 146, 236, 245\}.$$

Ovaj 3-graf ima svojstvo da svaka četvorka vrhova razapinje nula ili dva brida. Definiramo 3-graf H_S na sljedeći način. Prvo uzmemo particiju $V(H_S)$ na 6 skupova $V_1, \ldots, V_6$. Zatim dodajemo sve bridove xyz takve da je $x \in V_i$, $y \in V_j$ i $z \in V_k$ pri čemu je $ijk \in E(S(6))$. Na ovaj način dobivamo 3-graf u kojem svaka četvorka razapinje nula ili dva brida. Frankl i Füredi [5] su pokazali da je H_S maksimalan (iako ne jedinstven) 3-graf s ovim svojstvom.

Sada dodajemo bridove u H_S iterativno: particioniramo prvo svaki V_j na šest skupova $W_{j_1}, \ldots, W_{j_6}$ i zatim dodamo sve bridove xyz takve da je $x \in W_{j_{i_1}}$, $y \in W_{j_{i_2}}$ i $z \in W_{j_{i_3}}$ pri čemu je $i_1 i_2 i_3 \in E(S(6))$. Ovako dobiven 3-graf ne sadrži kopiju K_4^- kao podgraf. Ukoliko uvijek uzimamo dijelove particije W_{j_i} podjednakih veličina, dobivamo graf s $(1 + o(1))\frac{n^3}{21}$ bridova. Slijedi da je $\pi(K_4^-) \geq \frac{2}{7}$.

Definicija 2.3.3. 3-graf C_5 s vrhovima $\{1, \ldots, 5\}$ i bridovima $\{123, 234, 345, 451, 512\}$ nazivamo *tijesni ciklus* duljine 5.

Primjer 2.3.4. Neka su $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_t$ skupovi vrhova, te neka je $|V_i| = x_i$. Neka je $H(x_1, \ldots, x_t)$ 3-graf na skupu vrhova V_1 čiji su bridovi svi xyz takvi da su $x, y \in V_i \setminus V_{i+1}$ i $z \in V_{i+1}$ za neki i. Primijetimo da ovu konstrukciju možemo promatrati kao verziju iteriranog napuhavanja. Istim argumentom vidimo da taj 3-graf ne sadrži C_5 kao podgraf. Neka je $x_1 + \cdots + x_t = n$. Označimo sa $f(n)$ maksimalni broj bridova 3-grafa $H(x_1, \ldots, x_t)$.

Eksplicitni izraz za $f(n)$ je

$$f(n) = \max_{k\geq 1} \max_{\substack{x_1,\dots,x_k\geq 1\\ x_1+\dots+x_k=n}} \left\{ \sum_{1\leq i<j\leq k} \binom{x_i}{2} x_j \right\}.$$

Također imamo ekvivalentnu rekurzivnu definiciju:

$$f(1) = 0, \quad f(n) = \max_{k\in\{1,\dots,n-1\}} \binom{k}{2}(n-k) + f(n-k) \text{ za } n \geq 2.$$

Neka je $\beta = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0.634$ i $\alpha = \dfrac{\beta(1-\beta)}{2(3-3\beta+\beta^2)} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{6} \approx 0.077$. Pokažimo sljedeću tvrdnju.

Propozicija 2.3.5. $f(n) = \alpha n^3 + o(n^3)$

Napomenimo da iz ove propozicije slijedi da za svaki n postoji C_5-slobodan 3-graf s $\alpha n^3 + o(n^3)$ bridova, odakle slijedi $\pi(C_5) \geq 2\sqrt{3} - 3$.

Dokaz. Definirajmo funkciju $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$g(x) = \frac{x(1-x)}{2(3-3x+x^2)}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$(1-(1-x)^3)g(x) = \frac{1}{2}x^2(1-x).$$

Može se provjeriti da je g' padajuća i da je $g'(\beta) = 0$, odakle slijedi

$$g(x) \leq g(\beta) = \alpha \text{ za sve } x \in [0,1].$$

Sada ćemo indukcijom pokazati da je $f(n) \leq \alpha n^3$. Za $n = 1$ tvrdnja je očita. Neka je $f(m) \leq \alpha m^3$ za sve $m < n$.

Uzmimo $k \in \{1,\dots,n-1\}$ za koji izraz $\binom{k}{2}(n-k) + f(n-k)$ poprima maksimum. Neka je $x = k/n$. Iz rekurzivne definicije f koristeći pretpostavku indukcije slijedi

$$\frac{f(n)}{n^3} \leq \frac{1}{2}x^2(1-x) + \alpha(1-x)^3.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$\frac{f(n)}{n^3} - \alpha \leq \frac{1}{2}x^2(1-x) - \alpha(1-(1-x)^3) = (1-(1-x)^3)(g(x)-\alpha) \leq 0,$$

stoga slijedi da je $f(n) \leq \alpha n^3$ za sve n.

Da bismo dobili da je $f(n) \geq (\alpha + o(1))n^3$, u eksplicitnu formulu za f uvrstimo $x_i = \lfloor \beta(1-\beta)^i n \rfloor$. □

Primjer 2.3.6. Definiramo C_5^- kao 3-graf C_5 bez brida 512. Neka je 3-graf H iterirano napuhavanje jednog 3-brida, tj. 3-grafa s vrhovima $\{1, 2, 3\}$ i bridom 123. C_5^- nije 3-partitan i tijesno je povezan, pa zaključujemo da H ne sadrži C_5^- kao podgraf. Ovakav 3-graf ima $(1 + o(1))\frac{n^3}{24}$ bridova. Slijedi da je $\pi(C_5^-) \geq \frac{1}{4}$.

Poglavlje 3

Metoda link grafova

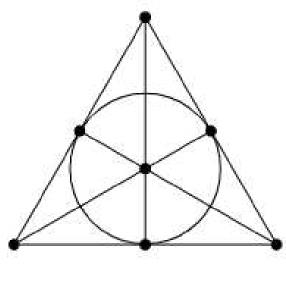
3.1 Fanova ravnina

U ovom poglavlju promatramo sljedeću strategiju koju možemo koristiti u nekim problemima.

Definicija 3.1.1. Neka je G r-graf i x vrh od G. Link od x u G je $(r-1)$-graf koji se sastoji od svih $S \subset V(G)$ takvih da je $|S| = r - 1$ i $S \cup \{x\} \in E(G)$. Link od x u G označavamo s $G[x]$.

Pretpostavimo da imamo Turánov problem za r-graf F za koji vrijedi sljedeće. Postoji $X \subset V(F)$ takav da je svaki brid e od F ili podskup od X, ili ima točno jednu točku u X. Tada možemo primijeniti sljedeću strategiju pronalaženja F: prvo nađemo kopiju podgrafa $F[X]$, zatim je proširimo do kopije od F promatranjem linkova vrhova u X.

Razmotrimo Turánov problem za Fanovu ravninu $PG(2,2)$. Ovdje ćemo Fanovu ravninu interpretirati kao 3-graf, pri čemu točke interpretiramo kao vrhove, a pravce kao bridove.



Slika 3.1: Fanova ravnina PG(2,2)

Teorem 3.1.2. *Ako je $F = PG(2,2)$ Fanova ravnina, onda je $\pi(F) = \frac{3}{4}$.*

Dokaz. Definiramo 3-uniformni hipergraf H_n na n vrhova na sljedeći način. Podijelimo vrhove na dva podjednaka skupa A i B. Bridovi od H_n neka su sve trojke koje sadrže barem jedan vrh iz svakog od skupova A i B. Lako je vidjeti da Fanovu ravninu ne možemo obojiti u dvije boje bez da dobijemo jednobojan brid, dakle H_n je F-slobodan. Broj bridova od H_n je $\frac{3}{4}\binom{n}{3} - O(n^2)$, stoga je $\pi(F) \geq \frac{3}{4}$

S druge strane, neka je H bilo koji 3-graf s n vrhova koji ne sadrži F kao podgraf. Pokazat ćemo da, za neku konstantu c koja ne ovisi o n, postoji vrh od H koji je sadržan u najviše $\frac{3}{4}\binom{n}{2} + cn$ bridova. Odavde će slijediti da je broj bridova od H najviše

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4}\binom{n}{2} + cn \leq \frac{3}{4}\binom{n}{3} + c\binom{n}{2}$$

za dovoljno velike n. Odavde lako slijedi $\pi(F) \leq \frac{3}{4}$. Fiksirajmo bilo koji brid $\{1,2,3\}$ od H. Tvrdimo da, za bilo koji skup vrhova $S = \{a,b,c,d\}$ disjunktan s $\{1,2,3\}$, tri linka $H[1]$, $H[2]$ i $H[3]$ zajedno imaju najviše 15 bridova (brojeći multiplicitete) čiji vrhovi se nalaze u S, od maksimalnih mogućih $3 \cdot \binom{4}{2} = 18$. Naime, direktnom provjerom vidimo da ako od maksimalnih 3×6 bridova nedostaju samo 2, možemo naći prikladnih 3×2 bridova koji su potrebni da postignemo konfiguraciju Fanove ravnine. Primijetimo da, ako svaki skup od 4 vrha razapinje najviše 3 od moguće 4 trojke, dvostrukim prebrojavanjem vidimo da H može imati maksimalno $\frac{3}{4}\binom{n}{3}$ bridova. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da H sadrži tetraedar $K_3(4)$. Neka je $\{1,2,3,4\}$ skup vrhova tog tetraedra, te neka je S bilo koji skup 4 vrha disjunktan s tim skupom. Sva četiri linka $H[i]$, $i = 1$ do 4, imaju najviše 20 bridova s vrhovima u S. Ovo slijedi iz prethodne ograde od 15 bridova za svaka tri linka jednostavnim prebrojavanjem. Sada primijenjujemo sljedeću lemu, koja je posebni slučaj teorema koji su dokazali Füredi i Kündgen [7]. Označimo sa $m(n,k,r)$ maksimalan mogući broj bridova u multigrafu s n vrhova, pod uvjetom da svaki skup vrhova veličine k razapinje maksimalno r bridova.

Lema 3.1.3. $m(n,4,20) = 3\binom{n}{2} + O(n)$

Da bismo mogli iskoristiti ovu lemu, potrebno je prvo zanemariti hiperbridove koji sadrže barem dva vrha iz skupa $\{1,2,3,4\}$. Takvih je hiperbridova najviše $\binom{4}{2}n = O(n)$. Tada svaki 4-skup S (ne nužno disjunktan s vrhovima od $K_3(4)$) razapinje najviše 20 bridova iz linkova $H[i]$. Koristeći lemu zaključujemo da sva četiri linka zajedno mogu sadržavati maksimalno $3\binom{n}{2} + O(n)$ bridova. Stoga po Dirichletovom principu postoji neki vrh $i \in \{1,2,3,4\}$ takav da je $|H[i]| \leq \frac{3}{4}\binom{n}{2} + O(n)$. Na početku dokaza smo vidjeli da je ovo dovoljno za zaključiti $\pi(F) \leq \frac{3}{4}$, dakle dokazali smo traženu tvrdnju. □

Da bi dokaz bio potpun, dokažimo Lemu 3.1.3

Dokaz Leme 3.1.3. Dokazat ćemo da je $m(n,4,20) \leq 3\binom{n}{2} + n - 2$. Prvo indukcijom pokazujemo da je $m(n,3,10) \leq 3\binom{n}{2} + n - 2$ za sve $n \geq 3$. Baza indukcije slijedi iz uvjeta da svaka trojka razapinje maksimalno 10 bridova. Neka je sada G $(3,10)$ multigraf s n vrhova, tj. takav da svaka trojka vrhova razapinje najviše 10 bridova. Ako svaki par vrhova ima multiplicitet najviše 3, onda je $e(G) \leq 3\binom{n}{2}$ pa smo gotovi. Ako pak postoji par $\{x,y\}$ multipliciteta barem 4, tada je za svaki vrh z suma multipliciteta bridova između x i z te između y i z najviše 6. Dakle $\deg x + \deg y \leq 8 + 6(n-2) = 6n - 4$. Stoga u G postoji vrh stupnja najviše $3n - 2$. Sada pozivanjem na pretpostavku indukcije dobivamo da je $e(G) \leq 3\binom{n-1}{2} + n - 3 + 3n - 2 = 3\binom{n}{2} + n - 2$.

Neka je sada G multigraf s n vrhova takav da svaka 4 vrha razapinju najviše 20 bridova. Ako je G $(3,10)$ multigraf imamo $e(G) \leq m(n,3,10)$. U suprotnom postoji trojka $\{x,y,z\}$ koja razapinje bar 11 bridova. Tada je za svaki vrh w suma multipliciteta bridova između w i $\{x,y,z\}$ najviše 9. Dakle $\deg x + \deg y + \deg z \leq 22 + 9(n-3) = 9n - 5$. Stoga je po Dirichletovom principu jedan od njih stupnja najviše $3n - 2$. Tvrdnja sada slijedi indukcijom kao u prethodnom koraku. □

3.2 Turánova gustoća C_5

Nakon što je dobivena Turánova gustoća Fanove ravnine, Mubayi i Rődl [15] su koristeći sličnu metodu dokazali sljedeći teorem.

Teorem 3.2.1. *Tijesni ciklus duljine* 5*, označen sa* C_5*, je* 3*-graf s vrhovima* $\{1,2,3,4,5\}$ *i bridovima* $\{123, 234, 345, 451, 512\}$*. Tada je* $2\sqrt{3} - 3 \leq \pi(C_5) \leq 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$.

Donja ograda proizlazi iz Primjera 2.3.4. U ovom odjeljku dokazujemo gornju ogradu. Napomenimo da je optimalnost donje ograde otvoren problem, dok za gornju ogradu postoje bolje ocjene koje koriste metodu flag algebri. Za početak će nam biti potrebna sljedeća lema koja je, kao i Lema 3.1.3, posebni slučaj teorema Füredija i Kündgena.

Lema 3.2.2. *Neka je G multigraf s n vrhova maksimalnog multipliciteta* 2*, takav da svaka tri vrha razapinju najviše četiri brida. Tada G ima najviše* $\binom{n}{2} + O(n)$ *bridova.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n \leq 3$ lako se provjeri da tvrdnja vrijedi. Ako G nema dvostrukih bridova je $e(G) \leq \binom{n}{2}$, stoga pretpostavimo da između nekih vrhova x i y postoje dva brida. Svaki treći vrh z ima najviše 2 brida koji ga povezuju s $\{x,y\}$, stoga je $\deg x + \deg y \leq 4 + 2(n-2) = 2n$. Dakle jedan od ta dva vrha ima stupanj barem n. Pozivanjem na pretpostavku indukcije slijedi da G ima barem $\binom{n-1}{2} + (n-1) + n = \binom{n}{2} + n$ bridova. □

Trebat će nam asimetrična verzija prethodne leme.

Lema 3.2.3. *Neka je G multigraf sa particijom vrhova $\{A, B\}$ i maksimalnim multiplicitetom 2. Neka su $|A| = a$ i $|B| = b$. Za svaki skup $S \subseteq V(G)$, neka je $e(S)$ broj bridova (brojeći multiplicitete) koje S razapinje. Pretpostavimo da za sve S veličine 3 vrijedi:*

(a) ako je $|S \cap A| \geq 2$ onda je $e(S) \leq 4$,

(b) ako je $|S \cap A| = 1$, onda je $e(S) \leq 5$.

Tada vrijedi

$$e(G) \leq \binom{a}{2} + 2\binom{b}{2} + ab + a.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo jakom indukcijom po $a + b$. Za $a + b \leq 4$, jedini netrivijalan slučaj je $(a, b) = (4, 0)$, gdje zbog (a) lako dobivamo da je $e(G) \leq 8 < 10$. Ako svaki par vrhova $\{x, y\}$, $x \in A$, $y \in B$, ima multiplicitet najviše 1, po prethodnoj lemi je

$$e(G) \leq e(A) + ab + e(B) \leq \binom{a}{2} + a + ab + 2\binom{b}{2}.$$

Pretpostavimo da par $\{x, y\}$ ima multiplicitet 2. Iz uvjeta (a) i (b) slijedi da svaki vrh iz A ima najviše dva brida prema $\{x, y\}$, a svaki vrh iz B ima najviše tri brida prema $\{x, y\}$. Neka je $G' = G \setminus \{x, y\}$. Koristeći pretpostavku indukcije za G', slijedi

$$\begin{aligned} e(G) &\leq e(G') + 2(a-1) + 3(b-1) + 2 \\ &\leq \binom{a-1}{2} + 2\binom{b-1}{2} + (a-1)(b-1) + a - 1 + 2(a-1) + 3(b-1) + 2 \\ &= \binom{a}{2} + 2\binom{b}{2} + ab + a. \end{aligned}$$

□

Dokaz teorema 2.2.1. Neka je $\alpha = 2 - \sqrt{2}$. Indukcijom po n ćemo pokazati sljedeću tvrdnju: ako je H 3-graf s barem $\alpha\binom{n}{3} + cn^2$ bridova za neki dovoljno velik c (za potrebe dokaza dovoljno je uzeti $c = 10$), onda H nužno sadrži kopiju C_5 kao podgraf. Kao bazu indukcije možemo promatrati sve n za koje je $\alpha\binom{n}{3} + cn^2 > \binom{n}{3}$ - za njih ne postoji graf H s traženim svojstvom pa je tvrdnja zadovoljena. U koraku indukcije pokazujemo da, pod pretpostavkom da je H C_5-slobodan graf s barem $\alpha\binom{n}{3} + cn^2$ bridova, H ima vrh v stupnja najviše $\alpha\binom{n-1}{2} + c(2n-1)$. Tada će graf H $\{v\}$ zadovoljavati pretpostavku indukcije.

Za vrhove $x, y \in V(H)$ neka je $N_{xy} = \{z : xyz \text{ je brid}\}$ i $d_{xy} = |N_{xy}|$. Budući da je $\sum_{x,y \in V(H)} d_{xy} = 3e(H)$, postoji par x, y takav da je $d_{xy} \geq 3(\alpha\binom{n}{3} + cn^2)/\binom{n}{2} \geq \alpha(n-2) + 6c \geq \alpha n$. Neka je $A \subseteq N_{xy}$ veličine $\lceil \alpha n \rceil$, te neka je $B = V(H) \setminus (A \cup \{x, y\})$. Neka su G_x i G_y linkovi od x i y u $H \setminus \{x, y\}$. Neka je G multigraf na skupu vrhova $H \setminus \{x, y\}$ s bridovima $E(G_x) \cup E(G_y)$.

Tvrdimo da, ako je H C_5-slobodan, tada G, A i B zadovoljavaju uvjete Leme 3.2.3 Neka je $S = \{u, v, w\} \subseteq V(G)$. Dokažimo (a). Pretpostavimo da je $|S \cap A| \geq 2$ i $e(S) \geq 5$. Tada najviše jedan par iz S nije u $E(G_x) \cap E(G_y)$ i svi parovi iz S su u $E(G_x) \cup E(G_y)$. BSO pretpostavimo da je da par uv nije u $E(G_x)$ i da je $u \in A$. Vrhovi x, u, y, v, w tada razapinju kopiju C_5 s bridovima xuy, uyv, yvw, vwx, wxu, što je kontradikcija. Dokažimo (b). Neka je $e(S) = 6$ i $u \in A$. Kao i u prethodnom, vrhovi x, u, y, v, w razapinju kopiju C_5.

Sada po Lemi 3.2.3 slijedi:

$$
\begin{aligned}
e(G) &\leq \binom{|A|}{2} + 2\binom{|B|}{2} + |A||B| + n \\
&\leq \binom{\alpha n}{2} + 2\binom{(1-\alpha)n}{2} + \alpha(1-\alpha)n^2 + n \\
&\leq (\alpha^2 + 2(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha))\binom{n-1}{2} + 2c(2n-1) - 2n \\
&\leq 2\alpha\binom{n-1}{2} + 2c(2n-1) - 2n.
\end{aligned}
$$

Posljednja nejednakost vrijedi jer kvadratna jednadžba $x^2 + 2(1-x) = 2x$ ima korijene $2 \pm \sqrt{2}$ i pozitivan vodeći koeficijent. Slijedi da jedan od linkova G_x i G_y ima najviše $\alpha\binom{n-1}{2} + c(2n-1) - n$ bridova. Odgovarajući vrh tada ima stupanj u H najviše $\alpha\binom{n-1}{2} + c(2n-1)$, što smo trebali dokazati. □

3.3 Turánova gustoća nije glavna vrijednost

Iz Erdős-Stone teorema možemo zaključiti da je Turánova gustoća familije grafova $\mathcal{G}$ jednaka $1 - 1/p$, pri čemu je $p = \min_{G \in \mathcal{G}} \chi(G) - 1$. Slijedi da je $\pi(\mathcal{G}) = \min_{G \in \mathcal{G}} \pi(G)$. U svom članku, Mubayi i Rdl [15] su pretpostavili da isto ne vrijedi za hipergrafove, te da čak postoji dvočlana familija hipergrafova za koju to ne vrijedi. Njihovu hipotezu je potvrdio Balogh [2].

Definicija 3.3.1. Kažemo da je 3-graf H $(1, 2)$-graf ako se njegovi vrhovi mogu particionirati na dva dijela A i B, tako da za svaki $e \in E(H)$ vrijedi $|e \cap A| = 1$ i $|e \cap B| = 2$.

Neka je $F_{k,l}$ potpun $(1, 2)$-graf takav da je $|A| = k$ i $|B| = l$. Tada je $e(F_{k,l}) = k\binom{l}{2}$. Ova vrijednost je maksimalna kada je $k = n/3$ i $l = 2n/3$. Odavde slijedi da je maksimalna gustoća $(1, 2)$-grafova $4/9 + o(1)$. Označimo s $\mathcal{H}$ familiju svih 3-grafova koji nisu podgrafovi nijednog $(1, 2)$-grafa. Za svaki 3-graf $H \in \mathcal{H}$ imamo da $H \notin F_{k,2k}$ ni za jedan k. Stoga je $\pi(H) \geq \frac{4}{9}$, za svaki $H \in \mathcal{H}$.

U Primjeru 2.3.2 smo pokazali da je $\pi(K_4^-) \geq \frac{2}{7}$. Neka je $\mathcal{F} = \{K_4^-\} \cup \mathcal{H}$. Dokazat ćemo da je $\mathcal{F}$ familija čija je Turánova gustoća manja od Turánove gustoće svakog člana familije.

Teorem 3.3.2. $\pi(\mathcal{F}) = \frac{2}{9}$

Dokaz. Fiksirajmo (velik) $n \in \mathbb{N}$ i označimo s G ekstremalni 3-graf za $\mathcal{F}$. Lako vidimo da je potpun balansiran 3-partitan 3-graf s n vrhova $\mathcal{F}$ slobodan, stoga je

$$E(G_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor.$$

Pokazat ćemo da je ova konstrukcija najbolja moguća (ali ne nužno jedinstvena).

Primijetimo da je G_n nužno $(1,2)$-graf, budući da $\mathcal{H}$ sadrži sve grafove koji nisu $(1,2)$-grafovi. Stoga postoji particija vrhova od G_n na A i B takva da je $|A \cap e| = 1$ i $|B \cap e| = 2$ za svaki $e \in E(G_n)$. Neka je x bilo koji vrh iz A, te neka je L_x inducirani podgraf linka $G_n[x]$ na skupu $V(G_n) \setminus \{x\}$. Primijetimo da su za svaki $x \in A$ vrhovi od $V(L_x) \cap A$ izolirani u L_x. Nadalje, graf L_x je K_3 slobodan. Kada bi vrhovi $\{u, v, w\}$ razapinjali trokut u L_x, tada bi vrhovi $\{x, u, v, w\}$ razapinjali K_4^- u G_n. Koristeći Turánov (odnosno Mantelov) teorem slijedi da je

$$E(L_x) \leq \left\lfloor \frac{|B|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|B|}{2} \right\rceil.$$

Sumiranjem po svim $x \in A$ dobivamo da je

$$E(G_n) = \sum_{x} \in A|E(L_x)| \leq |A| \left\lfloor \frac{|B|}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{|B|}{2} \right\rceil.$$

Maksimum ovog izraza je upravo prethodno navedena donja ograda za $E(G_n)$, stoga je

$$\pi(\mathcal{F}) = \lim_{n \to \infty} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor \Big/ \binom{n}{3} = \frac{2}{9}.$$

□

U ovoj konstrukciji zabranjena familija sadrži beskonačno mnogo 3-grafova. Da bismo dobili konačnu familiju, koristimo Lemu 2.2.1. Neka je $\mathcal{H}_n$ podfamilija od $\mathcal{H}$ koja se sastoji od svih 3-grafova s najviše n vrhova. Neka je $\mathcal{F}_n = \{K_4^-\} \cup \mathcal{H}_n$. Primijetimo da za $n \leq k$ vrijedi $\pi(n, \mathcal{F}) = \pi(n, \mathcal{F}_k)$. Budući da je $\lim_{n\to\infty} \pi(n, \mathcal{F}) = \frac{2}{9}$, za dovoljno velik n i fiksan $k > n$ će vrijediti $\pi(n, \mathcal{F}_k) < \frac{2}{7}$. Budući da je, po Lemi 2.2.1, $(\pi(n, \mathcal{F}_k))_n$ padajuć niz, slijedi da je $\pi(\mathcal{F}_k) \leq \pi(n, \mathcal{F}_k) < \frac{2}{7} = \min_{F \in \mathcal{F}} \pi(F)$. Štoviše, može se pokazati da je dovoljno uzeti $k = 10$(v. [2]). Time smo dokazali sljedeću tvrdnju.

Korolar 3.3.3. *Postoje $k \in \mathbb{N}$ i familija 3-grafova $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_k\}$ takvi da je*

$$\pi(\mathcal{F}) < \min_{i=1,\ldots,k} \pi(F_i).$$

Postojanje familije s ovim svojstvom za $k = 2$ dokazali su Mubayi i Pikhurko [13]. Štoviše, oni su pokazali da za proizvoljan $r > 2$ postoje r-grafovi F i H takvi da je $\pi(F, H) \leq \min\{\pi(F), \pi(H)\}$.

Poglavlje 4

Turánova gustoća ciklusa i bojenje parova

4.1 Turánova gustoća ciklusa

Definicija 4.1.1. Za svaki cijeli broj $l \geq 3$, definiramo sljedeće 3-grafove.

(a) Reći ćemo da je 3-graf H *pseudo-put* duljine l ako postoji surjektivni homomorfizam iz $\mathcal{P}_l$ u H.

(b) 3-graf s vrhovima $\{0, 1, \ldots, l-1\}$ i bridovima $\{\{i, i+1, i+2\} : 0 \leq i \leq l-1\}$ (uzimamo vrhove modulo l) nazivamo *tijesni ciklus* duljine l i označavamo C_l . Kažemo da je 3-graf H *pseudo-ciklus* duljine l ako postoji surjektivni homomorfizam iz C_l u H.

(c) 3-graf dobiven iz C_l uklanjanjem brida $\{l-1, 0, 1\}$ označavamo sa C_l^- i nazivamo *tijesni ciklus bez jednog brida*. Reći ćemo da je 3-graf H *pseudo-ciklus bez jednog brida* duljine l ako postoji surjektivni homomorfizam iz C_l^- u H.

Napomena 4.1.2. Primijetimo da iz definicije pseudo-puta slijedi da postoji niz $v_1, \ldots, v_l$ ne nužno različitih vrhova takav da je pseudo-put 3-graf s bridovima $\{v_i v_{i+1} v_{i+2} : 0 \leq i \leq l-2\}$. Lako možemo izvesti slične definicije pseudo-ciklusa i pseudo-ciklusa bez jednog brida.

Mubayi i Rödl (v. Primjer 2.3.4) su pokazali da je $\pi(C_5) \geq 2\sqrt{3} - 3$. Štoviše, njihova konstrukcija ne sadrži nijedan C_l sa $3 \nmid l$.

Razumna slutnja je da je $\pi(C_l) = 2\sqrt{3} - 3$ za sve $l \geq 5$ takve da $3 \nmid l$. Primijetimo da je C_l 3-partitan ako i samo ako $3 \mid l$. Dakle, po Teoremu 2.2.2 je $\pi(C_l) = 0$ ako i samo ako $3 \mid l$. Primijetimo da ovo odgovara intuiciji koju imamo iz grafova; Turánova gustoća parnih ciklusa je 0, dok svi neparni ciklusi imaju istu pozitivnu Turánovu gustoću.

Za velike l, Kamčev, Letzter i Pokrovskiy [9] su pokazali da je $\pi(C_l) = 2\sqrt{3} - 3$. Ovo je prva točno određena Turánova gustoća za koju je konstrukcija iterirano napuhavanje. U ovom odjeljku pružit ćemo kratak pregled njihovog dokaza.

Prisjetimo se da, za 3-graf H, $H(t)$ označava t-napuhavanje od H. Lako se pokazuje sljedeća tvrdnja: $H(t)$ sadrži kopiju C_k za neki t ako i samo ako H sadrži pseudociklus duljine k.

Prirodno je dakle razmotriti sljedeće pitanje. Koliko maksimalno bridova može imati 3-graf koji ne sadrži pseudocikluse (duljina ne djeljivih s 3)? Primjenjujemo pristup koji je generalizacija pristupa istom pitanju za grafove. Maksimalni graf koji ne sadrži neparne cikluse je potpun balansiran bipartitan graf. Nadalje, prisjetimo se da je graf bipartitan ako i samo ako ima 2-bojenje. Stoga je potrebno pronaći odgovarajuću generalizaciju takvog bojenja. Za 3-graf H, definiramo njegovu *sjenu* ∂H kao graf na vrhovima $V(H)$ čiji su bridovi svi parovi $\{x, y\}$ za koje postoji $z \in V(H)$ takav da je $\{x, y, z\} \in E(H)$.

Definicija 4.1.3. *Dobro bojenje* 3-grafa H je bojenje bridova njegove sjene takvo da je svaki brid xy ili obojen u plavo ili obojen u crveno i usmjeren, te takvo da se svaki brid $e \in E(H)$ može zapisati kao xyz, pri čemu su xy i xz obojeni u crveno i usmjereni od x, a brid yz je obojen u plavo.

Sljedeći teorem iznosimo bez dokaza. Dokaz ovog teorema je sličan dokazu Propozicije 4.2.4 u sljedećem odjeljku.

Teorem 4.1.4. *3-graf H ima dobro bojenje ako i samo ako H nema pseudociklusa duljine l za $3 \nmid l$.*

Jednom kad znamo prethodni teorem, želimo maksimizirati broj bridova u hipergrafu koji ima dobro bojenje. Stoga definiramo *obojeni graf* kao potpun graf u kojem je svaki brid obojen u plavo ili obojen u crveno i orijentiran.

Za trojku $\{x, y, z\}$ u obojenom grafu kažemo da je *trešnja* ako su xy i xz obojeni u crveno i usmjereni od x, a brid yz je obojen u plavo. Neka je $c(G)$ broj trešanja u obojenom grafu G. Ako za neki 3-graf H imamo dobro bojenje njegove sjene (sve bridove koji nisu bridovi ∂H obojimo proizvoljno), svi njegovi bridovi će biti trešnje u dobivenom obojenom grafu. Neka je $m_c(n)$ maksimalan broj trešanja u obojenom grafu na n vrhova. Neka je f definirana kao u Primjeru 2.3.4.

Teorem 4.1.5. *Svaki obojeni graf na n vrhova razapinje najviše $f(n)$ trešanja.*

Dokaz. Neka je G obojeni graf na n vrhova s maksimalnim brojem trešanja. Za bilo koji vrh $x \in V(G)$ definiramo $N^-(x)$ kao skup svih vrhova $z \in V(G)$ takvih da je brid xz obojen u crveno i usmjeren prema x.

Reći ćemo da vrhu $y \in V(G)$ kopiramo susjedstvo od $x \in V(G)$ ako y zamijenimo kopijom x' od x, tj. izbrišemo vrh y i dodamo novi vrh x' i sve bridove $x'a$, odgovarajuće obojene, takve da je $xa \in E(G)$. Pokazujemo sljedeću lemu o kopiranju susjedstva.

Lema 4.1.6. *Neka je xy brid od G koji je obojen u plavo. Vrijedi $N^-(x) = N^-(y)$.*

Dokaz Leme 4.1.6. Definiramo dva obojena grafa G_x i G_y koja dobivamo iz G tako što vrhu y kopiramo susjedstvo od x da bismo dobili G_x i obratno za G_y. Neka je S_0 skup svih trešanja iz G koje ne sadrže x niti y. Neka je S_1 skup svih trešanja iz G koje sadrže ili x ili y. Neka je $A = N^-(x) \triangle N^-(y)$. Pri konstrukciji G_x i G_y sve trešnje iz S_0 će ostati netaknute. Za svaku trešnju $\{x, a, b\} \in S_1$ postoje dvije trešnje $\{x, a, b\}$ i $\{y, a, b\}$ u G_x te analogno za G_y. Dakle vrijedi

$$c(G_x) + c(G_y) \geq 2|S_0| + 2|S_1| + N^-(x) + N^-(y) = 2c(G) + |A| \geq 2c(G).$$

Zbog maksimalnosti $c(G)$ slijedi da je $A = \emptyset$, tj. $N^-(x) = N^-(y)$. □

Iz ove činjenice lako vidimo da u G ne može postojati trokut s točno dvije plave stranice. Stoga vrhove od G možemo particionirati u plave klike $V_1, \ldots, V_k$. Neka je $x_i = |V_i|$ za $1 \leq i \leq k$. Neka je bez smanjenja općenitosti $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k$. Za sve $1 \leq i < j \leq k$, zbog maksimalnosti $c(G)$, svi bridovi između V_i i V_j su crveni i usmjereni od V_j prema V_i. Naime, zbog Leme 4.1.6 su svi crveni i jednako usmjereni, a zbog $\binom{x_i}{2}x_j > \binom{x_j}{2}x_i$ moraju biti usmjereni od V_j prema V_i. Sada je

$$m_c(n) = c(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \binom{x_i}{2} x_j \leq f(n).$$

□

Iz Teorema 4.1.4 i 4.1.5 slijedi sljedeća slabija verzija rezultata.

Korolar 4.1.7. *3-graf H koji ne sadrži pseudocikluse reda l za $3 \nmid l$ ima najviše $f(n)$ bridova.*

Koristeći metodu stabilnosti dobiva se sljedeća pojačana verzija ovog korolara.

Teorem 4.1.8. *Postoji $L > 0$ takav da vrijedi sljedeće. 3-graf H koji ne sadrži pseudocikluse duljine l takve da je $l \leq L$ i $3 \nmid l$ ima najviše $f(n) + O(1)$ bridova.*

Ako se prisjetimo dokaza Leme 2.2.5, uz minimalne izmjene možemo dokazati sljedeću generalizaciju prezasićenosti na konačne familije.

Lema 4.1.9. *Za svaku konačnu familiju r-grafova $\mathcal{F}$ i $\epsilon > 0$ postoje $\delta > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki r-graf G s $n \geq n_0$ vrhova i barem $(\pi(\mathcal{F}) + \epsilon)\binom{n}{r}$ bridova postoji neki $F \in \mathcal{F}$ takav da G sadrži barem $\delta\binom{n}{v(F)}$ kopija od F.*

Za konačnu familiju r-grafova $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$ definiramo *t-napuhavanje* $\mathcal{F}(t) = \{F_1(t), \dots, F_k(t)\}$. Koristeći Lemu 4.1.9, potpuno analognim načinom dokazivanja dobivamo jaču verziju Teorema 2.2.7.

Teorem 4.1.10. *Za svaku konačnu familiju r-grafova $\mathcal{F}$ i $t \in \mathbb{N}$ je $\pi(\mathcal{F}(t)) = \pi(\mathcal{F})$.*

Kombinirajući Teorem 4.1.10 i Teorem 4.1.8 slijedi glavni rezultat ovog odjeljka.

Teorem 4.1.11. *Postoji konstanta $c > 0$ takva da za sve $l \geq c$ za koje $3 \nmid l$ vrijedi $\pi(C_l) = 2\sqrt{3} - 3$.*

Dokaz. Neka je $m \geq 2L$ cijeli broj i $3 \nmid m$, pri čemu je L konstanta iz Teorema 4.1.8. Neka je $\epsilon > 0$ i neka je H 3-graf na n vrhova koji ima barem $(2\sqrt{3} - 3 + \epsilon)\binom{n}{3}$ bridova (prisjetimo se da je $f(n) = (2\sqrt{3} - 3 + o(1))\binom{n}{3}$). Tvrdimo da H sadrži kopiju C_m.

Iz Teorema 4.1.8 i Teorema 4.1.10 slijedi da H sadrži kopiju $F(m)$ za neki pseudociklus F duljine $l \geq L$ za koju $3 \nmid l$. Dovoljno je pokazati da F sadrži pseudociklus duljine m, jer će tada C_m biti sadržano u m-napuhavanju tog podgrafa.

Vrhove od F označimo s $v_1, \dots, v_l$ tako da je $v_i v_{i+1} v_{i+2} \in E(F)$.

U slučaju $m \equiv l \pmod 3$ uzmimo niz

$$(v_1 v_2 v_3)^{\frac{m-l}{3}} v_1 v_2 \dots v_l$$

pri čemu $(v_1 v_2 v_3)^k$ označava k ponavljanja niza $v_1 v_2 v_3$. Ovo je niz duljine m, dakle F sadrži pseudociklus duljine m.

U slučaju $m \equiv 2l \pmod 3$ zaključujemo isto ako uzmemo niz $(v_1 v_2 v_3)^{\frac{m-2l}{3}} v_1 v_2 \dots v_l$.

□

4.2 Turanova gustoća ciklusa bez jednog brida

U Primjeru 2.3.6 smo uspostavili ogradu $\pi(C_5^-) \geq \frac{1}{4}$. Ovo je do danas najbolja poznata ograda i otvoren problem je pokazati $\pi(C_5^-) = \frac{1}{4}$. Štoviše, lako je vidjeti da ista konstrukcija ne sadrži C_l^- ni za koji $5 \leq l$ takav da $3 \nmid l$, stoga je razumno pretpostaviti da vrijedi $\pi(C_l^-) = \frac{1}{4}$ za sve takve l. Balogh i Luo [3] su pokazali sljedeću tvrdnju koja nas upućuje na to da ta slutnja vrijedi.

Teorem 4.2.1. *Postoji konstanta $L > 0$ takva da je $\pi(C_l^-) = \frac{1}{4}$ za sve $l > L$ za koje $3 \nmid l$.*

Ključna ideja u dokazu Teorema 4.2.1 je svesti problem na problem prebrojavanja na turnirima. Prisjetimo se, *turnir* je potpun orijentirani graf. Poveznicu između 3-grafova i turnira daje sljedeća definicija.

Definicija 4.2.2. 3-graf H je *orijentabilan* ako postoji turnir T na istom skupu vrhova takav da je svaki brid od H ciklički trokut u T.

Da bismo povezali pojam orijentabilnosti s problemom zabranjenih familija, uvodimo pojam "boce".

Definicija 4.2.3. Za $k \geq 4$, *Boca* duljine $k+2$ je pseudo-put $v_1v_2 \dots v_kv_2v_1$. Za $L \geq 6$, neka je $\mathcal{B}_{\leq L}$ familija svih boca veličine l, za $6 \leq l \leq L$, te neka je $\mathcal{B} = \bigcup_{L \geq 6} \mathcal{B}_{\leq L}$.

Propozicija 4.2.4. 3-graf H je orijentabilan ako i samo ako je $\mathcal{B}$-slobodan.

Primijetimo da je ova tvrdnja slična tvrdnji Teorema 4.1.4. Dokaz te tvrdnje slijedi sličnu ideju: direktno konstruiramo dobro bojenje/orijentiranje, te pod pretpostavkom da postupak nije uspješan nalazimo pseudociklus/bocu.

Dokaz. Pretpostavimo da u H postoji boca $v_1v_2 \dots v_kv_2v_1$ za $k \geq 4$. Ako je H orijentabilan, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da u odgovarajućem turniru imamo $v_1 \to v_2$. Po definiciji boce, zbog orijentabilnosti slijedi da je $v_{i-1} \to v_i$ za $1 < i \leq k$ te $v_k \to v_2$ i $v_2 \to v_1$, što je kontradikcija.

Pretpostavimo da je H B-slobodan. Kažemo da su dva para vrhova $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ *tijesno povezani* ako u H postoji tijesni put $u_1u_2 \dots u_{l-1}u_l$ takav da je $\{u_1, u_2\} = \{a, b\}$ i $\{u_{l-1}, u_l\} = \{c, d\}$. Napomenimo da su svaka tri vrha koji čine brid u H tijesno povezani. Definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ na $E(H)$ tako da je $abc \sim xyz$ ako su $\{a, b\}$ i $\{x, y\}$ usko povezani. Neka su $H_1, \dots H_p$ klase ekvivalencije obzirom na $\sim$. Primijetimo da je svaki par vrhova od H sadržan u točno jednom od H_i. Neka je P_i skup svih parova koji su sadržani u nekom bridu iz H_i.

Konstruiramo turnir T na $V(H)$ na sljedeći način. Za svaki $1 \leq i \leq p$ uzmemo proizvoljan par $\{a, b\}$ i orijentiramo ga $a \to b$. Za bilo koji drugi par $\{c, d\}$ imamo dva slučaja.

- Postoji pseudo-put $\mathcal{F}_1 = abw_3 \dots w_{k1}cd$ ili pseudo-put $\mathcal{F}_2 = bax_3 \dots x_{k2}dc$
- Postoji pseudo-put $\mathcal{F}_3 = aby_3 \dots y_{k3}cd$ ili pseudo-put $\mathcal{F}_4 = baz_3 \dots z_{k4}dc$

Tvrdimo da će se dogoditi točno jedan slučaj. Očito će se dogoditi barem jedan, jer su $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ tijesno povezani. Ukoliko se dogode oba slučaja, postojat će pseudo-putevi $\mathcal{F}_{s_1}$ i $\mathcal{F}_{s_2}$ takvi da je $1 \leq s_1 \leq 2$ i $3 \leq s_3 \leq 4$. Razlikujemo četiri slučaja.

- Ako je $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, imamo bocu $abw_3 \dots w_{k1}cdy_{k3} \dots y_3ba$

- Ako je $s_1 = 1$, $s_2 = 4$, imamo bocu $cdw_{k1} \dots w_3baz_3 \dots z_{k4}cd$.
- Ako je $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, imamo bocu $cdx_{k2} \dots x_3aby_3 \dots y_{k3}dc$
- Ako je $s_1 = 2$, $s_2 = 4$, imamo bocu $bax_3 \dots x_{k2}dcz_{k4} \dots z_3ab$

Dakle dogodit će se točno jedan slučaj. Ukoliko se dogodi prvi slučaj, orijentiramo $c \to d$, inače orijentiramo $d \to c$. Za brid $\{x, y, z\} \in H_i$, ako orijentiramo $x \to y$, znači da postoji pseudo-put $ab \dots xy$ ili pseudo-put $ba \dots yx$. Tada također postoji pseudo-put $ab \dots xyzx$ ili pseudo-put $ba \dots yxzy$, dakle orijentiramo $y \to z$ i $z \to x$. Sada vidimo da je svaki brid u H_i ciklički trokut.

Za parove vrhova koji nisu u nijednom P_i, orijentiramo ih proizvoljno. U ovako dobivenom turniru T svaki brid od H je ciklički trokut u T, stoga je H orijentabilan. □

Označimo sa $C^-_{\leq L}$ familiju svih pseudo-ciklusa bez jednog brida duljine l, za $4 \leq l \leq L$. Neka je $C^- := \bigcup_{L \geq 4} C^-_{\leq L}$. Lako je vidjeti da je kostrukcija iz Primjera 2.3.6 C^--slobodna.

Za turnir T, neka je $t(T)$ broj cikličkih trokuta u T. Pokažimo gornju ogradu na $t(T)$.

Lema 4.2.5. *Za svaki turnir T na n vrhova vrijedi*

$$t(T) \leq \begin{cases} \frac{1}{24}(n^3 - n) & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ \frac{1}{24}(n^3 - 4n) & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Dokaz. Koristimo standardne oznake za orijentirani graf T. Neka je v vrh u T. Definiramo $N^+(v) := \{u \in V(T) : v \to u\}$ i $N^-(v) := \{uinV(T) : u \to v\}$. Neka su $d^-(v) := |N^-(v)|$ i $d^+(v) := |N^+(v)$ redom ulazni i izlazni stupanj od v. Svaki trokut u T koji nije ciklički sadrži točno jedan vrh sa dva ulazna brida i točno jedan vrh sa dva izlazna brida. Pomoću ove činjenice prebrojimo neorijentirane trokute i da je broj orijentiranih trokuta

$$\begin{aligned} t(T) &= \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{v \in V(T)} \left(\binom{d^+(v)}{2} + \binom{d^-(v)}{2} \right) \\ &= \binom{n}{3} - \frac{1}{4} \sum_{v \in V(T)} \left((d^+(v))^2 + (d^-(v))^2 - (n-1) \right) \\ &\leq \binom{n}{3} - \frac{1}{4} n \cdot \left(\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \right)^2 + \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right)^2 - (n-1) \right). \end{aligned}$$

Odavde direktnim računom slijedi tvrdnja. □

Zaključujemo ovaj odjeljak sljedećim rezultatom, koji daje ogradu $\pi(C^-) \leq 1/4$. Za potpuni rezultat koristi se metoda stabilnosti, kojom se dobiva sličan rezultat analogan Teoremu 4.1.8. Kao i u dokazu Teorema 4.1.11, primjenom Teorema 4.1.10 odatle slijedi Teorem 4.2.1.

Propozicija 4.2.6. Ako je 3-graf H $C^-_{\leq L}$-slobodan, tada je H $\mathcal{B}_{\leq(L+2)}$-slobodan. Posebno, ako je H C^--slobodan, H je orijentabilan.

Dokaz. Pretpostavimo da H sadrži bocu $v_1v_2v_3\dots v_kv_2v_1$, za $k \leq L$. Tada H sadrži dva pseudo-ciklusa bez jednog brida veličina $k-1$ i k: $v_kv_1v_2\dots v_{k-2}v_{k-1}$ i $v_2v_3\dots v_{k-1}v_k$. Njihove duljine su najviše $k \leq L$ i barem jedna nije djeljiva s 3, stoga H nije $C^-_{\leq L}$-slobodan. Time je dokazana prva tvrdnja, dok druga tvrdnja slijedi iz Propozicije 4.2.4. □

Poglavlje 5

Metoda stabilnosti. Otvoreni problemi

5.1 Metoda stabilnosti i neke primjene

Mnogi ekstremalni problemi imaju svojstvo da postoji jedinstvena ekstremalna konstrukcija, te da svaka konstrukcija koja je blizu maksimalnog broja bridova mora po strukturi biti "bliska" ekstremalnoj. U Turánovom problemu za potpuni graf K_t, Turánov teorem daje $ex(n, K_t)$ i opisuje ekstremalnu konstrukciju potpunog balansiranog $(t-1)$-partitnog grafa. Stabilnost ekstremalnog primjera daje Erdős-Simonovitsev teorem o stabilnosti [17]. Neformalno, taj teorem kaže da se svaki K_t-slobodan graf na n vrhova sa približno $ex(n, K_t)$ bridova može dobiti iz Turánovog grafa brisanjem ili dodavanjem $o(n^2)$ bridova. Formalno, teorem kaže sljedeće.

Teorem 5.1.1. *Za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki K_t-slobodan graf G s n vrhova i barem $(1-\delta)ex(n, K_t)$ bridova postoji balansirana particija $\{V_1, \ldots, V_{t-1}\}$ vrhova od G za koju je $\sum\limits_{i=1}^{t-1} e(V_i) < \epsilon n^2$.*

Osim što je zanimljivo svojstvo ekstremalnih primjera, ovaj fenomen se pokazuje kao vrlo korisno svojstvo za dokazivanje egzaktnih rezultata. Metoda stabilnosti ima dva dijela. Prvo se dokazuje teorem stabilnosti, da je svaka konstrukcija približno maksimalne veličine strukturalno bliska naslućenom ekstremalnom primjeru. Odavde možemo pretpostaviti da se svaka potencijalno bolja konstrukcija može dobiti iz ekstremalnog primjera uvođenjem malog broja promjena u strukturi. U drugom dijelu metode analiziraju se moguće promjene da bi se pokazalo da one vode suboptimalnoj konfiguraciji, dakle naslućeni ekstremalni primjer mora biti optimalan.

Da bismo bolje razumjeli metodu, proučit ćemo primjenu metode na Turánov problem za ciklus C_5. Iako se lako može riješiti na druge načine, ovaj primjer će poslužiti kao dobra ilustracija metode bez puno tehnikalija.

Budući da je $\chi(C_5) = 3$, Teorem 1.2.2 daje $ex(n, C_5) \sim ex(n, K_3) = \lfloor n^2/4 \rfloor$. Štoviše, vrijedi $ex(n, C_5) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ za $n \geq 5$. Pokazat ćemo ovu jednakost za velike n. Pokažimo prvo teorem stabilnosti.

Lema 5.1.2. *Za svaki $\epsilon > 0$ postoje $\delta > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki C_5-slobodan graf G s $n > n_0$ vrhova i barem $(1-\delta)\frac{n^2}{4}$ bridova postoji particija $\{V_1, V_2\}$ vrhova od G takva da je $e(V_1) + e(V_2) \leq \epsilon n^2$.*

Dokaz. Neka je G graf s n vrhova i barem $(1-\delta)\frac{n^2}{4}$ bridova, za mali $\delta = \delta(\epsilon) > 0$. Označimo sa $\delta(G)$ minimalni stupanj vrhova od G. Tvrdimo da možemo pretpostaviti da je $\delta(G) \geq (1/2 - \sqrt{\delta})n$. Primjenjujemo sličan postupak kao u dokazu Teorema 1.2.2. Kada dođemo do grafa s l vrhova u kojem postoji vrh stupnja manjeg od $(1/2 - \sqrt{\delta})l$, uklonimo taj vrh iz grafa. Ovaj proces završava kada dođemo do grafa G'. Ukoliko pretpostavimo da je $v(G') = m = (1 - \sqrt{\delta})n$ slijedi

$$\begin{aligned}
e(G') &\geq e(G) - \sum_{l=m+1}^{n} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\delta}\right) l \\
&= (1-\delta)\frac{n^2}{4} - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\delta}\right)\left(\binom{n+1}{2} - \binom{(1-\sqrt{\delta})n+1}{2}\right) \\
&= (1-\delta)\frac{n^2}{4} - \sqrt{\delta}(2-\sqrt{\delta})\frac{n^2}{4} - \sqrt{\delta}\frac{n}{4} + \delta(1-\sqrt{\delta}/2)n^2 + \delta\frac{n}{2} \\
&> \frac{((1-\sqrt{\delta})n)^2}{4} + \delta(1-\sqrt{\delta})\frac{n^2}{2} - O(n) \\
&> (1+\delta)\frac{m^2}{4}.
\end{aligned}$$

Ovo je, za dovoljno velik n, kontradikcija s Teoremom 1.2.2. Zaključujemo da možemo ukloniti najviše $\sqrt{\delta}n$ vrhova tako da dobijemo graf G' takav da je $\delta(G') \geq (1/2 - \sqrt{\delta})n$. Uklonjene vrhove možemo naknadno uključiti u particiju, čime dodajemo najviše $\sqrt{\delta}n^2$ bridova, što možemo zanemariti.

Pretpostavimo stoga da je $\delta(G) \geq (\frac{1}{2} - \sqrt{\delta})n$. Odaberimo neki ciklus $abcd$ u G. Takav sigurno postoji jer G ima gustoću oko $\frac{1}{2}$, a C_4 je bipartitan, stoga ima Turánovu gustoću 0 po Teoremu 2.2.2. Primijetimo da susjedstva $N(a)$ i $N(b)$ nemaju zajedničkih vrhova osim možda c i d. Također nijedan od tih skupova ne sadrži put duljine 3, jer ako je recimo $wxyz$ put duljine 3, onda je $awxyz$ ciklus duljine 5. Stoga $N(a)$ ne može imati prosječni stupanj veći od 6, inače bi imao podgraf minimalnog stupnja barem 3, koji nužno sadrži put duljine 3. Ako uzmemo $V_1 = N(a)$ i $V_2 = V(G) \setminus V_1$, slijedi $e(V_1) + e(V_2) \leq 3|N(a)| + 3|N(b)| + (2\sqrt{\delta}n + 2)n = O(n) + 2\sqrt{\delta}n^2 < \epsilon n^2$ za dovoljno mali δ. □

Sada možemo izvesti egzaktan rezultat.

Teorem 5.1.3. *Neka je G ekstremalni C_5-slobodan graf na n vrhova, za veliki n. Tada je G potpun balansiran bipartitni graf. Posebno, $ex(n, C_5) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.*

Dokaz. Za početak tvrdimo da možemo pretpostaviti da je $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Recimo da smo rezultat pokazali pod tom pretpostavkom za sve $n \geq n_0$. Pretpostavimo da je n znatno veći od n_0 i ponovno provodimo proces micanja vrhova dok god postoji brid premalog stupnja. Proces će završiti kad dođemo do C_5-slobodnog grafa G' sa m vrhova. Ako pretpostavimo da je $m < n_0$, za velik n vrijedi

$$\begin{aligned}
e(G') &\geq e(G) - \sum_{l=n_0+1}^{n} \left(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor - 1 \right) \\
&\geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - \frac{1}{2}\left(\binom{n+1}{2} - \binom{m+1}{2} \right) + \frac{5}{4}(n - m - 1) \\
&= \frac{m^2}{4} + \frac{n-m}{4} + O(1) \\
&> \frac{m^2}{4}(1 + o(1)),
\end{aligned}$$

pri čemu zadnja nejednakost slijedi iz činjenice da je m manje od konstante n_0. Ovo je kontradikcija s Teoremom 1.2.2. Dakle, proces će završiti grafom G' s barem n_0 bridova. Međutim, ako smo obrisali bilo koji vrh, nužno je $e(G') > \left\lfloor \frac{m^2}{4} \right\rfloor$, što je kontradikcija. Dakle $G \equiv G'$, stoga možemo pretpostaviti da je $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$.

Fiksirajmo malen $\epsilon > 0$, te uzmimo particiju $\{A, B\}$ od $V(G)$ tako da je $e(A) + e(B)$ minimalan. Za dovoljno velik n, po Lemi 5.1.2 je $e(A) + e(B) < \epsilon n^2$. Također, A i B su veličina između $(1/2 \pm \sqrt{\epsilon})n$, inače bi vrijedilo $e(G) < |A||B| + \epsilon n^2 < n^2/4$, što je kontradikcija s maksimalnošću G. Uvedimo oznake $d_A(x) = |N(x) \cap A|$ i $d_B(x) = |N(x) \cap B|$ za svaki vrh $x \in V(G)$. Primijetimo da za svaki $a \in A$ vrijedi $d_A(a) \leq d_B(a)$, inače bi mogli poboljšati particiju pomicanjem a u B. Također je $d_B(b) \leq d_A(b)$ za svaki $b \in B$.

Tvrdimo da particija $\{A, B\}$ ima malo "loših" bridova, tj. da je $d_A(a) < cn$ za sve $a \in A$, pri čemu je $c = 2\sqrt{\epsilon}$. Pretpostavimo suprotno, da za neki $a \in A$ vrijedi $d_A(a) \geq cn$. Primijetimo da su tada oba skupa $N(a) \cap A$ i $N(a) \cap B$ veličine barem cn, te da skupa razapinju bipartitan graf koji ne sadrži put veličine 3, tj. ima najviše $O(n)$ bridova. To znači da između A i B nedostaje barem $(cn)^2 - O(n) > e(A) + e(B)$ bridova, pa je $e(G) < |A||B| \leq n^2/4$, što je kontradikcija.

Na kraju tvrdimo da nema "loših" bridova, odakle slijedi da je ekstremalni graf bipartitan, dok iz maksimalnosti slijedi da je potpun i balansiran. Pretpostavimo da je aa' brid u A. Tada je $|N_B(a) \cap N_B(a')| > d(a) - cn + d(a') - cn - |B| > (1/2 - 5\sqrt{\epsilon})n - 1$. Međutim, ne postoji put $ba''b'$ takav da su $b, b' \in B' = N_B(a) \cap N_B(a')$ i $a'' \in A' = A \setminus \{a, a'\}$, stoga A' i B' razapinju bipartitan graf sa samo $O(n)$ bridova. Budući da za dovoljno mali ϵ ostatak grafa sadrži malen udio svih bridova, ovo vodi do kontradikcije s brojem bridova od G. □

Fanova ravnina

Nakon što su de Caen i Füredi odredili Turánovu gustoću Fanove ravnine, Keevash i Sudakov [11] su koristeći metodu stabilnosti pokazali sljedeći rezultat.

Teorem 5.1.4. *Neka je H 3-graf na n vrhova koji ne sadrži kopiju Fanove ravnine kao podgraf, te neka je n dovoljno velik. Tada je*

$$e(H) \leq \binom{n}{3} - \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{3} - \binom{\lceil n/2 \rceil}{3},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je H 3-graf koji se dobije particioniranjem skupa od n vrhova na dva podjednaka dijela i uzimanjem svih bridova koji imaju barem jedan vrh u oba.

Ključan sastojak u dokazu ovog teorema jest sljedeći teorem stabilnosti. Neka je $F = PG(2,2)$ Fanova ravnina. Kao i prije, tvrdnja teorema je da, za dovoljno velike n, svaki 3-graf na n vrhova gustoće približno $\pi(F)$ ima približno bipartitnu strukturu.

Teorem 5.1.5. *Za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da, ako je H F-slobodan graf na n vrhova koji ima barem $(1-\delta)\frac{3}{4}\binom{n}{3}$ bridova, postoji particija $\{A, B\}$ od $V(H)$ takva da je $e(A) + e(B) \leq \epsilon n^3$.*

Prisjetimo se sada već spomenute snažnije verzije Korolara 3.3.3 za $k = 2$ koju su pokazali Mubayi i Pikhurko [13]. Glavni oslonac njihovog rezultata su rezultati stabilnosti za određene klase hipergrafova.

Uzmimo da je $F = PG(2,2)$ Fanova ravnina, te neka je F_t 3-graf na skupu vrhova $\{0, 1, \ldots, t\}$ s bridovima $0ij$, za $1 \leq i < j \leq t$. Primijetimo da F_t nije sadržan ni u jednom s-napuhavanju od K_t^3. Budući da gustoća takvog 3-grafa teži prema 1 kad $s, t \to \infty$, slijedi da $\pi(F_t) \to 1$ kad $t \to \infty$. Odaberimo sada t tako da je $\pi(F_t) > 3/4$. Tvrdimo da je $\pi(F, F_t) < \frac{3}{4}$.

Neka je H F-slobodan 3-graf s velikim brojem vrhova i gustoćom $3/4 - o(1)$. Tada je po Teoremu 5.1.5 H približno bipartitan. Međutim, za ukloniti sve kopije od F_t iz bipartitnog grafa na n vrhova potrebno je ukloniti barem cn^3 bridova, za neku konstantu $c > 0$. Stoga H nužno sadrži kopiju F_t, odakle slijedi $\pi(F, F_t) < \frac{3}{4}$.

5.2 Otvoreni problemi i slutnje

Ukratko ćemo navesti neke od zanimljivih otvorenih problema Turánovog tipa za hipergrafove. Vrlo detaljan popis ovakvih slutnji može se naći u preglednom članku [14]. Većina otvorenih pitanja dolazi sa naslućenom optimalnom donjom ogradom, koja proizlazi iz neke konstrukcije. Najbolje poznate gornje ograde uglavnom su dane metodom flag algebri. Opis ove metode može se naći na primjer u [1].

Slutnja 5.2.1. $\pi(K_4^3) = \frac{5}{9} \approx 0.556$

Kao što smo već spomenuli, ovu slutnju dao je Turán. Opis konstrukcije koja daje donju ogradu dostupan je na početku odjeljka 2.3. Najbolja poznata gornja ograda je otprilike $\pi(K_4^3) \leq 0.562$. Ova ograda nije formalno dokazana, ali smatra se da se može pokazati ukoliko se pokaže potreba.

Slutnja 5.2.2. $\pi(K_m^3) = 1 - \left(\dfrac{2}{m-1}\right)^2$

Ovo je još jedna od Turánovih slutnji. Konstrukciju koja daje donju ogradu može se naći u [16].

Slutnja 5.2.3. $\pi(K_4^-) = \frac{2}{7} \approx 0.2857$

Donju ogradu pokazali smo u Primjeru 2.3.2. U trenutku pisanja, najbolja poznata gornja ograda je $\pi(K_4^-) \leq 0.2871$.

Slutnja 5.2.4. $\pi(C_5) = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0.4641$

Donju ogradu pokazali smo u Primjeru 2.3.4. U trenutku pisanja, najbolja poznata gornja ograda je $\pi(C_5) \leq 0.4683$. Obzirom na Teorem 4.1.11 i na vrlo blisku gornju ogradu, ova slutnja je vrlo uvjerljiva.

Slutnja 5.2.5. $\pi(C_5^-) = \dfrac{1}{4}$

Donju ogradu pokazali smo u Primjeru 2.3.6. Obzirom na Teorem 4.2.1, ova slutnja je vrlo uvjerljiva.

Bibliografija

[1] Rahil Baber i John Talbot, *Hypergraphs do jump*, Combinatorics, Probability and Computing **20** (2011), br. 2, 161–171.

[2] József Balogh, *The Turán density of triple systems is not principal*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **100** (2002), br. 1, 176–180.

[3] József Balogh i Haoran Luo, *Turán density of long tight cycle minus one hyperedge*, arXiv preprint arXiv:2303.10530 (2023).

[4] Paul Erdős i Miklós Simonovits, *Supersaturated graphs and hypergraphs*, Combinatorica **3** (1983), 181–192.

[5] Peter Frankl i Zoltán Füredi, *An exact result for 3-graphs*, Discrete mathematics **50** (1984), 323–328.

[6] Andrew Frohmader, *More Constructions for Turán's (3, 4)-Conjecture*, The Electronic Journal of Combinatorics **15** (2008), br. 1, R137.

[7] Zoltán Füredi i André Kündgen, *Turán problems for integer-weighted graphs*, Journal of Graph Theory **40** (2002), br. 4, 195–225.

[8] Zoltán Füredi i Miklós Simonovits, *The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems*, Erdős centennial, Springer, 2013, str. 169–264.

[9] Nina Kamčev, Shoham Letzter i Alexey Pokrovskiy, *The Turán Density of Tight Cycles in Three-Uniform Hypergraphs*, International Mathematics Research Notices (2023), rnad177.

[10] Peter Keevash, *Hypergraph turan problems*, Surveys in combinatorics **392** (2011), 83–140.

[11] Peter Keevash i Benny Sudakov, *The Turán number of the Fano plane*, Combinatorica **25** (2005), br. 5, 561–574.

[12] P Kővári, Vera T Sós i Pál Turán, *On a problem of Zarankiewicz*, Colloquium Mathematicum, sv. 3, Polska Akademia Nauk, 1954, str. 50–57.

[13] Dhruv Mubayi i Oleg Pikhurko, *Constructions of non-principal families in extremal hypergraph theory*, Discrete mathematics **308** (2008), br. 19, 4430–4434.

[14] Dhruv Mubayi, Oleg Pikhurko i Benny Sudakov, *Hypergraph Turán problem: some open questions*, 2011.

[15] Dhruv Mubayi i Vojtěch Rödl, *On the Turán number of triple systems*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **100** (2002), br. 1, 136–152.

[16] Alexander Sidorenko, *What we know and what we do not know about Turán numbers*, Graphs and Combinatorics **11** (1995), br. 2, 179–199.

[17] Miklós Simonovits, *A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems*, Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966), 1968, str. 279–319.

Sažetak

U ovom radu bavili smo se problemima Turánovog tipa za hipergrafove. Prvo smo dokazali klasične rezultate ovog tipa za grafove, Turánov i Erdős-Stone teorem. Zatim smo uveli osnovne pojmove vezano uz hipergrafove. Definirali smo Turánovu gustoću uniformnog hipergrafa i pokazali osnovne rezultate o Turánovoj gustoći degeneriranih hipergrafova, prezasićenosti i napuhavanju. Uveli smo koncept iteriranog napuhavanja i demonstrirali neke konstrukcije koje daju važne donje ograde za Turánovu gustoću.

Nakon toga demonstrirali smo neke od metoda za određivanje Turánove gustoće hipergrafova. Uveli smo pojam linka i pomoću njega odredili Turánovu gustoću Fanove ravnine. Također smo pokazali da Turánova gustoća familije hipergrafova može biti manja od Turánove gustoće svakog člana familije i dokazali jednostavnu gornju ogradu na gustoću tijesnog ciklusa duljine 5. Ukratko smo prezentirali glavne ideje dvaju novih rezultata u području koji koriste metodu bojenja sjene hipergrafa i metodu stabilnosti. Zatim smo demonstrirali metodu stabilnosti na primjeru ciklusa i pokazali neke od njenih primjena. Za kraj iznijeli smo nekoliko otvorenih problema Turánovog tipa koji su vezani uz rezultate prezentirane u ovom radu.

Summary

In this thesis we considered problems of Turán type for hypergraphs. First we showed the classic results of this type for graphs, Turán's and Erdős-Stone theorem. Afterwards we introduced the basic notions related to hypergraphs. We defined the Turán density of a uniform hypergraph and showed the basic results on Turán density of degenerate hypergraphs, supersaturation and blowing-up. We introduced the concept of iterated blow-ups and demonstrated some constructions giving important lower bounds on Turán density.

Next, we demonstrated some of the methods for determining the Turán density of hypergraphs. We introduced links, and used the link method to determine the Turán density of the Fano plane. We also showed that the Turán density of a family of hypergraphs can be less than the Turán density of each member of the family and proved a simple upper bound on the density of the tight cycle of length 5. We briefly presented the proofs of two new results in this area which use the method of coloring the shadow of a hypergraph and the stability method. We then demonstrated the stability method on the example of a cycle and showed some of its applications. In the end, we presented several open problems of Turán type that are connected to the results presented in this thesis.

Životopis

Rođen sam 23. prosinca 1999. godine u Zagrebu. Pohađao sam Osnovnu školu Garešnica od 2006./2007. do 2013./2014. Nakon završene osnovne škole nastavio sam školovanje u XV. gimnaziji Zagreb od 2014./2015. do 2017./2018. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovao sam na brojnim domaćim i međunarodnim natjecanjima iz matematike. Najveće uspjehe postigao sam osvojivši prvo mjesto na timskom natjecanju na Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi 2016. i zlatnu medalju na individualnom natjecanju 2017. te srebrnu medalju na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi 2018.

Akademske godine 2018./2019. upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2021./2022. Diplomski sveučilišni studij Teorijska matematika. Tijekom studija sudjelovao sam u pripravi učenika osnovnih i srednjih škola za natjecanja, primarno u XV. gimnaziji, te u sklopu udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić". Također sam se tijekom studija natavio natjecati na studentskim natjecanjima. Na međunarodnim matematičkim natjecanjima IMC 2021. i IMC 2022. osvojio sam prvu nagradu. Za taj uspjeh primio sam nagradu Matematičkog odsjeka PMF-a za iznimne rezultate u izvannastavnim aktivnostima 2023. Također sam primio nagradu za najbolje studente završnih godina diplomskog studija 2023.